

Kritické jevy naší školské matematiky

FRANTIŠEK KUŘINA

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

Inspirací tohoto článku byla pozoruhodná kniha *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*, kterou napsal kolektiv autorů Pedagogické fakulty Univerzity Karlovy v Praze. Za kritická místa považují autoři „ty oblasti, v nichž žáci často a opakovaně selhávají, která nezvládnou na takové úrovni, aby se jejich matematická gramotnost produktivně rozvíjela a aby mohla být tvořivě využívána v každodenním životě“ ([18], s. 8). Já považuji za kritické ty jevy naší školské reality, které jsou překážkou (brzdou) k dosahování lepších výsledků. Nejde tedy o jevy, které by kriticky ohrožovaly naši školu, ale o jevy, kterých bychom si měli všimnout a pokusit se o jejich zlepšení.

Učitelé

Jan Werich cituje svého středoškolského profesora Stacha: „Nejsi blbec, Honzo! Tak si matematiku, deskriptivu a tu češtinu dej pěkně dohromady, udělej reparáty a vypadni z téhle boudy (. . .). Pamatuj si, že většina těch, co se živí nějakým učením, nemá ráda lidi, kteří myslí samostatně“ ([24], s. 27).

Stachovo tvrzení je staré téměř 100 let. Doufám, že neplatí. Nicméně mohu doložit, že učitelé, kteří potlačují samostatné myšlení žáků, existují i dnes. Tak např. jistá učitelka prvního stupně po dvanácti letech praxe píše:

Príspevek byl finančně podpořen Specifickým výzkumem PřF UHK 2015.

„Chtěla bych se zastavit u této slovní úlohy: Tři kilogramy banánů stojí 48 Kč. Kolik stojí šest kilogramů? Dětem dělá strašný problém uvědomit si, že musí vypočítat, kolik stojí jeden kilogram“ ([18], s. 55). Děti dobře vědí, že nemusí, ale paní učitelka trvá na svém.

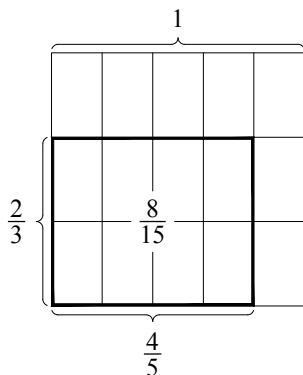
Jiná učitelka s deseti lety praxe si stěžuje: „Násobení zlomku zlomkem – to už je hrozně problematický. Jedna polovina, krát jedna polovina a ona vám z toho vyleze jedna čtvrtina. Takže jak tohle ukázat?“ ([18], s. 133).

Všimněme si otázky posledního příkladu trochu podrobněji. Zdá se mi, že tato paní učitelka má mezery ve svém didaktickém vzdělání. Vždyť přece kladná reálná čísla můžeme interpretovat jako velikosti úseček a jejich součin jako obsah obdélníku. Takže např. z obr. 1 vidíme, že

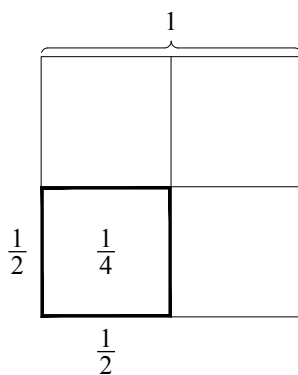
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5}$$

a z obr. 2 je zřejmé, že

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$



Obr. 1



Obr. 2

Součin dvou kladných reálných čísel můžeme ovšem interpretovat i jako velikost dráhy: $s = vt$ (v je rychlost, t je čas). Součin $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ můžeme tedy chápat např. jako odpověď na otázku: Jakou dráhu urazí model autíčka za půl minuty, jede-li rychlostí půl metru za minutu?

Tuto problematiku připomněla před několik lety v poněkud sofistikovanější formě americká autorka čínského původu *Liping Ma* úlohou: Vymys-

lete problém nebo příběh, který by vedl k výpočtu

$$1\frac{3}{4} : \frac{1}{2}.$$

Činí-li žákům potíže interpretace podílu, připomeneme jim interpretaci součinu. Součin $ab = c$ můžeme přirozeně chápat např. jako obsah c obdélníku s rozměry a , b nebo jako dráhu c za čas b při rychlosti a nebo jako objem c kapaliny vzniklé slitím a porcí, z nichž každá má objem b . Náš výpočet můžeme tedy interpretovat např. takto: Do kolika půllitrových hrnků můžeme rozlít $1\frac{3}{4}$ litru čaje?

Na doklad toho, že tyto zcela elementární problémy mají „rozměr celosvětový“, připomeňme, že Ma prováděla toto šetření v Číně a v USA. Úlohu vyřešilo 90 % účastníků šetření v Číně, ale jen 5 % ze skupiny učitelů amerických. Úlohu jsme opakovali se skupinou našich učitelů, kteří byli úspěšní v 35 %. Školská praxe nemusí přispívat k rozvoji matematické zdatnosti učitele: několik učitelů s dlouholetou praxí pochopilo úlohu tak, že dělili $1\frac{3}{4}$ na polovinu, místo aby dělili polovinou.

S otázkou interpretace souvisí i didaktický problém, proč součin dvou záporných čísel je číslo kladné. „To se vysvětlit nedá. To se musejí naučit.“ „Je až zavádějící nad tím přemýšlet. Řeknu hotově, že to tak prostě je, a nepřemýšlíme nad tím.“ Tak se vyjadřují „zkušení“ učitelé ([18], s. 137). Klasická didaktika tuto otázku řeší umělou konstrukcí, která asi mnohé žáky nepřesvědčí: Zvolíme-li na dráze pohybu určité místo za počátek pohybu, můžeme polohu na trati určit kladným nebo záporným číslem. Podobně za počátek měření času můžeme vzít určitý okamžik a dobu před nebo za ním označíme kladnou nebo zápornou hodnotou. Jede-li např. vlak rychlostí -50 km za hodinu (tj. směrem, který udává pokles údajů polohy), pak v čase -2 hodiny, tj. před dvěma hodinami, je 100 km před místem, které je označeno jako počátek pohybu. Je tedy $(-2) \cdot (-50) = 100$.

Názorněji můžeme výsledek o násobení dvou záporných čísel osvětlit např. takto:

$$\text{Platí } (-2) \cdot (-3) = 6 \text{ nebo } (-2) \cdot (-3) = -6?$$

Protože žáci už vědí, že $(-2) \cdot 3 = -6$, vyplynulo by z rovnosti

$$(-2) \cdot (-3) = (-2) \cdot 3,$$

že $-3 = 3$, což není možné. Je tedy $(-2) \cdot (-3) = 6$.

Jazyk hraje ve vyučování matematice mimořádnou roli. To v souvislosti s řešením úloh potvrdila řada šetření v knize [18]. Za nevhodné považuji např. poučení typu: „Sčítat znamená dát dohromady,“ neboť dáme-li dohromady dva zajíčky a lišku, dostaneme dva zajíčky a lišku a nikoliv číslo 3, dáme-li dohromady čísla 2 a 1 dostaneme číslo 21 a ne 3. Citovanou „definici“ má k dispozici učitelka v učebnici ([9], s. 12). Jeden z nejdůležitějších matematických pojmů, pojem rovnosti, bychom snad měli od samého počátku chápat ve smyslu Leibnizově:

$x = y$, když a jen když x a y mají všechny vlastnosti společné

(citováno podle ([22], s. 66).

Větu: „Dvě množiny si jsou rovny, mají-li též počet prvků“ snad bychom ani v modifikaci pro první třídu neměli připouštět ([9], s. 33). Zde rovnost staveb nebo hejn ptáčků znamená rovnost počtu kostek nebo rovnost počtu ptáčků, v učebnici ([10], s. 12) znamená rovnost $MM = K$ (zapsaná obrázkově), že dvě myši mají stejnou sílu jako kočka. Fyzikální svět věcí je různý od matematického světa čísel.

Otázka interpretace čísel, které jsme se zde dotkli, se ovšem dotýká i interpretace proměnných. Připomeňme to na úrovni středoškolské matematiky.

Např. derivace funkce $y = f(x)$ v bodě x může být formálně zavedena jako limita

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Tuto limitu můžeme interpretovat jako směrnici tečny grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x .

Označíme-li $s(t)$ dráhu bodu za dobu t , pak

$$s'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

je okamžitá rychlost uvažovaného pohybu v čase t .

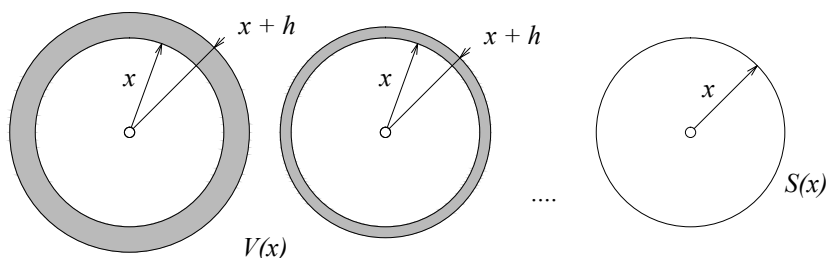
Označíme-li např. $V(x)$ objem koule o poloměru x , pak

$$V'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h} = S(x),$$

což je povrch této koule (obr. 3). První dvě interpretace jsou popsány v učebnici [12], poslední pak v článku [15].¹ Existují vysokoškolské učeb-

¹Tato interpretace však neplatí obecně pro všechna tělesa.

nice, dokonce pro vysoké školy technické, kde se u definice derivace neuvádí vůbec žádná interpretace (např. [16], s. 99).



Obr. 3

Interpretace symbolů znamená jejich jistou konkretizaci, je to proces obrácený k procesu abstrakce, pomocí něhož docházejí žáci např. k číslům a proměnným. Na interpretaci se můžeme dívat jako na první stupeň aplikací.

Kritickým místem matematického vzdělávání je také geometrie. I zde se výrazně projevuje, že učitelé učí tak, jak byli „sami učení, jak tomu rozumí a jak úlohy sami řeší“ ([18], s. 36). Nedostatky ve vyučování geometrii souvisejí s nedostatky v geometrickém vzdělávání učitelů. Odrazem představ o axiomatické výstavbě geometrie s primitivními pojmy bod, přímka a incidence je soustředění školní geometrie na rýsování a terminologii. Geometrie by však měla být od samého začátku orientována na poznávání prostoru, v němž žák žije, a na rozvíjení představivosti. Základem zde mohou být zkušenosti žáků s dělením prostoru (kružnice, trojúhelník, rovina, ...) s vyplňováním prostoru (objem tělesa, obsah útvaru, délka úsečky), s pohybem v prostoru (rýsování, modelování, ...) a s dimenzí prostoru (krychle a její obrázek, koule a její stín, ...). Tento přístup jsem mnohokrát popsal – na úrovni vzdělávání učitelů v knihách [13] a [14], na úrovni prvního stupně ZŠ v učebnicích [4], na úrovni druhého stupně pak v učebnicích, které na přelomu tisíciletí vydával Matematický ústav AV v nakladatelství Albra.

Problematika řešení konstruktivních úloh je relativně složitá. Řešením konstruktivní úlohy je sestavení útvaru, který má požadované vlastnosti, nikoliv zápis rozboru a konstrukce. Jestliže žák ví, jak konstrukci provést, je snad zbytečné, aby předstíral, že to neví a prováděl rozbor. Naše současná škola vyžaduje formální zápis rozboru a konstrukce předepsanou

symbolikou, která je reliktem množinové matematiky. Řešení úlohy se tak stává jakýmsi protokolem o postupu, což ovšem není úkol matematického vzdělávání. Žáci právem pociťují absurdnost tohoto přístupu a zbytečnost relativně složité symboliky (viz např. [18], s. 110). Rozbor úlohy není hotový projekt (jak píše učitelka s třicetiletou praxí ([18], s. 108), ale cesta k projektu. Podle mého názoru, který ovšem nelze při současných zvyklostech realizovat, by měl být postup takovýto: Důkladně odvodit základní geometrické konstrukce (konstrukce trojúhelníku ze základních prvků, osy úsečky, osy úhlu, kružnice opsané a vepsané trojúhelníku, ...), které by měli žáci zvládnout analogicky jako např. řešení soustavy rovnic, a pak by měli samostatně řešit nemnoho konstrukčních úloh, u nichž by na základě obrázku hledali řešení, které by graficky provedli. Postup řešení by mohli zapisovat slovně, jen s minimální symbolikou. Takový přístup byl obvyklý v „předmnožinových“ učebnicích (viz např. ([2], s. 78)). Geometrická symbolika našich současných učebnic se nepoužívá v matematice ani v jejích aplikacích. Je ovšem výhodná pro (obvykle negativní) hodnocení výsledků práce žáků.

Otázka řešení úlohy a jejího zápisu není však jen problém druhého stupně. Např. učitelka prvního stupně s třináctiletou praxí píše: „Děti to umí vyřešit, řeknou vám i výsledek, oni okamžitě vědí ten výsledek, ale oni vůbec nedokážou v tom najít ty základní údaje. Ten zápis neumí, ale tu úlohu, ten příklad sestaví. Ale problém je ten zápis, ten prostě oni neudělají, ten neumí...“ ([18], s. 55).

Najít rovnováhu mezi řešením úlohy a jejím zápisem je důležitý úkol. Ovšem: matematika je o řešení úloh, ne o zápisech.

„Kvalitu vyučování určuje učitel“ (Hejný). Složkou osobnosti učitele je jeho pedagogické přesvědčení, které formovala jeho rodina, společnost a školy, které absolvoval. Všimněme si zde tří typů přesvědčení učitele matematiky a jejich kladných či záporných působení ve vzdělávacích procesech.

První typ, řekněme mu FORMALISTA, zdůrazňuje: V úvodním kurzu „je především nutno studujícím podávat pojmy a věty skutečně exaktní formou, systémem ‚definice‘, ‚věta‘, ‚důkaz‘, a to už proto, aby se naučili správnému matematickému myšlení a vyjadřování“ ([25], s. 9).

Druhý typ, řekněme mu UTOPISTA, zdůrazňuje, že prvořadým úkolem matematiky je vychovat, druhořadým naučit ([11], s. 36).

Třetí typ, řekněme mu REALISTA, zdůrazňuje, že základem vzdělávání jsou zkušenosti žáků a řešení problémů. Jde zde o konstruktivistické přístupy k vyučování matematice [6].

Ve škole přirozeně žádného učitele takto vyhraněného typu nepotkáme, nicméně patrně lze u každého kantora vysledovat rysy některého z uvedených typů. Prosím případného čtenáře, aby se pokusil zařadit sebe sama do některého z uvedených typů, nebo aby popsal další typ přesvědčení učitele.

Milan Hejný formuloval v roce 2014 své didaktické přesvědčení slovy: „Hlavním vzdělávacím cílem vyučování matematice je rozvoj matematického duševního orgánu každého žáka“ ([7], s. 120). Distancuje se zde od termínu konstruktivismus a přechází k „vyučování orientovanému na budování schémat“, které v r. 2015 charakterizuje lapidárně jako „Hejného metoda“ [21]. K seznámení se s touto metodou doporučuji prostudování zmíněné publikace z r. 2014. V práci [18] se můžeme o Hejného přístupech dočíst na řadě míst. Zde bych uvedl jen jeden příklad, kdy problém „vyřeší“ tím, že ho „ignoruje“. Mám na mysli otázku počítání s přechodem přes desítku. Řada učitelek uvádí toto téma jako „kritické místo“, ačkoliv ty, které pracují s učebnicemi M. Hejného, píší např.: „V pohodě, neřešíme to a prostě jde to. Nikdo neřeší nějaké složité rozklady čísla a dopočítávání do desítky, ne. (. . .). My jsme rozdali i dětem domů krokovací pásy, aby si mohly ťapat téma prstíčkama a zatím mě nikdo neoslovil.“ Jiná učitelka píše: „Začali jsme krokovat a ani nevím, že nějaký přechod přes desítku nastal“ ([18], s. 32). Pokud je cílem, aby se děti naučily početní spoje „přes desítku“ z paměti, pak je jistě tento postup možný. Zastírá se tím ovšem pohled na desítkovou soustavu.

Já bych se rád zařadil mezi „realisty“. Své didaktické přesvědčení, označené jako „realistický konstruktivismus“ jsem formuloval v 11. kapitole knihy [8]. Připomenu je zde stručně. V prostředí apatie, nezájmu, lhostejnosti, či dokonce bojkotu a nepřátelství nelze realizovat žádné účinné vzdělávání. Probuzení zájmu žáků je nutnou, ne však postačující podmínkou k nastartování vzdělávacího procesu. Zájem by měl být dále živen především úspěchy žáků, zajímavostí problematiky, uspokojením z vykonané práce. Projevem zájmu jsou otázky, které žák klade, např.:

- Co to je?
- Jak to je?
- K čemu to je?
- Proč to tak je?

Tyto otázky souvisejí s řešením úloh, s hledáním postupů, s vytvářením pojmů, s poznáváním smyslu a s použitím poznatků. Při řešení problémů můžeme přirozeně sdělovat žáku potřebné informace, vysvětlovat pojmy,

odkazovat na informace v encyklopediích a literatuře, avšak vše ve službách matematiky rodící se v dušením světě žáka. Konstruktivní vyučování tak může obsahovat i výklady určitých partií a návody k řešení některých úloh. Důležitou složkou výuky jsou diskuze mezi žáky i žáků s učitelem a srozumitelný, zejména shrnující výklad učitele. Aktivita učitele je prioritně zaměřena na rozvíjení aktivity žáka, na konstrukci poznatků v jeho duševním světě. Nejde jen o to, aby žák rozuměl. Je třeba, aby si utvářel ucelený soubor aplikovatelných poznatků. Formativní aspekty vzdělávacího procesu (rozvíjení duševních schopností, aktivita, kritičnost, systematickosti, schopnost komunikace, ...) tvoří jen jednu složku praxe školy. Druhou je úroveň a kvalita soustavy poznatků, které si žák vytváří a které umí použít.

Domnívám se, že tento přístup k výuce je v souladu s idejemi dvou mých velkých univerzitních učitelů *Bohumila Bydžovského* (1880–1969) a *Eduarda Čecha* (1893–1960), které zde připomenu.

„Škola si musí stále býti vědoma toho, že výchova se neobejde bez jakéhosi třeba sebedímnějšího a zastřenějšího nátlaku. Je kus morálního násilí v tom, že musíme tvora od přírody primitivního, jako je dítě, v době několika let pozdvihnout ke kulturní úrovni, ke které se lidstvo probíjávalo s obtížemi a oklikami po tisíciletí. Říkáme-li, že škola vede žáky k výšinám osvěty, víme dobře, že to neznamena vždy, že se žák dává vésti dobrovolně. Umění výchovné je právě v tom, přimět žáka k tomu, aby se tomuto vedení podvolil a aby cítil co nejméně morální nátlak školního prostředí“ ([1], s. 55).

„Učitelé by měli odstraňovat strach před matematikou a naučit žáky lásce k matematice. Ovšem: odstranit strach před matematikou tak, že bychom z ní udělali lehký předmět, nebylo by správné; matematika byla, je a zůstane předmětem těžkým. Lásku k matematice je třeba chápat jako podstatnou část lásky k práci vůbec“ ([3], s. 202).

Žáci

Významný německý filosof *Dietrich Schwanitz* (1940–2004) napsal: „Zkuste nadchnout“ pro vzdělávání „hordu nevychovaných bestí s na-prostým nezájmem o učení a navyklých pouze na televizní zábavu, jejichž jediným cílem je vymýšlet další a další útoky na učitelovu důstojnost. Nikdo, kdo stojí mimo školu, si nedokáže představit tento každodenní boj s ryzí nestoudností, sadistickou zlobou a duševní sprostotou. Nejvykutálenější na tom všem je, že učitel ještě musí strpět, aby nevychovanost a

pošklebování byly připsány na jeho konto: vinu nese on sám, protože nemá svou třídu v moci, jeho výuka děti nebaví, naopak cítí se znuděny (...). Nikdo už u nich nečeká ani minimální dávku civilizovanosti jako samozřejmý rodinný vklad. Jejich chování je vysvětlováno pouze z vyučování, zatímco ve skutečnosti trpí již z domova neschopností se soustředit a špatnou výchovou“ ([20], s. 31). Nemohu nepřipomenout v této souvislosti slova středoškolského učitele z Jaroměře *Jaroslava Žáka*, který napsal v r. 1937: „Mezi neinformovaným občanstvem převládá od nepaměti bludný názor, že školství (...) je blahodárná instituce, kde zástupy mládeže toužící po vědění a vzdělání, jsou poučovány a vychovávány obětavými muži a ženami (...). Škola je ve skutečnosti kolbiště, kde utlačovaný lid studentský vede nesmiřitelný boj proti panující kastě (...) kantorů“ ([26], s. 7). Naši současní učitelé charakterizující děti např. takto: „Jsou odtržené od reality všedního dne, nepraktické, pohodlné a neschopné oddálit uspokojení svých potřeb“ ([18], s. 235). „Sedí u počítače a hrajou si hry, nebo koukají na televizi a ten mozek se nerozvíjí“ ([18], s. 138). „Ta uspěchaná doba se přenáší i na ty děti a pak nejsou schopny se soustředit“ ([18], s. 219).

Pasivita žáků není pochopitelně dobré klima pro rozvíjení myšlení a samostatné řešení úloh. Snad to je hlavní důvod k orientaci části naší školy na učení bez porozumění. „Moje výuka matematiky je postavena na procvičování.“ „V matematice (...) je důležitý takový ten dril, opakování, důslednost“ ([18], s. 157). To byly hlasy učitelů. A Rendl s Vondrovou vysvětlují: „Často je patrné, že učení z paměti vychází z intuitivního přesvědčení, že když se některé věci děti nenaučí z paměti, nebudou z matematiky umět nic (...). Učení z paměti je ovšem také alternativou tam, kde učitelé nevidí způsob, jak něco vysvětlit názorně a logicky, případně takové vysvětlení považují za příliš komplikované, než aby u žáků vedlo k porozumění“ ([18], s. 137). Přitom *Irena Smetáčková* upozorňuje, že „četným opakováním určitého postupu“ (...) může vzniknout vhled a tedy vyšší kvalita zvládnutí určitého algoritmu (tj. přesun z úrovně osvojení do úrovně porozumění) ([18], s. 275).

Učitelé zmiňují i existenci „pohodlných žáků“, kteří nejsou ochotni ani myslet, ani rutinně pracovat ([18], s. 249). Některé děti jsou „líný a budou dělat cokoli jiného než se učit, když nebudou muset“ ([18], s. 203). „Hlavní výhrady, které vyučující mají vůči dnešním žákům, se týkají tří oblastí: zkušeností, zručnosti a vůle. V nich mají děti nedostatky, tj. něco podstatného jim chybí, a proto mají v matematice potíže. Všechny tři oblasti přitom vyučující radí do sféry rodiny, jejíž kompetence škola nemůže

v plné míře suplovat“ ([18], s. 278). Nejde však jen o negativní roli rodiny. Negativní vliv na dítě má i korupcí prolezlá společnost. Škola, učitelé i žáci jsou produktem společenského vývoje. Tézi, že „školy vytvářejí lidi s doživotně zdeformovanými pracovními návyky“, kterou formuloval vědecký pracovník Jiří Šponer [19], je podle mého názoru třeba vnímat v širších souvislostech.

Závěr

Za přínos publikace [18] považuji, že uvádí do naší didaktiky pět *Kilpatrickových pilířů zdatnosti*:

1. *Konceptuální porozumění*: chápání matematických pojmů a objektů, matematických operací a vztahů.
2. *Procedurální zručnost*: dovednost provádění procedur přesně, vzhledem ke kontextu vhodně a účinně.
3. *Strategické kompetence*: schopnost formulovat, znázorňovat a řešit matematické úlohy.
4. *Adaptivní úsudek*: schopnost logického myšlení, reflexe, vysvětlování a odůvodňování.
5. *Sklon k produktivní činnosti*: běžně projevovaný sklon chápat matematiku jako smysluplnou, užitečnou a hodnotnou činnost spojenou s vírou v píli a s vnímavou schopností výkonu ([18], s. 64).

Kdyby se nám dařilo na našich školách realizovat matematické obsahy formulované v publikacích [5] v souladu se zmíněnými Kilpatrickovými pilíři, mohli bychom být spokojeni.

Realizace těchto myšlenek je obtížná.

Dva exministři školství – Petr Vopěnka a Petr Piňha – k tomu napsali: „Není druhé lidské činnosti, která by tak důvěrně provázela duševní vývoj lidstva (...) jako pěstování a vytváření matematiky. V ní se odráží vývoj myšlení a naopak její vývoj rozvoj myšlení ovlivňuje (...). Matematika je do krajní přesvědčivosti vyvedené neustále se vyvíjející učení, do něhož ti více zasvěcení zasvěcují ty méně zasvěcené (...). Není utěšenějšího povolání nad učení dětí, které se učit chtějí a není odpornějšího poslání nad učení dětí, které se učit nechťejí“ [23]. „Neznám nic tak ničivého, jako je tichá symbióza líného učitele s vypočítavým studentem, jev dnes bohužel častý“ ([17], s. 31). Podle mého názoru jsou učitelky a učitelé našich škol ve své většině pracovití, zodpovědní a snaživí. Líný učitel snad není jev častý,

i když: dotázal jsem se svých studentů, zda se potkali s líným učitelem. Odpověděli ANO, a to na škole základní, střední i vysoké.

