

Důkazy jedné trigonometrické identity

ŠEFKET ARSLANAGIĆ

Univerzita Sarajevo, BOSNA A HERCEGOVINA

V tomto příspěvku se seznámíme se třemi snadnými důkazy jedné známé trigonometrické identity, které se mj. hojně využívá např. při řešení soustav rovnic a nerovnic užitím goniometrických substitucí. Jedná se o následující rovnost:

V libovolném trojúhelníku ABC platí (při obvyklém označení velikostí jeho vnitřních úhlů)

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1. \quad (1)$$

První dva níže uvedené důkazy této identity jsou ryze elementární, třetí se opírá o základy lineární algebry.

Důkaz 1. Protože $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, je

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(180^\circ - \gamma) = -\cos \gamma.$$

Užitím známého vzorce pro kosinus součtu dvou argumentů plyne z poslední rovnosti po snadné úpravě

$$\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta.$$

Umocněním obou stran poslední rovnosti na druhou a následnými úpravami pak dostaneme

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos^2 \gamma &= \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \\ &= (1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta) = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta. \end{aligned}$$

Odtud po snadné úpravě bezprostředně obdržíme

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1.$$

Tím je důkaz identity (1) proveden.

Důkaz 2. Nechť α, β, γ značí velikosti vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC . Ukážeme, že $\cos \alpha$ je reálným kořenem kvadratické rovnice

$$t^2 + (2 \cos \beta \cos \gamma) t + (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 1) = 0 \quad (2)$$

o neznámé t a reálných parametrech $\cos \beta, \cos \gamma$. Předně si uvědomme, že diskriminant D kvadratické rovnice (2) má hodnotu

$$\begin{aligned} D &= 4 \cos^2 \beta \cos^2 \gamma - 4 (\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 1) = \\ &= 4 (1 - \cos^2 \beta)(1 - \cos^2 \gamma) = 4 \sin^2 \beta \sin^2 \gamma > 0, \end{aligned}$$

tedy rovnice (2) má dva navzájem různé reálné kořeny. Ukážeme, že jeden z kořenů této rovnice opravdu je $\cos \alpha$. Užitím známé formule pro nalezení kořenů kvadratické rovnice obdržíme po snadných úpravách

$$t_{1,2} = -\cos \beta \cos \gamma \pm \sin \beta \sin \gamma.$$

Pro

$$t = t_1 = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma$$

(s použitím znaménka „+“) pak platí

$$t_1 = -\cos(\beta + \gamma) = -\cos(180^\circ - \alpha) = \cos \alpha.$$

Dosazením za $t = \cos \alpha$ v (2) dostaneme po snadné úpravě bezprostředně identitu (1), a důkaz je tak uzavřen.

Poznámka. Rovnice (2) má také druhý reálný kořen $t_2 = -\cos(\beta - \gamma)$, který jsme však k důkazu rovnosti (1) nevyužili.

Důkaz 3. Pro délky stran a, b, c a kosiny odpovídajících vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku ABC platí trojice vztahů

$$\begin{aligned} a &= b \cos \gamma + c \cos \beta, \\ b &= c \cos \alpha + a \cos \gamma, \\ c &= a \cos \beta + b \cos \alpha. \end{aligned}$$

Ověření platnosti uvedené trojice rovností, které je snadné, přenecháváme čtenářům. Je zde nutno rozlišit případ ostroúhlého, pravoúhlého a tupoúhlého trojúhelníku ABC – tj. využít tzv. *úplné indukce*.

Délky stran a, b, c jsou tudíž (v tomto pořadí) nenulovými složkami řešení (x, y, z) homogenní soustavy tří lineárních rovnic o třech neznámých x, y, z ve tvaru

$$\begin{aligned}x - y \cos \gamma - z \cos \beta &= 0, \\-x \cos \gamma + y - z \cos \alpha &= 0, \\-x \cos \beta - y \cos \alpha + z &= 0.\end{aligned}$$

Tato homogenní soustava rovnic má však *netriviální* řešení (jehož složky nejsou všechny současně rovny 0), právě když její determinant je roven 0. Platí tudíž

$$\begin{vmatrix} 1 & -\cos \gamma & -\cos \beta \\ -\cos \gamma & 1 & -\cos \alpha \\ -\cos \beta & -\cos \alpha & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

Výpočtem determinantu na levé straně vztahu (3), např. pomocí Sarrusova pravidla, obdržíme přímo kýženou identitu, a její třetí důkaz je tak ukončen.

