

MATEMATIKA

O paradoxech spojených s losováním koulí

PAVEL TLUSTÝ – IRENEUSZ KRECH

Ekonomická fakulta JU, České Budějovice – Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków

Matematika popisuje a zkoumá různé situace reálného světa. Je přirozené, že někdy řešíme případ, který se bez hlubšího rozboru jeví jako paradoxní. Speciálně teorie pravděpodobnosti je na paradoxy velmi bohatá. To svědčí o tom, že naše stochastické intuice nejsou vždy utvářené správně. Jedním takovým paradoxem se zabývá i tento článek.

Začneme jednoduchým příkladem.

Příklad 1

V pytlíku je b bílých a c černých koulí. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vylosovaná koule bude černá? Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vylosovaná koule ve druhém tahu bude černá, pokud první vylosovanou kouli vrátíme zpět do pytlíku?

Snadno si rozmyslíme, že obě otázky řeší stejnou situaci, a tedy je zřejmé, že v obou případech je hledaná pravděpodobnost rovna $c/(c + b)$.

Nyní situaci změním.

Příklad 2

V pytlíku je b bílých a c černých koulí. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vylosovaná koule ve druhém tahu bude černá, pokud první vylosovanou kouli nevrátíme zpět do pytlíku?

V tomto případě vidíme, že stav koulí v pytlíku před druhým losováním závisí na výsledku prvního tahu. Jiná situace nastane, pokud v prvním tahu vylosojeme bílou kouli, a jiná, pokud je v prvním tahu tažena koule

černá. Obvykle se takových případech zavádí pojem „podmíněná pravděpodobnost“ a k řešení příkladu 2 se užije věty o celkové pravděpodobnosti (viz [1, str. 193]). Tímto postupem dostaneme následující řešení:

První řešení. Označme

- $P(C_n)$... pravděpodobnost vylosování černé koule v n -tém tahu ($n \in \mathbb{N}$),
- $P(B_1)$... pravděpodobnost vylosování bílé koule v 1. tahu,
- $P(C_2|B_1)$... pravděpodobnost vylosování černé koule v 2. tahu, bude-li v prvním tahu vylosována bílá koule,
- $P(C_2|C_1)$... pravděpodobnost vylosování černé koule v 2. tahu, bude-li v prvním tahu byla vylosována černá koule.

Pak dle věty o celkové pravděpodobnosti dostaneme rovnost

$$P(C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2|C_1) + P(B_1) \cdot P(C_2|B_1).$$

Víme, že

$$P(C_1) = \frac{c}{c+b}, \quad P(B_1) = \frac{b}{c+b}.$$

Podobně vypočítáme, že

$$P(C_2|C_1) = \frac{c-1}{c-1+b}, \quad P(C_2|B_1) = \frac{c}{c+b-1}.$$

Po dosazení dostaneme

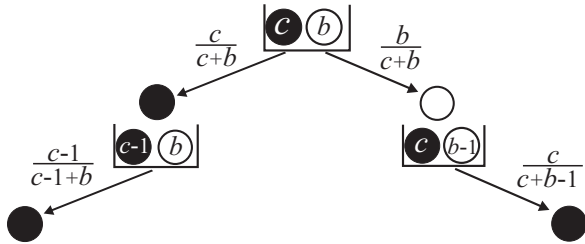
$$P(C_2) = \frac{c}{c+b} \cdot \frac{c-1}{c-1+b} + \frac{b}{c+b} \cdot \frac{c}{c+b-1} = \frac{c}{c+b}.$$

Uvedený výsledek ukazuje, že pravděpodobnost vylosování černé koule ve druhém tahu nezáleží na tom, zdali kouli vylosovanou v prvním tahu vrátíme do pytlíku či nikoli, a je též rovna pravděpodobnosti vylosování černé koule v prvním tahu. Tato skutečnost se zdá paradoxní.

Užití podmíněné pravděpodobnosti znamená, že takové úlohy bychom mohli řešit až se studenty vyšších ročníků střední školy. Další nevýhodou takového „formalizovaného“ řešení je jeho malá názornost.

Zvolíme-li jiný přístup s užitím tzv. stochastického stromu (podrobně je tato technika popsána např. v [1]), můžeme se pojmu podmíněné pravděpodobnosti vyhnout, jak ukazuje následující řešení:

Druhé řešení. Náhodný pokus se skládá ze dvou tahů (etap). Na obr. 1 je stochastický strom takového pokusu, čísla přiřazená jednotlivým větvím stromu představují odpovídající pravděpodobnosti.



Obr. 1

Při použití stochastického stromu vidíme, že vylosovat černou kouli ve druhém tahu můžeme dvěma různými způsoby (strom má dvě větve). Podle kombinatorického pravidla součtu (viz např. [2]) je výsledná pravděpodobnost rovna součtu pravděpodobností jednotlivých větví. Podle kombinatorického pravidla součinu (viz např. [2]) je pravděpodobnost každé z větví dána součinem pravděpodobností jednotlivých losování. Odtud plyne, že

$$P(C_2) = \frac{c}{c+b} \cdot \frac{c-1}{c-1+b} + \frac{b}{c+b} \cdot \frac{c}{c+b-1} = \frac{c}{c+b}.$$

Základní kombinatorické principy využívá i následující řešení.

Třetí řešení. Vzhledem k tomu, že všechny možné výsledky vylosování dvou koulí z pytlíku jsou stejně pravděpodobné, je stochastickým modelem takového pokusu klasický pravděpodobnostní prostor. V klasickém pravděpodobnostním prostoru se pravděpodobnost jevu vypočte jako podíl počtu výsledků příznivých danému jevu a počtu všech možných výsledků.

- Počet všech možných výsledků losování:

Před prvním tahem je v pytlíku $(c + b)$ koulí, a tedy můžeme získat $(c + b)$ různých výsledků losování. Před druhým tahem je v pytlíku $(c + b - 1)$ koulí, a tedy můžeme získat $(c + b - 1)$ různých výsledků losování. Podle kombinatorického pravidla součinu je tedy celkem $(c + b) \cdot (c + b - 1)$ různých výsledků tažení dvou koulí.

- Počet losování, v nichž je ve druhém tahu vylosována černá koule:

V pytlíku je c černých koulí, a tedy ve druhém tahu lze vylosovat černou kouli c různými způsoby. V první tahu losujeme libovolnou

kouli ze zbývajících, což lze udělat $(c+b-1)$ různými způsoby. Podle kombinatorického pravidla součinu je celkem $c \cdot (c+b-1)$ různých výsledků.

Odtud plyne, že

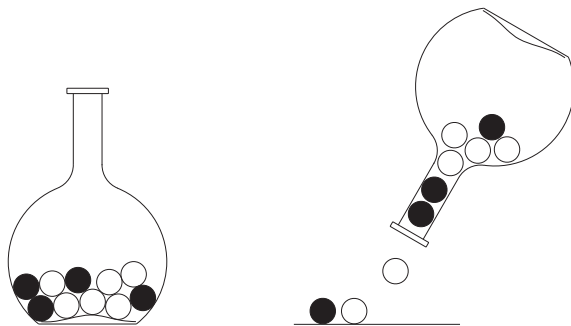
$$P(C_2) = \frac{c \cdot (c+b-1)}{(c+b) \cdot (c+b-1)} = \frac{c}{c+b}.$$

Tento postup je univerzální, tj. lze ho použít i v situaci, kdy nás zajímá, jaká je pravděpodobnost, že koule vylosovaná v n -tém tahu bude černá $n = 1, 2, \dots, c+b$. Pak dostáváme

$$P(C_n) = \frac{c \cdot (c+b-1) \cdot \dots \cdot (c+b-(n-1))}{(c+b) \cdot (c+b-1) \cdot \dots \cdot (c+b-(n-1))} = \frac{c}{c+b}.$$

Vidíme tedy překvapující skutečnost, že při losování koulí (po jedné) je pravděpodobnost vylosování černé koule ve všech tazích stejná!

Čtvrté řešení. Do láhve dáme b bílých a c černých koulí. Zamícháme je a obrátíme láhev dnem vzhůru. Koule začnou vypadávat z láhve (obr. 2). Zajímá nás pořadí, v jakém koule vypadnou.



Obr. 2

Ze symetrie je zřejmé, že každá z koulí může se stejnou pravděpodobností vypadnout na libovolném z $c+b$ míst, proto

$$P(C_n) = \frac{c}{c+b} \quad \text{pro } n \in \{1, 2, \dots, c+b\}.$$

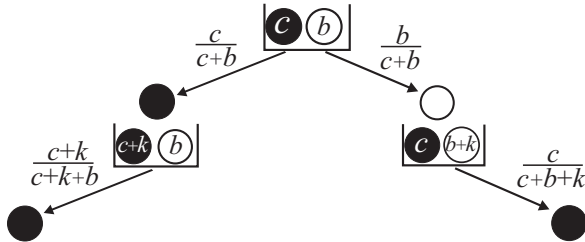
Situaci lze ještě zobecnit.

Příklad 3

V pytlíku je b bílých a c černých koulí. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vylosovaná koule ve druhém tahu bude černá, pokud kouli vylosovanou v prvním tahu vrátíme zpět do pytlíku a

- a) přidáme k koulí téže barvy,
- b) uберeme k koulí téže barvy, kde $k \leq \min(c, b)$?

Řešení. Označme k celé číslo splňující zadání příkladu a užíjeme stejný postup jako ve 2. řešení příkladu 2. Odpovídající stochastický strom je na obr. 3.



Obr. 3

Z obr. 3 plyne, že

$$P(C_2) = \frac{c}{c+b} \cdot \frac{c+k}{c+k+b} + \frac{b}{c+b} \cdot \frac{c}{c+b+k} = \frac{c}{c+b}.$$

Uvedené tři příklady poukazují na paradoxní situaci. Pravděpodobnost vylosování koule

- nezávisí na způsobu losování, tj. zda vylosované koule vracíme do pytlíku či nikoli,
- je stejná pro všechny tahy, tj.

$$P(C_1) = P(C_2) = \dots = P(C_{c+b}),$$

- nezávisí na přidání nebo ubrání koulí (podle pevně stanovených pravidel).

Literatura

- [1] Płocki, A. – Tlustý, P.: Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé. Prometheus, Praha, 2007.
- [2] Płocki, A. – Tlustý, P.: Kombinatoryka wokół nas, Novum, Płock, 2010.

Porozumění matematice

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Motto: *Polopřímka je přímka,
která začíná bodem a na druhé
straně jde do nekonečna.*

Při matematickém vzdělávání žáků nám jde především o to, aby se matematika stala významnou součástí jejich základního, resp. všeobecného vzdělání a v odborných školách i potřebnou součástí jejich odborného vzdělání. Podle úrovně tohoto vzdělání tak člověk získá (měl by získat) základní matematickou výzbroj, schopnosti analyzovat a řešit problémy, pozná principy řešení typových matematických úloh a různé užitečné algoritmy. Matematika ho učí logicky uvažovat, získat představu o tom, co je to důkaz, přesně formulovat svá tvrzení, dívat na problémy z více hledisek a při jejich řešení nebo postupném řešení si je vhodně modelovat. Žáci se při výuce seznamují s různými modely (početními, analytickými i grafickými), učí se s nimi pracovat a získávají první zkušenosti, jak své znalosti uplatnit v praxi. To všechno jsou cílené vklady pro život a jednání člověka 21. století dosti potřebné. Základním předpokladem úspěchu však je, aby žák matematice porozuměl, aby si „ve své mysli“ postupně vytvářel správnou, i když třeba neúplnou „svou“ matematiku.

Nejednou jsem se setkal s názorem, že pro „slušné známky z matematiky“ je třeba mít pro matematiku zvláštní nadání. Má odpověď je ano, chcete-li, aby se vaše dítě stalo profesionálním matematikem, je k tomu třeba i něco zvláštního nadání, stejně jako v jiných oborech. Na druhé straně jsem však byl svědkem neúspěchu některých studentů matematiky, kteří se spoléhali na své nadání a hrubě podcenili druhou složku – své pracovní úsilí.

Hloubka porozumění jistě závisí i na nadání pro matematiku, ale platí, že žák může přiměřeně porozumět matematice nebo jejím dílčím úsekům, i když jeho nadání je „běžné“ a dokonce, i když je nižší. Musí však na to *vynakládat potřebné úsilí* a podstatnou roli tu má učitel, jemuž záleží na tom, aby jeho žáci učivu porozuměli, ne se ho jen učili, a který ví, jak na to, tedy dobrý učitel. Že si žáci musí svou matematiku budovat postupně, od základů, že další poznatky si musí ke stávajícím, kterým už rozumějí, připojovat přiměřeným tempem a užitím vhodných aktivních metod, že si

žáci musí uvědomovat vzájemné vazby a užitím vhodných příkladů a úloh získávat své vlastní zkušenosti a početní i grafickou praxi.

Jsou však žáci, u kterých ani dobrý učitel naplno neuspěje. Někteří jsou myšlenkově leniví, jiní jsou příliš jednostranně zaměřeni „svým“ směrem k budoucímu svému povolání, kde, jak si říkají, matematiku potřebovat nebudou. Pro obojí je společné to, že prostě *nechtějí vynakládat jakékoli úsilí* na porozumění „látce“ a akceptují matematiku jen jako soubor pravidel, operací a návodů, kdy se má které pravidlo nebo operace použít. Význam takového učení se redukuje v podstatě jen na cvičení mechanické paměti; takové vědomosti se však z paměti brzy vytrácejí a navíc takový žák přichází o potěšení ze samostatného zvládnutí matematické úlohy a o určité sebevědomí, jež jsou součástí porozumění matematice. Mají-li takoví žáci dostatečně rozvinutou mechanickou paměť, mohou příslušnou školou projít, ale je smutnou pravdou, že „pro život“ toho takoví žáci získají málo a až vyrostou, tak si s chutí na výuku matematiky a na své učitele postěžují (třeba v televizi).

Není pochyb o tom, že cílem snahy nebo dokonce snem každého dobrého učitele matematiky je, aby jeho žáci „uměli matematiku“, tj. aby jí rozuměli a měli požadované znalosti. Mezi žáky jsou však také jedinci, kteří sice projevují snahu, ale jejichž myšlení se s matematikou stále nějak nechce skamarádit. A tu musí učitel volit zvláště citlivý individuální přístup spojený s povzbuzováním a pochvalou za každý drobný úspěch.

Je přirozené, že žáci poznávají nové matematické pojmy a jejich zápisy v souladu s tím, jak jsou uvedeny v jejich učebnicích a jak je používá jejich učitel. Přes snahu autorů učebnic i učitele se však stává, že žák některý pojem nestráví, není mu jasný, neporozuměl mu, třeba i proto, že se tu navazuje na jiný pojem, v němž také jasno nemá. Málokdy takový žák požádá učitele o vysvětlení – buď se stydí zeptat, protože má dojem, že ostatním je to jasné, nebo se naopak spokojí s pocitem, že ostatní jsou na tom také tak. Tato nepochopená místa, nejsou-li podchycena a na přiměřené úrovni vysvětlena, mohou v myslích žáků postupně vytvářet jakási prázdná (neustále rostoucí) okna, narušují vztah těchto žáků k matematice a je nebezpečí, že se (v lepším případě) začnou učit matematiku mechanicky a mají pak v hlavě sklad různých (třeba i dobrých) útržků matematiky bez logických souvislostí. Takové infekce nedostatečného porozumění pojmům, operacím či algoritmům mohou vznikat již u žáků na základních školách, ale i dále na středních školách. V horším případě, když takových zdrojů nejistoty a nepochopení přibývá, žák rezignuje („na to já nemám hlavu“)

a jeho pohled na matematiku se postupně mění jako na něco tajemného a nesrozumitelného a někdy i protivného. Je na didaktické dovednosti a lidskému přístupu učitele, aby u žáků postihl i drobná neporozumění, aby jim pomohl porozumět a nenechal věci dojít až k výše popsaným koncům.

Často veřejně omílané tvrzení, že žáci nemají rádi matematiku, nepovažují za univerzálně pravdivé. Je v moci učitele matematiky, aby (zejména na ZŠ a gymnáziích) navodil takové pracovní prostředí, že spektrum vztahů k matematice nebude obsahovat odpor k matematice. Vztah žáka k matematice se zlepšuje s každým jeho drobným úspěchem (třeba i úspěchem, že něco pochopil, a byl za to pochválen, nemusí to být zrovna získaná „jednička“) a individuálním přístupem se v tomto dá mnohého dosáhnout.

Tedy porozumění, ale jak na to? Samozřejmě jsou jistá obecná pravidla (studenti učitelství se s nimi seznamují v didaktice matematiky), ale každá školní třída je množina individualit. Základní pravidlo je samozřejmě: Nejdůležitější je správný začátek, po němž následuje správné pokračování.

K tomu uvedu drobnou, ale poučnou příhodu, kterou mi kdysi vyprávěla maminka. Ta příhoda ukazuje, jaká učitelem nepředvídaná drobnost může u žáka narušit jeho porozumění. V jejich vesnické škole se tehdy v 1. třídě (před více než 100 lety) začali učit počítání na prstech a ukazovali jeden prst – jedna, druhý prst – dvě, třetí prst – tři, atd., ale té dívence tehdy vrtalo hlavou, proč u druhého prstu říkáme dvě, když je to zase jen jeden prst, a podobně další prst je přece zase jen jeden, ale styděla se zeptat. Toto trápení sice pak nakonec překonala, ale trvalo nějakou dobu a bylo tak intenzivní, že si na ně pamatovala do svých 85 let. Vidíme, že přitom v původní situaci stačilo jen málo, aby učitel žákům vysvětlil, jak to počítání na prstech funguje, a tato žačka by problém, který ji tak dlouho trápil, jistě hned pochopila a navíc s radostí, že tomu rozumí.

Zvolme nyní několik praktických ukázek při malé procházce po základních planimetrických pojmech. Budeme si všimnout zejména takových kritických míst, kdy se v žácích porozumění matematice vytváří nebo naopak narušuje. Může se zdát, že jde o maličkosti, ale právě „maličkosti“ mohou velmi narušit porozumění.

Ještě však poznámka o motivu pro napsání tohoto článku. Kdysi jsem debatoval se skupinou studentů 5. ročníku učitelského studia matematiky na témata elementární geometrie. Studenti v té době již měli rozsáhlé matematické znalosti mnoha matematických disciplín, jejichž studiu věnovali mnoho hodin svého studijního času. Ukázalo se však, že když v minulosti narazili při studiu na didaktickou stránku samotných základů geometrie,

tak si říkali „to je přece lehké“, takže se nad tím „lehkým“ učivem ani nějak nezamýšleli. Tak se při té besedě ukázalo, že znalosti základů byly u některých z nich překvapivě povrchní. Například jsem se jich zeptal, co by odpověděli, kdyby jim jejich žáci položili otázky formulované třeba takto: „Co je to polopřímka?“ „Co je to polorovina?“ „Co je to úhel?“. Tyto otázky vyvolaly širokou diskusi s neuspokojivým průběhem, ale nakonec s vcelku uspokojivým závěrem, ke kterému se studenti však jen postupně dopracovali. Ale bylo vidět, že v jejich profesionální výzbroji dosud chybí schopnost pohotově a srozumitelně na dotazy žáků reagovat. Tuto dovednost nezíská učitel automaticky, ale právě promyšlením samotných základů a porozuměním, co se děje v myslích žáků.

Porozumění není totéž jako schopnost se správně a srozumitelně vyjádřit. Určitě se už každý učitel setkal s výrokem „On tomu rozumí, ale nedovede to říct.“ Vyjadřování v planimetrii skutečně není pro žáky zcela snadné, zejména zpočátku, má-li být jednoduché a správné. Ale pozor, správné vyjadřování je sice důležité, ale na žebříčku zvládnutí pojmu je nevidím na vrcholu. To, že se žák dovede vyjádřit, musí být až důsledek skutečnosti, že pojmu porozuměl.

Připomeňme průběh zvládnutí nového pojmu; lze jej popsat těmito navzájem provázanými kroky:

- (a) intuitivní zvládnutí pojmu,
- (b) důsledné pochopení pojmu, správná představa souvislostí s jinými pojmy,
- (c) znalost označení a zápisů,
- (d) formální slovní formulace (definice) pojmu,
- (e) dovednost používat tento pojem při řešení úloh.

Přítom zpravidla nejde o proces jednorázový, ale cyklický, v němž se daný pojem postupně upřesňuje, prohlubuje a upevňuje v mysli žáka.

1. Přímka a polopřímka

Zopakujme si některé pojmy a vyjádření. Ježto pojem *přímka* patří k základním matematickým pojmům, které nedefinujeme, odpadá (d). Správná představa (b) musí zahrnout tu samozřejmost, že přímka nemá nějaké konce, že její model v sešitě či na tabuli můžeme libovolně prodlužovat. Na displeji to bývá řešeno tak, že obraz přímky jde „od rámu obrázku

po rám“. Je třeba se věnovat bodu (c), k němuž [1] říká: „Přímky se obvykle značí malými písmeny latinské abecedy p, q, r, \dots ; ... přímka určená body A, B se značí *přímka* AB nebo zkráceně AB , v zápisu konstrukce též $\leftrightarrow AB$ “. Stojí za to se zmínit o tom, že tutéž přímku lze označit též BA , i když v matematice dáváme obvykle přednost zápisu bodů podle abecedy. Tato rozmanitost označení přímek je sice účelná, ale žáci s ní mohou mít problémy. Proto je vhodné volit různé úlohy, kde se zcela přirozeně uplatní jednotlivé způsoby označení. Bez problémů žáci přijmou, že na každé přímce lze volit libovolný počet bodů, a že dvěma navzájem různými body prochází jediná přímka.

Školní definice polopřímky (b) vysvětluje, jak polopřímku získáme; např. ve [2] se říká: „Bod rozděluje přímku na dvě navzájem opačné polopřímky a je jejich společným počátkem.“ Označení: *polopřímka* PX (kde P je počátek polopřímky a X je její vnitřní bod), zkráceně PX , v zápisu konstrukce též $\mapsto PX$ (viz [1]). Žákům však rozumný učitel neklade otázku „Co je to polopřímka?“; protože na ni nelze rozumně odpovědět, zde nám stačí, když žáci vědí, jak polopřímka vznikne. Jeden kandidát učitelství kdysi při svém výstupu na školní praxi žákům tuto otázku položil a dostal od vyvolaného žáka odpověď, která je mottem tohoto článku. Můžeme se nad ní usmát, ale tento žák i při nevhodně položené otázce svou nevhodnou odpovědí prokázal, že pojem polopřímka intuitivně zná, že mu rozumí. Učitel matematiky by měl správné vyjadřování žáků podporovat tím, že klade jen takové otázky, na něž odpověď není příliš složitá, a hlavně, lapidárně řečeno, na něž sám zná jednoduchou odpověď, tedy ví, jakou odpověď může očekávat

2. Úsečka

Mladší žáci si zpočátku pletou a zaměňují pojmy *přímka* – *úsečka*, nejspíše možná z toho důvodu, že když narýsujeme přímku, tak je to vlastně obrázek úsečky. Proto nezapomínáme řádně vyznačovat krajní body úsečky a trváme na odlišení těchto pojmů. Žáci by se tak hned na počátku měli setkat s pojmy *krajní bod úsečky* a *vnitřní bod úsečky* (resp. i *vnitřek úsečky*). Označení úsečky je jednoduché – *úsečka* AB , avšak stojí za to se zmínit o tom, že tutéž úsečku lze označit i BA (možný zdroj neporozumění), i když, jak bylo už řečeno, v matematice dáváme zpravidla přednost zápisu krajních bodů podle abecedy. (Upozorníme, že taková záměna písmen A, B samozřejmě není možná u označení polopřímky.) Formální definici úsečky doplníme (se žáky objevíme) až po znalosti množinových operací – průniku. Později pak přibude *střed úsečky* a *osa úsečky*.

