# Čtyřúhelníky pod mikroskopem

*OLDŘICH ODVÁRKO – JARMILA ROBOVÁ*

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V běžném životě se často setkáváme se situacemi, kdy je sledovaný soubor daných objektů rozdělen podle určitých hledisek do skupin. V takovýchto případech hovoříme o *klasifikaci* (nebo také *třídění*) objektů do *tříd* podle určených *kritérií*.

Chystáme-li se například na dovolenou k moři a hledáme-li ubytování v hotelu, je pro nás důležitá informace, zda hotel je ohodnocen třemi, čtyřmi či více hvězdičkami (kritériem je úroveň služeb hotelu). Dále sledujeme, zda je hotel přímo na pláži, či například do vzdálenosti 100 metrů od pláže nebo ještě dále (kritériem je vzdálenost hotelu od pláže).

Žáci v dané škole mohou být roztříděni do skupin například podle pohlaví, podle měsíce narození, podle známky z matematiky na posledním vysvědčení apod. Klasifikace objektů do tříd se objevuje rovněž ve vědních oborech. Například v medicíně je pro lékaře důležitá informace o krevní skupině pacienta (A, B, O, AB); stejný soubor pacientů může lékař také rozdělit podle onemocnění diabetem (pacient nemá diabetes, má diabetes I. typu, má diabetes II. typu).

Při každé klasifikaci objektů do tříd se jedná vždy o roztřídění prvků nějaké množiny podle zvoleného kritéria do podmnožin, které jsou po dvou disjunktní, tj. každé dvě mají prázdný průnik. Jednu a tu samou množinu prvků můžeme klasifikovat podle různých kritérií, jako tomu bylo v případě hotelů, žáků či pacientů.

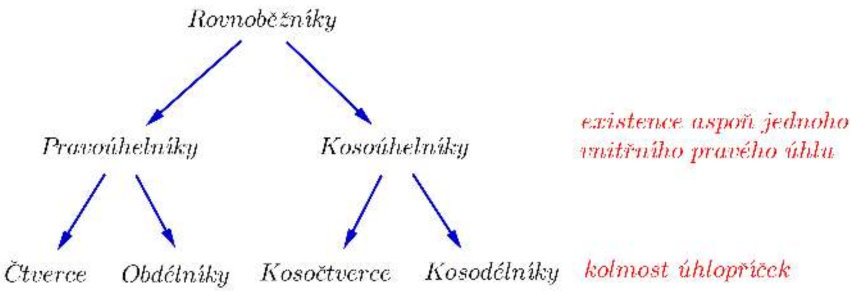
Ve školské matematice zavádíme řadu pojmů z různých tematických oblastí. Podstatné je, abychom nezkoumali jednotlivé pojmy izolovaně, ale abychom hledali co nejvíce vzájemných vazeb mezi nimi, abychom vytvářeli ucelené struktury pojmů. A to právě klasifikace umožňuje. Třídění pojmů obvykle realizujeme tehdy, kdy již máme probranou příslušnou partii učiva a v rámci procvičování nebo opakování upevňujeme vzájemné vazby mezi pojmy.

V tomto článku se zaměříme na klasifikaci rovnoběžníků a její význam pro hlubší pochopení samotného pojmu i jeho jednotlivých speciálních případů. Přitom se naskytne i řada možností k detailnějšímu poznávání čtyřúhelníků, které nejsou rovnoběžníky. Naše úvahy jsou vedeny tak, aby předložené postupy bylo možné využít při práci se žáky druhého stupně základní školy a odpovídajících ročníků víceletého gymnázia. Míra využití závisí na úrovni žáků i na časových možnostech.

## Klasifikace rovnoběžníků

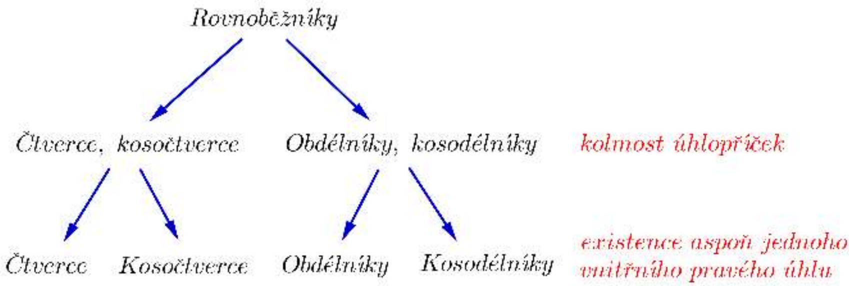
Rovnoběžníky lze klasifikovat podle různých kritérií. Základní úvaha při klasifikaci vychází z toho, že danou množinu rozložíme na podmnožinu a její doplněk (jde o tzv. dichotomické třídění).

Na obr. 1 je zachycena klasifikace, kdy množinu všech rovnoběžníků v rovině rozložíme nejdříve podle kritéria *existence aspoň jednoho vnitřního pravého úhlu* (podmnožina *Pravoúhelníky* a její doplněk ¬*Pravoúhelníky*, tj. *Kosoúhelníky*). Vytvořené třídy dále rozložíme podle druhého kritéria *kolmost úhlopříček* (v případě *Pravoúhelníků* jde o rozklad na podmnožinu *Čtverce* a její doplněk ¬*Čtverce*, tj. *Obdélníky*; obdobně rozložíme třídu *Kosoúhelníky*).



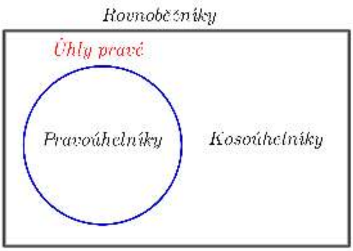

Obr. 1

Jiný možný způsob klasifikace rovnoběžníků je zachycen na obr. 2, kde oproti situaci na obr. 1 je zaměněno pořadí kritérií.

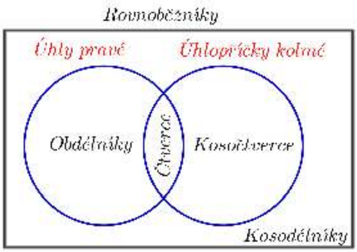



Obr. 2

Třídění pojmů můžeme znázorňovat také s využitím Vennových diagramů. Vrátíme-li se ke klasifikaci na obr. 1, situaci po užití prvního kritéria (existence aspoň jednoho vnitřního pravého úhlu) zachycuje obr. 3a, po přidání druhého kritéria (kolmost úhlopříček) získáme situaci na obr. 3b.

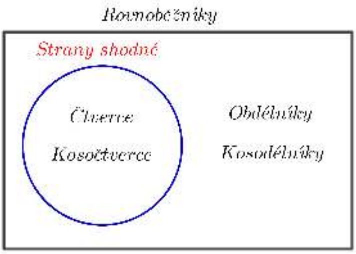



Obr. 3a

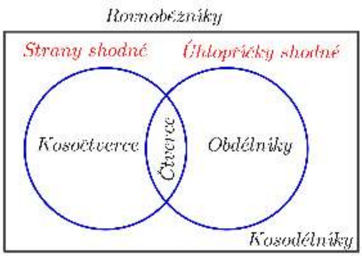



Obr. 3b

Další možné třídění rovnoběžníků ukazují obr. 4a a obr. 4b, kde prvním kritériem je *shodnost délek všech stran*, druhým *shodnost délek úhlopříček*.




Obr. 4a

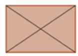
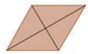
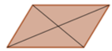



Obr. 4b

## Tabulka vlastností rovnoběžníků poprvé

K prohloubení poznatků o rovnoběžnících může přispět zkoumání, zda daný typ rovnoběžníku má či nemá danou vlastnost. Na základní škole obvykle zavádíme *rovnoběžník jako čtyřúhelník, jehož každé dvě protější strany jsou navzájem rovnoběžné.*

V tab. 1 jsou v záhlaví uvedeny všechny čtyři případy rovnoběžníků a ve druhém sloupci je výčet jejich možných vlastností očíslovaných 1 až 12 (vlastnost 1 je použita v definici rovnoběžníku). Do každého řádku a sloupce se zaznamenává plus (+) čí minus (–) podle toho, zda příslušný rovnoběžník má či nemá danou vlastnost (tab. 1 je již vyplněna).

| | |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|
| | **Vlastnost** | **čtverec** | **obdélník** | **kosočtverec** | **kosodélník** |
| 1 | Každé dvě protější strany jsou navzájem rovnoběžné | + | + | + | + |
| 2 | Každé dvě protější strany mají shodnou délku | + | + | + | + |
| 3 | Každé dvě sousední strany jsou shodné | + | – | + | – |
| 4 | Všechny vnitřní úhly jsou pravé | + | + | – | – |
| 5 | Každé dva protější úhly jsou shodné | + | + | + | + |
| 6 | Každé dva sousední úhly jsou shodné | + | + | – | – |
| 7 | Součet velikostí každých dvou sousedních úhlů je 180° | + | + | + | + |
| 8 | Úhlopříčky se půlí | + | + | + | + |
| 9 | Úhlopříčky jsou k sobě kolmé | + | – | + | – |
| 10 | Úhlopříčky mají stejnou délku | + | + | – | – |
| 11 | Úhlopříčky půlí příslušné vnitřní úhly | + | – | + | – |
| 12 | Každá úhlopříčka dělí rovnoběžník na dva shodné trojúhelníky | + | + | + | + |

Tab. 1

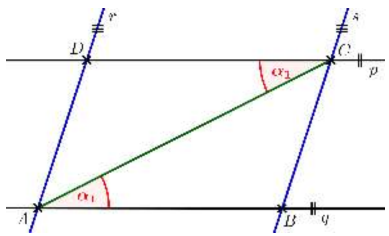
Na základě tab. 1 lze řešit další úlohy, které jsou zajímavější a které ukazují různé možnosti využití klasifikace ke zjišťování nových vazeb mezi rovnoběžníky, a dokonce i k *objevování nových* dosud nezařazených *objektů.*

## Tabulka vlastností rovnoběžníků podruhé

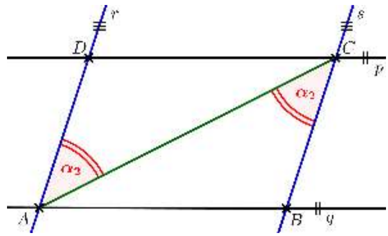
Jak již bylo uvedeno, ve školské matematice je rovnoběžník definován jako čtyřúhelník, jehož *každé dvě protější strany jsou navzájem rovnoběžné* (vlastnost 1 v tab. 1). Z tab. 1 je zřejmé, že vlastnosti 2, 5, 7, 8 a 12 mají všechny rovnoběžníky (zde jsou totiž uvedeny pouze symboly +). Tato skutečnost se většinou žákům předkládá pomocí názorných obrázků; přitom exaktní zdůvodnění není nijak náročné a podle našeho názoru je užitečné. Jde o vhodnou příležitost procvičit již dříve osvojené poznatky (vlastnosti souhlasných a střídavých úhlů, pojem přímého úhlu, věty o shodnosti trojúhelníků). Současně se žáci učí na matematicky jednoduchých příkladech své úvahy zdůvodňovat. V následující části se budeme věnovat zdůvodnění tvrzení platných pro libovolný rovnoběžník, která vyplývají z uvedené definice rovnoběžníku.

*Každé dvě protější strany rovnoběžníku mají shodnou délku (vlastnost 2 v tab. 1).*

Na obr. 5 jsou dvě dvojice rovnoběžek $p$, $q$ a $r$, $s$, které vymezují rovnoběžník $ABCD$ a jeho úhlopříčku $AC$. Z rovnoběžnosti přímek $p$, $q$ plyne shodnost střídavých úhlů označených jako $\alpha_1$. Obdobně na obr. 6 z rovnoběžnosti přímek $r$, $s$ vyplývá shodnost střídavých úhlů označených jako $\alpha_2$. Trojúhelníky $ACD$ a $CAB$ mají společnou stranu $AC$; s využitím poznatků o úhlech $\alpha_1$, $\alpha_2$ jsou proto trojúhelníky shodné podle věty *usu*. Odtud už plyne shodnost délek protějších stran $AB$ a $CD$, rovněž $AD$ a $CB$.



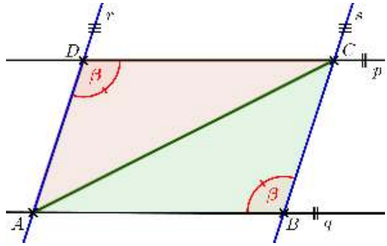
Obr. 5



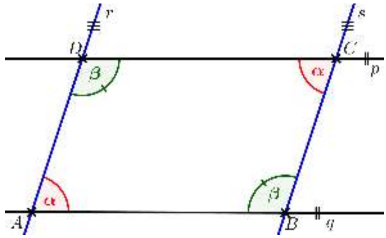
Obr. 6

*V každém rovnoběžníku jsou protější úhly shodné (vlastnost 5 v tab. 1).*

Ze shodnosti trojúhelníků $ACD$ a $CAB$ plyne, že úhly $CDA$ a $ABC$ jsou shodné (obr. 7). Na základě obr. 5 a obr. 6 je patrné, že jsou shodné úhly $DAB$ a $BCD$. Odtud již získáme platnost daného tvrzení (obr. 8).



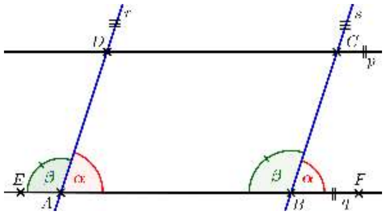

Obr. 7




Obr. 8

*Součet velikostí každých dvou sousedních úhlů rovnoběžníku je* 180° *(vlastnost 7 v tab. 1)*

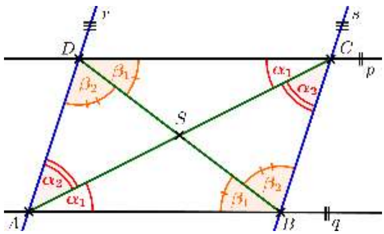
Z rovnoběžnosti přímek $r$, $s$ na obr. 9 plyne, že souhlasné úhly $BAD$ a $FBC$ jsou shodné. Obdobně z rovnoběžnosti přímek $r$, $s$ je zřejmé, že souhlasné úhly $DAE$ a $CBA$ jsou také shodné. Vyznačené úhly $\alpha$, $\beta$ jsou úhly vedlejší, a jejich součet je proto 180°.




Obr. 9

*V každém rovnoběžníku se úhlopříčky půlí (vlastnost 8 v tab. 1).*

Ze shodnosti dvojic střídavých úhlů označených postupně jako $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$ (obr. 10) a ze shodnosti protějších stran rovnoběžníku plyne, že trojúhelníky $ABS$ a $CDS$ jsou shodné podle věty *usu*. Na základě obdobné úvahy jsou také shodné trojúhelníky $BCS$ a $DAS$ dle věty *usu*. Ze shodnosti odpovídajících si stran v těchto trojúhelnících plyne, že bod $S$ je středem obou úhlopříček, a úhlopříčky se tedy půlí.




Obr. 10

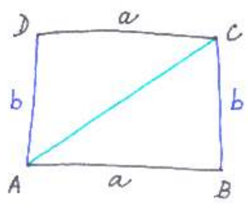
*Každá úhlopříčka dělí rovnoběžník na dva shodné trojúhelníky (vlastnost 12 v tab. 1).*

Z údajů na obr. 10 je zřejmé, že každá úhlopříčka půlí rovnoběžník na dva shodné trojúhelníky $ACD$ a $CAB$, resp. $DAB$ a $BCD$.

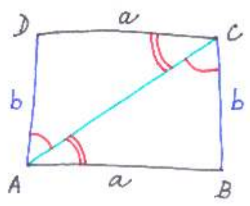
## Tabulka vlastností rovnoběžníků potřetí

V předcházející části jsme na základě definice rovnoběžníku odvodili pět tvrzení o jeho vlastnostech. Víme už například, že každé dvě protější strany rovnoběžníku mají shodnou délku. Vzniká otázka, zda platí uvedené tvrzení také obráceně: *Mají-li v čtyřúhelníku každé dvě protější strany shodnou délku, potom se jedná o rovnoběžník.*

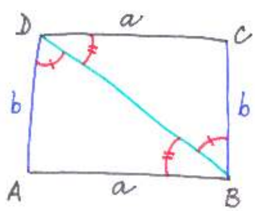
Na obr. 11 je zobrazena výchozí situace, kde v načrtnutém čtyřúhelníku jsou protější strany shodné a je zde navíc dokreslena úhlopříčka $AC$. Vyznačené trojúhelníky $ACD$ a $CAB$ jsou shodné dle věty *sss*. Odpovídající úhly ležící v trojúhelnících při straně $AC$ jsou střídavé a ze shodnosti trojúhelníků plyne, že jsou shodné (obr. 12). Odtud dostáváme, že strany $AB$ a $CD$ a stejně i strany $BC$ a $AD$ čtyřúhelníku $ABCD$ jsou rovnoběžné. Čtyřúhelník $ABCD$ je tedy rovnoběžník, a tím je tvrzení dokázáno. K důkazu tohoto tvrzení můžeme využít také obr. 13, kde čtyřúhelník $ABCD$ je rozdělen na dva shodné trojúhelníky pomocí úhlopříčky $BD$.




Obr. 11




Obr. 12




Obr. 13

Rovnoběžník můžeme také definovat jako čtyřúhelník, ve kterém mají každé dvě protější strany shodnou délku (vlastnost 2). K obdobným závěrům bychom dospěli i v případech souvisejících s vlastnostmi 5, 7, 8 a 12:

*Každý čtyřúhelník, ve kterém platí některá z vlastností*

– *všechny protější úhly jsou shodné,*

– *součet velikostí každých dvou sousedních úhlů je* 180°*,*

– *úhlopříčky se půlí,*

– *každá úhlopříčka dělí čtyřúhelník na dva shodné trojúhelníky*

*je rovnoběžník.*

Odtud plyne, že rovnoběžník lze definovat nejen pomocí rovnoběžnosti nebo shodnosti protějších stran, ale také každou z vlastností 5, 7, 8 a 12.

## Tabulka vlastností rovnoběžníků počtvrté

V tab. 1 si nyní všimneme řádků 3, 4, 6, 9, 10 a 11, ve kterých se vyskytují symboly + i −. Budeme zkoumat, zda existují čtyřúhelníky, které *nejsou rovnoběžníky* a přitom mají některou z těchto vlastností. Zaměříme se nejprve na vlastnosti uvedené v řádcích 3, 4, 6 a 11.

*Existuje čtyřúhelník, který není rovnoběžníkem a jehož každé dvě sousední strany jsou shodné?*

Ze shodnosti každých dvou sousedních stran plyne shodnost všech čtyř stran čtyřúhelníku. V předchozí části jsme ukázali, že již ze shodnosti protějších stran čtyřúhelníku plyne, že jde o rovnoběžník.

*Existuje čtyřúhelník, který není rovnoběžníkem a jehož všechny vnitřní úhly jsou pravé?*

Z předpokladu, že všechny vnitřní úhly jsou pravé, plyne, že protější úhly jsou shodné. V předchozí části jsme vysvětlili, že již ze shodnosti protějších úhlů čtyřúhelníku plyne, že jde o rovnoběžník.

*Existuje čtyřúhelník, který není rovnoběžníkem a jehož každé dva sousední úhly jsou shodné?*

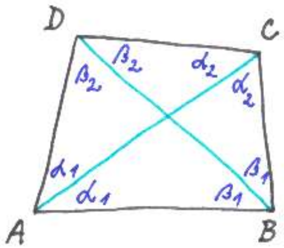
Jsou-li sousední úhly shodné, potom jsou všechny úhly shodné, a proto i protější úhly jsou shodné. Jde tedy o rovnoběžník.

*Existuje čtyřúhelník, který není rovnoběžníkem a jehož úhlopříčky půlí příslušné vnitřní úhly?*

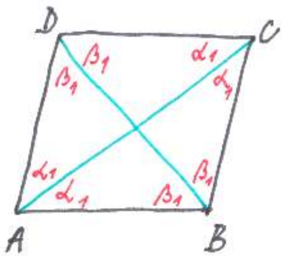
Načrtneme si čtyřúhelník $ABCD$, jehož úhlopříčky půlí vnitřní úhly (obr. 14). Součet velikostí vnitřních úhlů v trojúhelnících $ABC$ i $ACD$ je $180°$, a proto platí $\alpha_1 + 2\beta_1 + \alpha_2 = \alpha_1 + 2\beta_2 + \alpha_2$. Jednoduchou úpravou získané rovnosti dospějeme ke vztahu $\beta_1 = \beta_2$. Obdobně bychom dospěli při využití trojúhelníků $ABD$ a $BCD$, že $\alpha_1 = \alpha_2$. Z uvedeného plyne, že každé dva protější úhly jsou shodné (obr. 15), proto jde o rovnoběžník.

Ukázali jsme, že čtyřúhelník s kteroukoliv vlastností 3, 4, 6 a 11 je vždy rovnoběžník.

Zbývají vlastnosti 9 a 10, pro které prověříme, zda je mají i jiné čtyřúhelníky než rovnoběžníky.



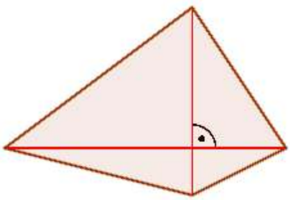

Obr. 14



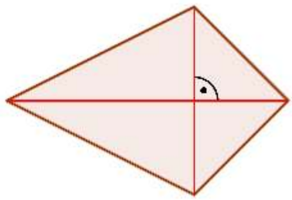

Obr. 15

*Existuje čtyřúhelník, který není rovnoběžníkem a jehož úhlopříčky jsou k sobě kolmé?*

V případě hledání čtyřúhelníků, které mají kolmé úhlopříčky, lze v programu GeoGebra tyto úhlopříčky sestrojit a změnou polohy jejich krajních bodů (při zachování kolmosti úhlopříček) postupně objevovat různé případy čtyřúhelníků (obr. 16). Ve speciálním případě dospějeme k *deltoidu* (obr. 17).



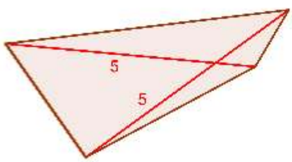
Obr. 16



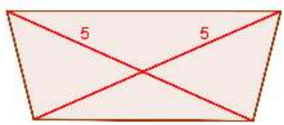
Obr. 17

*Existuje čtyřúhelník, který není rovnoběžníkem a jehož úhlopříčky mají shodnou délku?*

Obdobně jako v předchozím případě můžeme v GeoGebře zadat stejně dlouhé a protínající se úsečky–úhlopříčky, např. délky 5 cm. Krajní body těchto dvou úseček určují vrcholy čtyřúhelníku. Změnou polohy krajních bodů sestrojených úseček získáme různé obecné čtyřúhelníky (obr. 18). Jako speciální případ obdržíme *rovnoramenný lichoběžník* (obr. 19).



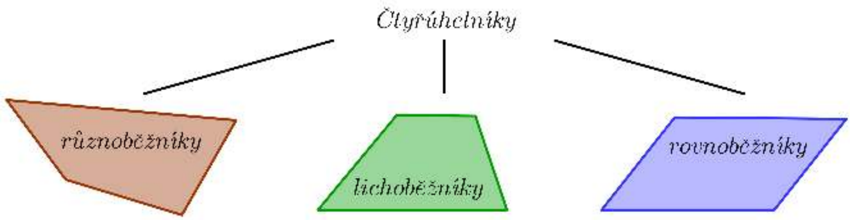

Obr. 18




Obr. 19

### Tabulka vlastností rovnoběžníků popáté

Můžeme se opět vrátit k tab. 1, kde v řádku 1 je uvedena vlastnost-kritérium *každé dvě protější strany jsou navzájem rovnoběžné.* Můžeme se ptát, které čtyřúhelníky tuto vlastnost nemají. Postupně tak dospějeme k rozkladu množiny všech čtyřúhelníků podle počtu dvojic rovnoběžných stran (obr. 20).




Obr. 20

Obdobně můžeme provádět klasifikace čtyřúhelníků „zeslabováním“ podmínek, například v řádku 4 tab. 1: *všechny vnitřní úhly jsou pravé* – dostáváme pravoúhelníky, *tři vnitřní úhly jsou pravé* – jde o prázdnou množinu, *dva vnitřní úhly jsou pravé* – jde např. o pravoúhlé lichoběžníky a některé deltoidy, *jeden vnitřní úhel pravý* – např. některé deltoidy a některé další různoběžníky, *žádný úhel pravý* – např. kosoúhelníky, obecné lichoběžníky, rovnoramenné lichoběžníky a některé deltoidy.

Podstatné je, aby žáci při probírání čtyřúhelníků byli vedeni k aktivní práci, aby experimentovali, vytvářeli sami příslušné hypotézy o vlastnostech čtyřúhelníků, zdůvodňovali je a užívali získané poznatky. V uvedeném tématu doporučujeme při modelování různých situací využít program GeoGebra. Pokud není k dispozici, mohou žáci črtat obrázky a používat k modelování čtyřúhelníků špejle nebo tužky.

### Literatura


[1] *Hermann, J. a kol.*: Matematika pro nižší ročníky víceletých gymnázií: Trojúhelníky a čtyřúhelníky. Prometheus, Praha, 1995.

[2] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Matematika pro 7. ročník ZŠ, 3. díl: Shodnost; středová souměrnost; čtyřúhelníky; hranoly. Prometheus, Praha, 2012.

# O záludnosti jedné úlohy z MO

*HANA ŠTĚPÁNKOVÁ*

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Před časem jsem posuzovala řešení jedné úlohy z Matematické olympiády (MO), která byla zadána žákům 1. ročníků středních škol a odpovídajících ročníků gymnázií v krajském kole (v Jihočeském kraji) kategorie C této soutěže.

Zadání úlohy bylo jednoduché a srozumitelné. Kromě čtyř řešitelů z celkového počtu 42 se všichni ostatní pokusili nalézt řešení této úlohy. Osmnáct z nich nepřišlo na myšlenku, jak danou úlohu vyřešit, ostatní dospěli ke správnému výsledku. Každý, kdo opravuje úlohy MO, kontroluje nejen správný výsledek, ale sleduje také správný postup řešení. Při této činnosti jsem byla nemile překvapena zjištěním, že pouze 6 řešitelů uvedlo naprosto korektní řešení. Většinu z těch, kteří dospěli ke správnému výsledku, avšak s chybným postupem, zavedl do slepé uličky nezjednodušený poměr 63 : 36 uvedený v zadání úlohy.