Literatura

- [1] *Bydžovský, B.*: Naše středoškolská reforma. Profesorské nakladatelství, Praha, 1937.
- [2] *Čech, E. a kol.*: Geometrie pro čtvrtou třídu středních škol. JČMF, Praha, 1950.
- [3] *Čech, E.*: Nový školský zákon a matematika. Časopis pro pěstování matematiky, roč. 78, (1953), s. 199–205.
- [4] *Divíšek, J., Hošpesová, A., Kuřina, F.*: Svět čísel a tvarů. Prometheus, Praha, 1996–2000.
- [5] *Fuchs, E., Hrubý, D. a kol.*: Standardy a testové úlohy. Prometheus, Praha, 2000.
- [6] *Gravemeijer, K., M. van den Heuvel, L.*: Streefland. Context Free Productions Tests and Geometry in Realistic Mathematics Education. Owoc, Utrecht.
- [7] *Hejný, J.*: Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně. Univerzita Karlova, Praha, 2014.
- [8] *Hejný, M., Kuřina, F.*: Dítě, škola a matematika. Portál, Praha, 2009.
- [9] *Hejný, M., Jirotková, D., Kratochvílová, J.*: Matematika 1. Fraus, Plzeň, 2007.
- [10] *Hejný, M., Jirotková, D., Kratochvílová, J.*: Matematika pro druhý ročník základní školy. 1. díl. Fraus, Plzeň, 2008.
- [11] *Hejný, M., Michalcová, A.*: Skúmanie matematického riešiteľského postupu. Metodické centrum, Bratislava, 2001.
- [12] *Hrubý, D., Kubát, J.*: Matematika pro gymnázia. Diferenciální a integrální počet. Prometheus, Praha, 1997.
- [13] *Kuřina, F. a kol.*: Matematika a porozumění světu. Academia, Praha, 2009.
- [14] *Kuřina, F.*: Deset pohledů na geometrii. MÚ AV ČR, Praha, 1996.
- [15] *Kuřina, F.*: Povrch je derivací objemu. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 60 (2015).
- [16] *Pelantová, E., Vondráčková, J.*: Matematická analýza I. ČVUT, Praha, 2007.
- [17] *Piřha, P.*: Hledání učitele. Pedagogická fakulta UK, Praha, 1996.
- [18] *Rendl, M., Vondrová, N. a kol.*: Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů. Univerzita Karlova v Praze, Praha, 2013.
- [19] *Rychlík, M.*: Manželé otrásají teorií o vzniku života. Lidové noviny 4. 2. 2015.
- [20] *Schwanitz, D.*: Vzdělanost. Prostor, Praha, 2013.
- [21] *Štefflová, J.*: Matematiku nesmíme memorovat, ale tvořit. Učitelské noviny č. 1, 2015.
- [22] *Tarski, A.*: Úvod do logiky. Academia, Praha, 1966.
- [23] *Vopěnka, P.*: Memorandum o škole a matematice. 1. 9. 2013.
- [24] *Werich, J.*: Všechno je jinak. Olympia, Praha, 1991.
- [25] *Zelinka, B.*: Předmluva překladatele. In.: Marcus, S.: Matematická analýza čtená podruhé. Academia, Praha, 1976.
- [26] *Žák, J.*: Študáci a kantoři. Beta, Praha, 2005.

Mocnost bodu ke kružnici v důkazech

ŠÁRKA GERGELITSOVÁ – TOMÁŠ HOLAN

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Cílem tohoto článku je ukázat, jak nám může geometrický vztah, který se nazývá *mocnost bodu ke kružnici*, pomoci při důkazech.

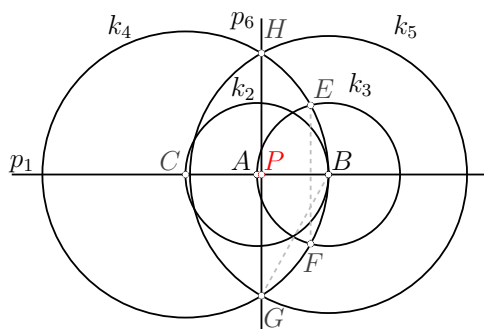
V článku [3] jsme uvedli několik postupů jak sestavit bod, který dělí úsečku AB v daném poměru, a využitím známých geometrických vztahů jsme ověřovali jejich správnost. Zde předvedeme několik dalších konstrukcí, jejichž správnost ověříme využitím mocnosti bodu ke kružnici. Ve všech důkazech budeme danou úsečku AB považovat za jednotkovou.

Abychom nezamtlili hlavní myšlenku, nebudeme některé snadné výpočty rozepisovat do úplných podrobností. Buď nám tedy věřte nebo (lépe) si ke čtení vezměte tužku a papír.

Podívejme se nejprve na jednu konstrukci, jejíž správnost ověříme pomocí známých planimetrických vět.

Jedna šestnáctina

Konstrukcí na obr. 1 sestojíme bod P v jedné šestnáctině úsečky AB , tedy bod úsečky, pro který platí $|AP| : |PB| = 1 : 15$.



Obr. 1 Konstrukce bodu v jedné šestnáctině úsečky

Střed y a poloměry kružnic k_2, k_3, k_4 jsou zřejmé z obr. 1, kružnice k_5 má střed B a poloměr $|EF|$.

Důkaz. Správnost konstrukce snadno dokážeme využitím pravoúhlých trojúhelníků. Bod P je středem společné tětivy GH kružnic k_4, k_5 . Střed y kružnic jsou body C, B , poloměr kružnice k_4 je 2, zbývá tedy spočítat poloměr kružnice k_5 , tedy délku úsečky EF , která je společnou tětivou kružnic k_3, k_4 .

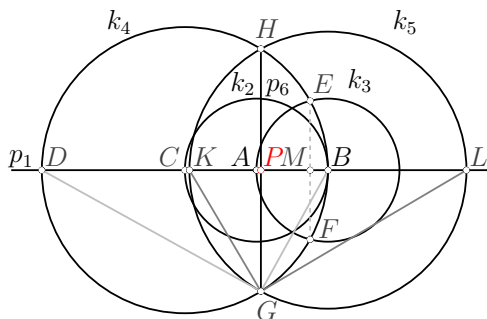
Je-li M střed úsečky EF (obr. 2), dostáváme z pravoúhlých trojúhelníků CMF, BMF , v nichž je úsečka FM odvěsnou,

$$|CF|^2 - |CM|^2 = |FM|^2 = |BF|^2 - |BM|^2, \quad \text{kde } |CM| = |CB| - |BM|,$$

tedy

$$4 - (2 - |BM|)^2 = 1 - |BM|^2, \quad \text{odkud } |BM| = \frac{1}{4}.$$

Odtud již (například z Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku BMF) dostáváme $|FM| = \frac{\sqrt{15}}{4}$ a $|EF| = \frac{\sqrt{15}}{2}$.



Obr. 2 Důkaz konstrukce jedné šestnáctiny

Jednou z možností, jak určit polohu bodu P na úsečce AB , je užití Eukleidovy věty o výšce. Úsečka GP je výškou pravoúhlého trojúhelníku DGB i pravoúhlého trojúhelníku KGL , kde K, L jsou průsečíky kružnice k_5 s přímkou p_1 (obr. 2). Proto

$$|PD| \cdot |PB| = |GP|^2 = |PK| \cdot |PL|, \quad (M1)$$

kde

$$\begin{aligned} |PD| &= |AD| + |AP|, & |PB| &= |AB| - |AP|, \\ |PL| &= |BL| + |PB|, & |PK| &= |BK| - |PB|, \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} |PD| &= 3 + |AP|, & |PB| &= 1 - |AP|, \\ |PL| &= \frac{\sqrt{15}}{2} + |PB|, & |PK| &= \frac{\sqrt{15}}{2} - |PB|, \end{aligned}$$

tedy označíme-li $|AP| = d$

$$(3 + d) \cdot (1 - d) = \left(\frac{\sqrt{15}}{2} + (1 - d) \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{15}}{2} - (1 - d) \right).$$

Odtud po úpravě a vyřešení rovnice (které ponecháváme čtenáři) $d = \frac{1}{16}$.

Vztah (M1), který jsme odvodili ze vztahů v pravoúhlých trojúhelnících, je speciálním případem geometrického vztahu známého jako *mocnost bodu ke kružnici*. Najdeme ho v učebnicích planimetrie i v mnoha internetových výukových kurzech (např. [4]), zde si ho připomeneme.

Mocnost bodu ke kružnici

Definice

Pro každý bod M a každou kružnici $k(S, r)$ definujeme *mocnost bodu M ke kružnici k* jako číslo $m = |MS|^2 - r^2$.

Poznámka. Z definice plyne, že $m \in \langle -r^2, +\infty \rangle$.

Věta 1

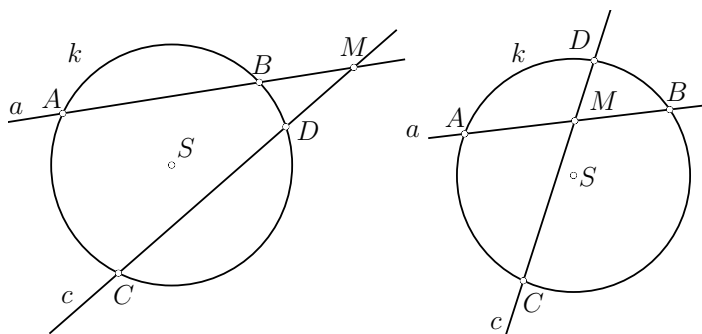
Pro libovolnou přímku procházející bodem M a protínající kružnici k v bodech K, L platí

$$m = \begin{cases} |KM| \cdot |LM| & \text{pro každý bod } M \text{ vně kružnice } k \\ -|KM| \cdot |LM| & \text{pro každý bod } M \text{ uvnitř kružnice } k \\ 0 & \text{pro každý bod } M \text{ kružnice } k \end{cases}$$

Pro $K = L$ je přímka tečnou kružnice a $m = |MK|^2$.

Důkaz ekvivalence výše uvedených tvrzení a definice najde čtenář ve většině středoškolských učebnic planimetrie, v [2] a v další literatuře. Zde přímo dokážeme pouze tvrzení, které budeme dále využívat a které je důsledkem této věty.

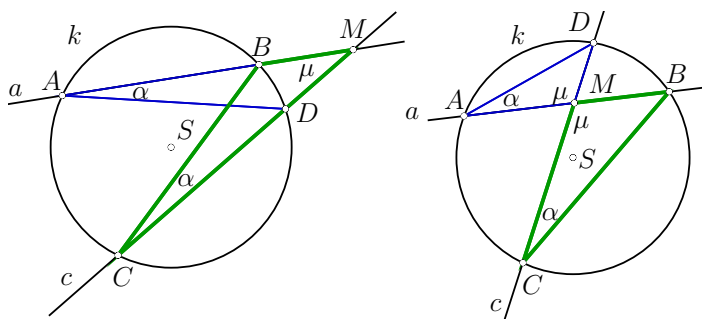
Důsledek 1. Jsou-li a, c dvě různé sečny kružnice k procházející bodem M , $a \cap k = \{A, B\}$, $c \cap k = \{C, D\}$, platí $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$ (obr. 3, vlevo pro bod M vně kružnice, vpravo pro bod M uvnitř kružnice).



Obr. 3 Důsledek věty o mocnosti

Zdůvodnění. I bez znalosti výše uvedených vztahů vidíme, že trojúhelníky MAD , MCB v každé z ilustrací na obr. 4 jsou podobné. Mají totiž shodný úhel μ při vrcholu M a úhly při vrcholech A, C jsou shodné proto, že jsou to obvodové úhly v kružnici k nad obloukem BD .

Proto $|MA| : |MD| = |MC| : |MB|$, a tudíž $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$.



Obr. 4 Důkaz důsledku věty o mocnosti

Chordála

Z výše uvedeného důsledku plyne, že pokud se kružnice k, l protínají (označme průsečíky K, L), má každý bod přímky KL stejnou mocnost k oběma kružnicím. Platí obecné tvrzení, že taková přímka existuje pro libovolné nesoustředné kružnice. Uvádíme ho bez důkazu:

Věta 2

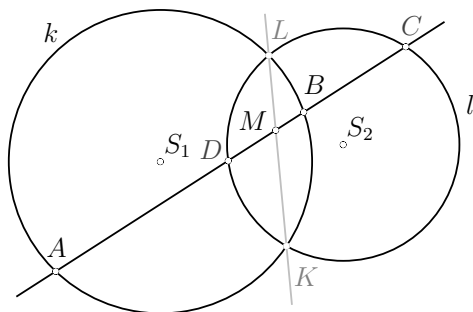
Množina všech bodů, které mají stejnou mocnost ke dvěma různým nesoustředným kružnicím, je přímka kolmá na střednou daných kružnic.

Poznámka. Tato přímka se nazývá *chordála* daných kružnic. Pro soustředné kružnice chordálu nedefinujeme.

Důsledek 2 – Sečna dvou kružnic. Vedeme-li z libovolného bodu M na chordále nesoustředných kružnic k, l (kde M není průsečíkem kružnic) přímku, která protíná kružnici k v bodech A, B a kružnici l v bodech C, D (obr. 5), platí

$$|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD| \quad (M2).$$

Tento vztah je přímou aplikací vlastností bodu chordály a využijeme ho při důkazech v následujících příkladech. Vztah (M1), který jsme odvodili v důkazu správnosti konstrukce jedné šestnáctiny v úvodu tohoto článku, je jeho variantou pro sečnu, která je střednou daných kružnic. Na obr. 5 je ilustrace pro bod chordály M uvnitř kružnic, vztah platí i pro bod M vně kružnic a kružnice se nemusí protínat.



Obr. 5 Délky na sečně, M uvnitř kružnic

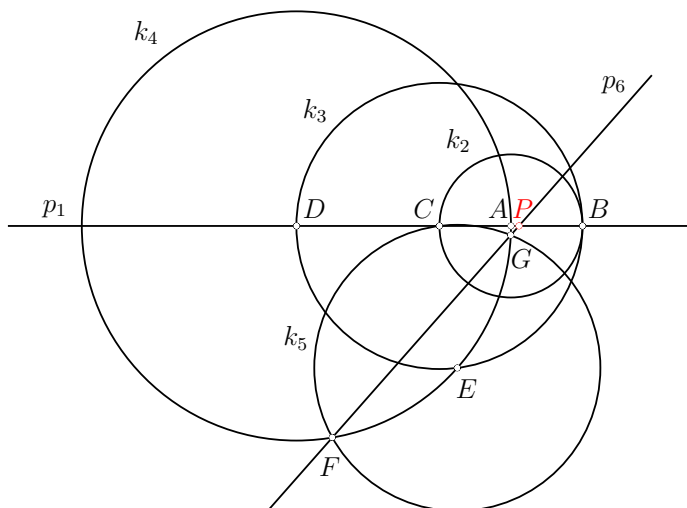
Jedna devítina poprvé

Konstrukcí na obr. 6 sestojíme bod P v jedné devítině úsečky AB , tedy bod úsečky, pro který platí $|AP| : |PB| = 1 : 8$. Kružnice k_5 má střed v průsečíku E kružnic k_3, k_4 a prochází bodem C .

Hledaný bod P je průsečíkem přímky FG s přímkou AB . Přímka FG je *chordálou* (společnou tětivou) kružnic $k_4(D, |DA|)$, $k_5(E, |EC|)$. Hledanou délku $|AP|$ tedy určíme pomocí vztahu (M2), pokud najdeme druhé

průsečíky kružnic k_4, k_5 s přímkou AB a vhodně vyjádříme délky několika úseček na přímce AB .

Pro bod K – druhý průsečík kružnice k_4 s přímkou AB – platí $|DK| = 3$.



Obr. 6 Prvá konstrukce jedné devítiny

Je-li L druhý průsečík přímky AB s kružnicí k_5 a M střed úsečky CL (obr. 7), určíme polohu bodu L pomocí bodu M , přičemž polohu bodu M určíme stejným postupem, jakým jsme určili polohu bodu M již v první konstrukci tohoto článku (konstrukce jedné šestnáctiny).

Opakujeme-li výše uvedený postup, pak:

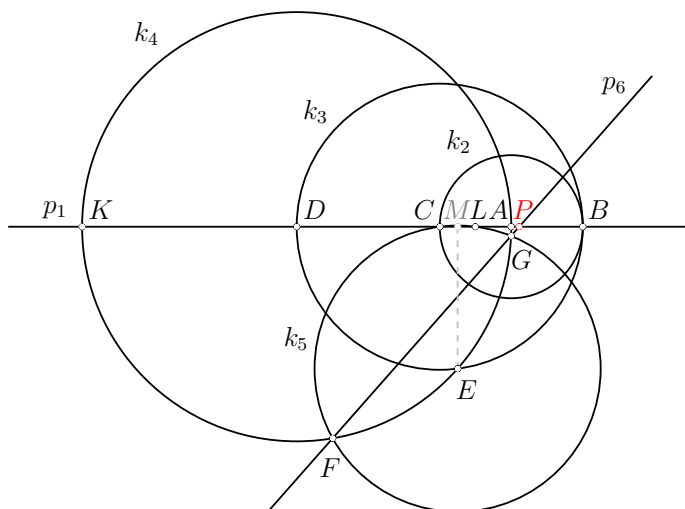
Protože $|CE| = 2$ a $|DE| = 3$, dostáváme

$$|DE|^2 - |DM|^2 = |EM|^2 = |CE|^2 - |CM|^2,$$

kde $|DM| = |CM| + |CD|$, tedy

$$9 - (2 + |CM|)^2 = 4 - |CM|^2,$$

odkud $|CM| = \frac{1}{4}$, a tedy $|CL| = \frac{1}{2} = |AL|$.



Obr. 7 Důkaz správnosti konstrukce jedné devítiny. Bod M je střed tětivy CL kružnice k_5 , je to tedy bod přímky p_1

Nyní již snadno vyjádříme délku úsečky AP ze vztahu $(M2)$:

$$|PK| \cdot |PA| = |PL| \cdot |PC|.$$

Označíme-li $|AP| = d$, pak $(6 + d) \cdot d = (\frac{1}{2} + d) \cdot (1 + d)$, odkud $d = \frac{1}{9}$.

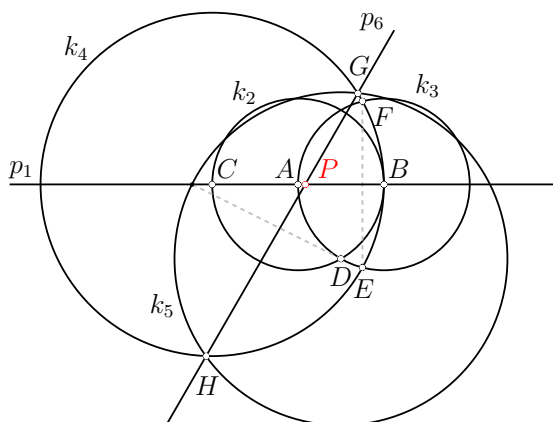
Jedna dvanáctina

Jako snadné cvičení nyní dokážeme správnost konstrukce na obr. 8, kterou sestojíme bod P v jedné dvanáctině úsečky AB . Kružnice k_5 má střed D a poloměr $|EF|$.

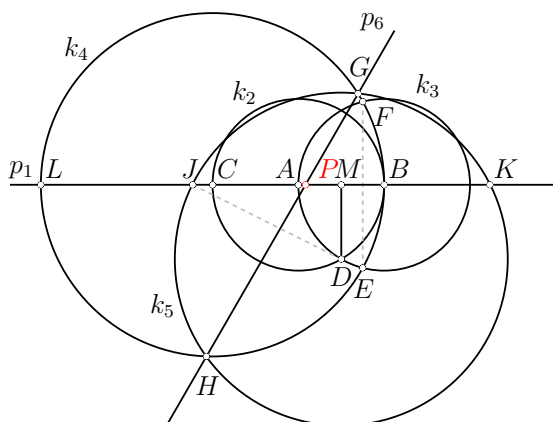
Bod P leží na chordále HG kružnic k_4, k_5 (uvnitř kružnic). Pro výpočet délek na přímce AB , která obě kružnice protíná a prochází bodem P , proto opět využijeme vztah $(M2)$.

Označme J, K průsečíky kružnice $k_5(D, |EF|)$ s přímkou AB (obr. 9). Délku úsečky EF jsme již spočetli v prvním příkladu, $|EF| = \frac{\sqrt{15}}{2}$. Bod D je průsečík kružnic k_2, k_3 , proto pata M kolmice na přímku AB z bodu D je střed úsečky AB , tedy $|AM| = \frac{1}{2}$ a v pravoúhlém trojúhelníku JMD platí $|MD| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|JD| = |EF| = \frac{\sqrt{15}}{2}$. Odtud

$$|JM| = \sqrt{\frac{15}{4} - \frac{3}{4}} = \sqrt{3}.$$



Obr. 8 Konstrukce jedné dvanáctiny



Obr. 9 Důkaz správnosti konstrukce jedné dvanáctiny

Bod P má ke kružnicím k_4, k_5 stejnou mocnost, proto délku $|AP| = d$ vypočteme za vztahu $|PL| \cdot |PB| = |PJ| \cdot |PK|$, tedy

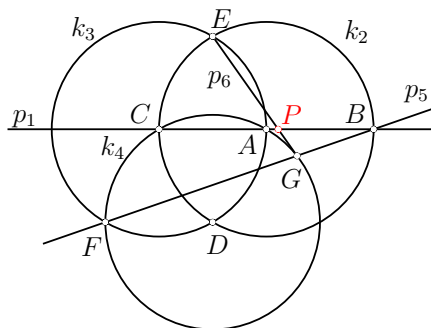
$$(3 + d) \cdot (1 - d) = \left(\sqrt{3} - \left(\frac{1}{2} - d \right) \right) \cdot \left(\sqrt{3} + \left(\frac{1}{2} - d \right) \right).$$

Odtud $d = |AP| = \frac{1}{12}$.

Ve zdůvodnění správnosti následující konstrukce využijeme *mocnost bodu ke kružnici* k pomocnému výpočtu.

Jedna devítina podruhé

Týž bod na úsečce AB můžeme často sestrojit různými postupy. Na obr. 10 je další konstrukce bodu v jedné devítině úsečky AB .



Obr. 10 Jiná konstrukce jedné devítiny

Vztah mocnosti nyní nemůžeme využít přímo k určení polohy bodu P na přímce AB , protože bod P neleží na chordále žádné dvojice sestrojených kružnic. Mocnost nám ale pomůže určit poměr, v němž dělí bod G úsečku FB .

Středů shodných kružnic k_2, k_3, k_4 o poloměru 1 leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku. Proto je EF průměr kružnice k_3 (trojúhelník EFH na obr. 11 je rovnostranný o straně délky 2). Proto $|CL| = \frac{1}{2}$, $|LF| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $|BL| = \frac{5}{2}$, a tedy

$$|BF| = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{7}.$$

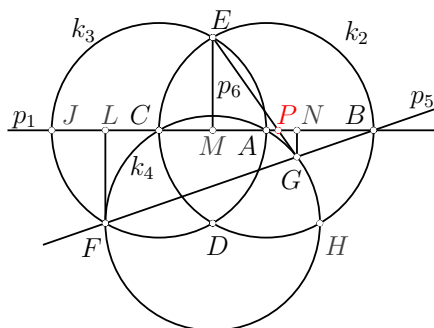
Mocnost bodu B ke kružnici k_4 je rovna $|BC| \cdot |BA| = 2 = |BF| \cdot |BG|$. Protože $|BF| = \sqrt{7}$, je $|BG| = \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{7} \cdot \sqrt{7}$. Tudíž $|BG| = \frac{2}{7} \cdot |BF|$. Jestliže označíme po řadě L, M, N paty kolmic na přímku AB z bodů F, E, G , pak z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků BFL, BGN také $|NG| = \frac{2}{7} \cdot |LF|$ a $|BN| = \frac{2}{7} \cdot |BL|$, kde $|BL| = \frac{5}{2}$. Proto

$$|LN| = \frac{5}{7} \cdot |BL| = \frac{25}{14}, \quad |MN| = |LN| - |LM| = \frac{25}{14} - 1 = \frac{11}{14}.$$

Odtud již vypočteme všechny potřebné dělicí poměry. Bod P dělí úsečku MN v poměru $|ME| : |NG| = |LF| : |NG| = 7 : 2$. Tudíž

$$|MP| = \frac{7}{9} \cdot |MN| = \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{14} = \frac{11}{18}.$$

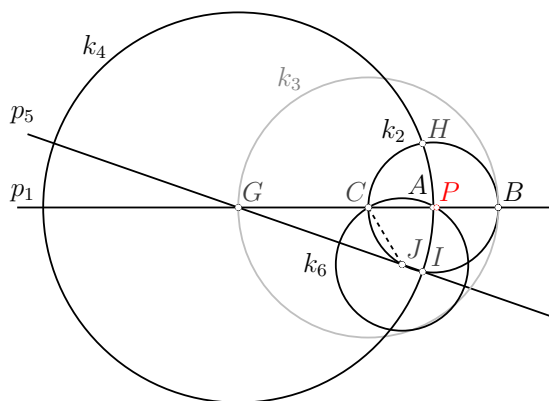
Odtud $|AP| = \frac{11}{18} - \frac{1}{2} = \frac{1}{9}$.



