

Stavby z kostek

OLDŘICH ODVÁRKO – JARMILA ROBOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Při výuce budoucích učitelů matematiky se řadu let setkáváme s tím, že studenti mívají problémy s pochopením a znázorňováním prostorových situací. Jde například o načrtnutí možných poloh tří rovin v prostoru, o sestavení řezů jehlanů či o zakreslení sítě „složitějšího“ mnohostěnu. Přitom se již běžně předpokládá, že uvedené dovednosti získali žáci na základní a střední škole.

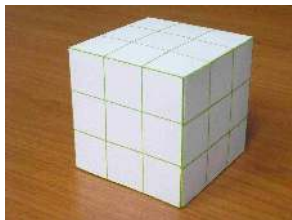
S cílem zlepšit přípravu budoucích učitelů na MFF UK v Praze jsme se rozhodli inovovat některé didakticko-metodické předměty tak, aby byly vytvořeny optimální podmínky pro prohlubování geometrické představivosti našich studentů. Naší snahou je dát jim dostatečné základy k tomu, aby byli v budoucnu ve své pedagogické praxi schopni systematicky rozvíjet představivost svých žáků. Tyto snahy jsou podpořeny rozvojovým projektem MŠMT *Inovace didaktické přípravy v studijním oboru „Matematika zaměřená na vzdělávání“*.

Z pohledu psychologů jsou pro rozvoj geometrické představivosti důležité především období předškolního a mladšího školního věku. I později lze ale geometrické myšlení a prostorovou představivost studentů rozvíjet, i když jde o pomalejší a dlouhodobější proces, ve kterém se využívá především logické myšlení jedince. Pro rozvoj představivosti je důležitý vlastní prožitek a zkušenost. Je proto nezbytné, aby žák pracoval v hodinách geometrie s prostorovými objekty, např. s modely těles včetně jejich sítí, a modeloval si prostorové situace.

V přijímacích zkouškách na víceletá gymnázia i na čtyřleté střední školy se vyskytují úlohy na obarvování stěn krychle, jak ukazuje následující ilustrační příklad.

Krychle je obarvena na bílo a rozřezána na 27 shodných krychliček (obr. 1).

- a) Kolik z nich bude mít bílou právě jednu stěnu?*
- b) Kolik z nich bude mít bílé právě dvě stěny?*
- c) Kolik z nich bude mít bílé právě tři stěny?*
- d) Kolik z nich nebude mít obarvenou ani jednu stěnu?*



Obr. 1



Obr. 2

Uvedený příklad činí obtíže těm žákům, kteří vycházejí pouze z obrázku a nepředstaví si dané těleso. V tom případě uvažují často jen krychličky ve třech viditelných stěnách zobrazené krychle. Úloha d) je ze zadaných úkolů nejtěžší; častá odpověď zní *nula*.¹

Skládání a obarvování krychlí

Ukážeme si jednu z možností, jak lze žáky přivést k úspěšnému řešení příkladů na obarvování krychlí s podporou modelů. Při práci může učitel pro demonstrační účely používat papírové modely krychle a pohádkové kostky (obr. 2). Pokud pohádkové kostky přinesou i žáci z domova, mohou s nimi pracovat ve skupinách v lavicích. V další části článku předpokládáme tuto variantu.

Nejdříve se budeme zabývat jednou kostkou, na které si žáci zopakují počty stěn, počty hran a počty vrcholů krychle. Odpověď na otázku, kolik stěn této krychle je třeba obarvit, je v tomto případě velmi jednoduchá.

Pokračujeme následujícím úkolem: *Sestavte krychli, která je složena z většího počtu kostek. Kolik kostek je k tomu potřeba nejméně?*

Úkol můžeme modifikovat tak, že k jedné kostce přiložíme druhou kostku (obr. 3) a žáci mají doplnit toto těleso tak, aby vznikla krychle složená z co nejmenšího počtu kostek. (Lze očekávat, že někteří žáci v tomto případě vytvoří v první chvíli těleso-kvádr složené z $2 \times 2 \times 1$ kostek.) Získali jsme

¹To potvrdilo i šetření mezi žáky základních a středních škol, které jsme realizovali společně s RNDr. Ivou Malechovou, CSc. v roce 2002.

krychli, která je složena z $2 \times 2 \times 2$ kostek, stručně krychli $2 \times 2 \times 2$ (obr. 4). Žáci by si měli všimnout, že počet vrcholů, hran a stěn výsledné krychle se nemění.



Obr. 3



Obr. 4

Následuje další úkol: *Představte si, že bychom celou tuto krychli (obr. 4) natřeli bílou barvou. Kolik bíle obarvených stěn budou mít jednotlivé kostky, ze kterých je krychle složena? Nezapomeňte na dolní podstavu krychle.*

I zde je snadná odpověď – každá kostka má právě tři stěny obarvené bílou barvou. Uvedený úkol můžeme doplnit otázkou, jak by se situace změnila, pokud bychom dolní podstavu krychle nenatírali.

Zadaný úkol dále rozvíjíme. Žáci mají nyní doplnit krychli složenou z $2 \times 2 \times 2$ kostek tak, aby opět vznikla krychle a byl použit co nejmenší počet kostek. Můžeme také postupovat tak, že k již vytvořené krychli (obr. 4) přidáme jednu kostku (obr. 5) a požadujeme na žácích, aby řešili stejný úkol. V obou případech získají krychli složenou z 27 kostek (obr. 6).



Obr. 5



Obr. 6

Úloha na obarvení krychle $3 \times 3 \times 3$ je již zajímavější. Můžeme zadávat žákům stejné úkoly, jako jsou v úloze na začátku článku. Za vhodnější variantu však považujeme začít tím, jaký je největší možný počet obarvených stěn na jedné kostce v krychli a kolik takových kostek v krychli je. Pak lze zjišťovat, kolik kostek v krychli má menší počet obarvených stěn, jaké jsou možnosti a počty obarvených stěn na jedné kostce. Žáci by tak postupně

měli určit, kolik kostek má obarvené 3 stěny, 2 stěny a 1 stěnu. Důležité pro úspěšné řešení je, aby žáci nezapomněli na kostky v dolní podstavě krychle; k tomu lze např. využít papírový model krychle s naznačenými řezy (obr. 1). Klíčovou otázkou je, zda každá kostka má aspoň jednu stěnu obarvenou, tj. zda žáci sami přijdou na to, že jedna taková kostka uvnitř krychle existuje. O tom se mohou přesvědčit rozebráním krychle (obr. 7).



Obr. 7



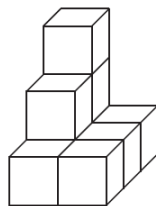
Obr. 8

Lze vytvořit řadu dalších úkolů, ve kterých klademe na krychli $3 \times 3 \times 3$ další požadavky – neobarvíme jednu stěnu krychle, případně dvě stěny, nebo odebereme ze stavby některé kostky a řešíme opět úlohy na počty obarvených stěn kostek v dané stavbě. Takovým tělesům budeme v tomto článku říkat *krychlová tělesa*, přičemž mezi ně počítáme i krychli.

Navazující příklad krychle složené ze $4 \times 4 \times 4$ kostek je už obtížné reálně modelovat vzhledem k počtu 64 potřebných kostek. Můžeme však použít papírový model krychle s naznačenými řezy (obr. 8) a řešit obdobné úkoly jako pro krychli $3 \times 3 \times 3$. Žáci by postupně měli určit, že právě tři obarvené stěny má 8 kostek u vrcholů krychle, právě dvě obarvené stěny má 24 kostek (u každé hrany krychle jsou 2 takové kostky) a právě jednu obarvenou stěnu má 24 kostek (v každé stěně krychle jsou 4 takové kostky). Nejtěžší na představivost je úkol, kolik kostek nemá žádnou stěnu obarvenou. V tomto případě žákům může opět pomoci naznačený model z kostek (obr. 9), aby dospěli k závěru, že takových kostek je 8.



Obr. 9



Obr. 10

Uvedené úlohy jsou vhodné pro 6. ročník základní školy nebo pro odpovídající ročník víceletého gymnázia. Obtížnost úloh se stupňuje s rostoucím počtem kostek, ze kterých krychli vytváříme. V tématu o algebraických výrazech, které bývá zařazeno v 8. ročníku, lze řešit úlohu na obarvení krychle, která je složena z $n \times n \times n$ kostek, kde n je libovolné přirozené číslo. Pro větší n si žáci tuto situaci jen obtížně představí, mohou však vycházet například ze zkušenosti s krychlí $4 \times 4 \times 4$. Počet kostek v krychli, které mají obarvené právě tři stěny je stále stejný, a to 8; jedná se o kostky u vrcholů krychle. Počet kostek, které mají obarvené právě dvě stěny, je $12(n - 2)$; tyto kostky se vyskytují u každé hrany krychle mimo „vrcholových“ kostek. Kostky s právě jednou obarvenou stěnou tvoří „vnitřky stěn krychle“ bez „hraničních“ kostek; v každé stěně je jich $(n - 2)^2$, celkem $6(n - 2)^2$. Kostky, které nemají žádnou stěnu obarvenou, tvoří vnitřní „jádro“ ve tvaru krychle o délce hrany $n - 2$ kostek; celkem tedy „jádro“ obsahuje $(n - 2)^3$ kostek.

A zde je velmi pěkná příležitost pro úpravy algebraických výrazů. Žáci by měli zkontrolovat, že součet počtů uvedených kostek dává n^3 a že tedy platí

$$8 + 12(n - 2) + 6(n - 2)^2 + (n - 2)^3 = n^3.$$

Pokud žáci neznají vzorec pro třetí mocninu dvojčlenu, lze výraz na levé straně vytýkáním upravit na tvar

$$8 + (n - 2)[12 + 6(n - 2) + (n - 2)^2].$$

Žáci mohou také zpětně ověřit, že pro $n = 2, 3, 4$ je skutečně počet kostek v „jádro“ krychle roven

$$(n - 2)^3.$$

Můžeme pokračovat úkolem, aby žáci vyjádřili počet kostek, které je třeba doplnit ke krychli $n \times n \times n$ tak, aby vznikla krychle $(n + 1) \times (n + 1) \times (n + 1)$:

$$(n + 1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

Ze získaného výsledku je vidět, že se přidává vždy lichý počet kostek.

Črtání a rýsování krychlových těles

Při skládání a obarvování krychlí je účelné vést žáky k črtání a rýsování příslušných prostorových útvarů. Používáme přitom volné rovnoběžné promítání, kdy kolmice k nákrese zobrazujeme nejčastěji jako přímký

s odchylkou 45° od vodorovného směru a délky na nich zkracujeme na polovinu.

Jedná se zejména o vyznačení vedení řezů na krychli $3 \times 3 \times 3$ a krychli $4 \times 4 \times 4$ (obr. 1, obr. 8). Pokud žáci tyto úlohy zvládnou, je možné věnovat se dalším úkolům. Předloží se náčrtek stavby z kostek (obr. 10) a žáci k němu sestavují reálný model. Dále lze pokračovat v črtání a rýsování těles, která vznikla odebráním několika kostek z původní krychle; přitom mají žáci vyznačit i hrany těch kostek, které jsou po odebrání vidět.

Výpočty povrchů krychlových těles

Při vytváření krychlových těles z kostek se zcela přirozeně nabízejí úlohy na výpočty jejich povrchů.

Pro ilustraci si ukážeme několik úloh.

Které z uvedených krychlových těles (obr. 11, 12, 13, obr. 4) sestavených z 8 kostek má největší povrch? (Krychlové těleso na obr. 12.) A které z nich má nejmenší povrch? (Krychle $2 \times 2 \times 2$ na obr. 4.)



Obr. 11



Obr. 12



Obr. 13

Z krychle $2 \times 2 \times 2$ odebereme jednu kostku. Je povrch vzniklého krychlového tělesa větší, stejný, nebo menší než povrch dané krychle? (Povrch je stejný.)

Odeberte z krychle $2 \times 2 \times 2$ právě 2 kostky tak, aby povrch vzniklého tělesa byl roven povrchu dané krychle. (Viz obr. 14.)

Z krychle $3 \times 3 \times 3$ odeberte jednu kostku tak, aby povrch výsledného krychlového tělesa byl větší než povrch krychle. (Viz např. obr. 15.)

Další úlohy na črtání a rýsování krychlových těles a na výpočty jejich povrchu lze nalézt v uvedené literatuře.



Obr. 14



Obr. 15

Literatura

- [1] *Odvárko, O. – Kadleček, J.: Matematika [3] pro 6. ročník základní školy. Prometheus, Praha, 2011.*
- [2] *Odvárko, O. – Kadleček, J.: Pracovní sešit z matematiky pro 6. ročník základní školy. Prometheus, Praha, 2011.*

Polibky kružnic: Archimedes

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Z arabských překladů Thabita ibn Qurry (836–901) jsou známy dvě práce, v nichž Archimedes (387–212 př. n. l.) zkoumal vlastnosti různých konfigurací kružnic a přímk. První z nich, *Kniha o dotycích kruhů*, je dostupná snad jen z Rozenfeldova překladu [1, s. 422–440] do ruštiny. Na konci článku z ní uvedeme několik úloh. Druhý spis, *Kniha lemmat* ([5, s. 301–318] nebo [1, s. 391–400]), byl doplněn arabským učencem Almoctassem Abilhasanem Hali Ben Ahmadem. Nelze v něm přesně rozlišit, co je původní a co bylo přidáno později. Není však pochyb, že poznatky o arbelu (obuvnickém noži) pochází od Archimeda. Seznámíme se s nimi.

Věta L1¹

Mají-li kružnice $m(M; r_1)$ a $n(N; r_2)$ s vnitřním dotykem v bodě T rovnoběžné průměry AB a CD (označené v souladu s obr. 1), pak bod

¹Písmenem L označujeme věty z *Knihy lemmat* a písmenem K věty z *Knihy o dotycích kružnic*. Číslo odpovídá pořadovému číslu věty v příslušné publikaci. Texty vět a důkazů, i symboly, jsem upravil do dnešní formy vyjadřování, obsah je zachován.

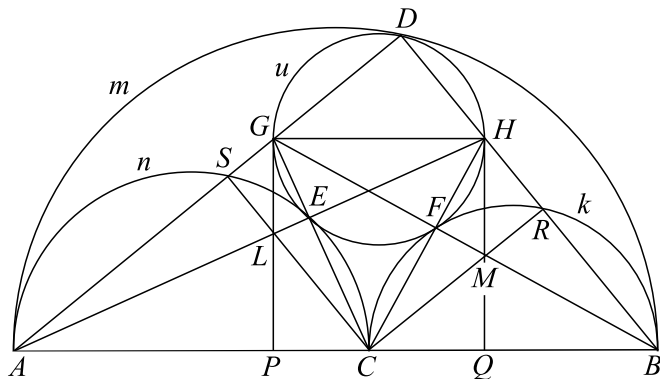
Z dnešního pohledu je věta zřejmým důsledkem stejnoolehlosti kružnic. Archimedes ji dokázal výpočtem velikosti úhlu TBD . Využil rovnoběžník $KBNM$ a podobnost rovnoramenných trojúhelníků BTN a DBK (obr. 1).

Je-li AB úsečka s vnitřním bodem C , pak útvar ohraničený polokružnicemi m , n a k umístěnými po řadě nad průměry AB , AC a CB v téže polorovině s hraniční přímkou AB nazveme *arbelos* ABC .

Jestliže v arbelu ABC označíme t společnou tečnu kružnic k a n s bodem dotyku C (obr. 2), pak kružnice vepsané do útvarů ohraničených čarami m , n , t a m , k , t jsou shodné.

Nechť je dále D průsečík přímky AF s tečnou t a J průsečík polokružnice m s přímkou AE . Bod E je ortocentrum trojúhelníku ABD , neboť je průsečíkem jeho výšek BF a DC . Je tedy $AE \perp BD$. Podle Thaletovy

Podle Thaletovy věty jsou úhly AEC , ASC , CFB a CRB pravé, tedy L je ortocentrem trojúhelníku ACG a M ortocentrem trojúhelníku CBH . Přímký GL a HM jsou kolmé na AB a platí $GP \parallel HQ$.



Obr. 3 K řešení problému L6

Z faktů $CS \parallel BD$ a $GP \parallel HQ$ dostáváme

$$|AC| : |CB| = |AL| : |LH| = |AP| : |PQ| \quad (2)$$

a ze vztahů $CM \parallel AG$ a $HQ \parallel GP$ analogicky plyne

$$|BC| : |CA| = |BM| : |MG| = |BQ| : |QP|. \quad (3)$$

Vztahy (2) a (3) vedou k rovnosti

$$|AP| : |PQ| = |PQ| : |QB|. \quad (4)$$

Délky $|AP|$, $|PQ|$ a $|QB|$ jsou tedy po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti s kvocientem

$$q = \frac{|AP|}{|PQ|} = \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{3}{2}.$$

(Archimedes napsal, že úsečky AP , PQ a QB jsou v *souvislém poměru*.) Odtud plyne

$$|BQ| : |QP| : |PA| : |AB| = 4 : 6 : 9 : 19,$$

resp. pro

$$|AC| : |CB| = \lambda : 1$$

dostaneme

$$|BQ| : |QP| : |PA| : |AB| = 1 : \lambda : \lambda^2 : (1 + \lambda + \lambda^2).$$

Závěr. Platí

$$|GH| = |PQ| = \frac{6}{19}|AB|, \quad \text{resp.} \quad \frac{|GH|}{|AB|} = \frac{\lambda}{1 + \lambda + \lambda^2}.$$

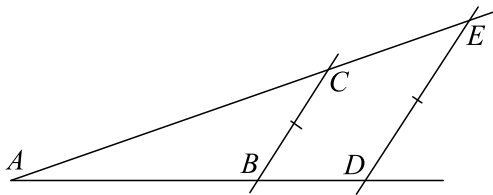
Komentář. Když v daném pořadí označíme r_1, r_2 a x poloměry kružnic n, k a u , má kružnice m poloměr $r_1 + r_2$ a $\lambda = r_1/r_2$. Výsledek problému L6 pak můžeme upravit na tvar

$$x = \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^3 - r_2^3} \cdot r_1 r_2. \quad (5)$$

Uvádí se, že Thales z Milétu (624–547 př. n. l.) určoval výšky pyramid a vzdálenosti lodí na moři pomocí podobnosti trojúhelníků. Jestliže je ABC trojúhelník a D, E body, které leží po řadě na přímkách AB, AC a zároveň na rovnoběžce s přímkou BC , pak platí

$$\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AE|}{|AC|}. \quad (6)$$

Toto tvrzení se v řadě zemí nazývá *Thaletova věta*. Bylo jedním z klíčových bodů Archimedovy argumentace. Odvolával se na rovnoběžnost přímek, nikoliv na podobnost trojúhelníků. Dnes bychom užili rčení, že *rovnoběžné promítání zachovává poměry odpovídajících si úseků na přímkách různoběžných se směrem promítání*.



Obr. 4 Thaletova věta o podobnosti

V obou postupech Archimedes nejprve uplatnil větu o průsečíku výšek trojúhelníku k důkazu rovnoběžnosti vhodných přímek a pak našel potřebné vztahy pomocí rovnoběžných průmětů. Brilantní úvahy, jimž neubýlo na svěžesti ani po dvou tisíciletích.

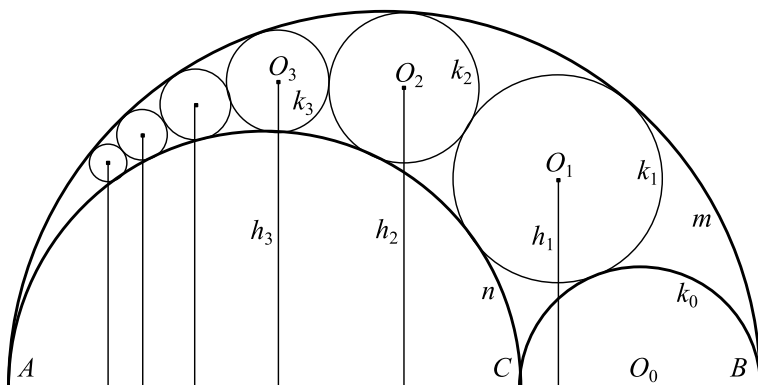
Občas se můžeme setkat z názorem, že věta o průsečíku výšek v trojúhelníku nebyla ve starověkém Řecku známa, protože se nevyskytuje v Euklidových Základech. Archimedes ji znal a má se za to, že ji odvodil. Podle [8] pocházejí její první známé korektní důkazy až ze 17. století a ortocentrum trojúhelníku se ve starších publikacích nazývá *Archimedův bod*.

Ve čtvrtém století Archimedovy poznatky obdivuhodně doplnil Pappos Alexandrijský. Dokázal zřejmě již starší hypotézu o řetězci kružnic vepsaných do arbelu.

Pappova věta o kružnicích

Do daného arbelu ABC vepíšme kružnici k_1 , aby se dotýkala hraničních polokružnic m , n a k_0 . Dále vepíšme kružnici k_2 do útvaru ohraničeného čarami m , n a k_1 a postup analogicky opakuje. Vytvoříme tak řetězec kružnic $k_1, k_2, k_3, \dots$ (obr. 5). Jsou-li $O_1, O_2, O_3, \dots$ po řadě středy kružnic řetězce a $h_1, h_2, h_3, \dots$ vzdálenosti těchto středů od přímky AB , platí

$$h_1 = d_1, h_2 = 2d_1, h_3 = 3d_1, \dots \quad (7)$$

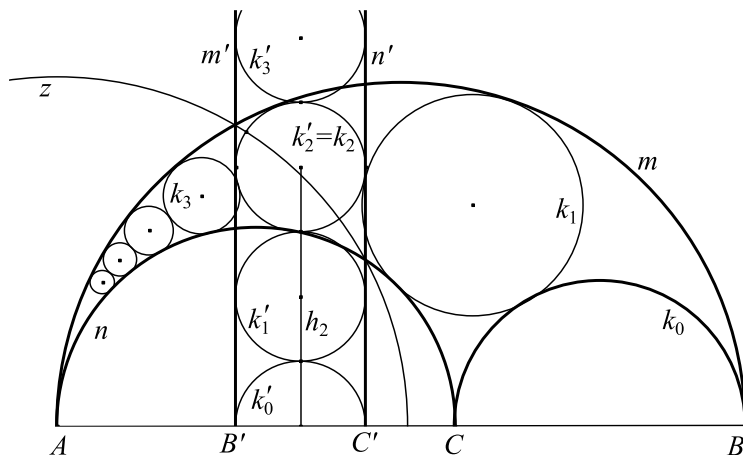


Obr. 5 Řetězec kružnic vepsaných do arbelu

Důkaz. V komentovaném překladu [7] čtvrtého dílu Pappovy Sbírky pokrývá důkaz věty o kružnicích 16 stránek. Dnes ji umíme zdůvodnit jediným obrázkem, k němuž znalec kruhové inverze snad ani nepotřebuje následující komentář.