Kromě uvedených tří snadných důkazů identity (1) existuje i řada dalších, které však nejsou tak přímočaré a matematicky elegantní, jako tři výše uvedené důkazy této identity.

(Z německého originálu zaslaného redakci časopisu Matematika–fyzika–informatika přeložil Jaroslav Švrček.)

L i t e r a t u r a

- [1] *Arslanagić, Š.*: Matematika za nadarene, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
- [2] *Andreescu, T. – Dospinescu, G. – Cirtoaje, V. – Lascu, M.*: Old and New Inequalities, Gil Publishing House, Zalau, 2004.
- [3] *Mitrinović, D. S. – Pečarić, J. E. – Volenec, V.*: Recent Advances in Geometric Inequalities, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1989.

Kruhová inverze a její aplikace

NADĚŽDA GUSEVA – ANASTASIA IVAKINA – MARIE CHODOROVÁ

Moskevská státní pedagogická univerzita, RUSKÁ FEDERACE

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Kruhová inverze je zobrazení v rovině, pomocí něhož lze řešit především některé Apolloniovy úlohy, které nejsou řešitelné prostředky středoškolské matematiky, jimiž jsou shodná zobrazení, stejnolehlost a mocnost bodu ke kružnici. Nejprve uvedeme definici kruhové inverze a některé její důležité vlastnosti, poté užitím kruhové inverze vyřešíme dvě Apolloniovy úlohy. V první úloze, řešitelné mj. i pomocí mocnosti bodu ke kružnici, vysvětlíme hlavní myšlenku a výhodu kruhové inverze při řešení takových úloh. Druhá úloha není středoškolskými prostředky řešitelná, kruhová inverze je však jednou z metod, pomocí níž lze úlohu vyřešit.

Dále předpokládáme, že v rovině je dána kružnice k se středem O a poloměrem r .

Definice

Kruhovou inverzí v rovině nazýváme zobrazení roviny do téže roviny, které každému bodu M ($M \neq O$) přiřadí bod M' splňující následující podmínky

- a) M' leží na polopřímce OM ,
- b) $|OM| \cdot |OM'| = r^2$.

Kružnici $k(O; r)$ nazýváme *řídící*, resp. *základní*, kružnicí kruhové inverze. Bod O nazýváme *střed* kruhové inverze.

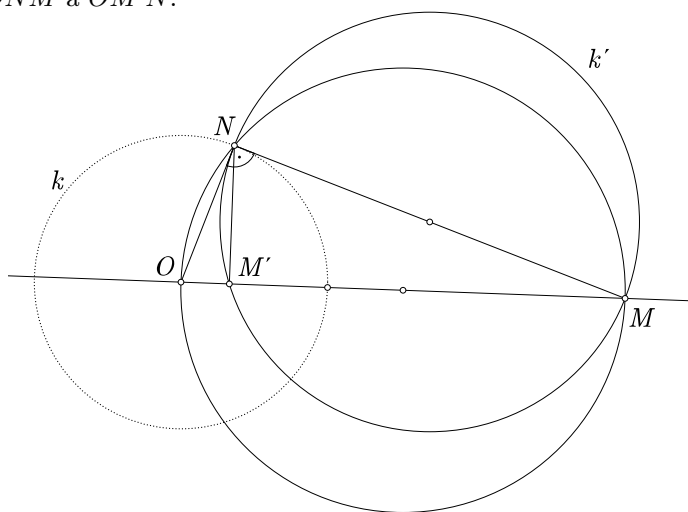
Poznámka. Snadno vidíme, že body M a M' jsou navzájem inverzní, tj. obrazem bodu M' je opět bod M . Body, které leží na řídící kružnici $k(O; r)$ kruhové inverze jsou tzv. *samodružné* body inverze, (tj. zobrazují se na sebe).