Obr. 11 Důkaz správnosti konstrukce jedné devítiny

Cvičení – jedna sedmadvacetina

Uměli byste dokázat, že konstrukcí na obr. 12 sestrojíme bod v jedné sedmadvacetině úsečky AB ?



Obr. 12 Konstrukce jedné sedmadvacetiny

Kružnice $k_3(C, |CB|)$ slouží k sestrojení bodu G , který je středem kružnice $k_4(G, |GA|)$, bod I je jedním z průsečíků kružnic k_2, k_4 , bod J je druhým průsečíkem přímky $p_5 = GI$ s kružnicí k_2 a kružnice k_6 má střed v bodě J a prochází bodem C . Výsledný bod P je průsečíkem kružnice k_6 s přímkou AB .

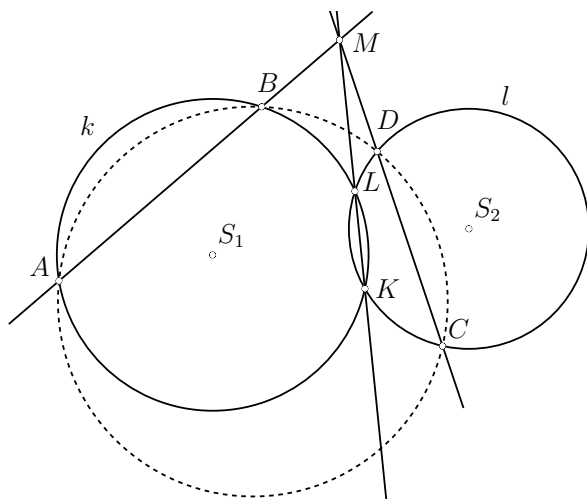
Poradíme vám, že stačí dvakrát využít mocnost bodu ke kružnici, jednou pro průsečík přímky IH s přímkou AB , podruhé pro bod G (pro určení polohy bodu J na úsečce GI).

Úlohy bez výpočtu

Mocnost bodu ke kružnici jsme zatím využili k výpočtům délek, hodí se však i k důkazům geometrických vztahů, v nichž se o délkách nemluví. Viz např. [1], [2]. Zkuste si sami dokázat následující dvě (snadná) tvrzení.

Body na kružnici

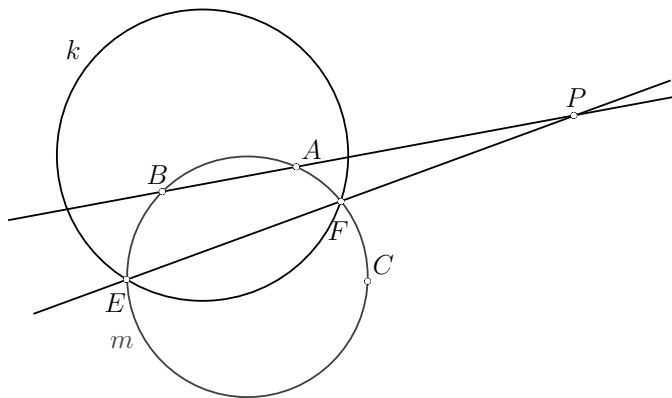
Vedeme-li z libovolného bodu M na chordále nesoustředných kružnic k, l (kde M není průsečíkem kružnic) dvě různé přímky, z nichž jedna protíná kružnici k v bodech A, B a druhá protíná kružnici l v bodech C, D , leží body A, B, C, D na jedné kružnici (návodný obr. 13 ilustruje zadání pro bod M vně kružnic).



Obr. 13 Body na kružnici

Průsečík přímek

Je dána kružnice k a body A , B , které na ní neleží. Zvolme bod C libovolně tak, aby neležel na přímce AB a aby se kružnice k a kružnice m opsaná trojúhelníku ABC protínaly. Označme průsečíky těchto kružnic E , F a sestrojme přímky AB , EF . Dokažte, že poloha průsečíku P přímek (pokud existuje) nezávisí na volbě bodu C (obr. 14).



Obr. 14 Průsečík přímek

V tomto článku jsme ukázali, že *mocnost bodu ke kružnici* není jen pojem, jehož definici si žáci ve škole mají zapamatovat, ale je to užitečný geometrický vztah, který má také konstruktivní charakter. Mocnost jsme využili při důkazech tvrzení o délkách v geometrických konstrukcích. Naznačili jsme také, že tento vztah může usnadnit důkazy mnoha dalších geometrických tvrzení. Možná vás uvedené důkazy inspiroují k hledání konstrukcí dalších dělicích bodů na úsečce AB , k němuž jsme vás vyzvali již v článku [3].

Literatura

- [1] *Prasolov, V. V.: Zadačí po geometrii I.* Moskva, 1986 (rusky). Anglický překlad: Leites, D.: *Problems in Plane and Solid Geometry*, v.1 *Plane Geometry*. 2006, s. 57–59.
- [2] *Horák, S.: Kružnice. Škola mladých matematiků, svazek 16*, Praha, 1966.
- [3] *Gergelitsová, Š. – Holan, T.: Dělení úsečky.* MFI, 24 (2015), č. 2, s. 95–104.
- [4] *Teorie – Mocnost bodu ke kružnici, chordála a potenční střed.* Dostupné z: <http://geometrie.kma.zcu.cz/work/AU/teorie/mocnost.html>.

Co nového víme o prvočíslech

IVAN CHAJDA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Problémy související s prvočísly zajímaly matematiky již v antice. Je znám velmi elementární a přitom elegantní důkaz Eukleida (cca 325–260 př. n. l.) o nekonečnosti množiny prvočísel. V ostrém kontrastu k tomuto tvrzení je problém tzv. *prvočíselných dvojčat*.

Připomeňme, že dvě prvočísla p, q se nazývají *prvočíselná dvojčata*, je-li $q = p + 2$. Již ve starém Řecku před více než 2000 lety byl zformulován tento problém: „Existuje nekonečně mnoho prvočíselných dvojčat?“ Přes velmi elementární formulaci se dosud nepodařilo tuto hypotézu ani potvrdit, avšak ani vyvrátit. Přes zdánlivou jednoduchost není známa ani žádná metoda nebo zdůvodnitelný postup, o kterém by šlo předpokládat, že vede k cíli. Použitím počítačů se sice daří generovat stále další a další prvočíselná dvojčata, ovšem to není matematický důkaz tvrzení, že je jich nekonečně mnoho.

Ačkoli zatím tento problém řešit neumíme, objevil se první přelomový krůček v r. 2014, který zformuloval *Yitang Zhang*, viz [4]. Ve skutečnosti byl tento výsledek dosažen již v r. 2013, kdy byl zaslán do redakce *Annales of Mathematics*, vyšel o rok později. Yitang Zhang je 57letý matematik z Univerzity of New Hampshire. Až dosud publikoval pouze jeden článek a jeden preprint na arXiv, který však obsahoval chybu. Jeho zcela přelomový výsledek by tak asi unikl pozornosti matematické komunity, kdyby o něm nenapsal A. Granville článek v *Bulletin of the American Mathematical Society*, viz [1].

O jaký výsledek se tedy jedná? Zhang dokázal následující tvrzení.

Věta 1

Existuje přirozené číslo $b \geq 2$ tak, že existuje nekonečně mnoho dvojic prvočísel p a q splňujících rovnost $q = p + b$.

Důkaz této věty je velmi obtížný a má asi 50 stran, proto ho zde nebudeme prezentovat. Zmíníme ale několik podstatných poznámek. Čtenáře jistě napadne, že kdyby $b = 2$, pak by tím byl problém prvočíselných dvojčat vyřešen. Zásadní otázkou tedy je velikost čísla b z věty 1. Bohužel, Zhang dokázal pouze, že toto číslo b není větší než 70 miliard! To jistě

není příliš uspokojivý výsledek, podnítil však další výzkum v této oblasti. Zhang dokázal následující tvrzení.

Věta 2

Existuje přirozené číslo k takové, že pokud $x + a_1, \dots, x + a_k$ je tzv. přípustná k -tice, pak existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n , pro které aspoň dvě z čísel $n + a_1, \dots, n + a_k$ jsou prvočísla.

Připomeňme pojem přípustné k -tice. Nechť $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ jsou přirozená čísla (vzájemně různá). Řekneme, že prvočíslu p je *obstrukce* této k -tice $a_1, \dots, a_k$ pokud p dělí aspoň jedno z čísel $n + a_1, \dots, n + a_k$ pro každé přirozené číslo n . Pokud neexistuje žádná obstrukce pro k -tici $a_1, \dots, a_k$, nazývá se tato k -tice *přípustná*.

Zhang dokázal, že pro k z věty 2 lze položit $k = 3\,500\,000$, což je ale pořád příliš velké číslo. Jeho postup důkazu byl však následně analyzován několika specialisty v teorii čísel se snahou najít podstatně menší hodnotu čísla k . J. Maynard dokázal v dosud nepublikované práci, že lze k redukovat na hodnotu 105, a následně zlepšil odhad na $k = 50$, viz [3]. Samozřejmě, že pro $k = 2$ bychom dostali řešení problému prvočíselných dvojčat, ale toto očekávání se nejeví příliš optimisticky. Očekává se pouze, že by se asi dalo dokázat hodnotu $k = 3$. Nicméně z věty 2 plyne zajímavý důsledek, který dokázali J. Maynard a T. Tao.

Věta 3

Pro každé přirozené číslo $m \geq 2$ existuje přirozené číslo k tak, že je-li $x + a_1, \dots, x + a_k$ přípustná k -tice pro některé x , pak existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n tak, že aspoň m z čísel $n + a_1, \dots, n + a_k$ jsou prvočísla.

Čtenáře, kterého tento problém zajímá hlouběji, odkazujeme na velmi obsáhlý článek [1], který je na rozdíl od citovaných výsledků snadno dosažitelný, a obsahuje detailní pojednání o těchto problémech.

Literatura

- [1] Granville, A.: Primes in intervals of bounded length. Bull. Amer. Math. Soc., roč. 52 (2015), č. 2, s. 171–222.
- [2] Maynard, J.: Large gaps between primes. Preprint.
- [3] Polymath, D. H. J.: Variants of the Selberg sieve, and bounden intervals containing many primes. Preprint.
- [4] Zhang, Y.: Bounded gaps between primes. Ann. of Math., roč. 179 (2014), č. 2, s. 1121–1174.

Soutěž o největší fraktál

JANA KOPFOVÁ

Matematický ústav Slezské Univerzity, Opava

Cílem tohoto článku je obeznámit čtenáře s tím, co jsou fraktály a jak tyto fascinující geometrické útvary, kterými se zabývá současná matematika, přiblížit dětem na základní či střední škole. Fraktály jsou skutečně krásné, dají se proto využít k motivaci ke studiu matematiky, zároveň ale také k rozvíjení poznatků z geometrie či vytváření prvních představ o limitech. Rádi bychom vás také vyzvali, abyste se zapojili do naší soutěže „O největší fraktál“.



Fraktál je takový geometrický útvar, který je **soběpodobný** – znamená to, že pokud daný útvar pozorujeme v jakémkoliv měřítku či rozlišení, pozorujeme stále opakující se určitý charakteristický tvar (motiv); mívá na první pohled velmi složitý tvar, ale je generován opakovaným použitím jednoduchých pravidel. Fraktály jsou na první pohled nejsložitější

geometrické objekty, které současná matematika zkoumá, mají však často překvapivě jednoduchou matematickou strukturu.

Asi nejznámějším fraktálem je tzv. Sierpinského trojúhelník, pozoruhodný především tím, že má nekonečně velký obvod a přitom nekonečně malý obsah. Konstrukce Sierpinského trojúhelníka je jednoduchá, vzniká postupným nekonečným odebíráním menších rovnostranných trojúhelníků od základního rovnostranného trojúhelníku.

Vaším úkolem bude složit co největší Sierpinského trojúhelník, který poskládáte z menších Sierpinského trojúhelníků (zvolte jednotnou stranu délky 15 cm). Na fotografii z Opavy vidíte akci, na níž jsme takový trojúhelník poskládali z 81 trojúhelníků. Překonáte náš rekord?

Návrh aktivity ve třídě: výroba Sierpinského trojúhelníku

Každý žák si narýsuje velký rovnostranný trojúhelník se stranou délky 15 cm. Pak narýsuje všechny střední příčky ve velkém trojúhelníku, ty rozdělí velký trojúhelník na čtyři menší. Prostřední rovnostranný trojúhelník žák vybarví. Zůstanou tři nevybarvené trojúhelníky. Zkonstruuje středy jejich stran a opět narýsuje střední příčky. Vybarví tři nově vzniklé prostřední trojúhelníky.

Buďte nápadití v použití barev. Opakujte tento postup tolikrát, kolikrát to jenom půjde. Zkuste trojúhelníky vybarvovat zajímavými, symetrickými vzory.

Každý žák si vytvoří vlastní model Sierpinského trojúhelníka, přitom mladší žáci si mohou procvičovat geometrii – jak sestavit rovnostranný trojúhelník bez použití kružítka, jak sestavit střední příčku trojúhelníka. Můžete mluvit o podobných trojúhelnících a procvičovat odhady a logické odvozování. Žáci doplňují své odhady o počtu trojúhelníků a jejich obsahů do tabulky. Obsah se počítá vzhledem k celkovému obsahu prvního velkého trojúhelníka, o kterém předpokládáme, že má obsah 1.

Cílem je najít závislost a dopředu před dalším krokem určit, kolik bude vybarvených trojúhelníků, následně porovnat svůj odhad se skutečností.

Úloha 1

Kolik trojúhelníků bude vybarvených po čtvrtém opakování? Kolik po šestém opakování? [27, 243]

Úloha 2

Obsah nevybarvených trojúhelníků je po prvním kroku $3/4$, po druhém $9/16$. Jak to bude po třetím kroku? [27/64]

Úloha 3 (Pro šikovnější nebo starší žáky)

Objevte vzorec: po n -tém kroku bude obsah nevybarvené plochy $(3/4)^n$.

Nejšikovnější žáci možná objeví, že se zvyšováním počtu iterací se obsah nevybarvené části bude neustále zmenšovat až do nekonečna.

Úloha 4

Vypočítejte obvod nevybarveného útvaru.

Všimněte si, že roste do nekonečna se zvyšujícím se počtem iterací. (začátky pochopení pojmu limita, u mladších žáků se uspokojíme na intuitivní úrovni)

Sierpinského trojúhelník je tak příkladem útvaru s nekonečně velkým obvodem a přitom s nekonečně malým obsahem. Zajisté učitele nebo žáky napadnou další zajímavé úlohy.

Na konec aktivity vytvořte ve třídě ze skupiny 9, 27, 81, ... trojúhelníků větší Sierpinského trojúhelník (můžete zkusit vytvořit i jiné zajímavé tvary). Ideálně při počtu 27 žáků (z nich se dá sestavit další větší fraktál; při menším počtu žáků mohou šikovnější a rychlejší žáci zhotovit fraktály dva). Závěrečné sestavování, případně doplnění pořízením fotografií, je pěkným vyvrcholením aktivity.

Úloha 5

Kolik trojúhelníků by bylo potřeba na sestavení dalšího většího fraktálu? [81]

Šikovnějším žákům neujde souvislost s počtem nevybarvených trojúhelníků počítaných dříve.

Zapojte do soutěže nejenom vaši třídu ale i další třídy, popřípadě celou školu – udělejte si obrovský fraktál ve vaší tělocvičně nebo na dvoře. Svůj výtvar vyfotografujte a pošlete na email jana.kopfova@math.slu.cz do 31. 1. 2016. Pro školu, která nám pošle obrázek svého největšího fraktálu, čeká zajímavá cena, z fotek uspořádáme výstavku.

Podobné aktivity hledající vzorce pro obsah a obvod je možné udělat pro Sierpinského čtverec. (Čtverec rozdělíme na 9 menších stejných čtverců a prostřední čtverec vybarvíme. Tento postup následně zopakujeme pro každý ze zbylých 8 nevybarvených menších čtverců, atd.).

Úloha 6

Kolik čtverců vybarvíme po šestém kroku.

A kolik po n -tém?

[8⁵]
[8⁽ⁿ⁻¹⁾]

Úloha 7

Zkuste spočítat obsah nevybarvených částí po šestém kroku, po n -tém kroku, po nekonečně mnoha krocích.

[Obsah vede na součet geometrické řady, který je roven 1.]

O něco složitější je Sierpinského trojrozměrný fraktál – čtyřstěn. Další pěknou aktivitou je jeho vyrábění ve třídě, které vede také k rozvíjení prostorové představivosti (možné materiály, papírové čtyřstěny, případně složené pomocí origami, nebo konstrukce pomocí špejlí a kuliček z maršmelounů nebo kuliček vyrobených z mouky a vody).

Úloha 8

V prvním kroku potřebujeme 4 čtyřstěny. Kolik jich bude potřeba v $pátém$ kroku? Kolik v n -tém kroku? Kolik hran a kolik vrcholů?

Úloha 9

Jaký bude povrch takto zkonstruovaného útvaru? Jaký bude povrch po třetím kroku? A po n -tém? A po nekonečně mnoha krocích?

[Toto číslo se s počtem kroků nijak nemění.]

Úloha 10

Jaký bude objem tohoto útvaru? Po prvním kroku, po $pátém$ kroku, po n -tém kroku? Po nekonečně mnoha krocích?

[Tento objem se bude zmenšovat až k nule.]

Alternativní možností je pyramida s čtvercovou základnou – zde potřebujeme 5 čtyřstěnů v prvním kroku. Kolik jich bude potřeba v sedmém kroku? Stejně úkoly opakujeme i pro tento útvar, studenti si sami kladou otázky.

Zároveň bychom vám rádi nabídli DVD „Matematika a její tajemství“, kde se o světě fraktálů i jiných zajímavých tématech z matematiky můžete dozvědět více. Nabízíme českou, anglickou i německou verzi. DVD obsahují sedm filmů o matematice namluvené rodilými mluvčími na témata:

1. Tajemství fraktálů.

Může existovat útvar s nekonečným obvodem a s konečným obsahem? Pojď se s námi podívat do světa fraktálů! Co jsou to fraktály, kdo a jak je poprvé objevil a kde se používají.

2. Příběh čísla π .

Číslo π je jedno z nejslavnějších čísel v matematice. Kde se ale vzalo, jaké má vlastnosti a jak a proč se objevuje ve vzorcích pro obsah kruhu, nebo objem koule?

3. Tajemství topologie.

Topolog prý nerozezná pneumatiku od hrnku na kávu. Co je to topologie a jaká další tajemství skrývá? Od Platónských těles, Eulerovy věty až po Möbiův pásek a Kleinovu láhev.

4. Tajemství ukryté ve spirálách.

Co mají spirály společné s králíky? A matematika s botanikou? Archimédovy, logaritmické a Fibonacciovy spirály, jejich vlastnosti a souvislosti s výskytem v přírodě.

5. Tajemství pravoúhlých trojúhelníků.

Co má společné Pythagoras s pravoúhlým trojúhelníkem? Historie a další netušené zajímavosti kolem Pythagorovy věty.

6. Tajemství počítání s nekonečnem.

Může mít nekonečná řada čísel konečný součet? Řady geometrické, harmonické a jak je to s jejich součty. Jak se s nekonečnem počítá? Sčítání nekonečen a Zenónovy paradoxy.

7. Tajemství Pascalova trojúhelníku.

Co všechno skrývá Pascalův trojúhelník? Historie a souvislosti, trojúhelníková a čtvercová čísla, fraktálové vzory a jiné pozoruhodné vlastnosti ukryté v Pascalově trojúhelníku.

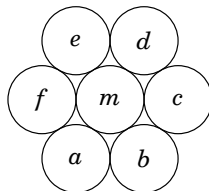
Filmy je možné využít k doplnění či rozšíření učiva na základních i středních školách. Na mnohé otázky uvedené ve filmech lze navázat ve vyučování matematiky a zamýšlet se tak nad dalšími problémy v širších souvislostech.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 20. 11. 2015 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz.

Úloha 217

Kruh na obrázku je obklopen šesti dotýkajícími se shodnými kruhy. V těchto kruzích jsou zapsána reálná čísla a, b, c, d, e, f a m . Přitom číslo v každém kruhu je součinem všech čísel v kruzích, které se jej dotýkají. Určete všechny možné hodnoty čísla m .



Robert Geretschläger (Graz)

Úloha 218

Najděte všechny dvojice (x, y) celých čísel vyhovujících rovnici

$$x^2 - 3x - 4xy - 2y + 4y^2 + 4 = 0.$$

Pavel Calábek

Dále uvádíme řešení úloh 213 a 214, jejichž zadání byla zveřejněna ve druhém čísle letošního (24.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 213

Najděte největšího lichého dělitele čísla

$$\left(\binom{2017}{2} + \binom{2017}{5} + \binom{2017}{8} + \cdots + \binom{2017}{2015} \right) - \\ - \left(\binom{2015}{1} + \binom{2015}{4} + \binom{2015}{7} + \cdots + \binom{2015}{2014} \right).$$

Radek Horenský

Řešení. Označme

$$A = \binom{2017}{2} + \binom{2017}{5} + \binom{2017}{8} + \cdots + \binom{2017}{2015}$$

a

$$B = \binom{2015}{1} + \binom{2015}{4} + \binom{2015}{7} + \cdots + \binom{2015}{2014}.$$

Opakovaným užitím kombinatorické identity $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, kde n ,

k jsou celá čísla, $0 \leq k < n$, dostaneme

$$\begin{aligned}
 A - B &= \left(\binom{2017}{2} + \binom{2017}{5} + \cdots + \binom{2017}{2015} \right) - B = \\
 &= \left(\binom{2016}{1} + \binom{2016}{2} \right) + \left(\binom{2016}{4} + \binom{2016}{5} \right) + \cdots + \\
 &\quad + \left(\binom{2016}{2014} + \binom{2016}{2015} \right) - B = \\
 &= \left(\binom{2015}{0} + \binom{2015}{1} + \binom{2015}{1} + \binom{2015}{2} \right) + \\
 &\quad + \left(\binom{2015}{3} + \binom{2015}{4} + \binom{2015}{4} + \binom{2015}{5} \right) + \\
 &\quad + \cdots + \left(\binom{2015}{2013} + \binom{2015}{2014} + \binom{2015}{2014} + \binom{2015}{2015} \right) - \\
 &\quad - \left(\binom{2015}{1} + \binom{2015}{4} + \cdots + \binom{2015}{2014} \right) = \\
 &= \binom{2015}{0} + \binom{2015}{1} + \binom{2015}{2} + \binom{2015}{3} + \cdots + \binom{2015}{2015} = 2^{2015}.
 \end{aligned}$$

Při poslední úpravě jsme využili známou identitu, která je důsledkem binomické věty po umocnění výrazu $(1+1)^{2015}$. Odtud již plyne, že největší lichý dělitel daného čísla je 1.

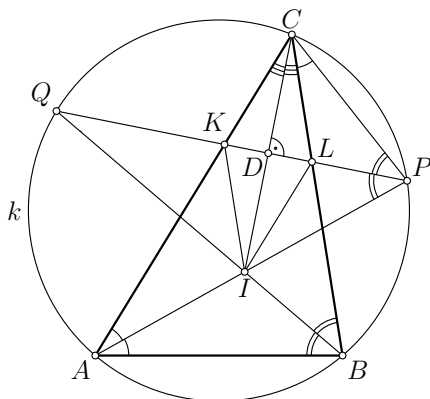
Správná řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

Úloha 214

Nechť k je kružnice opsaná ostroúhlému trojúhelníku ABC . Označme I střed kružnice jemu vepsané. Dále nechť P je střed oblouku BC kružnice k , který neobsahuje bod A , a Q je střed oblouku AC kružnice k , který neobsahuje bod B . Přímka PQ protíná strany AC a BC po řadě v bodech K a L . Dokažte, že $CKIL$ je kosočtverec.

Jozef Mészáros

Řešení. Označme standardně α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC při vrcholech A, B a C a dále D průsečík přímk PQ a CI . Protože P je středem oblouku BC kružnice k , jsou úhly BAP a CAP shodné, mají tedy velikost $\frac{\alpha}{2}$ a bod I leží na přímce AP . Podobně ukážeme, že bod I leží na přímce BQ a platí $|\sphericalangle ABQ| = |\sphericalangle CBQ| = \beta/2$. Podle věty o obvodovém úhlu jsou shodné také dvojice úhlů BAP, BCP , dále CBQ, CPQ a ABQ, APQ , platí tedy $|\sphericalangle BCP| = \frac{\alpha}{2}$ a $|\sphericalangle CPQ| = |\sphericalangle APQ| = \frac{\beta}{2}$. Střed kružnice vepsané leží na osách vnitřních úhlů, proto $|\sphericalangle ACI| = |\sphericalangle BCI| = \frac{\gamma}{2}$.