V kruhové inverzi, jejíž základní kružnice z má střed v bodě A a navíc je ortogonální k j -té kružnici Pappova řetězce (obr. 6 pro $j = 2$), se kružnice k_j zobrazí na sebe. Kružnice m a n se inverzí zobrazí na tečny m' a n'

kružnice k_j , přičemž $m' \perp AB$ a $n' \perp AB$. Kruhová inverze zachovává body dotyku. Obrazy ostatních kružnic tedy vytváří v pásu $m'n'$ řetězec kružnic shodných s kružnicí k_j . Zřejmě je $h_j = 2jr_j = jd_j$. $\square$



Obr. 6 Důkaz užitím kruhové inverze

Některé další poznatky o arbelu najde čtenář v článcích [4] a [10]. O Archimedovi a Descartesovi se lze více dozvědět v publikacích [2] a [3].

Z úloh uvedených níže jsou poslední čtyři převzaty z Archimedova spisu *O dotycích kruhů*. Úloha K21 má úzký vztah ke kruhové inverzi, podle Rozenfelda známé již Apolloniovi z Pergy (262–190 př. n. l.), a k tzv. Apolloniově kružnici, kterou používal Aristoteles (384–322 př. n. l.) při zdůvodňování kruhového tvaru duhy [9, s. 113–116]. S úlohou K22 souvisí některé novodobé poznatky z geometrie trojúhelníku (viz např. [6, s. 1–16]).

Úlohy

1. Nechť AB je úsečka s vnitřním bodem C a m , n , k jsou po řadě kružnice s průměry AB , AC , CB . Poloměry menších dvou kružnic označíme r_1 a r_2 . Pomocí Descartesovy věty (viz vztah (1) z předchozího dílu seriálu) dokažte, že poloměr x každé kružnice, která se dotýká kružnic m , n a k je dán vztahem (5) z tohoto článku.
2. (L4) V arbelu ABC označme D průsečík největší hraniční polokružnice se společnou tečnou menších polokružnic sestrojenou v bodě C . Dokažte, že obsah arbelu je roven obsahu kruhu o průměru CD .

3. (K1) V rovině je dáno několik kruhů se středy na téže přímce a každý z nich se vně dotýká svých sousedů. Dokažte, že všechny tyto kruhy mají společnou tečnu, právě když jsou jejich poloměry po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti.
4. (K8) V rovině je dána úsečka AB s vnitřním bodem C , kružnice m s průměrem AC a kružnice n s průměrem CB . Tečna z bodu A se dotýká kružnice n v bodě D a tečna z bodu B se dotýká kružnice m v bodě E . Dokažte, že pro obsahy kruhů ohraničených kružnicemi platí $S_m : S_n = |AD|^4 : |BE|^4$.
5. (K21) V rovině je dána kružnice k s průměrem CD a uvnitř polopřímky opačné k polopřímce CD je zvolen bod A . Tečna z bodu A ke kružnici k má bod dotyku T a pata kolmice z bodu T na přímku CD je označena B . Dokažte, že

$$\frac{|AC|}{|AD|} = \frac{|BC|}{|BD|}.$$

6. (K22) Nechť C je vnitřní bod oblouku AB dané kružnice. Pak pata kolmice ze středu tohoto oblouku na delší z tětiv AC a CB dělí lomenou čáru ACB na dvě části stejné délky. Dokažte.

Literatura

- [1] *Archimed*: Sočinenija. Dostupné na: <http://www.math.ru/lib/book/djvu/klassik/archimed.djvu>
- [2] *Bečvář, J.*: René Descartes. Prometheus, Praha, 1998.
- [3] *Bečvář, J. – Štoll, I.*: Archimedes. Prometheus, Praha, 2005.
- [4] *Bečvář, J. – Švrček, J.*: Arbelos. MFI, roč. 14, č. 9, s. 513–523.
- [5] *Heath, T. L.*: The Works of Archimedes. Cambridge University Press, Cambridge, 1897. Dostupné na: <https://archive.org/details/worksofarchimede029517mbp>
- [6] *Honsberger, R.*: Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry. The Mathematical Association of America, Washington, 1995.
- [7] *Pappus of Alexandria*: Book 4 of the Collection. Edited With Translation and Commentary by Heike Sefrin-Weis. Springer, London, 2010.
- [8] *Ostermann, A. – Wanner, G.*: Geometry by Its History. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2012.
- [9] *Rozenfeld, B. A.*: Apollonij Pergskij. MCNMO, Moskva, 2004. Dostupné na: <http://www.math.ru/lib/book/pdf/ap.of.pe.pdf>
- [10] *Švrček, J.*: Archimedův arbelos. Sborník podzimní školy MAKOS'04, JČMF, Ústí nad Labem, 2005.

Dělení úsečky

ŠÁRKA GERGELITSOVÁ – TOMÁŠ HOLAN

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V tomto článku se budeme zabývat sadou geometrických úloh, které jsou tematicky podobné. Liší se jen hodnotou jednoho parametru.

Budeme zde hledat postup, jak sestrojít bod, který dělí úsečku AB v poměru $1 : (k - 1)$, kde k je přirozené číslo, $k > 1$.

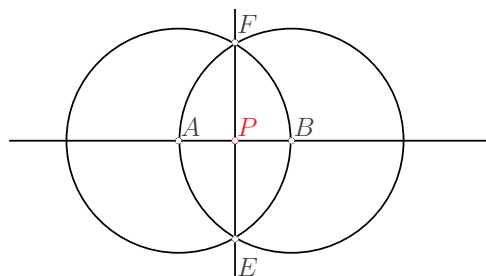
Při konstrukcích budeme používat pouze pravítko (bez měřítka), tedy přímku určenou dvěma body, a kružítko, tedy kružnici danou středem a poloměrem získaným jako vzdálenost nějakých dvou již sestrojených bodů. Půjde tedy o ryze eukleidovské konstrukce. Vzdáváme se tak obvykle využívaných nástrojů „dva trojúhelníky“ či „trojúhelník s ryskou“, takže elementární konstrukce nejsou ani rovnoběžka s danou přímkou vedená daným bodem, ani kolmice k dané přímce vedená daným bodem.

Budeme se přitom snažit, aby tyto konstrukce byly co nejkratší. Délkou konstrukce rozumíme počet kroků a za jeden *krok konstrukce* budeme považovat sestrojení jedné kružnice nebo přímky a všech jejích průsečíků s dosud sestrojenými přímkami a kružnicemi. Abychom obrázky nezaplňili nepotřebnými informacemi, vyznačíme v nich vždy jen ty průsečíky, které v dalších krocích konstrukce opravdu využijeme, nebo jsou hledaným výsledkem konstrukce.

Jedna polovina

Sestrojit bod, který dělí (nenarýsovanou) úsečku AB v poměru $1 : 1$, tj. její střed, je snadné. Stačí sestrojít dvě kružnice, z nichž každá má střed v jednom z krajních bodů úsečky a prochází druhým (obr. 1). Tyto kružnice se jistě protnou a přímka určená jejich průsečíky protíná přímku určenou body A, B v bodě P , který je střed úsečky AB . Tento postup, který vidíme na obr. 1, tedy vyžaduje sestrojení dvou přímek a dvou kružnic, má proto délku 4.

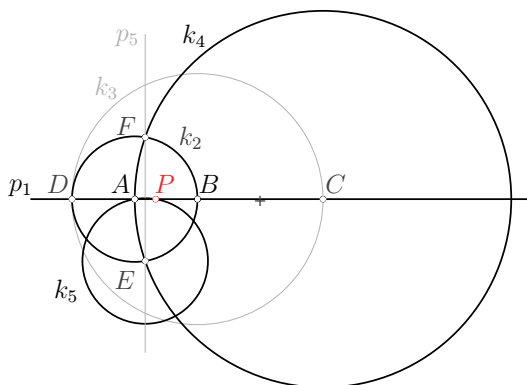
Tato konstrukce je snadná. Co kdybychom ale chtěli sestrojít bod, který dělí danou úsečku ne na polovinu, ale v nějakém jiném poměru? Dokážeme to? A kolik k tomu budeme potřebovat kroků?



Obr. 1 Konstrukce jedné poloviny

Jedna třetina a obecný postup

Konstrukci bodu v jedné třetině úsečky AB vidíme na obr. 2. Stačí k tomu pět kroků.



Obr. 2 Konstrukce jedné třetiny

Indexy v označení přímk a kružnic udávají pořadí kroku, ve kterém budou v konstrukci sestrojeny. Pokud bude z obrázku patrné, jak jsou přímky či kružnice určeny, nebudeme postup konstrukce zapisovat.

Kružnice k_4 , která je předposledním krokem konstrukce, bude mít analogii v několika dalších konstrukcích. Pro přehlednost budeme středy těchto „předposledních“ kružnic všude značit shodně písmenem C .

Navíc je z obr. 2 zřejmé, že sestrojíme-li v pátém kroku konstrukce místo kružnice k_5 přímku $p_5 = EF$ (zobrazena tenkou čarou), protne přímku $p_1 = AB$ v bodě, který leží v jedné šestině úsečky AB . Přímka EF je totiž osou souměrnosti úsečky AP .

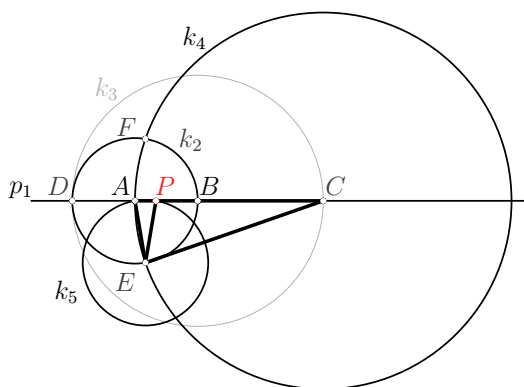
Správnost uvedené konstrukce snadno dokážeme. Důkaz ilustruje obr. 3. Budeme předpokládat (i v dalších důkazech), že úsečka AB má jednotkovou délku. V důkazu využijeme podobnosti rovnoramenných trojúhelníků.

Předně si uvědomme, že trojúhelníky PAE , AEC jsou rovnoramenné. Vzhledem k tomu, že $\angle PAE = \angle CAE$, mají oba trojúhelníky při vrcholu A , který je společný oběma jejich základnám, shodný úhel α , jsou tedy podobné a platí $|AE| = |AB| = 1$, $|AC| = 3$. Proto

$$\frac{|AP|}{|AE|} = \frac{|AE|}{|AC|},$$

tedy

$$|AP| = \frac{1}{3}.$$



Obr. 3 Důkaz konstrukce jedné třetiny

Jiná konstrukce bodu ve třetině úsečky (která má také pět kroků) vychází z toho, že přímka EF na obr. 2 protne přímku AB v bodě, jehož vzdálenost od bodu A je $\frac{1}{6}$. Upravíme postup a sestrojíme takové body E, F , aby přímka EF protínala polopřímku AB v $\frac{1}{6}$ úsečky BG , kde G je druhý průsečík kružnice k_2 s přímkou AB . $|BG| = 1$, $|BC| = 3$. Konstrukci vidíme na obr. 4. (Nepojmenované úsečky nejsou součástí konstrukce.)

Místo přímky EF ale sestrojíme kružnici k_5 se středem v bodě E , která prochází bodem G . Je zřejmé, že její druhý průsečík P s přímkou AB je bod ležící v jedné třetině úsečky AB .

Pokud zobecníme konstrukci na obr. 2 a sestrojíme bod C na polopřímce AB takový, že $|AC| = k$, pak platí pro podobné rovnoramenné trojúhelníky PAE , AEC v obr. 5 rovnosti $|AE| = |AB| = 1$, $|AC| = k$. Proto

$$\frac{|AP|}{|AE|} = \frac{|AE|}{|AC|}, \quad \text{tedy } |AP| = \frac{1}{k}.$$

Počet kroků konstrukce závisí na tom, kolik kružnic potřebujeme k sestrojení zmíněného bodu C polopřímky AB , aby platilo $|AC| = k$.

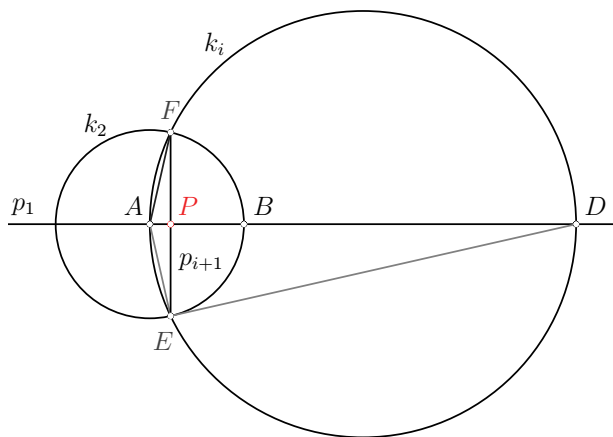
Na obr. 5 dále vidíme, že přímka EF je osa úsečky AP , proto pro její průsečík D s úsečkou AB platí

$$|AD| = |DP| = \frac{1}{2k}.$$

Je-li k sudé, můžeme konstrukci hledaného dělicího bodu provést postupem uvedeným na obr. 6 a k důkazu využít podobnost pravoúhlých trojúhelníků.

Zdůvodnění. Je-li AD průměr kružnice k_i , jsou pravoúhlé trojúhelníky AED , APE , EPD podobné. $|AB| = |AE| = 1$, $|AD| = k$. Proto

$$|AP| : |AB| = |AP| : |AE| = |AE| : |AD| = 1 : k.$$



Obr. 6 Konstrukce jedné k -tiny pro sudé k

Při pozorném pohledu na obr. 5 však vidíme, že jde o týž postup, kdy přímka EF protíná úsečku AB a dělí ji v poměru $1 : (m - 1)$, kde $m = 2k$.

Kratší konstrukce

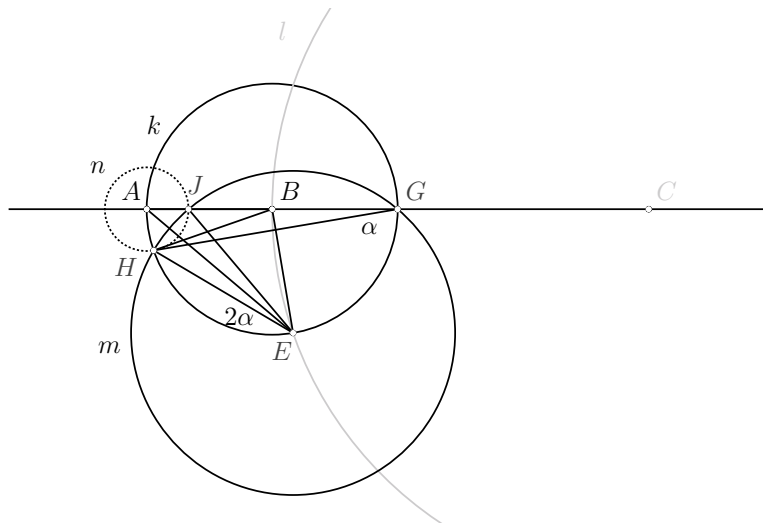
Výše uvedené obecné konstrukce jsou jistě elegantní a snadno jsme je dokázali. Jsou známé, lze je najít i na různých internetových fórech. Nejsou však ani jediné možné, ani nemusí být nejkratší. Uvedeme dva příklady.

Jedna devítina

Pokud bychom sestrojovali bod v jedné devítině úsečky AB obecným postupem uvedeným na obr. 5, museli bychom sestrojit bod C polopřímky AB takový, aby $|AC| = 9$, tedy $|BC| = 8$. K tomu potřebujeme alespoň tři pomocné kružnice, a tak má taková konstrukce sedm kroků. Mohlo by nás také napadnout sestrojit „třetinu třetiny“. Ke konstrukci jedné třetiny sice potřebujeme pět kroků, ale některé z přímk a kružnic sestrojených v prvé části jistě využijeme i v následné konstrukci. To je opravdu možné, musíme však nejprve dokázat pomocné tvrzení.

Lemma

Nechť AG je průměr kružnice $k(B; |BA|)$ a E její bod, $E \neq A, E \neq G$ (obr. 7). Potom kružnice $m(E; |EG|)$ protíná přímku AB v dalším bodě J a kružnici k v dalším bodě H , pro něž platí $|AH| = |AJ|$.



Obr. 7 Důkaz pomocného tvrzení

Důkaz. Přímk AG , HG vytínají obvodový úhel AGH na kružnici k a také obvodový úhel JGH na kružnici m . Platí tedy $|\sphericalangle AGH| = |\sphericalangle JGH|$.

Úhel JEH je středový úhel odpovídající na kružnici m témuž oblouku JH , proto při označení $|\sphericalangle AGH| = \alpha$ platí

$$|\sphericalangle JEH| = 2 |\sphericalangle JGH| = 2\alpha.$$

Úhly AGH , AEH jsou obvodové úhly odpovídající na kružnici k témuž oblouku AH , proto $|\sphericalangle AGH| = |\sphericalangle AEH| = \alpha$. Přímka AE je tedy osa úhlu $|\sphericalangle JEH|$ a protože $|JE| = |HE|$ (H, J jsou body kružnice m), je i $|AJ| = |AH|$. Platí tedy, že průsečíkem H kružnic k, m prochází i kružnice $n(A; |AJ|)$. Protože

$$|\sphericalangle EBG| = 2 |\sphericalangle EAG| = |\sphericalangle HAJ|$$

(středový a obvodový úhel v kružnici k), jsou trojúhelníky AHJ , BEG podobné. Koeficient podobnosti je roven poměru

$$|AJ| : |BG| = |AJ| : |AB|.$$

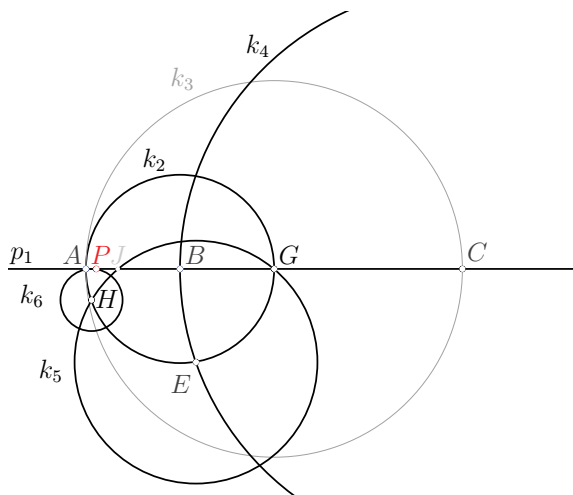
V souvislosti s našimi konstrukcemi tedy platí, že je-li bod E bodem kružnice l se středem v bodě C polopřímky AB , protíná kružnice m přímku AB v bodech G, J , kde

$$|AJ| = |AB| \cdot \frac{1}{|BC|}$$

a trojúhelníky AHJ , BEG jsou podobné s poměrem podobnosti $1 : |BC|$, stejně jako kružnice n, k a k, l .

Výše uvedené pomocné tvrzení a uvedený postup dělení úsečky v poměru $\frac{1}{k}$ tedy stačí k důkazu konstrukce, kterou sestrojíme bod v $\frac{1}{9}$ úsečky AB v šesti krocích. Konstrukce je uvedena na obr. 8. Je v ní použita nejprve konstrukce, kterou jsme ukázali na obr. 4, a poté konstrukce z obr. 2, upravená pro základní úsečku délky $\frac{1}{3}$.

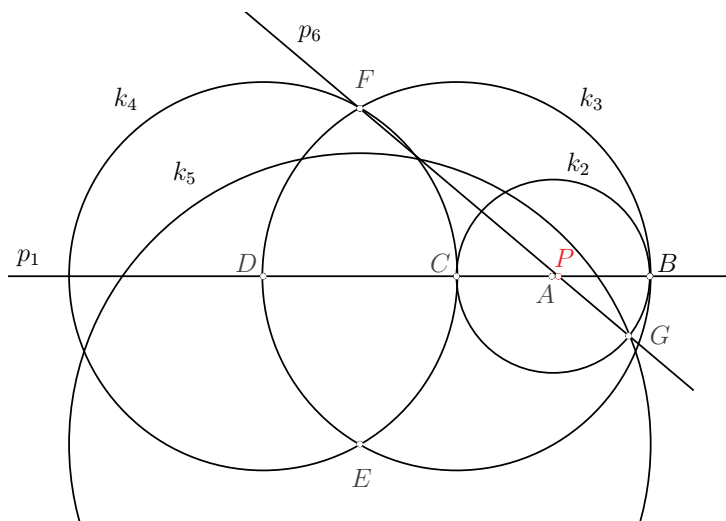
Stejně jako v předchozích obrázcích udávají dolní indexy u názvů přímek a kružnic jejich pořadí v konstrukci. Kružnice k_3 se středem G je pomocná, slouží k sestrojení bodu C , $|BC| = 3$. Z výše dokázaného lemmatu víme, že $|AH| = \frac{1}{3}$, a tudíž kružnice k_6 se středem H procházející bodem A protíná přímku AB kromě bodu A navíc v jedné třetině úsečky AJ , kde $|AH| = |AJ|$ (na obr. 8 je bod J vyznačen slabě, není pro konstrukci třeba), tedy v jedné devítině úsečky AB .