Vzhledem k výše uvedené definici kruhové inverze k bodu O neexistuje jeho obraz. V důsledku toho není kruhová inverze vzájemně jednoznačné zobrazení roviny na sebe. Abychom tento nedostatek odstranili, doplníme rovinu o tzv. *nevlastní* bod, který označíme ∞ a budeme jej považovat za obraz bodu O . Naopak obrazem nevlastního bodu ∞ je bod O . Rovina

doplňená o nevlastní bod ∞ se nazývá *Möbiova*. V takovém případě je kruhová inverze bijektivní zobrazení Möbiovy roviny na sebe.

Z uvedené definice plyne, jak lze zkonstruovat v dané kruhové inverzi obraz M' bodu M (kromě středu O a nevlastního bodu ∞). K tomu použijeme Eukleidovu větu o odvěsně, tj. v pravoúhlém trojúhelníku ONM s přeponou OM platí $|ON|^2 = |OM| \cdot |OM'|$. Pokud bod M leží vně řídící kružnice (podobně jako na obr. 1), pak tímto bodem vedeme tečnu k řídící kružnici a bod M' leží na průsečíku kolmice vedené z bodu dotyku N ke spojnici OM . Platí tedy $|ON| = r$, a bod M' splňuje podle Eukleidovy věty o odvěsně podmínku b). Pokud bod M leží uvnitř řídící kružnice, uvedenou konstrukci provádíme obráceně, tj. z bodu M vedeme kolmici ke spojnici OM , v průsečíku N kolmice s řídící kružnicí sestrojíme její tečnu a obrazem M' je průsečík tečny a spojnice OM (obr. 1). Z této konstrukce je patrné, že body ležící vně řídící kružnice se zobrazí jako její vnitřní body a naopak.

Ověření podmínky b) lze provést rovněž využitím podobnosti trojúhelníků ONM a $OM'N$.



Obr. 1

Všimněme si, že úhel $NM'M$ je pravý. Pak body M a M' leží na kružnici k' sestrojené nad průměrem MN a kružnice k' protíná *ortogonálně* řídící kružnici k , tzn. že tečny sestrojené v jejich společném bodě jsou navzájem kolmé.

Navíc, jakákoliv kružnice, která je ortogonální k řídicí kružnici k , procházející jedním z bodů M nebo inverzním M' musí procházet také druhým bodem. Skutečně, pokud vyjdeme z obr. 1, v němž kružnice k' protíná ortogonálně k řídicí kružnici k kruhové inverze, pak podmínka b) vyjadřuje závislost mezi tečnou ON kružnice k' a úsečkami OM a OM' , kde OM je průměr Thaletovy kružnice. V důsledku toho platí:

Věta 1

Je-li bod M různý od středu kruhové inverze O a neleží-li na řídicí kružnici k , potom existuje jediný bod M' s vlastností, že pro všechny kružnice procházející bodem M , které jsou ortogonální k řídicí kružnici k , je bod M' také bodem této kružnice.

Kruhová inverze má dále následující významné vlastnosti, které zde (stejně jako větu 1) dokazovat nebudeme. Důkazy těchto tvrzení je možno nalézt např. v [1].

- 1) Přímka procházející středem O kruhové inverze se zobrazí na sebe.
- 2) Přímky neprocházející středem kruhové inverze O se zobrazí jako kružnice procházející středem O .
- 3) Kružnice procházející středem O se zobrazí jako přímka, která neprochází středem O .
- 4) Kružnice neprocházející středem O se zobrazí jako kružnice, která neprochází středem O .
- 5) Kruhová inverze zachovává úhly mezi křivkami (úhly mezi tečnami v jejich průsečících).
- 6) Kružnice, která protíná řídicí kružnici ortogonálně, se zobrazí sama na sebe.