Je již tradicí zařazovat do zadání úloh číslo ročníku, v kterém se soutěž konala, nebo letopočet příslušného roku. Z tohoto důvodu byl v textu úlohy uveden zápis poměru 63 : 36 místo jednoduššího 7 : 4. Uvažovala jsem proto o možnosti změny formulace zadané úlohy tak, aby chybný postup, kterým se ubírala většina řešitelů, nevedl ke správnému výsledku. Jak by zvolal Archimédes „Heuréka“, našla jsem. Pojďme se nyní detailněji podívat na tuto úlohu, její správné řešení a porovnejme je s úvahou většiny řešitelů a dále s pozměněnou úlohou.

**Úloha** (63-MO-C-II-1)

Najděte všechny trojice (ne nutně různých) číslic $a$, $b$, $c$, pro něž pětimístná čísla $\overline{6abc3}$ a $\overline{3abc6}$ jsou v poměru 63 : 36.

*Řešení.* Dvě zadaná čísla můžeme rozepsat jako

$$\overline{6abc3} = 60000 + 1000a + 100b + 10c + 3,$$
$$\overline{3abc6} = 30000 + 1000a + 100b + 10c + 6,$$

kde $a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Zavedením substituce

$$x = 100a + 10b + 1c, \tag{1}$$

zjednodušíme zápisy čísel na tvar

$$\overline{6abc3} = 60000 + 10x + 3, \tag{2}$$

$$\overline{3abc6} = 30000 + 10x + 6. \tag{3}$$

Má-li být splněna podmínka, že daná čísla jsou v poměru 63 : 36, musí platit

$$\frac{\overline{6abc3}}{\overline{3abc6}} = \frac{63}{36} = \frac{7}{4}. \tag{4}$$

Dosadíme-li do vztahu (4) tvary čísel (2) a (3), získáme následující rovnici

$$\frac{60000 + 10x + 3}{30000 + 10x + 6} = \frac{7}{4}.$$

Odtud $x = 999$. Tomu odpovídá trojice číslic $a = b = c = 9$. Úloha má tedy jediné řešení, a to čísla 69 993 a 39 996.

Uvedený postup vznikl rozvedením vzorového řešení dostupného na internetovém zdroji [3], kde je i návod na bodové ohodnocení této úlohy. Následující možnost chybného řešení zdroj neuvádí.

## Nesprávná úvaha některých řešitelů

Jak bylo v úvodu článku zmíněno, někteří účastníci krajského kola MO se při řešení zadané úlohy nevyvarovali chybné úvahy. Nejčastější přístup ke zjištění dvou neznámých čísel totiž spočíval v tom, že řešitelé hledali tato čísla ve tvaru násobků čísel 63 a 36 tak, aby přitom splňovala daný poměr. Protože hledaná čísla jsou opravdu takovými násobky, dospěli tito řešitelé ke správnému výsledku.

Popišme nyní postup jejich řešení: Aby hledaná pětimístná čísla $\overline{6abc3}$ a $\overline{3abc6}$ byla v poměru 63 : 36, musí být nějakým přirozeným násobkem čísel 63 a 36. Označme tedy

$$\overline{6abc3} = 63 \cdot k, \quad \overline{3abc6} = 36 \cdot k, \quad \text{kde } k \in \mathbb{N}.$$

Snadno zjistíme, že číslo $63 \cdot k$ bude pětimístné s první číslicí 6, jestliže $k \in \{953, 954, \dots, 1111\}$. Analogicky vidíme, že číslo $63 \cdot k$ bude pětimístné s první číslicí 3, když $k \in \{834, 835, \dots, 1111\}$. Obě skutečnosti jsou splněny současně, právě když $k \in \{952, 953, \dots, 1111\}$. Navíc, $k$-násobek čísla 63 je ukončen číslicí 3 (a $k$-násobek čísla 36 je ukončen číslicí 6), má-li číslo $k$ na místě jednotek číslici 1, tedy $k \in \{961, 971, \ldots, 1111\}$. Vyzkoušením všech 16 možností zjistíme, že vyhovuje jen $k = 1111$, pro něž platí $a = b = c = 9$, a hledaná čísla jsou 69 993 a 39 996.

Tento postup vypadá na první pohled zcela správně, ale není tomu tak. Řešitelé úlohy opomněli jednu důležitou věc. Zadaný poměr 63 : 36 bychom totiž mohli také napsat například jako 42 : 24. Stále jde o poměr, jehož základní tvar je 7 : 4. V zadané úloze je rozšířen devíti a podruhé jsme jej rozšířili osmi.

Podívejme se, jak by celá situace vypadala, kdyby zadaný poměr byl 42 : 24, a porovnejme řešení oběma výše uvedenými přístupy.

## Řešení pozměněné úlohy

Máme najít všechny trojice (ne nutně různých) číslic $a, b, c$, pro něž pětimístná čísla $\overline{6abc3}$ a $\overline{3abc6}$ jsou v poměru 42 : 24.

*První způsob řešení.* Dvě zadaná čísla opět můžeme rozepsat jako

$$\overline{6abc3} = 60000 + 1000a + 100b + 10c + 3,$$
$$\overline{3abc6} = 30000 + 1000a + 100b + 10c + 6,$$

kde $a, b, c \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. Využitím substituce (1) dostaneme čísla ve tvaru (2) a (3) a sestavíme rovnici

$$\frac{60000 + 10x + 3}{30000 + 10x + 6} = \frac{42}{24} = \frac{7}{4}.$$

Ať už k výpočtu na pravé straně rovnice použijeme zlomek $\frac{42}{24}$ nebo $\frac{7}{4}$, výsledek bude vždy $x = 999$. Nacházíme jediné řešení, kterým jsou čísla 69 993 a 39 996.

*Druhý způsob řešení.* Hledejme neznámá čísla jako násobky čísel 42, resp. 24. Můžeme je tedy zapsat ve tvaru

$$\overline{6abc3} = 42 \cdot k, \quad \overline{3abc6} = 24 \cdot k, \quad \text{kde } k \in \mathbb{N}.$$

Je zřejmé, že pro žádné přirozené číslo $k$ nebude číslo $\overline{6abc3}$ násobkem čísla 42. Číslo $\overline{6abc3}$ je totiž číslo liché a každý přirozený násobek čísla 42 je vždy číslo sudé.

Odpověď většiny řešitelů by v tomto případě asi byla, že hledaná čísla neexistují. Pokud by jim ovšem na mysl nepřišlo podezření, že úloha by nejspíš nějaké řešení mít měla a oni by ve svém výpočtu chybnou úvahu odhalili a opravili ji.

Bystrý čtenář už určitě nahlédl, že základním problémem při druhém přístupu k řešení dané úlohy je nutnost uvedení poměru na základní tvar. Tím bude zaručeno, že vezmeme v úvahu každá dvě čísla, která jsou v poměru 7 : 4 a nalezneme už několikrát uvedené řešení; to se přes násobky čísla 42 nestalo.

Jistě bychom našli i jiné příklady, kdy řešitelé uvádějí zdánlivě korektní postupy vedoucí ke správnému výsledku, v nichž však při důkladnějším prozkoumání objevíme hrubé chyby. Tito řešitelé si tyto nedostatky neuvědomují. Pokud posuzovatel takové chyby nepřehlédne, je vystaven tlaku řešitelů, dotazujících se s pocitem křivdy na bodovou penalizaci, když vědí, že jejich výsledek je správný. Smutnější ale je, pokud méně zkušený opravující nezjistí, že postup řešení je chybný.

V tomto příspěvku jsme chtěli upozornit především na důležitou skutečnost, že správný výsledek a postup řešení úlohy jsou dvě části, které neoddělitelně patří k sobě.

## Literatura


[1] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Matematika pro 7. ročník ZŠ, 2. díl. Prometheus, Praha, 1998.

[2] *Tlustý, P.*: Obecná algebra pro učitele. Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2006.

[3] 63. MO, dostupné na: http://mo.webcentrum.muni.cz/media/1024174/c63ii.pdf.


# Čtyři body na kružnici


*JAROSLAV ŠVRČEK – VOJTĚCH ZLÁMAL*

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc


Cílem tohoto příspěvku je poskytnout čtenáři stručný a přehledný návod, jak řešit planimetrické důkazové úlohy, jejichž úkolem (nebo součástí řešení) je dokázat, že dané čtyři (popř. více než čtyři) body leží na téže kružnici.

Metodika popsaná v tomto článku není v potřebném rozsahu k dispozici žákům ani učitelům našich středních škol v příslušných učebnicích planimetrie pro gymnázia ani pro střední odborné školy. Tato skutečnost je limitována poměrně velkým množstvím dalších tematických (kurikulárních) celků obsažených v RVP. S uvedenou problematikou se však hojně setkávají matematicky zdatnější žáci (a potažmo i jejich učitelé) při řešení úloh z různých matematických soutěží. Zmíněné postupy jsou tak žáci nuceni nejprve objevit samostatně a poté aplikovat při řešení daných úkolů.

Při provádění důkazů, že dané čtyři body leží na téže kružnici (jsou koncyklické) lze postupovat dvěma základními (syntetickými) cestami. Nejprve oba základní postupy popíšeme a dále ukážeme aplikace obou popsaných metod při řešení několika snazších úloh.

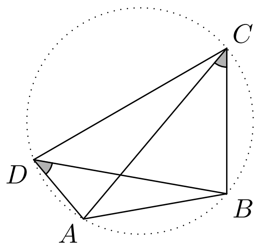
Kvůli zjednodušení úvah budeme (bez újmy na obecnosti) uvažovat body $A$, $B$, $C$, $D$, které v tomto pořadí tvoří vrcholy konvexního čtyřúhelníku.

První způsob řešení důkazových úloh daného typu se opírá (ve trojí modifikaci) o základní vlastnosti *obvodových úhlů*, popř. známé kriterium pro tětivový čtyřúhelník. Lze jej charakterizovat následujícími známými tvrzeními, které zde nebudeme dokazovat. Důkazy těchto tvrzení je možno nalézt např. v [1], [5].

**Věta 1**

Konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když platí

$$|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADB|. \quad \text{(obr. 1)}$$




Obr. 1

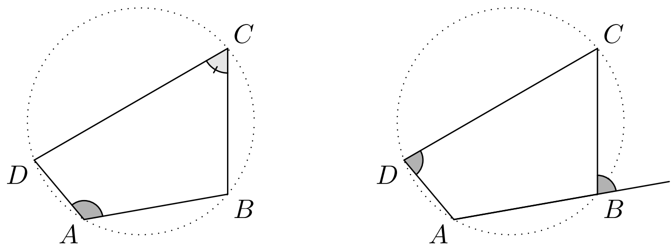
**Věta 2a** (kriterium tětivového čtyřúhelníku)

Konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když platí

$$|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle ADC| + |\sphericalangle CBA| = 180^\circ. \quad \text{(obr. 2a)}$$

**Věta 2b**

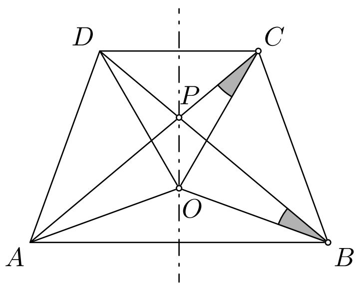
Konvexnímu čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když velikost vnitřního úhlu při kterémkoliv jeho vrcholu je shodná s velikostí vedlejšího úhlu u vrcholu protějšího (obr. 2b).



Obr. 2a Obr. 2b

**Příklad 1**

Nechť $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník se základnami $AB$ a $CD$, $P$ nechť značí průsečík jeho úhlopříček a $O$ střed kružnice jemu opsané. Dokažte, že body $B$, $C$, $P$, $O$ leží na téže kružnici.



Obr. 3

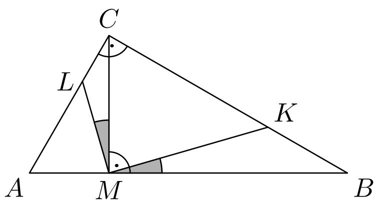
*Řešení.* Předpokládejme, že $P \neq O$. V opačném případě je řešení triviální. Dále předpokládejme, že body $B$, $C$, $P$, $O$ tvoří v uvedeném pořadí vrcholy čtyřúhelníku stejně jako na obr. 3.

Předně si uvědomme, že body $P$ a $O$ leží na společné ose základen $AB$, $CD$ rovnoramenného lichoběžníku $ABCD$ a že úhlopříčky $AC$ a $BD$ lichoběžníku $ABCD$ jsou shodné. V případě čtyřúhelníku $BCOP$ (vrcholy čtyřúhelníku jsou po řadě body $B$, $C$, $O$, $P$) je možno situaci řešit analogicky. Jelikož bod $O$ je středem kružnice opsané uvažovanému lichoběžníku a $|AC| = |BD|$, jsou trojúhelníky $AOC$ a $DOB$ shodné (podle věty *sss*).

Platí tedy $|\sphericalangle PCO| = |\sphericalangle PBO|$. Podle věty 1 je tak čtyřúhelník $BCPO$ tětivový ($B$, $C$, $P$, $O$ leží na téže kružnici).

## Příklad 2

Je dán pravoúhlý trojúhelník $ABC$ s pravým úhlem při vrcholu $C$, bod $M$ jako pata kolmice z vrcholu $C$ na stranu $c$ a body $K$, $L$ ležící po řadě na stranách $BC$, $CA$, přičemž platí $2\,|BK| = |CK|$ a $2\,|CL| = |AL|$ (obr. 4). Dokažte, že body $K$, $C$, $L$ a $M$ leží na téže kružnici.



Obr. 4

*Řešení.* Vzhledem k tomu, že úsečka $CM$ je kolmá ke straně $AB$, platí

$$|\sphericalangle CBA| = |\sphericalangle ACM|, \qquad |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle MCB|,$$

z čehož vyplývá, že trojúhelníky $CAM$ a $BCM$ jsou podle věty *uu* podobné.

Jelikož body $K$ a $L$ dělí po řadě strany $BC$ a $CA$ ve stejném poměru, jsou také trojúhelníky $MBK$ a $MCL$ podobné. Platí tedy $|\sphericalangle BMK| = |\sphericalangle CML|$. Odtud plyne

$$90^\circ = |\sphericalangle BMC| = |\sphericalangle BMK| + |\sphericalangle KMC| = \\ = |\sphericalangle KMC| + |\sphericalangle CML| = |\sphericalangle KML|.$$

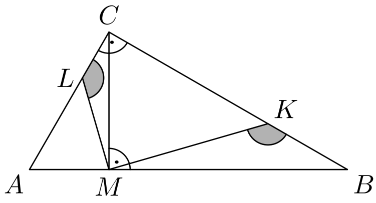
Jelikož

$$|\sphericalangle LCK| + |\sphericalangle KML| = |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle KML| = 180^\circ,$$

body $K$, $C$, $L$, $M$ leží (podle věty 2a) na téže kružnici.

*Jiné řešení.* Opět využijeme skutečnosti, že trojúhelník $MBK$ je podobný trojúhelníku $MCL$ (viz první řešení). Platí tudíž $|\sphericalangle MLC| = |\sphericalangle MKB|$ (obr. 5).

S ohledem na větu 2b je tak dokázáno, že body $K$, $C$, $L$, $M$ leží na téže kružnici.

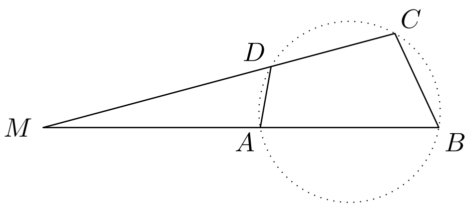


Obr. 5

Další způsob provádění důkazů, že dané čtyři body leží na téže kružnici, využívá tzv. *mocnosti bodu ke kružnici*, viz např. [2]. Tento způsob je charakterizován následujícími dvěma známými tvrzeními.

**Věta 3a**

Nechť je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ a předpokládejme, že se přímky $AB$ a $CD$ protínají v bodě $M$ (obr. 6). Čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když platí $|MA| \cdot |MB| = |MD| \cdot |MC|$.

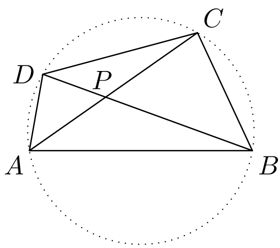


Obr. 6

**Věta 3b**

Nechť $P$ je průsečík úhlopříček konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 7). Čtyřúhelníku $ABCD$ lze opsat kružnici, právě když platí

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|.$$



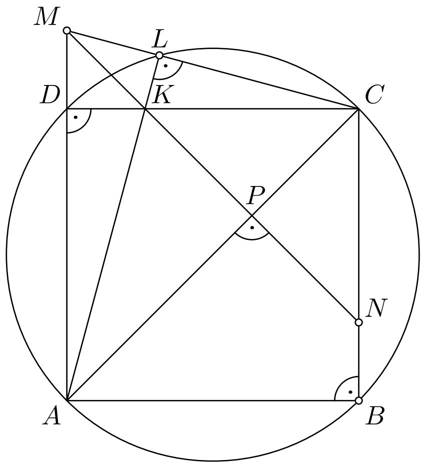
Obr. 7

*Poznámka.* Věta 3b se však v praxi využívá především při řešení metrických úloh vycházejících z umístění čtyř bodů na kružnici, nikoliv tedy s cílem dokázat koncykličnost čtyř bodů.

**Příklad 3** (53. MO, A–III–5)

Nechť $L$ je libovolný vnitřní bod kratšího oblouku $BC$ kružnice opsané čtverci $ABCD$. Označme $K$ průsečík přímek $AL$ a $CD$, $M$ průsečík přímek $AD$ a $CL$ a $N$ průsečík přímek $MK$ a $BC$. Dokažte, že body $B$, $L$, $M$ a $N$ leží na téže kružnici.

*Řešení.* Jelikož úhlopříčka $AC$ je průměrem kružnice opsané čtverci $ABCD$, je úhel $ALC$ pravý (podle Thaletovy věty). V trojúhelníku $ACM$ tak tvoří úsečky $AL$ a $CD$ výšky a bod $K$ je jejich průsečíkem, tj. *ortocentrem* trojúhelníku $ACM$. Označme $P$ průsečík přímek $AC$ a $MK$. Protože úsečka $MP$ prochází bodem $K$, je výškou v trojúhelníku $ACM$ k jeho straně $AC$. Odtud vyplývá, že úhel $MPA$ je pravý (obr. 8).




Obr. 8

Přímka $MK$ protíná stranu $BC$ v jejím vnitřním bodě $N$, neboť přímka $MK$ je rovnoběžná s úhlopříčkou $BD$ (obě jsou kolmé na $AC$). Vzhledem k tomu, že úhly $NBA$, $APN$, $ADC$ a $ALC$ jsou pravé, jsou podle Thaletovy věty čtyřúhelníky $DKLM$, $APKD$, $ABNP$ tětivové. Bod $C$ leží vně kružnic opsaných uvedeným čtyřúhelníkům, je možné tak využít větu 3a.

Platí tedy

$$|CM| \cdot |CL| = |CD| \cdot |CK|,$$
$$|CD| \cdot |CK| = |CA| \cdot |CP|,$$
$$|CA| \cdot |CP| = |CB| \cdot |CN|.$$

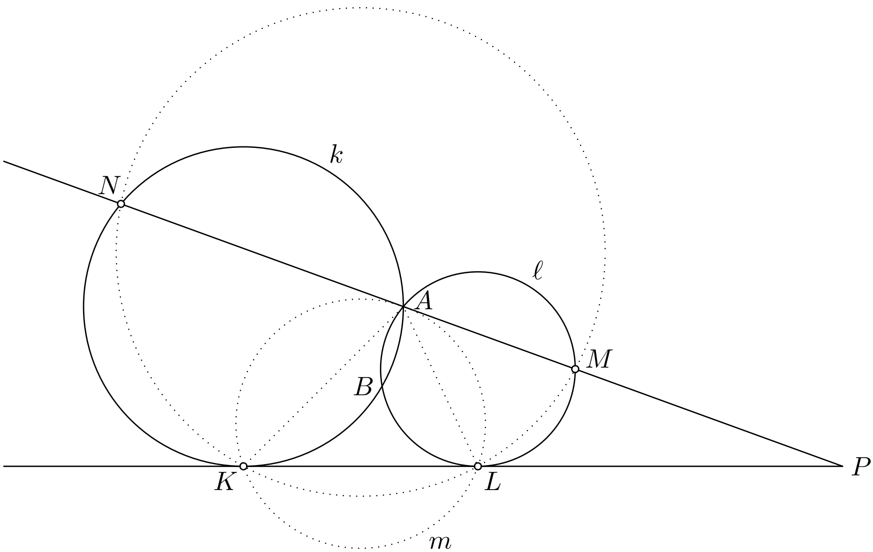
Odtud

$$|CM| \cdot |CL| = |CD| \cdot |CK| = |CA| \cdot |CP| = |CB| \cdot |CN|,$$
$$|CM| \cdot |CL| = |CB| \cdot |CN|.$$

Tím je podle věty 3a dokázáno, že body $B$, $L$, $M$ a $N$ jsou koncyklické.

**Příklad 4** (60. MO, modifikace úlohy A–I–3)

Jsou dány kružnice $k$, $\ell$, které se protínají v bodech $A$, $B$. Označme $K$, $L$ po řadě dotykové body jejich společné tečny zvolené tak, že bod $B$ je vnitřním bodem trojúhelníku $AKL$. Na kružnicích $k$ a $\ell$ zvolme po řadě body $N$ a $M$ tak, aby bod $A$ byl vnitřním bodem úsečky $MN$, kde $MN$ a $KL$ jsou různoběžky (obr. 9). Dokažte, že pokud přímka $MN$ je tečnou kružnice opsané trojúhelníku $AKL$, je čtyřúhelník $KLMN$ tětivový.




Obr. 9

*Řešení.* Označme $P$ průsečík přímek $KL$ a $MN$. Jelikož je bod $P$ vně kružnic $k$, $\ell$, platí

$$|PK|^2 = |PA| \cdot |PN|, \qquad |PL|^2 = |PA| \cdot |PM|,$$

což je možno přepsat do tvaru

$$|PA| = \frac{|PK|^2}{|PN|}, \qquad |PA| = \frac{|PL|^2}{|PM|}. \tag{1}$$

Označme $m$ kružnici opsanou trojúhelníku $AKL$. Je zřejmé, že bod $P$ leží vně této kružnice. Z předpokladu, že přímka $MN$ je tečnou kružnice $m$ (s bodem doteku $A$), vyplývá

$$|PA|^2 = |PK| \cdot |PL|. \tag{2}$$

Z rovnic (1) a (2) plyne

$$|PK| \cdot |PL| = |PA|^2 = \frac{|PK|^2}{|PN|} \cdot \frac{|PL|^2}{|PM|},$$

$$|PK| \cdot |PL| = \frac{|PK|^2}{|PN|} \cdot \frac{|PL|^2}{|PM|} = |PK| \cdot |PL| \cdot \frac{|PK| \cdot |PL|}{|PN| \cdot |PM|}.$$

Nutně pak

$$\frac{|PK| \cdot |PL|}{|PN| \cdot |PM|} = 1,$$

tedy $|PK| \cdot |PL| = |PN| \cdot |PM|$. Podle věty 3a tak body $K$, $L$, $M$, $N$ leží na téže kružnici, čímž je důkaz ukončen.

Dále uvádíme neřešené úlohy s podobnou tematikou, které jsou určeny zájemcům o tuto problematiku.

## Příklad 5

Ve čtverci $ABCD$ jsou zvoleny na stranách $BC$ a $CD$ po řadě body $L$ a $M$ tak, že úhel $LAM$ má velikost 45°; úhlopříčka $BD$ protíná přímku $AL$ v bodě $K$ a přímku $AM$ v bodě $N$. Dokažte, že body $K$, $L$, $C$, $M$ a $N$ leží na téže kružnici.

[Určete velikost úhlu $ANL$ ve čtyřúhelníku $ABLN$.]

### Příklad 6

V rovině jsou dány dvě různé polopřímky $VX$ a $VY$. Na polopřímce $VX$ jsou dány body $A$, $C$, $E$, $G$ (v tomto pořadí podle vzdálenosti od bodu $V$, od nejbližšího po nejvzdálenější) a na polopřímce $VY$ body $B$, $D$, $F$, $H$ (v tomto pořadí podle vzdálenosti od bodu $V$, od nejbližšího po nejvzdálenější), přičemž body $A$, $B$, $C$, $D$ leží na téže kružnici, body $C$, $D$, $E$, $F$ leží na téže kružnici a body $E$, $F$, $G$, $H$ leží na téže kružnici. Dokažte, že také body $A$, $B$, $G$, $H$ leží na téže kružnici. [Použijte větu 2b.]

### Příklad 7

Nechť $ABC$ je ostroúhlý trojúhelník, $O$ průsečík jeho výšek a $O'$ bod souměrně sdružený s bodem $O$ podle osy $AB$. Dokažte, že body $A$, $O'$, $B$ a $C$ leží na téže kružnici. [Použijte větu 1.]

### Příklad 8

Nechť $ABC$ je tupoúhlý trojúhelník, $O$ průsečík jeho výšek a $O'$ bod souměrně sdružený s bodem $O$ podle osy $AB$. Dokažte, že body $A$, $O'$, $B$ a $C$ leží na téže kružnici. [Uvažte velikost úhlu $CO'B$.]

### Příklad 9

Buď $ABCD$ konvexní čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami, které se protínají v bodě $O$. Dokažte, že kolmé průměty $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ bodu $O$ po řadě na úsečky $AB$, $BC$, $CD$ a $DA$ leží na téže kružnici.

[Dokažte, že čtyřúhelník $AA'OD'$ je tětivový a dále užijte větu 1.]