Obr. 8 Konstrukce jedné devítny

Jedna devatenáctina

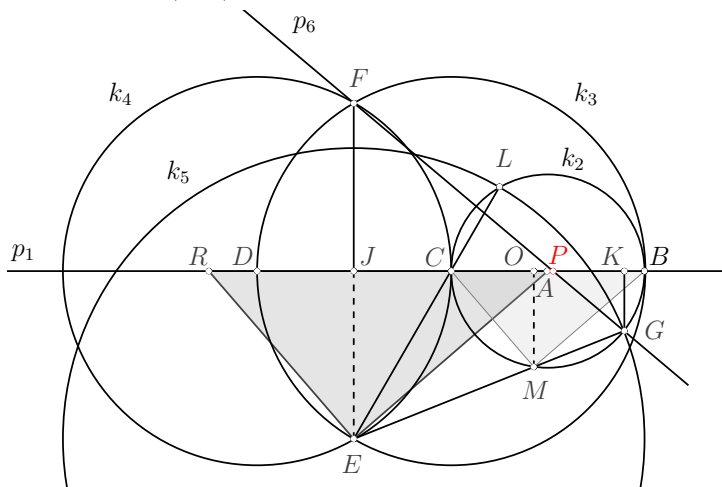
Pomocí následující konstrukce (obr. 9) sestojíme bod P úsečky AB , pro který platí $|AP| : |AB| = 1 : 19$.



Obr. 9 Konstrukce jedné devatenáctiny

Kružnice k_5 má střed E a poloměr $|AD|$ a protíná kružnici k_2 , jeden z průsečíků je bod G (druhý průsečík – bod L – doplníme pro účely důkazu do obr. 10). Bod F je jeden z průsečíků shodných kružnic k_3, k_4 . Přímka p_6 je určena body G, F a protíná přímku AB v hledaném bodě P . Konstrukce má šest kroků.

Důkaz tohoto tvrzení bychom snadno mohli provést pomocí analytické geometrie (metodou souřadnic). Např. volbou souřadnic $A[0;0]$, $B[1;0]$. V našem důkazu zůstaneme u planimetrických úvah, využijeme podobnost. Při úvahách a výpočtech budeme předpokládat, že úsečka AB je jednotková, tedy že $|AB| = 1$. Nejprve si všimneme stejnolehlosti kružnic.



Obr. 10 Důkaz konstrukce jedné devatenáctiny

Pozorování 1. Kružnice k_4, k_2 jsou stejnolehlé, k_4 je obrazem k_2 ve stejnolehlosti se středem v bodě dotyku kružnic C , s koeficientem stejnolehlosti -2 . Proto přímka EC protíná kružnici k_2 v druhém bodě L takovém, že $|EC| = 2$, $|CL| = 1$, který je tudíž jedním z průsečíků kružnic k_5, k_2 .

Pozorování 2. Přímka EG protíná kružnici k_2 v dalším bodě M . Přímka AE je středná kružnic k_5, k_2 , úsečky CL, MG jsou tudíž jedna obrazem druhé v osové souměrnosti s osou AE a trojúhelníky CEM, LEG jsou rovnoramenné podobné.

Pozorování 3. Sestrojíme-li paty kolmic z bodů F, G na přímku AB (po řadě body J, K), jsou pravoúhlé trojúhelníky FJP, GKP podobné. Bod P proto dělí úsečku JK v poměru $|JP| : |KP| = |FJ| : |KG|$.

Potřebujeme proto určit délku $|JK|$ a poměr délek $|KG| : |JF|$.

Sestrojíme pomocný pravoúhlý trojúhelník AER s pravým úhlem při vrcholu E a vrcholem R na přímce p_1 . Délku úsečky JR určíme například pomocí Eukleidovy věty o výšce: $|JA| \cdot |JR| = |JE|^2$, protože J je střed společné tětivy EF kružnic k_3, k_4 ; $|JF| = |JE| = \sqrt{3}$. Dále víme, že $|JA| = 2$, tudíž $2|JR| = 3$. Odtud plyne $|JR| = \frac{3}{2}$, $|AR| = \frac{7}{2}$.

K určení poměru délek užijeme podobné pravoúhlé trojúhelníky BMC, AER . Poměr jejich výšek $|OM| : |JE|$ je roven poměru délek jejich přepon $|BC| : |AR|$, tedy

$$|OM| : |JE| = 2 : \frac{7}{2} = 4 : 7.$$

Tedy $|OM| = (1 - \frac{3}{7})|JE|$. Protože $|EG| = \frac{3}{2}|EM|$, je

$$|KG| = \left(1 - \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{7}\right)|JE| = \frac{5}{14}|JE|.$$

Bod P tedy dělí úsečku JK v poměru $|JP| : |PK| = |JE| : |KG| = 14 : 5$.

Délku $|AK|$ snadno určíme například z pravoúhlého trojúhelníku AKG . $|AG| = 1$ a $|KG| = \frac{5}{14}|JE| = \frac{5}{14}\sqrt{3}$, tudíž

$$|AK| = \sqrt{1 - \frac{75}{196}} = \sqrt{\frac{121}{196}} = \frac{11}{14}.$$

Tedy

$$|JK| = \frac{39}{14}, \quad |JP| = \frac{14}{19}|JK| = \frac{14}{19} \cdot \frac{39}{14} = \frac{39}{19} = 2 + \frac{1}{19}.$$

Proto $|AP| = \frac{1}{19}$.

Závěr

V článku jsme se zabývali problémem, jak pravítkem a kružítkem (tedy eukleidovsky) určit bod, který leží v jedné k -tině úsečky AB .

Ukázali jsme postupy, kterými můžeme nalézt $1/2, 1/3, 1/6, 1/9$ a $1/19$ délky dané úsečky, a k tomu dva obecné postupy pro libovolné k , i když konstrukce využívající takový obecný postup nemusí být nejkratší, měřeno počtem narysovaných čar.

Pokud sami dokážete najít nějaký postup řešící tuto úlohu pro nějaká přirozená k , zašlete svá řešení na adresu redakce našeho časopisu a k tématu se vrátíme v některém z dalších čísel. Pro $k < 20$ by vám mělo stačit pouze 6 kroků.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 6. 2015 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 213

Najděte největšího lichého dělitele čísla

$$\left(\binom{2017}{2} + \binom{2017}{5} + \binom{2017}{8} + \dots \right) - \left(\binom{2015}{1} + \binom{2015}{4} + \binom{2015}{7} + \dots \right).$$

Radek Horenský

Úloha 214

Nechť k je kružnice opsaná ostroúhlému trojúhelníku ABC . Označme I střed kružnice jemu vepsané. Dále nechť P je střed oblouku BC kružnice k , který neobsahuje bod A , a Q je střed oblouku AC kružnice k , který neobsahuje bod B . Přímka PQ protíná strany AC a BC po řadě v bodech K a L . Dokažte, že $CKIL$ je kosoúhelník.

Jozef Mészáros

Dále uvádíme řešení úloh 209 a 210, jejichž zadání byla zveřejněna v pátém čísle loňského (23.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 209

Je dána úsečka AK s vnitřním bodem B a čtverce $ABCD$ a $BKLM$ v téže polorovině s hraniční přímkou AK . Dokažte, že se přímky AC , DL a KM protínají v jediném bodě.

Pavel Leischner

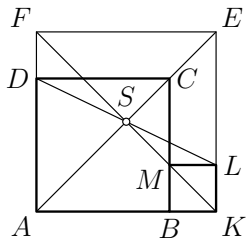
Řešení. Uvažujme čtverec $AKEF$, který leží ve stejné polorovině s hraniční přímkou AK jako čtverce $ABCD$ a $KLMN$, a označme S jeho střed.

Čtverce $ABCD$ a $AKEF$ jsou zřejmě stejnohlavé se středem v bodě A , přímka AC je tedy shodná s přímkou AE a prochází bodem S . Podobně jsou stejnohlavé čtverce $BKLM$ a $AKEF$ se středem v bodě K , přímka

KM je tak shodná s přímkou KF a prochází také bodem S . Protože

$$|DF| = |AF| - |AD| = |AK| - |AB| = |BK| = |KL|,$$

jsou body D a L souměrně sdružené podle středu S čtverce $AKEF$, přímka DL proto bodem S prochází.



Přímka AC zřejmě neprochází ani bodem K , ani bodem D , podobně přímka KM neprochází ani bodem A , ani bodem L . Přímky AC , KM a DL jsou tak navzájem různé. Navíc všechny procházejí bodem S , proto se tyto přímky protínají v jediném bodě, což jsme měli dokázat.

Správná řešení zaslali: *Ondrej Bínovský* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich,

Neúplné řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy.

Úloha 210

Pro libovolná reálná čísla $p \neq -1$ a q dokažte: Rovnice

$$x^2 + px + q = 0$$

má v oboru reálných čísel dva (ne nutně různé) kořeny, z nichž jeden je číslo opačné k druhé mocnině druhého kořene, právě když platí

$$(p^2 - q)(p + q) = (p + 1)^2 q.$$

Jaromír Šimša

Řešení. Reálná čísla x_1 a x_2 jsou kořeny dané kvadratické rovnice, právě když platí rovnosti

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{a} \quad x_1 x_2 = q. \quad (1)$$

Dokazované tvrzení je ekvivalence, je proto třeba dokázat následující implikace:

a) Dokážeme implikaci: Jestliže daná kvadratická rovnice má reálné kořeny x_1, x_2 takové, že $x_1 = -x_2^2$, potom platí

$$(p^2 - q)(p + q) = (p + 1)^2 q. \quad (2)$$

Dosazením x_2 do dané kvadratické rovnice dostaneme $x_2^2 + px_2 + q = 0$, tedy $x_1 = px_2 + q$. Z první rovnosti v (1) plyne

$$(px_2 + q) + x_2 = -p, \quad \text{neboli } (p + 1)x_2 = -p - q,$$

odkud (s přihlédnutím k podmínce $p \neq -1$) vychází

$$x_2 = -\frac{p + q}{p + 1}, \quad \text{a proto } x_1 = px_2 + q = -\frac{p(p + q)}{p + 1} + q = \frac{q - p^2}{p + 1}.$$

Z druhé rovnosti v (1) proto plyne

$$q = x_1 x_2 = \frac{q - p^2}{p + 1} \cdot \frac{-(p + q)}{p + 1} = \frac{(p^2 - q)(p + q)}{(p + 1)^2},$$

odkud po vynásobení číslem $(p + 1)^2$ obdržíme již rovnost, kterou jsme chtěli dokázat.

b) Nyní dokážeme opačnou implikaci: Jestliže pro koeficienty $p \neq -1$, q dané kvadratické rovnice platí (2), potom tato rovnice má dva reálné kořeny, z nichž jeden jeden je číslo opačné k druhé mocnině druhého kořene.

Uvažujme následující dvojici reálných čísel

$$x_1 = \frac{q - p^2}{p + 1} \quad \text{a} \quad x_2 = -\frac{p + q}{p + 1}.$$

Tato čísla jsou kořeny dané kvadratické rovnice, pokud splňují rovnosti (1). Jejich ověření provedeme dosazením:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{q - p^2}{p + 1} + \frac{-(p + q)}{p + 1} = \frac{q - p^2 - p - q}{p + 1} = -p, \\ x_1 x_2 &= \frac{q - p^2}{p + 1} \cdot \frac{-(p + q)}{p + 1} = \frac{(p^2 - q)(p + q)}{(p + 1)^2} = q, \end{aligned}$$

kde v závěru druhého výpočtu jsme využili předpokládanou rovnost.

Zbývá ukázat, proč platí $x_1 = -x_2^2$. Protože už víme, že číslo x_2 je kořenem rovnice (1) a tudíž platí $-x_2^2 = px_2 + q$, stačí zdůvodnit rovnost $x_1 = px_2 + q$. To jsme však již učinili algebraickým výpočtem výrazu $px_2 + q$ v části a).

Tím je celý důkaz ukončen.

Jiné řešení (podle Antona Hnáta). Necht' pro kořeny x_1 a x_2 dané rovnice platí $x_1 = -x_2^2$. Z Viětových vztahů (1) plyne

$$p = -(x_1 + x_2) = x_2(x_2 - 1) \quad \text{a} \quad q = -x_2^3.$$

Dosazením za p, q ověříme dokazovanou rovnost. Platí

$$\begin{aligned} (p^2 - q)(p + q) &= [x_2^2(x_2 - 1)^2 + x_2^3][x_2(x_2 - 1) - x_2^3] = \\ &= (x_2^2 - x_2 + 1)^2(-x_2^3) = (p + 1)^2q. \end{aligned}$$

Necht' naopak x_1 a x_2 jsou kořeny rovnice $x^2 + px + q = 0$. Potom pro ně platí Viětovy vztahy (1). Dosazením za p a q do rovnice

$$(p^2 - q)(p + q) = (p + 1)^2q$$

dostaneme po úpravě

$$(x_1^2 + x_2)(x_1 + x_2^2) = 0.$$

Odtud buď $x_2 = -x_1^2$, nebo $x_1 = -x_2^2$. Pokud ukážeme, že jsou to reálná čísla, bude dokázána i druhá implikace.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x_1 = -x_2^2$. Ze vztahů (1) navíc platí $x_1 = -p - x_2$, tedy $x_2^2 = x_2 + p$. Číslo x_2 je kořenem dané kvadratické rovnice, proto $x_2^2 + px_2 + q = 0$. Porovnáním posledních dvou rovnic dostaneme $x_2(p + 1) = -(p + q)$. Jelikož $p \neq -1$, je x_2 (a tedy i x_1) reálné číslo, což nám stačilo dokázat.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

Neúplné řešení zaslal *Jozef Mészáros* z Jelky.

Těsně po uzávěrce minulého čísla jsme ještě obdrželi správná řešení obou úloh **207** a **208** od *Martina Raszyka* z ETH Zürich a *Antona Hnátha* z Moravan. Tímto je s mírným zpožděním zařazujeme mezi úspěšné řešitele těchto úloh.

Pavel Calábek

Tři nové fyzikální experimenty se zvukovou kartou PC

ČENĚK KODEJŠKA

Gymnázium, Nový Bydžov, Komenského 77

V rámci zatraktivnění výuky fyziky a využívání moderních měřících metod s využitím počítače jsme se zabývali dalšími experimenty se zvukovou kartou počítače. Navázali jsme tak na předchozí práci, jejíž výsledky byly publikovány v [1].

Především jsme se snažili navrhnout úplně nové, dosud nepublikované experimenty a více zefektivnit práci s optickou bránou. Zjistili jsme, že laserové ukazovátko lze po mírné úpravě napájet přímo z USB portu notebooku, což umožňuje jeho provoz bez dalších nákladů na výměnu baterií. Další nespornou výhodou napájení z USB portu je konstantní svítivost laserového zdroje, která pak negativně neovlivňuje výsledky měření jako v případě klesající svítivosti při napájení z baterií.

V experimentech jsme dále použili místo fotodiody 1 PP 75 (součást starších fyzikálních školních souprav) nebo nového typu BPW 34 solární článek 0,5 V/100 mA, který svojí aktivní plochou o velikosti několika cm² umožňuje lepší manipulaci s optickou bránou i snadnější zaměření laserového paprsku.

K záznamu a vyhodnocení signálu jsme použili kromě osvědčeného free-warového programu *Free Audio Editor* i některé další softwarové nástroje, jako např. program *Audacity* [2] nebo *Sigview* [3], které podrobněji zmíníme v konkrétních experimentech níže.

Závěrem připomeňme ještě jeden důležitý fakt, na který jsme při práci se zvukovou kartou narazili. Zvuková karta pracuje se standardní vzorkovací

frekvencí 44,1 kHz, která vyhovuje většině prováděných měření. Při některých měřeních ale potřebujeme určovat časové intervaly s větší přesností než 10^{-3} s, kterou standardně nabízí výše uvedené programy. Při maximálním zvětšení křivky zaznamenaného signálu pak nízká hustota bodů na křivce znemožňuje přesnější odečet na časové ose. Je tedy nutné použít při záznamu signálu i jeho následném uložení do formátu WAV maximální vzorkovací frekvenci, kterou zvuková karta dokáže nabídnout. V našem případě byla hodnota této frekvence 96 kHz. Hustota bodů na křivce pak umožňuje odečítat hodnoty na časové ose s přesností až 10^{-6} s.

V další části příspěvku popíšeme stručně tři nové experimenty z různých oblastí fyziky, k jejichž realizaci jsme použili zvukovou kartu PC. Popíšeme také zcela novou metodu měření povrchového napětí kapalin.

Určení rychlosti zvuku z Dopplerova jevu a záznamů rotujícího zdroje zvuku

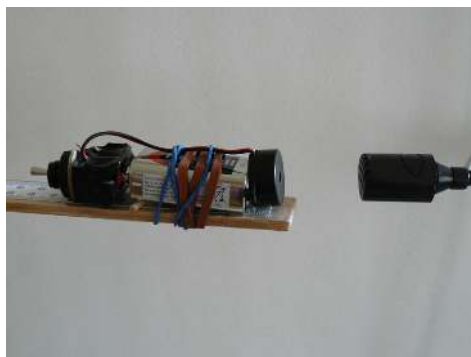
Při pohybu rotujícího zdroje signálu o konstantní frekvenci dochází současně ke dvěma efektům. Prvním jevem je Dopplerův efekt, který vzniká při přibližování zdroje zvuku k pozorovateli nebo jeho vzdalování od pozorovatele. Druhým efektem jsou rázy, které modulují zaznamenaný signál. Protože při otáčivém pohybu zdroje zvuku vůči nehybnému pozorovateli (mikrofon) dochází k téměř současnému zvýšení i snížení frekvence, můžeme pozorovat i slyšitelné zvukové rázy – zázněje.

Z vyřazeného počítače vyjmeme větráček, který ochlazuje zdroj napájení. Větráčky ochlazující procesor počítače nejsou tak výkonné a k tomuto experimentu se nehodí. Na větráček připevníme pomocí vteřinového lepidla dva šrouby, pomocí kterých k větráčku upevníme rotující dřevěné rameno. Rameno musí být umístěno symetricky, aby se zamezilo nežádoucím kmitům celého zařízení. Jeden konec ramene opatříme plastovým měřítkem, pomocí kterého pak nastavujeme vzdálenost zdroje zvuku od středu rotace. Volbou vzdálenosti volíme příslušnou obvodovou rychlost oscilátoru.

Na konec jednoho ramene připevníme zdroj sinusového signálu o určité frekvenci. Zdrojem může být např. i mobilní „chytrý“ telefon, na kterém máme nainstalovaný nějaký generátor signálu. My jsme nakonec přistoupili k miniaturizaci tohoto zdroje a použili jsme piezoelektrický zvukový měnič o frekvenci 4,2 kHz, připojený přímo přes vypínač k baterii 9V (obr. 1).

Druhý konec otáčivého ramene vyvážíme jinou baterií 9V, abychom zabránili nežádoucím kmitům celé soustavy při vyšších rychlostech. Mikro-

fon, kterým snímáme průběh signálu, umístíme v co nejmenší vzdálenosti od oscilátoru, v úrovni roviny rotace. Celkové provedení experimentu vidíme na obr. 2 a zaznamenaný signál na obr. 3.



Obr. 1 Piezoelektrický generátor s frekvencí 4,2 kHz a snímací mikrofon



Obr. 2 Měření rychlosti zvuku z Dopplerova jevu – uspořádání experimentu

Měření lze provést pro různé hodnoty vzdálenosti od středu otáčení, ale čím větší vzdálenost zvolíme, tím větší rychlosti zdroje zvuku docílíme a tím i většího rozdílu dopplerovských frekvencí. My jsme po několika předběžných testech zvolili maximální délku ramene ve vzdálenosti 24 cm. Podobně je to i s volbou frekvence oscilátoru. Čím vyšší základní frekvenci má zdroj, tím lepších výsledků při určení výsledné rychlosti zvuku dosáhneme. Maximální rychlost, kterou lze s 12 V větráčkem dosáhnout je přibližně $7,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Při této rychlosti ale vlivem nedokonalého vyvážení začne celý systém vibrovat a měření nelze téměř realizovat. Nám se

osvědčilo nastavení napájecího napětí větráku na hodnotu 7 V, při které rychlost zdroje dosahuje hodnoty přibližně $4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



Obr. 3 Záznam signálu s patrnou modulací zvukovými rázy

Platí-li pro dopplerovské frekvence známý vztah (1), viz [4],

$$f_{1,2} = f_0 \frac{v_{zv}}{v_{zv} \mp v}, \quad (1)$$

kde f_0 je základní frekvence zdroje v klidu, f_1 je frekvence pozorovatelná při přibližování zdroje zvuku k mikrofonu, f_2 je frekvence zaznamenaná při oddalování oscilátoru od mikrofonu, v je rychlost pohybu zdroje zvuku a v_{zv} je rychlost zvuku, můžeme frekvenci rázů, kterou je výrazně modulován zaznamenaný signál vypočítat z rozdílu frekvencí f_1 a f_2 .

Pro frekvenci rázů pak dostaneme vztah (2):

$$f_r = f_0 \cdot v_{zv} \frac{2v}{v_{zv}^2 - v^2} \quad (2)$$

Chceme-li z rovnice (2) vyjádřit rychlost zvuku, musíme po mírné úpravě řešit kvadratickou rovnici, která dává řešení (3):

$$v_{zv1,2} = v \frac{f_0 \pm \sqrt{f_0^2 - f_r^2}}{f_r} \quad (3)$$

Platí-li, že $f_r \ll f_0$, můžeme předchozí vztah (3) nahradit jednodušším vztahem (4), který s dostatečnou přesností umožňuje určit rychlost zvuku

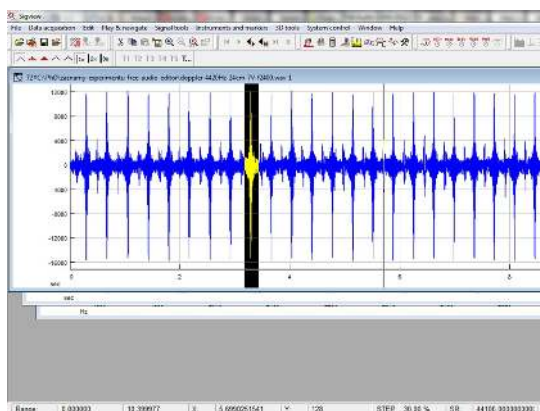
$$v_{zv} = 2v \frac{f_0}{f_r} = 2v f_0 T_r, \quad (4)$$

kde $v = 2\pi r/T$ je rychlost pohybu zdroje zvuku, f_0 je vlastní frekvence oscilátoru a T_r je perioda rázů. Frekvence rázů je řádově 10^2 Hz, takže ji lze vzhledem k vlastní frekvenci oscilátoru o velikosti $f_0 = 4\,420$ Hz zanedbat.