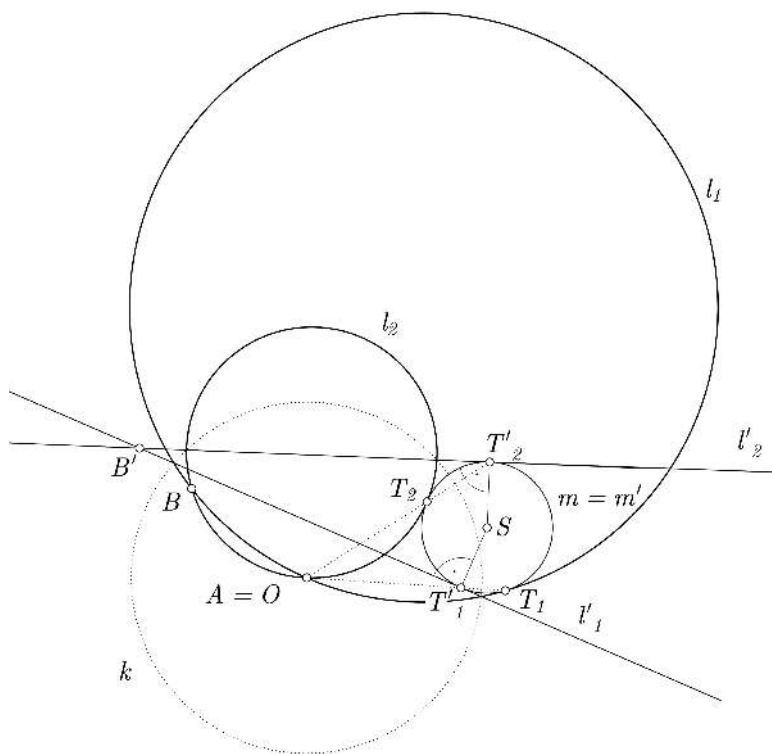
V další části budou prezentovány uvedené vlastnosti kruhové inverze při řešení dvou Apolloniových úloh.

Příklad 1

V rovině je dána kružnice $m(S; r)$ a body A, B , které na ní neleží. Sestrojte kružnici l , která prochází body A, B a dotýká se kružnice m .

Řešení. K tomu, aby úloha byla řešitelná, je potřeba, aby oba body A, B ležely uvnitř nebo oba vně kružnice m . Bod A zvolíme za střed řídicí kružnice k , kterou sestrojíme tak, aby danou kružnici m s ohledem na výše uvedené poznatky protínala ortogonálně. V tomto případě je kružnice m slabě samodružná, tj. jedná se o bijektivní zobrazení, které ale není identické, tedy platí $m = m'$. Nemusíme tedy konstruovat její obraz (pro body

ležící uvnitř kružnice m zvolíme řídící kružnici k libovolně). Bod B zobrazíme v kruhové inverzi na bod B' . Hledanou kružnici v kruhové inverzi konstruujeme jako přímku procházející bodem B' , dotýkající se přitom kružnice m . Nyní chceme sestavit tečnu z bodu B' ke kružnici m . Jinými slovy: pomocí kruhové inverze jsme konstrukci kružnice, která prochází dvěma danými body a dotýká se dané kružnice, převedli konstrukci tečny ke kružnici procházející jistým bodem. V kruhové inverzi se tato tečna, která neprochází středem kruhové inverze, zobrazí jako kružnice, která prochází středem kruhové inverze A , dále prochází bodem B a dotýká se kružnice m .