### Příklad 10

Buď $ABCD$ tětivový čtyřúhelník. Nechť jsou $I_1$, $I_2$ středy kružnic vepsaných po řadě trojúhelníkům $ABC$ a $ABD$. Dokažte, že také čtyřúhelník $ABI_1I_2$ je tětivový. [Určete velikosti úhlů $AI_1B$ a $AI_2B$.]

### Příklad 11

Je dán trojúhelník $ABC$, kružnice $k$ opsaná trojúhelníku $ABC$ a průsečík $T$ tečen vedených ke kružnici $k$ body $A$, $B$. Přímka rovnoběžná s $AC$ a procházející bodem $T$ protíná úsečku $BC$ v bodě $D$. Dokažte, že body $B$, $D$, $A$ a $T$ leží na téže kružnici.

[Vezměte v úvahu různé vzájemné polohy přímek $TC$ a $AB$.]

L i t e r a t u r a


[1] *Andreescu, T. – Rolínek, M. – Tkadlec, M.*: 107 Geometry Problems From the Awesome Math Year-Round Program. XYZ Press, Plano, 2013.

[2] *Gergelitsová, Š. – Holan, T.*: Mocnost bodu ke kružnici v důkazech. MFI, roč. 24 (2015), č. 4, 252–263.

[3] *Monk, D.*: New Problems in Euclidean Geometry. United Kingdom of Mathematics Trust, Leeds, 2009.

[4] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia. Planimetrie. 4. upravené vyd., Prometheus, Praha, 2000.

[5] *Ponarin, J. P.*: Elementarnaja geometrija. Tom 1: Planimetrija, preobrazovanija ploskosti. 1. vyd., MCNMO, Moskva, 2004 (rusky).

[6] *Švrček, J.*: Gradované řetězce úloh v práci s matematickými talenty. 1. vyd., Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc, 2014.

[7] *Švrček, J.*: Jak provádět důkazy v planimetrii? In: Sborník příspěvků k výjezdnímu soustřední matematických talentů (Karlov pod Pradědem, únor 2012), Olomouc, 2014.


# Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojici úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 20. 1. 2016 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

### Úloha 219

Celá čísla $k$, $n$ splňují nerovnost

$$n \geq \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Dokažte, že pokud $k \geq 3$, lze číslo $n$ lze zapsat ve tvaru součtu $k$ navzájem různých celých kladných čísel, přičemž nejmenší z nich je sudé, druhé nejmenší je násobkem tří, třetí nejmenší násobkem čtyř atd., až největší z $k$ sčítanců je násobkem $k+1$. Platí stejný závěr i v případě $k = 2$?

*Jaromír Šimša*

## Úloha 220

V každém ze dvou výrazů

$$A = 2^{3^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{3}}}}}}, \qquad B = 3^{2^{3^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}$$

se pravidelně střídá 2016 dvojek a 2016 trojek. Hodnota kterého výrazu je větší?

*Jozef Mészáros*

Dále uvádíme řešení úloh 215 a 216, jejichž zadání byla zveřejněna ve třetím čísle letošního (24.) ročníku našeho časopisu.

## Úloha 215

Najděte všechny dvojice $(a, b)$ reálných čísel, pro které má rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + ab = 0$$

kořeny $-a$, $-b$ a $-ab$.

*Jaroslav Švrček*

*Řešení.* Podle Viètových vztahů je zadání úlohy ekvivalentní splnění rovnic

$$\begin{aligned} -a &= -a - b - ab, \\ b &= ab + a^2b + ab^2, \\ -ab &= -a^2b^2, \end{aligned}$$

neboli po úpravě

$$\begin{aligned} (1 + a)b &= 0, \\ b(a^2 + ab + a - 1) &= 0, \\ ab(ab - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Pokud $b = 0$, jsou všechny tři rovnice splněny a pro libovolné číslo $a$ má rovnice $x^3 + ax^2 = 0$ kořeny $-a$, 0 a $-a \cdot 0 = 0$. Předpokládejme dále, že $b \neq 0$. Potom platí

$$\begin{aligned} 1 + a &= 0, \\ a^2 + ab + a - 1 &= 0, \\ a(ab - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Z první rovnice $a = -1$, což po dosazení do libovolné ze zbývajících dvou rovnic po úpravě dává

$$b + 1 = 0,$$

tedy $b = -1$ a rovnice

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$

má kořeny $-1$, $1$ a $(-1) \cdot 1 = -1$.

Všechny dvojice $(a, b)$ reálných čísel vyhovujících zadání jsou dvojice $(1, -1)$ a dvojice tvaru $(a, 0)$ pro libovolné reálné číslo $a$.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z ETH Zürich. *Jan Gocník* a *Marian Poljak*, oba z GJŠ v Přerově, *Tomáš Domes* a *Lenka Kopfová*, oba z MG v Opavě, *Veronika Hladíková* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Ondřej Houška* z GNA v Praze 6, *Ivana Krumlová*, *Jan Šorm*, *Tran Anh Minh* a *Petr Zelina*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Jakub Matěna* z G v Praze 9, Českolipská, *Jan Petr* z GJK v Praze 6, *Pavel Turek* z G v Olomouci-Hejčíně a *Václav Voráček* z G v Jindřichově Hradci.

Neúplné řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Filip Bialas* z G Opatov v Praze 4, *Tomáš Konečný* z GJVJ v Českých Budějovicích, *Daniel Kopf* ze SG v Opavě, *Ester Sgalová* z GChD v Praze 5, *Lucien Šíma* z PORG v Praze 8 a *Vojtěch Lukeš* z GLP v Plzni.

*Poznámka.* Mezi řešitele s neúplným řešením jsou zařazeni i ti, kteří řešili úlohu: Najděte všechny dvojice $(a, b)$ reálných čísel, pro něž je každé z čísel $-a$, $-b$ a $-ab$ kořenem rovnice

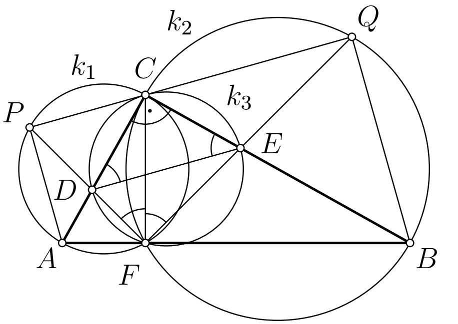
$$x^3 + ax^2 + bx + ab = 0.$$

## Úloha 216

Nechť $ABC$ je trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu $C$. Nechť dále $ACP$ a $BCQ$ jsou pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky s pravými úhly při vrcholech $P$ and $Q$ sestrojené vně trojúhelníku $ABC$. Označme $F$ patu výšky z vrcholu $C$ na stranu $AB$ a $D$, $E$ po řadě průsečíky přímek $AC$ a $PF$, resp. $BC$ a $QF$. Dokažte, že $|DC| = |EC|$.

*Gottfried Perz*

*Řešení.* Podle Thaletovy věty leží body $P$ a $F$ na kružnici s průměrem $AC$, označme ji $k_1$. Obdobně leží body $Q$ a $F$ na kružnici $k_2$ s průměrem $BC$. Bod $P$ půlí oblouk $AC$ kružnice $k_1$, přímka $PF$ je tedy osou pravého úhlu $AFC$, úhel $PFC$ tak má velikost 45°. Analogicky $FQ$ je osou úhlu $BFC$ a velikost úhlu $QFC$ je 45°. Úhel $PFQ$ jako součet úhlů $PFC$ a $QFC$ je tedy pravý a proto body $C$ a $P$ leží na kružnici s průměrem $DE$, kterou označíme $k_3$. Přitom jsou úhly $EFC$ a $PFC$ shodné (mají velikost 45°), tedy $FC$ je osou úhlu $EFD$ a proto bod $C$ je středem oblouku $DE$ kružnice $k_3$. Trojúhelník $DCE$ je tak rovnoramenný a jeho ramena $DC$ a $EC$ tak mají stejnou délku, což jsme měli dokázat.




Správná řešení zaslali: *Anton Hnáth* z Moravan, *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Jozef Mészáros* z Jelky,*Martin Raszyk* z ETH Zürich, *Filip Bialas* z G Opatov v Praze 4, *Jan Gocník* a *Marian Poljak*, oba z GJŠ v Přerově, *Tomáš Domes* a *Lenka Kopfová*, oba z MG v Opavě, *Veronika Hladíková* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Ondřej Houška* z GNA v Praze 6, *Tomáš Konečný* z GJVJ v Českých Budějovicích, *Daniel Kopf* ze SG v Opavě, *Ivana Krumlová*, *Jan Šorm*, *Tran Anh Minh* a *Petr Zelina*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Vojtěch Lukeš* z GLP v Plzni. *Jakub Matěna* z G v Praze 9, Českolipská, *Jan Petr* z GJK v Praze 6, *Ester Sgalová* z GChD v Praze 5, *Lucien Šíma* z PORG v Praze 8 a *Pavel Turek* z G v Olomouci--Hejčíně a *Václav Voráček* z G v Jindřichově Hradci.

Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

*Pavel Calábek*

# FYZIKA

# Prekoncepce žáků v termice

*DANA MANDÍKOVÁ – JIŘÍ SCHAMBERGER*

MFF UK, Praha, ZŠ Aléská, Bílina

Chceme-li rozvíjet znalosti a dovednosti žáků, musíme také vycházet ze zkušeností, které si již sami do školy přinášejí. Děti, ale i dospělí, mají vytvořenu řadu subjektivních intuitivních představ o tom, jak a proč okolní svět funguje. Souhrnně tyto představy označujeme jako *prekoncepce*. Prekoncepce mohou být jak správné (v souladu se současným vědeckým poznáním světa), tak nesprávné. Nesprávné prekoncepce se obvykle označují jako *miskoncepce*.

Je dobré, aby učitel měl přehled o prekoncepcích svých žáků, aby na ně mohl navázat a umožnil tak žákům lépe pochopit probírané učivo. Správné prekoncepce mohou výrazně napomoci porozumění fyzikálním pojmům ve výuce. Proti tomu chybné prekoncepce mohou bránit pochopení učiva a snižují tak efektivitu výuky.

V následujícím článku podáváme informaci o výzkumu, ve kterém jsme se zaměřili na prekoncepce žáků o teplu a teplotě.

## 1. Podmínky výzkumu

Při našem výzkumu jsme vycházeli z již dříve provedených výzkumů, a to jak našich, tak zahraničních. Z domácích se jedná zejména o diplomovou práci Mgr. Dagmar Likusové z roku 1994, kde bylo testováno 231 žáků základní školy a 21 studentů MFF UK [2] a ze zahraničních o článek [1].

Cílem našeho výzkumu bylo zmapovat a porovnat vědomosti a dovednosti žáků týkající se pojmů teplo, teplota a tepelné jevy. Především nás zajímalo, zda některé chybné představy přetrvávají i po seznámení se s učivem termiky ve škole. Z tohoto důvodu byli žáci dotazováni dvakrát: poprvé před výkladem dané látky ve škole (*pretest*) a po druhé po jejím probrání (*posttest*).

Sledovali jsme také, zda jsou nějaké výrazné rozdíly mezi žáky základních škol a žáky odpovídajících ročníků víceletých gymnázií.

Výzkum jsme provedli testem. Test tvořilo 13 otázek sestavených tak, aby pokryly učivo dané Rámcovým vzdělávacím programem. Pilotáž testu proběhla v červnu 2013 na ZŠ v Bílině v osmém ročníku, který se pak vlastního testování nezúčastnil. Žáci měli na vypracování testu 45 minut. Znění testu s autorským řešením je v Příloze 1 na konci článku.

Vlastního výzkumu se zúčastnili žáci pěti tříd osmých ročníků čtyř základních škol a žáci tří tříd odpovídajících ročníků tří víceletých gymnázií. Jedna ZŠ a dvě gymnázia byla z Prahy, další školy byly z menších měst.

Pretestovou část absolvovalo celkem 187 žáků; 97 dívek a 90 chlapců. Pretest byl žákům zadáván v období října až listopadu 2013.

Druhého kola testování se z různých důvodů (nemoc apod.) nezúčastnili všichni žáci. Celkem posttest absolvovalo 172 dětí, z toho 87 dívek a 85 chlapců. Posttest byl žákům zadáván v období ledna až května 2014.

## 2. Výsledky výzkumu

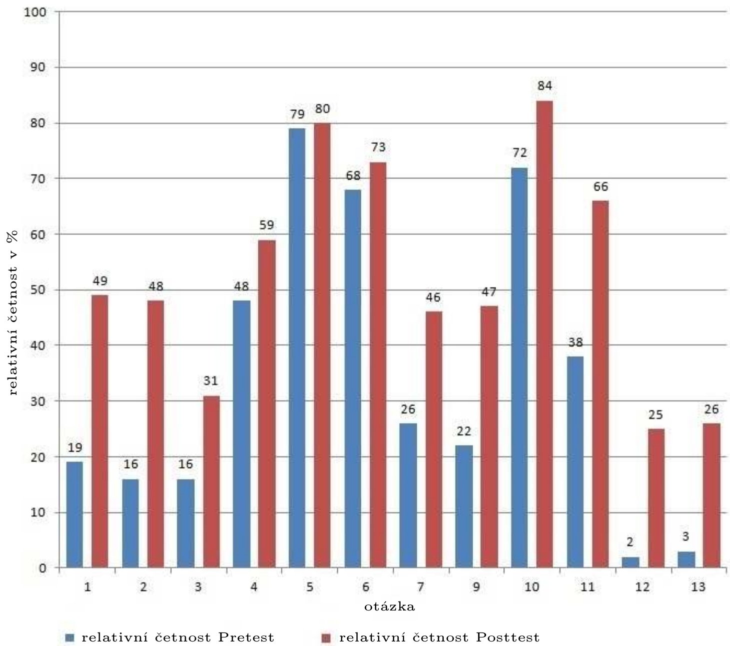
První fází zpracování výsledků bylo důkladné pročtení všech vyplněných testů a zjištění typů žákovských odpovědí. Na základě toho jsme rozdělili odpovědi do jednotlivých kategorií pro každou otázku. Součástí vyhodnocení každé otázky je vždy graf s relativními četnostmi odpovědí v jednotlivých kategoriích jak pro pretest, tak pro posttest, a to podle pohlaví žáků, i pro všechny žáky dané třídy a všechny žáky celkově. Diskuse u každé otázky podrobně rozebírá jednotlivé odpovědi a hodnocení vždy obsahuje cíl, který sleduje příslušná otázka. Soustředili jsme se zejména na kvalitativní rozbor odpovědí.

Zde se zaměříme jen na celkové shrnutí výsledků. Podrobné výsledky lze nalézt v [4].

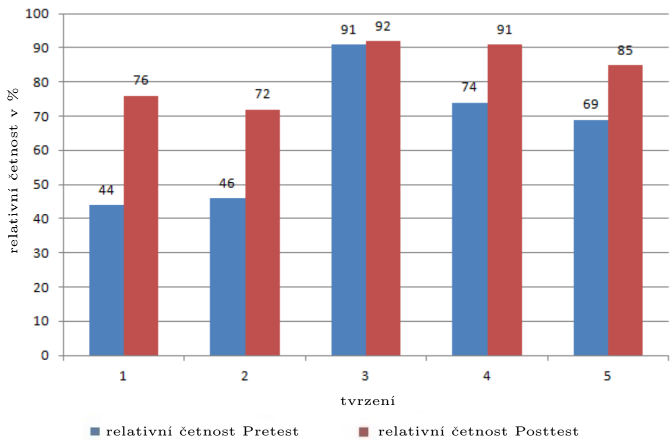
*Celkové výsledky*

V následujících grafech 1 a 2 jsou uvedeny relativní četnosti správných odpovědí (v %) na jednotlivé otázky testu (celkem jich bylo 13) pro všechny respondenty v pre a posttestu. Z technických důvodů je graf pro otázku číslo 8 uveden zvlášť.

Z grafů vyplývá, že *mezi otázky s největší úspěšností* patří otázky číslo 4 (teplota rozřezaného bloku ledu), číslo 5 a 6 (tání ledových bloků, $Q = ml_t$), číslo 8 (výměna tepla), číslo 10 (kalorimetrická rovnice, bez změny skupenství) a číslo 11 (kalorimetrická rovnice, bez změny skupenství).




Graf 1 Relativní četnost (v %) správných odpovědí vyjma otázky č. 8




Graf 2 Relativní četnost (v %) správných odpovědí otázka č. 8

Naopak mezi *otázky s nejnižší úspěšností* patří otázka číslo 3 (teplota předmětů), číslo 12 (chápaní pojmu teplo) a číslo 13 (chápaní pojmu teplota).

Otázky číslo 12 a 13 byly svým způsobem specifické, neboť nelze přesně rozlišit mezi správnou a chybnou odpovědí. Označil-li žák teplo jako něco, co souvisí s energií, teplo pouze jako fyzikální veličinu nebo teplotu pouze jako fyzikální veličinu, daly by se tyto odpovědi označit za částečně správné. Podrobné zpracování výsledků těchto otevřených otázek spolu s jednotlivými kategoriemi odpovědí lze nalézt v [4].

Zajímavějším ukazatelem je však podle nás procentuální nárůst či pokles relativní četnosti u správných odpovědí. Tady můžeme s uspokojením konstatovat, že u žádné otázky nedošlo k poklesu.

Nejvýraznější nárůst byl u následujících otázek:

– číslo 2 (tepelný vodič) o 32 %;
– číslo 1 (tepelný izolant) o 30 %;
– číslo 11 (kalorimetrická rovnice) o 28 %;
– číslo 9 (bod varu vody) o 25 %;
– číslo 12 (chápání pojmu teplo) o 23 %;
– číslo 13 (chápání pojmu teplota) o 23 %;
– číslo 7 (šíření tepla) o 20 %.

Naopak nejnižší nárůst (o 1 %) zaznamenala otázka číslo 5 (tání ledového bloku) a tvrzení číslo 3 otázky číslo 8 (o 1 %). Vzhledem k tomu, že již v pretestu byla relativní četnost úspěšných odpovědí u otázky číslo 5, resp. tvrzení číslo 3 u otázky číslo 8, vysoká – 79 %, resp. 91 %, nepovažujeme toto za nikterak závažné.

*Porovnání výsledků žáků ZŠ a víceletých gymnázií*

Sledovali jsme také, zda jsou nějaké výrazné rozdíly mezi žáky základních škol a víceletých gymnázií.

V pretestu dosahovali lepších výsledků žáci gymnázií, i když výraznější rozdíl (nad 5 %) byl jen u otázek číslo 3, 9, 10, 11 a 13. Žáci ZŠ měli vyšší úspěšnost v otázce číslo 6 (o 5 %).

V posttestu už byly výsledky vyrovnanější. Žáci ZŠ dosáhli lepšího výsledku v sedmi otázkách, více jak o 10 % to bylo v otázkách číslo 1, 6 a 7, o 8 % pak v otázce číslo 12. Žáci gymnázií si zachovali výraznou převahu v otázkách číslo 10 a 11, lepší zůstali i při řešení otázek číslo 3 a 9 a oproti pretestu získali lepší výsledek v otázce číslo 2 a číslo 8 (srovnáváme průměr za všechna tvrzení).

V odpovědích na otázky číslo 12 a 13 se pak ukázalo, že žáci ZŠ zůstávali častěji na konkrétní úrovni a uváděli příklady „teplých“ předmětů či teplotu konkrétních objektů.

*Přehled miskoncepcí*

Podívejme se ještě, jaké nejčastější miskoncepce se objevily v odpovědích žáků a nakolik byly zastoupeny v pre a v posttestu.

Srovnáme-li nejčastější miskoncepce uvedené v tab. 1 před a po probrání učiva, je potěšující, že u většiny jejich relativní četnost poklesla. Nejvýraznější pokles (větší než 10 %) jsme zaznamenali u těchto otázek:

– U otázky číslo 2, kdy žáci uváděli chybné zdůvodnění, proč pociťují ze tří uvedených předmětů jako nejchladnější železo – „železo je chladné“. Chybné odpovědi poklesly o 22 %.
– Pokles o 20 % byl i u otázky číslo 3, odpovědi C, tedy ponecháme-li v jedné místnosti předměty z různých materiálů, nejnižší teplotu bude mít železo.
– O 31 % resp. o 25 % poklesly chybné odpovědi u prvních dvou tvrzení otázky číslo 8.
– O 11 % u otázky číslo devět – vroucí voda má nejvyšší teplotu v nádobě, ve které vře nejdéle.

Naproti tomu relativní četnost některých chybných odpovědí oproti pretestu ještě stoupla. Za nejzávažnější nepříjemný vzestup považujeme odpověď A na otázku číslo 7 – teplo stoupá vzhůru, jejíž relativní četnost sice stoupla jen o 2 %, ale celkově činila 31 %.

Z otázek číslo 12 a 13 vyplynuly následující miskoncepce:

– Někteří žáci pojmy teplo a teplota ztotožňují.
– Někteří chápou teplotu jako něco, co je způsobeno teplem.
– Někteří chápou teplotu jako veličinu, kterou měříme teplo, případně si myslí, že teplota udává množství tepla.

Řada žáků také zůstává v chápání pojmů teplo a teplota pouze na konkrétní úrovni – udávají souvislosti s vlastními pocity nebo zcela konkrétní teplé předměty.

Tab. 1 Přehled nejčastějších miskoncepcí

| Číslo otázky | Miskoncepce | Pretest (%) | Posttest (%) |
|---|---|---|---|
| 1 | Kožich „hřeje“. | 36 | 27 |
| 2 | Železo je vnímáme jako nejchladnější prostě proto, že je „chladné“. | 53 | 33 |
| 3 | Železo má nejnižší teplotu. | 23 | 15 |
| 3 | Vata má nejnižší teplotu. | 47 | 27 |
| 4 | Větší blok ledu má nižší teplotu než menší, ač jsou ze stejného kusu ledu. | 17 | 15 |
| 6 | Menšímu i většímu kusu ledu téže teploty musíme dodat stejně tepla na roztání. | 15 | 10 |
| 7 | Teplo stoupá vzhůru (proto se dříve ohřeje horní konec tyče). | 29 | 31 |
| 7 | Teplo klesá dolů (proto se dříve ohřeje dolní konec tyče). | 9 | 8 |
| 8 | Hrneček se od čaje ohřívá, ale teplota čaje se nemění. | 52 | 27 |
| 8 | Čaj při chladnutí nepředává žádné teplo okolnímu vzduchu. | 30 | 15 |
| 9 | Voda, která déle vře, má vyšší teplotu. | 31 | 20 |
| 9 | Vroucí voda, pod kterou je největší plamen, má nejvyšší teplotu. | 31 | 24 |
| 10 | Při smíchání různých množství vody o stejné teplotě je výsledná teplota vody rovna součtu původních teplot. | 19 | 12 |
| 11 | Při smíchání stejného množství vody o různé teplotě je výsledná teplota vody rovna součtu původních teplot. | 12 | 11 |
| 12 | Teplo je ztotožňováno s vlastními pocity. | 27 | 5 |
| 12 | Teplo je ztotožňováno s teplými předměty. | 24 | 9 |
| 13 | Nesprávné chápání rozdílu mezi teplem a teplotou (ztotožňování obou veličin). | 23 | 20 |

V článku jsme na základě výsledků výzkumu shrnuli některé chybné představy žáků o teple a teplotě. Zmapování miskoncepcí je prvním krokem na cestě k jejich překonávání. Důležité je, aby o nich učitel věděl a vedl žáky k tomu, aby si je sami uvědomili a poznali rozpor mezi nimi a tím, co se učí ve škole. K odhalení uvedených představ mohou učiteli sloužit například úlohy použité v testu a diskuze nad jejich řešením.

## Literatura


[1] *Clough, E. E. – Driver, R.*: Secondary students' conceptions of the conduction of heat; bringing together scientific and personal views. Physics Education 20 (1985), s. 176–182.

[2] *Likusová, D.*: Představy žáků o teple a teplotě. Diplomová práce, MFF UK, Praha, 1994.

[3] *Mandíková, D. – Trna, J.*: Žákovské prekoncepce ve výuce fyziky. Paido, Brno, 2011.

[4] *Schamberger, J.*: Prekoncepce žáků o teplu a teplotě. Diplomová práce, MFF UK, Praha, 2013.

[5] *Zedník, M.*: Prekoncepce žáků v oblasti geometrické optiky. Diplomová práce, MFF UK, Praha, 2009.


**Příloha č. 1 vzorově vyplněný test**

TEST

pochopení pojmů

TEPLO A TEPLOTA – VZOROVÉ ŘEŠENÍ

Příjmení a jméno:_________________________
Ročník:_________________________
Třída:_________________________
Datum:_________________________

**Pokyny:**
1. Vždy jen **jedna** odpověď je správná.
2. Nepřeskakuj otázky, často na sebe navazují.
3. Snaž se psát odpovědi, o jejichž správnosti jsi přesvědčen/a **Ty**, nikoli Tvůj spolužák.
4. Vyhni se tipování odpovědí.
5. Tam, kde je to požadováno, nezapomeň napsat zdůvodnění odpovědi.

**Počkej na pokyn** k zahájení testu, potom nalistuj následující stranu a postupně odpovídej.

Odpovídej tak, abys na všechny otázky testu odpověděl/a přibližně za **45 minut**.

1. Dvě naprosto stejné kostky ledu necháme v místnosti, první volně položenou na vzduchu a druhou zabalíme do kožichu. Která kostka roztaje **dříve**?

   A. Kostka zabalená v kožichu.
   B. Kostka volně položená na vzduchu.
   C. Obě kostky roztají za stejnou dobu.
   D. Nelze jednoznačně rozhodnout.

   Zdůvodnění odpovědi:

*Správná odpověď B – Dříve roztaje kostka na vzduchu, protože kožich je tepelný izolant a brání přístupu teplého vzduchu z okolí.*

2. Uvažujme tři předměty, které byly na delší čas umístěny venku v chladném prostředí: kousek vaty, kousek dřeva a kousek železa. Který předmět **vnímáme** při dotyku jako **nejchladnější**?

   A. Vatu.
   B. Dřevo.
   C. Železo.
   D. Všechny předměty vnímáme stejně.

   Zdůvodnění odpovědi:

*Správná odpověď C – Kov je dobrý vodič tepla a odvádí teplo z naší ruky lépe než vata nebo dřevo, které vedou teplo hůře.*

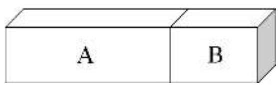
3. Který z výše uvedených předmětů má **nejnižší** teplotu?