Pro upevnění správné představy těchto tří pojmů (přímka, polopřímka, úsečka) lze doporučit, aby učitel zadával jednoduché úlohy na jejich zobrazení v geogebře, protože ta umí tyto tři pojmy odlišit zcela zřetelně a názorně, a žákům se tak vtiskne do paměti správná představa a odlišení těchto pojmů.

Délka (nebo též *velikost*) *úsečky* je číselný údaj, ke kterému zpravidla přidáváme označení délkové jednotky, v níž je délka vyjádřena, např. „úsečka AB má délku 3 cm“. Při řešení praktických úloh matematickým modelováním, v jejichž zadání jsou uvedeny např. cm, se stejné jednotky použijí zpravidla i ve výsledku (v „odpovědi“), ale v matematickém modelu nemají své místo, cm není matematický pojem.

Úloha 1 [2]

Vypočítejte poloměr kružnice, jejíž délka je o 7 cm větší než obvod pravidelného šestiúhelníku, který je této kružnici vepsán ($\pi \doteq 22/7$).

Komentované řešení. Zadané délkové jednotky jsou cm, takže výsledek bude vyjádřen v cm. Teď však centimetry opustíme a budeme počítat v jednotkách bez označení.

Poloměr kružnice označme r , tj. jeho velikost je r , v matematickém modelu nikoli cm, ale *abstraktních* délkových jednotek, které však během řešení neříkáme ani nezapisujeme. Délka kružnice je $2\pi r$, obvod pravidelného šestiúhelníku, který je této kružnici vepsán je $6r$. Platí tedy

$$2\pi r = 6r + 7,$$

odkud

$$r = \frac{7}{2\pi - 6} \doteq 24,7$$

(„abstraktních“ délkových jednotek).

Přejdeme k odpovědi: Poloměr kružnice je 24,7 cm.

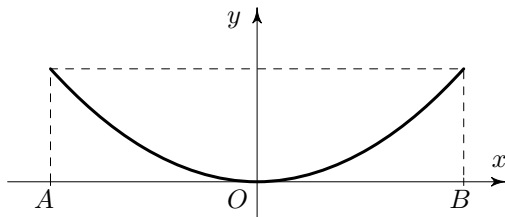
Takový postup je běžný např. i při řešení úloh, kde matematickým modelem je podmnožina analytická geometrie (viz [3]).

Úloha 2

Parabolické zrcadlo má průměr 0,72 m a hloubku 20 cm. Určete vzdálenost ohniska od vrcholu zrcadla. Ve vhodném měřítku sestrojte nákres.

Postup modelování. Zrcadlo má tvar rotačního paraboloidu. Jeho osou vedeme souřadnicovou rovinu, která tento paraboloid protíná v parabole,

jež má vrchol ve vrcholu zrcadla. Osu paraboloidu volíme (např.) za osu y , počátek soustavy souřadnic volíme ve vrcholu paraboly (obr. 1). Zadané údaje převedeme na tutéž jednotku délky, např. na cm (tedy průměr zrcadla je 72 cm), a řešíme modelovou matematickou úlohu.



Obr. 1

Řešení. Užítím vrcholové rovnice paraboly

$$x^2 = 2py$$

najdeme parametr p a tím získáme požadovaný údaj o ohnisku.

Parabola má vrchol v počátku a prochází bodem $[36; 20]$. Dosadíme do předchozí rovnice

$$1296 = 2p \cdot 20 \Rightarrow p = \frac{1296}{40} = 32,4; \quad \frac{p}{2} = 16,2.$$

Vzdálenost ohniska od vrcholu zrcadla je 16,2 cm.

V [1, 12.3] najdeme toto upozornění: „Pokud nemůže dojít k nedorozumění, připouští se označení malými písmeny latinské abecedy (nejen pro přímku, ale i) pro úsečku i její délku.“ To jinými slovy říká např. i učebnice [2]. Takže řekneme-li „Trojúhelník o stranách a, b, c “, myslíme tím nejen to, že délky stran jsou a, b, c , ale také to, že jsou tak pojmenovány přímo tyto strany jakožto úsečky – jako bychom říkali (ale tak to neříkáme) „strana a má délku a “. Při vhodné příležitosti je dobré žákům připomenout, že tato „dvoznačnost“ označení pojmů a, b, c, \dots není vadou matematického vyjadřování, ale předností, která nám umožňuje vyjadřovat se jednodušeji. Na vhodných příkladech si žáci mají uvědomit, že osa strany trojúhelníku (osa úsečky) je přímka, osa úhlu polopřímka, výška a také těžnice trojúhelníku může být jak přímka, tak úsečka, tak velikost této úsečky [2].

Důležité je pochopit pojem shodnosti. Ve [2] se říká „Dva geometrické útvary budeme pokládat za shodné, když je lze přemístěním ztotožnit.“

Toto vyjádření vyhlíží značně jednoduše, ale na pochopení tak docela jednoduché není. Jakým přemístěním? Přece shodným! A co je to shodné přemístění? A už by byla definice v kruhu. Takže předchozí charakteristiku nelze považovat za definici, ale jen za názorné vysvětlení. Myslím, že by byla docela vhodná existence SW prostředku, kde by byla sada obrazců a uživatel by je mohl „shodně“ přemísťovat, pátrat po jejich shodnosti a přímo takto si upevňovat představu shodnosti.

Pojednávat o shodnosti přímek nebo polopřímek nemá samozřejmě smysl, i když žákům jistě neuškodí, když si uvědomí, že všechny přímký jsou navzájem shodné, i všechny polopřímky.

První smysluplné použití se nabízí u úseček, které můžeme porovnávat buď graficky nebo užitím jejich délky. Pro shodné úsečky platí

$$(AB \cong CD) \iff (|AB| = |CD|).$$

Žáci však patrně většinou považují vyjádření, že úsečky jsou shodné, za „školní vyjádření“ toho, že „úsečky jsou stejně dlouhé“. Vyjádření nerovnosti úseček [1] neřeší, dle [2] se používá jen označení pro délky úseček $|AB| < |CD|$, slovně „úsečka AB je menší než úsečka CD “. Podobně pro $|AB| > |CD|$ je doporučeno vyjádření „úsečka AB je větší než úsečka CD “. Jestliže nám však žák řekne, že úsečka AB je *delší* nebo že je *kratší* než úsečka CD (což je nakonec vyjádření názornější), nebudeme jej opravovat, pokud je jeho vyjádření *věcně* správné. Porovnávání úseček je natolik názorné, že není třeba se mu nějak více věnovat.

3. Rovina a polorovina

Pojem *rovina* patří (stejně jako bod a přímka) k základním matematickým pojmům, které nedefinujeme, v planimetrii postačí žákům jen (a), přičemž rovinu si představujeme jako povrch tabule, list v sešitu nebo obrazovku počítače. V rovině lze zvolit libovolný (i nekonečný) počet bodů nebo přímek.

Školní definice poloroviny opět jen vysvětluje, jak polorovinu získáme, např. ve [2] takto: „Přímka dělí rovinu na dvě navzájem opačné poloroviny a je jejich společnou hranicí neboli hraniční přímkou.“ Označení: *polorovina* pX (kde p je hranice poloroviny a X je vnitřní bod poloroviny), zkráceně pX , v zápisu konstrukce též $\mapsto pX$ (viz [1]). Je-li hraniční přímka AB , pak se polorovina značí *polorovina* ABX , zkráceně ABX nebo $\mapsto ABX$.

V obou případech se neptejme žáků „Co je to rovina?“ nebo „Co je to polorovina?“, pokud jim nedovedeme poradit, jak na takové otázky mají odpovědět. Těžko lze např. předpokládat, že žák řekne třeba „Polorovina pX je množina všech takových bodů M roviny, pro něž platí, že žádný bod přímky p není vnitřním bodem úsečky MX .“ Správné porozumění tomuto pojmu je vhodné trénovat na jednoduchých úlohách na průnik dvou polorovin (včetně případů rovnoběžných hraničních přímek).

4. Úhel

Tímto pojmem svou procházku po elementární geometrii ukončíme. Ve [2] se uvádí: „Dvě různé polopřímky VA , VB dělí rovinu na dva úhly AVB .“ Pak v krátkém sledu následují pojmy *ramena úhlu*, *vrchol úhlu*, *vnitřní bod* (jednoho z úhlů), *konvexní úhel*, *nekonvexní úhel*.

Dále se pokračuje: „Nejsou-li polopřímky opačné, je jeden úhel AVB průnikem polorovin VAB , VBA a nazývá se konvexní úhel AVB , značí se $\sphericalangle AVB$. Druhý úhel AVB vznikne sjednocením polorovin opačných k polorovinám VAB , VBA a nazývá se nekonvexní úhel AVB , značí se $\sphericalangle AVB$.“ V obou případech lze vedle AVB opět použít i označení BVA . Popsaný vznik nekonvexního úhlu není příliš názorný, ale snad bychom ho po žácích ani neměli chtít „odříkávat“, protože graficky je nekonvexní úhel docela názorný. Podobně ani slovní popis vzniku konvexního úhlu nepovažuji za potřebnou žákovu znalost, mám za to, že zvládnutí (a), (b), (c), (e) bohatě stačí. (Starší čtenáři ještě pracovali s pojmy „dutý úhel“ a „vypuklý úhel“; tyto pojmy byly opuštěny, i když byly pro žáky nějak jazykově lépe stravitelné, ale dostaly se později do slovního rozporu s definicí úhlu).

Všimněme si, že pro úhly nulové, přímé a plné se podle [1] před trojici bodů AVB neuvádí žádný symbol úhlu, ale pokud by jej tam žák uvedl, nepočítejme mu to jako chybu.

Pojem konvexní úhel navazuje na pojem konvexnosti geometrického útvaru [2]: „Geometrický útvar se nazývá konvexní, právě když úsečka s krajními body v libovolných dvou bodech útvaru je částí tohoto útvaru.“ Takže situace není pro žáky zcela jednoduchá, neboť:

- konvexní úhel je konvexním útwarem,
- nekonvexní úhel není konvexním útwarem,
- úhel přímý (i nulový a plný) není konvexním úhlem ani nekonvexním úhlem, ale je to konvexní útvar,

Co je to tedy *úhel*? Je to souhrnný název pro úhly konvexní, nekonvexní, přímé, nulové a plné, takže žákům raději takovou otázku nepokládejme. Když jsme snad už před 50 lety na jedné ZŠ ve skupince studentů na praxi debatovali o tom, jak nejjednodušeji zavést školákům pojem úhel (tehdy se ještě s množinami a průniky nepracovalo), překvapil nás tehdy svým přístupem jeden starší učitel-praktik. Vzal do ruky dřevěné učitelské kružidlo a řekl: „Já žádné komplikace nemám, prostě žákům řeknu“, a kružidlo částečně rozevřel – „toto je úhel.“ Všimněme si, že to nebylo zas až tak úplně nesmyslné, jednak tím žákům částečně nabídl představu – bod (a), a jednak předvedl nástroj, kterým bude i v příštích hodinách modelovat různé konkrétní úhly. Ale nedivme se, tento učitel učil matematiku již v době, kdy se např. v [5] žákům říkalo: „Úhel jest odchylka dvou ramen. Čím více jsou ramena úhlu od sebe vzdálena, tím je úhel větší. Čím jsou blíže k sobě, tím jsou menší. Malý úhel má ramena téměř u sebe.“ S tímto přístupem dnes už není třeba polemizovat, ale přisudme mu také alespoň názornost

Pak vstupuje do hry shodnost úhlů a také konstrukční porovnávání úhlů (který ze dvou úhlů je větší), grafické sčítání a odčítání úhlů, jejich násobení a dělení vybranými přirozenými čísly, jsou to akce docela názorné, jen pozor, aby žáci nezačali ztotožňovat pojem úhel s tím obloučkem, který uvnitř úhlu vyznačují.

Korektní přechod k pojmu *velikost úhlu* není jednoduchý a ve [2] je řešen přímo šalomounsky, když se opírá o (jakoby předem daný) pojem „měření úhlu“: „Výsledkem měření úhlu je nezáporné reálné číslo nazvané *velikost úhlu*. Velikost úhlu AVB značíme $|\sphericalangle AVB|$, případně $|\sphericalangle AVB|$. V míře obloukové je velikost reálné číslo z intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$, v míře stupňové $\langle 0^\circ; 360^\circ \rangle$. Je-li velikost konvexního úhlu AVB číslo α , píšeme $|\sphericalangle AVB| = \alpha$ (úhlových jednotek). Někdy písmenem α označujeme přímo úhel.“

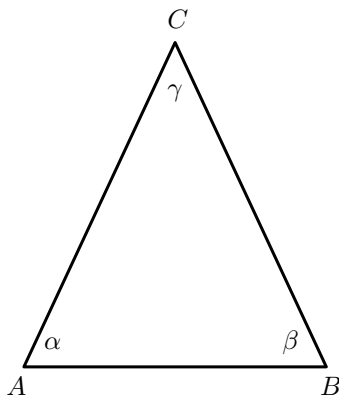
Je to řečeno zhuštěně a snad i proto to žákům mnoho neřekne. Sluší se ještě dodat upřesnění podle [1]: „Pokud nemůže dojít k nedorozumění, připouští se označení malými písmeny řecké abecedy pro úhel i jeho velikost.“ Zde je situace o něco složitější než při označování úseček malými písmeny.

Nepůjdeme dále do podrobností, jen si řekněme, že u *stupňové míry* je pro žáky patrně nejsrozumitelnější „klasický“ postup – úhlový stupeň 1° je velikost $1/90$ pravého úhlu [2] a velikost úhlu je číslo, které vyjadřuje, kolikrát je daný úhel větší než úhel o velikosti 1° (je to vyjádření názorné, úhly menší než 1° jistě neprotestují). Pro jednoduché vyjadřování je do-

cela vhodné považovat např. údaj 60° nejen za velikost nějakého úhlu, ale přímo za tento úhel. Pak se může jednoduše říkat třeba: sestrojíme si úhel $\alpha = 60^\circ$. Stupňovou míru procvičíme při konstrukci úhlů různých velikostí a v početních úlohách, zejména pak s goniometrickými funkcemi, kdy je vhodná příležitost na práci s menšími jednotkami – tj. úhlovými minutami a úhlovými vteřinami. Při počítání (na rozdíl od postupů v příkladech 1 a 2) ponecháváme v matematickém modelu označení stupňů, resp. i minut a vteřin, jsou to matematické pojmy a patří tam. Navíc by při vynechání označení stupňů mohlo dojít k omylům, protože v matematice platí dohoda, že když u velikosti úhlu není uvedena jednotka, pak je jednotkou radián.

Úloha 3.

Mějme rovnoramenný trojúhelník ABC s hlavním vrcholem C , kde je $\gamma = 50^\circ$. Vypočtete velikost zbývajících úhlů (obr. 2).



Obr. 2

Řešení. V daném trojúhelníku ABC platí $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, $\gamma = 50^\circ$, $\beta = \alpha$. Po dosazení do 1. rovnice z druhých dvou máme

$$\alpha + \alpha + 50^\circ = 180^\circ,$$

$$2\alpha = 130^\circ,$$

$$\alpha = \beta = 65^\circ.$$

Výklad o obloukové míře je vhodné odložit až na dobu, kdy žáci již bezpečně pracují s mírou stupňovou a kdy to bude mít smysl, tj. až pro něj budou vytvořeny „znalostní podmínky“, jak je tomu v [2]. Za nejjednodušší

a nejsrozumitelnější pro žáky považují při výkladu o obloukové míře postup přes jednotkovou kružnici, např. takto:

V rovině AVB sestrojíme jednotkovou kružnici se středem v bodě V (a tedy s poloměrem $r = 1$). Velikostí úhlu AVB v obloukové míře rozumíme délku oblouku této jednotkové kružnice, který leží v úhlu AVB . Jednotkový úhel obloukové míry (i jeho velikost) se nazývá radián (značka rad). Při výpočtech zpravidla označení rad vynecháváme.

Tato informace žákům pro začátek stačí, probírání dalších vlastností obloukové míry je vhodné nechat až na dobu, kde se žáci seznamují s pojmem orientovaný úhel. Asi by se však neměla vynechat informace, že velikost pravého úhlu je 90° , což odpovídá $\pi/2$ rad .

Literatura

- [1] *Názvy a značky školské matematiky*. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1988.
- [2] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia, Planimetrie. Prometheus, Praha, 1993.
- [3] *Boček, L. – Kočandrle, M.*: Matematika pro gymnázia, Analytická geometrie. Prometheus, Praha, 1995.
- [4] *Odvárko, O.*: Matematika pro gymnázia, Goniometrie. Prometheus, Praha, 1994.
- [5] *Hanák, J. S.*: Přijímací zkoušky do 1. třídy škol středních. ÚNKU, Praha, 1934.

Polibky kružnic: René Descartes a Alžběta Falcká

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

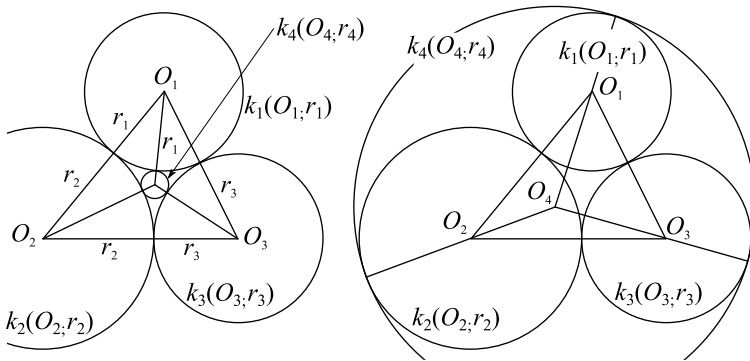
Uvažujme tři kružnice, $k_1(O_1; r_1)$, $k_2(O_2; r_2)$, a $k_3(O_3; r_3)$, které se navzájem vně dotýkají. Jejich poloměry mohou být libovolné. Existují však nejvýš dvě kružnice $k_4(O_4; r_4)$, jež se dotýkají kružnic k_1 , k_2 i k_3 (obr. 1),

a platí

$$2 \sum_{i=1}^4 \left(\frac{1}{r_i} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{r_i} \right)^2. \quad (1)$$

Toto tvrzení se nazývá *Descartesova věta o kružnicích* podle svého objevitele, který ji roku 1643 uvedl bez důkazu v dopise české princezně *Alžbětě Falcké* (1618–1680). Nebyla to přímo rovnost (1), ale ekvivalentní vztah

$$\begin{aligned} r_1^2 r_2^2 r_3^2 + r_1^2 r_2^2 r_4^2 + r_1^2 r_3^2 r_4^2 + r_2^2 r_3^2 r_4^2 = & 2(r_1 r_2 r_3^2 r_4^2 + \\ + r_1 r_2^2 r_3^2 r_4 + r_1 r_2^2 r_3 r_4^2 + r_1^2 r_2 r_3^2 r_4 + r_1^2 r_2 r_3 r_4^2 + r_1^2 r_2^2 r_3 r_4). \end{aligned} \quad (2)$$



Obr. 1 Dotyky kružnic, první situace

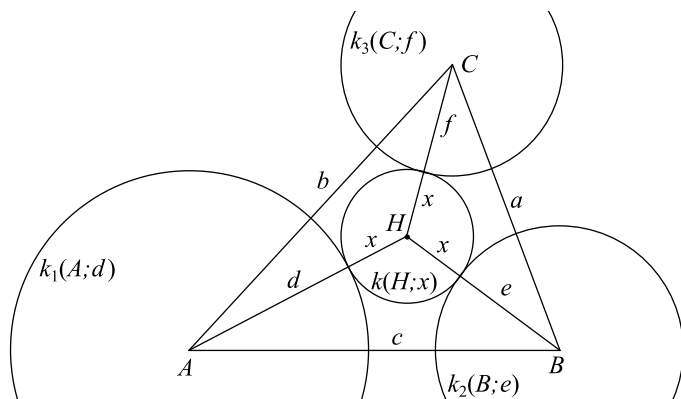
Rovnost (1) je výhodné uvádět ve tvaru

$$2 \sum_{i=1}^4 (\kappa_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^4 \kappa_i \right)^2, \quad (3)$$

kde $\kappa_i = 1/r_i$ ($i \in 1, 2, 3, 4$) jsou *křivosti kružnic*. Vztahy (1) a (3) jsou symetrické. Aby platily pro všechny situace, je nutno přiřadit záporné znaménko poloměru (resp. křivosti) kružnice, která má s aspoň dvěma svými sousedy vnitřní dotyky. Pak není nutné předpokládat, že výchozí tři kružnice mají pouze vnější dotyky. Označení kružnic na obrázcích můžeme libovolně zaměnit a za předpokladu, že jsou pevně dány křivosti κ_1, κ_2 a κ_3 , představuje vztah (3) kvadratickou rovnici s neznámou κ_4 . Její kořeny jsou možné křivosti kružnice k_4 . Kořenu $\kappa_4 = 0$ odpovídá přímka, společná tečna kružnic $k_1(O_1; r_1), k_2(O_2; r_2)$, a $k_3(O_3; r_3)$.

V 19. století byla Descartesova věta několikrát znovu objevena a různými způsoby dokázána. Populární se stala teprve roku 1936, kdy ji britský chemik *Frederick Soddy* bez důkazu publikoval formou básně v časopise *Nature* [4].

Třebaže je historie vzniku vztahu (1) zajímavá, začíná u Archimeda a souvisí s našimi dějinami, v česky psané literatuře se prakticky nevyskytovala. V roce 2011 tuto mezeru částečně překlenul Miroslav Kotlas [2]. Seriál *Polibky kružnic* z jeho práce vychází a doplňuje ji o další poznatky. Dnes se zaměříme na příběh vzniku vztahu (2).



Obr. 2 K pravděpodobnému postupu princezny Alžběty

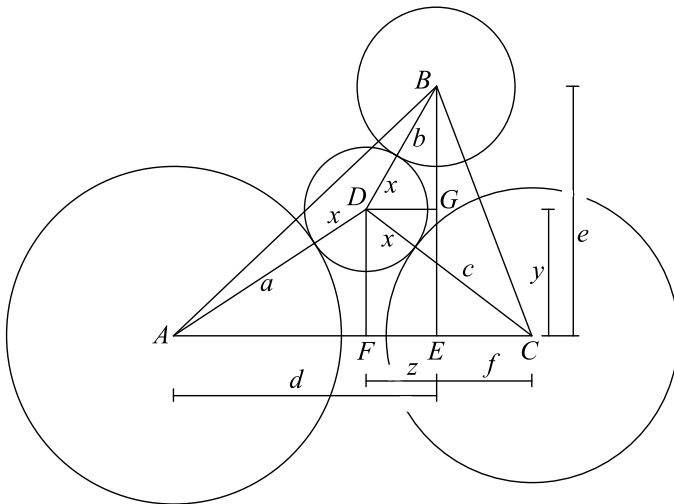
Alžběta Falcká byla dcerou „zimního krále“ Fridricha V. Falckého a Alžběty Stuartovny. V Holandsku jí bylo poskytnuto skvělé vzdělání. Ovládala šest jazyků, zabývala se filosofií, literaturou a přírodními vědami. V roce 1643 se v Haagu seznámila s *René Descartesem* (1596–1650) prostřednictvím jejich společného přítele, šlechtice Alphonse de Pollota. Nedlouho poté Descartes opustil Haag. S princeznou udržoval korespondenci. Pomáhal jí v dalším vzdělávání a mimo jiné navrhl, aby zkusila uplatnit své matematické dovednosti na výpočtu poloměru a polohy středu kružnice, která se dotýká tří daných kružnic.