Obr. 2

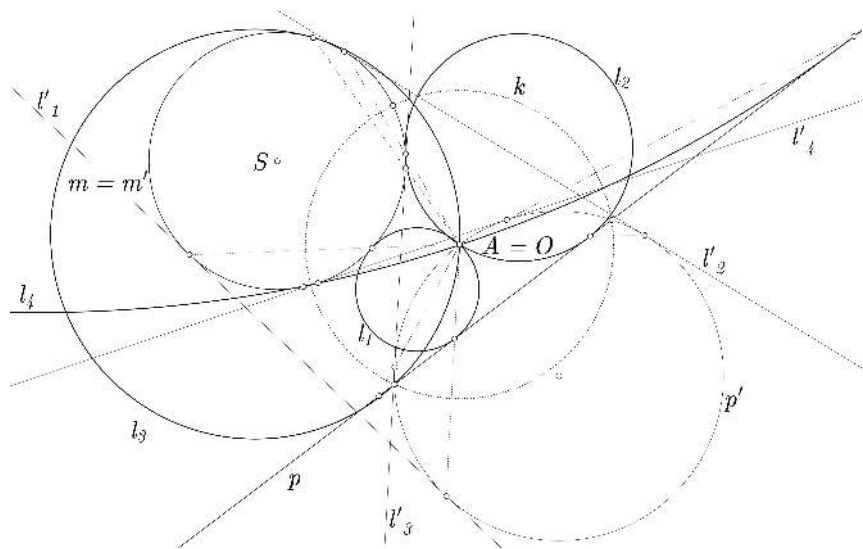
Závěr. V případě, že oba dané body leží současně uvnitř nebo současně vně dané kružnice, má úloha 2 řešení. Z bodu B' lze totiž vést 2 tečny l'_1

a l'_2 ke kružnici m (viz obr. 2). Nalezené kružnice l_1 a l_2 splňují podmínky úlohy.

Příklad 2

V rovině je dána kružnice $m(S; r)$, přímka p a bod A , který neleží na kružnici m a ani na přímce p . Sestrojte kružnici l , která se dotýká kružnice m , přímky p a prochází bodem A .

Řešení. Bod A podobně jako v příkladu 1 zvolíme za střed řídící kružnice k , kterou sestrojíme tak, aby danou kružnici m protínala ortogonálně. V takto zadané kruhové inverzi kružnice m zůstává samodružná, tedy $m = m'$. Protože přímka p neprochází středem kruhové inverze, zobrazí se na kružnici p' , která prochází středem kruhové inverze. Obrazem hledané kružnice l v kruhové inverzi je tedy přímka, která se dotýká obou kružnic m a p' . Nyní sestrojíme pouze společnou tečnu kružnic m a p' .



Obr. 3

Závěr. V tomto případě, kdy přímka a kružnice nemají společný žádný bod, má úloha 4 řešení. Existují totiž 4 společné tečny l'_1 , l'_2 , l'_3 a l'_4 kružnic m a p' (viz obr. 3). Obrazy těchto tečen v dané kruhové inverzi jsou čtyři kružnice l_1 , l_2 , l_3 a l_4 , které splňují podmínky úlohy. V případě, že by bod A ležel uvnitř kružnice m a přímka p by s danou kružnicí m neměla žádný společný bod, tak daná úloha nemá žádné řešení.

Literatura

- [1] *Postnikov, M. M.*: Přednášky o geometrii. Semestry I.-V., Nauka, Moskva, 1979–1988.
- [2] *Vyšín, J.*: Vybrané stati z elementární geometrie, SPN, Praha 1959.

O čem pojednává Benfordův zákon

JAROSLAV SEIBERT – JAROMÍR ZAHRÁDKA

Fakulta ekonomicko-správní, Univerzita Pardubice

Každý dobrý učitel matematiky se stále snaží hledat vhodné příležitosti, které mohou ukázat matematickou teorii v poněkud netradičních, ale přitom navenek atraktivnějších situacích. Navíc je jistě účelné, když se jedná o užití matematických poznatků v problematice, která je poněkud vzdálená od tradičních oblastí aplikací matematiky. Jednomu méně známému matematickému poznatku je věnovaný tento náš příspěvek.