   A. Vata.
   B. Dřevo.
   C. Železo.
   D. Všechny předměty mají stejnou teplotu.

   Zdůvodnění odpovědi:

*Správná odpověď D – Teplota předmětů je po delším čase vyrovnaná s teplotou okolí, tudíž stejná.*

4. Ledový blok (viz obrázek) byl rozřezán na dva kusy. Který kus má **nižší** teplotu?




   A. Nižší teplotu má kus A.
   B. Nižší teplotu má kus B.
   C. Oba kusy mají stejnou teplotu.
   D. Nelze jednoznačně rozhodnout.

   Zdůvodnění odpovědi:

*Správná odpověď C – Oba kusy byly z jednoho bloku, který měl určitou teplotu, ta se rozdělením bloku nezmění. (Ohřívání bloků při řezání neuvažujeme.)*

5. Dva kusy ledu z předchozí úlohy byly ponechány v místnosti při pokojové teplotě. Který kus roztaje dříve?

   A. Dříve roztaje kus A. B. Dříve roztaje kus B.

   C. Oba kusy roztají za stejnou dobu. D. Nelze jednoznačně rozhodnout.

   Zdůvodnění odpovědi:

*Správná odpověď B – Dříve roztaje kus B, protože je menší. Větší kostce A je třeba dodat na roztání více tepla.*

6. Kterému z kusů ledu z úlohy č. 4 musíme dodat **více** tepla, aby roztál? Proč?

   A. Více tepla musíme dodat kusu A.

   B. Více tepla musíme dodat kusu B.

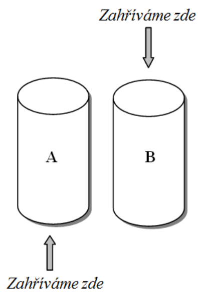
   C. Oběma kusům musíme dodat stejně tepla.

   D. Nelze jednoznačně rozhodnout.

   Zdůvodnění odpovědi:

*Správná odpověď A – Kostka A má větší hmotnost, musíme ji tedy dodat více tepla ($Q = ml_t$).*

7. Kovovou tyčku ve svislé poloze (viz obrázek) budeme zahřívat horkou plotýnkou vařiče jednou na dolním a podruhé na horním konci. Porovnejte **dobu**, za kterou se v obou případech ohřeje **opačný** konec tyčky.




   A. Dříve se ohřeje konec v situaci A.

   B. Dříve se ohřeje konec v situaci B.

   C. V obou případech se opačné konce ohřejí za stejnou dobu.

   D. V žádné ze situací se opačný konec neohřeje.

   Zdůvodnění odpovědi:

*Správná odpověď C – Teplo se vedením šíří v obou případech stejně rychle.*

8. Eva si nalila do hrnečku horký čaj. Zakroužkuj, zda následující tvrzení jsou či nejsou pravdivá.

| **Tvrzení** | **Pravdivé** |
|---|---|
| Hrneček se od čaje ohřeje, teplota hrnečku vzroste, teplota čaje se díky tomu sníží. | **ANO**/ NE |
| Hrneček se od čaje ohřeje, teplota hrnečku vzroste, teplota čaje se nezmění. | ANO / **NE** |
| Hrneček se od čaje ohřeje, teplota hrnečku vzroste, teplota čaje také vzroste. | ANO / **NE** |
| Čaj ohřívá okolní vzduch, teplota čaje se díky tomu snižuje. | **ANO**/ NE |
| Teplota čaje se postupně snižuje, čaj ale okolnímu vzduchu žádné teplo nepředává. | ANO / **NE** |

9. Na plynovém sporáku stojí tři otevřené nádoby, ve kterých vře voda. Ve které z nádob má voda **nejvyšší** teplotu?
   A. Nádoba, ve které vře voda nejdéle.
   B. Nádoba, pod kterou je nejmenší plamen.
   C. Nádoba, pod kterou je největší plamen.
   D. Ve všech nádobách má voda stejnou teplotu.
   Zdůvodnění odpovědi:

*Správná odpověď D – Teplota varu vody je při stejném tlaku okolního vzduchu stejná.*

10. Nádoba A obsahuje **100 g** vody o teplotě **25 °C**. Nádoba B obsahuje **200 g** vody také o teplotě **25 °C**. Obsah obou nádob smícháme v izolované nádobě (žádné teplo z okolí se nemůže přenést dovnitř ani ven). Jaká bude **výsledná teplota** směsi?
    A. 50 °C.
    B. 25 °C.
    C. Nižší než 20 °C.
    D. Vyšší než 50 °C.

*Správná odpověď B*

11. Nádoba A obsahuje **100 g** vody o teplotě **0 °C** a nádoba B **100 g** vody o teplotě **50 °C**. Obsah obou nádob smícháme v izolované nádobě (žádné teplo z okolí se nemůže přenést dovnitř ani ven). Jaká bude **výsledná teplota** směsi?
    A. 0 °C.
    B. 25 °C.
    C. Mezi 30 °C a 50 °C.
    D. 50 °C.

*Správná odpověď B*

12. Pokus se vysvětlit, co rozumíš pod pojmem **Teplo**.

*Správná odpověď – Teplo je mírou energie, kterou při tepelné výměně předá teplejší těleso studenějšímu (a různé formulace vystihující podstatu této definice).*

13. Pokus se vysvětlit, co rozumíš pod pojmem **Teplota**.

*Správná odpověď – Teplota je fyzikální veličina, charakterizující tepelný stav tělesa, úzce souvisí s neuspořádaným pohybem částic tělesa a jejich rychlostí.*

Test máš hotov. Děkujeme.

# Měsíc ve školní výuce

*VLADIMÍR ŠTEFL*

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

Nejbližším a nejvíce prozkoumaným kosmickým tělesem ve vesmíru je souputník Země Měsíc. Jak sledováním ze Země či přímým výzkumem na povrchu prostřednictvím lidských posádek, automatických vozítek, tak teoretickou analýzou údajů spojených s Měsícem, opírající se o fyzikální a chemické poznatky. Pro astronomii je nenahraditelný svou existencí na relativně blízké oběžné dráze kolem Země. Měsíc umožňuje zkoumání vzdálenějších těles, např. jeho zákryty hvězd stanovení poloměrů, u rádiových zdrojů zjištění jejich přesné polohy na obloze, připomínáme historii identifikace kvasaru 3C 273 [1].

Jaký je význam Měsíce pro život na Zemi? Jeho blízkost k ní, a tím i výraznost slapových sil vyvolávajících příliv a odliv, usnadnila přechod života z moře na pevninu. Pro jeho rozvoj na Zemi byla důležitá neproměnnost klimatu. To zajišťoval gravitační vliv Měsíce, který stabilizoval sklon zemské osy. Soustava Země–Měsíc a její vzdálenost od Slunce vytváří optimální životní podmínky.

Měsíc stál u kolébky historie objevu zákona všeobecné gravitace, patřila mu hlavní role v Newtonových úvahách o totožnosti tíhové a gravitační síly. Ve školní výuce je důležité porozumění problematice pohybu Měsíce pro tvorbu fyzikálních znalostí o gravitačním poli, které žáci vesměs postrádají, jak ukazuje řada výzkumů u nás [2] i v zahraničí [3]. Podstatné je rovněž osvojení prostorových představ o nejbližším okolí Země, jakož i pochopení skutečnosti, že rozměry Země, Měsíce a Slunce ve sluneční soustavě jsou zanedbatelné ve srovnání se vzdálenostmi mezi nimi.

Na obloze je Měsíc velmi působivý vzhledem k relativně rychlým změnám jeho vzhledu. Lze ho snadno sledovat i bez dalekohledu. Pro nepřehlédnutelnou jasnost, druhou největší na obloze po Slunci, je jeho pozorování pro žáky fascinující. Výše zmiňované může vytvářet motivační impuls k přemýšlení o jevech spojených s Měsícem na základě geometrických, kinematických a dynamických poznatků žákům známým z matematiky a fyziky.

Přemýšliví žáci, kterým je článek věnován především, si kladou v souvislosti s Měsícem řadu otázek:

Jak vznikl a jak je starý?

Jaká je stavba jeho nitra, má tekuté jádro jako Země?

Jak vznikly krátery na povrchu?

Probíhají i v současnosti nějaké změny na povrchu?

Existuje případně na Měsíci ještě vulkanická činnost?

Proč nemá Měsíc atmosféru?

Co je důvodem velkých rozdílů povrchových teplot mezi Měsícem a Zemí?

Ovlivňuje Měsíc Zemi, působí na její atmosféru, hydrosféru a litosféru?

Jaký je význam Měsíce pro život na Zemi?

Pro účely výuky připomeneme typické miskoncepce, s kterými se setkáváme zejména u žáků základních škol a nižších ročníků gymnázií. Pojem miskoncepce chápeme v klasickém pojetí podle Nachtigalla [4] ve smyslu „chybných představ o fyzikálních jevech, které se objevují u žáků, studentů“ ... „při vysvětlování nebo předpovědích týkajících se těchto jevů“. Uvedenou interpretaci budeme aplikovat na astronomické jevy, jejich vysvětlování či předpovědi.

K nejčastěji se vyskytujícím astronomickým miskoncepcím, vztahujícím se k našemu tématu, patří:

Měsíc vyzařuje světlo stejně jako Slunce.

Měsíc pozorujeme pouze v noci.

Měsíc nerotuje kolem své osy, pozorujeme stále stejnou polokouli.

Fáze Měsíce jsou způsobeny stínem Země.

Zatmění Měsíce jsou částečným případem měsíčních fází.

Měsíc nemá gravitační pole, jinak by měl atmosféru.

Gravitační pole je konečné, mají ho pouze některá kosmická tělesa, Měsíc nikoliv.

Úvodem výkladu je vhodné získat správné prostorové představy o velikostech a vzdálenostech těles soustavy Země–Měsíc–Slunce. Vytvoříme žákům srozumitelný sportovní model. Připomínáme, že poloměr Měsíce činí pouze 27 % pozemského. K porovnání velikostí obou těles použijeme srovnání dvou míčů, Zemi reprezentuje basketbalový míč č. 7 o průměru 24 cm, Měsíc tenisový míček o průměru 6,9 cm. V tomto měřítku velikostí je průměrná vzdálenost obou míčů zachycujících Zemi a Měsíc v prostoru

7,2 m, vzdálenost Země–Slunce činí 2 800 m. Z uvedené modelové představy je žákům zřejmé, že velikosti kosmických těles Země a Měsíce jsou ve srovnání se vzdáleností mezi nimi zanedbatelné.

Přejděme k charakterizaci fyzikálních podmínek na povrchu Měsíce. Určujícím faktorem pro pohyb po povrchu Měsíce či existenci jeho atmosféry je gravitační zrychlení. Je závislé na dvou základních charakteristikách, na hmotnosti $M$ a poloměru $R$, což vyjadřujeme vztahem

$$g = G\frac{M_\mathrm{M}}{R_\mathrm{M}^2} \doteq 1{,}62\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

Dalším parametrem je teplota, která se na povrchu mění, ve dne dosahuje asi 400 K, v noci 130 K. Plocha povrchu Měsíce $3{,}8\cdot 10^7$ km$^2$ přibližně odpovídá ploše světadílu Amerika $4{,}2\cdot 10^7$ km$^2$.

Proč si Měsíc neuchoval atmosféru? Pro odpověď na otázku je zásadní porovnání únikové a střední kvadratické rychlosti za podmínek na povrchu Měsíce. Jak v článku dále určíme, úniková rychlost z Měsíce činí 2,4 km$\cdot$s$^{-1}$. Za teplotu zvolíme maximální denní teplotu na povrchu Měsíce $T = 400$ K. Provedeme výpočet střední kvadratické rychlosti

$$v_\mathrm{strk} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

pro molekuly $N_2$ a $O_2$. Obdržíme $v_{\mathrm{strkN_2}} \doteq 840\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $v_{\mathrm{strkO_2}} \doteq 786\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Z Maxwellova rozdělení rychlostí vyplývá, že existují molekuly pohybující se rychlostí větší než střední kvadratickou. Statistické propočty udávají, že při poměru hodnot střední kvadratické rychlosti a únikové rychlosti rovném 1/3, což přibližně platí pro obě uvedené molekuly, by unikla polovina atmosféry Měsíce za zhruba 40 dnů. Hmotnost Měsíce je malá, aby udržela gravitační silou částice atmosféry při teplotách existujících na Měsíci. Trvalá atmosféra u Měsíce by zůstala v případě, jestliže střední kvadratická rychlost nepřekročí 1/6 únikové rychlosti.

V souvislosti s pohybem Měsíce a soustavou Země–Měsíc–Slunce si položme otázku, které těleso, Země nebo Slunce působí větší gravitační silou na Měsíc? Předpokládejme znalost hmotností uvedených těles a vztahu $r_\mathrm{MS} = 390 r_\mathrm{MZ}$. Dosadíme do poměru velikostí porovnávaných sil:

$$\frac{F_\mathrm{MS}}{F_\mathrm{MZ}} = \frac{G\dfrac{M_\mathrm{M}M_\mathrm{S}}{r_\mathrm{MS}^2}}{G\dfrac{M_\mathrm{M}M_\mathrm{Z}}{r_\mathrm{MZ}^2}} = 2{,}17$$

Gravitační působení Slunce je více než 2krát větší než Země. Proč tedy říkáme, že se Měsíc pohybuje kolem Země?

Měsíc se pohybuje uvnitř tzv. oblasti aktivity planety Země vzhledem k Slunci. V tomto prostoru převládá gravitační vliv Země nad rušivým působením Slunce. Planeta ruší pohyb vztahovaný ke Slunci více, než ruší Slunce pohyb vztahovaný k Zemi. Přesněji vyjádřeno oblastí aktivity Země nazýváme prostor kolem ní, ve kterém je poměr hlavního zrychlení udíleného Zemí Měsíci ku poruchovému zrychlení, vyvolávaném Sluncem větší, než poměr hlavního zrychlení získávaného od Slunce ku poruchovému zrychlení udíleného Zemí. Proto je výhodné zvolit Zemi jako centrální těleso a Slunce jako rušící.

Matematicky první poměr, zlomek můžeme vyjádřit

$$k_1 = \frac{M_\mathrm{Z}}{M_\mathrm{S}} \left(\frac{r_\mathrm{MZ}}{r_\mathrm{MS}}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{1 + 3\cos^2\varphi}},$$

kde $\varphi$ je úhel MZS. Zjednodušeně předpokládáme, že Měsíc a Země se nachází ve stejné vzdálenosti od Slunce. Druhý zlomek je dán vztahem

$$k_2 = \frac{M_\mathrm{S}}{M_\mathrm{Z}} \left(\frac{r_\mathrm{MZ}}{r_\mathrm{MS}}\right)^2.$$

Slovní nerovnici zachytíme matematicky $k_1 > k_2$, úpravou obdržíme

$$r_\mathrm{MS} \sqrt[5]{\frac{\left(\frac{M_\mathrm{Z}}{M_\mathrm{S}}\right)^2}{\sqrt{1 + 3\cos^2\varphi}}} > r_\mathrm{MZ}.$$

Je zřejmé, že oblast není sférická, jde o zploštělý sféroid. Závislost na úhlu $\varphi$ je slabá, proto se zjednodušeně uvádí, že oblast aktivity Země zahrnuje prostor přibližně do vzdálenosti 930 000 km od ní. Kolem Slunce se pohybuje barycentrum soustavy Země–Měsíc, což je podstatné pro správný výklad například slapů. Podrobnější rozbor vhodný pro střední školy najde čtenář v [5], [6], úplný vysokoškolský v [7].

K zamyšlení nad působením gravitačního pole Měsíce vede následující problém. Rozhodněte, zda raketa vypuštěná z povrchu Měsíce rychlostí $-\boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{v}$ je okamžitá rychlost Měsíce na jeho dráze kolem Země, dopadne zpět na Měsíc, na Zemi, či se dostane na oběžnou dráhu kolem některého z kosmických těles. Předpokládáme znalost jejich charakteristik.

Nejprve porovnáme silové působení gravitačních sil Měsíce a Země působících na raketu nacházející se na povrchu Měsíce

$$\frac{F_\mathrm{M}}{F_\mathrm{Z}} = \frac{G\dfrac{M_\mathrm{M} m_\mathrm{rak}}{R_\mathrm{M}^2}}{G\dfrac{M_\mathrm{Z} M_\mathrm{rak}}{r_\mathrm{MZ}^2}} = \frac{M_\mathrm{M} r_{\mathrm{MZ}^2}}{M_\mathrm{Z} r_{\mathrm{M}^2}} \doteq 600.$$

Přitažlivá síla Země je velmi malá ve srovnání se silou Měsíce, pouze slabě narušuje pohyb rakety v gravitačním poli Měsíce. K prověření, zda raketa spadne zpět na Měsíc nebo se od něj vzdálí, provedeme následující výpočet. První kosmická rychlost na Měsíci činí

$$v_1 = \sqrt{G\frac{M_\mathrm{M}}{R_\mathrm{M}}} \doteq 1{,}7\,\mathrm{km\cdot s^{-1}},$$

druhá kosmická rychlost je

$$v_2 = \sqrt{2G\frac{M_\mathrm{M}}{R_\mathrm{M}}} \doteq 2{,}4\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$

Rychlost pohybu Měsíce kolem Země dosahuje

$$v = \frac{2\pi r_\mathrm{ZM}}{T_\mathrm{M}} \doteq 1\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}.$$

Z porovnání hodnot je zřejmé, že raketa dopadne zpět na Měsíc.

Jak je známo, měsíční slapy jsou silnější než sluneční, ale proč? Slovní výklad v [8] upozorňuje na nesprávnost obvyklé odpovědi, že slapy ubývají s třetí mocninou vzdálenosti, kdežto hmotnosti uvedených těles vystupují pouze v lineární závislosti. Doplníme uvedené vysvětlení matematickými vztahy. Měsíc a Slunce mají na obloze stejnou úhlovou velikost, která je rovna poměru lineárních velikostí a vzdáleností, tedy platí

$$\alpha_\mathrm{M} = \alpha_\mathrm{S}, \quad \alpha_\mathrm{M} = \frac{R_\mathrm{M}}{r_\mathrm{MZ}}, \quad \alpha_\mathrm{S} = \frac{R_\mathrm{S}}{r_\mathrm{MS}}.$$

Dále platí $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\alpha^3 r^3$, tudíž objemy obou těles rostou s třetí mocninou vzdáleností. Hmotnost je rovna součinu objemu a hustoty, proto je rozhodujícím poměr hustot obou těles. Při $\varrho_\mathrm{M} = 3{,}3\cdot 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\varrho_\mathrm{S} = 1{,}4\cdot 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ je hustota Měsíce 2,4krát větší. Slapový vliv Měsíce je průměrně 2,4krát větší než Slunce.

Se slapy souvisí jev vzdalování Měsíce od Země, který v současnosti činí průměrně 37 mm·rok$^{-1}$. Tato velmi malá hodnota byla naměřena po instalaci laserových odražečů na povrchu Měsíce výpravami Apolla 11, 14 a 15. Zmiňovaná přesná měření v kombinaci se zdokonalenou teorií pohybu Měsíce umožňují nyní zjišťovat jeho polohu s přesností 1,1 mm. Proč se Měsíc vzdaluje od Země?

Zjednodušeně předpokládejme, že soustava Země–Měsíc je izolována z gravitačního hlediska, platí v ní zákon zachování celkového momentu hybnosti. Skládá se z rotačních momentů hybnosti obou těles a jejich dráhových momentů hybnosti kolem barycentra soustavy Země–Měsíc. Mezi nimi působí vzájemně slapové síly, obě tělesa jsou částečně deformovatelná. Nelze proto uvažovat dva nezávislé zákony zachování momentu hybnosti, pro rotační a dráhové momenty hybnosti, nýbrž jeden jediný:

$$L_\mathrm{c} = L_\mathrm{rotZ} + L_\mathrm{rotM} + L_\mathrm{dZ} + L_\mathrm{dM}.$$

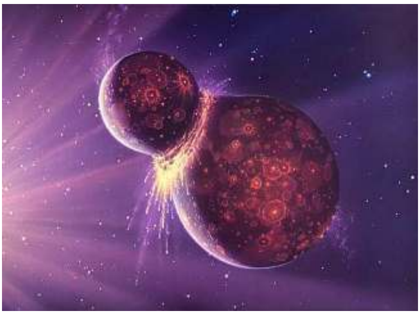
Hodnoty v současnosti jsou:
$L_\mathrm{rotZ} = 5{,}9 \cdot 10^{33}\ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$,
$L_\mathrm{rotM} = 2{,}3 \cdot 10^{29}\ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$,
$L_\mathrm{dZ} = 3{,}5 \cdot 10^{32}\ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$,
$L_\mathrm{dM} = 2{,}9 \cdot 10^{34}\ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$,
$L_\mathrm{c} = 3{,}5 \cdot 10^{34}\ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}}$.

Podstatný je tedy rotační moment hybnosti Země $L_\mathrm{rotZ}$ a dráhový moment hybnosti Měsíce $L_\mathrm{dM}$. Z celkového momentu hybnosti soustavy Země–Měsíc $L_\mathrm{c}$ tvoří rotační moment hybnosti Země 17 % a dráhový moment hybnosti Měsíce 82 %. Dráhový moment hybnosti Země je přibližně 1 %, budeme ho proto v úvaze zanedbávat. Zhruba platí, že rotační moment hybnosti Země je 5krát menší než dráhový moment hybnosti Měsíce. Proto lze rovnici zákona zachování momentu hybnosti sledované soustavy zapsat ve tvaru

$$L_\mathrm{c} = L_\mathrm{rotZ} + L_\mathrm{dM}.$$

Síly přílivového tření vyvolané především měsíčními slapy zpomalují rotaci Země, za jednu otočku dosahuje zvětšení rotační periody $4{,}4 \cdot 10^{-8}$ s. Pokles velikosti úhlové rotace Země a tudíž i jejího rotačního momentu hybnosti $L_\mathrm{rotZ}$ je v důsledku platnosti zákona zachování momentu hybnosti v soustavě kompenzován nárůstem dráhového momentu hybnosti Měsíce $L_\mathrm{dM}$, tedy vzdálenosti Měsíce. Za předpokladu lineárního vzdalování Měsíce od Země lze propočítat jak minulý, tak i budoucí vývoj popsaného procesu. Předchozí vývoj potvrzují počty denních přírůstky korálů v roce v druhohorách, což při konstantní délce roku dává kratší délku dne, podrobnější údaje jsou zpracovány v didaktickém článku [9].

S uplatněním zákona zachování momentu hybnosti je spjata teorie vzniku Měsíce. Musí vysvětlovat dynamiku soustavy Země–Měsíc, současnou velikost jejího celkového momentu hybnosti stejně jako shodnost chemického složení hornin obou těles. Podle nejpravděpodobnější tzv. teorie velkého impaktu [10], [11] vznikl Měsíc před zhruba 4,5 miliardami roků, kdy se Země střetla s tělesem o hmotnosti asi jedné desetiny hmotnosti Země, viz obr. 1, které se pohybovalo rychlostí přibližně 13,5 $\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Úhel, pod kterým se obě tělesa srazila, byl malý, šlo o tzv. tečnou srážkou, ale i tak uvolněná energie vyvolala roztavení a uvolnění horních vrstev Země. Vyvržený materiál kolem ní vytvořil prstenec, který se při ochlazení začal formovat do malých zrnek prachu slepujících se do větších úlomků, až vznikl Měsíc. Shodnost materiálu obou těles dokládá například stejný poměr izotopů kyslíku ${}^{16}_{8}O$, ${}^{17}_{8}O$ a ${}^{18}_{8}O$ v jejich horninách. Původní vzdálenost Měsíce od Země činila asi 15 000 km. Postupně se však od ní vzdaloval až na dnešní průměrnou vzdálenost 384 400 km. Srážka způsobila změnu úhlu rotační osy Země na oběžné dráze kolem Slunce.



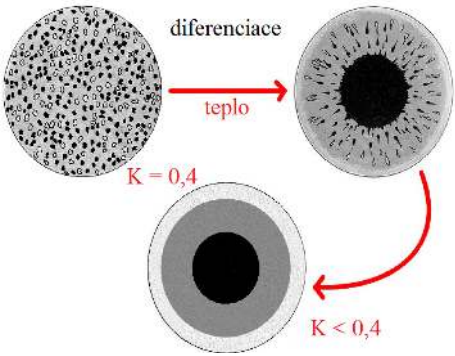
Obr. 1 [1]

Po vzniku Měsíce došlo v jeho nitru ke gravitační diferenciaci prvků podle hustoty, migrací těžší klesaly do středu (obr. 2). Železné jádro o poloměru zhruba 350 km umožnilo před 4,2 miliardami roků vznik silného magnetického pole. Pro jeho formování byly nezbytné dvě podmínky, přítomnost magnetického materiálu a elektrických polí. Tím prvním jsou sloučeniny železa v jádře. Pohyby jednotlivých vrstev vůči sobě vyvolávají

[1] Zdroj: www.universetoday.com/19718/formation-of-the-moon

elektrické proudy. Magnetické pole vzniká pohybem elektrických nábojů. V dnešní době má Měsíc slabé magnetické pole, řádově zhruba $10^{-9}$ T.

Jaká je stavba nitra Měsíce a jak ji můžeme zkoumat? Především je využívána metoda analýzy deformací způsobených slapovými silami Země či šíření seismických vln na Měsíci. Příčné vlny, tzv. S vlny, se prakticky nešíří v kapalinách, neboť tečná napětí jsou velmi malá. Naopak podélné vlny, tzv. P vlny, tedy stlačování a rozpínání ve směru šíření, se šíří v kapalném prostředí, platí $v_\mathrm{p} \doteq \sqrt{E/\varrho}$, kde $E$ je Youngův modul pružnosti a $\varrho$ hustota.