Od Pollota se Descartes dozvěděl, že Alžběta řeší úlohu jinak, než si představoval. Hledala prý pouze poloměr kružnice, neboť střed pak již snadno sestrojí. Její řešení se nedochovalo. Existují však tři dopisy, které se k tomu vztahují. V prvním Descartes princeznu varoval před řešením,

v němž by se poloměr x určoval při označení podle obr. 2 z rovnice

$$S_{ABC} = S_{ABH} + S_{BCH} + S_{CAH}$$

pro obsahy trojúhelníků. Když obsahy vyjádříme pomocí Heronova vzorce, získáme rovnici s jedinou neznámou x . Napsal, že řešení takové rovnice je kvůli několikanásobnému umocňování tak složité, že on by to stěží zvládl za tři měsíce. Navrhl jí zvolit jako dané hodnoty délky a, b, c, d, e, f vyznačené na obr. 3 a určit neznámé x, y a z pomocí Pythagorovy věty z trojúhelníků na obrázku. Dokonce sestavil příslušnou soustavu rovnic (v níž se nevyskytovaly odmocniny) a poskytl návod, jak ji řešit.



Obr. 3 K Descartesovu řešení

Třebaže nabízený postup vede k jediné kvadratické rovnici s neznámou x , je velmi namáhavé soustavu obecně vyřešit. *Bos J. M. Henk* provedl v dodatku publikace [5] analýzu zmíněných dopisů. Řešení Descartesovy soustavy pomocí počítače jej přivedlo k algebraické rovnici o 87 sčítancích, z nichž každý je součinem šesti činitelů.¹ Nelze se proto Alžbětě divit, když nakonec poslala Descartesovi dopis, že se jí řešení jeho postupem nedaří dokončit. Požádala jej o radu, jak dovést k jednoduššímu výsledku její původní výpočet, který k dopisu přiložila. Text dopisu je znám, ale příloha se ztratila.

¹V češtině s obsahem appendixu podrobněji seznamuje Kotlas [2].

Třetí ze zmíněných dopisů je Descartesova odpověď. V ní vysoce ocenil Alžbětinu práci. S potěšením konstatoval, že užívá metodu, kterou propagoval ve své *Geometrii*. Líbilo se mu, jak optimálně propojila syntetický a analytický přístup. Uvědomil si, že jím navrhovaný postup z prvního dopisu postrádá symetrii. Naproti tomu Alžbětin výběr konstant a proměnných vedl k symetrickým vztahům.

V závěru dopisu uvádí, že vzhledem k obtížnosti výpočtu bude snadnější předpokládat, že tři dané kružnice se navzájem dotýkají. Pak stačí jako dané hodnoty zvolit pouze jejich poloměry a nakonec princezna může dospět ke vztahu (2). Slovy zdůraznil symetrii výsledku: *Součet čtyř sčítanců, z nichž každý je součinem druhých mocnin tří poloměrů, je roven dvojnásobku součtu šesti sčítanců utvořených jako součiny dvou poloměrů s kvadráty zbývajících dvou.*

Jak princezna úlohu řešila, se zřejmě již nedozvíme. Pravděpodobně užila postup, před kterým Descartes ve svém prvním dopise varoval. Je to elementární, přirozená cesta, kterou jsem se i já před léty vydal, když jsem se poprvé seznámil se vztahem (2) z publikace [3]. Nakonec jsem dospěl k následujícímu důkazu.

Z Heronova vzorce pro obsah trojúhelníku $O_2O_3O_4$ (obr. 1 vlevo) plyne

$$S_1 = \sqrt{r_2 r_3 r_4 (r_2 + r_3 + r_4)} = \sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4} \cdot \sqrt{\frac{s}{r_1} - 1}, \quad (4)$$

kde $s = r_1 + r_2 + r_3 + r_4$. Analogicky vyjádříme obsahy S_2, S_3, S_4 trojúhelníků $O_3O_1O_4, O_1O_2O_4, O_1O_2O_3$, dosadíme do zřejmého vztahu

$$S_4 - S_1 = S_2 + S_3$$

a upravíme na tvar

$$\sqrt{\frac{s}{r_4} - 1} - \sqrt{\frac{s}{r_1} - 1} = \sqrt{\frac{s}{r_2} - 1} + \sqrt{\frac{s}{r_3} - 1}, \quad (5)$$

z něž po umocnění obou stran a standardních algebraických úpravách plyne

$$\frac{s}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_4} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) = \sqrt{\left(\frac{s}{r_4} - 1 \right) \left(\frac{s}{r_1} - 1 \right)} + \sqrt{\left(\frac{s}{r_2} - 1 \right) \left(\frac{s}{r_3} - 1 \right)}.$$

Po dalším umocnění a úpravě má rovnost tvar

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \right)^2 + V = 2 \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} \right), \quad (6)$$

kde

$$V = -\frac{4}{s} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \right) + \frac{8}{s^2} + \frac{8}{s^2} \sqrt{\left(\frac{s}{r_1} - 1 \right) \left(\frac{s}{r_2} - 1 \right) \left(\frac{s}{r_3} - 1 \right) \left(\frac{s}{r_4} - 1 \right)}.$$

Nyní již stačí dokázat, že neplatí ani $V > 0$, ani $V < 0$. Provedeme to sporem: Předpoklad $V > 0$ je ekvivalentní se vztahem

$$\frac{s}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \right) - 1 < \sqrt{\left(\frac{s}{r_1} - 1 \right) \left(\frac{s}{r_2} - 1 \right) \left(\frac{s}{r_3} - 1 \right) \left(\frac{s}{r_4} - 1 \right)},$$

jehož levá strana je kladná (má minimální hodnotu 7, jak plyne z úlohy 1). Odtud umocněním a dalšími ekvivalentními úpravami zjistíme, že

$$2 \left(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} \right) < \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} \right)^2.$$

To je spor, neboť z podmínky $V > 0$ a vztahu (6) plyne obrácená nerovnost.

Analogicky lze ověřit, že nemůže platit ani $V < 0$. Je tedy $V = 0$ a tím je vztah [4] dokázán.

Další dílech seriálu se dozvíme, co bylo o polibcích kružnic zjištěno ve starověku a jak tyto poznatky využil *Jakob Steiner* (1796–1863) k obohacení syntetické geometrie o nové poznatky a k prvnímu známému odvození Descartesovy věty. Pokud se rozhodnete řešit následující úlohy, proveďte to nejprve bez aplikace vztahu (1) a pak pro kontrolu s jeho využitím. Výsledky (kromě první a poslední úlohy) i jiné řešené příklady naleznete v publikaci [2].

Úlohy

1. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla r_1, r_2, r_3 a r_4 platí $(\sum_{i=1}^4 r_i) \cdot \sum_{i=1}^4 (1/r_i) \geq 16$.
2. Kružnice k, l, m se po dvou vně dotýkají a všechny tři mají společnou tečnu. Poloměry kružnic k, l jsou 3 cm a 12 cm. Vypočtete poloměr kružnice m . Najděte všechna řešení. (55 MO, C-I-2)
3. Každá z kružnic k_1, k_2, k_3 se dotýká vně zbývajících. Kružnice k_1 má poloměr 1, kružnice k_2 má poloměr 2 a kružnice k_3 má poloměr 3. Vypočítejte poloměry kružnic, které se dotýkají všech třech kružnic k_1, k_2, k_3 .
4. Kružnice $l(T; s)$ prochází středem kružnice $k(S; 2 \text{ cm})$. Kružnice $m(U; t)$ se vně dotýká kružnic k a l , přičemž $US \perp ST$. Poloměry s a t vyjádřené v centimetrech jsou celá čísla. Určete je. (59 MO, B-II-1)
5. Jsou dány kružnice k_1, k_2 s vnějším dotykem, křivostmi κ_1, κ_2 a společnou tečnou t , která neprochází bodem dotyku obou kružnic. Dokažte, že kružnice, které se dotýkají kružnic k_1, k_2 i tečny t mají křivosti jsou $(\sqrt{\kappa_1} - \sqrt{\kappa_2})^2$ a $(\sqrt{\kappa_1} + \sqrt{\kappa_2})^2$. Jak to souvisí se vztahem (3) a znaménkovou dohodou? (Nápovědu najdete v článku [6].)

Literatura

- [1] *Elisabeth of Bohemia – Descartes, R.*: The Correspondence between Princes Elisabeth of Bohemia and René Descartes edited and translated by Lisa Shapiro. The University of Chicago Press, Chicago, 2007.
- [2] *Kotlas, M.*: Polibky kružnic (diplomová práce). Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky, České Budějovice, 2011.
- [3] *Levitin, K.*: Geometrická rapsódie. SNTL, Praha, 1991.
- [4] *Soddy, F.*: The Kiss Precise. Dostupné na: http://maths.ac-noumea.nc/polyhedr/packing_kiss/kiss.htm
- [5] *Verbeek, T.*: The Correspondence of René Descartes 1643. Publications of the Department of Philosophy Utrecht University, Volume XLV, Utrecht, 2003.
- [6] *Kanálíková, A. – Pócssová, J.*: Niekoľko príkladov k iracionálnym číslam. MFI, roč. 23 (2014), č. 5., s. 329–336.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 4. 2015 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v \TeX ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 211

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n nabývá výraz

$$n^2 \left(\frac{n^2 + 11}{12} \right) + n \left(\frac{3n^2 + 13}{2} \right)$$

celočíselnou hodnotu.

Stanislav Trávníček

Úloha 212

Kružnice $k(S; r = |SA|)$ a $l(A; s)$ se protínají v bodech P a Q ($P \neq Q$). Necht' pro bod M kružnice k ($P \neq M \neq Q$) přímka PM protíná kružnici l v bodě $P \neq R$. Pomocí podílu r/s vyjádřete součet kosinů vnitřních úhlů trojúhelníku MQR .

Šárka Gergelitsová

Dále uvádíme řešení úloh 207 až 208, jejichž zadání byla zveřejněna ve čtvrtém čísle loňského (24.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 207

Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b platí

$$(a + 9) \left(a^2 + \frac{1}{a} + \frac{b^2}{8} \right) \geq (a + b + 1)^2.$$

Kdy nastane rovnost?

Robert Geretschläger (Graz)

Řešení. Užítím Cauchyho nerovnosti pro trojice čísel

$$\left(1, \sqrt{a}, \sqrt{8} \right) \quad \text{a} \quad \left(a, \frac{1}{\sqrt{a}}, \frac{b}{\sqrt{8}} \right)$$

dostaneme

$$(1 + a + 8) \left(a^2 + \frac{1}{a} + \frac{b^2}{8} \right) \geq (a + 1 + b)^2,$$

což je nerovnost ze zadání, která je splněna pro libovolná kladná reálná čísla a , b . Rovnost v této nerovnosti nastane, právě když

$$\frac{1}{a} = \frac{\sqrt{a}}{1} = \frac{\sqrt{8}}{b},$$

tedy právě když $a = 1$, $b = 8$.

Správná řešení zaslali: *Jozef Mészáros* z Jelky, *Markéta Calábková*, *Jan Gocník* a *Marian Poljak*, všichni z GJŠ v Přerově, *Ondřej Kincl* z GOP v Praze 5, *Lucien Šíma* z PORG v Praze 8, *Radovan Švarc* z G v České Třebové a *Pavel Turek* z G v Olomouci-Hejčíně.

Úloha 208

Dokažte, že ze sedmi libovolně zvolených přirozených čísel lze vybrat čtyři tak, že jejich součet je dělitelný číslem 4.

Józef Kalinowski (Kalety)

Řešení podle Jozefa Mészárose. Nejprve si uvědomíme, že z libovolné trojice přirozených čísel lze podle Dirichletova principu vybrat dvojici čísel stejné parity. To znamená, že součet vybrané dvojice je sudé číslo.

Tedy ze sedmi daných přirozených čísel lze vybrat dvojici (a, b) , jejíž součet je sudé číslo. Ze zbývajících pětice opět lze vybrat dvojici čísel (c, d) , jejíž součet je sudé číslo. Nakonec ze zbývajících trojice lze opět vybrat dvojici (e, f) , jejíž součet je sudé číslo.

Protože součty $a + b$, $c + d$, $e + f$ jsou sudá čísla, jejich zbytky při dělení čtyřmi jsou buď 0, nebo 2. Podle Dirichletova principu opět z těchto tří součtů lze vybrat dva se stejným zbytkem při dělení čtyřmi. Předpokládejme, že jsou to součty $a + b$ a $c + d$. Potom zbytek při dělení součtu $a + b + c + d$ čtyřmi je 0. Součet čísel a , b , c , d je tedy dělitelný čtyřmi, a to jsme chtěli dokázat.

Poznámka. Snadno můžeme ověřit, že z šesti libovolných přirozených čísel obecně nelze vybrat čtyři čísla tak, aby jejich součet byl dělitelný čtyřmi. Stačí uvážit např. šestici 1, 1, 1, 4, 4, 4.

Správná řešení zaslali: *Jozef Mészáros* z Jelky, *Jan Gocník* a *Marian Poljak*, oba z GJŠ v Přerově, *Ondřej Kincl* z GOP v Praze 5, *Radovan Švarc* z G v České Třebové a *Pavel Turek* z G v Olomouci-Hejčíně.

Neúplné řešení zaslal *Lucien Šíma* z PORG v Praze 8,

Pavel Calábek

Měříme rezistivity kovových drátů a závislost odporu vodiče na jeho délce a průřezu

JIŘÍ ERHART

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická TU, Liberec

Teoretický úvod

Průchod nosičů náboje (elektronů) látkou je ovlivněn její strukturou, typem meziatomových vazeb a množstvím volných nosičů náboje, které jsou k dispozici pro vedení proudu. V kovových materiálech je těchto volných elektronů dostatečné množství. V polovodičích je jich podstatně méně a v izolantech zcela nebo z velké části chybí. Napětí U mezi konci vodiče vyvolá podle Ohmova zákona proud vodičem o velikosti

$$I = \frac{U}{R}, \quad (1)$$

kde veličina R [Ω] se nazývá elektrický odpor (rezistance) a charakterizuje schopnost vodiče vést elektrický proud. Elektrický odpor válcového vodiče dále závisí na rozměrech vodiče a jeho materiálu

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2)$$

kde l je vzdálenost mezi konci vodiče a S jeho průřez kolmý ke směru vedení proudu. Různé materiály vodičů potom odlišuje materiálová konstanta ρ [$\Omega \cdot \text{m}$] nazývaná rezistivita (měrný elektrický odpor).

Rezistivita je jednou z fyzikálních veličin vůbec s největším řádovým rozsahem hodnot a lze ji podstatně měnit změnou struktury látky a jejím dopováním příměsemi. Podle velikosti rezistivity se látky dělí na vodiče, polovodiče a izolanty. Typické hodnoty rezistivity pro různé látky jsou uvedeny v tab. 1.

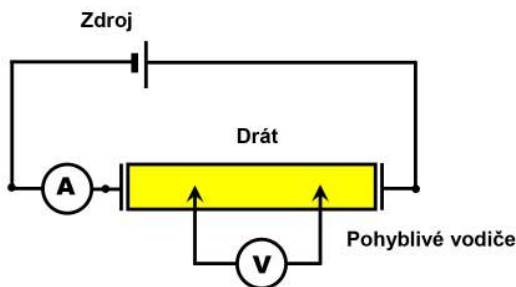
Vodiče ρ [$10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$]		Polovodiče ρ [$\Omega \cdot \text{m}$]	
Al	2,45	C (diamant)	10^6
Cu	1,555	Ge	0,47
Fe	8,81	Si	$3 \cdot 10^3$
Au	2,04	AlN	10^{10}
Ag	1,505	GaP	10^{-2}
Pt	9,81	GaAs	$4 \cdot 10^{-3}$
mosaz	7 až 9	GaSb	$4 \cdot 10^{-4}$
ocel uhlíková	13	InP	$8 \cdot 10^{-5}$
bronz cínový	18	InAs	$3 \cdot 10^{-4}$
dural	5	InSb	$6 \cdot 10^{-4}$

Izolanty ρ [$\Omega \cdot \text{m}$]	
bakelit	10^6 až 10^{12}
šelak	$1 \cdot 10^{14}$
jantar	$1 \cdot 10^{18}$
porcelán tvrdý	$3 \cdot 10^{12}$
papír kondenzátorový	10^{10} až 10^{12}
olej transformátorový	10^9 až 10^{11}
parafín	10^{14}
plexisklo	$1 \cdot 10^{13}$
polyvinylchlorid	$1 \cdot 10^{13}$
sklo	10^{11} až 10^{16}

Tab. 1 Rezistivity různých látek [1, s. 106–110]

Problematicky se měří jak velmi vysoké elektrické odpory (izolanty v elektrostatice), tak také velmi malé hodnoty odporů (např. kovové dráty). Pro velmi vysoké odpory (větší než $10\text{ M}\Omega$) je třeba měřit velmi malé proudy, což je problematické vzhledem k elektrostatické indukci. Pro velmi malé odpory (menší než $1\ \Omega$) je odpor měřících vodičů srovnatelný s měřenou hodnotou. Není tedy náhodou, že rozsahy běžných multimetrů jsou pro měření odporů v rozmezí $1\ \Omega$ – $10\text{ M}\Omega$.

Chceme pro kovové vodiče ověřit vztah (2) a použít ho ke stanovení rezistivity materiálů. Nelze však použít přímé měření elektrického odporu na multimetru, neboť elektrické odpory přívodních (měřících) vodičů jsou srovnatelné s měřeným odporem. Jednou z možností změření malých odporů kovových vodičů je použití Ohmova zákona (1) změřením napětí a proudu vodičem. Použijeme tzv. čtyřvodičovou metodu (obr. 1), kde dva vodiče reprezentují proudový obvod a druhé dva vodiče slouží k měření napětí. Vnitřní odpor voltmetru je obvykle alespoň řádu $10\text{ k}\Omega$, takže jeho proudový odběr je vzhledem k vodiči o odporu řádově $1\ \Omega$ zanedbatelný. Vliv proudového odběru voltmetru na měřenou hodnotu napětí je tak řádově pod hodnotou danou třídou přesnosti voltmetru.



Obr. 1 Zapojení elektrického obvodu – čtyřvodičová metoda měření

Experiment

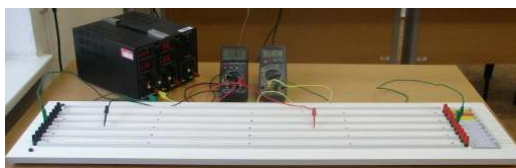
K měření rezistivity kovových vodičů uijeme sadu 10 drátů různých materiálů a různých průměrů (viz tab. 2). Dráty jsou upevněny a napnuty mezi banánkovými svorkami a uloženy po dvou v plastických profílech kvůli jejich ochraně před mechanickým poškozením. Délku drátů mezi měřícími kontakty měříme pomocí příložného měřítka.

Dráty v délce asi 100 cm jsou upevněny v přípravku podle obr. 2, který umožňuje jejich jednoduché kontaktování v různých délkách pomocí měří-

cích háčků připojených do voltmetru (pozlacené banánky, měděné měřící háčky). Svorky na jedné straně přípravku mohou být vodivě spojeny na stejném potenciálu (černé svorky na obr. 2). Zdrojem napětí může být jakýkoliv běžný školní zdroj s regulovatelným napětím a omezením odebíraného proudu. Proudový obvod zapojíme nejlépe spojovacími vodiči s napevno pájenými banánky na koncích, abychom zabránili přerušování ideálního kontaktu ve spojovacích bodech při náhodném pohybu vodičů. Na velikosti elektrického odporu zapojeného v proudovém obvodu (sériové spojení) však vůbec nezáleží – proud je stejný všemi prvky v proudové smyčce.

První sada		Druhá sada	
Bronz	Ø 0,3 mm	Bronz	Ø 0,7 mm
Měď	Ø 0,3 mm	Měď	Ø 0,5 mm
Mosaz	Ø 0,3 mm	Nerez	Ø 0,5 mm
Nerez	Ø 0,2 mm	Mosaz	Ø 0,2 mm
Nerez	Ø 0,3 mm	Mosaz	Ø 0,3 mm
Nerez	Ø 0,4 mm	Mosaz	Ø 0,4 mm
Nerez	Ø 0,5 mm	Mosaz	Ø 0,5 mm
Nerez	Ø 0,6 mm	Mosaz	Ø 0,6 mm
Nerez	Ø 0,7 mm	Mosaz	Ø 0,7 mm
Nerez	Ø 0,8 mm	Mosaz	Ø 0,8 mm

Tab. 2 Dráty použité k měření rezistivity a ověření vztahu (2)



Obr. 2 Přípravek pro měření rezistivity drátů čtyřvodičovou metodou. Drát je snadno kontaktován ve volitelné délce pomocí měřících háčků

Dráty z materiálů mosaz, nerez a měď snadno seženeme v různých průměrech (0,2–0,8 mm) u prodejců potřeb pro navlékání bižuterních korálků. Dráty z bronzu se používají pro drátové rezačky. Všechny dráty je třeba

použit bez povrchové úpravy jako je např. lakování, což je časté pro elektrotechnické dráty z mědi určené pro vinutí cívek! Kousky drátů každého průřezu jsou ponechány stranou pro měření jejich průměru mikrometrem (viz detail na obr. 3).



Obr. 3 Detail kousků drátů pro měření jejich průměrů

Pohyblivými vodiči připojeného voltmetru zvolíme nejprve asi 50 cm vybraného drátu. Délku drátu zapojenou pohyblivými vodiči měříme přiloženým měřítkem. Nastavíme napětí na zdroji tak, aby proud protékající drátem měl velikost při horním okraji použitého měřicího rozsahu ampérmetru (typicky 400 mA). Postupně zvětšujeme délku zapojeného drátu po 5 cm až do 100 cm a měříme napětí a proud drátem. K určení elektrického odporu užijeme Ohmova zákona (1). Rezistivitu vypočteme podle vztahu

$$\rho = \frac{U\pi D^2}{4Il}, \quad (3)$$

kde D je průměr drátu, l jeho délka, U napětí a I proud drátem.

Vynášíme grafy závislosti elektrického odporu na délce drátu, rezistivitu určujeme pomocí lineární regrese závislosti odporu na délce drátu podle vztahu (2). Pravděpodobnou chybu měření určujeme pomocí kvad-

ratického zákona hromadění chyb

$$\vartheta(\rho) = \rho \sqrt{\frac{\vartheta^2(U)}{U^2} + \frac{\vartheta^2(I)}{I^2} + 4 \frac{\vartheta^2(D)}{D^2} + \frac{\vartheta^2(l)}{l^2}}, \quad (4)$$

případně krajní chybu rezistivity pomocí lineárního zákona hromadění chyb

$$\vartheta(\rho) = \rho \left(\left| \frac{\vartheta(U)}{U} \right| + \left| \frac{\vartheta(I)}{I} \right| + 2 \left| \frac{\vartheta(D)}{D} \right| + \left| \frac{\vartheta(l)}{l} \right| \right). \quad (5)$$

Příklad měření

V Tabulkách 3 a 4 jsou uvedeny naměřené hodnoty rezistivity drátů různých materiálů stejného průměru (0,3 mm) a nerezových drátů různých průměrů. Na obr. 4 a 5 jsou pak vyneseny odpory drátů v závislosti na jejich délkách pro různé materiály a pro nerezový drát různých průměrů.

Napětí a proud byly měřeny na digitálních multimetrech METEX 3850D a 3860D. Chyba měření napětí i proudu je 0,8 % + 1 dgt. Průměr drátu byl měřen mikrometrem s chybou $\vartheta(D) = 0,01$ mm. Délka drátu byla měřena milimetrovým měřítkem s chybou $\vartheta(l) = 1$ mm. Délka drátu byla nastavována pohyblivými vodiči pomocí měřících háčků. Vzhledem k malým průměrům drátu přispívá chyba určení průměru drátu mikrometrem až několika procenty k celkové chybě měření, více pak pro dráty menších průměrů.