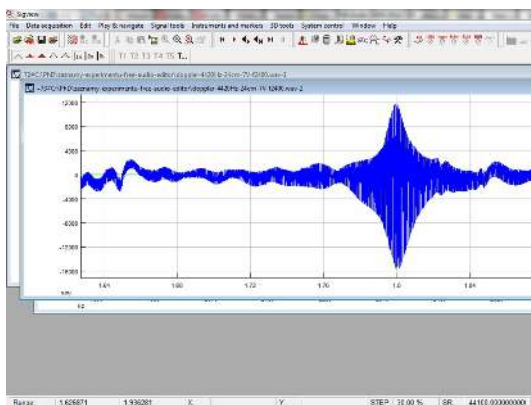
Na celém měření je nejtěžší určit co nejpřesněji frekvenci rázů, resp. jejich periodu. Program *Free Audio Editor* (FAE) je na takovéto měření už nedostatečný. Zkusili jsme použít program *Audacity*, který nabízí frekvenční analýzu zaznamenaného signálu a dokáže vyhledat největší zaznamenanou frekvenci, nicméně i tento program se ukázal jako málo přesný nástroj. Je třeba si uvědomit, že při odchylce periody rázů v řádu 10^{-3} s až 10^{-4} s se výsledná rychlost zvuku mění o několik desítek $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Hledali jsme tedy ještě přesnější analyzátor zvukového signálu a objevili program *Sigview*, který k analýze používá rychlou Fourierovu transformaci (FFT). Jedná se o shareware, který lze bez poplatku používat 21 dní, což je dostatečně dlouhá doba na to, aby žáci stihli provést laboratorní cvičení a tento program využili. Nebudeme dále rozepisovat další skvělé vlastnosti tohoto programu a ponecháme na laskavém čtenáři, aby je sám objevil.

V programu FAE tedy určíme s dostatečnou přesností periodu otáček rotujícího oscilátoru a záznam uložíme do formátu WAV, který následně otevřeme programem *Sigview* (obr. 4). Dále myši vybereme oblast, která odpovídá jedné otáčce oscilátoru, a pomocí nástroje *Lupa* ji zvětšíme (obr. 5).

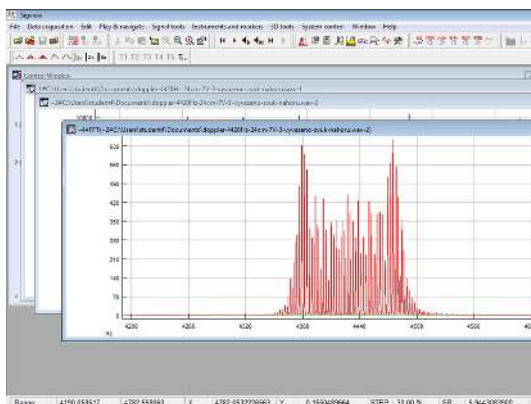


Obr. 4 Výběr oblasti v programu *Sigview*



Obr. 5 Náhled jedné periody pohybu zvukového zdroje

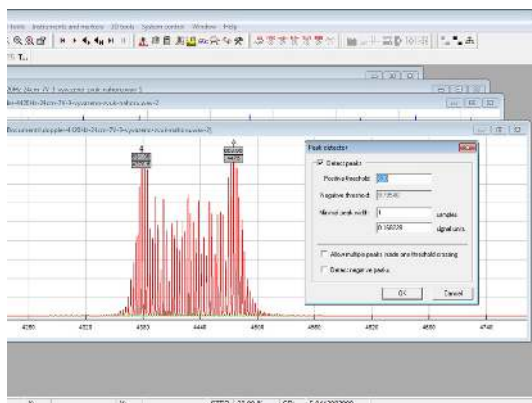
V panelu nástrojů programu *Sigview* klikneme na tlačítko Fourierovy transformace (FFT), která provede spektrální analýzu signálu a vykreslí graf (obr. 6).



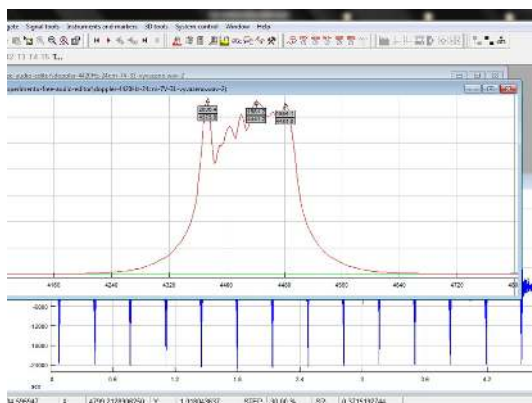
Obr. 6 Fourierova transformace vybrané části signálu

Jako poslední krok použijeme nástroj na vyhledávání píků nazvaný *Peak Detector*, který lze aktivovat pomocí pravého tlačítka myši nad grafem spektrální analýzy. Abychom výsledek hledání omezili pouze na jeden až dva největší píky v záznamu signálu, je dobré nastavit v poloze *Positive threshold* dolní mez pro hledanou hodnotu na ose *y* (obr. 7).

Výsledný graf s vyhledanými maximy vidíme na následujícím obr. 8.



Obr. 7 Aktivace a nastavení *Peak Detectoru*



Obr. 8 Označení největších píků v signálu

Někdy dokonce program označí nejen pík, který odpovídá nejvyšší frekvenci, ale jako druhý je označen pík, který odpovídá nejnižší frekvenci. Frekvenci rážů pak můžeme přímo vypočítat odečtením frekvenčních hodnot těchto dvou píků jako $f_r = f_{\max} - f_{\min}$. Pokud program neoznačí nejmenší hodnotu píkem, můžeme ji manuálně určit kurzorem myši. Většinou je ale nejvýraznější pouze pík s největší frekvencí $f_{\max}$. Pro rychlosti do $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ můžeme bez újmy na přesnosti frekvenci rážů určit ze vztahu

$$f_r = 2(f_{\max} - f_0). \quad (5)$$

Naměřené hodnoty jsou uvedeny v Tabulce 1. Vlastní frekvenci oscilátoru jsme změřili pomocí programu *Visual Analyser* [1] a její hodnota byla určena jako $f_0 = 4\,420$ Hz.

U (V)	T (s)	v ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	$f_{\max}$ (Hz)	$f_{\min}$ (Hz)	T_r (s)	v_{zv} ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
4	0,516	2,92	4464,1	4373,3	0,01101	284
5	0,421	3,58	4473,5	4384,7	0,01126	356
6	0,376	4,01	4478,9	4379,3	0,01004	356
7	0,348	4,33	4481,6	4373,9	0,00929	356
8	0,322	4,68	4487,0	4368,5	0,00844	349

Tab. 1 Určení rychlosti zvuku z Dopplerova jevu s rázovou modulací signálu

Ve výše uvedené tabulce představuje U hodnotu napájecího napětí větráčku, T je perioda pohybu rotujícího oscilátoru určená v programu FAE, v je velikost rychlosti vypočítaná pro konstantní hodnotu $r = 0,24$ m vzdálenosti oscilátoru od středu otáčení, $f_{\max}$ a $f_{\min}$ je nejvyšší, resp. nejnižší naměřená frekvence, která byla určena spektrální analýzou signálu pomocí FFT v programu *Sigview*, T_r je perioda kmitů vypočítaná ze vztahu $1/(f_{\max} - f_{\min})$ a v_{zv} je rychlost zvuku určená vztahem (4).

Z výsledků měření jsme zjistili, že při nízké hodnotě napájecího napětí větráčku kolem 4 V je rychlost pohybu oscilátoru natolik nízká, že rázy nejsou téměř patrné. Naopak, je-li rychlost zdroje zvuku příliš velká, dochází k nežádoucím kmitům celé soustavy. Ve školních laboratorních podmínkách nemáme většinou příležitost upevnit celou konstrukci pevně ke stolu tak, aby nedocházelo k nevhodným vibracím při vysokých rychlostech. My jsme k upevnění konstrukce použili malý svěrák s otočným kloubem v horní části, který umožňuje polohovat jeho čelisti do různých směrů. Konstrukce svěráku však nedokáže vyloučit rezonanční kmitý při vyšších rychlostech. Proto jsme vlastní měření provedli pouze pro ty hodnoty napájecího napětí, při kterých nedocházelo k viditelným rezonančním kmitům soupravy.

Průměrná hodnota rychlosti zvuku určená ze všech měření má velikost $\bar{v}_{zv} = 340,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, která dobře koresponduje s tabulkovou hodnotou $343,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ při 20°C .

Měření povrchového napětí kapalin metodou největší kapky

Při dlouhodobém zkoumání tvorby vodní kapky z různých kapilár o různých průměrech jsme na základě pozorování a provedených měření dospěli

k závěru, že existuje určitý limitní případ pro velikost vytvářené kapky, ze kterého lze pak určit hodnotu povrchového napětí. Tuto zcela novou metodu jsme nazvali *metodou největší kapky*.

Teoretické odvození výsledného vztahu pro velikost povrchového napětí lze učinit na základě následující úvahy¹. Na fotografii (obr. 9) lze dobře pozorovat, že u tenkostěnné kapiláry je průměr kapky téměř identický s průměrem kapiláry. Ve vznikající kapce narůstá hydrostatický tlak, který je dán vztahem $p_h = H\rho g$, kde H je výška kapky, tedy její průměr. K odtržení kapky dojde v okamžiku, kdy je hodnota hydrostatického tlaku uvnitř kapky rovna kapilárnímu tlaku, který má pro kulový tvar kapky o poloměru R hodnotu $2\sigma/R$:

$$H\rho g = \frac{2\sigma}{R} \quad (6)$$

Platí-li současně v ideálním případě, že $H = 2R$, získáme po úpravě vztah pro povrchové napětí

$$\sigma = \frac{H^2\rho g}{4}, \quad (7)$$

kde H je výška kapky, ρ je hustota kapaliny a $g \doteq 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ je hodnota tíhového zrychlení.



Obr. 9 Kapka tvořící se z tenkostěnné kapiláry

Experimentálním pozorováním jsme zjistili, že nelze vytvořit kapku o neomezené velikosti. Při dosažení určité velikosti kapky se s dále rostoucím vnitřním průměrem kapiláry už tato velikost neměnila. Ze vztahu

¹Na obdobné úvaze je založen také postup uvedený v [8, s. 736].

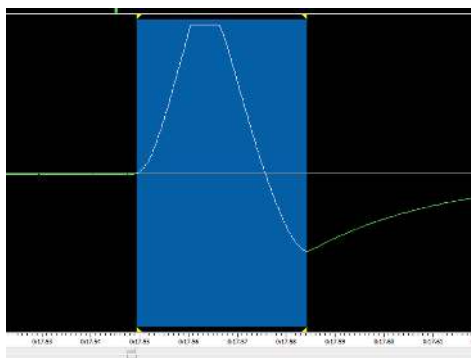
(7) lze např. u vody zpětně vyvodit maximální rozměr takové kapky jako koule o průměru 5,4 mm.

Při realizaci vlastního experimentu jsme použili jako kapiláru část plastového nástavce od propisovací tužky o vnitřním průměru 8 mm. Lze ale také využít např. obyčejné plastové brčko s vnitřním průměrem 5,8 mm. Velikost kapky jsme pak určili ze součinu rychlosti kapky a doby průchodu kapky optickou závorou (obr. 11). Rychlost kapky byla vypočítána z klasického vztahu pro dráhu volného pádu ze vztahu $v = \sqrt{2gh}$, kde h je vzdálenost kapky od laserového paprsku fotobrány.

Provedení experimentu můžeme vidět na obr. 10 a naměřené hodnoty jsou uvedeny v tab. 2. Pro hustoty kapalin jsme použili tabulkové hodnoty při 20°C: $\rho_{\text{voda}} = 1\,000\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $\rho_{\text{lih}} = 789\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.



Obr. 10 Experimentální uspořádání metody největší kapky



Obr. 11 Určení doby průchodu kapky optickou závorou

kapalina	h (m)	v (m · s ⁻¹)	t (s)	H (m)	σ (mN · m ⁻¹)
voda	0,4	2,801	0,00225	0,0063	97,3
	0,4	2,801	0,00215	0,0060	88,3
	0,3	2,426	0,00150	0,0036	31,8
	0,3	2,426	0,00140	0,0034	28,4
	0,2	1,981	0,00275	0,0055	74,2
líh	0,2	1,981	0,00285	0,0056	76,9
	0,4	2,801	0,00145	0,0041	32,5
	0,4	2,801	0,00150	0,0042	34,1
	0,3	2,426	0,00160	0,0039	29,4
	0,3	2,426	0,00165	0,0040	30,1
	0,2	1,981	0,00200	0,0040	30,1
	0,2	1,981	0,00175	0,0035	23,7

Tab. 2 Určení povrchového napětí vody a líhu metodou největší kapky

Z výsledků naměřených hodnot je patrné, že kapka mění při svém pohybu svůj tvar. Tento jev je známý jako oscilace kapky [8]. Průměrná hodnota povrchového napětí vody je $\sigma_{\text{voda}} = 79 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, pro líh pak je to $\sigma_{\text{lih}} = 36 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$. Připomeňme jen na závěr, že tabulkové hodnoty výše měřených kapalin při 20 °C dosahují hodnot 73 mN · m⁻¹ pro vodu a 22 mN · m⁻¹ pro líh. Domníváme se, že při provedení většího počtu pokusů a zejména pro řadu různých výšek h , by se hodnoty více přiblížily hodnotám tabulkovým, protože by se statisticky vyrovnal počet různých tvarů kapky při její oscilaci. Oscilace tvaru kapky při volném pádu má tedy negativní vliv na průběh naměřených hodnot.

Velikost kapky lze zajisté změřit i jiným způsobem. Místo optické brány lze využít digitální fotoaparát nebo kameru, kterou lze zaznamenat maximální velikost kapky těsně před odtržením od kapiláry.

Určení modulu pružnosti z kmitů destičky obdélníkového průřezu

Teorie kmitů tyčí různých průřezů je vysvětlena např. v [5]. Ze vztahu pro kruhové frekvence ω_n jednostranně vetknuté destičky obdélníkového

průřezu pak můžeme vyjádřit modul pružnosti E daného materiálu

$$E = \frac{48\pi^2 \rho l^2 f^2}{a_i^4 h^2}, \quad (8)$$

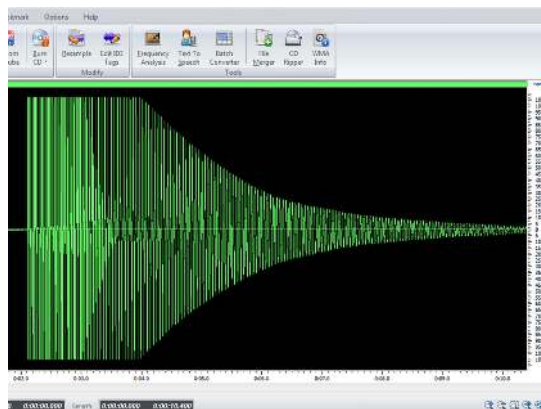
kde ρ je hustota látky, ze které je destička vyrobena, l je délka destičky, h je tloušťka destičky, f je frekvence vlastních kmitů a a_i jsou tzv. charakteristické hodnoty, jejichž velikosti jsou dány okrajovými podmínkami (číslem vidu, způsobem upevnění destičky). V našem případě činila hodnota této konstanty $a_i = 1,8751$, resp. $a_i^2 = 3,52$ což odpovídá jednostranně vetknuté destičce pro vid $n = 1$, viz [5]. Za povšimnutí stojí fakt, že šířka destičky nemá na frekvenci kmitů žádný vliv.

Vlastní experiment jsme provedli následujícím způsobem: do svěráku jsme upevnili postupně různě dlouhé destičky z mědi, oceli a nerez. Destičky měly také různou tloušťku. Ke zjištění frekvence kmitů jsme opět použili optickou závorku sestavenou z laserového ukazovátka a solárního článku. K vyhodnocení signálu jsme použili program *Free Audio Editor*. Uspořádání experimentu můžeme vidět na obr. 12, průběh kmitů destičky na obr. 13, na kterém je mimo jiné vidět i krásný exponenciální pokles amplitudy kmitů.

Jako nejdůležitější část měření se nakonec ukázalo být přesné změření tloušťky destičky. Při použití pouhého posuvného měřidla jsme neustále získávali velmi nepřesné výsledky. Teprve po přesném určení tloušťky destičky za použití mikrometru se hodnoty modulu pružnosti zpřesnily natolik, že se přiblížily tabulkovým hodnotám.



Obr. 12 Měření kmitů destičky jednostranně vetknuté



Obr. 13 Tlumené kmity kovové destičky

Při měření frekvence kmitů ve FAE je také nutné provádět odečet periody mezi prvním a třetím píkem hned na samém začátku průběhu signálu, ještě dříve než dojde k exponenciálnímu poklesu amplitudy. Při velkém tlumení již destička nekmitá mimo laserový paprsek a signál je značně zkreslený.

Kromě různých kovů jsme vyzkoušeli i dřevo a plast. Naměřené hodnoty pro různé materiály jsou uvedeny v tab. 3.

materiál	ρ (kg · m ⁻³)	h (· 10 ⁻³ m)	l (m)	T (s)	f (Hz)	E_{exp} (GPa)	E_{tab} (GPa) ²
nerez	7700	0,80	0,550	0,445	2,247	212	210
nerez	7700	0,80	0,360	0,192	5,208	209	210
nerez	7700	0,80	0,220	0,078	12,821	177	210
nerez	7700	1,25	0,765	0,602	1,661	178	210
měď	8960	0,45	0,115	0,052	19,231	109	120–130
měď	8960	0,45	0,193	0,140	7,143	120	120–130
ocel	8000	0,90	0,142	0,029	34,483	182	206
ocel	8000	0,90	0,220	0,067	14,925	197	206
dřevo	500	4,10	0,820	0,258	3,876	8	7–14
plast	1350	1,10	0,163	0,095	10,526	3	2–5

Tab. 3 Určení modulu pružnosti z kmitů destičky

²Tabulkové hodnoty byly získány z [6] a [7].

Naměřené hodnoty se celkem dobře shodují s tabulkovými. U dřeva pak záleží nejen na jeho druhu (smrk, modřín apod.), ale také na typu deformace. Ddokonce i při daném typu deformace je výsledek ještě závislý na tom, zda je destička namáhána ve směru vlákna nebo kolmo na vlákno. Jiné vlastnosti má také dřevo přírodní nebo lepené, vysušené nebo čerstvé [6]. V tab. 3 jsou použity hodnoty pro namáhání dřeva ohybem. Protože většinou neznáme druh dřeva nebo složení plastu, může se v tomto případě jednat pouze o orientační měření v rámci nějakého intervalu hodnot.

V případě kovových destiček je lépe volit větší délku destičky, protože výchylka kmitů déle přerušuje laserový paprsek, aniž by samotná destička kmitala uvnitř paprsku. Důležitá je i vhodná tloušťka destičky, která by se měla pohybovat od 0,5 mm do 2 mm. Při větší tloušťce je tuhost destičky tak velká, že téměř nelze dosáhnout výchylky destičky mimo oblast laserového paprsku a kmity se utlumí během několika sekund. Je-li naopak tloušťka destičky příliš malá, může dojít při velkém vychýlení destičky k nepružné deformaci.

Závěr

V této práci jsme představili tři nové experimenty se zvukovou kartou. Zabývali jsme se měřením rychlosti zvuku z Dopplerova jevu, který je při kruhovém pohybu modulován vzniklými rázy, navrhli jsme zcela novou metodu pro měření povrchového napětí kapalin a nakonec jsme se zabývali určením modulu pružnosti různých látek z frekvence kmitů jednostranně vetknuté destičky obdélníkového průřezu.

Výhodou všech experimentů je opět cenová dostupnost použitých pomůcek a základního vybavení, jednoduchost provedení experimentů a možnost jejich realizace v rámci laboratorních cvičení.

Nevýhodou, zejména pro žákovská měření, může být požadavek velké přesnosti při určování a měření dílčích veličin, jako např. velikosti kapky při měření povrchového napětí nebo tloušťky destičky při měření modulu pružnosti.

Správné provedení experimentů je také náročné na svědomitou přípravu učitele, který by si měl sám nejprve tyto experimenty vyzkoušet, aby mu byly známy různé záludnosti, které se mohou při jejich provádění vyskytnout. Lépe pak bude reagovat na případné dotazy žáků v případě, že jejich výsledky se budou výrazně lišit od tabulkových hodnot.

I přes výše uvedené nevýhody můžeme nicméně na základě testování a evaluace výsledků laboratorních cvičení konstatovat, že žáky lze novými

metodami motivovat k poznávání nových fyzikálních zákonů či alternativních měřících postupů.

Literatura

- [1] *Kodejška, Č. a kol.*: Fyzikální experimenty se zvukovou kartou PC. MFI, 22 (2013), s. 343–350.
- [2] <http://audacity.sourceforge.net/?lang=cs>
- [3] <http://www.sigview.com/>
- [4] *Lepil, O.*: Fyzika pro gymnázia. Mechanické kmitání a vlnění. Prometheus, Praha, 2001.
- [5] *Brdička, M.*: Mechanika kontinua. Academia, Praha, 2005.
- [6] *Novák, P.*: Mechanické vlastnosti dřeva domácích dřevin. [online]. [cit. 12. 10. 2014] Dostupné z: <http://www.drevostavitel.cz/clanek/mechanicke-vlastnosti-dreva-domacich-drevin>.
- [7] Plasty – mechanické vlastnosti. [online]. [cit. 12. 10. 2014] Dostupné z: <http://e-konstrukter.cz/prakticka-informace/plasty-mechanicke-vlastnosti>.
- [8] *Strouhal, Č. – Kučera, B.*: Mechanika. Sborník Jednoty českých matematiků, Praha, 1910, 2. vyd., 817 s.