Obr. 2[2]

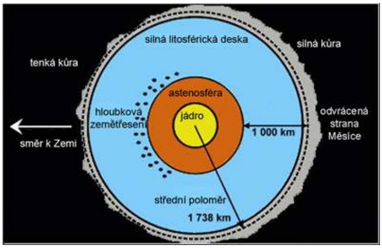
Další možností je vytváření modelů vnitřní stavby Měsíce na základě teoretických výpočtů a jejich konfrontace s pozorovanými změnami od sférického tvaru, či koeficientu momentu setrvačnosti měsíčního tělesa, dosahujícího $K = 0{,}394$. Připomínáme, že u homogenní koule je $K = 0{,}400$. Pro porovnání Země má $K = 0{,}331$, u obřích plynných planet leží $K$ v intervalu 0,21–0,25. U Slunce, jehož hmotnost je soustředěna v centrální části, je $K = 0{,}08$.

Vnitřní jádro Měsíce o poloměru 240 km je tuhé, složené převážně ze železa s příměsí lehkých slitin. To dosvědčuje, že po jeho vzniku došlo k diferenciaci hornin podle hustoty. Před 4,2 miliardami let měl Měsíc silné magnetické pole, tudíž železné jádro o poloměru asi 350 km bylo tekuté.

Vnější jádro o tloušťce asi 90 km je kapalné, železné. Nad ním se nachází přechodová vrstva o tloušťce 150 km a průměrné teplotě 1 650 K. Do

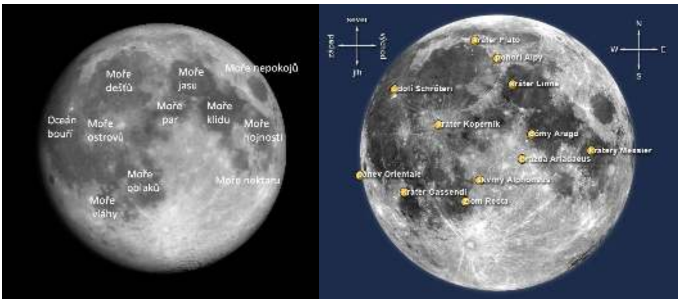
[2]Zdroj: www.astro.washington.edu/users/nms/teaching/a150winter2013/slides/l02_Moon.pdf

vzdálenosti zhruba 750 km od středu se sahá spodní plášť – astenosféra, tvořená horninami v tekutém plastickém stavu. Po ní se pohybují litosférické desky horního pláště, nesoucí měsíční povrchovou kůru. Stavba nitra Měsíce je zachycena na obr. 3.




Obr. 3 [3]

Pánve měsíčních moří vznikly v intervalu 4–3 miliardy let. Stáří jednotlivých moří na povrchu Měsíce je mírně odlišné. Příkladně k nejstarším patří Moře jasu (3,75 miliard let), k nejmladším Moře nepokojů (3,22 miliardy let) (obr. 4). Jedním z nejstarších útvarů na Měsíci je pohoří Apenniny (3,85 miliardy let). Výpravy Apollo 11, 12, 14, 16 a 17 dovezly horniny, jejichž stáří leží v intervalu 3,5–4,5 miliardy let.




Obr. 4 [4]

Jak vznikly moře na Měsíci? Jde o prohlubně zaplněné vychladlou lávou. Moře pravděpodobně vznikla jako výsledek dopadu na Měsíc těles o průměru menším než 200 km rychlostí řádově $8\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Tento proces probíhal v období tzv. velkého bombardování, v období vymezeném výše.

[3]Zdroj: www.astronomia.zcu.cz/planety/země/1957-stavba-nitra-mesice

[4]Zdroje: mladez.astro.cz/upload/clanky/nocni-obloha/minimum_o_hvezdach/obr.24-mesicni_more.jpg a http://mesic.astronomie.cz/pruvodce-po-mesici.htm

Dále stručně objasníme vznik fází Měsíce, což lze spojit s pozorováními žáků.

Základním úkazem, který je znám od starověku, je střídání měsíčních fází (obr. 5). Přesnější definice matematickým vztahem uvádí, že fáze $\Psi = a/d$, kde $a$ je největší šířka osvětlené části disku Měsíce, jehož průměr je $d$. Polovina Měsíce je Sluncem vždy osvětlována, ale pozorovaná ze Země osvětlená část se mění. Proměna fází probíhá v důsledku změn polohy Měsíce vzhledem k Slunci. Lunární Měsíc začíná neviditelným novem. O několik nocí později se objevuje na západní obloze krátce po západu Slunce zahnutý srpek Měsíce, vypuklou částí vpravo. Následně o hodinu či dvě později po západu Slunce, zapadá i Měsíc. V průběhu dalších nocí srpek postupně dorůstá tak, jak se hranice světla a stínu posunuje po měsíčním disku. Asi týden po novu dosahuje první čtvrti, kdy zasahuje osvětlená plocha zhruba polovinu viditelného povrchu Měsíce. Po dvou týdnech od počátku zahltí světlo celou přivrácenou stranu Měsíce. Jelikož je Slunce naproti, vychází úplňkový Měsíc těsně po západu Slunce na východě, je vidět po celou noc, a zapadá při východu Slunce. Poté Měsíc ubývá a mizí.

Obr. 5 [5]

Astronomové rozeznávají více časových měsíců (synodický, siderický, anomalistický, drakonický). Z hlediska pozorování je důležitý synodický, odpovídající době oběhu Měsíce vzhledem k Slunci. V jeho průběhu se vystřídají všechny měsíční fáze, trvá přibližně 29,5 dne. Měsíc se v důsledku oběhu posunuje východně při pozorování ze Země přibližně o $\frac{360°}{27{,}3} = 13{,}2°$ za den, trochu více než 0,5° za hodinu vůči hvězdám. Připomínáme, že hodnota 27,3 dne je periodou měsíčního pohybu okolo Země s ohledem na postavení hvězd, tzv. hvězdný (siderický) měsíc.

Popisovali jsme pohyb Měsíce po obloze. Je třeba dodat, že na pozadí hvězd se přemísťuje východním směrem, každodenně však zapadá na západní části oblohy. Důvodem je skutečnost, že úhlová rychlost pozorované

[5]Zdroj: www.sirrah.troja.mff.cuni.cz/~puda/ulohy/dipl-pp/04htm

rotace světové sféry vyvolaná rotací Země je větší než úhlová rychlost pohybu Měsíce po dráze kolem Země.

Vystupuje nad horizont na vyšší úhlovou výšku Slunce nebo Měsíc? Vzhledem ke sklonu dráhové roviny Měsíce k ekliptice, je jeho maximální výška (v horní kulminaci) v každém místě Země o $5°9'$ výše než maximální výška Slunce. Minimální výška Měsíce v horní kulminaci bude menší než u Slunce o $5°9'$.

Přejděme zpět k pozorování. Měsíc vychází stále později. Sledujeme východ Měsíce během úplňku těsně po západu Slunce. Při dalším východu zjišťujeme, že se posunul východně. Všechna pozorování lze provádět pouhým okem, žáci mohou svá sledování Měsíce v jednotlivých fázích zachytit kresbou. Tak lze v průběhu 29,5 dne získat příkladně sbírku osmi kreseb vývoje měsíčního vzhledu.

Pozorování můžeme rozdělit do tří etap. V první etapě, pozorovaní pouhým okem, žáci zakreslují na papír zvláštnosti pozorovaného pohybu Měsíce po obloze. Sledují proměnu fází Měsíce srovnáním kreseb každé 3 až 4 dny. Současně zachycují změnu polohy mezi hvězdami v souhvězdích.

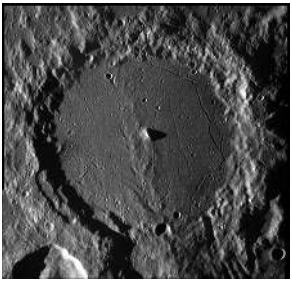
Druhá etapa, pozorování menším dalekohledem s třicetinásobným zvětšením ($Z = 30$), umožní žákům zakreslení hlavních detailů přivrácené polokoule Měsíce a provedení jejich ztotožnění s objekty na mapě, případně identifikované fotografii. Lze využít podrobného výkladu v [12], či interaktivní mapy [13]. Žáci zakreslí a identifikují objekty: Oceán bouří, Moře dešťů, Moře jasu, Moře klidu, Moře hojnosti, krátery Tycho, Kepler, Koperník, Aristarchos (obr. 4).

Jednotlivé detaily lze sledovat větším dalekohledem ($Z = 70$–$120$) ve třetí etapě. Vhodné je rovněž provedení odhadu nejmenšího rozměru detailu sledovatelného dalekohledem na povrchu Měsíce.

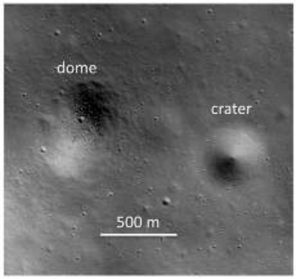
S problematikou pozorování je spjata otázka, jaká je velikost útvarů, jež můžeme na Měsíci pozorovat lidským zrakem, jestliže noční rozlišovací schopnost lidského oka činí asi $1'$? Rozlišovací schopnosti $1'$ odpovídá úhel $\alpha = 2{,}9 \cdot 10^{-4}$ rad, proto lze z průměrné vzdálenosti Měsíce od Země $r = 3{,}84 \cdot 10^8$ m pozorovat útvary o velikosti $d = \alpha r \doteq 110$ km.

Na přivrácené polokouli Měsíce činí plocha tmavých moří 31 %, na odvrácené pouhá 2 %. Odlišný vzhledu polokoulí je objasňován rozdílnou tloušťkou měsíční kůry, která je větší na odvrácené straně, zhruba 100 km, zatímco na přivrácené asi 40 km. Proto se žhavé magma na přivrácené straně z pláště dostalo na povrch snadněji. Proč však je tloušťka kůry na obou polokoulích Měsíce rozdílná, není dosud vyjasněno.

Na povrchu Měsíce pozorujeme velké množství kráterů. V převážné většině vznikly impaktním způsobem, pouze výjimečně jde o menší vulkanické krátery. Na mořích se zpravidla nachází mladší krátery, zatímco v pohořích jde o krátery staré. Příkladem impaktního kráteru je kráter Alphonsus (obr. 6), ukázka vulkanicky vzniklého kráteru (obr. 7).



Obr. 6 [6]




Obr. 7 [7]

Procesy formující povrch Měsíc jsou jiné než na Zemi, erozivní procesy probíhají dlouhodobě podstatně pomaleji než na Zemi. Na povrchu Měsíce se nalézá prach a porézní hornina zvaná regolit. Vyskytují se dva druhy hornin: výlevná magmatická čedičová hornina – *basalt* (obr. 8) a stmelená hornina vzniklá po nárazu impaktu – *brekcie* (obr. 9).

Obr. 8 [8]

Obr. 9 [9]

Několikrát do roka pozorujeme popelavý svit Měsíce (obr. 10), ale jaký je jeho původ? Jde o odražené sluneční světlo od Země, především od oceánů, na temný povrch Měsíce. Jev jako první vyložil Leonardo da Vinci

[6] Zdroj: www.damianpeach.com/lunar.htm
[7] Zdroj: blogs.discovermagazine.com/badastronomy/2011/12/12/tiny-lunar-volcanoes/
[8] Zdroj: www.astro.washnigton.edu/users/smith/Astro150/Labs/MoonRocks/images/15016_Big.jpg
[9] Zdroj: www.meteoritecollector.org/gallery/main.php?g2_itemId=5700

(1452–1543), který v [14] uvedl: „Měsíc je neprůhledné a pevné těleso, a kdyby byl naopak průhledný, nepřijímal by světlo Slunce. Měsíc nemá světlo sám od sebe, ale Slunce osvětluje takovou jeho část, jakou vidí. Z této zářící části vidíme tolik, kolik ona vidí z nás. A jeho noc přijímá tolik záře, kolik mu propůjčují naše vodstva tím, že mu odrážejí obraz Slunce, který se zrcadlí ve všech (vodách), jež vidí Slunce a Lunu. Měsíc je studený a vlhký.“ Z Codexu Leicaster pochází obr. 11.

Obr. 10 [10]

Obr. 11 [11]

Rozeberme jev podrobněji při současných astronomických znalostech. Disk Země pozorovaný z povrchu Měsíce je 13,5krát větší než disk měsíční na obloze pozemské. Albedo Země (0,367) je asi 5krát větší než měsíční (0,073), proto Země osvětluje měsíční povrch asi 68krát více. S tím souvisí otázka, v jaké čtvrti Měsíc více osvětluje Zemi, v první nebo v třetí? Ze snímku na obr. 12 je zřejmé, že na pravé části povrchu Měsíce je méně moří, proto odráží sluneční záření lépe než levá část.

Obr. 12 [12]

[10]Zdroj: home.zcu.cz/˜smid/mesic/mesic.htm
[11]Zdroj: science.nasa.gov/science-news/science-at-nasa/2005/04oct_leonardo/
[12]Zdroj: apod.nasa.gov/apod/image/0001/fm1222_gendler_big.jpg

## Závěr

Cílem článku bylo seznámení s vybranými fyzikálními a chemickými vlastnostmi Měsíce, zejména s jeho významem pro existenci a rozvoj života na Zemi. Posledně zmiňované si velmi dobře uvědomují v zahraničí, kde výuce problematiky Měsíce je věnována značná pozornost, viz [15], [16]. Vzhledem k snadné pozorovatelnosti Měsíce lze provést jednoduché sledování změn jeho fází a určit délku synodického měsíce.

## Literatura


[1] *Hazard, C., Mackey, M. B., Shimmins, A. J.*: Investigation of the Radio Source 3C 273 by method of Lunar Occultations. Nature **197** (1963), s. 1037–1039.

[2] *Franc, T.*: Vybrané gravitační jevy ve vesmíru a jejich přiblížení středoškolákům. Disertační práce, MFF UK, Praha, 2014.

[3] *Jones, B., Lynch, P., Reesink, C.*: Children's conceptions of the Earth, Sun and Moon. International Journal of Science Education **9** (1987), s. 43–53.

[4] *Nachtigall, D.*: Vorstellungen im Bereich der Mechanik. Naturwissenschaften im Unterricht. Physik/Chemie **34** (1986), č. 13, s. 16–24.

[5] *Domanski, J., Štefl, V.*: Strefy oddzialywania planet. Fizyka w Szkole **43** (1997), č. 1, s. 50–51.

[6] *Kwast, T.*: Czy Księżyc jest satelitą Zemi? Urania 1977, č. 6, s. 167–171.

[7] *Chebotarev, G. A.*: Gravitational spheres of the major planets, Moon and Sun. Soviet Astronomy **7** (1964), č. 5, s. 618–622.

[8] *Grygar, J.*: Žeň objevů 2011. cygnus.astro.sk/zne/zneXLVI2011A.html.

[9] *Domanski, J, Štefl, V.*: Dlaczego Księżyc oddala sie od Ziemi? Fizyka w Szkole **41** (1995), č. 2, s. 51–53.

[10] *Hartmann, W. K., Davis, D. R.*: Satellite-sized planetesimals and lunar origin. Icarus **24** (1975), s. 504–514.

[11] *Cameron, A, Ward, W.*: The Origin of the Moon. Lunar and Planetary Science **7** (1976), s. 120–122.

[12] *Gabzdyl, P.*: Měsíc. Aventinum, Praha, 2006.

[13] http://petrdrhlik.webzdarma.cz/astro/zajimavosti/interaktivni-mapa-mesice.htm.

[14] *da Vinci, L.*: Codex Leicaster. Firenze, 1504–1508.

[15] *Benacchio, L.*: The Importance of the Moon teaching astronomy. In: Earth, Moon and Planets 85–86, Kluwer Academic Publishers, 2001, s. 51–60.

[16] *Trumper, R.*: Teaching future teachers basic astronomy concepts—Sun–Earth–Moon relative movements—at a time of reform in science education. Research in Science & Technological Education **24** (2006), s. 85–109.

# INFORMATIKA

# Webové stránky pro testování hypotéz

*FRANTIŠEK MOŠNA – DANIEL MBUY LUBANDA*

Technická fakulta, Česká zemědělská univerzita, Praha

V našich zemích se stochastické myšlení nikdy netěšilo velké oblibě (např. sousední Polsko či Německo je na tom o mnoho lépe). Na základních a středních školách se u nás výuka pravděpodobnosti a statistiky omezuje zpravidla na dosazování do vzorců pro aritmetický průměr a nebývá výjimečné, že se čas plánovaný na tuto látku využívá pro jiná „užitečnější" témata. Statistika nepatří k oblíbeným předmětům ani mezi studenty. Důvody tohoto neutěšeného stavu jsou rozebírány např. v [2, 3, 10].

Přitom statistika má rozsáhlé aplikace ve fyzice, medicíně, ekonomii, sociologii, biologii a podobně. Představuje velmi užitečný nástroj při získávání informací a podkladů pro kvalifikovaná rozhodnutí v nejrůznějších oborech lidské činnosti.

Před několika lety jsme se pokoušeli zjistit, jak je na tom pravděpodobnost a statistika na pedagogických fakultách vysokých škol. Těmto předmětům bývají věnovány zpravidla 3 až 4 hodiny týdně v jednom semestru (výjimečně ve dvou). Kurzy jsou zařazené většinou do vyšších ročníků. Na všech fakultách jsou probírány základní pojmy z pravděpodobnosti (např. náhodné veličiny, distribuční funkce, nezávislost, limitní věty). Statistická témata se omezují na základní klasické testy a lineární regresi, někdy jsou probírány i neparametrické metody nebo třídění. V některých případech je využívána počítačová technika, většinou statistické prvky Excelu nebo program Statistica.

Dodnes visí otazník nad tím, co by se vlastně na univerzitách (ať už technického nebo společenskovědního zaměření) mělo ze statistiky vyučovat, v jakém rozsahu, do jaké hloubky. Zajímavé práce na toto téma přinášejí [2, 4, 11].

Internet výrazně zlepšuje přístup k informacím. U studentů přispívají ke zkvalitnění vzdělávacího procesu různé stránky, kurzy, testy, aplety apod. Takové nástroje souhrnně nazýváme e-learning. Mají své nesporné výhody ale také své meze (viz [6, 7, 8, 9]). My bychom rádi představili jeden skromný elektronický příspěvek ke zlepšení výuky matematické statistiky. Nalézá se na adrese http://statisticsonweb.tf.czu.cz. Zde uvedené stránky umožňují interaktivně provádět testování hypotéz pro zadaná data.

Metody jsou rozděleny do pěti skupin – testy jednovýběrové, dvouvýběrové, třídění, testy vzájemného vztahu a regrese. Výběr testů odpovídá základním kurzům statistiky na vysokých školách. Do každé skupiny (kromě regrese) je zařazena aspoň jedna neparametrická metoda. Uveďme si přehled:

- jednovýběrové testy:
  - Studentův jednovýběrový test pro střední hodnotu – oboustranný
  - Studentův jednovýběrový test pro střední hodnotu – jednostranný
  - jednovýběrový test pro rozptyl
  - Wilcoxonův jednovýběrový test
- dvouvýběrové testy:
  - Studentův dvouvýběrový test pro střední hodnoty
  - Studentův párový test pro střední hodnoty
  - Fisherův dvouvýběrový test pro rozptyly
  - Wilcoxonův dvouvýběrový test
- třídění (analýza rozptylu – ANOVA):
  - jednoduché třídění
  - Kruskal–Wallisův test
  - dvojné třídění – s interakcemi
  - dvojné třídění – bez interakcí
  - Friedmanův test
- testy nezávislosti:
  - test Pearsonova korelačního koeficientu
  - test Spearmanova korelačního koeficientu
  - kontingenční tabulky
  - lineární regrese

Na konci stránek je uveden soubor se základními pojmy z pravděpodobnosti a statistickými vzorci a také soubor se statistickými tabulkami. Webové stránky mají českou a anglickou verzi (viz [5]).

Ukážeme si fungování stránek na třech příkladech. Hladinu testu uvažujeme vždy $\alpha = 0{,}05$.

1. Při kontrole balicího automatu, plnícího cukrem balíčky o váze 1 kg, byly při přesném převážení 5 balíčků zjištěny tyto odchylky v gramech od požadované hodnoty $-3$, 2, $-2$, 0, $-1$. Je třeba zjistit, zda automat nemá systematickou odchylku od požadované hodnoty. ([1, př. 4.24, s. 75])

Jednotlivé odchylky považujeme za hodnoty náhodného výběru z normálního rozdělení $\mathrm{N}(\mu;\sigma^2)$. U tohoto příkladu použijeme oboustranný jednovýběrový test založený na veličině (testovací statistice)

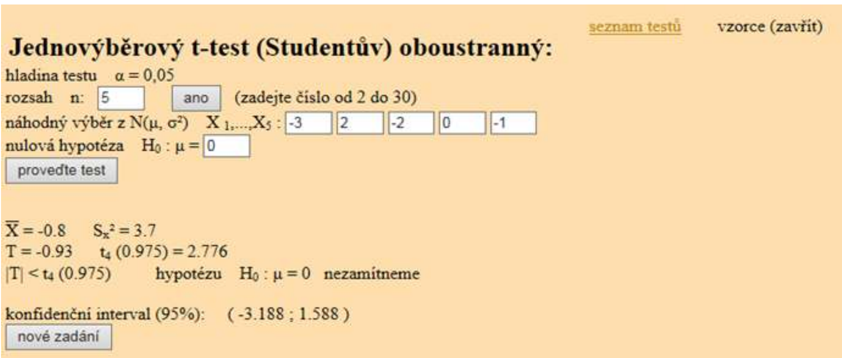
$$T = \frac{\overline{X} - \mu}{\sqrt{S_X^2/n}} = \frac{\overline{X} - \mu}{S_X}\sqrt{n} \sim t_{n-1},$$

kde průměr je $\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ a výběrový rozptyl je

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\left((X_1 - \overline{X})^2 + \dots + (X_n - \overline{X})^2\right).$$

Nulovou hypotézu $H_0\colon \mu = 0$ zamítneme, právě když $|T| \geq t_{n-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)$. V našem případě hypotézu nezamítneme, protože je $\overline{X} = -0{,}8$, $S_X^2 = 3{,}7$, $T = -0{,}930$ a $t_4(0{,}975) = 2{,}776$.

Při využití stránek nejprve zvolíme rozsah náhodného výběru ($n = 5$), jednoduše zadáme hodnoty výběru ($X_1, \dots, X_5$), hodnotu pro srovnání ($\mu = 0$) a potvrdíme výpočet. Pak se vše potřebné objeví na stránkách včetně konfidenčního intervalu, viz obr. 1. Poznamenejme, že při zadávání desetinných čísel je třeba užít desetinnou tečku.




Obr. 1 Příklad na Studentův jednovýběrový test

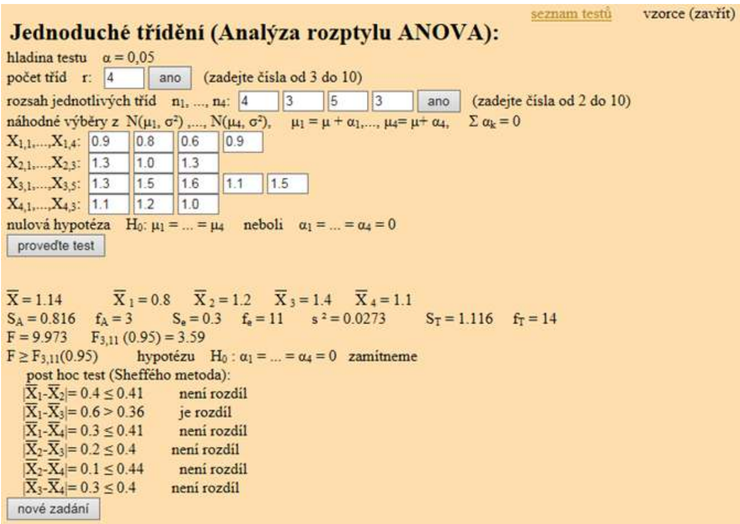
2. U čtyř odrůd brambor A, B, C, D se zjišťovala celková hmotnost brambor vzrostlých vždy z jednoho trsu (v kg):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 0,9 | 0,8 | 0,6 | 0,9 | |
| B | 1,3 | 1,0 | 1,3 | | |
| C | 1,3 | 1,5 | 1,6 | 1,1 | 1,5 |
| D | 1,1 | 1,2 | 1,0 | | |

Chceme zjistit, zda se od sebe odrůdy liší. [1, př. 10.5, s. 215]

Provedeme jednoduché třídění metodou analýza rozptylu (ANOVA). Opět předpokládáme, že čtyři skupiny dat pocházejí z normálního rozdělení se středními hodnotami $\mu_1, \dots, \mu_4$ a stejným rozptylem a testujeme nulovou hypotézu $H_0\colon \mu_1 = \cdots = \mu_4$. Nebudeme zde uvádět všechny použité vzorce, pouze připomeneme, že počítáme nejprve průměry uvnitř skupin, celkový průměr a tzv. součty čtverců mezi skupinami, uvnitř skupin (reziduální) a celkový. Nakonec vypočítáme hodnotu $F = 9{,}973$ a porovnáme s kvantilem Fisherova rozdělení $F_{3,11}(0{,}95) = 3{,}59$. Protože hodnota $F$ tento kvantil překročila, nulovou hypotézu zamítneme.

Postup na stránkách je podobný jako u předchozího příkladu. Opět dostaneme všechny potřebné hodnoty, rozhodnutí o nulové hypotéze a post-hoc testy založené na Sheffého metodě, které nám udávají mezi kterými odrůdami je rozdíl signifikantní, viz obr. 2.