Materiál drátu	ρ [$10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$]	$\vartheta(\rho)$ [$10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$]	$\vartheta_r(\rho)$ [%]
Měď	1,84	0,13	7,1
Mosaz	7,04	0,48	6,9
Bronz	11,57	0,79	6,8
Nerez	73,08	4,98	6,8

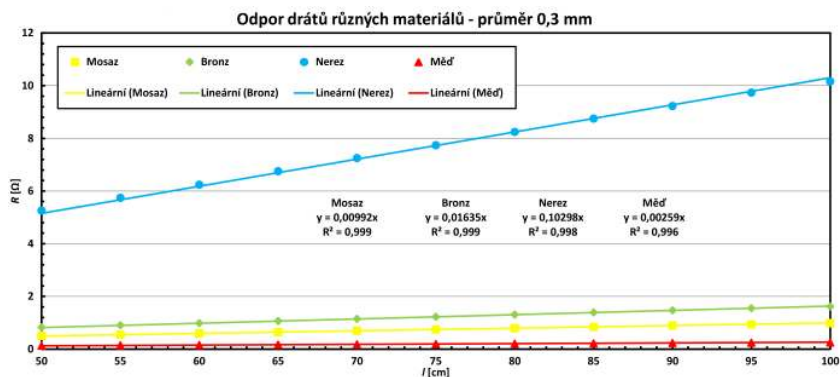
Tab. 3 Naměřené rezistivity pro dráty různých materiálů o průměru 0,3 mm

Naměřené hodnoty rezistivity drátů různých materiálů odpovídají zhruba hodnotám uvedeným v tab. 1 pro mosaz, měď a bronz. Pro měřené dráty z nerez oceli se hodnota značně liší od hodnoty uvedené v tab. 1 pro ocel. Ve všech případech měřených drátů jde však o slitiny nám neznámého složení a srovnávání s tabulkovou hodnotou je problematické. Rezistivita je vlastnost značně závislá na chemickém složení a technologii úpravy materiálu.

D [mm]	ρ [$10^{-8} \Omega \cdot m$]
0,2	74,60
0,3	73,08
0,4	72,77
0,5	73,79
0,6	70,43
0,7	74,06
0,8	73,63

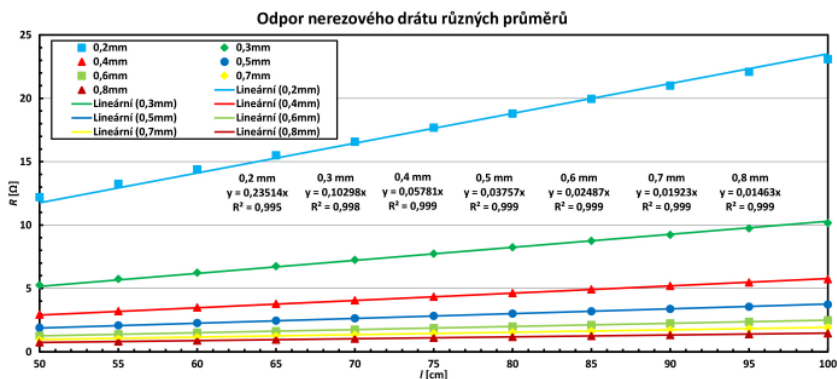
Tab. 4 Naměřené rezistivity pro nerezový drát různých průměrů

Nerezový drát různých průměrů byl pořízen u stejného dodavatele a lze tedy očekávat, že hodnoty materiálových vlastností budou stejné. Rezistivity nerezových drátů byly v rámci chyby měření (asi 7 %) naměřeny shodně pro různé průměry drátů.



Obr. 4 Odpor drátů různých materiálů o průměru 0,3 mm v závislosti na délce drátu

Pro orientaci při volbě měřících rozsahů voltmetru a ampérmetru uvádíme hodnoty měřených napětí a proudů pro různé dráty (tab. 5). Ačkoliv hodnoty proudů drátem přesahují normou stanovenou bezpečnou hodnotu proudu (10 mA) jde o zcela bezpečné měření. I při náhodném dotyku rukou na drát nepřesahuje proud tekoucí rukou bezpečnou hodnotu díky velmi malému napětí.



Obr. 5 Odpor nerezového drátů různých průměrů v závislosti na délce drátu

Materiál	D [mm]	$l = 50$ cm		$l = 100$ cm	
		U [mV]	I [mA]	U [mV]	I [mA]
Bronz	0,3	329	398	478	295
	0,7	78	395	137	359
Mosaz	0,2	435	399	619	290
	0,3	183	364	291	295
	0,4	98	352	169	310
	0,5	74	396	129	360
	0,6	45	394	80	374
	0,7	41	397	72	377
	0,8	31	397	56	381
Měď	0,3	53	398	95	374
	0,5	21	398	36	389
Nerez	0,2	4770	391	5080	220
	0,3	2051	390	2296	226
	0,4	1145	391	1374	240
	0,5	737	389	943	253
	0,6	490	391	666	269
	0,7	379	392	542	283
	0,8	292	396	435	299

Tab. 5 Hodnoty napětí a proudu měřenými dráty

Úloha je pro svou teoretickou i experimentální jednoduchost vhodná pro laboratorní praktikum z fyziky ve výuce jak na středních školách, tak i na přírodovědných, učitelských nebo technických oborech na vysokých školách. Názorně ukazuje princip měření malých odporů čtyřvodičovou metodou.

Poděkování. Autor děkuje M. Lustikovi za vyrobení přípravku pro měření rezistivity.

Literatura

- [1] Brož, J. – Roskovec, V. – Valouch, M.: Fyzikální a matematické tabulky, SNTL, Praha, 1980.

Změna vnitřní energie konáním práce

KATEŘINA VONDŘEJCOVÁ

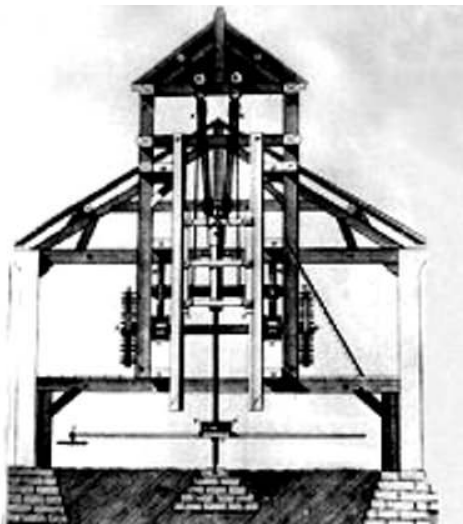
Univerzita Hradec Králové, Gymnázium Dobruška

V historii fyziky vědci začali nalézat v běžných činnostech souvislost mezi konáním mechanické práce a změnami vnitřní energie, a tedy i změnami teploty. V tomto tématu lze s žáky středních škol nahlédnout do historie fyziky, propojit poznatky z mechaniky a termiky a zapojit moderní technologie – ověřit závěry měření termokamerou.

Vrtání dělových hlavní

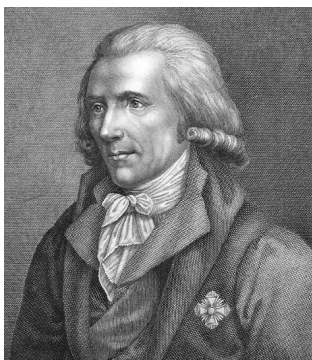
Podívejme se stručně na výrobu dělových hlavní na počátku 19. století. Dělové hlavě se odlévaly do forem a po ztuhnutí bylo třeba otvor v hlavni dovtat. Vrtací stroje měly rozměry srovnatelné s rozměry domu. Na kladkostrojích byla z podkroví svisle zavěšena dělová hlaveň, v přízemí

se nacházel žentour, který měl na hřídeli nasazený vrták. Celý stroj byl poháněn koňmi.



Obr. 1 Stroj na vrtání dělových hlavní [5]

Vrtání dělových hlavní pozoroval *Sir Benjamin Thompson* (1753–1814), který v té době působil jako ministr války na dvoře bavorského velkovévody v Mnichově. Zaujalo ho, že se dělové hlavně v průběhu vrtání zahřívají na vysokou teplotu. Uvědomil si souvislost mezi mechanickou prací a teplem.



Obr. 2 Benjamin Thompson [6]

Následně prováděl experimenty s vrtáním dělových hlavních i pro veřejnost. Do dřevěné nádoby naplněné vodou vložil bronzový válec. Při vrtání se prý bronzový válec rozžhavlil do červena a po určité době se voda začala vařit. Lidé byli udiveni, že se voda vaří, aniž by byl pod ní zapálen oheň. Příčinou ohřevu dělové hlavně bylo tření mezi vrtákem a vrtaným materiálem.

Úloha: Vrtání dělové hlavně

Jakou práci museli vykonat koně pohánějící žentour na překonání tření, jestliže se bronzová hlaveň o hmotnosti 200 kg vlivem tření rozžhavlila do červena? Uvažujme, že počáteční teplota hlavně mohla být 20 °C a během vrtání se zahřála na teplotu 700 °C. Měrná tepelná kapacita bronzu je $419 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Řešení: $m = 200 \text{ kg}$; $t_1 = 20 \text{ °C}$; $t_2 = 700 \text{ °C}$; $c = 419 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $W = ?$
Práce vynaložená na překonání tření je rovna teplu, které přijala hlaveň:

$$W = Q = mc(t_2 - t_1) = 200 \cdot 419 \cdot (700 - 20) \text{ J} = 57 \text{ MJ}$$

Koně museli vykonat práci přibližně 57 MJ.

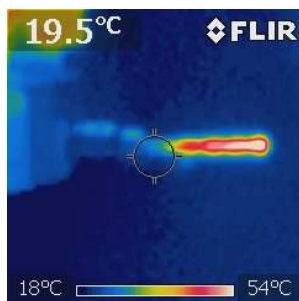
Poznámka. V realitě by koně museli vykonat větší práci, nejen na překonání třecí síly. V úloze byly pro jednoduchost zanedbány tepelné ztráty.

Změnu vnitřní energie tělesa třením můžeme pozorovat nejenom u vrtání dělových hlavních, ale také u běžných činností z našeho okolí, jako je řezání pilkou, broušení smirkovým papírem, pilování pilníkem, vrtání vrtačkou atd. Změny teploty si však svými smysly často ani nevšimneme. Můžeme ale využít termokameru, která odhalí i malou změnu teploty.

Měření termokamerou: Vrtání vrtačkou

Pomůcky: termokamera, vrtačka

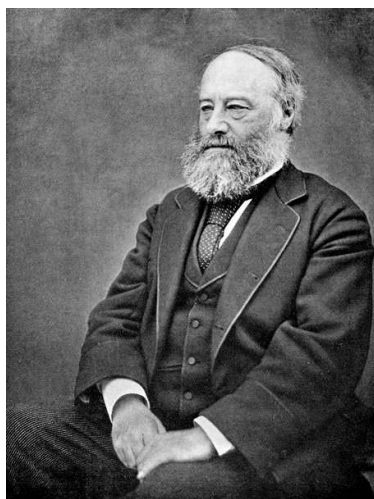
Podívejme se pomocí termokamery na vrták těsně po vyvrtání otvoru do zdi nebo jiného tvrdého materiálu. Vrták se během vrtání zahřál na vyšší teplotu, než je teplota okolí. V tomto případě bylo možné změnu teploty rozpoznat i dotekem. Při dlouhém vrtání do tvrdého materiálu se vrták může rozžhavlít až tak, že se o něj může člověk spálit. Termosnímek vrtáku těsně po vrtání je na obr. 3.



Obr. 3

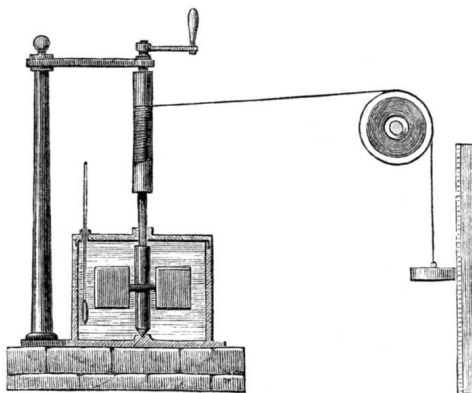
Jouleův pokus

Velmi známý experiment, který prokázal změnu vnitřní energie konáním práce, provedl *James Prescott Joule* (1818–1889).



Obr. 4 J. P. Joule [3]

Kapalina (např. olej nebo voda) byla míchána lopatkovým kolem poháněným klesajícím závažím, které bylo zavěšeno na provázku vedeném přes kladku, viz obr. 5. Pohyb lopatkových kol v kapalině zapříčinil větší rozkmitání molekul, a tedy zvýšení vnitřní energie. Joule naměřil zvýšení teploty a potvrdil tak zákon zachování energie.



Obr. 5 Jouleův pokus [7]

Úloha: Jouleův pokus

Určete změnu teploty vody o objemu 250 ml během Jouleova pokusu, jestliže na počátku bylo závaží o hmotnosti 0,5 kg pohánějící lopatkové kolo ve výšce 50 cm nad podložkou a na konci děje bylo závaží na podložce.

Řešení: $V = 250 \text{ ml} \Rightarrow m_1 = 0,25 \text{ kg}$; $m_2 = 0,5 \text{ kg}$; $h = 50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$;
 $\Delta t = ?$

Změna vnitřní energie vody je rovna změně potenciální energie závaží:

$$\Delta U = \Delta E_p$$

$$m_1 c \Delta t = m_2 g \Delta h$$

$$\Delta t = \frac{m_2 g \Delta h}{m_1 c}$$

$$\Delta t = \frac{0,5 \cdot 9,81 \cdot 0,5}{0,25 \cdot 4180} \text{ } ^\circ\text{C} = 0,002 \text{ } ^\circ\text{C}$$

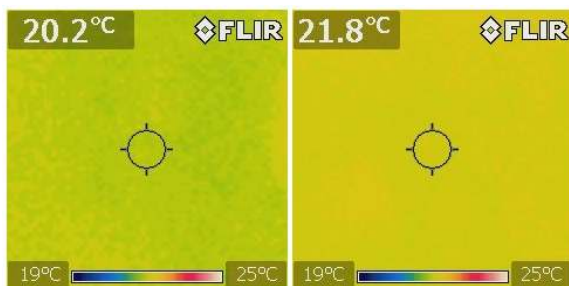
Při Jouleově pokusu by se teplota vody zvýšila o 0,002 °C.

Při mechanickém míchání se teplota kapaliny zvyšuje nejen v případě Jouleova pokusu, ale i při běžných činnostech, jako je např. šlehání ručním šlehačem při přípravě pokrmů. Zaznamenat změnu teploty kapaliny po šlehání je pomocí lidských smyslů ještě obtížnější, než u vrtáku z předchozí úlohy. Změna teploty je často lidskými smysly až nezaznamenatelná. Naměřit tyto malé změny teploty nám opět pomůže termokamera, kterou využijeme jako bezkontaktní teploměr.

Měření termokamerou: Jouleův pokus

Pomůcky: termokamera, ruční šlehač, stolní olej

Stolní olej, který má teplotu ustálenou s teplotou v místnosti, nalijeme do nádoby vhodné ke šlehání. Změříme pomocí termokamery teplotu oleje, nebo necháme změřit teplotu žákem a zaznamenáme ji. Ručním šlehačem šleháme po dobu jedné až dvou minut a opět změříme teplotu stolního oleje. Zaznamenáme hodnotu. Zjistíme, že se teplota zvýšila. V provedeném experimentu byla zaznamenána změna teploty $1,6\text{ }^{\circ}\text{C}$, viz obr. 6.



Obr. 6 Změna teploty oleje po šlehání

Údery kladivem

Michail Vasiljevič Lomonosov (1711–1765) byl velice všestrannou osobností žijící v Rusku. Zabýval se chemií, fyzikou, geografii, hornictvím, ruskou gramatikou, psal básně, vytvářel skleněné mozaiky. Ve fyzice se zabýval astronomií, optikou, elektrickými a magnetickými jevy a také se zamýšlel nad příčinami tepla a chladu. Patřil mezi zastánce částicové struktury látek. Údajně se zamýšlel nad příčinami zvýšení teploty kovového materiálu, bylo-li do něho opakovaně udeřeno kladivem.

Úloha: Údery kladivem

Vypočítejte změnu teploty železného předmětu o hmotnosti $0,5\text{ kg}$, udeříme-li do něho desetkrát kladivem o hmotnosti 2 kg . Každý úder kladivem začíná $1,2\text{ m}$ nad předmětem s počáteční rychlostí $2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Měrná tepelná kapacita železa je $450\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Uvažujme, že na zvýšení vnitřní energie železného předmětu připadne 40% mechanické energie kladiva v počátečním stavu.

Řešení: $m_1 = 0,5 \text{ kg}$; $m_2 = 2 \text{ kg}$; $h = 1,2 \text{ m}$; $c = 450 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;
 $v = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$; $\Delta t = ?$



Obr. 7 Michail Vasiljevíč Lomonosov [4]

Změna vnitřní energie tělesa a kladiva po deseti úderech je rovna desetinasobku mechanické energie kladiva v počátečním stavu. Na železný předmět připadne 40 % celkové energie:

$$\Delta U = 0,4 \cdot 10E$$

$$\Delta U = 4(E_k + E_p)$$

$$m_1 c \Delta t = 4 \left(\frac{1}{2} m_2 v^2 + m_2 g h \right)$$

$$\Delta t = \frac{4 \left(\frac{1}{2} m_2 v^2 + m_2 g h \right)}{m_1 c}$$

$$\Delta t = \frac{4 \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 9,81 \cdot 1,2 \right)}{0,5 \cdot 450} \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$\Delta t = 0,5 \text{ } ^\circ\text{C}$$

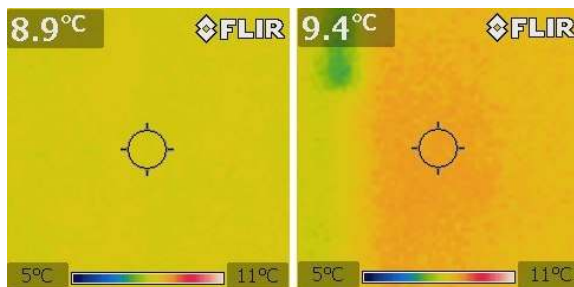
Po deseti úderech kladivem se teplota předmětu zvýšila o $0,5 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Také zvýšení teploty kovaného materiálu po úderech kladivem je možné ověřit pomocí termokamery, která poslouží jako bezkontaktní teploměr.

Měření termokamerou: Údery kladivem

Pomůcky: termokamera, kladivo, kovový předmět

Vhodný kovový předmět položíme na pevnou podložku, nebo upevníme do svěráku. Změříme teplotu předmětu pomocí termokamery. Kladivem (při experimentu bylo využito kladivo o hmotnosti 2 kg) 10krát udeříme do jednoho místa předmětu. Toto místo ihned po úderech nasnímáme termokamerou a změříme teplotu. Při provedeném experimentu bylo naměřeno zvýšení teploty o 0,5 °C, viz obr. 8.



Obr. 8 Změna teploty železného předmětu

Literatura

- [1] *Kraus, I.:* Fyzika v kulturních dějinách Evropy. Od Leonarda ke Goethovi. Nakl. ČVUT, Praha, 2007.
- [2] *Štoll, I.:* Dějiny fyziky. Prometheus, Praha, 2009.
- [3] <http://www.converter.cz/fyzici/joule.htm>.
- [4] http://www.math.nsc.ru/LBRT/g2/english/ssk/mvl-300_e.html.

Zdroje vyobrazení

- [5] http://en.wikipedia.org/wiki/Jean_Maritz#mediaviewer/File:Vertical_cannon_drilling.jpg.
- [6] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/3c/Benjamin_Thompson.jpg.
- [7] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c3/Joule%27s_Apparatus_%28Harper%27s_Scan%29.png.

Úlohy z termiky pro fyzikální olympioniky (3)

PAVEL KABRHEL – IVO VOLF

ÚK FO, Univerzita Hradec Králové

Výuka fyziky je důležitá především proto, že představuje společně s matematikou teoretický základ techniky. Druhým úkolem je podílet se na vytváření modelového pohledu na jevy, jež jsou obsahem většiny přírodovědných předmětů, a přispět tak k uvědomělému chápání světa kolem nás. Neměli bychom také zapomínat na další, velmi důležitý zřetel, a to na výchovu k pochopení celkového kulturního dědictví minulých generací. Pomineme-li skutečnost, že oheň a tepelná úprava potravy umožnila již v pravěku lidem lepší výživu, fyzikální základy termiky začaly podstatně ovlivňovat rozvoj technických postupů a zařízení zejména od konce 18. století, kdy byl zdokonalen parní stroj. Tato skutečnost měla za následek zařazení tohoto vynálezu do výroby, do značné míry předznačila změnu manufaktur na průmyslové podniky, což ovlivnilo nejen výrobní sféru, ale také následné období dějin, nazvané jako první průmyslová revoluce.

Pojem tepla se však postupně upřesňoval – zatímco fyzikům konce 18. století, ale dokonce i *Sadi Carnotovi* (1796–1832) stačilo chápání tepla jako fluida (mimočodem, teplo přijaté a teplo odevzdané nepracuje s tímto pojmem jinak a směšovací kalorimetrická rovnice taktéž), pokusy na začátku a zejména v polovině 19. století vedly k názoru, že existuje vztah mezi vykonanou prací a „využitým“ teplem, později mezi teplem a vnitřní energií určité soustavy částic (ideální, případně reálný plyn). Ještě v 60. letech minulého století byla do výuky fyziky na střední škole zařazena laboratorní práce, během níž žáci na základě měření vykonané práce a tepla, nutného k zahřátí vody v kalorimetru, vypočítávali tzv. mechanický ekvivalent tepla a tepelný ekvivalent práce, prakticky přepočít jednotky tepla kilokalorie na jednotku práce joule a naopak

Historická odbočka nebude žákům ani učitelům určitě na škodu – co je to teplo, to je velmi obtížné přesně vymezit, zatímco řešit problémy termiky bez pojmu teplo vůbec nedovedeme. Na základě experimentů dospěl

např. německý fyzik žijící v Rusku *Georg Wilhelm Richman* (1711–1753) ke kalorimetrické rovnici pro výpočet výsledné teploty při smíchání teplé a studené vody (teplá voda předala teplo studené vodě). Richman se nakonec stal obětí výzkumu atmosférické elektřiny. Další významnou osobností byl skotský fyzik a chemik *Joseph Black* (1728–1799), který zavedl pojem latentní teplo a specifické teplo (dnes správněji měrná tepelná kapacita) a jako chemik zkoumal vlastnosti oxidu uhličitého. Výsledkem bylo zavedení kalorimetrické rovnice v tom tvaru, jak se o ní vyučuje v 8. ročníku základního vzdělávání. Termika 18. a 19. století dospívala na základě zobečňování k teoretickým závěrům, které vyvrcholily termodynamickými zákony, tedy jakýmiisi principy, na nichž byla dále budována, a na druhé straně přinesla mnoho námětů pro praktické použití. Budeme-li hledat možnosti, které vedou k využití pojmů teplo a teplota, pak můžeme ukázat, že „fyzika je skutečně kolem nás“.

Co považujeme za šíření tepla

Zdroj tepla je místo, případně zařízení, kde probíhají děje, jež spojujeme se „vznikem“ tepla. To je zpravidla doprovázeno skutečností, že zdroj tepla má vyšší teplotu než jeho okolí, a tak dochází k „šíření tepla“ do míst, jejichž teplota je nižší. O tepelných zdrojích víme, že jsou přirozené (např. Slunce, nitro Země, sopky aj.) nebo umělé (oheň v krbu, elektrická kulma na vlasy nebo radiátor ústředního či etážového topení). Teplo se může šířit vedením pevnou látkou (přes kovový obal radiátoru), prouděním média (vzduchu nebo vody) nebo ve formě elektromagnetického záření. V termodynamice můžeme najít jednoduché zákonitosti pro šíření tepla vedením, případně radiací. U šíření teplé látky (média) jde většinou o turbulentní proudění, k čemuž jednoduché vztahy nemáme, a proto se ve školním prostředí raději vyhneme kvantitativním vztahům a děje popisujeme (a částečně i vysvětlujeme) kvalitativně. „Výroba“, přenos a „spotřeba“ tepla patří k lidské civilizaci, a proto bychom těmto aktivitám měli věnovat přiměřený čas. V učebnicích fyziky pro gymnázia, jež vznikaly v 80. letech minulého století, je věnován problematice šíření tepla jen krátký článek [1]. Také v Přehledu středoškolské fyziky [2] je přenosu tepla vymezen prostor asi 2 strany.