Metoda oční kamery při výzkumu řešení úloh z fyziky žáky SŠ a VŠ

MARTINA KEKULE

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, Praha

Řešení úloh je nejen v současné době součástí fyzikálního vzdělávání v různých zemích světa. Jak pomoci žákům být úspěšní v této dovednosti je námětem nejen didaktického výzkumu u nás, ale i na mezinárodní úrovni. Jednou z možných metod, která se používá ke zkoumání žákovských přístupů či přímo strategií při řešení úloh je metoda oční kamery. Tato metoda byla použita například ve výzkumu srovnání strategií začátečníků a expertů při vyhledávání chyby v zapojení schémat elektrických obvodů [1], nebo při zjišťování, jak žáci využívají konceptuální nápovědy

v řešených příkladech z mechaniky [2]. Madsen a kol. [3] se například zaměřili na zkoumání rozdílných druhů pozornosti a jejich vlivu na studenty při řešení úloh z mechaniky. Cílem článku je stručně představit metodu a prezentovat kvalitativní výstupy z výzkumu zaměřeného na zjišťování přístupů žáků, které používají při řešení úloh s grafy závislosti kinematických veličin na čase.

Metoda oční kamery

Oční kamera umožňuje sledovat, kam se zkoumaná osoba dívá během prohlížení prezentovaného materiálu (obrázku, textu, videa, v případě použití přenosné kamery upevněné na brýlích i reálnou scénu). Podle frekvence kamery (běžně se využívá 60 Hz, 300 Hz, při výzkumech čtení i 500 Hz) je pozice očí zaznamenána v pravidelných časových intervalech. Pozice očí nicméně nezaručuje, že pokusná osoba vnímala dané místo na obrázku. Podle teorie vidění rozlišujeme dva základní pohyby očí při sledování nepohybujícího se objektu: fixace a sakády. Zaměřenou oblast vnímáme pouze v období fixace, která trvá průměrně 250–300 ms [4]; sakáda je přesun oka k dalšímu fixovanému místu. Z hrubých dat je tedy nutné určit, které polohy očí příslušely fixacím a které sakádám.

Spolehlivost výstupů je tedy ovlivněna nejen přesností použité techniky, ale také základním statistickým zpracováním dat. Při interpretaci výsledků je dále nutné zohlednit mechanismus vidění člověka, kdy oblast nejostřejšího vidění odpovídá $1,3^\circ$ zorného pole [5], což při vzdálenosti pokusné osoby 65 cm od obrazovky odpovídá na monitoru ploše s průměrem zhruba 1,5 cm. Pokusná osoba tedy může při dané pozici očí pohodlně a ostře vnímat cokoli zobrazené v této vzdálenosti od zaznamenané pozice očí. Předpoklad, že pokusná osoba zaměřuje pozornost právě do místa nejostřejšího vidění, nemusí být vždy správný. Jak naznačuje např. holistický model vnímání obrazového materiálu, experti nepotřebují klíčovou informaci zobrazit pomocí nejostřejší oblasti vidění, ale jsou schopni získat informaci i ze vzdálených oblastí neostrého vidění.

Přístupy k řešení fyzikálních úloh žáky s lepším a žáky s horším výkonem

Typickým výzkumným námětem při použití této metody je srovnání přístupů/strategií odborníků nebo žáků, kteří dosahují ve fyzice/v testu dobrých výsledků s žáky, kteří dosahují spíše podprůměrných výkonů. [6]

uvádí přehled typických rozdílů mezi přístupem experta a začátečníka při řešení problémů. Experti například vycházejí z konceptuálního porozumění problému, často nejprve řeší problém kvalitativně na rozdíl od začátečníků, kteří se zaměřují na manipulaci se vzorečky. Experti při řešení divergují, zvážují různé možnosti, ověřují si získaný výsledek alternativním postupem apod. Z hlediska deklarativních znalostí se experti vyznačují zejména velkou provázaností vlastních znalostí a jejich dobrou strukturací. Jaké rozdíly v přístupu expertů/ různých skupin studentů ukázaly výzkumy pomocí oční kamery? Rosengrant a kol. [7] předložili studentům schémata elektrických obvodů obsahujících pouze baterii a různě zapojené rezistory. Úkolem studentů bylo určit např. celkový odpor v obvodu, proud v jednotlivých větvích, úbytek napětí na rezistorech apod. Pomocí oční kamery byly zjištěny následující rozdíly mezi experty (zde odborníky pracujícími na univerzitě) a studenty v jejich začátcích studia na VŠ:

- experti častěji střídali pozornost mezi schématem obvodu a jejich vlastní prací; tento přístup je možné interpretovat tak, že více reflektovali jejich proces řešení;
- po skončení práce experti ještě jednou přehlédlí celé vlastní řešení;
- začátečníci fixovali jednotlivé značky rezistorů, zatímco u expertů byl zaznamenán pohyb očí sledující vždy celou smyčku obvodu; experti si tedy zřejmě při řešení úkolů představovali pohyb proudu v obvodu.

Na řešení problémů s elektrickými obvody byla zaměřena také práce [1]. V tomto případě bylo úkolem žáků odhalit problematickou část zapojení, která zapříčinila, že obvodem neprotékal proud. Studenti mohli manipulovat se simulací obvodu a získávat tedy zpětnou vazbu, zda jejich akce vede k úspěchu nebo ne. Celý proces řešení byl rozdělen do čtyř fází (které se mohly cyklicky opakovat) a byl posuzován rozdílný přístup řešení v jednotlivých fázích mezi studenty, kteří vyřešili celý test nejlépe a naopak. Prvně jmenovaní strávili více času ve fázi jedna – orientaci v problému – a ve fázi tři – zhodnocením výstupu, který provedená akce přinesla a fázi rozhodování pro případnou další akci, pokud tato nebyla úspěšná. Naopak ve fázi dvě – formulování problému a rozhodnutí se pro nějakou první akci – nebyly mezi skupinami studentů prokázány rozdíly.

Další dvě studie se zaměřily na úlohy z mechaniky. Smith a kol. [2] zkoumali, jak postupují studenti při studiu řešených úloh s cílem buďto posléze vyřešit podobný domácí úkol anebo se připravit na test obsahující podobné úlohy. Náповědné řešení výzkumníci uspořádali do dvou sloupců, z nichž jeden obsahoval text s popisem konceptuálního řešení problému,

druhý sloupec obsahoval vzorce a numerické řešení. Analýza očních pohybů ukázala, že se žáci během studia zajímali o oba typy nápověd a studovali je současně, tedy nevnímali je jako oddělené zdroje informací. Tento výsledek byl pro výzkumníci překvapivý, neboť na základě vlastní zkušenosti s vyučováním žáků očekávali spíše ignoraci kvalitativní části řešení. Madsen a kol. [3] zkoumali, kam zaměřují pozornost studenti prvního ročníku VŠ při řešení úloh, kde byly identifikovány typické žákovské miskoncepce. Nepřekvapivě, žáci, kteří danou úlohu vyřešili správně, strávili více času pozorností na oblastech relevantních pro vyřešení problému. Dalšími oblastmi zájmu výzkumníků byly jednak oblasti odpovídající typickému miskoncepčnímu uvažování a jednak oblasti přitahující svoji pozornost na základě nějaké percepční výraznosti (např. prvky blízko u sebe, velký kontrast apod.). I žáci, kteří vyřešili úlohu nesprávně, nebyli více méně ovlivněni těmito percepčně výraznými oblastmi, ale směřovali svoji pozornost do míst, která ukazují na chybné konceptuální uvažování o daném problému.

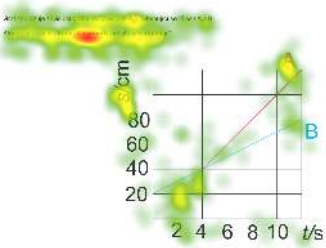
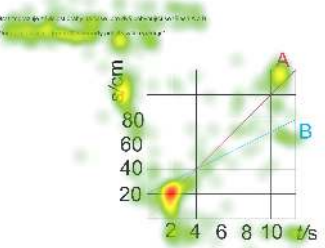
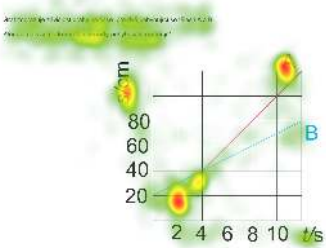
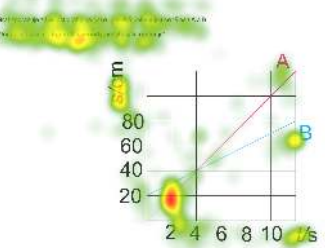
Přístupy k řešení úloh s kinematickými grafy

Dále jsou prezentovány výsledky původního výzkumu zaměřeného na řešení úloh SŠ/VŠ studentů s kinematickými grafy. Úlohy byly převzaty zejména z testu „Test of Understanding Graphs in Kinematics“ [8], český překlad viz [9]. Celkem účastníci výzkumu řešili 10 úloh, z nichž do analýzy bylo zahrnuto 7. Experiment byl proveden pomocí oční kamery (*eye-trackeru*) Tobii TX300 s frekvencí snímání 300 Hz. Prezentována je zde kvalitativní analýza provedená pomocí tzv. *heat map*. Tyto mapy zohledňují počet (nikoliv dobu trvání) fixací v dané oblasti. Počet fixací ukazuje na zájem žáka o danou oblast, doba trvání fixace pak zohledňuje zaujetí, které může signalizovat i obtížnost extrakce informace. Pro každou *heat mapu* je vytvořena vlastní škála tak, že nejčtetněji fixovaným místům je přiřazena červená barva, nejméně čtetně fixovaná místa jsou zbarvena zeleně resp. vůbec. Při porovnání *heat map* pro jednotlivé skupiny (viz dále) tedy srovnáváme relativní rozložení počtu fixací. Celkem se výzkumu zúčastnilo 26 studentů z jedné pražské střední školy a z přírodovědně zaměřených fakult UK. Cílem analýzy bylo srovnání přístupu řešení předložených úloh čtyřmi skupinami studentů, kteří:

1. vyřešili úlohu správně a navíc řešili celý test s alespoň 80 % úspěšností,
2. řešili celý test s úspěšností nižší než 30 %,

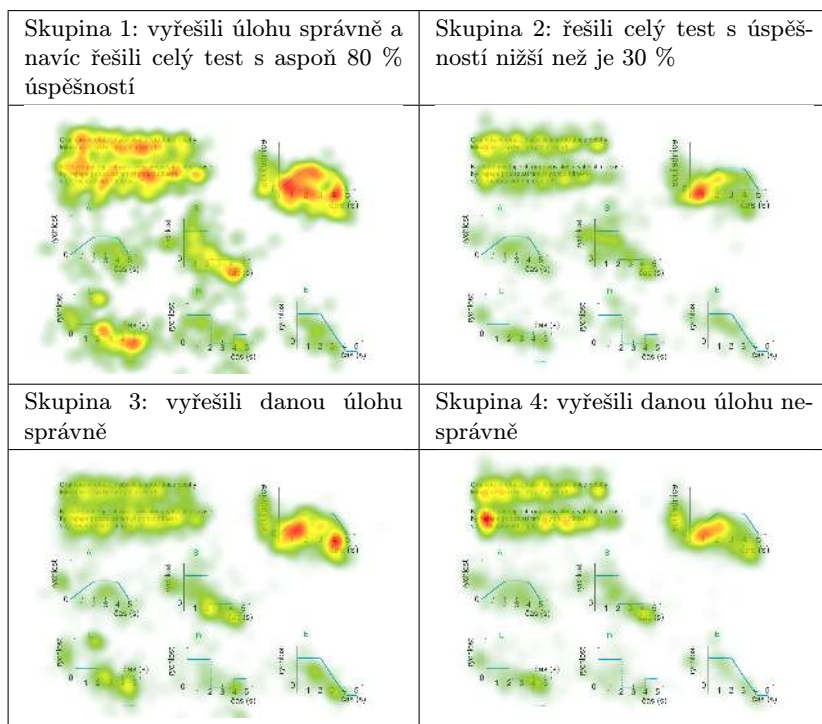
3. vyřešili danou úlohu správně,
4. vyřešili danou úlohu nesprávně.

Analýza ukazuje na možné rozdílné přístupy jak mezi studenty skupiny 1 a 2 nebo 4, tak také mezi studenty skupiny 1 a 3. Výrazné rozdíly v prvním případě byly identifikovány u 6 úloh; v druhém případě se jednalo o 4 úlohy. Například v případě úlohy 1, kdy měli žáci rozhodnout, který z objektů A a B, jehož závislost dráhy na čase je uvedena v daném grafu, se pohyboval na konci 2. sekundy rychleji, můžeme identifikovat zejména rozdíl mezi žáky skupiny 1 a 3, kdy žáci z první skupiny nejčastěji fixovali klíčovou informaci v zadání, zatímco žáci ostatních skupin se více zaměřili na hodnotu křivek (zejména křivky A) v požadovaném čase. Viz obrázky v tab. 1.

Skupina 1: vyřešili úlohu správně a navíc řešili celý test s aspoň 80 % úspěšností	Skupina 2: řešili celý test s úspěšností nižší než je 30 %
	
Skupina 3: vyřešili danou úlohu správně	Skupina 4: vyřešili danou úlohu nesprávně
	

Tab. 1 Heat mapy zobrazující distribuci počtu fixací na úlohu 1 souhrnně pro čtyři skupiny studentů. Nejčastěji fixované místo/místa v rámci každé skupiny studentů je zbarveno červeně.

Studenti, kteří celkově vyřešili test nejlépe, mají tendenci se nejvíce zaměřit na zadání úlohy. Ve srovnání s výsledky žáků ze skupiny 3, projevili tento přístup ve čtyřech úlohách ze sedmi. Zbývající úlohy můžeme z hlediska zadání považovat za spíše typické pro české prostředí (určit okamžitou rychlost pohybujícího se tělesa z grafu závislosti dráhy, resp. x -ové souřadnice na čase v daném čase). Žáci skupiny 1 nepotřebují tak často fixovat oblasti, kde vyhledávají klíčové informace pro řešení. Tento přístup můžeme interpretovat např. jako projev větší sebedůvěry při řešení úlohy. Naopak žáci, kteří řešili celou sérii testů nejhůře, vykazovali častěji počet fixací na jedno místo v celé úloze. Celkem se jednalo o 7 úloh, zatímco žáci ze skupiny nejlépe řešících test tento přístup ukázali ve 4 úlohách. Typickou ilustrací, kdy tento přístup není produktivní, jsou obrázky v tab. 2.



Tab. 2 Heat mapy zobrazující distribuci počtu fixací na úlohu 3 souhrnně pro čtyři skupiny studentů. Nejčteněji fixované místo/místa v rámci každé skupiny studentů je zbarveno červeně.

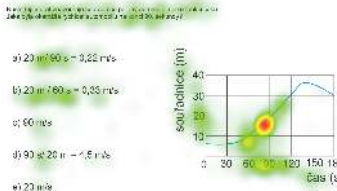
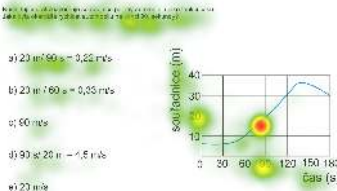
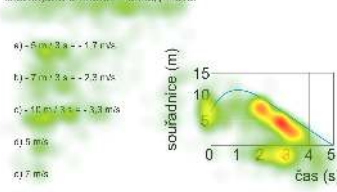
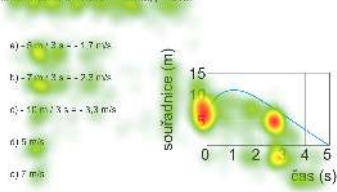
Zde měli žáci za úkol k danému grafu závislosti x -ové souřadnice na čase (vpravo) vybrat z nabízených grafů závislosti rychlosti na čase ten, který zobrazuje stejný pohyb (pozn. v souladu s původním americkým testem zde není rozlišena velikost nebo souřadnice rychlosti, což vzhledem k nabízeným distraktorům nevádí).

Jak je z heat map patrné, žáci ze skupiny 1 fixovali poměrně rovnoměrně celou oblast původního grafu, naproti tomu žáci skupiny 2 neustále fixovali pouze oblast počátku. Podobný výsledek, kdy žáci s horším výkonem nevěnují pozornost celé křivce grafu, uvádí i [10]. Tento přístup může ukazovat na typickou miskoncepci vnímání grafu jako obrázku ve srovnání s přístupem žáků s lepšími výsledky, kteří jsou schopni separovat a posléze interpretovat jednotlivé části křivky grafu.

V případě již zmíněných úloh určení okamžité rychlosti žáci ať už ze skupiny 1 či 3 fixovali pohledem křivku grafu podél intervalu s konstantní směrnici, který jim pomohl určit rychlost v daném čase. Velmi zřetelná byla tato fixace zejména v případě intervalu, kde měla křivka zápornou směrnici (viz obrázky v posledním řádku tab. 3). Žáci ze skupiny 2 a 4 vykazovali typickou miskoncepci, kdy pro výpočet požadované okamžité rychlosti odečetli pouze příslušející hodnotu dráhy, resp. souřadnice v daném čase. Tomu také odpovídají fixace pouze bodu křivky v požadovaném čase.

Závěr

Jak ukazují ilustrace v článku, metodu oční kamery je možné využít i pro výzkumné účely v didaktice fyziky, například při potřebě získat hlubší vhled do procesů řešení úloh žáky. Jak naznačuje prezentovaná analýza, žáci, kteří vyřešili celý test nejlépe, mohou k řešení konkrétních úloh přistupovat jinak, než ukazují souhrnné výsledky pro všechny žáky, kteří konkrétní úlohu vyřešili správně. Dle očekávání rozdíl v prohlížení úlohy při jejím řešení ukazují studenti, kteří řešili celý test nejlépe oproti studentům, kteří řešili celý test nejhůře. Kromě teoretických výzkumů mohou být tyto heat mapy využity jako podklady pro výuku, která by byla zaměřena na diskuzi žákovské strategie při řešení úloh. Další možností využití v učitelské praxi je tvorba řešených úloh formou „apletů“, které budou obsahovat percepčně výrazné nápovědy odvádějící pozornost od míst, která typicky fixují žáci s nejhůřšími výsledky v testu a naopak přivádějí pozornost ke klíčovým informacím, které je třeba pro správné řešení úlohy vyhledat.

Skupina 3: vyřešili úlohu 4 správně	Skupina 4: vyřešili úlohu 4 ne- správně
 a) $23 \text{ m} \cdot 60 \text{ s} = 0,22 \text{ m/s}$ b) $23 \text{ m} \cdot 60 \text{ s} = 0,33 \text{ m/s}$ c) 60 m/s d) $90 \text{ s} \cdot 20 \text{ m} = 1,5 \text{ m/s}$ e) 23 m/s	 a) $23 \text{ m} \cdot 60 \text{ s} = 0,22 \text{ m/s}$ b) $23 \text{ m} \cdot 60 \text{ s} = 0,33 \text{ m/s}$ c) 60 m/s d) $90 \text{ s} \cdot 20 \text{ m} = 1,5 \text{ m/s}$ e) 23 m/s
Skupina 3: vyřešili úlohu 6 správně	Skupina 4: vyřešili úlohu 6 ne- správně
 a) $-5 \text{ m} \cdot 3 \text{ s} = -1,7 \text{ m/s}$ b) $-7 \text{ m} \cdot 3 \text{ s} = -2,3 \text{ m/s}$ c) $-10 \text{ m} \cdot 3 \text{ s} = -3,3 \text{ m/s}$ d) 5 m/s e) 7 m/s	 a) $-5 \text{ m} \cdot 3 \text{ s} = -1,7 \text{ m/s}$ b) $-7 \text{ m} \cdot 3 \text{ s} = -2,3 \text{ m/s}$ c) $-10 \text{ m} \cdot 3 \text{ s} = -3,3 \text{ m/s}$ d) 5 m/s e) 7 m/s

Tab. 3 Heat mapy zobrazující distribuci počtu fixací na úlohu 4 a 6 souhrnně pro dvě skupiny studentů. Nejčtenější fixované místo/místa v rámci každé skupiny studentů je zbarveno červeně.

Literatura

- [1] Van Gog, T., Paas, F., Van Merriënboer, J.: Uncovering Expertise-Related Differences in Troubleshooting Performance: Combining Eye Movement and Concurrent Verbal Protocol Data. *Applied Cognitive Psychology*, 19 (2005), 205–221.
- [2] Smith, A., Mestre, J., Ross, B.: Eye-gaze patterns as students study worked-out examples in mechanics. *Physical Review Special Topics – PER*, 6 (2010), DOI 10.1103/PhysRevSTPER.6.020118.
- [3] Madsen, A. M. et al.: Difference in visual attention between those who correctly and incorrectly answer physics problems. *Physical Review Special Topics – Physics Education Research*, 8 (2012), DOI 10.1103/PhysRevSTPER.8.010122.
- [4] Lukavský, J.: Sledování očních pohybů. Bakalářská práce. MFF UK, Praha, 2005.

- [5] *Duchowski, A.*: Eye Tracking Methodology. Theory and Practice. 2nd edition, Springer, 2006.
- [6] *Gerace, W. J.*: Problem Solving and Conceptual Understanding. Proceedings PERC 2001. Dostupné z <http://umperg.physics.umass.edu/writings/online>.
- [7] *Rosengrant, D., Thomson, C., Mzoughi, T.*: Comparing Experts and Novices in Solving Electrical Circuit Problems with the Help of Eye-Tracking. Sabella, M. Henderson, C., Singh, C (eds.): Proceedings of the 2009 Physics Education Research Conference, American Institute of Physics, New York, Melville, 2009, 249–252.
- [8] *Beichner, R., J.*: Testing student interpretation of kinematics graphs. American Journal of Physics, 62 (1994), 750–762.
- [9] *Trulíková, B.*: Miskoncepce žáků a studentů při interpretaci kinematických grafů. Bakalářská práce. Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha, 2010.
- [10] *Kozhevnikov, M., Motes, M., Hegarthy, M.*: Spatial Visualization in Physics Problem Solving. Cognitive Science, 31 (2007), 549–579.