Obr. 2 Příklad na jednoduché třídění (ANOVA)

3. Máme k dispozici spotřebu alkoholu (v litrech na osobu a na rok) a úmrtnost na cirhózu jater (počet zemřelých na 100 000 obyvatel) pro některé evropské země:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| spotřeba alkoholu | 3,9 | 4,2 | 5,6 | 5,7 | 6,6 | 7,2 | 10,8 | 10,9 | 12,3 | 15,7 | 24,7 |
| úmrtnost | 3,6 | 4,3 | 3,4 | 3,7 | 7,2 | 3,0 | 12,3 | 7,0 | 23,7 | 23,6 | 46,1 |

Máme ověřit, jestli tyto veličiny spolu souvisejí. [1, př. 11.22, s. 257]

Použijeme tentokrát Spearmanův korelační koeficient. Při této neparametrické metodě nemusíme předpokládat normalitu náhodných výběrů, (postačí spojitost distribuční funkce). K uvedeným hodnotám $X_1, \ldots, X_n$ přiřadíme jejich pořadí $Q_1, \ldots, Q_n$ a hodnotám $Y_1, \ldots, Y_n$ pořadí $R_1, \ldots, R_n$. Spearmannův koeficient pak počítáme podle vzorce

$$r_S = 1 - \frac{6}{n(n^2-1)} \sum_k (Q_k - R_k)^2 .$$

Nulovou hypotézu o nezávislosti uvažovaných náhodných veličin zamítneme, jestliže absolutní hodnota $|r_S|$ překročí kritickou hodnotu $k = 0{,}6091$ uvedenou ve statistických tabulkách pro $n = 11$ a $\alpha = 0{,}05$. V našem případě prohlásíme veličiny za závislé, neboť vychází $r_S = 0{,}7727$.

Na webových stránkách postupujeme analogicky jako u předchozích příkladů (obr. 3).


Obr. 3 Příklad na testování Spearmanova korelačního koeficientu

Prezentované stránky si v žádném případě nekladou za cíl a ani nemohou nahradit statistické programy R, SPSS, Statistica, Statgraphic, SAS nebo nástroje Excelu, systému Mathematica apod. Stránky nabízejí pouze zpracování dat o malém rozsahu. Jiná technická omezení vyplývají ze skutečnosti, že byly sestaveny pouze pomocí jazyka PHP a nespolupracují s žádným matematickým softwarem.

Stránky jsou určeny pouze pro účely výuky, studia, procvičování, zkoušení, ověřování.

Testování statistických hypotéz umožňuje na základě výběrových souborů dat provádět kvalifikovaná rozhodnutí o charakteru a kvantitativních vlastnostech veličin, jež reprezentují. Studenti se při zpracování dat často soustředí jen na provádění výpočtů (ono dosazování do vzorců) a základní principy užívaných metod jim mnohdy unikají. I když se rozhodnou použít pro výpočty nějaký z uvedených statistických programů, musejí značnou energii věnovat k proniknutí do tohoto nástroje, seznamují se s jeho možnostmi, se způsobem ovládání těchto programů či nástrojů a komunikací s nimi.

Předností našich stránek je naopak jejich značná jednoduchost při užívání a „interaktivita".

Webové stránky byly využívány při vysokoškolských kurzech statistických metod na Pedagogické fakultě UK a na Technické fakultě ČZU v Praze v letech 2014 a 2015. Zkušenosti s užíváním tohoto nástroje jsou velice pozitivní. Studenti se mohou při seznamování se s testováním hypotéz v prvních fázích soustředit na podstatu principu, mohou zadávat různá data, postupně je měnit a pozorovat, co se děje s výsledky při jejich zpracování a vyhodnocení. Uživatel si tak snadno může při testování hypotéz ověřit význam rozptylu nebo si uvědomit odlišný vliv odlehlých hodnot pro klasické a neparametrické metody a podobně. U každého testu je vložen odkaz na soubor s užitými vzorci. Podle nich si lze výsledky přepočítat.

Stránka pro lineární regresi obsahuje jednoduchý obrázek. Jeho načítání probíhá bez problému při použití prohlížečů Chrome, Firefox apod. Prohlížeč Explorer však někdy po změně dat nenačítá obnovený obrázek a je třeba stránku aktualizovat (na liště nebo klávesou F5).

Na stránkách je třeba odstranit nedostatky, opravit chyby a nepřesnosti. Vhodné by bylo také jejich rozšíření o další testy, zlepšení grafické úrovně, obohacení průvodním textem a převedením do jiných jazyků. Autoři budou vděční za každé upozornění či návrh ke zlepšení.

Literatura


[1] *Anděl, J.*: Základy matematické statistiky. Praha, Matfyzpress, 2005.

[2] *Hindls, R., Hronová, S.*: Jak výuka odrazuje nestatisticky od statistiky, Statistika, roč. 42, (2005), č. 2, s. 168–172.

[3] *Jeleňová, I.*: Postoje študentov ku štatistike, Sociálne a politické analýzy, roč. 2, (2008), č. 1, s. 72–81.

[4] *Kvaszová, M.*: Didaktika statistiky. Rigorózní práce, Praha, MFF UK, 2012.

[5] *Mošna, F.*: Web-sites for hypothesis testing. In: WASET, International Scholarly and Scientific Research & Inovation, New Delhi, 2015. s. 103–106.

[6] *Mošna, F.*: Výhody a nevýhody některých prvků e-learningu. In: Alternativní metody výuky 2006, Praha, Brno, 2006. s. 29.

[7] *Robová, J.*: Výukové programy z matematiky na internetu. In: Řehout, V. a kol. (ed.), Pedagogický software, České Budějovice, Scientific Pedagogical Publishing, České Budějovice, 2004, 4 s.

[8] *Robová, J.*: Webové stránky a výuka matematiky. In: Dostál, J. (ed.), Infotech (CD ROM), Olomouc, 2007, s. 407–410.

[9] *Řezanková, H.*: Výuka statistiky prostřednictvím internetu.
Dostupné z: http://badame.vse.cz/clanky/vyuka-statistiky.php.

[10] *Schau, C.*: Students attitudes: the "other" important outcome in statistics education. In: Joint Statistical Meetings, San Francisco, CA, JSM, s. 3673–3683.

[11] *Žváček, J.*: S čím dnes na statistiku. Informační bulletin České statistické společnosti, roč. 8 (1997), č. 3, s. 17–26.


# Bobřík učí informatiku

## 4. díl – Použití logiky v informatice


*DANIEL LESSNER – JIŘÍ VANÍČEK*

Matematicko-fyzikální fakulta, UK Praha

Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích


V reakcích některých učitelů na soutěžní úlohy soutěže Bobřík informatiky (viz 1. díl seriálu) jsme se setkávali s kritikou, že některé úlohy jsou logické a tedy nikoliv informatické, a proto do soutěže nepatří. Dovolíme si úvod tohoto článku věnovat právě vztahu matematiky, potažmo logiky, a informatiky.

Postřeh, že se řada informatických úloh zdá logická nebo matematická, je na místě do té míry, do jaké má informatika s matematikou či logikou přirozený průnik. Pro rychlou ilustraci hlubokého vztahu mezi uvedenými obory připomeňme, že jeden ze stěžejních výsledků informatiky, neřešitelnost problému zastavení Turingova stroje, je zjednodušeně vzato jiným vyjádřením Gödelovy věty o neúplnosti, tedy stěžejního poznatku matematické logiky. Libovolný výpočet, který probíhá na počítači nebo na jakémkoliv jiném výpočetním stroji, vždy odpovídá nějakému způsobu logického odvozování. Meze logického dokazování jsou tak zároveň mezemi počítání, a tím i mezemi počítačů.

Informatika se zabývá zpracováním informací a informace jsou univerzálně reprezentovány (binárními) číslicemi. Jestliže data, s nimiž počítač pracuje, jsou vlastně posloupností číslic 1 a 0, leckdy se vyplatí na ně dívat i jako na logické hodnoty PRAVDA a NEPRAVDA (např. jako platnost podmínek pro nějaké rozhodnutí). Informatika dává řadu skvělých příležitostí, jak ukázat, že logika, pěstovaná v hodinách matematiky, má své každodenní využití. Např. chceme-li, aby tabulka výsledných známek žáků sama automaticky ukazovala, kteří z nich dostanou vyznamenání, využijeme k tomu nástrojů logiky. Chceme-li naprogramovat nekonečný kalendář (v němž budeme hledat např. který den v týdnu se nějaká osoba narodila), s použitím logiky budeme stanovovat podmínky ke zjišťování přestupných roků; podobné to bude u (složitější) úlohy zjistit z takového kalendáře, kdy budou v daný rok velikonoce.

Při programování se vyskytuje celá řada situací, v nichž je použité logické odvozování odlišné od intuitivní logiky. Spojka nebo není vylučovací; implikace při nesplněném předpokladu nezpůsobí negaci důsledku; negace neznamená protiklad (tedy negace „všeho“ není „nic“, negace „je menší než“ není „je větší než“). Má-li být proces dokazování a odvozování přenesen na neživý stroj, je potřeba tento proces přesně formalizovat, aby mohla být v konkrétních případech jeho správnost a přesnost kontrolována. To je také úkol logiky.

Jednostranné pojetí školské informatiky, projevující se také komentáři učitelů k soutěži Bobřík informatiky „ona je to ale spíš taková logika, než informatika“, jsou samozřejmě silně podpořeny současným zněním Rámcových vzdělávacích programů. Souvislost řady témat ve vzdělávací oblasti Informatiky a informačních a komunikačních technologií s matematikou (logikou) je téměř neznatelná a může tak snadno zůstat očím učitelů a tvůrců školních vzdělávacích programů skryta. Mezi vzdělávacími cíli chybí výslovný požadavek na porozumění tomu, jak počítače fungují, natož nějakých hlubších principů nebo jejich použití. Zcela převažují témata zaměřená na ovládání aplikací. Z toho plynoucí pojetí výuky pak ve výuce pochopitelně vede k diametrálně odlišnému typu řešených úloh.

Když si po absolvování takové výuky student vybere budoucí studijní obor na vysoké škole na základě toho, že ho baví školní „informatika“, je po započetí vysněného studia často zaskočen. Obsah vysokoškolského studia informatiky nemá s tím středoškolským téměř nic společného. Základní a střední školy často nenabízejí studentům dostatek možností získat odpovídající představu o tomto oboru. Soutěžní úlohy z Bobříka informatiky mohou učitelům pomoci při představení informatických problémů věku přístupnou formou.

Informatika je bez logiky nemyslitelná, neobejde se bez ní. To, co probíhá v nitru každého počítače, jsou z jistého pohledu právě logické operace. Sofistikovanost technických aplikací ovšem tyto své kořeny před uživateli schovává tak dokonale, že je snadné na ně zcela zapomenout. Bohatství a svébytnost výsledků informatiky vede k tomu, že informatiku vnímáme jako samostatný obor. To ovšem její vztah k logice nijak neoslabuje. Koneckonců řada vědců, které vnímáme jako zakladatele informatiky, byla i významnými logiky, např. Alan Turing, autor teoretického modelu výpočetního stroje a významný kryptograf, Dan Scott, zabývající se sémantikou programovacích jazyků, Alonzo Church, zabývající se teorií algoritmů, lambda kalkulem a problémem rozhodnutelnosti, a mnoho dalších.

V článku zařazujeme logické úlohy motivované jak prostředím počítače, tak úlohy z prostředí studentům dobře známých, aby pro ně byly situace dostatečně názorné. I tyto úlohy bychom mohli snadno obléci do počítačového hávu (např. v úloze s otáčením čokoládových vajíček může robot kontrolovat součástky ve výrobě). Podle našeho názoru je však také třeba ukázat, že úlohy, které může počítač řešit, jsou všude kolem nás.

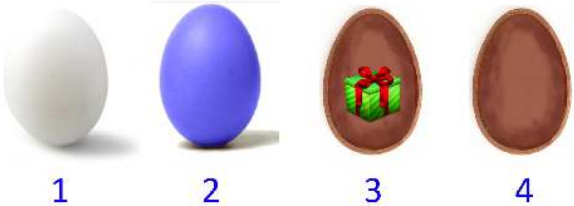
## Co je uvnitř vajíčka?

Kategorie Junior, autorka Anna Morpurgo.

### Zadání

Lenka se dívá na čtyři čokoládová vajíčka umístěná ve vitríně. Dvě z nich jsou otevřená, je proto vidět, zda je uvnitř dárek, ale není možné z jejího pohledu rozpoznat barvu polevy. Dvě vajíčka jsou ještě zavřená, proto je vidět barva jejich polevy, ale zase nelze rozpoznat, zda je uvnitř dárek.

Lenka předpokládá, že všechna modrá vajíčka obsahují dárek. Co musí Lenka udělat, aby si ověřila, že její úvaha je správná?




A) Otočit polovinu skořápky vajíčka s dárkem (č. 3) a otočit polovinu skořápky vajíčka bez dárku (č. 4)
B) Otevřít bílé vajíčko (č. 1) a otevřít modré vajíčko (č. 2)
C) Otevřít modré vajíčko (č. 2) a otočit polovinu skořápky vajíčka s dárkem (č. 3)
D) Otevřít modré vajíčko (č. 2) a otočit polovinu skořápky vajíčka bez dárku (č. 4)

**Co má tato úloha společného s informatikou**

Jak už bylo řečeno, logika hraje v informatice velmi důležitou roli. Jedním z klíčových rysů algoritmických procesů je totiž záruka očekávaného výsledku. Potřebujeme mít nezvratně dokázaná tvrzení typu „postup A najde pro každé správné zadání Z odpovídající výsledek V a spotřebuje při tom nanejvýš prostředky P“. Logika je mocným nástrojem, který se k takovému účelu velmi hodí. V této úloze máme za úkol vymyslet způsob ověření platnosti tvrzení (nikoliv konkrétní tvrzení přímo ověřit), které z jedné vlastnosti vajíčka vyvozuje jinou. Takové dokázané tvrzení je užitečné pro zjednodušení kontroly; pokud by se potvrdila jeho platnost, nebude třeba vyvozenou vlastnost kontrolovat přímo. Nebude tedy nutno každé vejce kvůli dárku otvírat: kdo bude chtít dárek, vybere si modré vejce.

Tvrzení „všechna modrá vejce skrývají dárek“ bude v této úloze fungovat podobně, jako když předpokládáme, že v tabulkovém procesoru patřičné tlačítko opravdu seřadí vybrané buňky, a už nekontrolujeme, zda jsou buňky opravdu seřazené. Vymýšlet způsob ověření platnosti tvrzení je mj. velmi užitečná dovednost informatika. Uvedený druh tvrzení a způsob uvažování nachází obrovské využití při ladění počítačových programů.

Přemýšliví žáci a žákyně si mohou všimnout, že původní tvrzení „všechna modrá vajíčka obsahují dárek“ lze formulovat jako „jestliže je vajíčko modré, pak obsahuje dárek", tedy ve formě implikace. Za pozornost zde stojí zcela zjevná absence vyšetřování věcné souvislosti. Přestože netušíme, proč by zrovna modrá vejce měla obsahovat dárek, není s platností uvedené implikace sebemenší problém.

Jiná možnost je přeložit zadání do řeči množin: „množina modrých vajíček je podmnožinou množiny vajíček s dárkem". Přemýšliví žáci a žákyně si mohou všimnout, že dokazování tvrzení je vlastně pořád úplně stejné. Jiní žáci možná po nakreslení příslušného diagramu zjistí, že je pro ně řešení úlohy ve světě množin přirozenější, než ve světě logiky. I výběr vhodného úhlu pohledu je přitom další důležitou dovedností informatika.

Podobné (o mnoho sofistikovanější) přístupy jako u řešení úlohy s vejci se uplatňují v oblasti dolování informací z dat (data mining – viz Wikipedie). Na začátku máme tabulku s vlastnostmi mnoha objektů, ať už vajec, nebo třeba zákazníků obchodu. Zajímat nás mohou právě pravidla typu (modrá ⇒ dárek), nebo (koupil dýni ⇒ koupí svíčku). Přitom metody data miningu nejenže automaticky hodnotí platnost daných pravidel, ony je také automatizovaně vyhledávají.

### Zdůvodnění správné odpovědi

Tvrzení „Všechna modrá vajíčka obsahují dárek" máme ověřit probráním jednotlivých vajec, omezíme se ale pouze na ta, která mohou mít na platnost tvrzení nějaký vliv.

1. Bílé vejce nás nezajímá, o něm tvrzení nehovoří.
2. Modré je třeba otevřít (kdyby bylo prázdné, tvrzení neplatí).
3. Skořápku s dárkem nepotřebujeme otáčet (pokud je bílá, tak nás nezajímá, pokud je modrá, tak je vše v pořádku).
4. Prázdnou skořápku je třeba otočit (kdyby byla modrá, tvrzení neplatí).

Tomu odpovídá správná odpověď D) – otevřít modré vajíčko (č. 2) a otočit polovinu skořápky vajíčka bez dárku (č. 4).

Pokud bychom ověřovali tvrzení „Jestliže je vajíčko modré, pak obsahuje dárek", vyjdeme např. ze známé pravdivostní tabulky implikace. Pokud vajíčko není modré, o pravdivosti implikace nám nic neřekne (protože pak platí cokoliv, může a nemusí dárek obsahovat). Pokud je modré, musí obsahovat dárek. Také nesmí nastat, že modré vajíčko dárek neobsahuje. Z toho vidíme, že je třeba zkontrolovat obsah modrého vejce a barvu prázdné skořápky (nesmí být modrá).

## Co bude dělat odpoledne

Kategorie Junior, autor Hans-Werner Hein.

### Zadání

Aleš se nikdy nemůže rozhodnout, co bude odpoledne dělat. Nejradši by dělal všechny ze svých tří nejoblíbenějších činností, ale musí se rozhodnout. Proto si řekl, že třikrát hodí hrací kostkou a pak se bude rozhodovat podle těchto pravidel:


*Vysvětlivka k obrázku*: Hod číslo $n$ znamená hodnotu, která padla na kostce při $n$-tém hodu.

Dneska házel a vyšlo mu, že má doma skládat puzzle. Jaká čísla mu padala na hrací kostce? Vyber z možností:

A) první hod padla 5, druhý hod padla 3, třetí hod padla 6
B) první hod padla 2, druhý hod padla 4, třetí hod padla 1
C) první hod padla 3, druhý hod padla 4, třetí hod padla 3
D) první hod padla 6, druhý hod padla 6, třetí hod padla 2

### Co má tato úloha společného s informatikou

„Když-tak-jinak“ neboli rozhodování je stěžejní součástí programovacích jazyků (nebo také funkcí v tabulkovém procesoru). V závislosti na aktuální situaci se rozhoduje o tom, co se vykoná v příštím okamžiku.

Potřeba dělat rozhodnutí mezi dvěma možnostmi je standardní životní situací. „Když-tak-jinak“ se také opírá o Platonův zákon o vyloučení třetího (http://cs.wikipedia.org/wiki/Zákon_o_vyloučení_třetího). Tato úloha ukazuje skládání podmínek, kdy se rozhodujeme o více než dvou alternativách a za tím účelem do sebe vnořujeme několik rozhodování mezi dvěma možnostmi. To je v informatice (i v životě) opět zcela běžná situace.

*Terminologická poznámka*: anglické klíčové slovo IF u rozhodování překládáme v českých prostředích pro výuku programování jako KDYŽ mj. proto, abychom jej odlišili od významově podobného JESTLIŽE, používaného pro implikaci ($A \Rightarrow B$: jestliže platí A, pak platí B). Pokud v rozhodování není splněna podmínka, vždy nastupuje druhá varianta (ELSE, tedy druhá větev programu v češtině JINAK). Nemůže se stát, že by byly provedeny podmíněné příkazy, aniž by platila daná podmínka. Oproti tomu v logické implikaci toto neplatí. Dá se říci, že rozhodování „KDYŽ-TAK-JINAK“ má v logickém smyslu blíže ekvivalenci. Program bude pokračovat první větví „TAK“ právě tehdy, když je podmínka splněna.

Kromě toho samozřejmě není zdravé míchat řídící strukturu z programování, tedy řízení nějaké činnosti, s logickou spojkou, tedy rozhodováním o pravdivosti nějakých výroků. Je proto užitečné různé významy odlišit i volbou jiného uvozovacího slova.

Podobně nevhodné pro překlad slova IF je slovo POKUD. Je totiž velice podobné slovu DOKUD, kterým překládáme uvození cyklu s neznámým počtem opakování WHILE, a dětem se obě slova pletou.

### Zdůvodnění správné odpovědi

Skládat puzzle je možno tehdy, když na obrázku nebude splněna ani jedna (zeleně podbarvená) podmínka. Abychom se dostali ke skládání puzzle, u každé podmínky se musí pokračovat pod slovem JINAK. Jinými slovy, první hod musí být menší nebo roven druhému i třetímu hodu.

Správně je varianta C): první hod 3, druhý hod 4, třetí hod 3. První hod není větší než druhý, takže se pokračuje větví JINAK. Třetí hod není menší než první, pokračuje se také větví JINAK.

Varianta A) první hod 5, druhý hod 3, třetí hod 6 splňuje první podmínku ($5 > 3$) a vede na hřiště.

Varianta B) první hod 2, druhý hod 4, třetí hod 1 nesplňuje první podmínku ($2 > 4$), ale splňuje druhou podmínku ($2 < 1$) a vede do bazénu.

Varianta D) první hod 6, druhý hod 6, třetí hod 2 také nesplňuje první podmínku ($6 > 6$), splňuje druhou podmínku ($2 < 6$) a vede do bazénu.

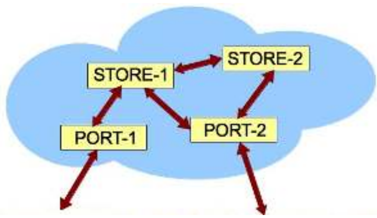
## Cloudové řešení ve firmě

Kategorie Junior, autor Hans-Werner Hein.

### Zadání

Ve firmě Castoria používají cloudové řešení. Všechna data uchovávají pomocí skupiny navzájem propojených počítačových serverů. Obrázek ukazuje jejich propojení.

- Kvůli vyšší úrovni zabezpečení jsou data uchovávána ve dvou úložištích, serverech STORE-1 a STORE-2.
- Data jsou přístupná přes dva přístupové servery PORT-1 a PORT-2.
- Data jsou uchovávána pouze v úložištích STORE, žádná data nejsou uchovávána v přístupových serverech PORT.
- STORE-1 je přístupný přes STORE-2 a obráceně.




Které z následujících tvrzení NENÍ pravdivé?

A) Jestliže PORT-2 a PORT-1 jsou zničeny, všechna data v Castorii jsou ztracena.

B) Jestliže PORT-1 a PORT-2 jsou zničeny, všechna data v Castorii jsou nepřístupná.

C) Jestliže STORE-2 a STORE-1 jsou zničeny, všechna data v Castorii jsou ztracena.

D) Jestliže STORE-1 a PORT-2 jsou zničeny, všechna data v Castorii jsou nepřístupná.

### Co má tato úloha společného s informatikou

Úloha zjednodušeně naznačuje princip (a některá rizika) cloudových služeb. S pomocí základního povědomí o jejich fungování, s pomocí porozumění tokům dat znázorněným grafem a s pomocí aplikace logických pravidel je třeba vybrat správnou odpověď.

Každá data podléhají mimo jiné jistému riziku dočasné nedostupnosti a riziku úplné ztráty. Riziko plyne do značné míry z použitého úložiště. Když se rozhodujeme o tom, kam data uložit, zároveň se rozhodujeme, jaká rizika chceme nést.

Využitím cloudových služeb se rizik zcela nezbavujeme. Některá rizika se zmenšují (např. selhání paměťového média je „v cloudu“ téměř vyloučeno, zejména ve srovnání s uživatelovým pevným diskem). Naopak ale přibývají některá nová rizika, související např. s dostupností připojení k internetu či např. s politikou (rizika ztráty dat v důsledku státních zásahů, souvisejících s různě vykládanou ochranou autorských práv – viz případ serveru Megaupload.com). Další riziko ke zvážení je ztráta soukromí: je zabezpečení mého vlastního počítače vyšší, než zabezpečení cloudu profesionálního poskytovatele? Jak to mohu zjistit?

### Zdůvodnění správné odpovědi

Správná odpověď je A): Jestliže PORT-2 a PORT-1 jsou zničeny, všechna data v Castorii jsou ztracena.

Toto tvrzení totiž není pravdivé. Pokud budou přístupové servery zničeny, data budou stále uchována na serverech STORE-1 a STORE-2. Budou pouze nepřístupná a po opravě (např. výměně) přístupových serverů budou opět dostupná. Firma o data nepřijde.

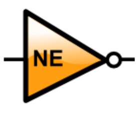
Ostatní odpovědi jsou pravdivé. Odpověď „Jestliže STORE-1 a PORT-2 jsou zničeny, všechna data v Castorii jsou nepřístupná“ říká: protože z PORT-1 do STORE-2 nevede přímé spojení a ostatní servery jsou zničeny, jsou data (stále uložená na STORE-2) nepřístupná.

## Logické obvody

Kategorie Junior, autor Paul Miotti.

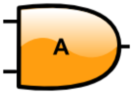
### Zadání

Logická hradla v procesoru počítače mají jeden nebo dva vstupy nalevo a jeden výstup napravo. Přepínají ZAP a VYP proud na výstupu v závislosti na proudech na vstupech.



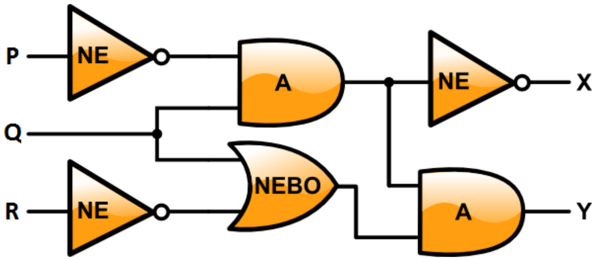

Když vstup je ZAP, výstup je VYP.
Když vstup je VYP, výstup je ZAP.


Výstup je ZAP kromě případu, kdy oba vstupy jsou VYP.




Výstup je ZAP pouze pokud oba vstupy jsou ZAP.

Na obrázku je logický obvod.




Jestliže vstup **A** je VYP a vstupy **B** a **C** jsou ZAP, jaké budou výstupy **X** a **Y**?

A) **X** je VYP, **Y** je VYP  B) **X** je VYP, **Y** je ZAP
C) **X** je ZAP, **Y** je VYP  D) **X** je ZAP, **Y** je ZAP

### Co má tato úloha společného s informatikou

Logická hradla jsou základními stavebními kameny digitální elektroniky, např. počítačových procesorů. Jedničky a nuly digitálních dat jsou reprezentovány zapnutím nebo vypnutím elektrického proudu (ZAP, VYP). V dnešních procesorech jsou propojeny miliardy takových hradel, aby počítač mohl pracovat.