Teplo může vznikat při hoření paliva (např. pevná paliva – uhlí, kapalná paliva – benzín, plynná paliva – zemní plyn, propan-butan). Každé palivo je charakterizováno výhřevností, případně spalným teplem. Pro uhlí se zavádí tzv. měrné palivo s výhřevností 7 000 kcal/kg, tedy v soustavě SI

jde o hodnotu 29,3 MJ/kg, různé formy spalování pak ovlivňují větší, či menší efektivnost získání tepla, vyjádřenou účinností spalovacího zařízení. Tepla můžeme však získat i pomocí elektrických zářičů nebo ohřivačů.

Problém 1: Kolik tepla získáme dokonalým spálením benzínu?

Každý řidič sleduje spotřebu benzínu v motoru svého automobilu; automobily vyšších cenových skupin mají svůj počítač, který řidiči sděluje, jaká je okamžitá a jaká předpokládaná spotřeba během jízdy. Při hoření benzínu ve válci motoru vzniká teplo, projevující se zvýšením teploty a tlaku plynu, který vytváří podmínky pro vznik síly, kterou plyn působí na píst a zahajuje tak možnosti využití pohybové síly, nutné pro pohyb automobilu.

Poznámky k vytvoření modelové situace. Výhřevnost benzínu najdeme ve fyzikálních nebo technických tabulkách. K výpočtu postačí střední údaj, který je dán hodnotou 46,4 MJ/kg [3]. Zdroj [3] nám poskytne mnoho technických zajímavostí o benzínu a naftě.

Řešení. Protože spotřeba benzínu se udává v litrech, využijeme vztahu $\rho = m/V$, kde hustota benzínu je 0,71 kg/dm³ až 0,77 kg/dm³; můžeme pracovat se střední hodnotou 0,74 kg/dm³. Potom nám vychází střední hodnota výhřevnosti benzínu 34,3 MJ/litr. Při běžné jízdě automobilu po silnici stálou rychlostí 90 km/h s uvážením, že motor automobilu musí zajistit překonání odporových sil proti pohybu asi 600 N na trase 10 km a účinnost motoru a přenosu síly i pohybu odhadneme na 22 %, potom nám vychází vykonaná práce $W = Fs$, tedy 6,0 MJ, potřebné teplo $6,0/0,22 \text{ MJ} \doteq 27 \text{ MJ}$ a spotřeba necelých 0,8 litru/10 km, přepočteme na 8 litrů/100 km.

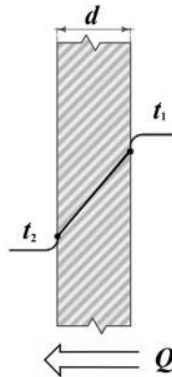
Vedení tepla pevnou stěnou

Nejjednodušší vztahy použijeme při průchodu tepla homogenní deskou všude stejné tloušťky d , plošného obsahu S , na jejích stěnách je prostředí o teplotě t_1 , t_2 ; teplo prochází napříč deskou po dobu τ . Deska může být vyrobena z různého materiálu – některé desky vystupují jako dobré vodiče, jiné jako izolanty, což vyjádříme součinitelem tepelné vodivosti λ .

Empirický vzorec pro ustálené vedení tepla deskou je

$$Q = \frac{\lambda S \tau \Delta t}{d}. \quad (1)$$

Takto bychom mohli řešit problémy spojené s neomítnutou cihlovou stěnou.



Obr. 1. Průchod tepla z jednoho prostředí do druhého homogenní deskou

Problém 2: Kolik tepla je třeba k udržení stálé teploty v místnosti?

Předpokládejme, že se rodina musela nastěhovat na zimu do ještě nedokončeného rodinného domku. Jaký je denní únik tepla z rohové místnosti stěnami o rozměrech: délka stěn je 5,0 m a 6,0 m, výška místnosti 2,7 m. Předpokládejme stálou venkovní teplotu 5,0 °C, požadovanou stálou teplotu v místnosti 20 °C. Jaký tepelný výkon musí mít lokálně umístěný elektrický ohřívač?

Poznámky k vytvoření modelové situace. K údajům musíme ještě dodat tloušťku zdi 30 cm a součinitel tepelné vodivosti cihel (maltu mezi cihlami považujeme za materiál skoro stejných tepelných vlastností) $\lambda = (0,7 \text{ až } 1,3) \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$, což nacházíme například ve [4], samozřejmě součinitel tepelné vodivosti některých stavebních materiálů, například pórobetonových tvárnic, je mnohem menší. Předpokládáme dále, že zbylé stěny, strop a podlaha mají z obou stran prostředí se stejnou teplotou, takže k úniku tepla nedochází. Při prvotním odhadu úniku tepla nebudeme uvažovat s oknem.

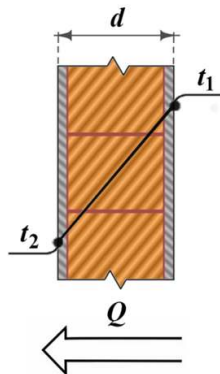
Řešení. Dosadíme do výše uvedeného vztahu (1) údaje: $S = 29,7 \text{ m}^2$, $d = 0,30 \text{ m}$, rozdíl teplot $\Delta t = 15 \text{ K}$, doba úniku tepla $\tau = 24,0 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$ a $\lambda = (0,7 \text{ až } 1,3) \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$. Dosadíme nejprve dolní a potom horní mez, takže únik tepla představuje necelých 90 MJ až skoro 170 MJ. Tepelný výkon elektrického nebo plynového přímotopu musí být 1 000 W

až 2 000 W, což není daleko od hodnoty, kterou bychom byli schopni třeba i odhadnout.

Problém 3: Jak zlepšit tepelnou izolaci stěn?

Neomítnutá stěna (zvenku i zevnitř) nevzbuzuje estetický dojem a také špatně brání únikům tepla z místnosti. Proto ji do příští zimy opatříme omítkou. Stanovte, jak se změní průchod tepla stěnou.

Poznámky k vytvoření modelové situace. Pro zjednodušení budeme předpokládat, že tloušťka omítky zevnitř i zvenku bude stejná 1,5 cm, součinitel tepelné vodivosti omítky je 0,10 W/(m · K) a další údaje ponecháme z minulého problému. Rozdíl teplot bude dán stálou venkovní teplotou 5,0 °C a požadovanou vnitřní teplotou 20 °C, teplotní rozdíl je tedy 15 °C. Vedení tepla budeme považovat za ustálené, takže platí výše uvedený vztah (1) pro každou vrstvu, kterou teplo prochází.



Obr. 2. Průchod tepla z jednoho prostředí do druhého omítnutou stěnou

Řešení. Označíme vyšší teplotu uvnitř t_1 , nižší teplotu venku t_2 a na rozhraní omítky a zdi jsou teploty t'_1 a t'_2 . Při ustáleném vedení tepla je výraz $Q/S\tau$ roven hustotě tepelného toku, kterou lze označit q a vyjádřujeme ji v jednotkách W/m². Poté $q = \lambda\Delta t/d$. Pro ustálenou hustotu tepelného toku je $q = \text{konst.}$, odtud určíme jednotlivé rozdíly teplot $\Delta t = qd/\lambda$ pro všechny tři vrstvy — vnitřní omítku, cihlovou stěnu a vnější omítku, které brání úniku tepla. Zjistíme, že celkový teplotní rozdíl lze potom vyjádřit $\Delta t = q(d_1/\lambda_1 + d_2/\lambda_2 + d_3/\lambda_3)$, ale protože vnější a vnitřní omítky jsou stejné, jsou parametry první a třetí vrstvy stejné. Pro hustotu tepelného

toku potom platí

$$q = \frac{\Delta t}{2\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}}. \quad (2)$$

Následně pro únik tepla platí

$$Q = S\tau q = s\tau \frac{\Delta t}{2\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}}. \quad (3)$$

Dosadíme dané a vyhledané hodnoty a určíme denní únik tepla v námi sledované místnosti; pro srovnání s předchozím případem zjišťujeme, že únik tepla během 24 hodin se zmenšil na hodnotu 50 MJ až 80 MJ.

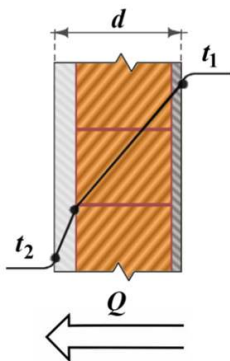
Problém 4: Zateplování rodinných domků

Snižování úniku tepla se projeví menší spotřebou dodávek tepla (v rámci lokálního topení menší spotřebou paliva), a s tím se snižuje i úhrada za dodané teplo, kterou fakturují teplárny či elektrárny (snížení výdajů domácnosti). Jedním ze způsobů je zateplení pomocí polystyrénových desek, které se nalepí na vnější stěny a jejich povrch se esteticky upraví. Jak se změní únik tepla v tomto případě?

Poznámky k vytvoření modelové situace. Protože se jedná o stejnou situaci, ponecháme údaje $S = 29,7 \text{ m}^2$, $d = 0,30 \text{ m}$, rozdíl teplot $\Delta t = 15 \text{ K}$, a doba úniku tepla $\tau = 24,0 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$. Polystyrén je tepelný izolant, takže součinitel tepelné vodivosti bude nižší, tedy $\lambda = 0,038 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$, ale tloušťka desky je jen 4,0 cm. Tloušťka vnitřní omítky je 1,5 cm a $\lambda = 0,10 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$. Opět budeme uvažovat tři vrstvy (omítku, zeď a polystyrén, povrchovou úpravu polystyrénu zanedbáme), celkový teplotní rozdíl se bude vytvářet v jednotlivých vrstvách, kdy budeme opět předpokládat stálou hustotu tepelného toku.

Řešení. Vyjdeme z výše odvozených vztahů pro průchod tepla několika vrstvami, avšak musíme změnit údaje podle vstupních informací. Pro zapamatování si uvědomíme analogii: Rozdíl teplot odpovídá rozdílu elektrických potenciálů v elektrickém obvodu, procházející teplo odpovídá elektrickému proudu a zbylá část ve vzorci připomíná elektrický odpor; lze tedy provést analogii mezi zákonitostmi pro vedení tepla i vedení elektrického náboje. Tři vrstvy připomínají sériové zapojení tří rezistorů.

Po dosazení získáváme pro denní hodnotu úniku tepla dvěma stěnami necelých 24 MJ až 27 MJ, což ve srovnání s původními neomítnutými stěnami představuje značnou úsporu.



Obr. 3. Průchod tepla z jednoho prostředí do druhého omítnutou a zateplenou stěnou

Problém 5: Proč je stěna vnější zdi v pokoji chladnější než vzduch v místnosti?

Když v teplé místnosti položíme ruku na venkovní stěnu, zdá se být chladnější, než je teplota vzduchu v místnosti; zvenku pak pozorujeme rozdíl opačný – teplota stěny je vyšší. To se vysvětluje tak, že těsně u svislé stěny proudí slabá vrstvička vzduchu (nahoru nebo dolů) a protože vzduch je dobrý izolant, je tepelný odpor této vrstvičky značný a podílí se na odporu proti přestupu tepla. Odhadněte, jak tato skutečnost ovlivňuje přestup tepla z místnosti směrem ven.

Poznámky k vytvoření modelové situace. Úlohu doplníme o další zpřesnění, tak se nám náš model stává sice složitější, ale lépe vyjadřuje realitu. K předchozím výpočtům musíme přidat vztah pro přestup tepla z ovzduší do stěny, $Q = \alpha S \tau \Delta t$, kde α je součinitel přestupu tepla ze vzduchu do stěny, respektive ze stěny naopak do vzduchu.

Řešení.

$$q = \alpha_1(t_1 - t'_1) = \frac{\lambda}{\delta}(t'_1 - t'_2) = \alpha(t'_2 - t_2), \quad (4)$$

kde δ je šířka stěny.

Tyto rovnice (4) je možné upravit do tvaru

$$t_1 - t'_1 = \frac{q}{\alpha_1} \quad (5)$$

$$t'_1 - t'_2 = \frac{q\delta}{\lambda} \quad (6)$$

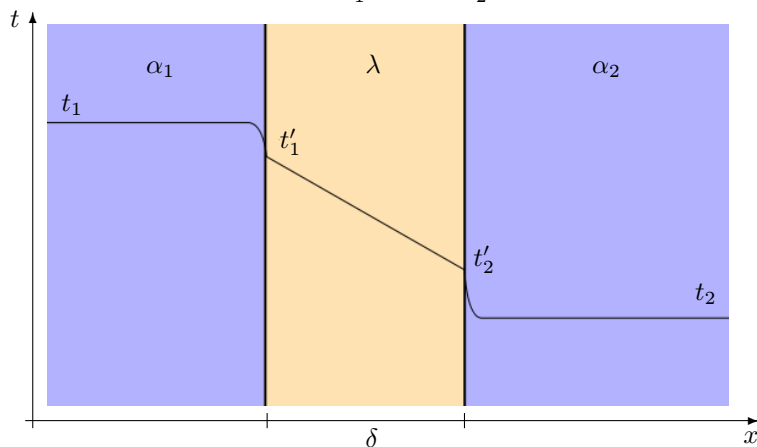
$$t'_2 - t_2 = \frac{q}{\alpha_2} \quad (7)$$

Sečtením rovnic (5), (6) a (7) dostaneme

$$t_1 - t_2 = q \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = \frac{q}{k},$$

kde k představuje celkovou tepelnou vodivost, respektive koeficient (součinitel) pronikání (přechodu) tepla, pro nějž platí

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}.$$



Obr. 4. Průchod tepla stěnou [5]

Vezmeme v úvahu všechny nám známé údaje, které jsme použili při řešení minulých problémů a doplníme ještě o součinitel přestupu tepla ze vzduchu do stěny nebo ze stěny naopak do vzduchu. Můžeme pro oba případy uvažovat $\alpha = 20 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ [7, 8, 9, 10]. Vypočteme součinitel přechodu tepla pro zateplenou stěnu, $k = (0,58 \text{ až } 0,65) \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$, Pro denní únik tepla vychází hodnoty 22 MJ až 25 MJ.

Problém 6: Jak je to v místnosti s jednoduchým oknem?

Místnost bez oken se možná hodí pro vytvoření školní laboratoře pro pokusy v optice, ale není to tak obvyklé. Proto opatříme místnost alespoň jedním oknem o rozměrech: šířka 2,0 m, výška 1,5 m. Pevný rám dokonale utěsníme a do něj umístíme jedno sklo o tloušťce 2 mm a rozměrech 1,90 m a 1,40 m, tedy o obsahu 2,66 m². Odhadněte, jak se změní únik tepla oproti situaci, kdy v daném prostoru byla omítnutá zeď.

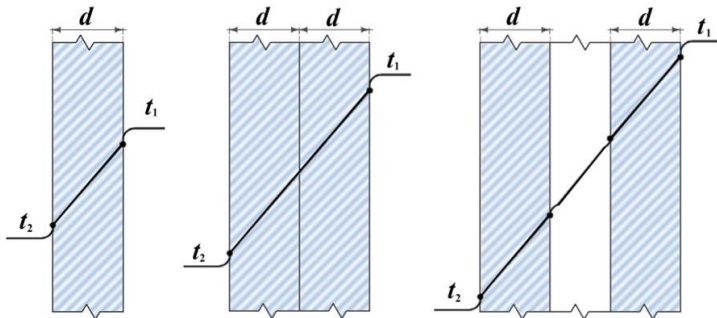
Poznámky k vytvoření modelové situace. Úlohu doplníme o další zpřesnění. Součinitel tepelné vodivosti pro okenní sklo je $\lambda = (0,6 \text{ až } 1,0 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K}))$, součinitel přestupu tepla ze vzduchu do skla a opačně můžeme opět uvažovat $\alpha = 20 \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$.

Řešení. Porovnáme součinitel přechodu tepla $k = (0,58 \text{ až } 0,65) \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$ pro případ zateplené cihlové stěny téhož obsahu jako je sklo se součinitel přechodu tepla jednoduchého skla $k' = (9,7 \text{ až } 9,8) \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$. Pro denní únik tepla stěnou vychází hodnoty 2,0 MJ až 2,2 MJ, pro sklo 33 MJ.

Problém 7: Je dvojité sklo pro únik tepla lepší než jednoduché?

Dvojité sklo je vzhledem k úniku tepla oknem výhodnější, neboť představuje zvýšení odporu proti průchodu tepla z teplejší místnosti směrem ven z domu. Přesvědčíme se o tom výpočtem, když místo tloušťky d dosadíme do vztahu pro teplo hodnotu $2d$. Je tento přístup ke stanovení úniku tepla správný?

Poznámky k vytvoření modelové situace. Pro vytvoření správné modelové situace nakreslíme vhodný náčrtek (průchod tepla jedním sklem, dvěma skly položenými přímo na sebe, dvěma skly se vzduchovou mezerou).



Obr. 5. Průchod tepla z jednoho prostředí do druhého oknem

Řešení. Uvážíme-li přestup tepla v případě dvojitého skla se vzduchovou mezerou, přibude nejen sklo, ale také přestup ze skla do vzduchu a ze vzduchu do skla. Prostor mezi oběma skly je v případě dvojitých oken užívaných v novostavbách nebo rekonstrukcích určitým uzavřeným prostorem, v němž pobíhá v zimě přenos tepla z vnitřku budovy ven a v létě naopak zvenčí do místnosti. To je možno pozorovat při mytí staršího rozšroubovaného okna na jaře nebo na podzim, když sledujeme, které ze skel je uvnitř zaprášené. Technicky lze účinek zvýšit, když se sníží tlak (i hustota) vzduchu v prostoru mezi skly.

Problematika vedení tepla se v podstatě týká nás všech – buď v rámci tepelné pohody nebo při kontrole stavu financí v peněžence či na bankovním účtu. Na tomto případě lze žákům názorně ukázat, že teoretické poznatky mají přímý odraz v životě a fyzika je vskutku všude kolem nás. Zaujala-li vás daná problematika, můžete se s ní podrobněji seznámit na stránkách Fyzikální olympiády [7, 11].

Literatura

- [1] *Svoboda, E.*: Fyzika pro II. ročník gymnázií. 1. vyd., SPN, Praha, 1985.
- [2] *Svoboda, E.*: Přehled středoškolské fyziky. 3. vyd., Prometheus, Praha, 1998.
- [3] Benzín. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. Dostupné z: http://cs.wikipedia.org/wiki/Benz%C3%ADn#Energetick.C3.BD_obsah...28v.C3.BDh.C5.99evnost.29
- [4] Tepelná ochrana. VAPIS stavební hmoty. [online]. Dostupné z: <http://www.vapis-sh.cz/pro-projektanty/stavebne-fyzikalni-vlastnosti/tepelna-ochrana-akumulace/soucinitel-tepelne-vodivosti/soucinitel-tepelne-vodivosti.html>
- [5] Prostup tepla.svg. In: Wikipedia: the free encyclopedia [online]. Dostupné z: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Soubor:Prostup-tepla.svg>
- [6] Stavební konstrukce – tepelný odpor a součinitel prostupu tepla, teorie. EkoWATT [online]. 2011. Dostupné z: <http://ekowatt.cz/uspory/ztraty.shtml>
- [7] Přenos tepla. Fyzikální olympiáda. [online]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/texttz.pdf>
- [8] Heat Transfer Coefficient. Thermopedia. [online]. Dostupné z: <http://www.thermopedia.com/content/841/>
- [9] Wärmeübergangskoeffizient. Formel-sammlung.de [online]. 2004. Dostupné z: http://www.formel-sammlung.de/physik/wertetabellen/waermeleitfaehigkeit_waermeuebergangs_waermedurchgangskoeffizient.htm
- [10] Wärmeübergangskoeffizienten. Schweizer-fn.de [online]. Dostupné z: http://www.schweizer-fn.de/stoff/wuebergang_gase/wuebergang_gase.php
- [11] Studijní texty. Fyzikální olympiáda [online]. 2002–2014. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada>

Demonstrační experimenty se skenerem a dokumentovou kamerou

ČENĚK KODEJŠKA – ADAM ČERNOHORSKÝ – LUKÁŠ PAVEL

Gymnázium, Nový Bydžov, Komenského 77

Demonstrační experimenty se skenerem patří k těm experimentům, které okamžitě zaujmou pozornost žáků. Prvním motivačním faktorem je netradiční použití zařízení, které žáci sice znají, ale využívají ho zcela jiným způsobem – ke skenování dokumentů. Skutečnost, že se skener dá použít i jako fyzikální pomůcka je zcela překvapí. Druhým důležitým faktorem je možnost položit problémovou otázku ještě před demonstrací samotného experimentu: jak bude vypadat výsledný skenogram předváděného pohybu?

Využití skeneru při výuce fyziky nás zaujalo při krátkém vystoupení slovenského fyzika *Bora Gregorčiče* na Veletrhu nápadů učitelů fyziky v Hradci Králové, které proběhlo v roce 2013 [1]. Rozhodli jsme se navrhnout několik experimentů z oblasti teorie kmitů a optiky, které mohou být svým provedením alternativou např. k demonstraci průběhu kmitů ladičky s hrotem na zakouřeném kousku skla nebo k pokusům z paprskové i vlnové optiky.

Protože některé experimenty vyžadovaly i vertikální polohu skeneru, ve které se s klasickým skenerem pracuje jen obtížně, vyrobili jsme si jednoduchý skener s mechanickým pohonem, který dokáže skenovat jak horizontálně, tak vertikálně.

Jako skenovací zařízení jsme využili ruční barevný skener Media-Tech SCANLINE MT4090 s rozlišením 600 dpi (obr. 1). Skener jsme zabudovali do vyrobené dřevěné konstrukce opatřené pojezdy, které běžně slouží k pohybu skříňového šuplíku. Pohyb skeneru pak zajišťoval provázek, který byl přes pevnou kladku, upevněnou na jedné straně skeneru, obtočen kolem hřídele spojené s mechanickou kličkou (obr. 2). Napnutí provázku zajišťovala přídatná pružina s velkou tuhostí.

Výsledný skenogram se automaticky ukládá ve formátu JPG na microSD kartu, která je zasunuta z vnější strany skeneru a lze ji bez problému

kdykoliv vyjmout. Skener je také vybaven USB rozhraním, přes které lze nasnímaný obrázek přenést pomocí kabelu do počítače.



Obr. 1 Ruční skener SCANLINE MT4090



Obr. 2 Pohled na vyrobený skener

Pro pokusy, kterými demonstrujeme zákon odrazu a lomu, jsme použili dokumentovou web kameru IPEVO P2V s rozlišením až 1600×1200 pixelů. Tato dvou megapixelová USB kamera slouží primárně ke snímání dokumentů nebo obrázků v učebnici. Je to také ale výborný prostředek pro snímání experimentů, které jsou zejména ze zadních pozic třídy špatně viditelné. Obraz je z kamery přenášen do počítače, který lze propojit s dataprojektorem. Na velkém plátně jsou pak dobře viditelné i ty nejmenší detaily experimentu. Kamera má šestinásobný digitální zoom, možnost volby expozice snímaného obrazu, umožňuje práci ve full screen módu a obraz zachytit do fotografie ve formátu JPG nebo videa do 30 snímků za sekundu při rozlišení 640×480 pixelů.

V další části příspěvku popíšeme několik experimentů z oblasti teorie kmitů a optiky.