PRÆMIUM BOHEMIÆ 2014

za medaile na olympiádách

BOHUMIL VYBÍRAL

Univerzita Hradec Králové



Již po čtrnácté se dne 4. prosince 2014 na státním zámku Sychrov udělovaly nadační ceny PRÆMIUM BOHEMIÆ. Tohoto dne se laureáty nadačních cen stali studenti, medailisté ze světových středoškolských přírodovědných olympiád, konaných v roce 2014. Ceny od roku 2001 uděluje *Nadace Bohuslava Jana Horáčka Českému ráji* v den výročí narození svého zřizovatele mecenáše Bohuslava Jana Horáčka. Oceněno bylo 20 medailistů a medailistek (17 chlapců a 3 dívky), kteří na mezinárodních (de facto světových) olympiádách ve fyzice, chemii, biologii, matematice, informatice a astronomii s astrofyzikou získali v roce 2014 celkem 21 medailí,

z toho 1 zlatou, 6 stříbrných a 14 bronzových. Jeden student (*Martin Raszyk*) získal medaile dvě (bronzovou v astrofyzice a bronzovou v informatice) a obdržel tedy dvojitou cenu PRÆMIUM BOHEMIÆ. Vedle řádných cen byly za rok 2014 uděleny také 4 ceny mimořádné – získal je tříčlenný tým za zlatou medaili na evropské přírodovědné soutěži EUSO a pak jeden student za vítězství v hudební olympiádě (v kategorii kompozice). Hodnota ceny v roce 2014 byla stejná, jako v roce 2013. Tedy za zlatou medaili 35 tisíc Kč, za stříbrnou 20 tisíc Kč a za bronzovou 15 tisíc Kč. K tomu diplom a nadační medaile v barvě kovu na světové soutěži. Mimořádné ceny byly v hodnotě 10 tisíc Kč (bez medaile). Nadace za 14 ročníků studentům udělila 302 cen PRÆMIUM BOHEMIÆ v celkové výši 5 milionů 145 tisíc Kč.

Světové přírodovědné olympiády v roce 2014

Přírodovědné olympiády se konají každoročně, zpravidla v červenci nebo srpnu (v délce trvání asi 7 až 9 dní) na různých místech světa. V roce 2014 to byla vedle Evropy, Asie a poprvé také Afrika. Zde jsou souhrnné bližší údaje o soutěžích.

- 45. *Mezinárodní fyzikální olympiáda* se konala v Kazachstánu, v hlavním městě Astaně, za účasti 374 soutěžících z 83 států Evropy, Asie, Afriky, Austrálie a obou částí Ameriky. Mezi zúčastněnými státy a teritorií bylo zastoupeno 25 států Evropské unie. Naši soutěžící letos přivezli dvě stříbrné medaile, jednu bronzovou a jedno čestné uznání.
- 46. *Mezinárodní chemická olympiáda* se konala ve Vietnamu, v Hanoji. Této světové soutěže se zúčastnilo 291 řešitelů ze 75 států a teritorií světa. Čtyřčlenná česká reprezentace získala 1 zlatou, 1 stříbrnou a 2 bronzové medaile.
- 25. *Mezinárodní biologická olympiáda* se konala v Indonésii, na exotickém ostrově Bali. Českým čtyřem reprezentantům vynesla jednu stříbrnou a dvě bronzové medaile a jedno čestné uznání. Češi obstáli opět velmi dobře, tentokrát mezi 238 soutěžícími z 61 zemí světa.
- Největší a nejstarší olympiádu – 55. *Mezinárodní matematickou olympiádu* – uspořádala Jihoafrická republika v Kapském městě za účasti 560 soutěžících (z toho 56 dívek) ze 101 zemí pěti kontinentů. Šestice reprezentantů České republiky zde podala vynikající výkon, který nám přinesl šest medailí (jednu stříbrnou a pět bronzových, neboli všichni čeští naši řešitelé byli medailisty). Po loňském zlatu, opět vynikající úspěch mladých českých matematiků.

- 26. *Mezinárodní olympiádu v informatice* hostil Tchaj-wan v hlavním městě Tai-pei za účasti 311 řešitelů z 81 států a teritorií z celého světa. Čtyři čeští reprezentanti zde získali 1 stříbrnou a 2 bronzové medaile.
- Nejmladší z olympiád – 8. *Mezinárodní olympiádu v astronomii a astrofyzice* – uspořádalo Rumunsko v regionu Bukovina za účasti 194 soutěžících z vyspělých zemí Evropy, Asie a Ameriky. Pětičlenná česká reprezentace získala 2 bronzové medaile.
- 12. ročník *Přírodovědné olympiády zemí Evropské unie*, neboli *European Union Science Olympiad* (EUSO) se konal v řeckých Athénách za účasti 50 tříčlenných týmů z 25 zemí Evropské unie. Český tým A zde získal zlaté medaile (druhý tým B medaile stříbrné).

Čeští medailisté – laureáti Præmium Bohemiæ

- *Fyzika – 45. MFO v Kazachstánu: Jakub Dolejší*, stříbrná medaile, student Gymnázia Boženy Němcové, Hradec Králové, • *Jiří Guth Jarkovský*, stříbrná medaile, absolvent Gymnázia v Českých Budějovicích, Jírovcova ul., student Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze a Fakulty podnikohospodářské Vysoké školy ekonomické v Praze, • *Jakub Rösler*, bronzová medaile, absolvent Gymnázia Jiřího Gutha Jarkovského v Praze, student Fakulty elektrotechnické Českého vysokého učení technického v Praze.
- *Chemie – 46. MChO ve Vietnamu: Adam Přáda*, zlatá medaile, absolvent Gymnázia v Ostrově nad Ohří, student Trinity College, University of Cambridge, G. B., • *Martin Balouch*, stříbrná medaile, absolvent Gymnázia v Uherském Hradišti, student Vysoké školy chemicko-technologické v Praze, • *Michaela Krákorová*, bronzová medaile, absolventka Gymnázia v Brně-Řečkovících, studentka Přírodovědecké fakulty Masarykovy univerzity v Brně, • *Stanislav Chvíla*, bronzová medaile, student Gymnázia J. A. Komenského v Uherském Brodě.
- *Biologie – 25. MBO v Indonésii: Květa Trávníčková*, stříbrná medaile, studentka Gymnázia Zlín – Lesní čtvrť, • *Eliška Havrdová*, bronzová medaile, studentka Gymnázia v Českých Budějovicích, Jírovcova ul., • *Tomáš Zdobinský*, absolvent Gymnázia v Praze 4, Budějovická ul., student Přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

- *Matematika – 55. MMO v Jihoafrické republice: Tomáš Novotný*, stříbrná medaile, absolvent Gymnázia v České Lípě, student Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, • *Filip Bialas*, bronzová medaile, student Gymnázia v Praze 4-Opatově, • *Martin Hora*, bronzová medaile, absolvent Gymnázia v Plzni, Mikulášské nám., student Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, • *Viktor Němeček*, bronzová medaile, student Gymnázia v Jihlavě, Jana Masaryka, • *Radovan Švarc*, bronzová medaile, student Gymnázia v České Třebové, • *Pavel Turek*, bronzová medaile, student Gymnázia v Olomouci-Hejčíně.
- *Informatika – 26. IOI na Tchaj-wanu: Jan-Sebastian Fabík*, stříbrná medaile, absolvent Gymnázia v Brně, tř. Kpt. Jaroše, student Fakulty informatiky Masarykovy univerzity v Brně, • *Ondřej Hübsch*, bronzová medaile Absolvent Gymnázia v Praze 6, Arabská ul., student Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, • *Martin Raszyk*, bronzová medaile, absolvent Gymnázia v Karvině, Míroví ul., student Dep. Informatik, ETH Zürich, Švýcarsko.
- *Astronomie a astrofyzika – 8. IOAA v Rumunsku: Ondřej Theiner*, bronzová medaile, absolvent Gymnázia v Českých Budějovicích, Jírovцова ul., student Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, • *Martin Raszyk*, bronzová medaile (viz 26. IOI).
- *EUSO – 12. roč. v Řecku: Jiří Etrych*, zlatá medaile, student Gymnázia v Pardubicích, Dašická ul., • *Hana Petržílková*, zlatá medaile, studentka Gymnázia v Ústí nad Orlicí, • *Jan Petr*, zlatá medaile, student Gymnázia Jana Keplera v Praze 6.

Slavnost udílení cen

Vlastní slavnost udílení cen dne 4. prosince 2014 v zámeckém divadle na Sychrově měla důstojný a slavnostní průběh. Zúčastnili se nejen ocenění studenti a studentky s rodinným doprovodem, nýbrž i představitelé *Učené společnosti ČR* v čele s předsedou prof. RNDr. Jiřím Bičákem, DrSc., představitelé *Akademie věd ČR* v čele s místopředsedou prof. Ing. Vladimírem Marečkem, DrSc., zástupce *Jednoty českých matematiků a fyziků* RNDr. Jan Kříž, Ph.D. Tito všichni představitelé vystoupili s pozdravnými projevy. Dále byli účastní představitelé přírodovědných olympiád ČR, představitelé některých škol, předseda správní rady Nadace Mgr. František Horáček a členové správní a dozorčí rady Nadace a zástupci sdělovacích prostředků.



Obr. 1 Část oceněných studentů a studentek na zámku Sychrov, foto B. Vybíral

Prof. Ing. Bohumil Vybíral, CSc. ve svém vystoupení seznámil přítomné s úspěchy jednotlivých českých reprezentací na světových přírodovědných olympiádách. Vyzvedl veliký talent studentů a zdůraznil, že pro jejich budoucí vědecké aktivity a očekávané úspěchy bude nutné vyvinout i velkou soustavnou pracovitost, trpělivost. Poté předseda správní rady Mgr. František Horáček, Jan Horáček (člen správní rady a syn mecenáše) a prof. B. Vybíral předali studentům a studentkám ocenění. Za vyznamenané studenty poté promluvil Aleš Přáda, který získal nejvyšší ocenění. Slavnost moderovala Mgr. Jaroslava Nývltová, která rovněž spolu se svými žáky ze *Základní umělecké školy Karla Halíře* ve Vrchlabí, zajistila velmi pěkné hudební vystoupení v průběhu celé slavnosti. Se svou vítěznou skladbou na 2. Mezinárodní hudební olympiádě v Lotyšsku vystoupil Lukáš Janata. Reportáž o udílení cen PRÆMIUM BOHEMIÆ 2014 zařadila do večerních Událostí 4. 12. *Česká televize* (viz Archiv ČT na webu). Byl rovněž profesionálně pořizován videozáznam podstatných částí slavnosti a byly natočeny rozhovory s některými účastníky (videozáznam bude umístěn na internet, na stránkách You Tube).



Obr. 2 Předseda učené společnosti České republiky prof. RNDr. Jiří Bičák, DrSc. při pozdravném projevu, foto B. Vybíral

Z děkovného projevu laureáta ceny PRÆMIUM BOHEMIÆ Aleše Prády, nyní studenta Trinity College, University of Cambridge, G. B.:

Už potřetí mám možnost se účastnit této krásné události. Dostalo se mi dokonce pocty k vám promluvit a chtěl bych ji využít k tomu, abych se s vámi podělil o některé své zážitky a pozorování. Díky mezinárodním olympiádám i mému současnému studiu na Cambridge jsem měl mnoho možností se seznámit s tím, jak to chodí se školami a olympiádami v ostatních zemích. Musím říct, že jsem měl neskutečné štěstí v tom, kde jsem se narodil.

Nejenom, že má Česká republika opravdu velmi dobré základní a střední školství, ale systém olympiád, týmových soutěží, korespondenčních seminářů a podobných mimoškolních aktivit je naprosto excelentní. Většina žáků alespoň jednou něco ze jmenovaného vyzkouší. Pokud někdo projeví zájem a udělá ten první krok, vtáhne ho to do nekonečného cyklu. Jede na soustředění, pozná kamarády, zajímavé přednášející, dozví se mnoho nového. řeší lépe úlohy, jede na více soustředění, potká více kamarádů, dozví ještě více a tak dokola. Až zpětně si člověk uvědomí, kolik se toho vlastně naučil. Je to úžasný pocit, když pak sedím na vysokoškolské před-

nášce a střípky vědomostí z olympiád zapadají do velkého pevného celku. Důvod, proč všichni děláme olympiády, ale není, abychom měli náskok na vysoké škole, nebo abychom dostali různá ocenění. Děláme je proto, že nás to baví. A už Jan Ámos Komenský odhalil, že učení je nejučinnější, když žáky baví. Když jsem hovořil s olympioniky z ostatních zemí, zdaleka se jim nedostává takové podpory jako u nás. Olympiády jsou často jen nudným testováním znalostí a látku k učení si musí žáci složitě vyhledávat sami. I samotná výuka přírodních věd bývá na základních a středních školách horší. O ocenění za úsilí jako je cena PRÆMIUM BOHEMIÆ si pak můžou nechat jen zdát. Teď nemluvím jen o zemích třetího světa, ale i o vyspělých západních velmocích.

Jsem nesmírně vděčný, že jsem si mohl tak užitečně a zábavně prožít střední školu. Za to všechno chci poděkovat všem organizátorům olympiád, jak národních tak mezinárodních, všem přednášejícím na soustředěních, všem učitelům, kteří žáky nadchnou a posléze připravují, všem rodičům, kteří své děti podporují, a v neposlední řadě děkuji Nadaci Bohuslava Jana Horáčka a všem lidem, kteří se starají o její chod. za to, že dokáží ocenit práci, kterou mladí lidé vědě věnují. To je v dnešní době velmi vzácné a moc si toho vážím.

Olympiády jsou sice jenom hra, ale věřím, že se stejným nadšením a odhodláním se dnešní olympionici v budoucnu pustí do opravdových vědeckých problémů a přispějí svou troškou k rozvoji lidstva.



Obr. 3 Aleš Práda při děkovném projevu, foto B. Vybíral



Obr. 4 Část oceněných studentů a studentek, foto B. Vybíral

Literatura

- [1] *Vybíral, B.*: PRÆMIUM BOHEMIÆ 2014. Vydala Nadace B. Jana Horáčka Českému ráji, Turnov, 2014, 20 s.
- [2] Internetový archiv Euscreen Beta. Dostupné z:
<http://euscreen.eu/play.jsp?id=EUS.B680B46FFCCA4861AB3F0B5EAD212A82>
- [3] *Vybíral, B.*: PRÆMIUM BOHEMIÆ – neobyčejný příklad mecenášství. *Vesmír*, roč. 72 (2013), č. 7-8, s. 392–396.
- [4] *Vybíral, B.*: PRÆMIUM BOHEMIÆ talentům na fyziku a jiné přírodovědné obory. *Čs. čas. fyz.*, roč. 64 (2014), s. 218–224.

Kruhový model roviny

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Studenti, kteří znají geogebra a mají zvědavou až dobrodružnou povahu, tu dostávají podnět ke zkoumání nové neznámé planety, na níž je něco stejného jako na Zemi a něco zase úplně jiného, a mohou postupně poznávat její zákonitosti a chování.

Úvod

Klasický model Eukleidovské roviny je všeobecně známý, je obsahem výuky planimetrie na našich školách; rovinu s touto planimetrií označíme dále *rovina* E_2 . V naší představě je bod nekonečně malá tečka a přímka je rovná nekonečně dlouhá čára nulové tloušťky. Z nich pak tvoříme další planimetrické objekty. Přitom si uvědomíme, že např. každá přímka existuje pouze v naší mysli a tužkou na papíru ji pouze neúplně modelujeme, ta naše čára tužkou je snad rovná, ale je jen krátká a má také svou nenulovou šířku.

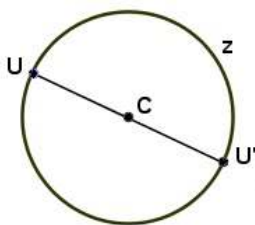
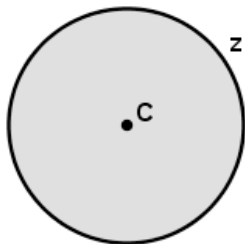
Avšak co si nějak představit nedovedeme, je právě to nekonečno. Proto si pomáháme náhradní představou, například že každá přímka směřuje k jakémusi *nevlastnímu bodu* (bodu v nekonečnu) a přitom všechny přímky vzájemně rovnoběžné směřují k témuž nevlastnímu bodu (viz úběžník v perspektivě). Všechny nevlastní body roviny pak vyplňují nekonečně vzdálenou nevlastní přímku, která jakoby ležela kolem dokola této roviny.

Geometrické modely Eukleidovské geometrie na základě axiomů, jak je vyjádřil D. Hilbert, však mohou být i jiné, než je ten náš školní E_2 , připomeňme jen dva z nich: model Beltrami–Kleinův a model Poincarého. Oba jmenované modely mají společné to, že pojem *rovina* je modelován

jako kruh. V tomto článku předvedeme ještě jiný (snad docela zajímavý) *kruhový model roviny* (T -model, což je tím vstupem na neznámou planetu) a rovinu s T -modelem nazveme *rovina* T_2 . Hned na počátku lze doporučit, abyste si otevřeli geogebra a všechno, s čím se setkáte dále, si sami hned vyzkoušeli prakticky.

Úvodní pojmy

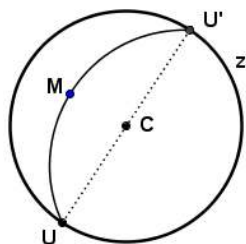
V rovině E_2 zvolme kruh K o středu C a o libovolném poloměru r – ten dále nebude hrát žádnou roli. *Rovinou* T_2 rozumíme vnitřek kruhu K . V rovině T_2 máme body roviny – jsou to body uvnitř K , přitom C nazveme *centrální bod*. Každou úsečku, která je průměrem kruhu K , nazveme *centrální přímkou* roviny, každou dvojici $[U, U']$ koncových bodů centrální přímky nazveme *nevlastní bod* roviny, množinou všech nevlastních bodů (tj. kružnice z) je *nevlastní přímka* roviny T_2 .



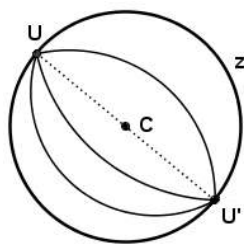
Obr. 1 Model roviny T_2 Obr. 2 Centrální přímka a nevlastní bod

Každý oblouk kružnice, který pólí kružnici z , nazveme *přímka* roviny T_2 , někdy pro srozumitelnost řekneme *T -přímka* (také centrální přímky patří mezi T -přímky). Pojmy *úsečka* a *polopřímka* jsou pak také jistě srozumitelné. Dvě přímky v T_2 považujeme za rovnoběžné, procházejí-li tímž nevlastním bodem. Každá přímka v rovině T_2 je tedy rovnoběžná s nějakou centrální přímkou, kterou nazveme *příslušná centrální přímka*. Dokonce je účelné, ke každé přímce si vždy současně zobrazit i příslušnou centrální přímku; dále uvidíme, jak to usnadňuje řešení úloh.

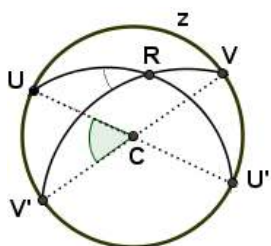
Centrální bod C si můžeme představit jako bod, „kde se právě nacházíme“, a proto se nám jeví přímky jdoucí přes centrální bod (tj. centrální přímky) jako „rovné“ a také úhly s vrcholem C se nám jeví ve stejné velikosti jako v rovině E_2 . Za odchylku (úhel) dvou přímek v rovině T_2 považujeme odchylku (úhel) jejich příslušných centrálních přímek. Odsud plyne také realizace kolmosti v rovině T_2 .



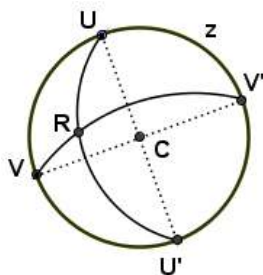
Obr. 3 Bod na přímce



Obr. 4 Soustava rovnoběžek

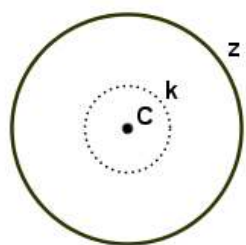


Obr. 5 Úhel dvou přímek

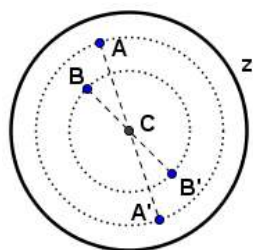


Obr. 6 Kolmé přímky

Z postavení centrálního bodu dále logicky vyplývá, a tak to v rovině T_2 bereme, že když se vzdalujeme od bodu C , roste vzdálenost od C ve všech směrech stejně. Lze tedy zavést pojem *centrální kružnice*, která se nám skutečně jeví jako kružnice, a má i svou základní vlastnost, že je to množina všech bodů roviny T_2 stejně vzdálených od středu (od bodu C).



Obr. 7 Centrální kružnice



Obr. 8 Středová souměrnost bodů

V souvislosti s centrální kružnicí si ještě uvedme, že v rovině T_2 můžeme pracovat se středovou souměrností se středem C , s osovou souměrností, v níž osou souměrnosti je centrální přímka, a s otočením se středem C .

K vytváření obrázků zde využíváme možností geogebry a proto pro potřebné konstrukce v rovině T_2 není třeba používat prostředky pro práci v rovině E_2 . Všechny konstrukce budeme provádět v rovině T_2 , což už v následujících úlohách nebudeme připomínat.

Úloha 1

Daným bodem M veďte rovnoběžku q s danou přímkou p .