Analýza takových složitých sítí může být prováděna pomocí booleovské algebry, tedy matematickými výpočty. Výstupy obvody z úlohy lze vyjádřit vzorci:

**X** = NE(A(NE(**A**),**B**))

**Y** = A(A(NE(**A**),**B**),NEBO(**B**, NE(**C**)))

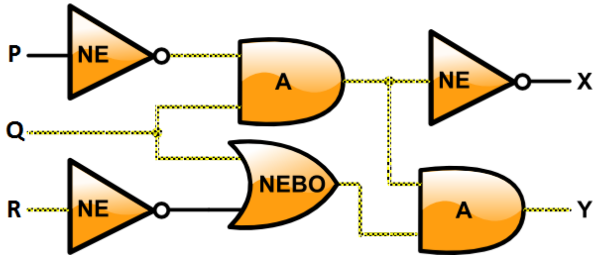
V obvodu i v algebře lze např. ukázat, že je-li vstup **B** ZAP, nemá vstup **C** na výstupy **X** a **Y** žádný vliv. Ve vzorci pro výstup **X** se vůbec nevyskytuje. Ve vzorci pro **Y** sice ano, ale jen jako součást výrazu:

NEBO(**B**, NE(**C**))

Z definice NEBO je ale zřejmé, že výsledek bude ZAP, protože stačí, že **B** je ZAP. Na vstupu **C** tedy nijak nezáleží. Takový přístup využívají mnohé programovací jazyky pod názvem zkrácené vyhodnocování. Je to drobnost, která ale může při častém opakování ušetřit mnoho času.

### Zdůvodnění správné odpovědi

Systematickou aplikací logických pravidel ze zadání dojdeme k tomu, že správná odpověď zní **X** je VYP, **Y** je ZAP. Na obrázku je procházející proud ZAP znázorněn tečkováním, VYP je znázorněn plnou čarou.




Ke stejnému výsledku dojdeme použitím vzorců. Dosadíme-li za ZAP=1, za VYP=0 ze zadání úlohy, dostaneme:

$$\mathbf{X} = \mathrm{NE}(\mathrm{A}(\mathrm{NE}(0), 1)) = \mathrm{NE}(\mathrm{A}(1, 1)) = \mathrm{NE}(1) = 0$$

$$\mathbf{Y} = \mathrm{A}(\mathrm{A}(\mathrm{NE}(0), 1), \mathrm{NEBO}(1, \mathrm{NE}(1))) = \mathrm{A}(\mathrm{A}(1, 1), \mathrm{NEBO}(1, 0)) = \\ = \mathrm{A}(1, 1) = 1$$

## Zavirovaný server

Kategorie Senior, autor Jiří Vaníček

### Zadání

Operační systém Styx má zvláštní vlastnost. Zavirovaný počítač s tímto operačním systémem odpovídá vždy nepravdivě. Například, když obdrží dotaz „Jsi zavirovaný?“, odpoví zavirovaný počítač „Ne.“

Počítač, který není zavirovaný, vždy odpoví pravdivě. Např. na dotaz „Jsi zavirovaný?“ odpoví nezavirovaný počítač „Ne.“ IT specalisté z firmy StyxOK opravují přes Internet pouze servery a notebooky s operačním systémem Styx. Kterou z následujících odpovědí může dát pouze zavirovaný server?

A) Jsem zavirovaný server.

B) Nejsem zavirovaný server.
C) Jsem zavirovaný notebook.
D) Nejsem zavirovaný notebook.

### Co má tato úloha společného s informatikou

Tato otázka se možná zdá být o virech, je to ovšem především logická hádanka. Zkoumáním toho, co lze logicky odvodit, tak zároveň zjišťujeme, co lze „vypočítat“ na počítači, neboli co vůbec na počítači lze. Dnes už víme, že existují otázky, na které logika odpověď nikdy nenajde. Tudíž je taky jasné, že existují úlohy, které nelze vyřešit žádným algoritmem (takže ani nemá cenu ten algoritmus hledat), podobně jako nemá smysl sestrojovat perpetuum mobile nebo třetit úhel pravítkem a kružítkem. Konkrétní typ logického problému řešený v této úloze spadá mezi problémy o Poctivcích a padouších. Můžeme doporučit velmi pěknou knihu logických hádanek na téma poctivců a padouchů od R. Smullyana Jak se jmenuje tahle knížka? a video na toto téma: http://www.youtube.com/ watch?v=lAvy9xoD3uw.

### Zdůvodnění správné odpovědi

Odpověď „Jsem zavirovaný notebook“ je správná. Nemůže ji totiž poslat zavirovaný notebook (nebyla by to totiž lež) ani nezavirovaný server (ten musí odpovědět pravdu, tedy že není notebook). A nemůže ji poslat ani nezavirovaný notebook (ten musí mluvit pravdu, že je nezavirovaný). Tuto odpověď může poslat pouze zavirovaný server (posílá nepravdivou odpověď, že je notebook).

Ostatní odpovědi jsou nesprávné. Zavirovaný server nemůže odpovídat pravdu, takže nemůže dát pravdivé odpovědi „Jsem zavirovaný server“ a „Nejsem zavirovaný notebook“. Odpověď „Nejsem zavirovaný server“ sice zavirovaný server poslat může, ovšem stejně tak ji může poslat nezavirovaný notebook. Soutěžní úloha ale vyžaduje, aby odpověď mohl poslat POUZE zavirovaný server. Tato možnost je tedy také nesprávná.

## Zdravotní záznamy

Kategorie Senior, autor Arthur Charguéraud.

### Zadání

Zdravotní záznamy pacientů jsou citlivé údaje, které se nesmí zveřejňovat. Pro vědecké účely jsou používány anonymizované údaje (tab. č. 1). Z jiné tabulky (tabulka č. 2) ze seznamu obyvatel v matrice můžeme získat konkrétní údaje o všech obyvatelích města.

Vhodným propojením údajů z těchto tabulek můžeme u konkrétního obyvatele města zjistit, zda trpí nějakou chorobou. Dokážeš zjistit, jakou nemocí trpěl některý z uvedených obyvatel? Napiš jeho křestní jméno.

| Tabulka č. 1<br>Pacienti narození 1. ledna | | | |
|---|---|---|---|
| DATUM NAROZENÍ | POHLAVÍ | PSČ | DIAGNÓZA |
| 01/01/1974 | MUŽ | 29400 | diabetes |
| 01/01/1976 | MUŽ | 18250 | rakovina plic |
| 01/01/1976 | ŽENA | 29400 | angína |
| 01/01/1976 | ŽENA | 29400 | anémie |
| 01/01/1984 | ŽENA | 18250 | srdeční onemocnění |
| 01/01/1985 | ŽENA | 16300 | angína |
| 01/01/1987 | ŽENA | 25340 | rakovina kůže |
| 01/01/1998 | MUŽ | 18250 | diabetes |
| 01/01/1998 | ŽENA | 18250 | chřipka |

| Tabulka č. 2<br>Obyvatelé města s PSČ 18250 narození 1. ledna | | | |
|---|---|---|---|
| PSČ | DATUM NAROZENÍ | POHLAVÍ | JMÉNO |
| 18250 | 01/01/1958 | ŽENA | Jana Novotná |
| 18250 | 01/01/1976 | MUŽ | Jirka Panoch |
| 18250 | 01/01/1976 | MUŽ | Robert Synek |
| 18250 | 01/01/1984 | ŽENA | Kateřina Bártová |
| 18250 | 01/01/1984 | ŽENA | Daniel Malý |
| 18250 | 01/01/1998 | ŽENA | Alice Skleničková |
| 18250 | 01/01/1998 | MUŽ | Roman Dlouhý |
| 18250 | 01/01/1998 | ŽENA | Ivana Nováková |
| 18250 | 01/01/1999 | MUŽ | Martin Klaus |

## Co má tato úloha společného s informatikou

Vytváření a spojování databází s osobními údaji by mělo zvyšovat obavy veřejnosti o jejich bezpečnost. Anonymizace spočívá v odstranění dostatku osobních dat tak, aby nebylo možné dohledat, o kom vlastně zbývající data jsou. Na druhé straně stojí potřeba zachovat o jedinci co nejvíce detailů, např. pro vědecké účely. Vědci stanovili pravidlo pro správně anonymizovaný výpis z databáze. Můžeme říci, že výpis z databáze je $k$-anonymizovaný, jestliže každý řádek z výpisu odpovídá nejméně $k$ jedincům. Jestliže je $k = 1$, databáze umožňuje identifikovat jednu konkrétní osobu. Je-li $k = 3$, můžeme najít skupinu tří jednotlivců, z nichž jeden je hledaným jedincem, ale z tabulek není možné určit který. Vysoká hodnota $k$ naznačuje dobrou anonymizaci databáze. Tato definice vedla k zajímavým studiím. Jedním z problémů je najít počet sloupců, které je třeba z tabulky vymazat, aby se stala $k$-anonymní. Definice také upozorňuje na nebezpečí při zveřejňování citlivých dat. Ačkoliv mohou být dva výpisy z databáze vysoce $k$-anonymní, jejich spojením můžeme získat všechna osobní data. Zmíněnou situaci modeluje právě tato úloha.

K situaci, která nastala v této úloze, kdy se podařilo identifikovat konkrétní nemoc z přístupných dat, nesmí docházet. I když tabulky nejsou veřejné, může se k citlivým údajům dostat neoprávněná osoba (třeba pracovník jiného úřadu, než mu přísluší, a který není vázán mlčenlivostí).

Úloha na první pohled jako logická nevypadá, z uvedených úloh je ovšem logice v jistém smyslu nejblíže. Vyžaduje totiž uvažování o logickém uvažování: jak vůbec z daných informací něco spolehlivě správně odvodit? Jejím předmětem je právě to, čím se logika jako věda zabývá: jak správně uvažovat, co z čeho vyvodit lze a co už nikoliv.

**Zdůvodnění správné odpovědi**

Hledáme v tabulkách záznamy, které se shodují ve všech odpovídajících sloupcích. Pokud najdeme v pravé tabulce někoho, kdo jako jediný odpovídá nějakému záznamu z levé tabulky, bude jasné, že se záznam týká právě jeho. V tabulce č. 2 jsou uvedeni pouze obyvatelé města s poštovním směrovacím číslem 182 50. Zajímají nás proto jen pacienti v 2., 5., 8. a 9. řádku levé tabulky.

Zkontrolujeme tyto čtyři pacienty:

- V 2. řádku levé tabulky je muž narozený 1. 1. 1976, pro něj existují v pravé tabulce dvě možnosti (řádky 2 a 3), které se ale dál nijak neliší. Nemůžeme tedy rozhodnout, který záznam mu patří.
- V 5. řádku levé tabulky se situace opakuje, opět existují dvě nerozlišitelné možnosti (řádek 4 a 5 pravé tabulky).
- V 8. řádku levé tabulky je muž narozený 1. 1. 1998, jemuž odpovídá pouze jeden záznam v druhé tabulce. Jedná se o Romana Dlouhého.
- Pro 9. řádek levé tabulky (žena narozená taktéž 1. 1. 1998) opět existují dvě možnosti v druhé tabulce (řádek 6 a 8).

Správná odpověď je Roman.

Výuka informatiky prožívá v posledních letech ve světě obrovský boom. Např. 25 z 50 států USA, v nichž žije 75 % obyvatel USA, zahrnulo v tomto školním roce informatiku (computer science, nikoliv information technology) do výuky na středních školách. Jiný příklad, loňské světové akce na podporu výuky programování Hodina kódu se zúčastnilo 60 milionů žáků z 90 000 škol z celého světa.

Logika je jednou ze základních součástí výuky informatiky, což plyne i z metodické příručky pro výuku předmětu Computing v Anglii na 1. stupni základních škol, podle které informatické myšlení zahrnuje 6 mentálních procesů: logické uvažování, algoritmizaci, dekompozici, abstrakci, generalizaci a evaluaci (Berry, 2015, s. 6).

Protože výuka informatického myšlení u mladších žáků se stále více dostává do popředí, rádi bychom některý z příštích dílů našeho seriálu věnovali právě informatickým úlohám, věkově přiměřeným žákům 1. stupně základní školy.

## Literatura

[1] *Berry, M.*: QuickStart Primary Handbook. BCS, Swindon, 2015.

# ZPRÁVY

## 56. Mezinárodní matematická olympiáda

Hlavními pořadateli 56. Mezinárodní matematické olympiády, která se konala od 4. do 16. července v thajském městě Chiang Mai na severu této pro nás pořád ještě exotické země, byly Ústav pro podporu výuky věd a technologií (IPST), univerzita v Chiang Mai, Matematické sdružení Thajska pod patronací Jeho Veličenstva krále a Nadace pro podporu akademických olympiád a rozvoje vědecké výchovy (POSN) pod patronací Její Výsosti princezny Galyani Vadhana Krom Luang Naradhiwas Rajanagarindra.

Organizátoři připravili pro práci mezinárodní jury, jejímž hlavním úkolem je vybrat z připravených návrhů šestici soutěžních úloh, vynikající podmínky v pětadvacetipatrovém hotelu Holiday Inn v samém centru města. Soutěžící spolu s pedagogickými vedoucími bydleli v neméně skvělém hotelu v jiné části města. Počet soutěžících byl opět rekordní: olympiády se zúčastnilo 577 studentů ze 104 zemí celého světa.

Slavnostní zahájení se konalo v aule chiangmajské univerzity a zakončilo ho nápadité defilé s národními vlajkami.

České družstvo, které bylo vybráno na základě výsledků ústředního kola 64. ročníku MO v Praze a následné týdenní přípravy v Kostelci nad Černými lesy, tvořili *Vojtěch Dvořák* z 8. ročníku G JGJ v Praze, *Matěj Konečný* z 8. ročníku G v Českých Budějovicích v Jírovcově ulici, *Marian Poljak* z 7. ročníku GJŠ v Přerově, *Jan Soukup* z 8. ročníku GJV v Klatovech, *Radovan Švarc* z 8. ročníku G Česká Třebová a *Pavel Turek* z 6. ročníku G v Olomouci-Hejčíně. Vedoucím družstva byl RNDr. *Karel Horák*, CSc., z Matematického ústavu Akademie věd v Praze a studenty doprovázel Mgr. *Michal Rolínek* z Institutu pro vědu a technologii v Klosterneuburgu u Vídně.

Vlastní soutěž se odehrála v univerzitní aule hotelu 10. a 11. července, kdy soutěžící jako obvykle řešili vždy po trojici soutěžních úloh. Na to měli pokaždé vyhrazeno přesně 4,5 hodiny; za každou ze šesti úloh mohli získat nejvýše 7 bodů.

Vzhledem k tomu, že dva z našich studentů už mají doma po medaili z předchozí 55. MMO, čekali jsme, že své zkušenosti i přípravu zúročí lépe. Letošní MMO však dle mínění mnohých patřila k jedné z nejtěžších. Nicméně zisk tří bronzových medailí za velký úspěch považovat nelze. Zbylí tři naši studenti se museli spokojit pouze se základním oceněním, kterým je tzv. *Honourable mention* a které se uděluje studentům bez medaile za úplné vyřešení alespoň jedné soutěžní úlohy.

Výsledky našich soutěžících: 160.–182. Pavel Turek, 17 b., 217.–256. Radovan Švarc, 15 b., 257.–282. Marian Poljak, 14 b. (všichni tři získali bronzové medaile), 322.–336. Matěj Konečný, 11 b., 365.–408. Jan Soukup, 9 b., 394.–419. Vojtěch Dvořák, 8 b. (získali pochvalné uznání).

V neoficiálním pořadí všech zúčastněných zemí jsme stěží uhájili pozici v první polovině (spolu s Mongolskem a Švýcarskem jsme se podělili o 45.–47. příčku) více než stočlenného pole.

O obtížnosti úloh svědčí množství rozdaných bodů. Jak je patrno z tabulky, Čínu letos o pár bodů předběhly Spojené státy americké, ale ani ty nepřekonaly hranici 200 bodů, což se už dlouho nestalo. Rusko letos vypadlo ze silné pětky, protože ruští studenti si překvapivě neporadili s obtížnou třetí planimetrickou úlohou, a tak nezískali ani jednu zlatou a skončili se šesti stříbrnými až na osmé příčce. Úlohy rozhodně nebyly lehké, naši si sice výborně poradili s kombinatorickou první úlohou, na které překvapivě pohořeli jinak výborní Vietnamci, a o něco hůře se čtvrtou (geometrickou) úlohou. Na zbývající těžší úlohy však bohužel nestačili.

K zisku zlaté medaile letos stačilo pouhých 26 bodů, přičemž plného počtu 42 bodů dosáhl jediný soutěžící, Zhuo Qun (Alex) Song z Kanady. Stříbrné medaile se udělovaly za 19–25 bodů a na bronz stačilo 14 bodů. Celkem jury udělila 39 zlatých, 100 stříbrných a 143 bronzových medailí a 126 studentů získalo „pochvalné uznání“ (Honourable mention).

Vynikající organizace se projevila i v bohaté náplni volného času jak studentů, tak jejich vedoucích. K největším zážitkům bezesporu patřil výlet do sloního parku Maetaman korunovaný jízdou na hřbetě slona, který po soutěži absolvovali i soutěžící, neméně vzrušující byla i zhruba čtyřkilometrová plavba na bambusových vorech mírnými peřejemi. Po koordinaci jsme pak měli ještě možnost navštívit chrám Wat Pra That Doi Suthep v horách za hranicí města a poté chrám Wat Chedi Luang v historickém středu města.

Slavnostní zakončení olympiády se konalo opět v prostorné aule chiangmajské univerzity za účasti thajského ministra školství a v uvolněném duchu bez velkých proslovů. Po úžasném bubenickém a tanečním vystoupení došlo k rozdání medailí, na němž se valnou částí kromě představitelů univerzity a pana ministra podíleli sami organizátoři a koordinátoři.

O hostitelských zemích příštích olympiád je už jasno až do roku 2019: v roce 2016 to bude Hongkong, poté Brazílie, Rumunsko a Velká Británie.

**Texty soutěžních úloh**
(v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla)

**Úloha 1**

Konečnou množinu $\mathcal{S}$ bodů v rovině nazveme *vyváženou*, jestliže pro libovolné dva různé body $A$ a $B$ z $\mathcal{S}$ existuje v $\mathcal{S}$ takový bod $C$, že $|AC| = |BC|$. Množinu $\mathcal{S}$ nazveme *středuprostou*, jestliže pro žádné tři různé body $A$, $B$ a $C$ z $\mathcal{S}$ neexistuje v $\mathcal{S}$ bod $P$ takový, že $|PA| = |PB| = |PC|$.

(a) Dokažte, že pro každé přirozené číslo $n \geqslant 3$ existuje vyvážená množina obsahující právě $n$ bodů.

(b) Určete všechna přirozená čísla $n \geqslant 3$, pro něž existuje vyvážená středuprostá množina obsahující právě $n$ bodů.

(*Nizozemsko*)

**Úloha 2**

Určete všechny trojice $(a, b, c)$ kladných celých čísel, pro něž každé z čísel

$$ab - c, \quad bc - a, \quad ca - b$$

je mocninou 2.
(Mocnina 2 je celé číslo tvaru $2^n$, kde $n$ je nezáporné celé číslo.) (*Srbsko*)

**Úloha 3**

Nechť $ABC$ je ostroúhlý trojúhelník splňující $|AB| > |AC|$. Označme $\Gamma$ kružnici mu opsanou, $H$ jeho průsečík výšek a $F$ patu výšky z vrcholu $A$. Střed strany $BC$ označme $M$. Nechť $Q$ je bod kružnice $\Gamma$ takový, že $|\sphericalangle HQA| = 90°$, a $K$ bod kružnice $\Gamma$ takový, že $|\sphericalangle HKQ| = 90°$. Předpokládejme, že body $A$, $B$, $C$, $K$ a $Q$ jsou navzájem různé a leží na kružnici $\Gamma$ v tomto pořadí.

Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům $KQH$ a $FKM$ se vzájemně dotýkají.

(*Ukrajina*)

**Úloha 4**

Trojúhelníku $ABC$ je opsána kružnice $\Omega$ o středu $O$. Přitom kružnice $\Gamma$ se středem $A$ protne úsečku $BC$ v bodech $D$ a $E$ takových, že body $B$, $D$, $E$ a $C$ jsou různé a leží na přímce $BC$ v tomto pořadí.

Kružnice $\Gamma$ a $\Omega$ se protínají v bodech $F$ a $G$, přičemž body $A$, $F$, $B$, $C$ a $G$ leží na kružnici $\Omega$ v tomto pořadí. Označme $K$ další průsečík kružnice opsané trojúhelníku $BDF$ s úsečkou $AB$ a $L$ další průsečík kružnice opsané trojúhelníku $CGE$ s úsečkou $CA$.

Předpokládejme dále, že přímky $FK$ a $GL$ jsou různé a protínají se v bodě $X$. Dokažte, že bod $X$ leží na přímce $AO$.

(*Řecko*)

**Úloha 5**

Nechť $\mathbb{R}$ označuje množinu všech reálných čísel. Určete všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \to \mathbb{R}$, jež splňují rovnici

$$f\bigl(x+f(x+y)\bigr)+f(xy) = x+f(x+y)+yf(x)$$

pro všechna reálná čísla $x$ a $y$.

(*Chorvatsko*)

**Úloha 6**

Posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ celých čísel vyhovuje následujícím podmínkám:

(i) $1 \leqslant a_j \leqslant 2\,015$ pro každé $j \geqslant 1$;

(ii) $k + a_k \neq \ell + a_\ell$ pro všechna $k$ a $l$ taková, že $1 \leqslant k < \ell$.

Dokažte, že existují dvě kladná celá čísla $b$ a $N$ taková, že

$$\left|\sum_{j=m+1}^{n} (a_j - b)\right| \leqslant 1\,007^2$$

pro všechna celá čísla $m$ a $n$ splňující $n > m \geqslant N$. (*USA*)

*Karel Horák*

# Mezinárodní olympiáda v informatice IOI 2015

Dvacátý sedmý ročník Mezinárodní olympiády v informatice IOI 2015 se konal ve dnech 26. 7.– 2. 8. 2015 v Kazachstánu v bývalém hlavním městě Almaty. Hlavním pořadatelem akce byla Kazašská národní univerzita al-Fabri. V jejím ubytovacím zařízení bydleli všichni soutěžící, v univerzitní knihovně probíhala vlastní soutěž, ve velkém sále Paláce studentů se konalo slavnostní zahájení a zakončení olympiády. Vedoucí národních delegací byli ubytováni v nedalekém hotelu Atakent, ve kterém také probíhala všechna jejich jednání, včetně výběru soutěžních úloh a překladů zadání úloh do národních jazyků.

Soutěže IOI se letos zúčastnilo rekordních 83 zemí z celého světa. Z každé země se mohou zúčastnit čtyři soutěžící a dva vedoucí, celkově letos soutěžilo 322 studentů, což je také nejvyšší počet účastníků v historii. Naše české družstvo bylo sestaveno na základě výsledků ústředního kola 64. ročníku Matematické olympiády, kategorie P, a bylo tvořeno těmito studenty: *Filip Bialas*, student G Opatov v Praze 4, *Dalimil Hájek*, absolvent G J. Keplera v Praze 6, *Matěj Konečný*, absolvent G Jírovcova v Českých Budějovicích. *Václav Rozhoň*, absolvent G J. V. Jirsíka v Českých Budějovicích

Vedoucími české delegace na IOI 2015 byli jmenováni *doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.* z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze a *doc. RNDr. Tomáš Pitner, Ph.D.* z Fakulty informatiky Masarykovy univerzity v Brně.

Již tradičně se naši účastníci IOI na soutěž předem připravovali společně s některými reprezentanty vybranými pro CEOI (Středoevropská olympiáda v informatice) na týdenním přípravném soustředění. Toto soustředění se konalo v polovině června v Danišovcích na východním Slovensku a bylo společné pro soutěžící z Čech, Polska a Slovenska.

Do Kazachstánu jsme přiletěli v neděli 26. 7. ráno a po registraci a ubytování jsme měli nedělní odpoledne volné na prohlídku města Almaty. V pondělí již vedoucí delegací čekala první jednání mezinárodní jury, zatímco studenti měli možnost seznámit se prakticky s počítači a soutěžním prostředím. V pondělí odpoledne proběhlo také slavnostní zahájení olympiády. Hned tentýž den večer se také konalo jednání vedoucích všech delegací spojené s výběrem úloh pro první soutěžní den a následně překlady zadání úloh do rodných jazyků soutěžících. V úterý probíhal první soutěžní den, souběžně s ním se konala i mezinárodní konference pro vedoucí národních delegací. V odpočinkovém dni ve středu jsme společně navštívili vysokohorský sportovní komplex Medeu a odpoledne představení kazašského státního cirkusu. Ve středu večer proběhla příprava úloh pro druhý soutěžní den, který se konal následně ve čtvrtek. Na pátek byl pro všechny účastníky IOI připraven druhý celodenní výlet, který mířil do přírodní rezervace Turgen gorge, kde jsme měli možnost seznámit se s kazašskými národními zvyky a tradicemi. Na sobotu bylo naplánováno závěrečné jednání vedoucích všech delegací, které se zabývalo převážně otázkami budoucnosti IOI, volbou místa konání příštích ročníků a volbou členů mezinárodních řídicích orgánů. V sobotu odpoledne nyla olympiáda zakončena slavnostním vyhlášením výsledků.

Vlastní soutěž probíhá podobným způsobem, jako praktická část ústředního kola naší Matematické olympiády, kategorie P. Každý soutěžící má přidělen osobní počítač, na kterém řeší zadané úlohy. V každém ze dvou soutěžních dnů jsou zadány tři úlohy a soutěžící mají na jejich vyřešení vymezen čas 5 hodin. Úlohy je třeba dovést až do tvaru odladěného programu, hotové programy se odevzdávají k vyhodnocení prostřednictvím soutěžního prostředí. Odevzdané programy se průběžně testují pomocí předem připravených sad testovacích dat. Prováděné testy jsou navíc omezeny časovými a paměťovými limity, aby se kromě otestování správnosti odlišila časová i paměťová efektivita algoritmu použitého jednotlivými účastníky soutěže. Při testování každé úlohy se používají sady testovacích dat různé velikosti, takže teoreticky správné řešení založené na neefektivním algoritmu zvládne dokončit výpočet pouze pro některé (menší) testy. Takové řešení je potom ohodnoceno dílčím počtem bodů. Krátce po odevzdání vypracovaného programu do vyhodnocovacího systému se soutěžící dozví hodnocení svého řešení a má pak možnost ještě ho opravit a znovu odevzdat. Jde o podobný systém, jaký používáme v posledních letech u nás v MO kategorie P, pro praktické úlohy domácího kola. Stejné vyhodnocovací prostředí jsme letos použili i pro řízení praktické části ústředního kola MO kategorie P a také na Středoevropské olympiádě v informatice CEOI 2015, která se v letošním roce konala v Brně. Diváci, ale nikoliv soutěžící, mohou během soutěže sledovat i průběžnou výsledkovou listinu.