Demonstrace sinusového průběhu kmitů kyvadla

Při realizaci experimentu jsme vycházeli z jediné dostupné publikace na toto téma [1]. Kyvadlo je třeba sestavit z nějaké kovové tyčinky o délce cca 10–15 cm, kterou zavěsíme oběma konci pomocí kancelářských sponek na tyč upevněnou horizontálně do laboratorního stojanu (obr. 3). Výška kyvadla nad skenerem by měla být co nejmenší, aby byl výsledný skenogram dobře viditelný.



Obr. 3 Kmity kyvadla – uspořádání experimentu

Kyvadlo rozkmitáme kolmo na směr pohybu ručního skeneru a spustíme samotné skenování. Ruční skener zaznamenává periodický pohyb kyvadla a zároveň v reálném čase vykresluje výslednou křivku, kterou můžeme vidět na obr. 4. Na skenogramu lze pozorovat i útlum amplitudy a lze tedy současně demonstrovat i tlumené kmity.



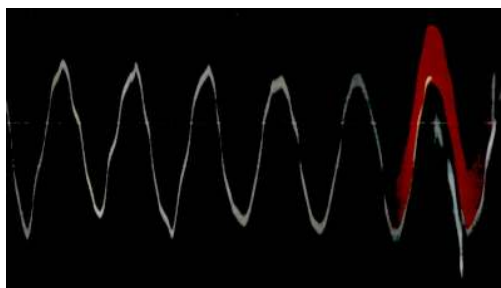
Obr. 4 Skenogram kmitů kyvadla

Demonstrace sinusového průběhu kmitů pružinového oscilátoru

Experiment sestavíme obdobným způsobem s tím rozdílem, že skener bude nyní pracovat ve vertikální poloze. Místo kovové tyčinky použijeme při realizaci kmitů špejli, kterou přichytíme pomocí izolepy k závaží zavěšenému na pružině. Uspořádání experimentu je na obr. 5 a zachycený skenogram na obr. 6.



Obr. 5 Kmity pružinového oscilátoru – vertikální poloha skeneru

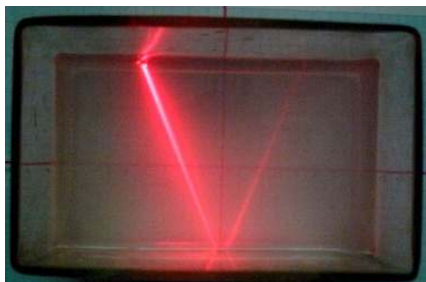


Obr. 6 Skenogram kmitů pružiny

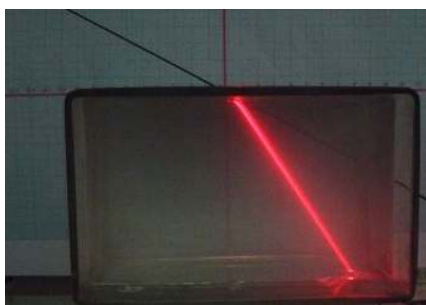
Ověření zákona odrazu a lomu

Zákon odrazu a lomu jsme realizovali s využitím skleněné vany naplněné vodou a laserového ukazovátka jako zdroje světla. Do vody jsme pro lepší viditelnost probíhajícího paprsku přidali několik kapek mléka. Pod vanu jsme umístili milimetrový papír s vyznačenými souřadnými osami, abychom dokázali experiment vyhodnotit i kvantitativně.

Původní záměr, využít k záznamu odraženého nebo lomeného paprsku skener, se ukázal jako lichý. Skener nedokázal ostře nasnímat laserový paprsek ani v rozptylujícím prostředí vody s mlékem. Na sejmutí obrazu jsme tedy použili dokumentovou kameru, která shora snímala průběh dopadajícího a odraženého, resp. lomeného paprsku. Z nasnímaných obrázků pak můžeme pomocí nějakého grafického softwaru (např. Corel Draw) nebo pomocí tištěné verze ověřit změřením příslušných úhlů platnost zákona odrazu i lomu. V případě zákona lomu je dobré na milimetrový papír tužkou vyznačit i směr dopadajícího paprsku (na obr. 8 černě). Výsledky realizace obou pokusů jsou na obr. 7 a obr. 8.



Obr. 7 Ověření zákona odrazu



Obr. 8 Ověření zákona lomu

Pro úhel dopadu $\alpha = 30^\circ$ byla zjištěna naměřená hodnota úhlu lomu $\beta = 24^\circ$, která dobře koresponduje s teoreticky vypočítanou hodnotou $23,5^\circ$ (pro prostředí vzduch–voda). Při realizaci zákona odrazu jsme do vody umístili malé zrcátko. Laserový paprsek jsme pak zaměřili tak, aby se bod odrazu při pohledu shora nacházel na jedné ze souřadných os nakreslených na milimetrovém papíru. Naměřený úhel odrazu 23° se shodoval s úhlem dopadu.

Na závěr poznamenejme, že příslušné úhly nemusíme nutně měřit úhloměrem nebo příslušným nástrojem na měření úhlů v daném grafickém programu. Ke zjištění velikosti úhlu odrazu nebo lomu můžeme použít i trigonometrické funkce.

Ověření vztahu pro ohyb světla na optické mřížce

V tomto experimentu jsme jako zdroj světla využili postupně červené laserové ukazovátka o vlnové délce 650 nm, zelený laser o vlnové délce 532 nm a fialový laser o vlnové délce 405 nm. Optickou mřížku jsme vytvořili z CD disku, ze kterého jsme pomocí izolepy odstranili bílý potisk, takže jsme získali průhlednou optickou mřížku s mřížkovým parametrem $b = 1,6 \cdot 10^{-6}$ m, který odpovídá počtu 625 drážek na 1 mm záznamu [2].

Laserový paprsek směřoval kolmo přes CD na plochu skeneru, na které byl umístěn lícovou stranou dolů milimetrový papír (obr. 9).



Obr. 9 Určení vlnové délky světla laserového ukazovátka – uspořádání experimentu

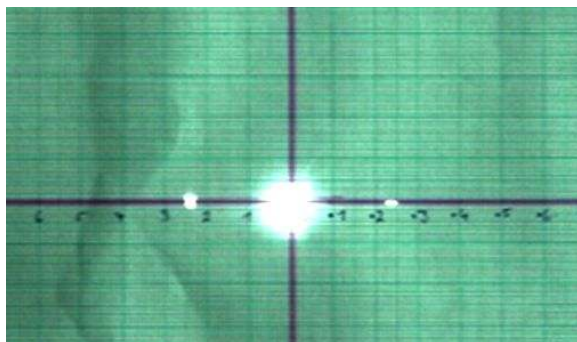
Měření jsme provedli pro různé vzdálenosti l CD disku od plochy skeneru tak, aby vzdálenost nultého a prvního maxima y nepřesáhla plochu skeneru. Na nasnímaném skenogramu (obr. 10) lze pak přímo změřit polohu maxim prvního řádu a z níže uvedeného vztahu vypočítat hodnotu vlnové délky λ laserového světla:

$$\lambda = \frac{b}{\sqrt{\frac{l^2}{y^2} + 1}}$$

Naměřená data jsou uvedena v tabulce 1.

Typ laseru	l (cm)	y (cm)	λ (nm)
red (650 nm)	4,9	2,4	704
	14,5	6,5	655
	20,5	9,3	661
green (532 nm)	3,0	1,1	551
	14,2	5,1	541
	34,1	12,3	543
purple (405 nm)	9,0	2,4	412
	14,5	3,9	416
	18,9	5,0	409

Tab. 1



Obr. 10 Skenogram difrakčního obrazce s jasně viditelnými maximy

Při měření je velice důležité změřit co nejpřesněji (s přesností na desetinu milimetru) jak vzdálenost CD disku od plochy skeneru, tak vzdálenost maxim. I drobná nepřesnost se projeví velkou odchylkou (řádově desítky nm) ve výpočtu výsledné vlnové délky laserového světla.

Přesnějších výsledků jsme dosáhli při větší vzdálenosti CD disku od plochy skeneru. Průměrná hodnota vlnové délky pro červený laser činila 673 nm (hodnota udávaná výrobcem je 650 nm), pro zelený laser jsme získali průměrnou hodnotu 545 nm (hodnota udávaná výrobcem je 532 nm) a nakonec pro fialový laser byla určena průměrná hodnota vlnové délky 412 nm (hodnota udávaná výrobcem je 405 nm).

Závěr

Při našich experimentech se skenerem a dokumentovou kamerou jsme ověřili na několika experimentech z oblasti optiky a teorie kmitů, že lze tato zařízení poměrně snadným způsobem použít jako atraktivní demonstrační pomůcky. Výhodou je také relativně příznivá cenová dostupnost použitých zařízení, která může pro řadu základních i středních škol představovat zajímavou alternativu k tradičně prováděným demonstračním experimentům. V případě, že je školní fyzikální laboratoř vybavena počítačovou technikou, lze všechny výše uvedené experimenty realizovat i v rámci frontálních laboratorních cvičení.

Literatura

- [1] *Gregorčič, B.*: Use of computer scanner in physics instruction. [online]. Dostupné z: http://www.mediafire.com/view/db5phg5xvf1dp66/Plenary_talk_-_Bor_Gregorcic.pdf [cit. 2014-02-11].
- [2] *Lepil, O.*: Fyzika pro gymnázia. Optika. Praha, Prometheus, 2002.

INFORMATIKA

Opakované úseky posloupnosti (Úlohy z MO – kategorie P, 31. část)

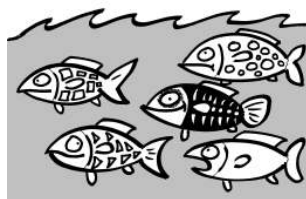
PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V našem cyklu zajímavých úloh z Matematické olympiády – kategorie P tentokrát zamíříme do daleké historie. Navštívíme 36. ročník MO, který se konal ve školním roce 1986/87, tedy v době, kdy kategorie P teprve vznikala. Na ukázkou jsme pro vás vybrali jednu ze soutěžních úloh tehdejšího celostátního kola. Jako obvykle začneme zadáním této úlohy, které uvádíme téměř v původní podobě, pouze s drobnými formulačními úpravami. Sami vidíte, že text úlohy je o dost kratší a jednodušší oproti tomu, jak obvykle vypadají zadání soutěžních úloh v současné době.

Úloha

Nalezněte a dokažte co nejlepší algoritmus, který pro libovolnou konečnou posloupnost celých čísel délky N a pro zadanou dvojici kladných celých čísel K , L určí, zda daná posloupnost obsahuje souvislý úsek délky K , který se v ní vyskytuje alespoň L -krát. Jednotlivé výskyty se mohou částečně překrývat.



Příklad. Pro posloupnost 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1 a $K = 3$, $L = 3$ program odpoví ANO, protože se v ní třikrát vyskytuje úsek 1, 2, 1.

Úlohu můžeme snadno vyřešit primitivním přímočarým způsobem. Postupně budeme brát všechny souvislé úseky délky K a pro každý z nich zvlášť spočítáme všechny jeho výskyty v posloupnosti. Pro každý takový

úsek délky K tedy uvažujeme všechny polohy, kde by mohl v posloupnosti začínat, a pro každou volbu jeho polohy pak úsek procházíme a testujeme, zda se jednotlivá čísla zkoumaného úseku shodují s odpovídajícími čísly v posloupnosti. Pokud se shodují všechna čísla tvořící zkoumaný úsek, našli jsme další výskyt tohoto úseku v posloupnosti.

Zamyslíme se nad časovou složitostí uvedeného algoritmu. Počet souvislých úseků délky K vybraných z posloupnosti délky N je přesně $N - K + 1$. Pro každý z nich zkoumáme $N - K + 1$ možných umístění v rámci posloupnosti. Kontrola každého umístění úseku pak představuje sekvenční průchod tímto úsekem a vyžaduje tedy až K porovnání. Uvážíme-li, že délka úseku K může být rovna třeba $N/2$, tedy $O(N)$, můžeme časovou složitost našeho algoritmu odhadnout jako $O(N^3)$.

Řešení založené na popsaném postupu velmi snadno naprogramujeme. Předpokládejme, že na standardním vstupu programu je nejprve zadána trojice údajů v pořadí N, K, L a za nimi následuje N členů posloupnosti. Výsledkem výpočtu bude buď zpráva ANO, nebo zpráva NE vypsaná na standardní výstup.

```

program Useky1;
const MaxN = 10000; {maximální délka posloupnosti}
var A: array [1..MaxN] of integer; {zkoumaná posloupnost}
    N, K, L: integer;
    Pocet, i, j, d: integer;
    Shoda: boolean;
begin
  read(N, K, L);
  for i:=1 to N do read(A[i]);
  for i:=1 to N-K-L+2 do {začátek zkoumaného úseku}
    begin
      Pocet:=0;
      for j:=i to N-K+1 do {začátek možného umístění}
        begin
          Shoda:=true;
          for d:=0 to K-1 do {porovnávání znaků}
            if A[i+d] <> A[j+d] then
              begin Shoda:=false; break end;
            if Shoda then inc(Pocet); {máme další výskyt}
            if Pocet = L then break
          end;
          if Pocet = L then break
        end;
      if Pocet = L then writeln('ANO')
        else writeln('NE')
    end.

```

Můžeme se pokusit o zrychlení výpočtu tím, že zavedeme vhodnou pomocnou datovou strukturu S . Do ní budeme ukládat všechny zpracované úseky délky K a s každým také údaj o počtu jeho dosud nalezených výskytů. Postupně budeme brát jednotlivé úseky vstupní posloupnosti a každý nejprve vyhledáme ve struktuře S . Pokud ho najdeme, zvýšíme mu o 1 počet výskytů. Pokud ho nenajdeme, vložíme ho do S společně s informací o jeho prvním nalezeném výskytu. Pro každý zkoumaný úsek tedy již nemusíme procházet celou posloupnost, ale pouze se ho pokusíme vyhledat ve struktuře S mezi dosud prozkoumanými různými úseky délky K .

Časová složitost takového řešení závisí na typu použité struktury S . Kdybychom zpracovávali posloupnost znaků, mohli bychom na uložení všech prozkoumaných K -tic použít třeba strukturu písmenkového stromu (trie) – viz např. [1] nebo [2]. Vyhledávání bychom tím značně urychlili, pro každý z $N - K + 1$ zkoumaných úseků posloupnosti bychom procházeli pouze cestu stromem délky K od kořene k listu, takže celé řešení by mělo časovou složitost $O(N \cdot K)$, resp. $O(N^2)$. V našem případě ovšem zpracováváme posloupnost celých čísel. Pokud bychom se pro ně pokusili vytvořit nějakou stromovou strukturu analogickou trii, museli bychom v každém uzlu prohledávat seznam čísel délky řádově N a oproti počátečnímu primitivnímu řešení bychom tak časově neušetřili téměř nic. Určité úspory bychom dosáhli pouze v případě, že by se čísla v posloupnosti hodně opakovala.

Přesto existuje ještě lepší řešení naší úlohy, které dosahuje i v nejhorším případě asymptotické časové složitosti $O(N^2)$. Jako zajímavost uvedme, že při soutěži celostátního kola 36. ročníku Matematické olympiády – kategorie P na řešení s kvadratickou časovou složitostí nikdo ze soutěžících studentů nepřišel. Všechna funkčně správná řešení odevzdaná v soutěži měla časovou složitost $O(N^3)$.

Vysvětlíme si nejprve základní myšlenku algoritmu. Představme si čtvercovou tabulku T o rozměrech $N \times N$, jejíž řádky i sloupce jsou postupně označeny jednotlivými čísly ze zadané posloupnosti (řádky označíme shora dolů, sloupce zleva doprava). Do tabulky zapíšeme čísla 0 a 1 následovně: pokud má políčko stejné označení řádku i sloupce, zapíšeme do něj číslo 1, v opačném případě do něj zapíšeme číslo 0. Platí tedy, že $T[i, j] = 1$, právě když $A[i] = A[j]$, jinak $T[i, j] = 0$. V takto vyplněné tabulce budou jistě na hlavní diagonále samé jedničky. Obsah tabulky je symetrický podle hlavní diagonály, dále se proto budeme zajímat pouze o trojúhelníkovou oblast tabulky nad hlavní diagonálou.

Naši pozornost nyní zaměříme na souvislé řady jedniček, které mají šikmý směr rovnoběžný s hlavní diagonálou. Každá taková řada jedniček délky D ležící mimo hlavní diagonálu představuje opakující se výskyt nějakého úseku čísel délky D v zadané posloupnosti. Jestliže tedy existuje takových K po sobě jdoucích řádků tabulky T , že jimi všemi prochází alespoň L souvislých šikmých řad jedniček, program má odpovědět ANO, v opačném případě odpoví NE. Tím je úloha vyřešena.

Další úpravy algoritmu jsou již jenom technického rázu a slouží ke zjednodušení a urychlení výpočtu. Tabulku T budeme vyplňovat po řádcích a místo jedniček do ní můžeme rovnou ukládat délky nalezených souvislých šikmých řad jedniček. Při stanovení hodnoty $T[i, j]$ budeme postupovat následovně:

$$\text{pokud } A[i] = A[j], \text{ položíme } T[i, j] = T[i - 1, j - 1] + 1, \\ \text{jinak } T[i, j] = 0.$$

V případě $i = 1$ se samozřejmě nemůžeme odkazovat na hodnoty z neexistujícího nultého řádku a do tabulky zapisujeme pouze jedničky a nuly. V průběhu vyplňování tabulky T budeme již zároveň kontrolovat, zda jsme do některého řádku zapsali L hodnot rovných alespoň K . Pokud se to stane, výpočet ihned ukončíme a vypíšeme odpověď ANO. Jestliže k tomu nikdy nedojde, program po vyplnění celé tabulky odpoví NE.

Z popisu algoritmu přímo plyne jeho časová složitost. Tabulka T má velikost N^2 a program v ní zaplňuje horní trojúhelník, tedy $O(N^2)$ prvků. Každou z těchto hodnot spočítáme provedením konstantního počtu operací. Časová složitost celého algoritmu je proto opravdu slibovaných $O(N^2)$ operací.

Ještě můžeme podstatným způsobem vylepšit paměťovou složitost popsaného algoritmu. Pro větší názornost jsme dosud stále hovořili o vyplňování dvojrozměrné tabulky T , při implementaci algoritmu ale ve skutečnosti dvojrozměrné pole vůbec nepotřebujeme. Tabulku vyplňujeme po řádcích a hodnoty na i -tém řádku vždy závisí pouze na hodnotách z řádku $i - 1$. Spočítané hodnoty aktuálního řádku tabulky T také hned průběžně kontrolujeme. Při výpočtu se nikdy nepotřebujeme vracet ke starším řádkům a proto si je ani v programu nemusíme ukládat. Vystačíme tudíž s jednorozměrným polem, které bude postupně představovat jednotlivé řádky tabulky T , v i -tém kroku výpočtu budeme počítat a do pole ukládat hodnoty i -tého řádku tabulky. Jednotlivá čísla na řádku jenom musíme počítat a ukládat do pole vždy odzadu (zprava doleva), abychom

si novými hodnotami aktuálně počítaného řádku nepřepsali ty hodnoty z předchozího řádku, které ještě budeme potřebovat. Uvedenou úpravou jsme dosáhli paměťové složitosti $O(N)$.

Na závěr si opět ukážeme programovou realizaci popsaného algoritmu v Pascalu. Program má v mnohém podobnou strukturu jako počáteční primitivní řešení uvedené výše. Očekává také vstupní data ve stejném tvaru, tedy nejprve trojici údajů v pořadí N , K , L a poté N členů zkoumané posloupnosti. Jednorozměrné pole T použité v programu představuje postupně počítané jednotlivé řádky naší tabulky.

```

program Useky2;
const MaxN = 10000; {maximální délka posloupnosti}
var A: array [1..MaxN] of integer; {zkoumaná posloupnost}
    T: array [1..MaxN] of integer; {řádky tabulky T}
    N, K, L: integer;
    Pocet, i, j: integer;
begin
read(N, K, L);
for i:=1 to N do read(A[i]);
for i:=1 to N do {číslo řádku tabulky T}
  begin
    Pocet:=0;
    for j:=N downto i do {číslo sloupce v tabulce T}
      begin
        if A[i] > A[j] then T[j]:=0
        else if i = 1 then T[j]:=1
        else T[j]:=T[j-1] + 1;
        if T[j] >= K then inc(Pocet); {máme další výskyt}
        if Pocet = L then break
      end;
    if Pocet = L then break
  end;
if Pocet = L then writeln('ANO')
    else writeln('NE')
end.

```

Literatura

- [1] *Töpfer, P.*: Vyhledávání slov na stránce (Úlohy z MO – kategorie P – 28. část). MFI, roč. 21 (2011–2012), č. 5, s. 294–304.
- [2] *Böhm, M. – Matějka, J. – Mareš, M. – Škoda, P.*: Recepty z programátorské kuchařky – Hledání v textu [online, cit. 2013–10–14]. Dostupné z: <https://ksp.mff.cuni.cz/tasks/26/cook5.html>.

(Autorkou ilustrace je Mgr. Jaroslava Palzerová Čermáková.)

Využití animací letů kosmických sond ve výuce fyziky

TOMÁŠ FRANČ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Zajímavým oživením hodin fyziky jsou lety kosmických sond, o kterých žáci gymnázií příliš mnoho nevědí. Jak se ukazuje z právě probíhajícího výzkumu některých znalostí středoškolských žáků o letech kosmických sond, žáci například netuší, že k letu se téměř vůbec nepoužívají motory a že se sonda po opuštění gravitačního pole Země pohybuje jen díky setrvačnosti v gravitačním poli Slunce a že pokud neuniká ze sluneční soustavy, pak je její trajektorii část elipsy. Výzkum rovněž ukazuje častou představu žáků, že sondy ve sluneční soustavě létají po úsečkách, protože to je nejkratší spojnice dvou bodů. (Jde pouze o předběžné výsledky výzkumu, který se teprve bude vyhodnocovat, podrobné výsledky se poté budou publikovat). Animace letů kosmických sond mohou pomoci tyto mylné představy žáků odstranit. Nejspíše jsou tyto miskoncepce způsobené tím, že žáci nikdy před tím žádnou takovou animaci letu vesmírné sondy neviděli (a dále samozřejmě i tím, že i když se žáci při probírání Keplerových zákonů dozvědí, že tyto zákony platí pro všechna tělesa sluneční soustavy, tak je nenapadne, že to platí i pro člověkem vyrobené sondy). Nami vytvořené animace byly zveřejněny na *Wolfram Demonstrations Project* [1] v anglické podobě a dále na internetových stránkách autora [2] s ovládacími prvky v češtině. V tomto článku stručně představíme portál *Wolfram Demonstrations Project* a především se seznámíme se základními možnostmi využití animací ve výuce fyziky a rovněž s ovládáním animací.

Wolfram Demonstrations Project

Wolfram Demonstrations Project je internetový portál, kde si lze zdarma přehrát či stáhnout zveřejněné animace. V únoru 2014 se zde nachází necelých 10 000 interaktivních demonstrací, z toho je 2 020 fyzikálních a 166 astronomických. K přehrání demonstrací je potřeba mít v počítači nain-

stalovaný *Wolfram CDF Player*, který je zdarma ke stažení na adrese [3] (nebo lze animace samozřejmě přehrát pomocí programu, ve kterém byly vytvořeny, tedy *Wolfram Mathematica*). U každé jednotlivé animace je navíc k dispozici kód, který si může uživatel vložit do svých internetových stránek, čímž se animace stane součástí jeho stránek. Dále je možné stáhnout zdrojový kód animace, a pokud vlastníme *Wolfram Mathematica*, lze si kód upravit podle svých potřeb (změnit barvy, počestit ovládací prvky atd.). I když je *Wolfram CDF Player* zdarma, tak zachovává všechny funkce programu *Wolfram Mathematica* nutné pro přehrání animace, např. stále lze 3D grafiku přibližovat či oddalovat, různé otáčet a posouvat, nejde však dělat změny ve zdrojovém kódu.