Uvažujme libovolnou množinu číselných dat, která vyjadřují hodnotu jisté přirozeně vymezené veličiny z reálného světa. Přitom nezáleží na tom, zda se jedná o data geografická, ekonomická (ceny zboží, fakturované částky, platby pojištění), tabulky fyzikálních veličin, hodnoty některých funkčních závislostí mezi veličinami na jistém diskrétním definičním oboru a podobně. Jedním z důležitých předpokladů je, aby byl rozsah souboru alespoň v řádu stovek nebo ještě lépe tisíců. Určuje se potom četnost výskytu jednotlivých číslic na prvním platném místě. V našem případě tedy první číslice různé od nuly v zápisu číselného údaje v desítkové soustavě. Pro jednoduchost budeme v dalším textu používat pouze pojmenování „první číslice“. Zdá se zřejmé, že by pravděpodobnost $P(d)$ výskytu číslice $d = 1, 2, \dots, 9$ jako první číslice měla podléhat rovnoměrnému rozložení, tedy konkrétně $P(d) = \frac{1}{9} = 0,11\dots$ Ve skutečnosti se v souborech přirozených dat nejčastěji objevuje jako první číslice jednička a četnost výskytu dalších číslic postupně klesá v pořadí od 2 až k 9. Jak se můžeme v mnoha časopiseckých pramenech přesvědčit, je z uváděných

hodnot zřejmě, že v těchto souborech zhruba 30 % čísel začíná jedničkou a čím vyšší je první číslice, tím je menší pravděpodobnost, že se objevuje na začátku zápisu čísel.

Úvod k problematice zákona první číslice

Proveďme nejprve jednoduchý experiment se členy posloupností $a_n = n\sqrt{n}$, $b_n = n|\sin n|$ a členy tří rekurentně zadaných posloupností. Jde o Fibonacciovu posloupnost danou předpisem $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, kde $F_1 = F_2 = 1$, Lucasovu posloupnost $L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$, kde $L_1 = 1$, $L_2 = 3$ a Pellovu posloupnost $P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$, kde $P_1 = 1$, $P_2 = 2$. Funkční vyjádření členů těchto posloupností (v závislosti na n) lze najít například řešením jejich rekurentních předpisů jako lineárních diferenčních rovnic 2. řádu s danými počátečními členy. Pro Fibonacciovu posloupnost pak platí tzv. Binetův vzorec

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad \text{kde } \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Podobně lze odvodit, že pro Lucasovu posloupnost platí $L_n = \alpha^n + \beta^n$ a pro Pellovu posloupnost

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}, \quad \text{kde } \gamma = 1 + \sqrt{2}, \quad \delta = 1 - \sqrt{2}.$$

Použitím programu Matlab jsme určili hodnoty dostatečného počtu členů zmíněných posloupností. V tab. 1 jsou pak uvedeny procentuálně vyjádřené relativní četnosti výskytu jednotlivých číslic, jako prvních číslic členů těchto posloupností. Počet testovaných členů zkoumaných posloupností byl ovlivněn možnostmi zobrazení čísel v použitém softwaru.

Tabulka 1 Relativní četnost prvních číslic u uvedeného počtu členů vybraných posloupností

První číslice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Počet členů
a_n	16,13	13,53	12,08	11,10	10,38	9,81	9,36	8,97	8,65	10^6
b_n	20,24	16,52	13,87	12,01	10,39	8,94	7,58	6,15	4,29	10^6
F_n	30,27	17,71	12,63	9,20	8,20	6,43	5,56	5,56	4,44	1476
L_n	30,44	17,15	12,85	9,89	7,80	6,35	6,19	4,90	4,42	1474
P_n	30,45	18,25	11,81	9,24	8,29	6,22	6,19	4,68	4,87	806

Jednoduchým porovnáním uvedených četností je vidět, že výskyt prvních čísel klesá od 1 k 9. Navíc je zřejmé, že větší shodu pozorujeme u členů rekurentně zadaných posloupností, kde relativní četnosti pro jednotlivé číselce vykazují pouze velmi malé odchylky. Je proto možné, že svoji roli v těchto případech hraje typ funkčního vyjádření členů posloupnosti, konkrétně závislost exponenciální. Z tohoto hlediska budeme k celému problému přistupovat v dalším textu.