Pro součet vnitřních úhlů při vrcholech C a P v trojúhelníku CDP platí

$$|\sphericalangle DCP| + |\sphericalangle CPD| = |\sphericalangle DCL| + |\sphericalangle LCP| + |\sphericalangle CPD| = \frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90^\circ,$$

tedy přímky PQ a CI jsou navzájem kolmé. Přímka CD je osou úhlu KCL a je kolmá k přímce KL , body K a L jsou tak souměrně sdružené podle přímky CD , proto bod D je středem úsečky KL . Podobně přímka PD je osou úhlu CPI a je kolmá k přímce CI , tedy body C a I jsou souměrně sdružené podle přímky PD , a bod D je tak i středem úsečky CI . Zjistili jsme, že úhlopříčky čtyřúhelníku $CKIL$ se půlí a jsou navzájem kolmé, proto čtyřúhelník $CKIL$ je nutně kosočtverec nebo čtverec. Velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu C je γ , protože trojúhelník ABC je ostroúhlý, platí $\gamma < 90^\circ$, tedy čtyřúhelník $CKIL$ je kosočtverec, což jsme měli dokázat.

Správná řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

Pavel Calábek

Experimenty ve školské fyzice dříve a nyní

BOHUMIL VYBÍRAL

Univerzita Hradec Králové

Fyzika jako přírodní věda je zpravidla založena na experimentech a observaci přírody a vesmíru. Je pravda, že moderní matematická fyzika konstruuje matematické modely možných jevů a dějů. Pokud však nejsou tyto hypotetické konstrukce verifikovány experimenty, observací přírodních jevů anebo technickými aplikacemi, jde jen o neplatné hypotézy.

Školská fyzika musí ve vhodné formě a míře také odrážet stav, kterého dosáhla fyzika jako věda. Musí proto výklad v přiměřené míře provázet vhodnými experimenty. Fyzika dnes nepatří k právě oblíbeným předmětům a také jde o obor, který dobře pochopený, je krásný a bezesporu velmi užitečný nejen pro technické obory, ale i pro ostatní přírodní vědy a medicínu. Experiment je právě tou složkou výuky fyziky, která významně přispívá k jejímu porozumění a zvyšuje její přitažlivost. Přeložený článek je proto věnována *školnímu experimentu*. Je zvoleno historické hledisko, které je zajímavé a poučné. Protože jde o velmi členitou skutečnost, volil jsem v určitých úsecích popisu i osobní přístup se subjektivními názory a prožitky. Hlavním zdrojem předloženého článku je autorova publikace [3].

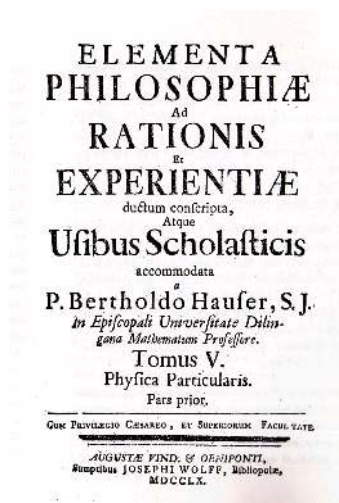
Experimentování ve století 18. a 19. (1760–1868)

Fyzika jako věda zaznamenala od počátku 17. století velký rozvoj – především proto, že vedle metody přímé observace přírodních jevů začala díky Galileovi využívat *experiment jako vědeckou metodu* zkoumání. Experiment má tu přednost, že vhodným nastavením podmínek průběhu děje lze potlačit nežádoucí průvodní rušivé jevy a zkoumaný jev pak zřetelně

vynikne. To byla vítaná šance i pro školskou fyziku – experiment představoval pro didaktiku vítanou názornost k ilustraci probíraných jevů a dějů. Fyzika té doby měla převážně experimentální charakter, protože fyzikální teorie teprve začaly vznikat, provázanost jevů různých fyzikálních oborů buď ještě neexistovala, nebo byla jejich znalost ještě malá. Tomu také odpovídala výuka fyziky – musela mít hodně experimentální a popisný charakter.

Střední a vysoké školy ve střední a západní Evropě byly v 17., 18. století převážně církevní, vyučovacím jazykem byla převážně latina (to samozřejmě omezovalo přístup ke vzdělání). Katolická církev pro školské a převážně vzdělávací účely vytvořila jezuitský řád. Z této doby také pocházejí první latinsky psané učebnice fyziky.

K mému poznání prvopočátků školské fyziky přispěla 24. Mezinárodní fyzikální olympiáda, konaná roku 1993 v USA. Na ní se mi dostala do rukou latinská učebnice z roku 1760 a od vedoucího německé reprezentace dr. GÜNTERA LINDA (z IPN – Institute for Science Education, Kiel) jsem tehdy dostal faksimile učebnice fyziky od jezuitského učitele fyziky BERTHOLDA HAUSERA, vydanou roku 1760 (obr. 1). Jde jen o obrazovou část se skvělými rytinami na 29 tabulích formátu A4 s mnohačetnými obrázky. Šlo o přílohu k latinsky psanému textu, který nebyl zkopírován. Obrázky ve formě rytin mají vynikající úroveň, některé z nich jsou zde zkopírovány.



Obr. 1 Titulní list latinské učebnice experimentální fyziky z roku 1760

Dr. Lind v komentáři k faksimile uvádí, že v polovině 18. století nebyla ve většině německých škol fyzika součástí učebního programu. Jednalo se o předmět, který byl vyučován pouze na univerzitní úrovni. Zde byla fyzika vyučována na filosofické fakultě, která zajišťovala všeobecné vzdělání a sloužila jako příprava pro specializovaná studia na třech vyšších fakultách: teologické, právnické a lékařské. Základní fyzikální vzdělání tak získal každý student. Analogická situace byla i jinde v Evropě, včetně Univerzity Karlově v Praze.

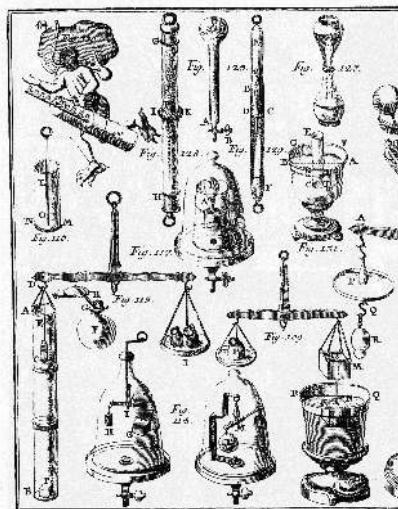
Univerzity v 18. století nebyly zodpovědné za vědecký výzkum, předávaly jen vědomosti potřebné pro určitá povolání ve státní správě, školách a v církvi. Začínající studenti na filosofické fakultě obvykle měli kolem 17 let. Předtím většinou absolvovali pouze latinskou školu (gymnázium). Filosofická fakulta zajišťovala vzdělání obdobné vyšším ročníkům pozdějších gymnázií (známých od druhé poloviny 19. století). Součástí výuky byly časté debaty, které měly studenty připravit na zkoušky. Jádrem studií na filosofické fakultě tvořila základní přednáška z filosofie, která obsahovala jednotlivá témata, mezi nimiž nechyběla logika, metafyzika a fyzika. Učebnice z obr. 1 (se zmíněnou věnovanou obrazovou částí) byla určena pro takovouto přednášku. Autor této učebnice, B. Hauser, byl profesorem na poměrně malé německé univerzitě v Dillingenu, která však roku 1804 zanikla.

Hauser byl jezuita a učebnici napsal z příkazu svého řádu. Kniha nepatřila ve své době k nejmodernějším, avšak odlišovala se od ostatních díky své obsáhlosti a nádherným obrázkům. Obsahovala osm svazků, které byly vydány v letech 1755 až 1764. V prvním svazku byla probírána logika, metafyzika byla ve druhém a třetím svazku. Posledních pět svazků bylo věnováno fyzice a tvořily nejpodstatnější část Hauserovy přednášky z filosofie. Fyzika v této době zahrnovala veškeré přírodní vědy, včetně biologie.

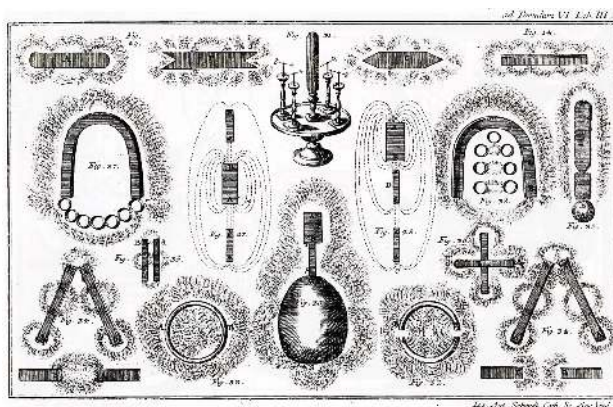
Tedy nová *experimentální fyzika* je v knihách rozebrána do detailu a je zde popsáno mnoho demonstračních experimentů. Hauser byl však schopen při přednáškách předvádět pouze několik zde zobrazených pokusů. Bylo totiž obvyklé, že profesori si sami platili za svou experimentální výbavu ve škole, tj. za pořizování potřebných demonstračních pomůcek pro experimenty. Tato skutečnost opravdu vyžadovala zanícení pro věc. S ohledem na to, že Hauser vzhledem k příslušnosti k náboženskému řádu jezuitů nedostával žádný plat, neměl dostatek prostředků a byl odkázán na občasnou finanční podporu od svého řádu.

Rytiny v Hauserových knihách dávají dobrou představu o úrovni experimentální fyziky poloviny 18. století. Standardní přístroje, jako vakuové

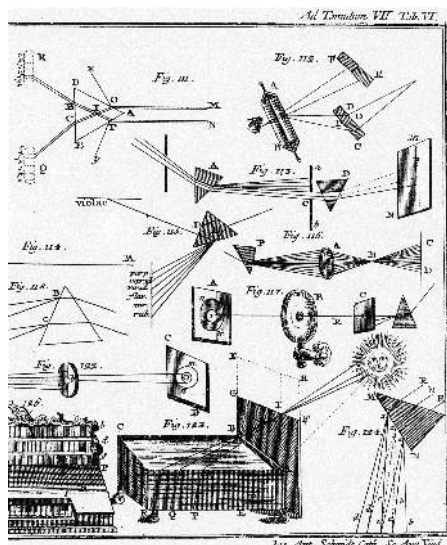
pumpy, teploměry, barometry, magnetické jehly nebo elektrostatické přístroje, jsou zobrazeny v různých technických provedeních. Na obr. 2 je např. část obrazové tabule, vztahující se k mnohočetné demonstrace Archimédova zákona. Obr. 3 zachycuje část experimentů z magnetostatiky a obr. 4 část jevů z optiky. Je obdivuhodné, kolika způsoby byly uvedené jevy již roku 1760 ve škole demonstrovány.



Obr. 2 Experimenty k verifikaci Archimédova zákona v Hauserově učebnici

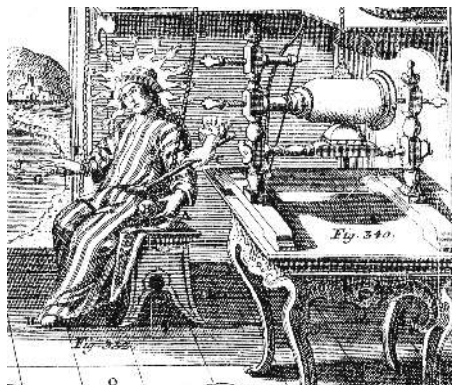


Obr. 3 Experimenty z magnetostatiky v Hauserově učebnici



Obr. 4 Část experimentů z optiky v Hauserově učebnici

Hauser rovněž ukazuje některé z okázalých experimentů, které byly v jeho době velmi populární. Jedním z nich je blahorečení podle Georga MATTHIASSE BOSEHO (Tom V., tab. XV, obr. 332) – viz obr. 5, který je malou částí tab. XV.



Obr. 5 Elektrostatický experiment podle Georga Matthiase Boseho (1760)

Osoba sedící na izolované stoličce má na hlavě kovovou korunu s ostrými hroty. Jakmile se osoba elektricky nabije, objeví se halo-jev, způsobený

korónovým výbojem na hrotech koruny. Přístroj „elektriky“ pro vytvoření vysokého napětí byl obvykle vytvořen z obyčejné pивní sklenice, která je roztočena a třena hadříkem pokrytým pastou ze slitiny rtuti. Náboj je odveden řetízkem a je přiveden na Leydenskou láhev (tj. na kondenzátor pro vysoké napětí). Hauser očividně věděl o experimentu pouze z doslechu, jelikož zobrazená osoba neměla žádnou korunu s hroty, nýbrž jen druh klobouku. Autor G. M. Bose nikdy nepublikoval přesné informace o konstrukci koruny, pravděpodobně z důvodu zachování monopolu na tento experiment.

Experimentování ve století 19. a 20. (1869–1989)

Revoluční rok 1848 inicioval řadu postupných změn v celé Evropě. Šlo o změny v oblasti politické, kulturní a především ekonomické. Dominovala industrializace podmíněná novými poznatky ve fyzice. Šlo o dvě velké oblasti; nejprve o rozvoj termodynamiky a konstrukci a využívání parních strojů od počátku 19. století a poté zejména objevy v elektřině a magnetismu v první polovině 19. století a jejich technické aplikace od jeho druhé poloviny. Objevy ve fyzice tak postupně nacházely uplatnění v průmyslu a změnily celou společnost – na století páry navazovalo století elektřiny. Změny v nastupujícím rozvoji průmyslu vyžadovaly i radikální změny ve školním systému směrem k jeho přírodovědnému a technickému obsahu.

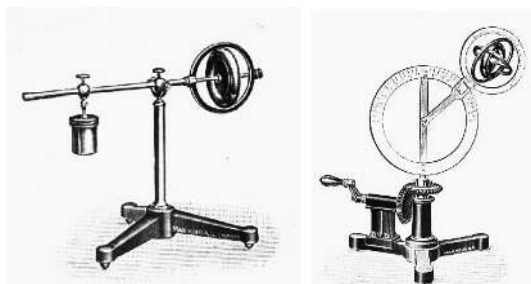
V Rakouském císařství (od roku 1867 v Rakousku-Uhersku) jako mnoho národnostním útvaru, se základní (a později i střední a vysoké) školství začalo rozvíjet na národnostním principu – učilo se převážně v rodném jazyce dětí a mládeže. Zásadní změnu v systému školství přinesl rok 1869, kdy byl přijat nový říšský školský zákon (podle autora ministra školství a osvěty HASNERA se označoval jako „Hasnerův zákon“). Zavedl osmiletou školní povinnost a upravil soustavu škol zavedením škol obecných, měšťanských a navazujících škol odborných. Rozvinul systém gymnázií s elementy přírodovědně – technického zaměření, tzv. reálky. Především byl do základního vzdělávání zaveden předmět přírodopys, který shrnoval poznatky z fyziky, chemie a přírodopisu. Toto vzdělávání si vyžadovala příprava mládeže k práci v průmyslu, řemeslech i v zemědělství, do něhož rovněž pronikaly elementy technického rozvoje – podrobněji viz článek [1], publikovaný v našem časopise.

Provedené politické změny vedly k tomu, že po celém území mocnářství se zakládaly nové školy, kde se učilo v mateřském jazyce (vyučovacím jazykem dosavadních církevních škol byla vedle latiny převážně němčina).

V českých zemích vznikala česká gymnázia (např. v Brně a Olomouci již roku 1867). A stavěly se nové budovy škol. Nejen v těchto velkých městech, ale i ve městech velmi malých – např. v Jevíčku (současný počet obyvatel je asi 2 800) bylo gymnázium založeno roku 1897 a pěkná třípodlažní budova Jevíčku dominovala již roku 1899 a je ozdobou městečka dodnes. Navíc každá obec chtěla mít novou budovu obecné školy, větší obce školy měšťanské. Většině obcí se to tehdy na přelomu 19. a 20. století podařilo.

V roce 1862 byla v Praze založena *Jednota českých matematiků a fyziků* (JČMF), vědecká společnost, která měla od samého počátku rozhodující vliv na tvorbu českého odborného názvosloví v matematice a fyzice. Také na tvorbu kvalitních učebnic. Jedním z hlavních úkolů JČMF bylo pěstování didaktiky s cílem hledat cesty ke zlepšení oblíbenosti matematiky a fyziky – úkol stále dodnes uspokojivě nedořešený. V této souvislosti byla zdůrazňována významná role *experimentu ve výuce fyziky*.

Prudkému rozvoji školství na konci 19. století se přizpůsoboval i průmysl vyrábějící učební pomůcky. Nové školy měly fyzikální kabinety, gymnázia fyzikální posluchárny a zpravidla i laboratoře. Ty s velkou pečlivostí tehdejší učitelé fyziky vybavovali a ošetřovali. Výuka fyziky se tak pro mnohé žáky stávala přitažlivou. O aktivitě nově vzniklých firem, vyrábějících kvalitní učební pomůcky, svědčí tehdejší mnohasetstránkové firemní katalogy, které lze najít ve školních knihovnách i na internetu. Šlo např. o firmy s evropskou působností jako PHYWE, LEYBOLD, MAX KOHL (příklad nabídky je na obr. 6), v Čechách později FYSMA, KMENT aj. Řada českých škol dosud ve svých sbírkách má fyzikální pomůcky a přístroje z tohoto období. Je třeba si tohoto dědictví vážit, pečovat o ně, chránit je před zničením a zabezpečit proti zcizení. Bohužel řada fyzikálních kabinetů škol po celé České republice byla v uplynulých dvaceti pěti letech vykradena.



Obr. 6 Fesselův přístroj k demonstraci precese a model gyroskopického kompasu – nabídka z katalogu Max Khol, A. G., 1925

Rovněž na Karlo-Ferdinandově univerzitě v Praze došlo k podstatným změnám. Univerzita byla roku 1882 rozdělena na dvě části: na českou a německou. Fyzika se tehdy studovala na Filosofické fakultě, na níž studium přírodních věd zaznamenalo velký rozvoj. Do konce století byly pro tato oddělení postaveny dvě velké a účelně vybavené budovy (Ke Karlovu 3, dnes patří matematice na MFF, a Ke Karlovu 5, dnes patří fyzice na MFF). Samostatná Přírodovědecká fakulta UK (jako pátá na UK) byla ustavena až roku 1920 a Matematicko-fyzikální fakulta UK roku 1950. Fakulty se měnily, avšak bohatě zařízený kabinet fyziky zůstával. Největší zásluhu na jeho budování má významný český experimentální fyzik a akustik prof. Dr. ČENĚK STROUHAL (1850–1922) (obr. 7). Pomůcky Strouhalova kabinetu se zde s oblibou na přednáškách využívají dodnes (obr. 8).



Obr. 7 Významní čeští experimentální fyzici: Čeněk Strouhal, František Nachstik a Rostislav Košťál (Zdroje: [2], [3] a archiv autora)



Obr. 8 Sto let staré pomůcky se na MFF stále používají – Teslův transformátor a optická lavice. Snímek z roku 2008 (foto B. Vybíral)

Experimentování ve výuce fyziky patřilo v době mezi světovými válkami doslova k obřadům, jak na gymnáziích, tak na vysokých školách technic-

kých a na přírodovědeckých fakultách univerzit. Dokládá to např. snímek (obr. 9) z přednášky věhlasného profesora fyziky Dr. FRANTIŠKA NACHTIKALA (1874–1939), obr. 7, na pražské technice z poloviny třicátých let. Profesor měl k dispozici asistenta, kterým byl pozdější významný profesor, tehdy docent RNDr. ZDENĚK HORÁK (1898–1987), ten prováděl experimenty. Byl tam také laborant, který vše nainstaloval a profesorovi mazal tabule. Tento přepych si dnešní školství již dovolit nemůže.



Obr. 9 Přednáška z fyziky na pražské technice v polovině třicátých let – přednáší prof. Dr. František Nachtikal (uprostřed), experimentuje doc. RNDr. Zdeněk Horák, vlevo je laborant (foto archiv autora)

Nyní si dovolím osobní vzpomínku na experimentování v přírodovědě na někdejších základních školách (tehdy však ještě přetrvával u učitelů název předmětu *přírodopyt*, i když tento název se po roce 1939 neměl používat). V letech 1943–1948 jsem chodil do obecné školy a v letech 1948 až 1952 do navazující střední školy (tehdy vznikla místo měšťanské školy a prvních čtyř let osmiletého gymnázia; po přechodnou dobu gymnázia ještě existovala, avšak už byla jen čtyřletá).

O tom, jaký má význam experimentován pro děti na 1. stupni, chci ukázat na jednom příkladu, který mám v paměti i po téměř sedmdesáti letech. Pan řídící JAN VLČEK (tak se tehdy označoval ředitel obecné školy) v Únanově, nám předvedl několik pokusů a mezi nimi běžný pokus o roztažnosti kovů. Prostě ukázal, že za studena kulička kroužkem neprošla. Pak kroužek nad kahanem zahrál a kulička prošla. Potom pravil: „Pokud bych kuličku nechal v místě kroužku, po zchladnutí by kuličku sevřel tak, že bych ji nevytáhl. Na tomto principu kovář sváže a zpevní koláři loučkové kolo od selského vozu. Doporučuji vám zajít ke kováři a podívat se

na to.“ To byla pro mne výzva. Naproti otcově pekárně bylo kolářství a tak jsem se jen přeptal, kdy pan kolář půjde ke kováři okovat kola. Kovář mě nechal při kování asistovat (šlapal jsem mu měch u výhně) a díky tomu jsem viděl celý proces nasazování obruče na kolo zblízka. Tomu se říká názorná výuka! Je to sice příklad poněkud archaický, avšak ve strojírenství se tento princip běžně využívá při nasazování kroužku na hřídel.

Měl jsem štěstí, že při přechodu na druhý stupeň základní školy (tehdy škola nesla název „střední“) ve Znojmě na ul. Mládeže 1, Tehdy jsem za učitele chemie a fyziky dostal vynikajícího (avšak jinak velmi přísného) učitele OLDŘICHA RYŠANKA. Spravoval zde velmi dobře vybavený kabinet fyziky a chemie a výuku obou předmětů zaníceně doplňoval četnými experimenty. Brzo si všiml mého zájmu a tak se stalo, že mě „jmenoval svým asistentem“, takže ve 13 až 15 letech jsem mu pomáhal připravovat experimenty a nosil pomůcky do třídy.

Péče většiny tehdejších učitelů o fyzikální pomůcky byla příkladná: ve Znojmě bylo známo, že na základní škole na náměstí Republiky je školník, který se nezištně (bezplatně) zabývá opravou elektrostatických učebních pomůcek. Tak mě učitel Ryšanek jednou k němu poslal, aby nám opravil Wimshurstovu elektriku z konce 19. století, kterou jsem mu rád přinesl.

Poslední vzpomínka na velmi dobrou úroveň experimentování ve fyzice v polovině 20. století se váže na gymnázium ve Znojmě, kde v letech 1945 až 1948 ředitelem velmi dobrý fyzik–chemik KAREL RADOCHA (1897 až 1991). Nechvalně proslulý revoluční režim roku 1948 sice ředitele Radochu z funkce suspendoval, avšak to nezabránilo našemu učiteli Ryšankovi, aby s ním domluvil dvouhodinovou prezentaci fyzikálních pokusů na podzim roku 1951 v gymnaziální posluchárně. Chtěl naše deváté třídy (tehdy měli hoši a dívky oddělené třídy!) na gymnáziu seznámit s pokusy, na které již na základní škole nebyly pomůcky. Jednalo se tehdy o velké a nezapomenutelné představení pokusů z elektřiny a magnetismu, kde dominovaly experimenty s Van de Graaffovým generátorem, výboje v plynech, pokusy s Teslovým vysokonapěťovým transformátorem a kouzelné jevy z optiky. Opravdu velká motivace pro fyziku, kterou tehdy emeritní ředitel Radocha za asistence našeho učitele Ryšanka předvedl – samozřejmě vše s vhodným výkladem. Kéž by se tento přístup k výuce fyziky dnes vrátil!