Každá ze šesti soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body, takže celkem bylo možné získat až 600 bodů. Tohoto výsledku dosáhl jediný soutěžící (Korea), který se tak stal absolutním vítězem soutěže. Na základě přesně stanovených pravidel se na IOI podle dosažených bodů rozdělují medaile. Některou z medailí obdrží nejvýše polovina účastníků soutěže, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se rozdělují v poměru 1:2:3 s ohledem na to, aby soutěžící se stejným bodovým ziskem získali stejnou medaili. Na letošní IOI bylo uděleno celkem 161 medailí, z toho 27 zlatých, 55 stříbrných a 79 bronzových.

Výsledky našich soutěžících: 129. Filip Bialas, 245,55 b., bronzová medaile, 142. Václav Rozhoň, 226,45 b. bronzová medaile, 175. Matěj Konečný, 162,00 b., 205. Dalimil Hájek, 132,45 b.

Mezinárodní olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců a žádné pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlašováno. Zisk dvou bronzových medailí pro Českou republiku je přibližně průměrným výsledkem. Nejúspěšnějšími zeměmi se třemi zlatými a jednou stříbrnou medailí se staly již tradičně Čína, Korea, Rusko a USA.

Podrobnosti o soutěži i texty soutěžních úloh lze nalézt na Internetu na adrese http://ioi2015.kz/, kompletní výsledková listina je k dispozici na webové stránce http://stats.ioinformatics.org/results/2015. Další ročníky Mezinárodní olympiády v informatice se budou konat postupně v Rusku (2016), Iránu (2017), Japonsku (2018), Azerbajdžánu (2019) a Singapuru (2020). Pořadatelé příští IOI 2016 z Ruska na místě pozvali všechny delegace zúčastněné na IOI 2015, aby se zúčastnily také následujícího ročníku soutěže. Ten proběhne v Kazani ve dnech 12.– 19. 8. 2016. Informace lze již nyní nalézt na stránce http://ioi2016.ru/.

*Pavel Töpfer*

## Dvě stříbrné a tři bronzové medaile na 46. Mezinárodní fyzikální olympiádě v Indické republice

V roce 2015 proběhl už 46. ročník Mezinárodní fyzikální olympiády (MFO)– vrcholové světové soutěže středoškolských studentů ve fyzice. Soutěž pořádalo ve dnech 4. až 12. července 2015 Homi Bhabha centrum pro výuku přírodovědných předmětů (indické národní centrum Tatova ústavu pro základní výzkum) za podpory indické vlády prostřednictvím Oddělení pro atomovou energii, Oddělení pro vědu a technologii a Ministerstva rozvoje lidských zdrojů. Soutěž hostilo město Bombaj. O významu soutěže svědčí i to, že se jí aktivně zúčastnilo 382 studentů z 82 států a teritorií z pěti světových kontinentů.

Jednota českých matematiků a fyziků (JČMF), odborný garant Fyzikální olympiády v České republice na soutěž vyslala podle doporučení Ústřední komise Fyzikální olympiády sedmičlennou reprezentaci v tomto složení: *Václav Miřátský*, absolvent Gymnázia v Pelhřimově, *Jakub Dolejší*, absolvent Gymnázia Boženy Němcové v Hradci Králové, *Václav Rozhoň*, absolvent Gymnázia J. V. Jirsíka v Českých Budějovicích, *Jiří Kučera*, absolvent Gymnázia Jana Keplera v Praze a *Filip Bialas*, student Gymnázia Opatov v Praze. Náhradníkem soutěžících, který sice necestoval, ale prošel až do poslední chvíle stejnou přípravou, byl *Lukáš Honsa*, student Gymnázia v Jírovcově ulici v Českých Budějovicích. Výpravu vedli *doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D.*, vedoucí delegace a *Mgr. Filip Studnička, Ph.D.*, zástupce vedoucího.

Členové českého družstva byli vybráni na základě výběrového soustředění, konaného 1.– 3. 4. 2015 na katedře fyziky Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové. Další příprava probíhala ve dvou etapách: jednak korespondenční formou, jednak na dvanáctidenním intenzivním soustředění, opět v prostorách hradecké univerzity v červnu 2015.

Delegace nastoupila cestu na 46. MFO v pátek dne 3. 7. 2015. Z Prahy s přestupem v Istanbulu dorazila letecky na místo konání MFO – Bombaje v brzkých ranních hodinách 4. 7. 2015. Organizátoři soutěže vyzvedli českou delegaci na letišti a přepravili ji do míst ubytování. Studenti byli ubytováni v luxusním pětihvězdičkovém hotelu Leela, vedoucí v 8 km vzdáleném, neméně kvalitním hotelu Taj Lands End v Bombaji. Vlastní soutěž proběhla v prostorách Kongresového a výstavního centra, zahajovací ceremoniál v aule Tatova ústavu pro základní výzkum, zakončovací ceremoniál pak v Indickém technickém ústavu. Všechna zasedání Mezinárodní rady MFO probíhala v místě ubytování vedoucích delegací.

Společným programem pro soutěžící studenty a jejich vedoucí bylo slavnostní zahájení, slavnostní zakončení a společná večeře v hotelu Leela. Pro studenty byly připraveny dva soutěžní půldny. Netradičně se začínalo experimentálním úlohami, teoretické úlohy přišly na řadu jako druhé. Ve zbylém čase organizátoři připravili prohlídky zajímavých míst Bombaje, sportovní a společenské akce a jednodenní výlet do automobilky Mahindra.

Vedoucí věnovali dva celé dny diskusím úloh a jejich následným překladům do národních jazyků. Dále pak opravě úloh a moderacím, tj. diskusím s komisemi hodnotitelů o hodnocení úloh. Ve volném čase pro ně organizátoři připravili prohlídky zajímavých míst Bombaje.

Organizátoři připravili soutěžícím dvě velmi zajímavé experimentální úlohy, jejichž společným jmenovatelem byla difrakce světla. Úlohy byly náročné především na experimentální zručnost a dále vyžadovaly velmi rozsáhlé statistické a grafické zpracování.

První úloha byla inspirována objevem dvoušroubovité struktury DNA Watsonem a Crickem v roce 1952. Studenti studovali difrakci laserového světla na šroubovici (pružině pružině) a modelu dvoušroubovice (vrypy na sklíčku). Z difrakčních obrazců určovali geometrické parametry šroubovic. Studenti tak v modelové situaci reprodukovali jeden z velice důležitých experimentů, který posunul hranice lidského poznání hned v několika vědních oborech.

Druhá úloha studovala difrakci na povrchových akustických vlnách na vodě. Cílem bylo určit povrchové napětí a viskozitu daného vzorku vody, opět z difrakčních obrazců.

Teoretické úlohy předložené organizátory měly velmi atraktivní náměty z moderní fyziky. První úloha „Sluneční částice“ se věnovala slunečnímu záření a slunečním neutrinům. Z předloženého Wienova rozdělení (aproximace Planckova vyzařovacího zákona) počítali soutěžící parametry slunečního záření dopadajícího na Zemi. Dále odhadovali účinnost solárních článků a měli za úkol otestovat hypotézu Kelvina a Helmholtze vysvětlující záření Slunce výhradně „uvolňováním“ gravitační potenciální energie během pomalého smršťování. Druhá část úlohy studovala různé parametry slunečních neutrin.

Motivace druhé úlohy „Extremální princip“ spočívala ve faktu, že většinu fyzikálních teorií lze odvodit z variačního počtu. Je pravda, že variační metody jsou ve fyzice považovány za matematicky velmi estetické, ale už z názvu úlohy je jasné, že matematika v této úloze bude jasně dominovat nad fyzikou. Navíc, minimálně v polovině úlohy nebyl středoškolskými metodami zřejmý fyzikální vhled, který by mohli studenti získat řešením matematického problému – hledání extrému funkcionálu akce. Extremální přístup byl aplikován na mechaniku (pohyb hmotného bodu v oblasti s měnícím se potenciálem), optiku (Fermatův princip), vlnový charakter hmoty (de Broglieho vlny) a interferenci elektronů (dvojštěrbinový experiment).

Třetí úloha „Návrh jaderného reaktoru“ dala soutěžícím za úkol studovat různé parametry součástí jaderného reaktoru – palivových tyčí, moderátoru i jaderného reaktoru jako celku.

Podle statutu soutěže byly uděleny minimálně 8 % soutěžících zlaté medaile, dalším 17 % stříbrné, dalším 25 % bronzové medaile a dalším 17 % čestná uznání. Tím se stanovily pevné hranice pro získání jednotlivých medailí., které letos visely značně vysoko – min. 42,2 bodů pro zlatou medaili, min. 33,0 bodů pro stříbrnou medaili, min. 24,0 bodů pro bronzovou medaili a min. 18,0 bodů pro čestné uznání.

Po konečném stavu hodnocení bylo rozhodnuto, že zlatou medaili získalo 38 soutěžících, stříbrnou 64 soutěžících a bronzovou medaili 93 soutěžících. Čestné uznání bylo uděleno 68 soutěžícím. Mezi nejlepší řešitele patří již po několik let jednotlivci družstev států Čína (ČLR), Tchajwan, Korea, USA, Rusko a Vietnam. Nejlepšího výsledku dosáhl soutěžící Taehyoung Kim z Koreje, který získal 48,3 bodů z 50 možných. Tento výsledek společně s nastavenými hranicemi svědčí o výrazně nižší náročnosti oproti minulým ročníkům. Podle názoru vedení české delegace obtížnost úloh spočívala zejména v porozumění velmi náročnému odbornému textu a v matematických manipulacích. Většinu všech tří teoretických úloh pak šlo řešit takřka bez znalostí fyziky a především bez fyzikálních dovedností jako je např. vytváření modelů reality.

Česká republika se v neoficiálním pořadí států (podle bodů přidělených za medaile) zařadila na 20. příčku (4. místo v EU) – tedy po dvou nepříliš vydařených letech se navrátila do evropské špičky. Letošní výsledky jednotlivých českých řešitelů jsou tyto: Filip Bialas, 34,6 bodů, stříbrná medaile, 82. místo; Václav Rozhoň, 34,4 bodů, stříbrná medaile, 83. místo; Jiří Kučera, 34,3 bodů, stříbrná medaile, 85. místo; Jakub Dolejší, 27,4 bodů, bronzová medaile, 149. místo; Václav Miřátský, 27,0 bodů, bronzová medaile, 153. místo.

Výsledky 45. MFO ukázaly, že členové českého družstva byli na soutěž opět dobře a pečlivě vybráni. Soutěžící se na soutěž velmi dobře připravili. Za zmínku stojí obstojný výsledek českého družstva v experimentální části soutěže, což lze považovat za úspěch speciální přípravy studentů, především během červnového soustředění na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové, kde je v posledních letech experimentální příprava na soustředěních výrazně preferována. Všech pět českých soutěžících bez diskuse prokázalo znalosti a experimentální dovednosti na mnohem vyšší úrovni než by odpovídalo současným středoškolským požadavkům.

Příští MFO proběhne 10.–18. července 2016 ve Švýcarsku a Lichtenštejnsku. Česká delegace již obdržela pozvání k účasti.

Reprezentace České republiky na 46. Mezinárodní fyzikální olympiádě v Indii v roce 2015. Zleva: doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D. (vedoucí delegace), Filip Bialas (stříbrná medaile), Jiří Kučera (stříbrná medaile), Jakub Dolejší (bronzová medaile), Václav Miřátský (bronzová medaile), Václav Rozhoň (stříbrná medaile) a Mgr. Filip Studnička, Ph.D. (zástupce vedoucího delegace).

*Filip Studnička, Jan Kříž*

# Z HISTORIE

## Princip, který poskytl ucelený pohled na paprskovou optiku (K 350. výročí úmrtí Pierra de Fermat)

Soudce toulouského senátu *Pierre de Fermat* je v historii práva zcela zapomenut. Avšak díky své zálibě v matematice, jíž se také nepochybně věnoval během vleklých a nudných soudních jednání, je považován především za matematika, významně obohacujícího matematické disciplíny, které se začaly rozvíjet v 17. století. Mít matematiku pouze jako zálibu a přitom velkou měrou přispět k jejímu rozvoji je v jejích dějinách ojedinělé. Fermat nevytvořil žádné ucelené dílo, které bychom dnes mohli vyjmout z knihovny a pročítat systematicky řazené kapitoly s novými závěry. Pouze na okraj knih o právu a později o matematice si dělal poznámky, zaznamenával nápady a tvrzení, pro jejichž důkazy často nenalézal místo. Byl velmi ovlivněn dílem *Françoise Vièty* (1540–1603), který svým dílem ho přivedl k tomu, aby věděl, „co má číst a jak to má číst“.

Pierre de Fermat (1601–1665)

Pierre de Fermat ale také ozdobil fyziku odhalením základního principu celé geometrické optiky, který je po něm pojmenován. Dříve, než o něm budeme hovořit, budou snad čtenáře zajímat některé údaje z Fermatova života.

Pierre Fermat se narodil 20. července 1601 v Beaumont-de-Lomagne v rodině obchodníka s kůžemi a zámožné šlechtičny. Jeho život, studia i dílo jsou spjaty s krajem kolem jihofrancouzského města Toulouse. Cestoval jen málo, dokonce prý nikdy nebyl v Paříži. Když 9. ledna 1665 v Cartres zemřel, byl pohřben v nedalekém Toulouse. Dnes nám jeho tamní působení připomíná např. alabastrová socha v síni radnice (obr. 1) a čestný název tamního gymnázia.

Obr. 1

Fermatova profesní dráha byla právnická. Nejprve získal titul bakaláře občanského práva na univerzitě v Orléansu a pak odešel studovat na univerzitu v Toulouse, v roce 1620 krátce studoval v Bordeaux. Ihned po ukončení studií roku 1631 si zakoupil funkci soudního rady u soudu v Toulouse, na společenském žebříčku postoupil – navzdory stížnostem, které na něho jako prý líného a nedbalého soudce chodily – a mohl se podepisovat de Fermat. Oženil se s dcerou jednoho kolegy od soudu, s ní měl pět dětí. V rámci soudního systému postupně stoupal, sedm let byl nejprve v občanskoprávním senátu, pak 14 let ve vyšetřovacím senátu a jako nejvyššího postu dosáhl členství v trestním senátu. Jeho postup byl urychlen i morem, na nějž zemřeli někteří jeho kolegové z vyšších senátů a Fermat postupoval na jejich místa. V rámci zvláštního senátu vytvořeného *Ediktem nantským* k rozhodování sporů hugenotů a katolíků se podílel na uplatňování práva i v náboženské oblasti. Jeho nejstarší syn *Clèment Samuel* zdědil po otci nejen úřad, ale – co je pro matematiku a fyziku významnější – i část matematických a optických poznámek, které pak souborně roku 1676 publikoval v díle *Varia Opera Mathematica*.

Matematika vstoupila do Fermatova života poprvé v roce 1636, kdy se mu dostaly do rukou práce již zmíněného Françoise Vièty. Od té doby se začínají objevovat na okrajích všech Fermatem čtených knih strohé poznámky o matematických a optických problémech. Právě v optice zakotvil tzv. *Fermatův princip*, spočívající v tom, že světlo se při odrazu a lomu pohybuje po extremální dráze, takové, jíž urazí za nejkratší čas. Podívejme se na tento Fermatův příspěvek optice podrobněji.

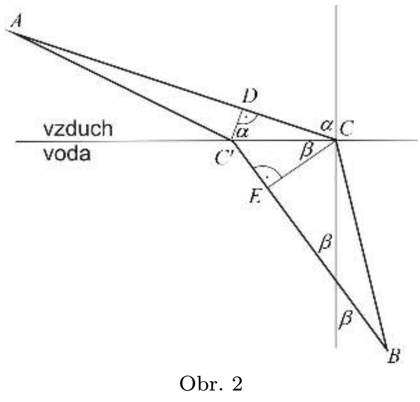
Myšlenka, že dráha světla je nejkratší, není nová. Pro odraz ji formuloval ve starověku matematik, mechanik a optik, ředitel Múseia v Alexandrii, *Heron* (1. stol.). Jeho formulace zní: „Pohybující se snaží pohybovat po dráze, která je vzhledem k prostorové vzdálenosti nejkratší, protože předmět nemá čas na pomalejší pohyb“. Pokud se světlo pohybuje v jednom prostředí, šíří se přímočaře a i při odrazu je jeho dráha nejkratší ze všech možných a je současně uražená za nejkratší čas.

Fermat usoudil, že by šíření světla v nejkratším čase mohlo probíhat i při lomu. Na základě korpuskulárního pojetí světla formuloval zákon lomu roku 1637 v *Dioptrice* René Descartes, přičemž ještě považoval rychlost světla za nekonečnou. Tomu se vehementně bránili člen Francouzské královské Akademie věd a králův lékař *Marin Cureau de La Chambre*. Zejména Cureau de La Chambre neuznával analogii pohybujících se koulí a světla, neboť světlo považoval za božskou entitu (pocházející z nebe od Slunce a hvězd), kterou nelze srovnávat s čímkoli pozemským. Takový pohled ovšem nestačil na to, aby zpochybnil Descartovo ryze mechanické odvození zákona lomu. De La Chambre se obrátil na Fermata, aby do věci vnesl jasno.

Fermat znal starodávnou Heronovu úvahu a pokusil se ji – úspěšně – užít i pro lom světla. Princip je uveden v jeho dopisu z 1. ledna 1662 pro M. Cureaua de La Chambre, ve známost byl uveden v květnu 1662 *Claude Clerselierem*.

Již elementární pokus ukazuje, že světlo se na své cestě ze vzduchu do vody na rozhraní láme. Na obr. 2 máme dvě takové cesty světelného paprsku mezi body $A$ a $B$: Lomené čáry $ACB$ a $AC'B$. V bodech $C$ a $C'$ sestrojíme kolmice na úseky $C'B$ a $AC$ a paty těchto kolmic označme $D$ a $E$. Dráha světla ve vzduchu $AC$ je oproti dráze $AC'$ časově méně výhodná, neboť je delší o úsek $DC$. Naproti tomu dráha světla ve vodě $CB$ je časově výhodnější proti $C'B$, neboť neobsahuje „ztrátový“ úsek $C'E$. Vzdálenost $AB$ projde světlo při lomu za nejkratší čas tehdy, bude-li se pohyb světla v úsecích $DC$ a $C'E$ vzájemně kompenzovat. Uvažujme, že rychlost světla ve vzduchu je prakticky $c$ a ve vodě $c/n$, $n$ je index lomu. Pak pro nejkratší čas mezi body $A$ a $B$ musí platit

$$\frac{|DC|}{c} = \frac{n}{c} \cdot |C'E|.$$




Obr. 2

Budeme-li hledat polohu takového bodu $C'$, musí pro něj platit

$$|C'C| \sin\alpha = n\,|C'C| \sin\beta,$$

což je splněno, právě když

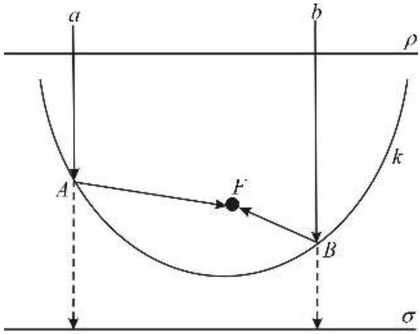
$$\sin\alpha = n \sin\beta.$$

Tak je na základě Fermatova principu odvozen zákon lomu. V případě, že dochází k odrazu světla na rozhraní, shoduje se optická dráha s drahou geometrickou, kterou světlo rovněž urazí za nejkratší čas. To nastane, když se úhel odrazu rovná úhlu dopadu. Na základě Fermatova principu lze vybudovat celou paprskovou optiku.

Princip nejmenšího času je užit v astronomii při konstrukci zrcadlových dalekohledů. Velké astronomické dalekohledy jsou osazeny zrcadly, majícími parabolický tvar. Zrcadla v dalekohledu hvězdy nezvětšují (hvězdy jsou jimi vidět stále jako body), nýbrž soustřeďují světlo z velké plochy do ohniska, čímž zjasňují i tak slabé objekty ve vesmíru, jejichž světlo by v oku nevyvolalo žádný optický vjem. Paprsky světla přicházející k pozorovateli ze vzdálené hvězdy jsou rovnoběžné.

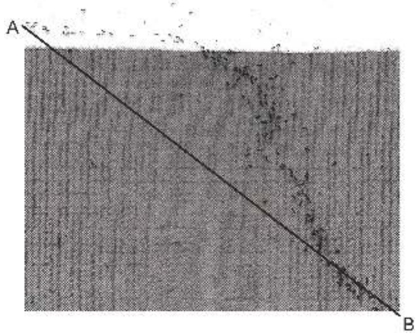
Představme si, že paprsky $a$ a $b$ projdou rovinou $\rho$ ve stejném čase a také současně dopadnou na rovinu $\sigma$. Mezi rovinami $\rho$ a $\sigma$ jim vložme do cesty zrcadlo, které je bude v bodech $A$ a $B$ odrážet do bodu $F$ (obr. 3). Aby oba paprsky dopadly do bodu $F$ současně, musí být jejich dráha po odrazu stejná jako zbývající úseky od bodů odrazu k rovině $\sigma$. To ale znamená, že bod $A$ je stejně vzdálen od roviny $\sigma$ jako od bodu $F$, obdobně to platí pro bod $B$. Proto je na našem obrázku křivkou $k$ parabola; prostorový útvar vytváří rotační paraboloid – zrcadlo astronomického reflektoru.

Fermat nalezl extremální řešení i některých matematických problémů: Např. uměl v trojúhelníku sestrojit bod (dnes nazývaný Fermatův), jenž má minimální součet vzdáleností od jeho vrcholů. Nalezl také rozměry kuželu o maximálním povrchu vepsaného do dané koule, aj.




Obr. 3

Na závěr připojme ještě jednu zajímavost ze živé přírody. Že by i mravenci kráčející ke své potravě zčásti po polyetylénové fólii a zčásti po koberci, znali Fermatův princip? Obr. 4 tomu napovídá [3].




Obr. 4

Literatura


[1] *Sartori, E.*: Velikáni francouzské vědy. Praha, Krigl, 2005.

[2] *Šolcová, A.*: D'Artagnan mezi matematiky. Pokroky MFA 46 (2001), 286–298.

[3] *Kolafa, J.*: Hůl do mravenců ponořená. Vesmír 92 (2013), 384–385.


*František Jáchim*

MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA
Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXIV (2015)

## MATEMATIKA



## FYZIKA

## INFORMATIKA

*Töpfer, P.*: Opakované úseky posloupnosti (Úlohy z MO, kategorie P, 31. část) (s. 60) – *Franc, T.*: Využití animací letů kosmických sond ve výuce fyziky (s. 65) – *Trávníček, S.*: Kruhový model roviny (s. 139) – *Novák, M.*: Videoprezentace pomocí HTML5 jako modul LMS Moodle (s. 148) – *Bartl, E.*: Teorie informace (s. 219) – *Redakce*: Slovník (s. 229) – *Samková, L.*: Modelování kuželoseček v dynamickém prostředí (s. 303) – *Töpfer, P.*: Rozklady na součet (Úlohy z MO – kategorie P, 32. část) (s. 312) – *Mošna, F., Lubanda, D. M.*: Webové stránky pro testování hypotéz (s. 371) – *Lessner, D., Vaníček, J.*: Bobřík učí informatiku (4. díl, Použití logiky v informatice) (s. 377

## ZPRÁVY

*Töpfer, P.*: Mezinárodní olympiáda v informatice IOI 2014 (s. 72) – *Töpfer, P.*: Středoevropská olympiáda v informatice CEOI 2014 (s. 74) – *Švrček, J.*: Ústřední kolo 64. ročníku MO (kategorie A) (s. 232) – *Töpfer, P.*: Ústřední kolo 64. ročníku MO (kategorie P) (s. 234) – *Richterek, L.*: Celostátní kolo FO 2015 (s. 236) – *Švrček, J.*: 4. CZE-POL-SVK matematická soutěž juniorů (s. 319) – *Lepil, O.*: Soutěž studentů učitelství fyziky (s. 320) – *Horák, K.*: 56. Mezinárodní matematická olympiáda (s. 391) – *Töpfer, P.*: Mezinárodní olympiáda v informatice IOI 2015 (s. 393) – *Studnička, F., Kříž, J.*: Dvě stříbrné a tři bronzové medaile na 46. Mezinárodní fyzikální olympiádě v Indické republice (s. 395)

## Z HISTORIE

*Vyskočil, J.*: Arthur Beer (1900–1980) (s. 156) – *Vyskočil, J.*: Paul Dirac – génius moderní fyziky (s. 157) – *Jáchim, F.*: Princip, který poskytl ucelený pohled na paprskovou optiku (K 350. výročí úmrtí Pierra de Fermat) (s. 397)

## LITERATURA

*Robová, J.*: Aktualizovaný soubor učebnic matematiky pro 6.–9. ročník základní školy (s. 75) – *Tesařík, B.*: Matematika života: odkrývání tajemství bytí (s. 76) – *Tesařík, B.*: Objevy, které změnily fyzikální obraz světa (s. 78) – *Kopecký, F.*: Josef Polák: Didaktika matematiky. Jak učit matematiku zajímavě a užitečně (s. 158) – *Jáchim, F.*: Jan Kopka: Umění řešit matematické problémy (s. 159) – *Tesařík, B.*: Jak připravujeme sami sebe a naše děti o rozum (s. 239)