Při vytvoření vlastní animace v programu *Wolfram Mathematica* je možné ji na *Wolfram Demonstrations Project* zveřejnit, animace však musí nejprve projít kontrolou, zda je animace fyzikálně správná. Tím je zajištěna vysoká kvalita animací na tomto portálu.

Wolfram Demonstration Project tedy představuje velký zdroj fyzikálních animací a další animace každý týden přibývají.

Animace letů vesmírných sond

Animace lze nalézt jednak na [1] (anglicky) a rovněž na [2], kde jsou animace v české verzi (a anglické verzi také). Součástí stránek [2] je návod, jakým způsobem byly animace vytvořeny. Způsob vytvoření zde popisovat nebudeme, pouze uvedme, že souřadnice planet, komet, planetek a sond byly získány ze stránek [4], takže nejde o přibližné souřadnice, ale o reálné souřadnice poskytnutých NASA. Všechny animace je možné sledovat jak ve 2D, tak i ve 3D zobrazení (některé žáky ve 3D zobrazení navíc překvapí, že planety vlastně neobíhají v jedné rovině kolem Slunce). Pod animací je zobrazeno datum (bohužel jsou zkratky měsíců anglicky, to by však nemělo činit žákům problémy) a rychlost sondy v kilometrech za sekundu vzhledem ke Slunci.

Gravitační manévry

Při vytváření animací letů sond jsme vybírali sondy, při jejichž letu byla využita technika *gravitačního manévru*. To je manévry, při které sonda vhodně obletí planetu a při tomto obletu se buď urychlí nebo zpomalí

vzhledem ke Slunci. Pro vysvětlení urychlení či zpomalení sondy vzhledem ke Slunci stačí zákon zachování (mechanické) energie – pokud se sonda urychlí (získá kinetickou energii), pak se planeta musí vůči Slunci zpomalit a naopak. Tato technika tedy vyžaduje přesné plánování, aby se sonda dostala do blízkosti planety, u které má využít gravitační manévru. Proto jsou tyto mise nesmírně zajímavé, obzvlášť ty, které tuto techniku využily několikrát (velmi doporučujeme animace Voyager 2, Galileo, Cassini a především sondu MESSENGER, která techniku gravitačního manévru použila celkem šestkrát!). Je tedy velice působivé sledovat, jak sonda po několika měsících (a stovkách miliónů až několika miliardách kilometrů) skutečně k planetě doletí po různě komplikované trajektorii, která navíc byla přesně naplánovaná ještě před startem sondy!

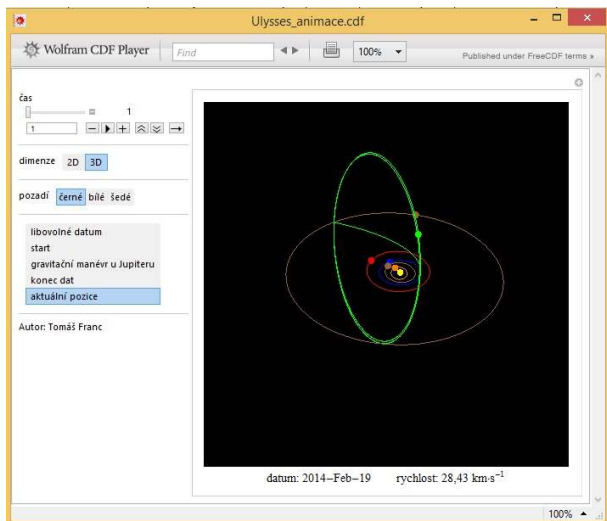
Seznam animací letů sond, které využily techniku gravitačního manévru (seřazeno podle data startu): Pioneer 10 a 11 (společně v jedné animaci), Voyager 1 a 2 (společně v jedné animaci), Galileo, Ulysses, NEAR Shoemaker, Cassini, Stardust-NEXT, Rosetta, MESSENGER, Deep Impact-EPOXI, New Horizons, Dawn, Juno. Celkem jde o 13 animací.

Proč se gravitační manévru používá? (1) Úspora paliva (je odhadnuto, že sonda Cassini díky gravitačním manévřům ušetřila 75 tun paliva, zatímco samotná sonda váží 5,5 tuny), (2) zkrácení času letu ke vzdáleným planetám (sonda Voyager 2 dolétla k Neptunu za 18 let, bez gravitačních manévřů by její let k této planetě trval 30 let), (3) lety k Merkuru či Slunci, neboť je potřeba sondu během letu zpomalit vůči Slunci, (4) únik ze sluneční soustavy (díky tomu tak ze sluneční soustavy unikají sondy Pioneer 10 i 11 a Voyager 1 i 2), (5) změna oběžné roviny kolem Slunce (této skutečnosti bylo využito zejména pro sondu Ulysses, která se po gravitačním manévru u Jupiteru dostala do roviny téměř kolmé na rovinu ekliptiky (obr. 1).

Využití animací ve výuce

Jako základní využití se přímo nabízí, že žáci (nejspíš vůbec poprvé) uvidí, jak vypadá let kosmické sondy, tvar trajektorie, průběh rychlosti (když se sonda dostává blíže k nějaké planetě, zrychluje vůči Slunci, když se od planety vzdaluje, zpomaluje vůči Slunci, je-li od planet daleko, rychlost se příliš nemění). V animaci lze kromě samotné sondy sledovat pohyby planet, komet a planetek. V případě planet není vůbec poznat, zda jde o elipsu nebo o kružnici, neboli lze pouhým pohledem „ověřit“ tvr-

zení 1. Keplerova zákona, že se planety pohybují kolem Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic. Naopak trajektorie komet kružnice rozhodně nepřipomínají. Lze sledovat, jak s rostoucí vzdáleností od Slunce se rychlosti oběhu planet kolem Slunce zmenšují a stejně tak i rychlost sondy (neuvažujeme-li průlety kolem planet).



Obr. 1

Gravitační manévř může sondu urychlit nebo zpomalit vůči Slunci. Která z těchto možností nastane, o tom rozhoduje způsob obletu planety – pokud sonda obletí planetu „za ní“, dojde k jejímu urychlení vůči Slunci a pokud naopak sonda obletí planetu „před ní“, sonda se vůči Slunci zpomalí. I tuto skutečnost lze v animacích sledovat. Gravitační manévř se používá mj. ke změně roviny oběhu sondy kolem Slunce – ve 3D zobrazení můžeme pozorovat, že ke změně roviny dochází v podstatě při každém gravitačním manévřu a různým natáčením animace pak lze porovnávat rovinu oběhu sondy kolem Slunce s rovinami oběhů dalších těles v animaci.

Při sledování animací žáky může začít zajímat, jak vlastně gravitační manévř funguje, jak to, že se sonda může urychlit či zpomalit vůči Slunci. A stejně tak žáky napadne otázka, proč si při výkladu dává učitel dobrý pozor na to, aby nezapomněl uvést, že jde o změny rychlosti *vůči Slunci*. Pokud to nastane, pak má učitel vyhráno. Při vysvětlení je potřeba zákon zachování energie, volba vztahné soustavy, operace s vektory. Dále je

možné zmínit stavbu sondy, přístroje, kterými byla sonda vybavena, samotný start, komplikace letu, objevy sondy, ukázat fotografie, které sonda pořídila, jaké otázky mise zodpověděla a jaké naopak nastolila. Zejména vyhledání pěkných fotografií je vhodné dát jako domácí úkol, aby žáci připravili např. prezentace. Většina obrázků pochází od NASA, žáci tak budou vyhledávat na internetových stránkách, které jsou v angličtině (mezipředmětový vztah). Při probírání pohonu sondy a jejích přístrojů dojde navíc i na jadernou fyziku (radioaktivní rozpad), elektřinu (termoelektrický jev) a další obory fyziky, při studiu letů kosmických sond tak obsáhneme nejen kapitoly z mechaniky.

Ovládání animací

Pokud se při spouštění animace objeví varování podle obr. 2, pak se není třeba ničeho obávat, animace letů sond neobsahují žádný škodlivý obsah (je to pouze varování kvůli tomu, že animace obsahuje příkaz, který při spouštění rozbalí nějaký rozsáhlý text – aby soubory nebyly příliš velké, neboť obsahují velké množství souřadnic, byly souřadnice komprimovány a při spuštění animace dojde k převedení komprimovaného textu zpět na číselná data a chování programu *Wolfram CDF Player* je takové, že zobrazí varování vždy, když dochází k dekomprimaci).



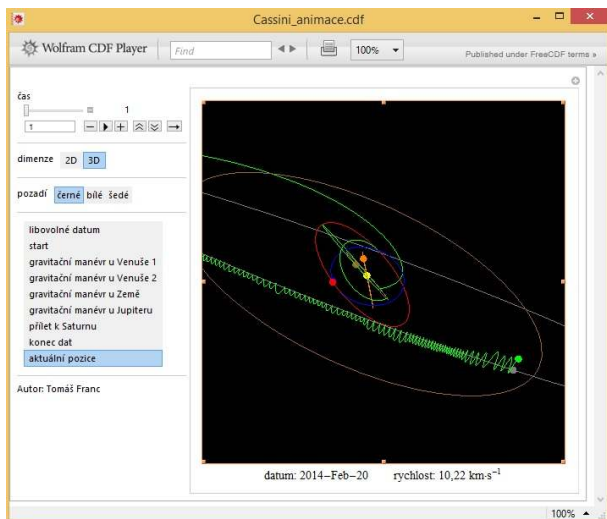
Obr. 2

Animace je možné zvětšovat či zmenšovat (bez ztráty kvality zobrazení) – jednak je vpravo dole v okně animace možná změna velikosti zobrazení v procentech (obr. 3), nebo je možné kliknout levým tlačítkem myši kamkoli na obrázek animace, čímž se animace oranžově orámuje (obr. 3) a po kliknutí levým tlačítkem myši na tento rámeček a následným tažením je možné animaci libovolně zvětšit či zmenšit.

Vzhledem k přehrávání animací v různých místnostech a na různých dataprojektorech může být výsledná projekce více či méně kontrastní, proto je možné měnit barvu pozadí (černé, šedé a bílé).

Ve 3D zobrazení lze animaci různě natáčet a dívat se na situaci z různých úhlů pohledu, přibližovat a oddalovat pomocí stisku klávesy CTRL a pohybu myši, nebo posouvat pomocí stisku klávesy SHIFT a pohybu

myši, takže např. u mise Cassini můžeme získat obr. 3, který pěkně ukazuje, jak tato sonda obíhá Saturn (a také je možné na obr. 3 názorně vidět, jak sonda po prvním gravitačním manévru u Venuše obíhala kolem Slunce v rovině oběhu Venuše kolem Slunce a po druhém gravitačním manévru tuto rovinu změnila).



Obr. 3

Pokud chceme animace automaticky přehrávat pomocí tlačítka *Play*, musíme mít nastavenou volbu „libovolné datum“. Ostatní volby umožňují přepnout zobrazení animace pouze na statický obrázek znázorňující pozice všech těles ve vybraný moment (např. přílet sondy k planetě).

Pokud daná mise dosud neskončila, pak je možné v animaci použít volbu „aktuální pozice“ a nechat si tak zobrazit aktuální pozice všech planet, samotné sondy (a případně dalších těles zahrnutých do animace).

V některých animacích je možné nechat si zobrazit vybrané komety či planetky, stejně jako je možné pro komplikované trajektorie sond nechat si zobrazit buď celou trajektorii sondy, nebo jen její část za posledních 500 dní letu (nebo naopak nenechat, aby nebylo v animaci příliš mnoho objektů a trajektorií).

V animacích může žákům připadat, že se sonda s planetou srazí, což samozřejmě není pravda. V některých animacích stačí přepnout 2D zobrazení na 3D (a vhodně obrázek natočit) a již je vidět, že sonda ve skutečnosti

planetu mívjí. Pokud by to stále působilo, že se sonda s planetou srazila a následně letěla dále, pak je nutné žáky upozornit, že v dané animaci používáme vhodné měřítko, abychom sondu a planety vůbec viděli, museli jsme použít k jejich znázornění body o velikosti, která neodpovídá měřítku animace – pro opravdu těsné průlety sond kolem planet by bylo nutné vytvořit samostatné animace jen pro tyto průlety (např. sonda Galileo při gravitačním manévru u Země dne 8. 12. 1992 se v okamžiku nejtěsnějšího přiblížení nacházela pouze 300 km! nad povrchem, zatímco 2D animace zobrazuje oblast zhruba 1,5 miliardy km \times 1,5 miliardy km).

Dále je nutné žákům zdůraznit, že nejde o žádné simulace, ale o skutečné trajektorie skutečných sond získané ze stránek NASA [4], neboť při přednáškách autora na toto téma zazněly názory, že „to sice vypadá hezky, ale stejně jde jen o simulaci, a tedy o nic reálného“, neboli žáci pod pojmem simulace vidí něco naprosto nereálného. Tyto animace však přesně ukazují reálné trajektorie vesmírných sond.

Animace letů kosmických sond mohou pomoci žákům získat správnou představu o trajektoriích sond, jejich rychlostech a rovněž i o trajektoriích planet, komet, planetek. Zajímavou volbou jsou lety, které využily techniku gravitačního manévru, neboť je nutné, aby se sonda k planetě, u které realizuje manévru, přiblížila. Zvláště pěkné jsou animace sond s komplikovanou trajektorií, zejména mise MESSENGER. Celkově jde o zajímavé oživení výuky, žáci navíc mohou začít sami od sebe klást otázky, jak vlastně gravitační manévru funguje, mohou se zajímat o další podrobnosti letu, což je hlavní cíl, proč byly takové animace vytvořeny.

Poděkování. Tento článek vznikl za podpory Grantové agentury Univerzity Karlovy (číslo projektu 341311). Dále děkujeme NASA za poskytnutí dat na adrese [4].

Literatura

- [1] Wolfram Demonstrations Project: <http://demonstrations.wolfram.com/>.
- [2] Tomáš Franc homepage: <http://sirrah.troja.mff.cuni.cz/~franc/>.
- [3] Wolfram CDF Player for Interactive Computable Document Format: <http://www.wolfram.com/cdf-player/>.
- [4] HORIZONS Web-Interface: <http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi>.

ZPRÁVY

Mezinárodní olympiáda v informatice IOI 2014



Dvacátý šestý ročník Mezinárodní olympiády v informatice IOI 2014 se konal ve dnech 13.–20. 7. 2014 na Taiwanu v hlavním městě Taipei. Na Taiwanu má rozvoj informačních technologií velkou podporu a proto se také naše soutěž těšila velké podpoře a přízni místní vlády. Nejen že se zahájení a zakončení osobně zúčastnilo několik členů vlády včetně premiéra a viceprezidenta, ale vedení země také uvolnilo na uspořádání letošní IOI mimořádně velké finanční prostředky. Ubytování účastníků i prostory pro jednání byly díky tomu zajištěny v nejlepších hotelech nacházejících se přímo v centru metropole, vlastní soutěž probíhala ve velkém sále nedalekého konferenčního střediska.

Po mnohaletém postupném nárůstu se počet účastnických zemí IOI v posledních době ustálil kolem 80. Letošní soutěže se zúčastnilo 81 zemí z celého světa, další dvě země vyslaly své pozorovatele s cílem zapojit se do IOI v příštím roce. Každá země může vyslat čtyři soutěžící a dva vedoucí a jen několik málo zemí tento maximální povolený počet nevyužilo. Celkově tak letos soutěžilo 311 studentů.

České reprezentativní družstvo bylo sestaveno na základě výsledků 63. ročníku Matematické olympiády – kategorie P. Tvořili ho čtyři nejlepší řešitelé ústředního kola MO-P: *Jan-Sebastian Fabík*, absolvent Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Ondřej Hübsch*, absolvent Gym-

názia Arabská v Praze 6, *Martin Raszyk*, absolvent Gymnázia v Karviné, a *Dominik Smrz*, absolvent Gymnázia Elišky Krásnohorské v Praze 4. Vedoucími české delegace na IOI 2014 byli jmenováni *doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.* a *Filip Hlásek*, oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Naši účastníci IOI se každoročně připravují na olympiádu společně s některými soutěžícími vybranými pro CEOI (Středoevropská olympiáda v informatice) na týdenním soustředění. V posledních letech pořádáme toto přípravné soustředění společně s našimi kolegy z Polska a ze Slovenska střídavě v našich třech zemích, letos se k nám mimořádně připojili také soutěžící z Maďarska. Letošní přípravné soustředění se uskutečnilo na přelomu června a července v obci Danišovce na východním Slovensku.

První den našeho pobytu v Taipei začal slavnostním zahájením soutěže. Po něm měli soutěžící příležitost seznámit se podrobně s počítači a se softwarovým prostředím, ve kterém budou pracovat při soutěži. Vlastní soutěž se konala jako obvykle ve dvou soutěžních dnech, oddělených jedním odpočinkovým dnem. Večer před každým soutěžním dnem vedoucí všech delegací společně vyberou soutěžní úlohy z návrhů předložených pořadatelkou země, upraví podle potřeby jejich formulace a přeloží je pak do mateřského jazyka studentů. Čeští studenti tedy dostali jak anglickou, tak i českou verzi zadání úloh.

Vlastní soutěž probíhá podobně jako praktická část ústředního kola naší Matematické olympiády – kategorie P. Každý soutěžící má přidělen osobní počítač, na kterém řeší v každém ze soutěžních dnů tři zadané úlohy po dobu 5 hodin. Úlohy je třeba dovést až do tvaru odladěného programu, hotové programy se odevzdávají k vyhodnocení prostřednictvím soutěžního prostředí. Odevzdané programy jsou ihned průběžně testovány pomocí pře-

dem připravené sady testovacích dat, prováděné testy jsou navíc omezeny časovými a paměťovými limity. Tím se kromě ověření správnosti odliší také časová i paměťová efektivita algoritmu použitého jednotlivými účastníky soutěže. Při testování každé úlohy se používají sady testovacích dat různé velikosti a různé složitosti, takže teoreticky správné řešení založené na neefektivním algoritmu zvládne dokončit výpočet pouze pro některé, menší testy. Takové řešení je potom ohodnoceno dílčím počtem bodů. Krátce po odevzdání vypracovaného programu do vyhodnocovacího systému se soutěžící dozví hodnocení svého řešení a má pak ještě možnost ho opravit a odevzdat znovu. Jedná se o podobný systém, jaký je používán v posledních letech u nás při Matematické olympiádě, kategorie P pro praktické úlohy domácího kola. Diváci navíc mohou sledovat průběžnou celkovou výsledkovou listinu; soutěžící ovšem během soutěže výsledky ostatních nevidí.

Ve volném dnu mezi oběma soutěžními dny jsme společně odjeli na celodenní prohlídku Národního centra tradičních umění v Luodangu, kde jsme měli možnost seznámit se blíže s čínskou kulturou. Večer po skončení druhého soutěžního dne všichni účastníci IOI navštívili nejznámější turistickou atrakci Taiwanu – městskou věž Taipei 101, která byla řadu let nejvyšší budovou světa. Její 89. patro slouží jako panoramatická vyhlídka na celé město Taipei. Po druhém soutěžním dnu následoval ještě druhý odpočinkový den, během kterého byl pro soutěžící uspořádán celodenní pobyt v zábavním parku Lihpaoland. Vedoucí delegací a hosté v té době navštívili historické město Lugang. Náš pobyt na Taiwanu byl zakončen slavnostním vyhlášením výsledků, po kterém následoval odpočinkový program pro studenty, zatímco vedoucí všech delegací měli možnost navštívit ještě Národní palácové muzeum s nejzajímavějšími čínskými uměleckými památkami.

Každá ze šesti soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body, takže celkově bylo možné získat až 600 bodů. Tohoto výsledku dosáhli tři soutěžící – po jednom z Číny, USA a Austrálie. Na základě přesně stanovených pravidel se na IOI podle dosažených bodů rozdělují medaile. Některou z medailí obdrží nejvýše polovina účastníků soutěže, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se rozdělují v poměru 1 : 2 : 3 s ohledem na to, aby soutěžící se stejným bodovým ziskem získali stejnou medaili. Na letošní IOI bylo rozděleno celkem 32 zlatých, 52 stříbrných a 69 bronzových medailí. Naši soutěžící dosáhli velmi dobrých výsledků:

79. Jan-Sebastian Fabik (338 bodů), stříbrná medaile,

86. Ondřej Hübsch (321 bodů), bronzová medaile,

99. Martin Raszyk (297 bodů), bronzová medaile,

178. Dominik Smrž (186 bodů).

Mezinárodní olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců a žádné pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlášováno. V neoficiálním pořadí zemí podle počtu získaných medailí by se Česká republika umístila někde kolem třicátého místa, tzn. přibližně ve třetině celkového pořadí zemí. Nejúspěšnější zemí se čtyřmi zlatými medailemi byla již tradičně Čína, následovaly USA se třemi zlatými medailemi.

Všechny podrobnosti o soutěži i texty soutěžních úloh lze nalézt na Internetu na adrese <http://www.ioi2014.org/>, kompletní výsledková listina je zájemcům k dispozici na webové stránce <http://live.ioi2014.org/Ranking.html>.

Další ročníky IOI se budou konat postupně v Kazachstánu (2015), v Rusku (2016), v Íránu (2017) a v Japonsku (2018). Pořadatelé IOI 2015 z Kazachstánu na místě pozvali všechny delegace zúčastněné na IOI 2014, aby se zúčastnily také následujícího ročníku soutěže.

Pavel Töpfer

Středoevropská olympiáda v informatice CEOI 2014



Středoevropská olympiáda v informatice CEOI 2014 se konala ve dnech 18.–24. 6. 2014 v německém městě

Jena. Vedle sedmi tradičních účastnických středoevropských států (Česká republika, Chorvatsko, Maďarsko, Německo, Polsko, Rumunsko, Slovensko) se jako hosté zúčastnila také družstva ze Slovinska a Švýcarska. Jako obvykle soutěžilo také druhé místní družstvo, tentokrát to bylo družstvo reprezentující pořadatelskou republikou zemi Durynsko (Thüringen). Celkem se soutěže zúčastnilo 40 studentů z 9 zemí.

Reprezentační družstvo ČR bylo sestaveno na základě výsledků 63. ročníku Matematické olympiády – kategorie P. Na celosvětovou Mezinárodní olympiádu v informatice IOI 2014 (Taiwan) byli vysláni čtyři nejlepší řešitelé ústředního kola MOP, pro účast na CEOI 2014 byli vybráni další čtyři nejlepší soutěžící, kteří ještě nejsou v maturitním ročníku a navíc splňují nižší věkový limit určený pravidly soutěže. Naši mladší soutěžící tak dostávají příležitost získat na CEOI cenné zkušenosti, které mohou následně využít v dalším ročníku programátorských soutěží i při úspěšné reprezentaci České republiky na IOI v následujícím roce. Letos se CEOI zúčastnili tito studenti: *Anna Gajdová*, studentka Gymnázia ve Valašském Meziříčí, *Dalimil Hájek*, student Gymnázia Jana Keplera v Praze 6, *Matěj Konečný*, student Gymnázia Jirovcova v Českých Budějovicích a *Václav Rozhoň*, student Gymnázia Fráni Šrámka v Českých Budějovicích. Vedoucími české delegace byli *doc. RNDr. Tomáš Pitner, Ph.D.* a *Bc. David Klačka*, oba z Fakulty informatiky Masarykovy univerzity v Brně.