Po přechodu na Vysoké učení technické v Brně (VUT) v roce 1956 jsem zažil ještě starou školu výuky fyziky. Můj učitel prof. RNDr. ROSTISLAV KOŠTÁL¹ (1905–1980; obr. 7), dbal jak na experimenty při přednáškách,

¹Experimentální fyzik v oboru kmitání a akustiky, spoluzakladatel Fyzikální olym-

tak dohlížel na dobrou úroveň laboratorních cvičení. Dbal na to, aby zde každý student pracoval samostatně, úlohu si sám sestavil a proměřil a zpracoval včetně výpočtu chyb měření. Laboratoř byla připravena tak, že v ní byly postaveny všechny semestrální úlohy z daného oboru (zpravidla každá úloha dvakrát) a studenti postupně cyklovali od pracoviště k pracovišti. V následujícím cvičení následovala individuální obhajoba protokolu. K výuce v laboratoři tak ovšem byli zapotřebí dva asistenti a těch se nedostávalo. Profesor neváhal zapojit do asistentké funkce i vhodného studenta z vyššího ročníku VUT. Tak se stalo, že po mém nástupu do čtvrtého ročníku (1959/60) mě nechal rektorem VUT jmenovat asistentem se čtvrtinovým úvazkem.

Demonstrovat fyzikální jevy a děje reálnými experimenty zpravidla není jednoduchá úloha – proto je univerzitní profesori před druhou světovou válkou nechávali při přednášce dělat asistentům. Ne však vždy se experiment vydaří tak, jak si experimentátor představuje. Profesor Zdeněk Horák mi s úsměvem říkával: „Příroda je záhadná jako žena – nerada odhaluje svá tajemství.“

Uvedu několik příkladů. Nejmenovaný učitel fyziky na jednom gymnáziu chtěl demonstrovat volný pád a konfrontovat naměřený čas při dané výšce pádu s výpočtem. Vyšel do 2. patra schodišťové chodby, měl v jedné ruce ocelovou kuličku, ve druhé stopky. Řekl „Pustíme kuličku a současně stiskneme stopky“. Udělal to však právě naopak...

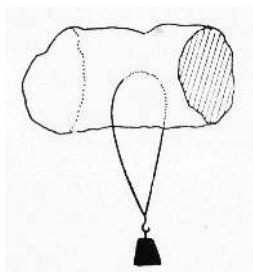
Počínaje akademickým rokem 1963/64 jsem jako odborný asistent začal přednášet fyziku na Vysoké vojenské škole ve Vyškově, kde od roku 1962 katedru fyziky vedl můj učitel z VUT prof. Rostislav Košťál. Mé přednášky samozřejmě doprovázely experimenty, které jsem si však musel připravovat a při výkladu provádět sám. Tak se snadno přihodilo, že i mně se občas nevydařil některý z pokusů – uvedu dva zajímavé až úsměvné neúspěchy se šťastným koncem.

K demonstraci precese setrvačníku na Fesselově přístroji (viz obr. 6) jsem roztáčel setrvačnický roztáčecím motorkem s gumovým třecím kolečkem. Vše fungovalo, až se jednou stalo, že se uvolnily hroty ložiska ve formě šroubových „červíků“. Setrvačnický vyskočil, proletěl posluchárnou tak, že poskakoval po okraji lavic se studenty v blízkosti středové uličky, odrazil se od zadní stěny posluchárny a obloukem letěl proti mně na stupínku. Stačil jsem uhnout a setrvačnický zasáhl jen tabuli.

piády v Československu roku 1959 a v roce 1967 spoluzakladatel Mezinárodní fyzikální olympiády, nyní celosvětové prestižní soutěži středoškoláků.

Jednou jsem chtěl demonstrovat tlak nasycených par éteru. Zahříval jsem jej v baňce kahanem (éter vře za běžného atmosférického tlaku již při teplotě asi $40\text{ }^{\circ}\text{C}$). Potřeboval jsem pokus urychlit, aby efekt nastal v pravou chvíli. Podařilo se mi jej asi o $2\text{ }^{\circ}\text{C}$ přehřát (i když v baňce byly jako protiopatření drobné kamínky). Načež došlo k prudkému varu, při němž tlak nasycených par dokázal vznést vzhůru asi metrový sloupec rtuti (odhadem asi 1 kg). Na štěstí U-trubice stála v dostatečně velké misce a tak rtuť převážně skončila v ní.

Vyplatí se pokus si dobře připravit a eventuálně i načasovat, což je potřebné u pokusu s *regelací ledu* (obr. 10), kdy tenký zatížený ocelový drát projde blokem ledu, aniž by jej přepůlil. Proces trval asi 20 minut (u daného bloku a závaží). Pokud se podařilo pokus včas odstartovat a závaží dopadlo do misky právě ve chvíli, kdy o jevu byla řeč, vyvolalo to u posluchačů údiv a já si v té chvíli připadal jako kouzelník.



Obr. 10 Experiment s regelací ledu

Uvedu ještě jeden „kouzelnický“ pokus, který s oblibou prováděl kolega RNDr. ALOIS KLEVETA, když katedru občas navštívila vojenská delegace s několika generály. Ve vhodnou chvíli řekl „Pro další experiment si zapálíme žárovku“. Vzal zápalky, škrtnul a žárovka se rozsvítila. Generálům chvíli trvalo, než pochopili, že aktérem je fotonka, stojící opodál.

Uvedené příklady a zkušenosti potvrzují, že experiment ve výuce fyziky (i experiment nevydařený) je vítaným i žádoucím doplňkem výuky pro svou názornost, funkci ilustrační a heuristickou – je-li dobře navozen, tak je pro žáka objevem.

Experimentování v současnosti (1990–2015)

Časové období od konce 19. století až téměř do konce 20. století bylo pro školskou fyziku vcelku příznivé – ať již šlo o monarchistické Rakousko-Uhersko v posledním období své existence (vyjma I. světové války), demo-

kratické Československo, anebo i nesvobodné socialistické Československo (bohužel až na případy perzekvování některých učitelů fyziky a jiných oborů, kteří byli nepohodlní režimu, stejně tak i na omezování přístupu mládeže z některých vrstev společnosti ke vzdělání). Rozvoj výuky fyziky byl vcelku podporován, v podstatě šlo o důvody ekonomické, související s modernizací průmyslu, zdravotnictví aj. Tomu odpovídala i vcelku příhodná hodinová dotace (s možností experimentování přímo ve výuce). Rovněž zásobování škol učebními fyzikálními pomůckami a přístroji bylo vcelku dobré (avšak za socialismu často s potížemi). Fyzika, jako věda ideologicky indiferentní, byla dílem příznivě přijímána společností i mimo školu.

Liberalizace české společnosti po roce 1990 školské fyzice do jisté míry uškodila, což se postupně negativně projevuje v celkovém nezájmu velké části společnosti o přírodovědné a technické vzdělávání mládeže. Hodinová dotace na fyziku se zmenšovala až na polovinu stavu z počátku osmdesátých let (na úkor různých humanitních předmětů, přičemž se celkově snížilo „zatížení dětí a mládeže vzděláváním“, což se negativně odrazilo v celkové úrovni znalostí a dovedností současné mladé generace, jak pozorujeme u přijímacích zkoušek na vysoké školy).

Prudký rozvoj mikroelektroniky, nástup počítačů a internetu zmíněné negativní trendy paradoxně ještě umocnilo. Mládež se již málo zabývá např. radioamatérstvím, modelářstvím, pokusnictvím. Přitahují ji spíše počítačové hry a internet se všemi nejen pozitivními projevy a důsledky, mj. se také zmenšila manuální zručnost mládeže.

Zmenšená hodinová dotace bohužel vedla i k omezení experimentů ve výuce fyziky a především k radikálnímu zmenšení počtu laboratorních cvičení. Rozvoj výpočetní techniky také u mnohých učitelů vede ke snahám nahrazovat reálné experimenty počítačovými animacemi a aplety. Tyto snahy určitě mohou vést k lepšímu pochopení probíraného učiva, avšak není nad reálně provedené experimenty, byť prováděné jednoduchými prostředky (anebo i méně četně – bohužel). Nic proti občasnému zapojení počítače do realizace experimentu. Doporučuji však takovou modernizaci provádět jen občas, ukázkově, aby mládež viděla, jaké jsou současné trendy experimentální činnosti ve výzkumu a jakých prostředků se užívá ve vědě i v průmyslu. K pochopení jevů přispěje především jednoduchý experiment bez moderních digitálních automatizačních prostředků. Na druhé straně, oproti stavu před třiceti a více lety, nám současný stav rozvoje technických prostředků dává více možností k realizaci experimentální činnosti ve škole.

Současné možnosti experimentování

Bez ohledu na omezené časové možnosti výuky v současné škole, je žádoucí experimenty využívat – už pro zvýšení motivace žáků a studentů. Experimentování v širším slova smyslu lze shrnout do těchto bodů [4]:

- a) *Reálné demonstrační experimenty*
- b) *Experimenty s jednoduchými prostředky*
- c) *Počítačové animace reálných experimentů*
- d) *Vzdálené experimenty*
- e) *Fyzikální měření ve školní laboratoři*
- f) *Experimentální úloha ve fyzikální soutěži*
- g) *Veřejné motivační prezentace fyziky*

a) Reálné demonstrační experimenty

Experimenty prováděných s reálnými pomůckami a měřicími přístroji jsou nenahraditelnou součástí výuky fyziky. Demonstraci zpravidla koná učitel pro celou třídu a je vhodné, když přitom spolupracuje některý žák/student. Někdy je dobré zapojit i všechny žáky, kteří si experiment provedou ve skupinách či dokonce individuálně. Měli bychom dosáhnout toho, aby žák při experimentování probírané jevy a děje pro sebe (nejlépe sám) objevoval. Experiment může být (vedle běžného kvalitativního provedení) i kvantitativní, za použití měření na reálných přístrojích, chceme-li na jeho konci formulovat matematický model děje. U kvantitativního experimentu je přehledné zapojení digitální techniky a počítače samozřejmě vhodné (je však nutné počítat s náročnější přípravou). Kvantitativní experiment je vhodné udělat alespoň jedenkrát za školní půlrok či semestr. Podobně jako ve fyzikální vědě, tak i pro výuku dělíme demonstrační experimenty na heuristické (objevné), kdy demonstrujeme nový jev, na němž budujeme výklad teorie, a experimenty verifikační (ověřovací), kdy již ověřujeme zákonitost, k níž jsme předtím dospěli odvozením z teorie. Nezbytnou součástí pokusu je jeho jasný fyzikální výklad. Příklad experimentování na katedře fyziky Přírodovědecké fakulty UHK je na obr. 11.

b) Experimenty s jednoduchými prostředky

Kvalitativní experimenty lze úspěšně provést i s jednoduchými prostředky. Je to nenáročné na potřebné vybavení a může se uplatňovat jak ve třídě, tak v domácích podmínkách žáků či studentů. I když jde o zdánlivě primitivní experimentování, je jednou z jeho velkých výhod, že průběh dějů je hned zřetelný (zde je však výběr demonstrovaných jevů a dějů zřejmě omezený). Tato činnost také přispívá k rozvoji fyzikálního tvůrčího

myšlení a je motivační (už tím, že si žák pomůcku sám připraví a experiment sám provede). Tento druh experimentování rozvíjí zejména „Veletřh nápadů pro fyzikální vzdělávání“ (viz souhrnně [5] a některé příklady [6] a [7]). Je nutné klást důraz na princip demonstrovaného jevu či děje.



Obr. 11 Doc. RNDr. Josef Hubená, CSc. demonstruje šíření elektromagnetických vln na Lecherově vedení vlastní konstrukce (foto B. Vybíral, 2012)

c) Počítačové animace reálných experimentů

Velmi dobrou možností k prohloubení znalostí o jevech a dějích poskytují fyzikální prezentace ve formě *apletů*, které internet bezplatně poskytuje. Aplety jsou vizualizace vytvořené v jazyce *java*, které schematicky znázorňují průběh dějů či stavů látek a různých soustav. Soubor apletů (v angličtině) je např. dostupný z <http://lectureonline.cl.msu.edu/~mmp/applist/applets.htm>. Další adresy příkladů apletů jsou uvedeny v [5].

Význam těchto fyzikálních apletů je v tom, že středoškolákovi (i talentovanému žákovi základní) umožňuje (zejména mimo výuku) snadno a přesně prezentovat různé fyzikální jevy, stavy a provádět výpočty situací, včetně nastavitelné změny počátečních podmínek jevů a dějů. Těmito aplety a animacemi sice reálný pokus nahradit nelze, avšak na druhé straně lze znázornit i děje, které by se reálně demonstrovaly velmi obtížně. To přispívá ke snadnějšímu a dokonalejšímu (a pro mládež také k hravému, přitažlivému) chápání a osvojování fyziky. Aplety jsou de facto jakési *pseudo-experimenty*. V souvislosti se zvětšující se časovou tísní ve výuce fyziky se projevují na některých školách tendence pomocí apletů zcela nahradit reálné experimenty. Tyto tendence je třeba z principu odmítnout. Reálným experimentům, jako základním kamenům fyziky, je třeba se věnovat vždy, i když v současnosti časově omezeně. Žák/student by rozhodně měl vidět

určitou základní sestavu reálných experimentů – bez ohledu na časovou tíseň v hodinách fyziky. Nicméně aplety mohou být vhodným doplňkem, na který je třeba ve výuce upozornit, předvést jejich možnosti a doporučit je využívat zejména při samostatném studiu.

d) Měření ve školní fyzikální laboratoři

Laboratorní cvičení je velmi důležitou experimentální součástí výuky fyziky, při níž se mládež užitím různých metod, pomůcek a měřidel učí měřit veličiny a kvantitativně sledovat jejich změny a prakticky tak ověřovat teoreticky probírané jevy. Tato forma výuky také významně přispívá k rozvoji jemné motoriky žáka/studenta, která je dnes díky hrám na PC a internetu u mnohých málo vyvinutá. Současná časová tíseň ve výuce a někdy také obavy z možných škod, zaviněných malou experimentální dovedností žáků/studentů, často ovšem vedou k velkému omezení této složky výuky fyziky. Někdy se to řeší dosti formálním přístupem k práci ve školní laboratoři: Učitel sestavu úloh již dopředu připraví na panelech, žák nemusí o měření mnoho přemýšlet, snadno měření provede (zpravidla ovšem jen formálně) a počítač je eventuálně hned vyhodnotí a případně i nakreslí grafy. Navenek vše může vyhlížet efektně, avšak podstata fyzikálního jevu/děje přitom značně uniká. Didakticky je velmi přínosné, když si žák např. úlohu z elektřiny sám sestaví podle schématu (anebo lépe podle své úvahy), propojí přístroje a po kontrole učitelem zapojí zdroj, provede vlastní experiment a запиše výsledky. Pak provede výpočet pomocí kalkulačky, nakreslí si podle pravidel grafy závislostí veličin, vyhodnotí měření a jeho přesnost. Na druhé straně je však velmi vhodné, aby učitel některou z úloh rovněž komplexně moderně postavil, propojil přístroje s počítačem a připravil ji ke zpracování měření, včetně určení chyb a kreslení grafů – tím poukáže na současnou praxi v profesionální laboratoři.

e) Vzdálené experimenty

Internet poskytuje zajímavé možnosti i při provádění experimentů. Skupina doc. RNDr. FRANTIŠKA LUSTIGA, CSc. z Matematicko-fyzikální fakulty UK v Praze vyvinula zajímavé experimentování na dálku, nazvané „ISES WEB Control“, viz [8] a [9]. Zájemce se může pomocí internetu připojit na vzdálenou reálnou laboratoř a na dálku v ní spustit a po omezenou dobu (5 minut) ovládat zde již připravený reálný experiment. Problém experimentování ve fyzice se touto metodou ovšem řeší jen částečně. Přispívá k výuce zejména motivačně. Na druhé straně je třeba znovu podtrhnout, že není nad reálný „kontaktní“ provedený experiment (buď učitelem v posluchárně anebo studentem v laboratoři).

f) Experimentální úloha ve fyzikální soutěži

Soutěžení je přirozenou vlastností dětí a mládeže a lze ji účelně využít k efektivnímu individuálnímu rozvoji talentů ve fyzice a v dalších přírodovědných oborech. Fyzikální olympiáda, jak na národní úrovni (FO – viz <http://fyzikalniolympiada.cz>), tak zejména Mezinárodní fyzikální olympiáda (IPhO – viz www.jyu.fi/ipho), je příkladem toho, jak pěkné tvůrčí a problémové experimentální úlohy lze vymyslet (např. [4] a všechna čísla Československého časopisu pro fyziku od ročníku 2011 dosud). Snahou přitom je zařadit do soutěže experimenty, které by také odpovídaly současnému (anebo nedávno minulému) dění ve fyzice, byly dostatečně tvůrčí, náročné pro vyspělé řešitele a nevyžadovaly složité přístroje. To jsou vcelku protichůdné požadavky. Problém spočívá v tom, že současné vědecké fyzikální experimenty se často realizují na velkých složitých zařízeních řízených počítači, zpracovávajících výsledky měření. To v podmínkách FO není obsahově, organizačně a zejména ekonomicky možné. Proto se hledají vtipné, fyzikálně-výzkumné experimentální problémy, se kterými si řešitel musí umět v omezených časových podmínkách poradit, přičemž má jen určité omezené pomůcky a nemůže studovat pomocnou literaturu.

Rovněž v české Fyzikální olympiádě se zařazují vtipné a přiměřeně náročné experimentální úlohy (obr. 12). Např. na celostátním kole kategorie A 51. roč. FO v Pelhřimově roku 2010 byla zařazena zajímavá úloha, nenáročná na vybavení: „Studium kmitů vodorovné tyče, zavěšené na dvou rovnoběžných vláknech.“ Studenti analyzovali tři druhy kmitů: a) torzní kmity kolem svislé osy, b) podélné kmity v rovině určené tyčí a závěsy, c) příčné kmity kolmé k rovině určené tyčí a závěsy. Vyhodnocovali různé veličiny, charakterizující kmitající soustavu. Vtipné a z hlediska pomůcek jednoduché byly i experimentální úlohy na celostátních kolech kat. A v dalších ročnících: 52. v Olomouci (2011) a 53. v Pardubicích (2012), 54. v Brně (2013) a 55. v Holešově (2014). Např. v Olomouci byla zařazena úloha „Černá rezistorová skříňka“. Bylo uvedeno, že obsahuje šest různých rezistorů, přičemž jedna trojice byla spojena do hvězdy a připojena ke třem zdírkám na skříňce a druhá trojice byla spojena do trojúhelníku a připojena k dalším třem zdírkám. Řešitelé odvozovali potřebné teoretické vztahy a z naměřených odporů mezi zdírkami určovali hodnoty odporů jednotlivých rezistorů, včetně měřicích chyb. Experimentální úloha v Pardubicích se zabývala měřením hustoty a určováním hmotnosti složek vodního roztoku na základě využití Archimédova zákona. V Holešově na 55. FO (2014) čekala řešitele analýza odporů v rezistorovém čtyřřetězu vy-

užitím Wheatstonova můstku. Experimentování ve Fyzikální olympiádě má dlouholetou tradici, o čemž např. svědčí již 3. FO v Brně, kde řešitelé určovali hodnoty prvků oscilačního obvodu na základě analýzy rezonance. Záběry z některých celostátních kol FO (obr. 12).



Obr. 12 Řešení experimentální úlohy na celostátním kole FO v Brně a v Holešově (nahore), Pelhřimově (uprostřed), v Olomouci a v Pardubicích (dole) (foto B. Vybíral)

g) Veřejné motivační prezentace fyziky

Veřejné fyzikální experimentální prezentace se prováděly již v dávne minulosti. Experimentování se statickou elektřinou např. předváděl český fyzik PROKOP DIVIŠ (1698–1765) císařskému dvoru ve Vídni. Uvádí se také, že dánský fyzik HANS CHRISTIAN ØRSTED (1777–1851) při jednom veřejném experimentování z elektřiny a magnetismu v polovině roku 1820 zcela náhodou objevil magnetické účinky elektrického proudu (prý díky pracovnímu nepořádku na pracovním stole).

Ke zvýšení zájmu o fyziku jsou veřejné fyzikální produkce aktuální stále. Mohou být konány např. v rámci univerzit anebo i pro širší veřejnost. Jednoho takového velmi pěkného experimentálního show v roce 1995 jsem byl svědkem u příležitosti 26. Mezinárodní fyzikální olympiády v Austrálii na University of Canberra. Prof. MALCOLM LONGAIR z University of Cambridge z Velké Británie zde připravil pro účastníky této světové soutěže devadesátiminutovou produkci, na níž názorně vysvětlil a pomocí dostatečně rozměrných reálných přístrojů předvedl měření základních fy-

zikálních konstant e , e/m_e , h , G , c s přesností na dvě až tři platné cifry. Poté uspořádal turné se stejným programem po všech australských univerzitách. K českým pilným experimentátorům patří např. prof. Mgr. TOMÁŠ TYC, Ph.D. z Masarykovy univerzity v Brně, který koná motivační fyzikální show „Zábavná fyzika“ – i v Hradci Králové (2. 11. 2011). Zahájení každého celostátního kola české Fyzikální olympiády doprovází experimentální show zajímavých fyzikálních pokusů.

Ke zvyšování tvůrčí aktivity, motivace a povzbuzení velmi žádoucího zájmu dětí a mládeže o fyziku a techniku přispívají i různé rozsáhlejší aktivity pro širší veřejnost, kdy „fyzika jde do ulic“. Zahrnuje rovněž atraktivní fyzikální experimentování. Na naší Univerzitě Hradec Králové tuto aktivitu, nazvanou „Hrajme si i hlavou“, od roku 2008 každoročně ve dvou až třech dnech na konci června organizují PhDr. JANA ČESÁKOVÁ, Ph.D. a RNDr. MICHAELA KŘÍŽOVÁ, Ph.D. (viz [10]). O úspěchu této mimořádně prospěšné aktivity svědčí i masová účast dva až dva a půl tisíce zájemců, zejména z řad dětí a mládeže ze základních a středních škol (i mateřských škol) z Hradce Králové a širokého okolí (viz rovněž webové stránky akce <http://www.hrajme-si-i-hlavou.cz>).

Literatura

- [1] Kroupová, B., Vybíral, B.: Přírodopyt jako vyučovací předmět mezi lety 1869 a 1939. MFI 23 (2014), s. 187.
- [2] Čeněk Strouhal: <http://www.academia.cz/img/knihy/obalky1/lrg/profesor-cenek-strouhal.jpg>.
- [3] František Nachtikal: <http://encyklopedie.brna.cz/data/images/0288/thumbs/img14422.jpg>.
- [4] Vybíral, B.: O vztahu experimentu a teorie ve výuce fyziky. Čs. čas. fyz., roč. 62, č. 5-6 (2012), s. 371.
- [5] Veletrh nápadů pro fyzikální vzdělávání. Dostupné na: <http://kdf.mff.cuni.cz/veletrh/sbornik/index.html>.
- [6] Drozd, Z., Brockmeyerová, J.: Fyzika z volné ruky. Dostupné na: http://kdf.mff.cuni.cz/veletrh/sbornik/Veletrh_12/12.22_Drozd.html.
- [7] Dvořák, L.: Fyzika s Veselou krávou – aneb pokusy s opravdu jednoduchými pomůckami. Dostupné na: http://kdf.mff.cuni.cz/veletrh/sbornik/Veletrh_10/10.29_Dvorak.html.
- [8] Lustig, F.: Softwarová stavebnice „ISES WEB Control“ pro jednoduchou tvorbu vzdálených experimentů. Dostupné na: <http://www.ises.info/old-site/Lustig ICTE.c.html>.
- [9] Lustig, F.: Jak si jednoduše postavit vzdálenou laboratoř na internetu. Dostupné na: http://kdf.mff.cuni.cz/veletrh/sbornik/Veletrh_09/09.19_Lustig.html.
- [10] Česáková, J., Křížová, M.: Hrajeme si i hlavou. MFI 23 (2014), č. 3, s. 212.

O tvorivom hľadaní hmotnosti (ne)obyčajnej plastovej guľôčky

LUKÁŠ BARTOŠOVIČ – KLÁRA VELMOVSKÁ

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Bratislava, Slovensko

Pojem tvorivosť sa v spojitosti s vyučovaním fyziky na Slovensku vo veľkej miere spája s menami *J. Pišút, I. Volf, M. Jurčová, J. Dohňanská* a s ich publikáciami, ktoré vznikali na konci minulého storočia. Ani dnes sa však na tento pojem nezabúda. Podľa Štátneho vzdelávacieho programu sa vyžaduje pri vyučovaní fyziky na základnej škole a gymnáziu u žiaka rozvoj kompetencií v oblasti tvorivého myslenia a aby bol žiak schopný tvorivo uplatniť výsledky poznávacej zložky vyučovania [1], [2]. „Tvorivé uplatnenie vedomostí žiaka sa v úlohách môže vyskytnúť tak v rovine riešenia problému ako aj v návrhu postupu riešenia.“ [3, s. 48]

V bežnom ponímaní sa pojem tvorivosť používa v širších súvislostiach. Tvorivým sa pomenúva i človek, ktorý vytvára materiálne hodnoty s absenciou skutočne tvorivého procesu. „Dôležité je uvedomiť si, že byť tvorivým neznamená byť iba schopným nachádzať nové riešenia alebo nápady. Tvorivosť vyžaduje okrem tejto schopnosti aj ďalšie vlastnosti – osobnostné, motivačné, postojoyé, atď. Bez vôle, nadšenia, záujmu a vytrvalosti nemožno produkovať nové myšlienky, podnety, objavy, ani dosahovať inovácie či zlepšenia.“ [4, s. 12]

Tvorivosť ako proces

Fázy tvorivého procesu opísal *Wallace* v roku 1926 na základe introspektívnych výpovedí (opisu prežívania vlastného procesu tvorby) významných prírodovedcov (pozri [5, s. 24], [6, s. 68]).