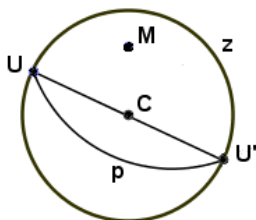
Úloha 2

Z daného bodu M spusťte kolmici k k dané přímce p .

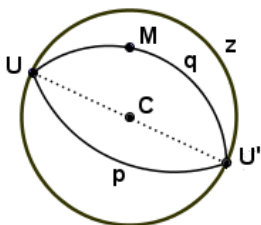
Poznámka. V obrázcích k řešení úloh nebudeme označovat každý element roviny T_2 , abychom nedostali nepřehledné obrázky, ale vyznačíme jen ty, které je třeba pro srozumitelný popis řešení.

K úloze 1: Přímka q prochází bodem M a stejným nevlastním bodem $[U, U']$ jako přímka p . Přímku q tedy sestrojíme jako oblouk kružnice procházející body U, M, U' .

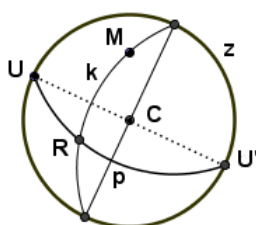
K úloze 2: K centrální přímce UCU' příslušné k T -přímce p sestrojíme kolmou centrální přímku VCV' a ta je příslušná k hledané kolmici k . Opět jde o oblouk kružnice, která prochází třemi danými body V, M, V' .



Obr. 9 Zadání k úlohám 1 a 2



Obr. 10 Řešení úlohy 1



Obr. 11 Řešení úlohy 2

Úloha 3

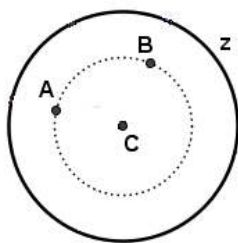
Body A, B leží na téže centrální kružnici. Sestrojte osu o úhlu ACB .

Úloha 4

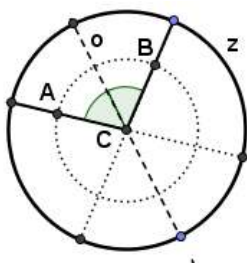
Body A, B leží na téže centrální kružnici. Sestrojte úsečku AB a její střed S .

K úloze 3: Sestrojíme ramena úhlu, tj. polopřímky CA, CB . Úhel ACB v rovině T_2 má stejnou velikost jako v rovině E_2 , takže i osu o úhlu ACB dostaneme stejně (tj. rozpůlením úhlu), jako v E_2 ; osou je centrální přímka o .

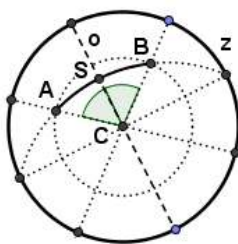
K úloze 4: Osa úhlu ACB je současně osou úsečky AB , tedy úsečka AB je kolmá na osu o . Centrální přímka příslušná k přímce AB je tedy kolmice k ose procházející bodem C . Úsečku AB v rovině T_2 tak dostaneme jako část kruhového oblouku procházejícího příslušným nevlastním bodem a body A, B . Středem S úsečky AB je pak průsečík úsečky s osou o .



Obr. 12 Zadání k úlohám 3 a 4



Obr. 13 Řešení úlohy 3

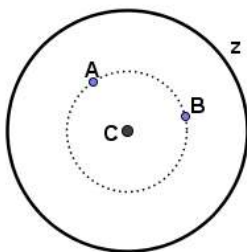


Obr. 14 Řešení úlohy 4

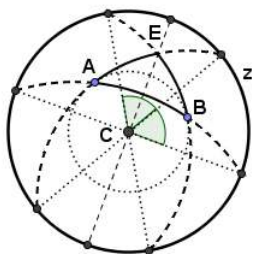
Úloha 5

Body A, B leží na téže centrální kružnici. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABE .

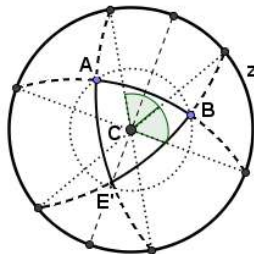
K úloze 5: Přímka AB rozděluje rovinu T_2 na dvě poloroviny, v každé z nich má daná úloha jedno řešení. Jelikož vnitřní úhly rovnostranného trojúhelníku jsou 60° , jsou centrální přímky stran trojúhelníku navzájem otočené právě o 60° a k nim už potřebné přímky AB, AE, BE lehce sestrojíme (úloha 1). Nakonec byl v obrázcích upraven styl čar.



Obr. 12 Zadání úlohy 5



Obr. 16 První řešení úlohy 5



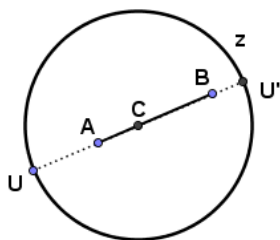
Obr. 17 Druhé řešení úlohy 5

Úloha 6

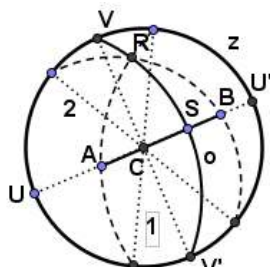
Na centrální přímce jsou dány body A, B . Sestrojte osu o úsečky AB a její střed S .

K úloze 6: Sestrojíme rovnoramenný trojúhelník ABR se základnou AB . Zvolíme libovolné a stejné úhly při základně trojúhelníku, tedy sestrojíme centrální přímky 1 a 2, které s centrální přímkou UCU' svírají též úhel. Pak body A , resp. B , vedeme s těmito centrálními přímkami 1 a 2 rovnoběžky; na nich leží strany AR, BR trojúhelníku a jejich průsečíkem je

právě bod R . Tímto bodem vedeme kolmici k AB (úloha 2), což je hledaná osa o . Jejím průsečíkem s úsečkou AB je střed S úsečky.



Obr. 18 Zadání úlohy 6

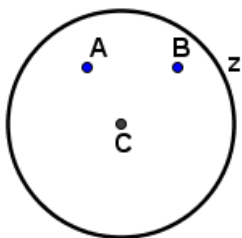


Obr. 19 Řešení úlohy 6

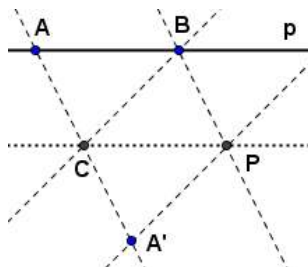
Úloha 7

Jsou dány body A, B , sestrojte přímku AB .

K úloze 7: V úloze 4 byl řešen zvláštní případ, kdy oba zadané body leží na téže centrální kružnici. Nechtě tedy body A, B neleží ani na téže centrální kružnici, ani na téže centrální přímce.



Obr. 20 Zadání úlohy 7

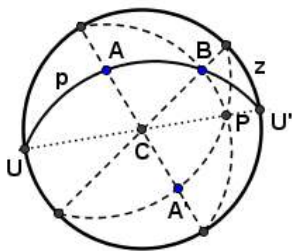


Obr. 21 Analýza řešení úlohy 7

Hlavní myšlenkou řešení je získat centrální přímku, která má stejný směr jako hledaná přímka $p = AB$. Na obr. 21 je v E_2 sestrojeno: bod A' souměrně sdružený s bodem A podle středu C), takže $|AC| = |CA'|$; centrální přímky CA, CB , bodem A' rovnoběžka s CB , bodem B rovnoběžka s CA s průsečíkem P (ukážeme, že CP je hledanou centrální přímku). Platí

$$|BC| = |PA'| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle CA'P|,$$

tedy trojúhelníky ACB , $CA'P$ jsou shodné podle věty sus; proto platí $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle PCA'|$. Z této rovnosti úhlů pak plyne $AB \parallel CP$. Všechny uvedené konstrukce jsou postupně realizovatelné v rovině T_2 , jak bylo vidět v předchozích úlohách.



Obr. 22 Řešení úlohy 7

Díky řešení této úlohy se k řešení nabízí mnoho dalších úloh, v nichž je třeba sestrojit úsečku nebo přímku danou dvěma body. Je možno doporučit, než se dáte do dalších úloh, vyzkoušet si znovu a s pozměněným zadáním všechny ty předchozí. Uveďme si nyní některé další úlohy v rovině T_2 :

- Jsou dány body A , B a bod M .
 - a) bodem M veďte rovnoběžku s přímkou $p = AB$;
 - b) bodem M veďte kolmici k přímce $p = AB$.
- Jsou dány body A , B .
 - a) Sestrojte střed S úsečky AB (užitím rovnoběžníku $ACBE$ v T_2 , S je jeho střed);
 - b) Sestrojte osu úsečky AB .
 - c) Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABE .
- Jsou dány body A , B , V , sestrojte osu úhlu AVB .
- Na dvou různých centrálních přímkách jsou dány úsečky AB a PQ . Rozhodněte o jejich shodnosti, resp. která z nich je v T_2 delší. (Návod: Obě úsečky, tj. každou zvlášť, je třeba shodným zobrazením na T_2 zobrazit na úsečku, jejímž jedním krajním bodem je střed C . Pro každou z nich to znamená např. posloupnost dvou rovnoběžných posunutí, napřed na rovnoběžku s centrální přímkou a pak zpět tak, aby obrazem bodu A nebo B , resp. P nebo Q , byl bod C . Délky pak jednoduše porovnáme užitím vhodné centrální kružnice.)

Na závěr uveďme ještě jednu úlohu, kde se vynořuje metrika.

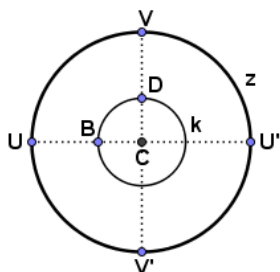
Úloha 8

V rovině T_2 je dána centrální kružnice k ; sestrojte centrální kružnici h , jejíž poloměr je dvojnásobný.

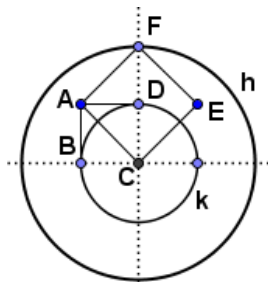
K úloze 8: Zvolíme dvojici kolmých centrálních přímek UCU' , VCV' , průsečíky s kružnicí k jsou body B a D . Sestrojíme bod A tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl čtverec (v rovině T_2 vedeme bodem D rovnoběžku s UCU' a bodem B rovnoběžku s VCV'). Pokud za poloměr kružnice k zvolíme např. 1, pak

$$|CA| = \sqrt{2} \quad (\text{v } T_2, \text{ nikoli v } E_2).$$

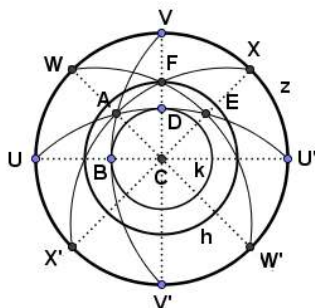
Nyní sestrojíme čtverec nad stranou AC , tedy k centrální přímce WCW' vedeme kolmici XCX' a sestrojíme na ní bod E tak, že $|CE| = |CA|$. Stejným způsobem jako u bodu A doplníme vrchol čtverce F a pak podle Pythagorovy věty a obr. 24 můžeme $|CF|$ považovat za velikost 2 (tj. její model v T_2), měřenou od bodu C po centrální přímce. Kružnice h tak má střed v C a prochází bodem F .



Obr. 23 Zadání úlohy 8



Obr. 24 Analýza řešení úlohy 8



Obr. 25 Řešení úlohy 8

Nakonec si ještě řekněme, že jsme v tomto článku představili jakousi hru s rovinou T_2 , ale ona to zase jenom tak úplně hra nebyla, protože umožnila hlubší pohled na základní planimetrické pojmy a konstrukce. Jednou z důležitých otázek, na kterou jsme zde však odpověď nehledali, je, je-li tento T -model roviny bezesporný, tj. zda se nemůže stát, že bychom dvěma různými „správnými“ postupy dostali odlišné výsledky. Tento článek nechává uvedený problém otevřený.

Videoprezentace pomocí HTML5 jako modul LMS Moodle

MILAN NOVÁK

Přírodovědecká fakulta JČU, České Budějovice

Přestože se informační technologie již zcela zabydlely v našich každodenních činnostech a ani ve vzdělávání nelze pociťovat v tomto směru příliš mnoho rušivých momentů, naleznou se zlomové technologie, které přímo ovlivňují naše životy a mají také dopad na vzdělávání. Školy se snaží přijít na to, jak integrovat mobilní aplikace, tablety a cloudové služby do svých technologických strategií.

Ve vzdělávání se začíná zcela běžně využívat videa jako výukového prostředku a díky neustále se zvyšujícímu zájmu o „chytrá“ mobilní zařízení se mobilní video stává všudypřítomné. Záznam přednášek je páteří aplikací pro vzdělávací videa. Nelze si nevšimnout, že všechny hlavní platformy hledají nejeefektivnější cesty přehrávání videí na mobilních zařízeních. Lze říci, že změna využívání kombinace mobilních zařízení a vzdělávacího videa nastává sice pozvolně, ale již nyní je nelze ignorovat. S tímto faktem se mohou objevit i některé technologické problémy, které se musí eliminovat, aby nezpůsobili problémy v otázkách přístupnosti výukových materiálů.

Přestože by pedagogové mohli považovat mobilní přístup k výukovým materiálům za žádoucí, ale ne nezbytný, ukazuje se, že mnoho žáků tráví mnohdy více času se svými chytrými mobilními telefony než s počítači. Pro ně již mobilní internet není očekáváním, ale všudypřítomnou realitou. Tito studenti budou očekávat, že jejich studijní materiály budou k dispozici na jejich zařízení Android nebo iPhone a správci kurzů se budou muset vypořádat s jejich stížnostmi a výmluvami, pokud starší videa nebudou přístupná přes mobil. Mobilní zařízení, pak bude jedním z klíčových prvků pro zvýšení tlaku na školy, aby přijaly platformy pro správu přehrávání výukových videoprezentací [1].

Video a HTML5

S ohledem na využití videoprezentací v mobilních zařízeních vyvstává několik otázek – jak vyřešit přehrávání již existujících videozáznamů, které se mohou vyskytovat v různých formátech, a jak vyřešit přehrávání video prezentací na mobilních zařízeních při zachování původní funkcionality v klasických internetových prohlížečích bez nutnosti rozsáhlých úprav.

K řešení se nabízí využití platformy HTML5 – nejnovější verze jazyka HTML, která poskytuje mnoho užitečných funkcí, včetně univerzálního videostandardu, umožňujícího vývojářům přidat video na webové stránky bez použití pluginů třetích stran, jako je např. Flash. Tato norma také poskytuje mnohem snadnější publikování videa prostřednictvím mobilních zařízení.

Předpokladem pro vložení videa do stránky prostřednictvím HTML5 je dispozice adekvátního formátu videozáznamu, což je ovlivněno několika faktory. Jednak kodekem nebo formátem videa, ve kterém je videozáznam publikován, a samotným internetovým prohlížečem, respektive jeho modulem určeným pro přehrávání videa. Níže je uvedena srovnávací tabulka (tab. 1) formátů videa určených pro přehrávání prostřednictvím HTML5 a prohlížečů [2].

	MP4	WebM	Ogg
Internet Explorer 9+	Ano	Ne	Ne
Chrome 6+	Ano	Ano	Ano
Firefox 3.6+	Ne	Ano	Ano
Safari 5+	Ano	Ne	Ne
Opera 10.6+	Ne	Ano	Ano

Tab. 1

Z tabulky je vidět nesourodá podpora. Otázkou tedy je, jak vyřešit tento problém a to i s možností použití formátů, které nejsou v HTML5 vůbec podporovány. Může se jednat například o původní video záznamy, které pro nedostatek času nebo financí nemohou být v krátké době převedeny na formáty nové.

Řešením může být využití některého z externích HTML5 přehrávačů, který by nabízel univerzální přístup k většině formátů videa. Aby mohla být využita i možnost propojení video záznamu s doprovodnými materiály, například snímky prezentace, je minimálním, ale důležitým předpokladem pro přehrávač možnost předávat informace o aktuálním čase přehrávání. Takovou alternativou přehrávače je MediaElement.js [3]. Tento přehrávač umožňuje nejen přehrávání standardních formátů určených pro HTML5, ale myslí i na starší formáty a prohlížeče. Pokud bude na stránkách požadavek na přehrání videa v elementech <video> a daný přehrávač jej není schopen identifikovat, přehrávač MediaElement.js automaticky využije vlastního přehrávače Flash nebo Silverlight, které disponují stejnými funkcemi pro přehrávání a sledování dalších informací videa jako v případě HTML5. Tím se do značné míry eliminuje nepřístupnost přehrávaných materiálů a rozšiřuje se množství přehrávaných formátů podle následující tabulky (tab. 2).

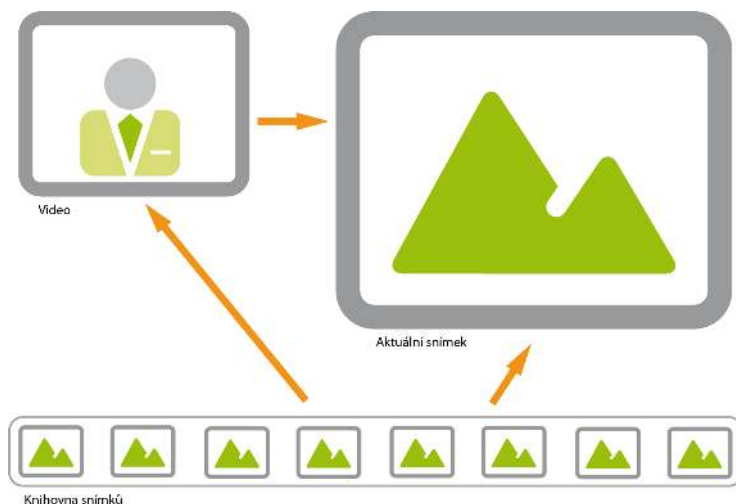
	MP4	WebM	WebM+MP4	WMV	FLV	MP3	YouTube
IE9+	HTML5	HTML5	HTML5	HTML5	Flash	HTML5	Flash
IE6-IE8	Flash	Flash	Flash	Silverlight	Flash	Flash	Flash
Firefox	Flash	HTML5	HTML5	Silverlight	Flash	Flash	Flash
Opera	Flash	HTML5	HTML5	Silverlight	Flash	Flash	Flash
Safari	HTML5	Flash	HTML5	Silverlight	Flash	HTML5	Flash
Chrome	Flash	HTML5	HTML5	Sliverlight	Flash	HTML5	Flash
iOS	HTML5	–	HTML5	–	–	HTML5	Flash
Android	HTML5	–	HTML5	–	Flash	Nativní	HTML5
WP7	Nativní	–	Nativní	Nativní	–	Nativní	HTML5

Tab. 2

Implementace přehrávače do HTML stránky je velmi jednoduchá a nevyžaduje zvláštní dovednosti a úpravy tagu <video>. Stačí přidat soubor JavaScriptu a provést počáteční inicializaci.

Videoprezentace s využitím HTML5 v Moodle

LMS Moodle v současné době patří k jednomu z nejrozšířenějších systémů pro řízení výuky. Pro tento systém lze vyvíjet dílčí moduly, které poskytují rozsáhlé možnosti v poskytování vzdělávacích materiálů v prostředí internetu. Tímto se nabízí vytvořit modul pro publikování videoprezentací a odzkoušet tak možnosti tohoto formátu na různých zobrazovacích zařízeních. Pro vytvoření videoprezentačního modulu lze vycházet z koncepce webcastingu. Jedná se o provázání libovolného videozáznamu s doprovodnými materiály. Doprovodné materiály mohou být například snímky prezentace vytvořené v MS PowerPoint. V závislosti na aktuálním čase přehrávání videa se zobrazí konkrétní snímek (obr. 1).



Obr. 1

Detailně funguje webcastingová prezentace následujícím způsobem:

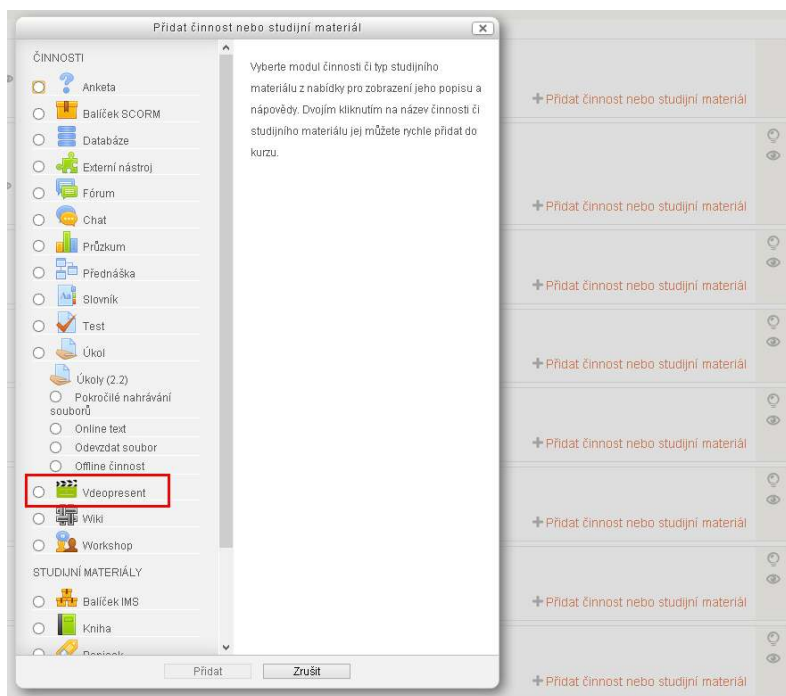
1. Videoprezentační okno se skládá z videa, zobrazovaného aktuálního snímku a knihovny snímků.
2. Při přehrávání videa dochází k zobrazování aktuálního snímku v závislosti na čase, který je snímku přiřazen při synchronizaci. Například v desáté sekundě přehrávání videa se zobrazí snímek číslo dva.
3. Při kliknutí na některý snímek v knihovně snímků dojde k přetočení videa na přiřazený čas a k zobrazení tohoto snímku v poli – aktuální snímek.