Soutěž CEOI 2014 se tradičně uskutečnila v průběhu dvou soutěžních dnů. V každém dni soutěžící řešili tři úlohy, na které měli vždy pět hodin času. Každý soutěžící pracuje na přiděleném osobním počítači s nainstalovaným soutěžním prostředím, které umožňuje vyvíjet a testovat programy a odesílat je k vyhodnocení. Výsledné programy jsou testovány pomocí připravené sady testovacích dat a se stanovenými časovými limity. Tím je zajištěna nejen kontrola správnosti výsledků, ale pomocí časových limitů se také odliší kvalita použitého algoritmu. Hodnocení odevzdaných řešení tedy probíhá obdobným způsobem, jako na celosvětové soutěži IOI. Kromě vlastní soutěže je pro účastníky CEOI vždy připravován také doprovodný program. Letos měli možnost prohlédnout si město Jena včetně univerzity a spolupřátelstvího Carl-Zeiss Gymnázia a město Výmar.

Poslední den proběhlo slavnostní zakončení soutěže s vyhlášením výsledků. Každá ze soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body, takže celkově bylo teoreticky možné získat až 600 bodů. Vítězem se stal Andrei Heidelbacher z Rumunska, který dosáhl výsledku 523 bodů. Letos byly na CEOI uděleny 4 zlaté, 8 stříbrných a 10 bronzových medailí. Středoevropská olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců, žádné pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlášováno. Naši reprezentující dosáhli následujících výsledků:

22. Václav Rozhoň (227 bodů), bronzová medaile,

26. Anna Gajdová (160 bodů),

27. Matěj Konečný (157 bodů),

31. Dalimil Hájek (112 bodů).

Veškeré informace o soutěži, texty soutěžních úloh i podrobné výsledky všech soutěžících, lze nalézt na Internetu na adrese <http://ceoi2014.informatikolympiade.de/>.

Příští 22. ročník CEOI se bude konat v červnu 2015 v Brně.

Pavel Töpfer

LITERATURA

Aktualizovaný soubor učebnic matematiky pro 6.–9. ročník základní školy

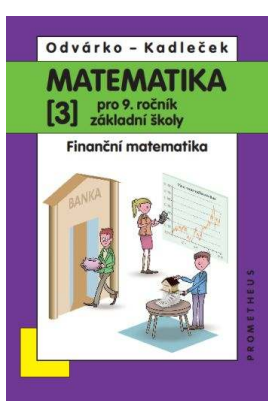
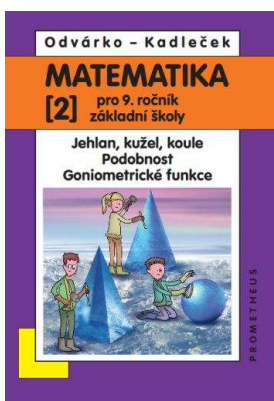
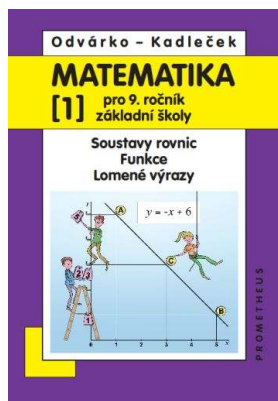
Od roku 2010 v nakladatelství Prometheus postupně vycházejí aktualizované učební texty matematiky pro 6. až 9. ročník základních škol autorů *O. Odvárka* a *J. Kadlečka*. Jde o soubor dvanácti větších monotematických učebnic a čtyř pracovních sešitů (sbírek úloh). Nejnovější upravená vydání těchto textů reagují jednak na změny ve vzdělávání v matematice i ve společnosti, jednak přicházejí s nápaditou a barevnou grafickou úpravou.

Při porovnání aktualizovaného a předchozího vydání je zřejmé, že obsahové změny jsou v souladu s Rámcovým vzdělávacím programem pro základní vzdělávání. Některá témata byla z tohoto důvodu oproti původnímu vydání zařazena do rozšiřujícího učiva (mocniny s přirozeným mocnitelem, lomené výrazy, goniometrické funkce). To zároveň poskytlo možnost věnovat se některým tématům zařazeným do RVP ZV větší pozornost. Například v tématu *Zlomky* byly úvodní partie rozšířeny tak, aby seznamování žáků se zlomky, jejich zápisy, s rozšiřováním i krácením probíhalo pomaleji a důkladněji; obdobně je tomu i v tématu *Mocniny*.

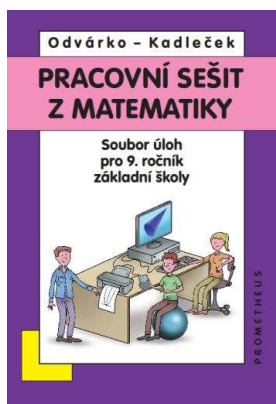
Značných změn doznala oblast úloh. Mnohé úlohy byly aktualizovány, byla doplněna široká škála úloh aplikačního charakteru, ve kterých žáci řeší situace, s nimiž se běžně mohou setkat ve svém životě (nakupování, sport, kutilství). Součástí aktualizovaného vydání jsou i úlohy, v jejichž zadání jsou obsažena průřezová témata (např. *Kouření je drahé*, *Úsporné žárovky*). Autoři dále rozšířili počet úloh na procvičování odhadů výsledků početních operací včetně odhadů rozměrů reálných objektů.

Při zpracování učiva zvolili autoři jednotnou metodickou koncepci, která prolíná celým aktualizovaným souborem. Každý díl tohoto souboru začíná motivačním úvodem k tématu, kterému je daná učebnice věnována (*Kruhy a kružnice na staroměstském orloji*, *Pythagoras a pythagorejci*, *Stavby historické i novodobé*). Pojmy jsou v jednotlivých kapitolách zaváděny pomocí motivačních příkladů a úloh ukazujících jejich využití v reálných situacích. Výklad učiva je veden postupně, na vzorových příkladech autoři upozorňují žáky na chyby, kterých se mohou při řešení dopouštět, a ukazují rovněž různé postupy řešení. Důležité informace (charakteristiky pojmů, pravidla, vzorce) jsou přehledně shrnuty v rámečcích. V průběhu jednotlivých kapitol jsou pojmy rozvíjeny a dávány do souvislostí, důraz je kladen rovněž na grafické zpracování údajů a vizualizaci učiva, což zvyšuje názornost výkladu. Soubor obsahuje oproti předchozímu vydání i více úloh na procvičení, takže žákům je poskytnut dostatečný prostor na pochopení nové látky. Například v geometrických tématech řeší žáci k zavedení pojmu nejdříve cvičení na identifikaci pojmu (tj. na správné porozumění pojmu), v dalších cvičeních tento geometrický objekt konstruují a dále pak následují úlohy, ve kterých se daný pojem využívá. Autoři požadují v řadě cvičení, aby žáci črtali geometrické situace a aby využívali a tvořili geometrické modely. Rozvoji prostorové představivosti napomáhá i konstrukce půdorysů, nárysů a bokorysů různých staveb z krychlí, ve kterých se žáci jednoduchou formou seznamují s problematikou zobrazování těles do roviny.

Obsah i metody zpracování učiva v aktualizovaném souboru učebnic a pracovních sešitů přispívají k rozvíjení matematické, čtenářské i finanční gramotnosti žáků. Z hlediska matematiky se jedná zejména o rozvíjení logického a kritického myšlení prostřednictvím řešení cvičení, ve kterých žáci odhadují výsledky, hledají



chyby v předložených výpočtech či postupech, posuzují pravdivost daných tvrzení. Učebnice jsou koncipovány tak, aby poskytly žákům maximální prostor pro aktivní práci, aby je zaujaly a podněcovaly k přemýšlení.



Rozvoj čtenářské gramotnosti umožňují zejména slovní úlohy. Žáci se také učí orientovat se v mapách, jízdních řádech, grafických schématech, diagramech i tabulkách. Tím jsou vedeni k porozumění grafické informaci a správné interpretaci údajů zadaných touto formou. Finanční gramotnost je v aktualizovaném souboru učebnic postupně budována prostřednic-

tím řešení aplikačních úloh již od prvního dílu. Završení této oblasti vzdělávání představují úlohy a problémy zařazené v učebnici věnované finanční matematice. V ní žáci poznají různé druhy vkladů, úvěrů i cenných papírů. Důraz je kladen na kritické posuzování informací z finančního světa, na získání základů správného finančního myšlení a jednání.

Aktualizovaná sada učebnic zaujme i grafickým zpracováním. Důležité pojmy a vztahy jsou v textu zvýrazněny, takže je žák nepřehlédne; text je vhodně doplněn názornými schémata, grafy a obrázky. Kromě vtipných barevných ilustrací M. Maška jsou zde zařazeny i fotografie reálných objektů. Například se můžeme v učebnicích setkat s fotografiemi účetnek za různé služby, letáky s nabídkou obchodů či kurzovními listky banky.

Jarmila Robová

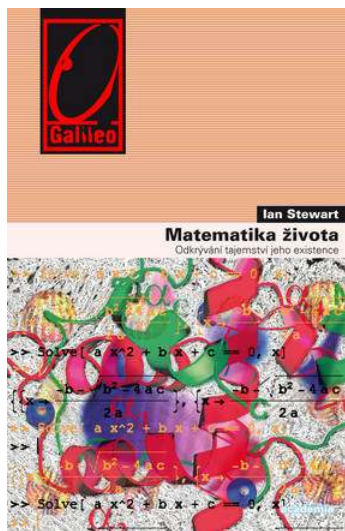
Matematika života: odkrývání tajemství bytí

*Matematika jsou dveře a klíč k vědě.
Věci na tomto světě nelze poznat bez znalosti matematiky.*

Roger Bacon

Popularizace vědy je široce používaný termín, který zastřešuje veškeré aktivity

vedoucí k rozšiřování obecného povědomí o vědě (případně i technice), jejich metodách, úspěších atd. Jejím cílem je poskytnutí informací široké veřejnosti a vyvolání zájmu o vědecké obory, získání dalších financí a výchova potenciálních vědců – jedinců systematicky usilujících o poznání skutečnosti. Existuje však řada učenců, kteří přiblížit taje své vědecké disciplíny běžným čtenářům či posluchačům z různých důvodů neumějí nebo se tomu věnovat nechtějí s odkazem na ztrátu drahocenného času. Tím více je potřeba vážit si těch vědeckých kapacit ve světě i doma, které se vedle vlastní výzkumné a pedagogické činnosti věnují tvorbě populárně-vědecké literatury. K nim patří také emeritní profesor univerzity ve Warwicku, autor více než 140 odborných článků a řady knih, člen britské Královské společnosti, *Ian Stewart*.



Překlady jeho publikací, z nichž některé se staly světovými bestsellery, jsou vydávány rovněž u nás, především zásluhou nakladatelství Dokořán (Krocení nekonečna – příběh matematiky od prvních

čísel k teorii chaosu, Hraje Bůh kostky?, Kulturní historie, Odsud až do nekonečna. Průvodce moderní matematikou, Truhlice matematických pokladů profesora Stewarta, Jak rozkrájet dort – a další matematické záhady a Kabinet matematických kuriozit profesora Stewarta). Tento výčet do češtiny z anglického originálu přeložených knih tentokrát rozšířilo Nakladatelství Academia, když ve své populární edici Galileo (sv. 58) vydalo jeho další dílo z roku 2011 *Matematika života: odkryvání tajemství bytí* (Praha 2014, 1. vydání, 387 s., překlad originálu *Mathematics of life* Jiří a Marie Rákosníkoví, ISBN 978-80-200-2360-5).

Od počátku 17. století se matematika stala hlavní hnací silou bouřlivého rozvoje fyzikálních věd a do dneška je od fyziky (stejně jako od astronomie, chemie, technických a příbuzných oborů) naprosto neoddělitelná. Ještě docela nedávno však měla mnohem menší roli v rozvoji věd biologických. Matematika pro ně byla v nejlepším případě sluhou. Používala se k rutinním výpočtům a k určování významnosti statistických údajů. K pojmovému vzhledu nebo porozumění příliš nepřispívala, nepodněcovala žádné velké teorie ani významné objevy. Matematikové by se většinou bez ní klidně obešli. Původně se zabývali rostlinami, hmyzem a zvířaty, poté se obrátila jejich pozornost na buňky a dnes se převážně věnují složitým molekulám („molekulám života“ DNA) a mikroskopické struktuře živých tvorů. Ke změně způsobu myšlení, jakým současní vědci uvažují o živé přírodě, vedlo podle profesora Stewarta šest revolucí v biologii – vynález mikroskopu, systematická klasifikace živých tvorů na Zemi, teorie evoluce, objev genu a objev struktury DNA, ... a šestá, poněkud problematičtější právě nastává: matematika.

Současné objevy v biologii totiž odhalily velké množství důležitých otázek a na mnohé z nich nejspíše nebude možné odpovědět bez významného přispění ma-

tematiky, takže biologie bude pro ni mít ve 21. století široké pole působnosti. Skála matematických oborů, jejichž užití se předpokládá, je hodně široká: pravděpodobnost, dynamika, teorie chaosu, symetrie, sítě, mechanika, pružnost a dokonce teorie uzlů. Potřeby biologie podnítily vznik zcela specifické oblasti hraničního výzkumu matematiky zaměřené na procesy živé přírody.

Většina probíraných témat z celkového počtu devatenácti se v první třetině knihy týká biologie (Matematika a biologie, Malí a ještě menší tvorové, Dlouhý seznam života, Fibonacci v říši rostlin, Vznik druhů, V klášterní zahradě (Mendelova teorie), Molekula života, Kniha života, Věčně zelený je strom života). Velmi brzy se však na scéně objeví matematika a jde po stopách otázek o geometrii rostlin od doby královny Viktorie (vlastně od starověkého řeckého matematika Eukleida) do dnešního dne, aby ilustrovala, jak biologie podněcuje nové myšlenky v matematice (Virus ze čtvrté dimenze, Skrytá kabeláž, Uzly a sklady, Skvrny a pruhy). Jakmile připravíme biologické pozadí, matematika vstupuje do centra dění; od atomových rozměrů budeme postupovat zpět k úrovni, ve které se cítíme nejlépe, protože odpovídá našemu životu. Ke světu stromů, trávy, zvířat, hmyzu, . . . a lidí (Ještěřčí hry, Příležitosti v sítích, Paradox planktonu, Co je život? Je tam někdo? Šestá revoluce).

Pokud se na závěr ohlédneme za autorovým vyprávěním o tom, jak biologie začala obejmát matematiku, jedna věc brzy vynikne: začalo to dávno před tím, než si toho někdo všiml. Namísto izolovaných vědců posedlých svým vlastním úzkým zaměřením, dnešní vědecké obory stále častěji potřebují týmy lidí s rozdílnými zájmy, které se vzájemně doplňují. A jestli něco z příběhu o matematické biologii vyplývá, pak je to poznání, že navzájem propojené komunity mohou dosáhnout věcí, které by byly pro jejich jednotlivce zcela nemožné. Biologie bude jedním z ohromných pro-

storů působnosti pro matematiku dvacátého prvního století. Celý text je nejen poučný, ale také zábavný. Pro vysvětlení, že matematika hraje dosud mnohem menší roli v rozvoji biologických věd v porovnání s bádáním fyzikálním, uvádí autor vtip o sedlákově, který zaměstnával matematiky, aby mu pomohli zvýšit dojivost. Když mu předali vypracovanou studii, otevřel ji, ale přečetl si pouze úvodní větu: „Mějme kulovou krávu.“ Učenci přišli o práci. Tato historika je zábavná, ale ukazuje také na nepochopení matematických modelů, které nemusí být přesným obrazem reality, aby se daly použít. Ve skutečnosti se dají použít lépe, jsou-li méně realistické, ale stále ještě umožňují proniknout do podstaty věci. Model, který je tak složitý jako proces nebo věc, kterou představuje, bude nejspíše složitý na to, aby mohl být užitečný. S jednodušším modelem se lépe pracuje. Kulová kráva je určitě nepoužitelná, pokud nám jde o narození telete, může však představovat užitečné přiblížení, když budeme zkoumat šíření nějakého kožního onemocnění skotu.

Bohumil Tesařík

Objevy, které změnily fyzikální obraz světa

Ve vědě více než v kterémkoliv lidském oboru je třeba prozkoumat minulost, abychom pochopili přítomnost a ovládli budoucnost.

D. Bernal

Když jsem chtěl něco objevit, nejprve jsem si prostudoval všechno, co bylo o tomto problému dosaženo v minulosti.

T. A. Edison

Dějiny evropských objevů a vynálezů, Wilhelm Conrad Röntgen – dědic šťastné náhody, Dějiny učených žen, Dějiny technických vynálezů v českých zemích, Fyzika od Thaléta k Newtonovi, Fyzikové ve službách průmyslové revoluce, Fyzika

v kulturních dějinách Evropy Čtenářům, kteří se zajímají o historii vědy a techniky, není asi vůbec nutné uvádět jméno autora citovaných populárně-vědeckých publikací, vydaných v časovém období dvou desítek let na konci druhého a na prahu třetího tisíciletí. Širší čtenářské obci jej však představit musíme – je jím *prof. RNDr. Ivo Kraus, DrSc.*, profesor fyziky na Fakultě jaderné a fyzikálně inženýrské ČVUT v Praze, kde přednáší fyziku pevných látek, strukturální rentgenografii a technické aplikace difrakční analýzy. Tento náš přední vědec, pedagog a znamenitý popularizátor vědy zhodnocuje ve svých knihách a časopiseckých esejích svůj celoživotní zájem o dějiny fyziky od prvopočátků po současnost, propojuje v nich líčení poučných a často až dramatických životních osudů významných světových i našich myslitelů, přírodovědců a techniků s vysvětlením podstaty jednotlivých velkých i méně známých objevů a událostí, aby je posléze uvedl do širších historických a společenských souvislostí.



Příroda a vesmír je ve své úžasné dokonalosti jedno, komu a jak se podařilo

odhalit jejich tajemství. Avšak s lidmi je to jiné, ti by si měli osudy talentovaných vrstevníků i geniálních předků alespoň občas připomenout a svědectví o jejich velkých činech předat budoucím generacím. Často se nedočkají za svého života uznání, jejich objevy a vynálezy bývají zapomenuty a znovu nalezeny, někdy dochází ke sporům o prvenství. I vědci jsou koneckonců lidé jako my, se svými pohnutkami, ctízádnostmi, vášněmi a urputností. Nejedním objev ve vědě nebo vynález v technice byl uskutečněn díky příznivé shodě nahodilých okolností, ale skutečnou hybnou silou ve fyzice byli vždy lidé. Pro současnou generaci je určitě zajímavou a inspirativní skutečností, že většinu největších objevů učinili fyzikové ve věku od 20 do 30 let.

Koncem 19. století se zdálo, že fyzika již všechny otázky položené přírodě zodpověděla, nejdůležitější fyzikální teorie jsou v podstatě hotové a zbývá snad už jen upřesnit několik drobných nejasností. Stačilo však několik „šťastných náhod“ v teorii i experimentování a zdánlivě nedotknutelné jistoty klasické fyziky přestaly platit. Typický pro toto období je často citovaný výrok koryfeje fyziky profesora Röntgena z období kolem roku 1920, kdy už teorie relativity a kvantová fyzika si razily cestu moderní fyzikou: „Stále mi nechce jít do hlavy, že musí člověk používat tak zcela abstraktních úvah a pojmů, aby vysvětlil přírodní jevy.“ Na počátku 20. století však vědu změnila nejen nová východiska pro výklad jevů v mikrosvětě, ale vyskytovalo se již více vystudovaných vědců než kdy předtím a věda začínala mít větší vliv na lidskou společnost. Dvacáté století bývá někdy označováno jako století válek a sociálních revolucí. Je to však také století fyziky, ve kterém došlo nejen ke vzniku a mohutnému rozvoji nejrůznějších technických oborů (elektronika, energetika, nové materiály), ale také nových fyzikálních metod (dnes se staly základními nástroji vědců počítače), které umožnily výrazný pokrok tradičních přírodních věd jako je chemie,

biologie nebo astronomie i věd interdisciplinárních – fyzikální chemie, chemické fyziky, molekulární biologie, astrobiologie a jiných.

Nová monografie profesora Krause *Století fyzikálních objevů* vydaná s podtitulem *Objevy, které změnilly obraz světa* nakladatelstvím Academia (s podporou Akademie věd ČR) ve své čtenáři oblíbené edici Galileo (Praha 2014, 1. vyd., 375 str.) odpovídá stručně a jasně na otázku, jaký měly fyzikální objevy dvacátého století vliv na rozvoj současné vědy a techniky a na náš každodenní život.

Celý text je rozdělen do dvou částí. První je nazvána *Mezníky na cestě do atomového věku* (40 stran) a obsahuje chronologický přehled významných fyzikálních objevů v minulém století (s nezbytným logickým exkursem ještě do století předminulého), počínaje objevem polovodičů (1833), fotovoltaiického jevu (1839) a katodového záření (1858) a konce fullereny (1985), vysokoteplotní supravodivosti (1986) a grafénem (2004).

Druhá obsáhlejší část *Objevy, které změnilly fyzikální obraz světa* (335 stran) obsahuje vyprávění o životní dráze a díle jednotlivých přírodovědců. Všichni měli jedno společné: přirozenou lidskou touhu objevovat, klást si těžké otázky a hledat na ně netradiční odpovědi. Nepracovali pro slávu a většinou ani pro osobní prospěch; důležitější než cíl byla cesta, kterou k němu museli ujit. Vědecký objev, průkopnický čin, vynález, technické řešení... mnoho práce, léta dřiny, noci strávené v laboratořích či pracovnách, někdy již zmíněná náhoda, štěstí. Ale to přeje přeje jen připraveným. Galerie těch, o nichž kniha pojednává, se to týká především. Celý text je uspořádán do 35 samostatných kapitol, takže se publikace může otevřít na libovolné stránce a ponořit se zde do čtení. Obsah toho, co se o změnách fyzikálního obrazu světa 20. století dozvíme, naznačují názvy jednotlivých pa-

sází: Röntgenův dar lidstvu, Uranové paprsky Antoina Henriho Becquerela, Radioaktivita (rodina Curieových), Kvantová hypotéza (Max Planck), Einsteinův *annua mirabilis*, Experimenty otce jaderné fyziky Ernesta Rutherforda, O modelování atomů (Bohr), Mřížková stavba krystalů (Laue), Rovnice, která proslavila otce i syna (Braggové), Nobelovy ceny pro Philippa Lenarda a Johannese Starka, Vlny jako částice (de Broglie), Princíp Wolfgang Pauliho, Zákonitá neurčitost (Heisenberg), Schrödingerova rovnice i legendární kočka, Pro krásnou teorii má příroda vždy uplatnění (Dirac), Trojhvězdi československé meziválečné fyziky (Dolejšek, Placzek, Žáček), Alma mater ruských fyziků (Joffe), Čerenkovovo záření, Přírodní zákony objevené P. L. Kapicou, Škola Lva Davidoviče Landaua, Intuice Enrica Fermiho, Energie velebená i proklínaná (Meitnerová, Hahn), Spontánní štěpení uranu a urychlování relativistických částic (Fljorov), Gigantická fluktuační Richard Feynman, Vodíková bomba (Sacharov), Polovodičová revoluce, Vyplněná předpověď Alberta Einsteina (luminescence), Slupkový model jádra (Goepfert-Mayerová), Sté výročí supravodivosti (Kamerlingh Onnes), Okno do světa elementárních částic (Fyzikové s neobvyklým životním posláním), Navzdory osudu (Stephen Hawking), Heteropřechody a heterostrukury (Žores Aljorov), Od grafitu ke grafenu.

Prozatím poslední vydané autorovo biografické dílo (navazující na předchozí monografie *Od Thaléta k Newtonovi* a *Fyzikové ve službách průmyslové revoluce*) je svým rozsahem, zaměřením, srozumitelností (téměř bez matematického aparátu) a hloubkou zpracování v naší technické a historiografické literatuře ojedinělé a jistě se stane nejen užitečným zdrojem informací, ale i pramenem ušlechtilé zábavy pro veřejnost nejen úzce odbornou. Fyzika není jen věda, je to také zábava.

Bohumil Tesářík