1. **príprava** (preparácia) – je to fáza oboznamovania sa s problémom, alebo s istým duševným podnetom, jeho vymedzenia a jednoznačného definovania – uvedomenie si problému a hľadanie prostriedkov na jeho vyriešenie. Ide o vedomú prácu na úlohe. Existujú jasné dôkazy o tom, že dokonca najtalentovanejší skladatelia a maliari (napr. Mozart a van Gogh) sa dlho pripravovali na prácu, v ktorej sa preslá-

vili. *Szobiová* [5, s. 25] dokonca uvádza, že z vyše 500 prác hudobných skladateľov boli len 3 skomponované pred 10. rokom skladateľovej hudobnej kariéry (v 8. a 9. roku).

2. **inkubácia** – tlenie, v tejto fáze je mozog zdanlivo v pokoji, ale v skutočnosti sa v podvedomí skúmajú všetky možnosti – je v nej neuvedomené dosiahnutý pokrok a vynára sa možné riešenie. Dôležitou pomôckou v tejto fáze je trpezlivosť.
3. **iluminácia** – osvetlenie, heuristický moment, mozog vyprodukuje myšlienku, ktorá môže zásadne vyriešiť problém, alebo aspoň vysvetliť, ako treba v ďalšom rozmyšľaní pokračovať. Často sa metaforicky označuje ako „rozsvietenie žiarovky“. Niekedy toto vysvetlenie prichádza náhle, napr. keď človeku uprostred noci napadne myšlienka, na ktorú čakal celé týždne. Vyznačuje sa uvoľnením stavu napätia riešiteľa a považuje sa za vrchol kreatívneho procesu.
4. **verifikácia** – kritické preskúmanie, zhodnotenie nápadu, riešenia, výsledku, pričom dôkaz o správne vyriešenom probléme je silným motivačným činiteľom na ďalšiu činnosť. Ak sa nápad ukáže nerealizovateľným, tak sa tvorca bude vracáť do inkubačnej alebo až do prípravnej fázy.

Pôvodne vymedzené 4 základné štádiá procesu tvorby možno rozdeliť pri riešení problémov na detailnejšie kroky, prvky. Ich vymedzenie je podkladom pre rôzne metodické postupy, techniky optimálneho spôsobu práce pri riešení problémov, pre tvorbu programov, na rozvíjanie schopností alebo stratégií riešenia problémov.

Z postupov, ktoré uvádzajú *Clark* [7], *Taylor* [8] a i., sú v [9, s. 21] ako základné zhrnuté tieto:

- I. pozorovanie prostredia, zaujímanie kritického postoja k nemu a identifikovanie problémov (orientačno-hľadacia fáza);
- II. definovanie, výber problému, uvedomenie si ťažkostí, prekážok, čo je známe, čo treba zistiť a zároveň, čo možno od riešenia očakávať, aký by mal byť konečný výsledok, vyvíjanie kritérií na prijatie alebo zamietnutie riešenia;
- III. získavanie, hľadanie faktov, práca s vedomosťami, ich získavanie, organizovanie – štúdium literatúry, vyšetrovanie, rozhovory, experimentovanie, triedenie faktov, záznamy spracovania;
- IV. zhrňanie, relaxovanie, odpútanie sa od riešeného problému, neuvedomená práca na ňom;

- V. hľadanie, tvorba nápadov, hypotéz, tvorba alternatívnych riešení;
- VI. výber najlepšieho riešenia, optimálneho variantu na základe kritického zhodnotenia, objektívneho preskúmania alebo vypracovania nápadov;
- VII. realizácia, akceptovanie, prijatie riešenia – jeho prenos do činnosti, fungovania, praxe, do reality;
- VIII. zhodnotenie, kontrola, porovnanie výstupu s postavenými cieľmi. Na ich základe zlepšenie, dotiahnutie riešenia alebo návrat do počiatočných fáz (ak sa nedosiahla očakávaná zhoda s cieľom alebo dôležitými kritériami).

Tvorivý prístup k určeniu hmotnosti guľôčky

Sledujúc vyššie uvedené fázy tvorivého procesu si môžeme všimnúť, že pokiaľ žiaci realizujú experimenty v školskom laboratóriu a ich činnosť je zmysluplná, postupujú podľa vyššie uvedených krokov a pri vhodne zvolenom experimentálnom probléme môžeme dosiahnuť rozvoj ich tvorivosti. Ako vhodne naformulovať tvorivý experimentálny problém? Podľa *Jurčovej* [6, s. 21] je určujúcim znakom tvorivosti a tvorivého produktu novosť. Táto má vo fyzike rôzne formy – môže byť obsiahnutá v nápade, myšlienke, či keď sa novým pohľadom pozrieme na známy jav. Novosť sa skrýva aj v postupoch riešenia, ak vymyslíme novú metódu, použijeme nový princíp alebo vymyslíme experiment. Vieme ju nájsť i v podrobnostiach experimentu, v originálnom pohľade na jeho výsledky a tiež v novej praktickej aplikácii fyzikálnych poznatkov.

Vráťme sa k problému nastolenému v nadpise – ako tvorivo určiť hmotnosť guľôčky? Upriamujeme pozornosť čitateľov na slovo „určiť“ – guľôčku nebudeme vážiť, inými slovami, jej hmotnosť zistíme nepriamo. Potom môžeme prvotnú formuláciu problému štylizovať nasledovne: „Navrhňte a zrealizujte meranie, vďaka ktorému určíte hmotnosť malej plastovej guľôčky bez toho, že by ste ju vážili alebo použili zariadenie podobné váham.“ Teraz môže nasledovať úvodná diskusia, v ktorej žiakov vyzveme, aby navrhli, ktorú fyzikálnu veličinu by sme mali merať a ako pomocou získaného údaju určíme hmotnosť. Očakávanou a najčastejšou odpoveďou bude zrejme „sila“ – tiažová (meranie hmotnosti pomocou silomeru), vztlaková (žiaci využijú Archimedov zákon) či sila napínajúca lanko, na ktorom je upevnená guľôčka konajúca pohyb po kružnici. Možno si niekto spomenie na hustotu a opäť cez Archimedov zákon určí jej hodnotu pre guľôčku čiastočne ponorenú do kvapaliny so známou hustotou.

Predpokladáme, že asi nikomu nenapadne veličina s názvom „rýchlosť“. A práve na tú zameriame nasledujúce riadky, v ktorých ukážeme, ako môžeme určiť hmotnosť guľôčky pomocou merania jej rýchlosti. Natíska sa otázka, ako naša skúmaná guľôčka získa rýchlosť. Tú jej udelíme prostredníctvom netradičnej fyzikálnej pomôcky – guľôčku rozhybe je hračkárska vzduchová pištoľ. Pištoľ, často nazývaná prívlastkom airsoftová, využíva energiu stlačeného plynu (obyčajne vzduchu) na vystrelenie malej plastovej guľôčky z hlavne. Dosiahnuteľné rýchlosti výstrelu sú pomerne malé a guľôčka je ľahká, z čoho pre dané zariadenie vyplýva relatívne vysoká úroveň bezpečnosti (kinetická energia z intervalu 0,25 až 0,50 joule). Airsoftovými pištoľami sa po technickej aj metodologickej stránke bližšie zaoberáme v našom článku [10]. Čo s rýchlosťou? Meranie je možné realizovať rôznymi spôsobmi – balistické kyvadlo, rotujúce kotúče, zákon zachovania hybnosti (pozri napríklad [11]) a taktiež na elektronickej báze. Takýto spôsob sme využili aj my pri návrhu opisovaného merania. Z elektronických metód merania rýchlosti sa najčastejšie využíva prístroj chronometer, dvojica optických brán a taktiež digitálny fotoaparát [12]. Všetky pracujú na rovnakom princípe – meriame pri nich časový rozdiel medzi dvoma polohami letiacej guľôčky. V prípade chronometra je vzdialenosť polôh guľôčky určená konštrukciou prístroja, pri optických bránach si vzdialenosť definujeme umiestnením optických brán a pri meraní s fotoaparátom sú polohy dané stopou guľôčky na skúmanej snímke videozáznamu. Viac o meraní rýchlosti je možné nájsť v už spomínanom článku [10].

Na laboratórnom cvičení zadáme žiakom úlohu: „Navrhnete a zrealizujete meranie hmotnosti malej plastovej guľôčky, ktorú vystrelíte z hračkárskej pištole. Kľúčovou pomôckou bude pištoľ a guľôčku nesmiete vážiť.“ Od žiakov sa vyžaduje, aby samostatne vymysleli meraciu metódu, kde za pomoci airsoftovej pištole a niekoľkých ďalších pomôcok získajú žiadaný údaj. Keďže po tomto meraní budeme chcieť získať hodnotu hmotnosti overiť (napríklad vážením na presných digitálnych váhach), môžeme tiež od žiakov požadovať, aby metódu merania navrhli tak, že guľôčku nezničia a ani nestratia.

Určenie hmotnosti guľôčky z jej rýchlosti

Možností riešenia problémovej úlohy je niekoľko, my sme prakticky odskúšali nasledovné:

1. Na obale (alebo v návode) airsoftovej pištole sa spravidla nachádza údaj o kinetickej energii, ktorou pištoľ dokáže vystreľovať guľôčky na-

bité do zásobníka. Pokiaľ pomocou zariadenia na meranie rýchlosti určíme rýchlosť guľôčky opúšťajúcej hlavň pištole, ostáva už len využiť vzťah pre kinetickú energiu, z ktorého dostaneme hľadanú hodnotu hmotnosti.

2. K pištoľi sú veľmi často pribalené aj guľôčky, ktoré umožňujú odskúšať hračku bez toho, že by sme museli kupovať samostatné balenie „streliva“. Tieto testovacie guľôčky majú v drvivej väčšine prípadov hmotnosť 0,12 gramu a tiež platí, že je spolu s ďalšími parametrami uvedená na balení. Meranie uskutočníme v dvoch krokoch – v prvom do pištole nabijeme testovaciu guľôčku. Z jej hmotnosti a rýchlosti určíme kinetickú energiu, ktorú dokáže pištoľ udeliť ľubovoľnej guľôčke. Druhý krok je už samotné meranie hmotnosti skúmanej guľôčky, ktoré realizujeme ako v predchádzajúcom bode.

3. Nepoznáme hmotnosť skúmanej guľôčky a nemáme ani žiadnu referenčnú. Využijeme vedomosť o vplyve parametrov guľôčky na odporovú silu, ktorá brzdí jej let. Odporovú silu merať nevieme, vieme však merať rýchlosť guľôčky v rôznych bodoch jej trajektórie. Meranie pozostáva z dvoch fáz – v prvej, reálnej, vystrelíme guľôčku z pištole a zistíme jej rýchlosť tesne po opustení hlavne a napríklad 3 metre od bodu výstrelu. Druhá fáza, virtuálna, je založená na práci s apletom [13, s. 15]. Aplet sme si vybrali preto, že umožňuje poľahky skúmať modelový jav v rôznych situáciách – s rôznymi kombináciami hodnôt parametrov ovplyvňujúcich správanie objektu, na ktorom jav pozorujeme [14, s. 37]. Na internete je možné nájsť niekoľko vhodných apletov, napríklad na stránke jedného z autorov <http://goo.gl/20XCWY>. V našom prípade si v aplete nastavíme vodorovný vrh s rovnakými parametrami ako v reálnej fáze merania. Postupne meníme hmotnosť simulovanej guľôčky a v okamihu, keď sa nám podarí stotožniť virtuálnu a reálnu trajektóriu, máme hľadanú hmotnosť.

Pristavme sa ešte na moment pri meracej aparatúre. Tá je pre všetky možnosti v princípe rovnaká, keďže určujeme rýchlosť pomocou merania časového rozdielu pre dva presne definované meracie body. V prípade chronometra (obr. 1) je vhodné umiestniť ho čím bližšie k oknu alebo rovnomerne osvetlenému miestu.

Hračkársku pištoľ oprieme spodkom zásobníka o stôl a pevne uchopíme. Výstrel sa snažíme uskutočňovať ako vodorovný vrh, inak by dochádzalo k skresleniu výsledkov (prejdená dráha by bola väčšia). Ak budeme merať pomocou optických brán (obr. 2), snažíme sa ich umiestniť čo najďalej od seba (postačuje pol metra).



Obr. 1 Meranie rýchlosti guľôčky pomocou chronometra



Obr. 2 a 3 Meranie rýchlosti guľôčky pomocou optických brán

Pistoľ je nevyhnutné uchytiť čo najstabilnejšie, keďže pri meraní musí guľôčka prerušiť dva veľmi úzke svetelné lúče. Môžeme si však pomôcť tak, že na otvor, z ktorého vychádza lúč umiestnime malý kúsok papiera (obr. 3), ktorý guľôčka zhodí a tým dosiahneme požadovanú zmenu stavu svetelného lúča. Nameraná hodnota rýchlosti však bude o pár percent menšia, časť kinetickej energie guľôčky sa totiž spotrebuje pri náraze na kúsok papiera. V oboch prípadoch za meráciu aparatúru umiestnime „lapač brokov“ (nám sa osvedčila kartónová škatuľa vyplnená pokrčeným novinovým papierom a igelitovou fóliou). Zvýšime tým bezpečnosť merania a tiež zabezpečíme, že sa guľôčky pri meraní nestratia a budeme môcť overiť nami určenú hmotnosť pomocou digitálnych váh.

Od nápadu až po hodnotu hmotnosti

I. pozorovanie – žiak má k dispozícii bežné vybavenie školského fyzikálneho laboratória, hračkársku pistoľ, rozličné plastové guľôčky určené do tejto pistole, zariadenie na meranie rýchlosti a počítač s apletom. Žiak už vie, že hmotnosť nebude môcť určiť pomocou váh a tak uvažuje, ako

„premeniť“ rýchlosť na hmotnosť. Premýšľa, ako vhodne zostaviť meraciu aparátúru. V tejto fáze sa žiak môže oboznámiť s používaním jednotlivých súčastí meracej zostavy – hlavne s hračkárskou pištoľou, chronometrom (alebo optickými bránami) a s apletom.

II. definovanie, výber problému – teraz by sa žiak mal zamerať na to, ako s danými pomôckami určí hmotnosť guľôčky. Uvažuje o rôznych fyzikálnych vzťahoch, kde vystupujú rýchlosť a hmotnosť. Zamýšľa sa nad rôznymi premennými, ktoré vystupujú v meraní a z nich sa snaží určiť tie podstatné (priemer a hmotnosť guľôčky, tvarový koeficient pre guľu, rýchlosť výstrelu, technické parametre pištole). Z týchto pozná všetko, až na hmotnosť guľôčky. Odhaduje výsledok, vie, že guľôčka je vyrobená z nejakého plastu, ktorého hustota sa pohybuje medzi $1\,000\text{--}3\,000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ a uvažujúc priemer 6 mm, guľôčka by mohla vážiť 0,10 až 0,35 gramu.

III. získavanie, hľadanie faktov – po viac-menej teoretickej fáze hľadania hmotnosti sa žiak posúva k príprave na samotné meranie. Už vie, že využije vzťahy ako napríklad

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, \quad p = mv$$

či

$$F_o = \frac{1}{2}CS\rho v^2, \quad p = mv \quad \left(\text{kde uplatní aj } a_o = \frac{F_o}{m} \right).$$

Preštudoval si údaje na obale (alebo v návode) z hračkárskej pištole a pokiaľ medzi nimi našiel kinetickú energiu, už vie, že využije vzťah pre E_k , z ktorého po nameraní rýchlosti poľahky určí hmotnosť. Ak údajom o energii pištole nedisponuje, zamýšľa sa nad tým, ako počítať so vzťahom pre odporovú silu. Tu ho môžeme zľahka usmerniť k využitiu apletu. Žiak vykoná orientačné merania rýchlosti s vybraným/dostupným prístrojom. Vynára sa možné riešenie.

IV. zhrňanie, relaxovanie – tu by do hry mohol aktívnejšie vstúpiť učiteľ, ktorý žiakov na istý čas odpúta od riešenia problému a zatiaľ sa budú zaoberať napríklad fyzikálnym princípom fungovania vzduchovej pištole a taktiež sa môžu bližšie pozrieť na rôzne spôsoby merania rýchlosti letiacej guľôčky. Zamýšľajú sa nad pozitívami aj negatívami diskutovaných metód.

V. hľadanie, tvorba nápadov – v tejto fáze žiak skúma navrhnuté teoretické riešenia, zisťuje, nakoľko praktický či realizovateľný je jeho spôsob merania a identifikuje rôzne problémy, ktoré by mohli spôsobiť zavrhnutie

zvolenej meracej metódy. Pokiaľ má žiak k dispozícii chronometer, optické brány a tiež digitálny fotoaparát, v tomto kroku sa najskôr prikloní k meraniu s chronometrom (je veľmi rýchle a určenie rýchlosti je priame).

VI. výber najlepšieho riešenia – žiak sa po zvážení všetkých faktorov a po vykonaní počiatočných meraní rozhodne, ktorá z preskúmaných možností ho privedie k žiadanému výsledku. Pokiaľ má k dispozícii údaj o kinetickej energii pištole, meranie s referenčnou guľôčkou či apletom jednoznačne zaradí medzi záložné riešenia. Zrejme dôjde aj k vysloveniu názoru, že dané meranie je vhodné zopakovať pre rôzne guľôčky, aby sme zistili, či je stanovený postup všeobecný, alebo je použiteľný len na jednu konkrétnu hmotnosť (či obmedzený rozsah hmotností). Napríklad pre metódu referenčnej guľôčky dospeje kritickou úvahou k zisteniu, že sa nehodí na odlišenie guľôčok s málo odlišnými hmotnosťami (0,23 g a 0,25 g). Alebo ak by sa dal cestou videomerania, pri výkonnejšej pištoli príde na to, že pre ľahkú guľôčku je rýchlosť značne vysoká, čo pri zázname jej pohybu spôsobí problémy pri určení dĺžky stopy – môže byť dlhšia, než je šírka záberu fotoaparátu.

VII. realizácia, akceptovanie, prijatie riešenia – pri testovaní opísanej tvorivej úlohy sme sa na chvíľu vžili do úlohy žiaka a vybrali si možnosť merania s apletom (na základe vplyvu hmotnosti guľôčky na odpor prostredia). Meranie rýchlosti uskutočnime pomocou chronometra. Využijeme airsoftovú pištoľ Smith & Wesson SIGMA 40F, ktorá sa pri ideálnych podmienkach pohybuje vo výkonnostnom spektre 1 až 1,3 joule. V laboratóriu bola teplota 20 °C a pre každú guľôčku sme vykonali 10 výstrelov – postupne 5 dvojíc „výstrel tesne pri chronometri – výstrel 3 m od chronometra“, medzi ktorými sme ponechali pauzu asi pol minúty (aby sa ustálil tlak plynu v zásobníku). Získané údaje sme následne spriemerovali. V tabuľke (tab. 1) uvádzame namerané hodnoty pre 4 rôzne neznáme guľôčky. Poznámka na okraj: hmotnosti 6 mm airsoftových guľôčok sú štandardizované a tvoria nasledovný číselný rad – 0,12 g, 0,15 g, 0,20 g, 0,25 g, 0,30 g, 0,35 g, 0,40 g (s tým, že ojedinele sa vyskytujú aj hmotnosti ako napríklad 0,23 g či 0,28 g).

	guľôčka 1	guľôčka 2	guľôčka 3	guľôčka 4
v_0 m (m/s)	92,3	107,0	100,7	129,1
v_3 m (m/s)	86,1	95,5	92,0	107,0

Tab. 1 Veľkosti rýchlosti pre rôzne guľôčky v dvoch bodoch trajektórie

Z reálnej fázy merania sa presúvame na virtuálnu – použijeme aplet, ktorý umožňuje modelovať vodorovný vrh guľôčky s určitým priemerom a hmotnosťou pri započítaní odporu prostredia. Vyberme si napríklad guľôčku č. 3 – v aplete nastavíme $x_0 = 0$ m (počiatočná x -ová súradnica), $y_0 = 2$ m (počiatočná y -ová súradnica), $v_0 = 100,7$ m/s (počiatočná rýchlosť), $\alpha = 0^\circ$ (elevačný uhol), $C = 0,50$ (koeficient odporu prostredia pre guľu), $d = 6$ mm (priemer guľôčky) a $\rho = 1,2$ kg·m⁻³ (hustota vzduchu pri teplote 20 °C). Ostáva už len hmotnosť, vyskúšame 0,20 gramu. Spustíme aplet a pozrieme sa, akou rýchlosťou letela guľôčka vo vzdialenosti 3 metre od bodu výstrelu. Pre vyššie uvedené parametre by sme dostali hodnotu približne 89 m/s. Vyskúšajme ešte 0,15 gramu a 0,25 gramu – tu dostávame pre ľahšiu guľôčku 85 m/s a pre ťažšiu 91 m/s. Z troch hodnôt je najbližšie k nameranému apletom určená hodnota rýchlosti pre 0,25 gramovú guľôčku. Výsledkom nášho merania je – skúmaná airsoftová guľôčka má hmotnosť 0,25 gramu. Podobne by sme mohli preskúmať let zvyšných troch guľôčok a dostali by sme: 0,30 gramu (prvá), 0,20 gramu (druhá) a 0,12 gramu (štvrtá).

VIII. zhodnotenie a kontrola – na záver riešenia problémovej úlohy nám ostáva už len konfrontovať namerané hodnoty s realitou. Tu môžeme využiť buď presné laboratórne digitálne váhy, prípadne ak nám bola hodnota hmotnosti guľôčky známa (býva napísaná na balení), porovnáme získané výsledky s ňou. V našom prípade výsledky súhlasia s realitou, aj keď by sa dalo polemizovať o miere idealizácie zakomponovanej v použitom aplete či o presnosti merania rýchlosti chronometrom. Pre ďalšie využitie testovanej metódy by bolo vhodné aplet „kalibrovať“, keďže súčiniteľ odporu prostredia nemusí byť pre každú guľôčku rovný 0,50. Výsledky taktiež ovplyvňuje použitá airsoftová pištoľ, pri meraní sme mlčky predpokladali, že pre danú hmotnosť guľôčky je rýchlosť výstrelu konštantná (čo nie je tak celkom pravda, pozri [10]).

V článku sme sa zaoberali experimentálnou tvorivou problémovou úlohou s vopred určenými pomôckami, pri riešení ktorej žiaci najprv navrhnu a neskôr aj zrealizujú meranie hmotnosti malej plastovej guľôčky. Pri meraní využívajú prístroj na určovanie rýchlosti letiaceho projektilu a hračkársku vzduchovú pištoľ. Opísali sme niekoľko možností takéhoto merania, priblížili sme tiež vybrané spôsoby určovania rýchlosti letiacej guľôčky. Zamysleli sme sa nad fyzikálnymi princípmi, na ktorých sú založené jednotlivé fázy zisťovania hmotnosti. Zhodnotili sme klady a zápory vybraných postupov, ktoré umožňujú pomerne presne získať hodnotu hmotnosti drob-

ného telesa bez použitia laboratórnych digitálnych váh. Úloha umožňuje rozvíjať tvorivosť žiakov na rôznych stupňoch – nielen v rovine návrhu, ale aj na úrovni realizácie i pri zhodnotení využitých metód a získaných výsledkov dosiahneme fázu verifikácie. Skúsenosť s takýmto meraním môže byť pre niektorých zo žiakov užitočná aj v praxi. Pokiaľ sa venujú voľnočasovej aktivite s názvom „airsoft“, znalosť fyzikálnych princípov fungovania vzduchovej zbrane ocenia pri rozhodovaní sa pred kúpou a aj pri riešení nejednej poruchy.

Podakovanie

Príspevok vznikol s podporou projektu KEGA 130UK-4/2013 *Podpora kvality vyučovania tvorbou materiálov prepojených na učebnice fyziky*.