V LMS Moodle se videoprezentační modul skládá ze dvou částí: část editační a část prezentační.

Editační část videoprezentačního modulu

V této části dochází k nastavení video zdroje, přiřazení požadovaných snímků prezentace k videu a samotné nastavení synchronizace videa se snímky. Pro vytvoření nové videoprezentace se v rámci prostředí LMS Moodle provedou následující kroky.

V první řadě musí být v konkrétním kurzu zapnutý režim úprav. Následně se klikne na odkaz **Přidat činnost nebo studijní materiál** a v otevřeném výběru činností se zvolí – **Videopresent** (obr. 2).



Obr. 2

V zobrazeném formuláři se vyplní pole **Název** a **Popis**, což jsou základní informace o videoprezentaci. Po kliknutí na tlačítko **Uložit** dojde k zobrazení tlačítek pro správu obsahu (obr. 3).



Obr. 3

Nahrát soubory – otevře se souborový manažer pro nahrání publikovaných souborů do systému LMS Moodle. Těmito soubory jsou jednak videa a dále snímky prezentace MS PowerPoint. Tyto soubory jsou přístupné vždy konkrétnímu uživateli, resp. tvůrci kurzu.

Vybrat video – tlačítko otevře okno s nahranými video soubory. Kliknutím na odkaz **Připojit** dojde k přiřazení vybraného videa (obr. 4).



Obr. 4

Vybrat snímky – tlačítko otevírá okno se snímky MS PowerPoint. Opět kliknutím na odkaz **Připojit** dojde k přiřazení vybraných snímků. Takto lze přiřadit libovolný počet snímků najednou, nezávisle na pořadí (obr. 5).



Obr. 5

Synchronizovat – po kliknutí na tlačítko dojde k otevření okna s možností synchronizace přiřazeného videa s přiřazenými snímky prezentace (obr. 6).

Samotné nastavení synchronizace probíhá velmi jednoduše. V levé části okna je zobrazené video. Na pravé straně jsou doprovodné snímky. Po spuštění videa dojde k jeho přehrávání a aktuální čas se přiřadí konkrétnímu

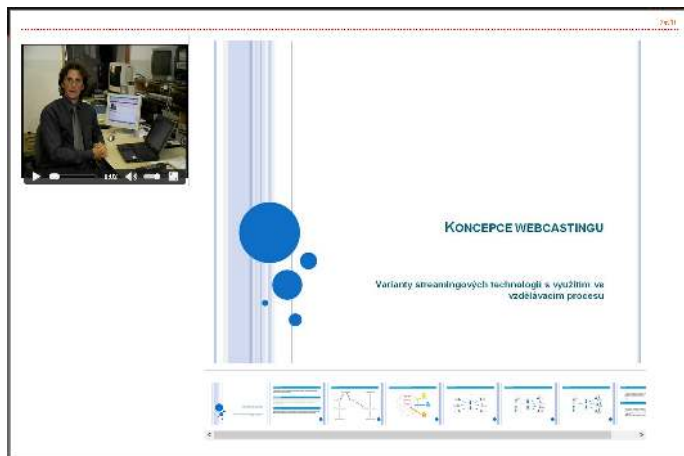
snímku kliknutím na tlačítko Přidat čas. Čas lze nastavit pro každý snímek. Přiřazený čas se zobrazí vedle popisku Aktuální čas. Tímto je připravena prezentace k zpřístupnění pro veřejnost.



Obr. 6

Prezentační část videoprezentačního modulu

Tato část je již plně přístupná uživatelům a poskytuje konkrétní výukový materiál, který je kombinací videa a doprovodných snímků prezentace. Pokud se dodrží původní představa o struktuře prezentační obrazovky, bude reálná obrazovka vypadat tak, jak je ukázáno na obr. 7.



Obr. 7

Prezentační obrazovka obsahuje přehrávač s videozáznamem, zobrazeným aktuálním snímkem podle aktuálního času přehrávání a seznam všech doprovodných snímků. Pokud se klikne na některý snímek z knihovny snímků, dojde k posunu videozáznamu na nastavený čas snímku. Důležitou přidanou hodnotou prezentace je zachování všech uvedených vlastností či možností napříč všemi použitelnými formáty videa na internetu v kombinaci s různými internetovými prohlížeči. Při použití formátu WebM nebo MP4 je navíc prezentační část plně funkční i na mobilních zařízeních.

Závěr

Uvedený videoprezentační modul pro LMS Moodle měl prioritně sloužit pro otestování možností přehrávání videozáznamů prostřednictvím HTML5 s možností prezentace materiálů na mobilních zařízeních. Nejsou v něm zakomponována rozsáhlá nastavení, což se při testování ukázalo jako značné pozitivum pro uživatele z řad učitelů napříč všemi specializacemi, kteří jsou mnohdy zděšeni složitostí LMS Moodle. Přesto lze modul dále rozšiřovat a upravovat. Zejména by se mohlo jednat o automatické vytvoření doprovodných snímků přímým uploadem prezentace MS PowerPoint a možnost využití dalších reach médií v doprovodných materiálech popřípadě jejich kombinací pro zvýšení názornosti prezentovaného tématu. Určitě velkým přínosem by byla automatická konverze formátů videa dle požadavků tvůrce kurzu.

V současné době lze prezentační část modulu odzkoušet na adrese

<http://moodle.pf.jcu.cz/course/view.php?id=117>,

kde je jednoduchá ukázka webcastingového uspořádání videoprezentace v podobě on-demand. Pokud byste měli zájem o zaslání instalace tohoto modulu, stačí napsat žádost na email novis@prf.jc.cz.

Literatura

- [1] Riismandel, P.: The State of Education Video 2012. Streaming.com [online]. 2012 [cit. 2013-04-22]. Dostupné z: <http://www.streamingmedia.com/Articles/Editorial/Featured-Articles/The-State-of-Education-Video-2012-81019.aspx>.
- [2] HTML5 Video. W3schools.com. [online]. 2013 [cit. 2013-04-24]. Dostupné z: http://www.w3schools.com/html/html5_video.asp.
- [2] MediaElement.js [online]. 2013 [cit. 2013-04-24]. Dostupné z: <http://mediaelementjs.com/>.

Z HISTORIE

Paul Dirac – génius moderní fyziky

Bez zveličování můžeme říci, že *Paul Adrien Maurice Dirac* je jedním z vědecky nejplodnějších vědců 20. století. Jeho nejaktivnější vědecké období zahrnuje zhruba 10 let (od 25 do 35 let věku). Téměř každý rok přichází s novým objevem, snad jen v 27 letech (rok 1929) trochu více odpočívá, neboť podniká cestu kolem světa. Pouť absolvoval se svým přítelem *Wernerem Heisenbergem*, při své cestě pořádají přednášky (např. v Tokiu) a setkávají se svými kolegy (např. v Rusku s Kapicou a Landauem).



Paul A. M. Dirac (1902–1984)

Podívejme se tedy alespoň na malou výše jeho vědeckého života. Roku 1925 přichází Heisenberg s „maticovým výkladem“ kvantové mechaniky (pozorovatelné fyzikální veličiny tvoří matice, operace s maticemi vedou k nekomutativní algebře). Mezitím nezávisle *Erwin Schrödinger* přichází s „vlnovým výkladem“ kvantové mechaniky vycházející z de Broglieho vlnové rovnice. Vědecký svět má dva přístupy ke kvantové teorii. Paulu Diracovi

se daří dokázat ekvivalentnost obou výše zmíněných přístupů a vytváří vlastní formalismus pro kvantovou teorii. Je mu 25 let (píše se rok 1927). Ještě tentýž rok přichází s modely kvantování elektromagnetického pole a zkoumá vzájemné působení objektů na atomární úrovni.

Fyzikové odvozují rovnice pro popis nové mechaniky – mechaniky, jež popisuje mikroobjekty. Teorie má však jednu velkou trhlínu, není relativistická! Zakládá se na klasické Newtonovské mechanice, a není tedy možné pomocí ní popisovat částice pohybující se rychlostmi blízkými rychlosti světla. Začínají snahy o vybudování relativistické kvantové mechaniky.

Výše zmíněný nedostatek odstraňují *Oskar Klein* a *Walter Gordon*, přicházejí s řešením – dnes ho nazýváme Kleinova–Gordonova rovnice. Fyzikální svět tak má relativistickou teorii pro mikroobjekty. Většina fyziků je spokojena, ne však Dirac. Klein a Gordon při odvozování vychází znovu ze zobecnění de Broglieho vlnové rovnice, která je sice relativistická, avšak má jistá úskalí. Postup Kleina a Gordona se Diracovi nelíbí, neboť nedovoluje aplikovat jeho transformační teorii. –

V roce 1928 sestavuje Dirac rovnici, která popisuje kvantový svět relativisticky. Jedná se o rovnici pro relativistický elektron (obecněji, pro volnou částici se spinem $\frac{1}{2}$). Na jeho počest se nazývá Diracova rovnice. Rovnice spojuje speciální teorii relativity a kvantovou mechaniku. Tento fenomenální úspěch zároveň předpovídá existenci pozitronu (pozitron byl experimentálně objeven roku 1932 v kosmickém záření) a objasňuje existenci spinu. Jeho rovnice dává skvostné futuristické fyzikální předpovědi, které se později experimentálně potvrzují.

Rok po těchto velkých objevech (1929) absolvuje Dirac cestu kolem světa. Po svém návratu vydává knihu *Principy kvantové mechaniky*, která je zpočátku fyziky odsuzována a jen pomalu přijímána. V dalších letech se stává členem

významných světových vědeckých společností. Roku 1932 je jmenován profesorem v Cambridge. O rok později získává společně s Erwinem Schrödingerem Nobelovu cenu za fyziku za objevy nových produktivních forem atomové teorie.

Až do pokročilého věku pracuje na zdokonalování a propracovávání kvantové teorie i teorie relativity. Vytváří obecnou kvantovou teorii pole, předpovídá možnosti polarizace vakua (stálý vznik a zánik virtuálních částic z vakua) a existenci antihmoty, zabývá se obecnou teorií relativity a vytváří její nové formulace.

Posledních 16 let svého života tráví střídavě v Cambridge a na Floridě, kde působí na univerzitě v Tallahassee (hlavní město státu Florida). Umírá v Tallahassee 20. října 1984. Po deseti letech je převezen zpět do rodné Británie a pohřben v Londýně. Lidstvo přichází o velkého fyzika 20. století, jeho dílo je však základem i inspiroací budoucích fenoménů teoretické fyziky.



Literatura

- [1] Brown, L. M.: Paul A. M. Dirac's The Principles of Quantum Mechanics. Phys. Perspect., roč. 8 (2006), s. 381–407.
- [2] Dirac, P. A. M.: Theory of electrons and positrons. Nobel Lecture, December 12, 1933.
- [3] Berry, M.: Paul Dirac: the purest soul in physics. Physics World, roč. 11, (1998), 36–40.
- [4] Skála, L.: Úvod do kvantové mechaniky. Academia, Praha, 2005.

Jaroslav Vyskočil

Arthur Beer (1900–1980)

Arthur Beer byl německý astronom narozený v Liberci (Reichenberg) 28. června 1900. Byl to jediný syn profesora Johana Beera, učitele umění a řemesel a Olgy Pollakové. Arthur dokončil svá středoškolská studia v roce 1918 na gymnáziu v Liberci. Dnes v této budově sídlí Základní škola s rozšířenou výukou jazyků, Husova, která v roce 2014 oslavila výročí 100 let budovy školy. V této souvislosti žáci vyslali několik stovek balónků naplněných heliem ve stejném okamžiku k obloze, jako poselství hvězdám A. Beera.

V roce 1924 musel Arthur Beer podstoupit operaci kvůli vážné nemoci. Rok na to se oženil s Charlotte Verou Popielarski.

I přes zdravotní problémy a rodinné záležitosti ukončuje v roce 1927 doktorská studia obhájením disertační práce *Charakterizace spektroskopických dvojhvězd*. Většina hvězd v okolí Slunce je spojena gravitačně do dvojic, či vícenásobných hvězdných systémů. Mnoho z těchto dvojhvězd registrujeme v dalekohledu pouze jako jediný objekt. Důvodem je buď jejich velká vzájemná blízkost, či velká vzdálenost od Země. Při pozorování spektrálních čar hvězd docházelo u některých z nich k jejich periodickému rozdvíjení. Jedná se o důsledek Dopplerova posuvu – při oběhu hvězdy se mění radiální rychlost jejího pohybu a tím dochází k periodické změně vlnové délky světla, které k nám přichází. Poprvé byl tento jev pozorován mezi léty 1887 až 1889.

Dr. Beer následně pracoval jako asistent na univerzitě ve Wroclawi a to do roku 1928. V roce 1929 začal pracovat na německé námořní observatoři jako astronom, kde vytvářel program pro rozhlasové vysílání s názvem *Novinky z přírody a technologií*. Až do roku 1934 působil v Hamburku v planetáriu, kde vyvíjel nové stálé expozice, pořádal přednášky pro veřejnost, publikoval odborné články, připravoval roz-

hlasové populárně-vědecké programy vysílané v Německu, Rakousku a Švýcarsku.

Když v roce 1934 začalo pronásledování židovských vědců v nacistickém Německu, emigroval Arthur Beer do Cambridge. Mezi léty 1934 až 1937 prováděl Beer výzkumy na *Solar Physics Observatory* v Cambridge a v letech 1941 až 1945 působil též jako seismolog v Kew (místo v Richmondu jižně od Londýna). Poté od roku 1946 až do své penze (v roce 1967) pracoval jako pozorovatel na observatoři v Cambridge. V této době hodně cestoval, navštívil mimo jiné mnohá místa USA a Kanady.

Arthur Beer byl členem Mezinárodní astronomické unie a Královské astronomické společnosti. Celý vědecký život pořádal odborné a populární přednášky, psal články do novin a časopisů, předkládal odborné vědecké práce. Byl jedním ze zakládajících redaktorů publikace *Vistas In Astronomy* (*Výhledy v astronomii*). Čestný doktorát mu byl udělen za práce z oblasti historie astronomie. Zemřel 20. října 1980 v Cambridge, jeho žena zemřela rok po jeho smrti. Oba jsou pochováni na hřbitově *Ascension Parish Burial Ground* v Cambridge.



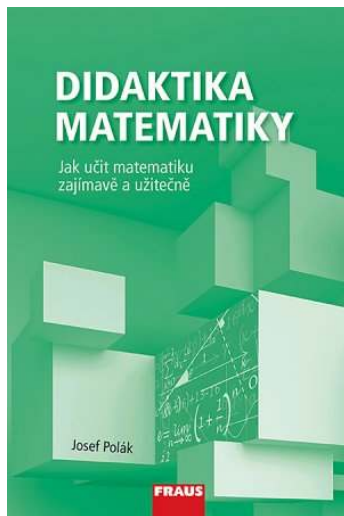
Jaroslav Vyskočil

LITERATURA

Josef Polák:
DIDAKTIKA MATEMATIKY
Jak učit matematiku zajímavě
a užitečně

Publikaci známého a renomovaného autora vydalo Nakladatelství Fraus v roce 2014 (ISBN 978-80-7238-449-5).

Obsah publikace je rozčleněn do tří částí, z nichž první část vyšla knižně (432 stran) a další dvě části budou vydány v elektronické verzi a dostupné na stránkách flexibooks.cz.



První část s názvem „Konkrétní didaktika matematiky“ tvoří didaktika základních oblastí středoškolské matematiky. Obsah je rozčleněn do 14 kapitol:

1. Úvod
2. Množiny a matematická logika
3. Reálná čísla
4. Funkce

5. Goniometrie
6. Rovnice a nerovnice v oboru reálných čísel
7. Komplexní čísla a jejich užití, řešení rovnic v oboru komplexních čísel
8. Kombinatorika
9. Počet pravděpodobnosti a matematická statistika
10. Posloupnosti a nekonečné řady
11. Geometrie
12. Vektory a jejich užití
13. Analytická geometrie
14. Matematická analýza

Zpracování všech těchto partií má jednotnou strukturu:

- historie vzniku a vývoje jejich pojmů i metod,
- přehled metodického zpracování v českých středoškolských učebnicích v historickém vývoji,
- didaktická analýza moderního pojetí a metodika výkladu,
- motivační a aplikační úlohy včetně netradičních zajímavých úloh,
- konkrétní zpracování scénáře některých základních výukových hodin (v možném rozsahu publikace).

Druhá část „Obecná didaktika matematiky“ obsahuje stručně zpracovaná, avšak ve školské praxi bezprostředně využitelná témata: Didaktické zásady vyučování matematiky. Formy a metody výuky matematiky. Prostředky matematického vzdělávání. Vzdělávací programy (RVP a ŠVP) matematiky pro SŠ.

Třetí částí je „Stručná historie matematiky, významní matematici“.

Základ přístupu autora k didaktice středoškolské matematiky tvoří historický a didaktický rozbor pojmů a metod výuky, kterým je uvedena každá kapitola. Autor tím vytváří velmi potřebný nadhled i vhled

do probíraného učiva v dané kapitole. Přitom bohatě využívá vizualizaci učiva prostřednictvím vzorových, krásně zpracovaných obrázků. Velmi prospěšný je také uvedený historický vývoj způsobu zpracování daného učiva v našich učebnicích. Nesmírně cenné jsou i historické, motivační a netradiční zajímavé úlohy.

V úvodu publikace autor kromě jiného uvádí, „... že matematika nepředstavuje pouhý soubor výpočetních postupů, ale je především svébytným prostředkem poznávání a adekvátního vyjadřování, tedy specifickým *jazykem*“. „Proto je nutné, i když nesnadné, soustavně pěstovat nejen výpočetní zručnost, ale také *matematické vyjadřovací schopnosti* žáků.“ Autorův způsob zpracování této učebnice vrchovatě sám naplňuje uvedený princip.

Kniha vychází jako na zavolanou v době, kdy se uvažuje o znovuzavedení povinné maturity z matematiky, kdy ve společnosti, tudíž i mezi studenty, převládá názor, že vše musí jít samo, bez námahy a hlubšího porozumění.

Z pohledu učitele matematiky a fyziky s jedenačtyřicetiletou praxí doporučuji tuto učebnici didaktiky matematiky všem začínajícím i zkušenějším učitelům matematiky, všem studujícím učitelství matematiky a také žákům středních škol, kteří se o matematiku zajímají hlouběji.

František Kopecký

Jan Kopka: Umění řešit matematické problémy

Publikace, kterou vydal RNDr. Karel Hoza (HAV, Praha 2013, 212 stran), obsahuje náměty navazující na učivo 8. a 9. ročníku základní školy s přesahem do učiva nižších ročníků střední školy (především gymnázia) a nabízí velmi inspirující soubor matematických problémů z různých matematických oborů.

Nejde však o sbírku úloh. Autorovým cílem je umožnit čtenáři pochopit různé

strategie řešení matematických problémů, počínaje jednoduchými hříčkami a hlavolamy a konče např. prací s Fibonacciovou posloupností. Stylisticky jsou nabízené úlohy a problémy formulovány tak, aby byly zajímavé a přímo motivovaly k řešení. Ale jak je řešit?



Autor ukazuje, jak užitečné mohou být i zdánlivě nematematické postupy, jakými je hrubý odhad a dosazování čísel pokusem a omylem, zjednodušení volbou pomocného prvku (např. volbou jedné neznámé), zanedbání některých vstupních podmínek, řešení jednoduššího případu, rozkreslování problému, apod. Pro studenty, kteří raději jdou osvědčenou cestou dokazování, jsou připomenuty základní metody důkazů (přímý, nepřímý, důkaz sporem, matematická indukce).

Matematické myšlení žáků a studentů neobvykle rozvíjí kapitola *Hrozny problémů*. Začíná hrou u kulatého stolu. *Dva hráči mají dostatek mincí stejné velikosti a postupně je střídavě kladou na desku kulatého stolu. Hráč, který se dostane do situace, že již nemá kam minci položit, prohrává.* Základní úkol je ten, objevit vítěz-

nou strategii. Toto je ovšem jakási rozcvička myšlení, neboť po vyřešení tohoto základního problému se hra postupně modifikuje doplněním dalších pravidel (např. pokládání dvou mincí na sebe, možnost vzít minci zpět), nebo se mění její vnější podmínky (stůl má uprostřed otvor, použije se stůl jiného tvaru – čtverce, trojúhelníku, tvar U, apod.). Vždy je potřeba nalézt vítěznou strategii, nebo dokázat, že neexistuje. Následuje řada dalších matematických situací, jejichž obtížnost postupně graduje zařazením nějaké další podmínky. V průběžném doplňování dalších podmínek právě spočívá kumulování úloh do hroznů.

V knize jsou přibližně stejně zastoupena témata aritmeticko-algebraická i geometrická. Ale jsou volena velice šikovně: Některé na pohled ryze geometrické problémy jsou snáze řešitelné např. rovnicemi a naopak – mnoho na pohled ryze číselných úloh se dá vyřešit, znázorníme-li je obrázkem.

Autora recenze mj. zaujal obecně často zadávaný problém najít další členy posloupnosti čísel, je-li dáno několik jejích prvních čísel. Zadavatel obvykle uznává jediné řešení (tzn. jeho), postupuje se tak – bohužel i při hodnocení v IQ testech. V knize je ukázáno, že pokračování posloupnosti obvykle není jedinečné, nýbrž záleží na tom, jaké pravidlo na počátek posloupnosti čtenář „nasadí“. Takových pravidel může být více a snadno se řešitel nemusí shodnout se zadavatelem, což zadavatele zpravidla udiví. V podstatě může taková posloupnost pokračovat jakýmkoli číslem. Tato nejednoznačnost ale odpadá v závěrečné téměř dvacetistránkové části knihy – o kráse Fibonacciovy posloupnosti a tajích v ní ukrytých.

Knihu doporučuji učitelům základních a středních škol a jejím prostřednictvím mohou mnoho vykonat pro zajímavost školské matematiky a pro rozvoj žákovských kompetencí řešení problémů.

František Jáchim