Literatura

- [1] ŠPÚ (Štátny pedagogický ústav): Štátny vzdelávací program – fyzika. Príloha ISCED 2. [online]. Bratislava, 2009 [cit. 25-02-2015]. Dostupné na <http://goo.gl/03Avn>.
- [2] ŠPÚ (Štátny pedagogický ústav): Štátny vzdelávací program – fyzika. Príloha ISCED 3A. [online]. Bratislava, 2009 [cit. 25-02-2015]. Dostupné na <http://goo.gl/Z1SpIR>.
- [3] Lepitková, V. et al.: Hodnotenie žiackych výkonov v reformovaných prírodovedných programoch základnej školy. Vydavateľstvo Michala Vaška, Prešov, 2011.
- [4] Velmovská, K.: Rozvíjanie tvorivosti študentov gymnázií pomocou úloh. Dizertačná práca. FMFI UK, Bratislava, 2001.
- [5] Szobiová, E.: Tvorivosť, od záhady k poznaniu. STIMUL, Bratislava, 1999.
- [6] Jurčová, M., Dohňanská, J., Pišút, J., Velmovská, K.: Didaktika fyziky – Rozvíjanie tvorivosti žiakov a študentov. UK, Bratislava, 2001.
- [7] Clark, J. W.: General Systems Perspective. Journal of Creative Behaviour, roč. 11 (1977), č. 1, s. 36–46.
- [8] Taylor, I. A.: A Transactional Approach to Creativity and its implications for Education. Journal of Creative behaviour, roč. 5, č. 3 (1971), s. 190–198.
- [9] Zelina, M.: Stratégie a metódy rozvoja osobnosti dieťaťa. IRIS, Bratislava, 1996.
- [10] Bartošovič, L.: Analýza možností tvorivého využitia airsoftovej pištole na hodinách fyziky. In: Tvorivý učiteľ fyziky VII. Bratislava: Slovenská fyzikálna spoločnosť, 2014. [v tlači].
- [11] Jílek, M.: Rychlost výstřelu diabolky [online]. Praha, 2006 [cit. 25-02-2015]. Dostupné na: <http://goo.gl/k2NIDS>.
- [12] Horváth, P., Šedivý, M.: Analýza mechanického pohybu videomerním. In: Aktivity vo vyučovaní fyziky. Knižničné a edičné centrum FMFI UK, Bratislava, 2006, s. 69–77.
- [13] Bartošovič, L.: Šikmý vrh na 5 spôsobov. In: Šoltésove dni 2012 a 2013. Knižničné a edičné centrum FMFI UK, Bratislava, 2013, s. 9–17.
- [14] Demkanin, P., Holá, K., Koubek, V.: Počítačom podporované prírodovedné laboratórium. Knižničné a edičné centrum FMFI UK, Bratislava, 2006.

Modelování kuželoseček v dynamickém prostředí

LIBUŠE SAMKOVÁ

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice



V jednom z minulých čísel našeho časopisu jsme vás seznámili s Heronovou úlohou a s jejím využitím při modelování kuželoseček [1]. Zjistili jsme, jak vytvořit elipsu, hyperbolu a parabolu pouhým překládáním papíru:

Jestliže na pauzovací papír narýsujeme kružnici $k = k(B, s)$ a bod A v její vnitřní oblasti, vytváříme přímky obalující elipsu $\{X; |AX| + |XB| = s\}$ jako přehyby, jež přemísťují body kružnice k na bod A . Pokud bod A umístíme do vnější oblasti kružnice k , dostaneme analogicky přímky obalující hyperbolu $\{X; ||AX| - |XB|| = s\}$. Postup pro modelování paraboly se na první pohled liší od dvou předchozích: když si na papír narýsujeme přímku q a bod A , který na ní neleží, přímky obalující parabolu $\{X; |AX| = |qX|\}$ získáme jako přehyby, jež na bod A přemísťují body přímky q .

V článku [1] jsme naznačili, že případ paraboly je limitním případem jak hyperboly, tak elipsy. Ale příslušný limitní přechod není možné znázornit na překládaném papíře. V tomto příspěvku se zaměříme na možnosti dynamických geometrických prostředí při vizualizaci výše uvedeného limitního přechodu. Dynamické geometrické prostředí je takové prostředí, ve kterém s geometrickými objekty zde sestrojenými můžeme libovolně manipulovat (měnit jejich polohu, rozměry) a tyto manipulace nemají vliv na zadané

vztahy mezi objekty. Sestrojíme-li například body A , B , úsečku AB a její střed S , tak při změně polohy bodu A nebo bodu B se automaticky změní poloha bodu S tak, aby stále zůstal středem úsečky AB .

Pro naše potřeby využijeme program GeoGebra [2], což je volně dostupný software pro výuku matematiky, který propojuje geometrii, algebru a matematickou analýzu. Program GeoGebra umožňuje tvorbu dynamických pracovních listů ovládaných buď přímou manipulací s geometrickými objekty, nebo pomocí tzv. posuvníků. Více o možnostech využití programu GeoGebra ve výuce matematiky naleznete například v článcích [3].

Nákresna

Před započítím konstrukce si nejprve vyjasníme pojem „nákresna“. V dynamických prostředích pracujeme se dvěma různými typy nákresen: virtuální a fyzickou. Virtuální nákresna je množina všech bodů, se kterými je software schopen algebraicky pracovat. Například program GeoGebra pracuje s body, jejichž největší možné souřadnice jsou $\pm 10^{308}$. Pokud bychom zvolili centimetrové měřítko, měla by tato virtuální nákresna tvar čtverce o straně $2 \cdot 10^{306}$ m. (Pro srovnání: Mléčná dráha má průměr přibližně 10^{21} m, pozorovatelný vesmír $5 \cdot 10^{26}$ m.)

Fyzická nákresna je náhledem na část virtuální nákrasny. Cíl takového náhledu je standardně volen v okolí počátku (cca $\langle -4, 20 \rangle \times \langle -6, 10 \rangle$, záleží na rozlišení obrazovky). Pokud nám vybraná lokalita nevyhovuje, můžeme využít nástrojů *Pohybovat s nákrasnou*, *Zvětšit*, *Zmenšit* a prohlédnout si jiné místo nebo použít jiné měřítko zobrazení. Prohlíženou lokalitu si nemůžeme vybírat úplně libovolně – nástrojem *Zmenšit* se dostaneme nejdále k bodům se souřadnicemi v řádu 10^{17} a s nástrojem *Pohybovat s nákrasnou* se v rozumném čase nedostaneme o mnoho dál (za celý den bychom se přesunuli od 10^{17} k 10^{23}). Oblast, jejíž části můžeme zobrazovat na fyzické nákrasně, je tak pouhým zlomkem z virtuální nákrasny, ale uvědomme si, že v centimetrovém měřítku by se do ní Sluneční soustava vešla více než stokrát. Také detaily náhledu nemohou být libovolně malé – nástroj *Zvětšit* funguje pouze do řádu 10^{-13} , což při centimetrovém měřítku odpovídá průměru atomového jádra vodíku.

Na fyzickou nákrasnu můžeme umisťovat geometrické objekty, posuvníky a texty přímou manipulací s myší. Fyzická nákresna se zkráceně označuje jako nákresna.

Rozměry virtuální nákrasny umožňují vizualizaci limitních přechodů do nekonečna, neboť souřadnice bodů nacházejících se blízko hranice virtuální

nákresny jsou dostatečně velké na to, aby mohly poskytnout relevantní informaci o limitní situaci v nekonečnu. Při zobrazování limitního přechodu nějakého objektu do nekonečna se využívá výhod posuvníku: číslo ovládané posuvníkem se zakomponuje jako parametr do algebraické definice objektu a jeho zvětšováním (či zmenšováním) se objekt přibližuje k hranici virtuální nákresny. Na fyzické nákresně pak můžeme sledovat, jak na takový proces reagují ostatní objekty.

V celém článku budeme předpokládat, že nákresna má centimetrové měřítko (1 dílek = 1 cm).

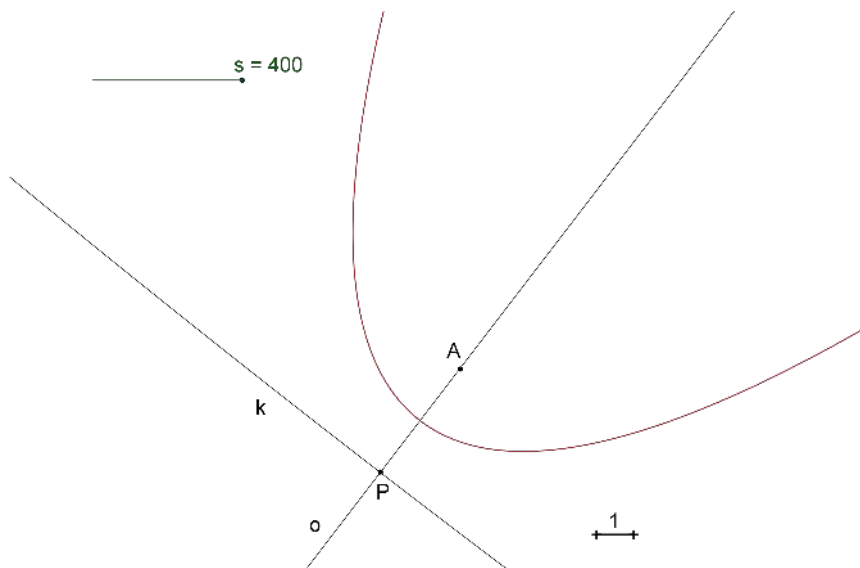
Příprava dynamického prostředí

Z úvodu článku plyne, jak s pomocí řídicí kružnice konstruovat body ležící na elipse či hyperbole: *Základem konstrukce pro elipsu, resp. hyperbolu o ohniscích A, B a délce hlavní osy s je kružnice k se středem B a poloměrem s , bod A' na kružnici k a osa úsečky AA' (tečna kuželosečky, neboli obraz přehybu při modelování skládáním papíru). Průsečík osy úsečky AA' a přímky $A'B$ je bodem elipsy, resp. hyperboly. Typ kuželosečky závisí na vzájemné poloze bodu A a kružnice k : pro bod A umístěný uvnitř kružnice k dostaneme elipsu, pro bod umístěný vně hyperbolu.*

Než začneme konstruovat dynamický obrázek, shrňme si, co tento obrázek musí umět. Budeme zobrazovat limitní přechod ohniska B do nekonečna a také přechod mezi eliptickým a hyperbolickým případem. Limitní přechod zajistíme prostřednictvím posuvníku pro délku hlavní osy s . Ukotvíme-li kružnici $k = k(B, s)$ tak, že na nákresně pevně zvolíme její bod P , pak zvětšování jejího poloměru zajistí přibližování bodu B k hranici virtuální nákresny. K uskutečnění plynulého přechodu mezi eliptickým a hyperbolickým případem potřebujeme mít možnost měnit vzájemnou polohu bodu A a kružnice k .

Pro lepší orientaci a přehlednost dynamické konstrukce si na nákresně nejprve zadáme přímku o , která bude osou všech výsledných kuželoseček, budou na ní ležet ohniska, případně ohnisko a vrchol. Také si sestrojíme posuvník pro celé číslo s mezi 1 a 300. Dále si na přímce o zvolíme pomocný bod P . Ohnisko B umístíme na přímku o do vzdálenosti s od bodu P . Do takto připraveného pracovního listu přidáme řídicí kružnici $k = k(B, s)$ a sestrojíme kuželosečku: na kružnici k zvolíme 5 různých bodů A' , k nim sestrojíme 5 různých průsečíků osy úsečky AA' a přímky $A'B$ a tyto průsečíky dosadíme do nástroje *Kuželosečka daná 5 body*. Tím je konstrukce hotova.

Bodem A můžeme libovolně pohybovat po přímce o a měnit tak jeho polohu vzhledem ke kružnici k , tedy přecházet mezi eliptickým a hyperbolickým případem. Posuvník pro s imituje limitní přechod k parabolickému případu (obr. 1). Bod P leží na kružnici k , kterou ukotví na nákresně, a my tak můžeme sledovat, jak řídící kružnice a kuželosečka reagují na změny parametru s a na změny polohy bodu A .

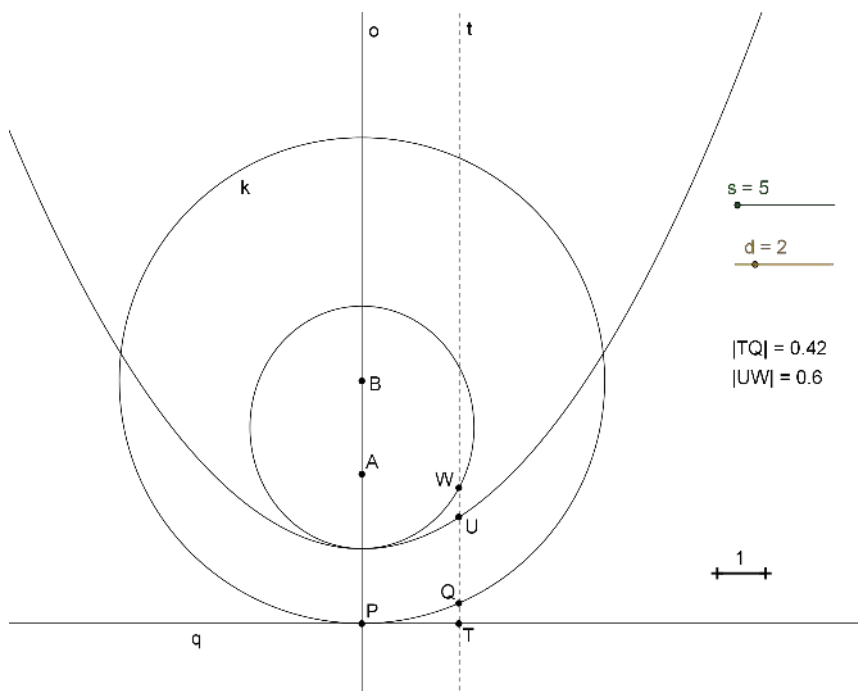


Obr. 1 Vizualizace limitního přechodu od elipsy k parabole, náhled situace pro $s = 400$

Stejné nebo různé?

Pro další zkoumání přidáme do dynamického obrázku přímku q , která je tečnou kružnice k v bodě P , a parabolu s ohniskem A a řídící přímkou q . S rostoucím s se viditelná část kružnice k stále více podobá přímce q , jedna větev hyperboly a elipsa se stále více podobají parabole. Jak velké by s muselo být, abychom na nákresně (nebo na papíru) pouhým okem nerozlišili k od q , větev hyperboly od paraboly, či elipsu od paraboly? Rozlišovací schopnost oka je přibližně 0,01 cm. To znamená, že dva body na nákresně nám splynou, pokud jsou od sebe vzdálené méně než 0,01 cm. Pojďme si takovou situaci nasimulovat.

Věnujme se nejprve eliptickému případu (tj. bod A přesuneme do vnitřní oblasti kružnice k). Do konstrukce si přidáme posuvník d pro celé číslo mezi 1 a 10, bod T ležící na přímce q ve vzdálenosti d od bodu P a přímku t , která prochází bodem T a je kolmá na q . Pracovně si posuvníky s a d posuneme do takových pozic, aby přímka t protínala kružnici k , parabolu i elipsu. Průsečíky po řadě označíme Q , U , W (na elipse označíme pouze ten průsečík, který je blíže k bodu T) a přidáme interaktivní text informující o vzdálenostech $|TQ|$, $|UW|$ (obr. 2). V pásu mezi přímkami o a t nejsou kružnice k a přímka q rozlišitelné, pokud vzdálenost bodů T , Q je menší než 0,01. Rozlišitelnost elipsy a paraboly závisí na vzdálenosti bodů U , W .

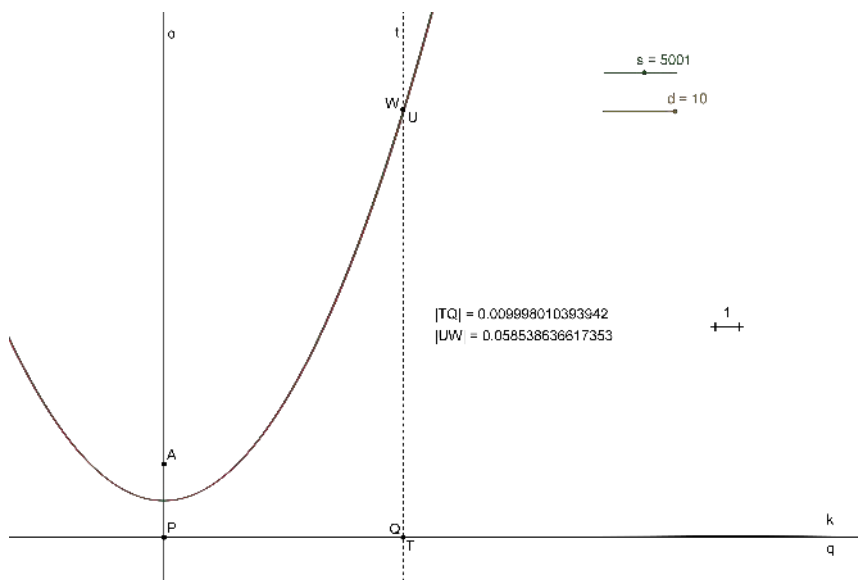


Obr. 2 Kružnice, elipsa a limitní parabola

Ze symetrie podle osy o je situace totožná i v druhé polorovině, takže nerovnosti $|TQ| < 0,01$, resp. $|UW| < 0,01$ zaručují nerozlišitelnost křivek v pásu o šířce $2d$. Je důležité poznamenat, že zatímco vzdálenost $|TQ|$ závisí pouze na s a d , vzdálenost $|UW|$ závisí také na poloze bodu A .

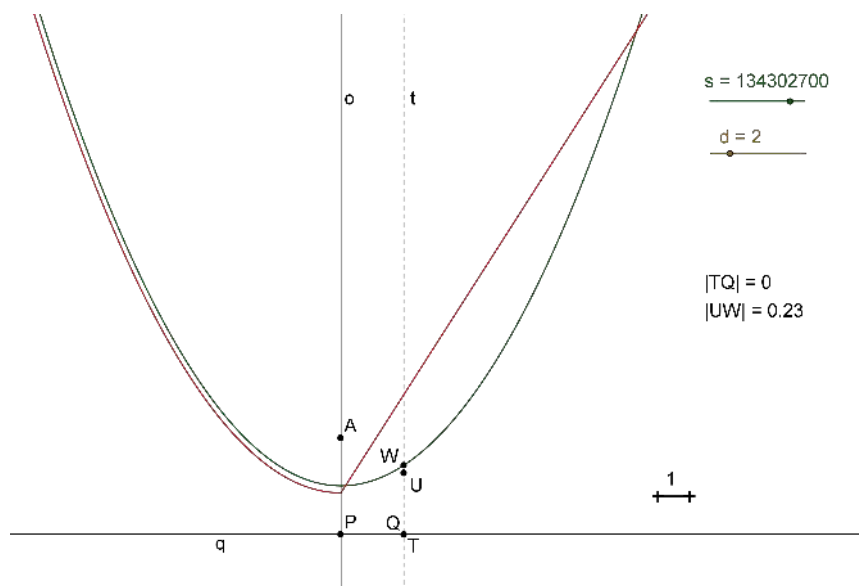
Z dynamické konstrukce snadno zjistíme, že pro $d = 10$ jsou kružnice k a přímka q nerozlišitelné při $s > 5000$ (obr. 3). Pro $|PA| = 2$ a $d = 10$ jsou elipsa a parabola nerozlišitelné při $s > 65049$. Oba výsledky vyšly při zaokrouhlování na 15 desetinných míst.

Výše uvedená úvaha platí pro rozlišovací schopnosti našich očí. Rozlišovací schopnosti programu GeoGebra nám pomůže objasnit interaktivní text, ke kterému je přidružena podmínka zobrazení objektu. Do dynamického listu znázorňujícího situaci z obr. 3 vložíme text „Bod Q leží na přímce q “, ke kterému v menu *Vlastnosti – Pro pokročilé* přidáme podmínku zobrazení objektu ve tvaru $Q = T$. Metodou pokus–omyl při určování rozsahu posuvníku r zjistíme, že text se objeví pro $s > 180499999$.



Obr. 3 Nerozlišitelnost objektů, situace pro $s = 5001$. Elipsa a parabola splývají

V případě elipsy a paraboly nás rozlišovací schopnosti programu GeoGebra dost zklamou: pro velké hodnoty parametru s má program problémy s přesným výpočtem bodů elipsy (a to i v případě, že ji zadáme pomocí ohnisek a bodu $\frac{A+P}{2}$). Občas nahradí část elipsy úsečkou nebo umístí elipsu pod parabolu, také bod W neleží vždy na elipse (obr. 4). Testování pomocí interaktivního textu nemá smysl.



Obr. 4 Nepřesnosti v GeoGebra náhledu

Můžeme tedy programu GeoGebra věřit?

Nepřesnosti z obr. 4 vzbuzují pochybnosti o důvěryhodnosti dat získaných z programu GeoGebra. Pojďme si tedy vše ověřit početně, obecně pro rozlišovací schopnost ε .

Nechť R je průsečík kružnice k a polopřímky PB (obr. 5). Potom z Eukleidovy věty o výšce v pravoúhlém trojúhelníku RPQ dostáváme rovnost $d^2 = \varepsilon \cdot (2s - \varepsilon)$, odkud plyne

$$s = \frac{d^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dosadíme-li $\varepsilon = 0,01$ a $d = 10$, vyjde $s = 5000,005$ cm. Na nákrese šířky 20 cm nám kružnice a její tečna splývají při poloměru kružnice větším než 50 m. Tento výsledek je shodný s výsledkem získaným z dynamické konstrukce.

V případě elipsy a paraboly je výpočet složitější. Pro zjednodušení uvažujme $\varepsilon = 0,01$, $o: x = 0$, $P = [0; 0]$ a $A = [0; 2]$. Taková elipsa má střed $S = [0, a + 1]$, pro její excentricitu platí $e = |AS| = a - 1$ a pro vedlejší

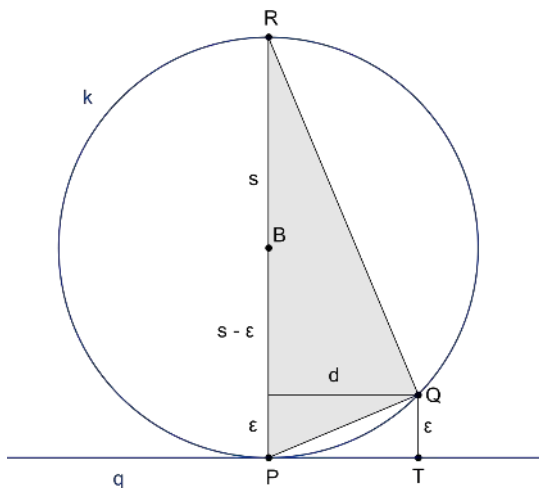
poloosu b dostáváme vztah $b^2 = a^2 - e^2 = a^2 - (a - 1)^2 = 2a - 1$. Rovnice elipsy má tedy tvar

$$\frac{x^2}{2a - 1} + \frac{(y - a - 1)^2}{a^2} = 1, \quad (1)$$

což po chvíli počítání dává vyjádření

$$y_{1,2} = 1 + a \cdot \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{2a - 1}} \right).$$

Pro $s \rightarrow \infty$ je $a \rightarrow \infty$ a $y_1 \rightarrow \infty$. Nás však více zajímá, jak se bude limitně chovat y_2 .



Obr. 5 Trojúhelník RPQ

Provedeme ještě pár úprav a zjistíme, že

$$\begin{aligned} y_2 &= 1 + a \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{2a - 1}} \right) = 1 + a \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2a - 1 - x^2}}{\sqrt{2a - 1}} \right) = \\ &= 1 + a \cdot \frac{\sqrt{2a - 1} - \sqrt{2a - 1 - x^2}}{\sqrt{2a - 1}} \cdot \frac{\sqrt{2a - 1} + \sqrt{2a - 1 - x^2}}{\sqrt{2a - 1} + \sqrt{2a - 1 - x^2}} = \\ &= 1 + \frac{ax^2}{\sqrt{2a - 1} \cdot (\sqrt{2a - 1} + \sqrt{2a - 1 - x^2})} \rightarrow 1 + \frac{x^2}{4} \text{ pro } a \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Limitou elipsy dané předpisem (1) je parabola splňující rovnici

$$y - 1 = \frac{x^2}{4}. \quad (2)$$

Tato parabola má vrchol $V = [0; 1]$ a řídící přímku $q: y = 0$, jejím ohniskem je bod A . Toto zjištění odpovídá poznatkům získaným z dynamické konstrukce.

Nyní uvažujme bod $U = [10; 26]$ ležící na parabole (2) a bod $W = [10; 26 + 0,01]$ ležící na elipse (1). Po dosazení souřadnic bodu W do rovnice (1) dostaneme $a \doteq 32525$ cm. Na nákresně šířky 20 cm elipsa (1) a parabola (2) splývají při hlavní poloose elipsy větší než 325 m. Tento výsledek neodpovídá výsledku z dynamické konstrukce, na vině jsou nepřesnosti, k nimž v programu GeoGebra dojde při výpočtu bodů elipsy.

Závěr

Dynamická geometrie je silný nástroj, který umožňuje vizualizovat situace, které běžnými geometrickými prostředky vizualizovat nelze – například limitní přechody do nekonečna. Cílem tohoto článku bylo rozšířit a doplnit modelování kuželoseček překládáním papíru právě o takový limitní přechod. Chtěli jsme ukázat, že za na první pohled odlišnými postupy pro modelování elipsy, hyperboly a paraboly se ve skutečnosti skrývá jeden společný princip, jedna společná dynamická konstrukce.

Zajímavým aspektem problematiky vizualizace limitních přechodů jsou rozlišovací schopnosti geometrického software. Program GeoGebra sice umožňuje práci s velkými čísly, ale není při této práci spolehlivý – některé jeho výpočty nejsou přesné a snadno dojde k chybné interpretaci.

Na webu <http://home.pf.jcu.cz/~lsamkova/mfi/> naleznete GeoGebra soubory k obrázkům 1 a 2.

Literatura

- [1] *Leischner, P. – Samková, L.*: Od řešení Heronovy úlohy k modelům kuželoseček. MFI, 23 (2014), č. 1, s. 9–14. [online]. [cit. 2015-03-20]. Dostupné z: <http://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/106>.
- [2] GeoGebra. [online]. [cit. 2015-03-20]. Dostupné z: www.geogebra.org.
- [3] *Honzík, L. – Tichý, M.*: GeoGebra – více než dynamická geometrie. MFI, 19 (2010), č. 7, s. 426–433 a č. 8, s. 499–507.

(Autorkou úvodní ilustrace je Mgr. Jaroslava Palzerová.)

Rozklady na součet

(Úlohy z MO – kategorie P, 32. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Náš dlouhodobý seriál o úlohách z Matematické olympiády – kategorie P se dnes zastaví ve 39. ročníku MO, který se konal ve školním roce 1989/90. Ačkoliv termín na vypracování úloh domácího kola časově kolidoval s bouřlivými revolučními událostmi listopadu 1989, soutěž se normálně konala a našlo se i dost studentů, kteří v listopadu řešení úloh odevzdali. Jednu z úloh tohoto domácího kola si nyní předvedeme. Rozebereme nejen původní soutěžní úlohu, v níž bylo třeba nalézt a vypsát všechny možné rozklady zadaného přirozeného čísla na součet přirozených sčítanců, ale ukážeme si i její modifikaci, v níž máme určit pouze počet těchto rozkladů, aniž bychom museli jednotlivé rozklady vypisovat. Při řešení této modifikace můžeme totiž použít zcela odlišný postup výpočtu, který je efektivnější a určí výsledek podstatně rychleji.

Začneme zadáním původní soutěžní úlohy, které uvádíme s určitými formulačními úpravami, aniž bychom však změnili smysl úlohy.

Úloha

Vytvořte program, který vypíše všechny různé rozklady zadaného přirozeného čísla N na součet přirozených čísel. Dva rozklady nepovažujeme za různé, jestliže se liší pouze pořadím sčítanců. Rozklady vypište v libovolném pořadí a s libovolným pořadím sčítanců v jednotlivých rozkladech.

Příklad: Číslo $N = 6$ je možné rozložit na součet přirozených sčítanců těmito jedenácti způsoby:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$2 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$2 + 2 + 1 + 1$$

$$2 + 2 + 2$$

$$3 + 1 + 1 + 1$$

$$3 + 2 + 1$$

$$3 + 3$$

$$4 + 1 + 1$$

$$4 + 2$$

$$5 + 1$$

$$6$$

Ze zkušenosti snadno odhadneme, že s rostoucí hodnotou N počet existujících rozkladů velmi rychle narůstá. Budeme je proto jistě chtít vytvářet v nějakém předem stanoveném pořadí, abychom je mohli rovnou vypisovat. Bylo by nešikovné, kdybychom museli všechny nalezené rozklady uchovávat v nějaké rozsáhlé datové struktuře a každý nový rozklad pak nejprve kontrolovat, zda se už v minulosti stejný rozklad neobjevil (neboť nechceme opakovaně vypisovat stejné rozklady ani rozklady lišící se pouze pořadím sčítanců). Ukážeme si tedy, jak na to. V našem řešení zvolíme takové pořadí vytvářených rozkladů a takové pořadí sčítanců v rámci jednotlivých rozkladů, jaké je použito v příkladu u zadání úlohy.

V první řadě potřebujeme zabránit tomu, aby se vypisovaly rozklady lišící se pouze pořadím sčítanců – tedy rozklady ve skutečnosti stejné, ale na první pohled vypadající odlišně. Pro $N = 6$ se jedná například o rozklady

$$4 + 1 + 1, \quad 1 + 4 + 1, \quad 1 + 1 + 4.$$

V každé skupině rozkladů, které se liší pouze vzájemným pořadím sčítanců, je vždy obsažen právě jeden takový, v němž jsou sčítanci uspořádány v nerostoucím pořadí. Tento rozklad vybereme jako „reprezentanta“ příslušné skupiny a toho jediného z celé skupiny vždy vypíšeme. Bylo by ovšem zbytečné pomalé vytvářet všechny podobné rozklady a až následně je kontrolovat, zda jsou opravdu nerostoucí. Namísto toho budeme v našem algoritmu rovnou generovat pouze nerostoucí rozklady. To znamená, že již při sestavování jednotlivých rozkladů budeme dodržovat zásadu, že další sčítanec může být roven nejvýše hodnotě dosud posledního sčítance v tomto rozkladu.

Když už jsme se omezili na rozklady s nerostoucím pořadím sčítanců, budeme je chtít vytvářet systematicky v nějakém jasně stanoveném pořadí. Přirozeným řešením tohoto požadavku je zvolit lexikografické uspořádání, neboli stejné řazení, jaké se používá u hesel ve slovníku. Začneme s rozklady začínajícími jedničkou, následují rozklady začínající dvojkou, atd. Mezi rozklady se stejným prvním sčítancem určuje jejich vzájemné pořadí druhý sčítanec. Pokud se shoduje i ten, vzájemné pořadí se určí podle třetího sčítance, atd.

Ke generování všech rozkladů čísla N v lexikografickém uspořádání použijeme přirozeným způsobem rekurzivní proceduru. Ta bude dostávat

v prvním parametru hodnotu, kterou ještě zbývá rozložit, a ve druhém parametru informaci, kolikátý sčítanec rozkladu má procedura vytvořit (označme tuto pozici P). Hlavní program zavolá proceduru s parametry N (na začátku výpočtu je třeba rozložit celé N) a 1 (rozklad začínáme prvním sčítancem). Procedura bude ukládat jednotlivé členy rozkladu do pole a kdykoliv bude celý rozklad v poli vytvořen, procedura ho vypíše. Tento stav se pozná podle toho, že už nebývá nic rozkládat (tzn. první parametr při zavolání procedury má hodnotu 0). Pokud ještě zbývá něco rozložit, procedura se pokusí všemi přípustnými způsoby stanovit hodnotu P -tého sčítance a pro každou takovou možnost provede rekurzivní volání s patřičně upravenými parametry, jak je vidět níže v naší programové ukázce. Na pozici P ve vytvářeném rozkladu procedura zkouší postupně dát hodnoty 1, 2, 3, ... atd. Tento P -tý sčítanec může být roven nejvýše hodnotě, kterou ještě zbývá rozložit, a také nejvýše hodnotě předchozího sčítance (aby byl sestavený rozklad nerostoucí). Obě uvedená omezení musíme dodržet zároveň, takže z nich musíme vzít minimum.

Popsané řešení si ukážeme zapsané v programovacím jazyce Pascal:

```

program RozkladyCisla;
{Zadané kladné celé číslo N rozloží všemi způsoby na součet
kladných celých čísel. Na pořadí rozkladů ani sčítanců
v rozkladu nezáleží. Např. pro N=5:
1+1+1+1+1 = 2+1+1+1 = 2+2+1 = 3+1+1 = 3+2 = 4+1 = 5}

const MaxN = 125;                {maximální přípustné N}
var    N: integer;              {rozkládané číslo}
        A: array[0..MaxN] of integer; {uložení rozkladů}

function Min(A, B: integer): integer;
{pomocná funkce na výpočet minima ze dvou celých čísel A, B}
begin
    if A > B then Min := B else Min := A
end; {function Min}

procedure Rozloz(Zbytek, P: integer);
{Zbytek = kolik zbývá rozložit, P = kolikátý sčítanec vytváříme}
var I: integer;
begin
    if Zbytek = 0 then      {rozklad je hotov}
    begin
        for I:=1 to P-1 do write(A[I]:3);
        writeln
    end
    else {přidat další člen rozkladu - v pořadí P-tý}
    begin

```

```

    for I:=1 to Min(Zbytek, A[P-1]) do
        begin
            A[P] := I;  Rozloz(Zbytek-I, P+1)
        end;
    end;
end; {procedure Rozloz}

begin
write('Rozkladane cislo (1-', MaxN, '): ');
readln(N);
A[0] := MaxN + 1; {technický trik}
Rozloz(N, 1); {chceme rozložit celé N, začínáme 1. sčítancem}
end.

```

Můžete si vyzkoušet, že pro vyšší hodnoty N je výpočet uvedeného programu velmi pomalý. To není způsobeno tím, že by byl program navržen nevhodně či nešikovně, ale skutečností, že velká N se dají rozložit na součet přirozených sčítanců mnoha různými způsoby (počet existujících rozkladů roste exponenciálně vzhledem k N) a výstup programu proto nutně musí být rozsáhlý. Například pro $N = 101$ existuje více než 200 milionů různých rozkladů a pro $N = 121$ jsou už těchto rozkladů více než 2 miliardy.

Podívejme se nyní, co by se na řešení naší úlohy změnilo, kdybychom měli za úkol určit pro dané přirozené číslo N pouze počet všech jeho rozkladů na součet přirozených sčítanců, ale jednotlivé rozklady bychom nemuseli vypisovat. Jedna možná cesta, jak lze takto upravenou úlohu vyřešit, spočívá v použití výše uvedeného rekurzivního postupu. Jedinou změnou bude nahrazení výpisu pole A v proceduře *Rozloz* zvýšením počítadla nalezených rozkladů o 1. Po skončení výpočtu pak stačí vypsát hodnotu tohoto počítadla.

Program upravený uvedeným způsobem vykoná při výpočtu stejný počet kroků, jako původní řešení naší úlohy s výpisem všech rozkladů. Bude mít opět exponenciální asymptotickou časovou složitost a pro velká N bude tedy velmi pomalý. Pokud si ho ovšem prakticky vyzkoušíte na počítači pro menší hodnoty N , zjistíte, že se oproti původnímu řešení výpočet znatelně urychlil, neboť již není zdržován relativně pomalým vypisováním jednotlivých rozkladů na obrazovku.

K řešení upravené úlohy však můžeme přistoupit odlišným způsobem. Nebudeme již generovat a počítat jednotlivé rozklady, ale budeme počítat pouze to, co se od nás skutečně požaduje – jejich počet. Dokážeme to provést s polynomiální časovou složitostí, tedy dostatečně rychle i pro velké N . K nalezení výsledku použijeme techniku dynamického programování.

Zavedeme si dvojrozměrnou tabulku T velikosti $N \times N$, ve které celo-

číselný údaj $T_{i,j}$ určuje, kolik existuje různých rozkladů čísla i na součet přirozených sčítanců, má-li největší z těchto sčítanců hodnotu j . Logický význam mají pouze údaje v trojúhelníku tabulky T pod hlavní diagonálou, tzn. prvky $T_{i,j}$ pro $i \geq j$. Při zkoumání rozkladů čísla i totiž pochopitelně nejvyšší sčítanec v rozkladu nemůže být větší než i . Některé prvky tabulky T jsou předem známe – v prvním sloupci, na hlavní diagonále i těsně pod hlavní diagonálou budou jistě samé jedničky. Je tomu tak proto, že libovolné číslo i lze jediným způsobem rozložit na součet i sčítanců rovných 1 (hodnota $T_{i,1}$), jediným způsobem ho můžeme zapsat jedním číslem rovným i (hodnota $T_{i,i}$) a jediným způsobem ho můžeme rozložit na součet sčítanců $i - 1$ a 1 (hodnota $T_{i,i-1}$). Zbývající prvky tabulky T budeme vyplňovat po řádcích níže popsaným způsobem, tzn. postupně budeme zvyšovat hodnotu rozkládaného čísla. Po vyplnění celé tabulky najdeme výsledek na jejím posledním řádku. Podle definice tabulky T je hledaný počet všech různých rozkladů čísla N na součet přirozených sčítanců roven součtu všech čísel na N -tém řádku tabulky.

Zbývá ukázat, jak při vyplňování i -tého řádku tabulky T spočítáme hodnoty $T_{i,j}$ pro $1 < j < i - 1$. V rozkladu čísla i musí být obsažen aspoň jeden sčítanec rovný j , zbývající hodnotu $i - j$ pak chceme rozložit všemi způsoby na součet sčítanců rovných nejvýše j . Počet těchto rozkladů ovšem při vyplňování i -tého řádku tabulky T již známe – je roven součtu čísel uložených v tabulce T na řádku $i - j$ ve sloupcích od 1 do j . Stačí tedy těchto j čísel sečíst a tím dostaneme správnou hodnotu $T_{i,j}$.

Popsané řešení má paměťovou složitost $O(N^2)$, která je dána velikostí vyplňované tabulky T . Z popisu algoritmu vidíme, že postupně počítáme řádově N^2 prvků tabulky T a každý z nich spočítáme v čase $O(N)$. Asymptotická časová složitost popsaného řešení je proto $O(N^3)$. To je dostatečně rychlý výpočet i pro vyšší hodnoty N . Pamatujte ovšem na to, že s rostoucím N počet existujících rozkladů čísla na součet přirozených sčítanců velmi rychle narůstá. Již jsme uvedli, že pro $N = 121$ existuje těchto rozkladů více než dvě miliardy, což je zhruba rozsah 4-bytového celočíselného typu se znaménkem (typ `longint` v Turbo Pascalu, `integer` ve FreePascalu). Při použití takového datového typu proto dojde již pro N větší než 121 k aritmetickému přetečení. Efektivní řešení upravené úlohy určit počet rozkladů zadaného přirozeného čísla na součet přirozených sčítanců si na závěr naprogramujeme:

```
program PocetRozkladuCisla;
{Určí počet různých rozkladů čísla N na součet
 přirozených sčítanců}
```

```

const MaxN = 125;           {maximální přípustné N}
var N: integer;             {rozkládané číslo}
    T: array [1..MaxN, 1..MaxN] of longint;
    {T[i,j] = počet rozkladů čísla "i",
     v nichž nejvyšší sčítanec je "j"}
    i, j, k: integer;
    v: longint;
    {výsledný počet rozkladů - může jich být hodně}

begin
write('Rozkladane cislo (1- ', MaxN, '): ');
readln(N);
{Známé hodnoty v tabulce T:}
T[1,1]:=1;
for i:=2 to N do
    begin T[i,1]:=1; T[i,i]:=1; T[i,i-1]:=1 end;
for i:=1 to N-1 do
    for j:=i+1 to N do T[i,j]:=0;
{Dynamickým programováním počítáme po řádcích
zbývající hodnoty tabulky T:}
for i:=4 to N do
    for j:=2 to i-2 do
        begin
        {počítáme T[i,j: v rozkladu čísla "i" použijeme sčítanec
        "j", zbývá ještě rozložit "i-j" a v tomto rozkladu mohou
        být další sčítanci z rozmezí hodnot 1 do "j"}
        v:=0;
        for k:=1 to j do v:=v + T[i-j, k];
        T[i,j]:=v
        end;
v:=0;
for j:=1 to N do v:=v + T[N,j];
writeln('Pocet ruznych rozkladu: ', v);
end.

```

Poznámka k úlohám o směsích

V článku [1] z roku 2011 jsem v informatické části časopisu MFI uvedl program na řešení různých typů slovních úloh o směsích. Většinou jde o hmotnosti a ceny komponent a výsledné směsi, jejichž souvislost je dána vztahy

$$\begin{aligned}
 m_1 + m_2 &= m_3 \\
 m_1 c_1 + m_2 c_2 &= m_3 c_3.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Pro ilustraci použití programu jsem uvedl zadání několika úloh, jaké bývají v učebnicích matematiky a sbírkách příkladů, a tak se tam objevila i tato úloha o slitinách.

Úloha 2

Ze dvou kovů s hustotami $7,4 \text{ g/cm}^3$ a $8,2 \text{ g/cm}^3$ máme připravit $0,5 \text{ kg}$ slitiny s hustotou $7,6 \text{ g/cm}^3$. Kolik gramů každého kovu je k tomu zapotřebí?

Podobnou ilustrativní úlohu jsem použil i v knize [2]:

Úloha 21.2.7

Určete množství a hustotu slitiny dvou kovů, když prvního máme 300 g a jeho hustota je $7,2 \text{ g/cm}^3$, druhého 250 g a má hustotu $7,8 \text{ g/cm}^3$?

Při své návštěvě Olomouce v dubnu 2015 mě upozornil kolega doc. RNDr. Josef Polák, CSc. z FAV ZČU v Plzni, že u slitin není použití druhé rovnice (1) na místě (c_i jsou hustoty kovů), protože obecně objem slitiny není roven součtu objemů komponent. O upřesnění tohoto faktu jsem požádal doc. Mgr. Pavla Banáše, Ph.D., z Katedry fyzikální chemie na Přírodovědecké fakultě UP. Jeho vyjádření lze shrnout takto:

„Druhá rovnice (1) je pro slitiny jen aproximativní a platila by pouze v ideálním případě, tj. kdyby oba kovy i jejich slitina měly stejné krystalografické parametry (symetrii i mřížkové parametry), a tedy i stejné molární objemy. Obecně tomu tak není, ale odchylka od takové zidealizované varianty (kdy by platilo, že objem slitiny je roven objemu jejích komponent) je relativně malá, pro většinu případů kolem několika málo procent. Čili s vědomím všech těchto limitací to pořád může být užitečný postup pro hrubý odhad.“

Prosím tedy čtenáře [1] a [2], aby uvedené úlohy chápali tímto způsobem a oběma jmenovaným kolegům děkuji za upozornění a za vysvětlení. Vyučujícím matematiky lze doporučit, aby v případě, že se chtějí slitinami zabývat, upozornili žáky na to, že slitiny fungují chemicky jinak než směsi a že v tomto případě je výsledek jen přibližný.

Literatura

- [1] Trávníček, S.: Úlohy o směsích. MFI, 20 (2010/11), č. 6, s. 361–369.
- [2] Trávníček, S.: Pojďme na to s matematikou (a někdy i s počítačem). Vydavatelství UP, Olomouc, 2013.

Stanislav Trávníček

ZPRÁVY

4. CZE-POL-SVK matematická soutěž juniorů

Ve dnech 17. – 20. května 2015 se uskutečnil v Karlově pod Pradědem již 4. ročník Česko-polsko-slovenské matematické soutěže juniorů (žáků ve věku do 16 let). První tři ročníky této soutěže se konaly v Polsku (v Mszaně Dolné a ve Szczyrku).

Ústřední komise české MO pozvala letos juniorská reprezentační družstva všech tří zemí složená ze šesti žáků a pedagogického doprovodu do krásného prostředí jarních Jeseníků. Ubytování a stravování všech účastníků bylo zajištěno v hotelu Karlov, kde se konala také vlastní soutěž. Ta měla již tradičně dvě části – soutěž jednotlivců a následující den pak soutěž tříčlenných družstev.



Večer před druhým soutěžním dnem pak byla pro týmovou soutěž vylosována družstva, která měla po jednom českém, polském a slovenském zástupci, vybraných ze šestice soutěžících jednotlivých zemí. V soutěži jednotlivců byla žákům předložena pětice úloh, na jejichž řešení měli soutěžící vyhrazeny 3,5 hodiny času. K řešení šesti soutěžních úloh měly jednotlivé týmy rezervováno 5 hodin. Na ukázkou uvádíme

texty úloh soutěže jednotlivců aktuálního ročníku soutěže.

Soutěž jednotlivců (18. května 2015)

1. V pravoúhlém trojúhelníku ABC s kratší odvěsnou AC má přepona AB délku 12. Označme T jeho těžiště a D patu výšky z vrcholu C . Určete velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu B , pro kterou má trojúhelník DTC největší možný obsah.
2. Rozhodněte, zda lze každému vrcholu pravidelného 30úhelníku přiřadit po jednom čísla $1, 2, \dots, 30$ tak, aby součet čísel přiřazených libovolným dvěma sousedním vrcholům byl druhou mocninou některého přirozeného čísla.
3. Pro reálná čísla x, y platí $x^2 + y^2 \leq 2$. Dokažte, že tato čísla splňují nerovnost
$$xy + 3 \geq 2x + 2y.$$
4. Nechtě E, F jsou po řadě středy odvěsen BC, AC pravoúhlého trojúhelníku ABC a D je pata jeho výšky z vrcholu C . Dále nechtě P značí průsečík osy jeho vnitřního úhlu při vrcholu A a přímky EF . Dokažte, že P je středem kružnice vepsané trojúhelníku CDE .
5. Určete všechna přirozená čísla $n > 1$ s vlastností: Pro každé $d > 1$, které je dělitelem čísla n , je $d-1$ dělitelem $n-1$.



Naši soutěžící byli vybráni na základě výsledků dosažených v krajských kolech

64. ročníku MO v kategorii C a dále na základě dvou testů v průběhu výběrového soustředění, který se uskutečnilo tři týdny před soutěží. České reprezentační družstvo tak tvořili tito žáci: *Pavel Hudec* (G J. Guttha Jarkovského, Praha 1), *Lenka Kopfová* (Církevní ZŠ, Hradec nad Moravicí), *Martin Kurečka* a *Tomáš Perutka* (oba G Brno, tř. Kpt. Jaroše), *Martin Raška* (Wichterlovo G Ostrava-Poruba) a *Matouš Menčík* (Arcibiskupské G, Praha 2). Pedagogický doprovod našeho družstva tvořili a o zdárný průběh celé soutěže se za českou stranu starali *doc. Jaromír Šimša* z PřF MU v Brně, *dr. Jaroslav Švrček* a *dr. Pavel Calábek* oba z PřF UP v Olomouci.

Nejlepším českým účastníkem v soutěži jednotlivců se stal *Pavel Hudec*, který skončil na 4. místě těsně za trojicí polských reprezentantů. V soutěži družstev se nejlépe vedlo družstvu, jehož členem byl *Matouš Menčík*. Podrobnější informací o soutěži, texty úloh a celkové výsledky můžete najít na oficiálních stránkách naší MO (www.math.muni.cz/mo).

Následující (5.) ročník soutěže se uskutečnil na základě pozvání organizátorů v květnu 2016 na Slovensku.

Jaroslav Švrček

Soutěž studentů učitelství fyziky

Tradiční akcí Fyzikální pedagogické společnosti JČMF je Celostátní přehlídka studentských prací z didaktiky fyziky a řadu let její pořádání garantoval *prof. RNDr. Ivo Volf, CSc.* se spolupracovníky z Přírodovědecké fakulty UHK v Hradci Králové. V letošním roce se organizace ujala Katedra experimentální fyziky Přírodovědecké fakulty UP v Olomouci a její bezchybný průběh zajišťoval organizační výbor vedený *RNDr. Renatou Holubovou, CSc.* Akce se uskutečnila 17. června 2015 v prostorách nové budovy PřF UP a zúčastnilo se jí celkem 15 studentek a stu-

dentů z šesti fakult, na nichž studují budoucí učitelé fyziky.

Přehlídka prací měla soutěžní charakter a probíhala ve dvou sekcích – bakalářské (8 prací) a magisterské (7 prací). V každé sekci byly odbornými porotami složenými ze zástupců jednotlivých fakult vyhodnoceny tři nejlepší práce.

Sekce bakalářských prací: 1. místo *Lukáš Vejmelka* (MFF UK Praha) Praktická elektrotechnika ve výuce fyziky. 2. místo *Martina Tunová* (PřF MU Brno) Výboje v plynech. 3. místo *Michal Klátil* (PřF UHK Hradec Králové) Školní demonstrační experimenty z jaderné a částicové fyziky.

Sekce magisterských prací: 1. místo *Bc. Michal Hnyk* (MFF UK Praha) Elektrotechnické stavebnice ve výuce fyziky. 2. místo *Mgr. Jakub Zelenka* (PřF JČU v Českých Budějovicích) Interaktivní tabule ve výuce fyziky. 3. místo *Bc. Jan Pokorný* (PřF UP Olomouc) Luminiscence ve středoškolské laboratoři. Podrobněji viz <http://jcmf.upol.cz/soutez2015/>.

Je třeba konstatovat, že rozhodování porot nebylo snadné. Jednak proto, že všechny práce měly velmi dobrou a srovnatelnou úroveň, jednak pro tematickou různorodost prací, jejichž obsah bylo obtížné navzájem porovnávat. Oceněny pak byly práce s největší „přidanou hodnotou“ vlastní tvůrčí práce studenta, kterou charakterizovaly výstupy bezprostředně využitelné ve školské praxi.

Setkání studentů poskytlo prostor nejen pro prezentaci výsledků bakalářských a magisterských prací, ale za významný přínos je možné považovat i navázání či rozšíření vzájemných kontaktů jak studentů, tak učitelů fakult připravujících učitele fyziky. Je jen škoda, že se nepodařilo naplnit třetí z plánovaných sekcí přehlídky, ve které by svoje práce prezentovali studenti doktorského studia. I tak je možné považovat akci za úspěšnou a začít s přípravami jejího pokračování v příštím školním roce.

Oldřich Lepěl