Historické poznámky

Pozorovanou zákonitost poprvé zveřejnil v roce 1881 kanadský matematik a astronom *S. Newcombe* [6] v časopise *The American Journal of Mathematics*. Jeho tvrzení vycházelo z pozorování, že v logaritmických tabulkách v technické knihovně jsou evidentně nejvíce ohmatané stránky s čísly začínajícími jedničkou. Jeho pouze dvoustránkový text si však nezískal žádnou pozornost a upadl v zapomnění. Autor neuvedl žádnou analýzu konkrétních souborů dat, zato se pokusil o určité matematické zdůvodnění tohoto výsledku. Ještě několik desetiletí tak jeho tvrzení nebyla věnována pozornost. Až v roce 1938 tento z určitého hlediska přírodní jev znovu objevil fyzik *F. Benford* [1]. Ten se však celým problémem zajímal mnohem systematictěji. Prozkoumal přes 20 000 číselných údajů ve 20 různých souborech dat, jako byly například délky 335 řek, měrné tepelné kapacity 1 389 chemických sloučenin, statistiky v americké baseballové lize, čísla uvedená v článcích na titulních stránkách novin apod. Řada autorů kriticky nahlížela na Benfordův výběr zkoumaných souborů dat s poukazem na účelovost tohoto výběru s ohledem na očekávaný výsledek. Přes veškeré výhrady se však ukázalo, že platnost zákona první číslice je velmi častý jev, a i proto se v současnosti používá pro tuto zákonitost pojmenování *Benfordův zákon*.

Je zajímavé, že zřejmě první významnější zmínkou o tomto zákoně v češtině je krátký článek *Pavla Kantorka* z roku 1998 v časopise *Vesmír* [5]. P. Kantorek, známý český karikaturista, vystudoval fyziku na Masarykově univerzitě, v roce 1968 odešel do Kanady a v současné době je profesorem fyziky na Univerzitě v Torontu. V článku konstatuje: *Nejde o žádný matematický trik, ale o skutečný přírodní zákon, jímž se řídí soubory jakýchkoliv přirozených dat, bez ohledu na jejich podstatu nebo fyzikální jednotky. Jedinou podmínkou je, že data musí být v minimálním rozsahu tří logaritmických intervalů.*

Především v posledních dvaceti letech se v zahraničních časopisech ob-

jevilo mnoho příspěvků různé odborné kvality, které se věnují tomuto „first digit phenomenon“. V současnosti webové stránky *Benford Online Bibliography* [2] obsahují více než 600 odkazů na tyto příspěvky. I když autoři tohoto článku nemohli projít všechny tyto odkazy, je zřejmé, že okolo Benfordova zákona je stále mnoho nedořešených otázek, jak z hlediska čistě matematického, tak především z hlediska možností jeho praktického využití v různých vědních oborech a oblastech lidské činnosti.

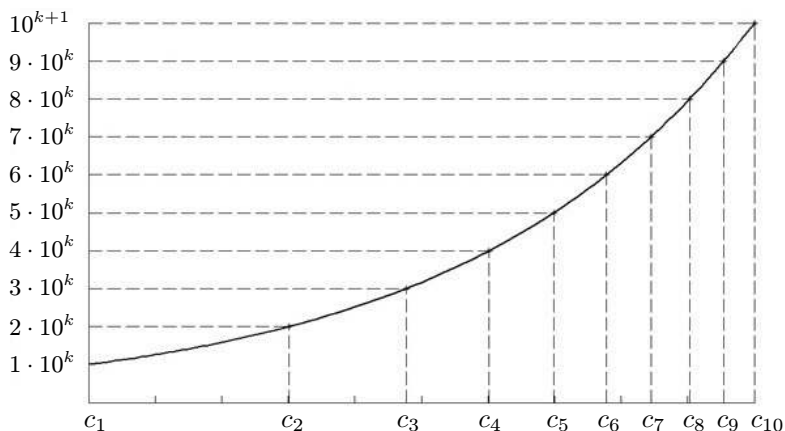
Matematické zdůvodnění a konkretizace zákona

Obraťme nyní pozornost k matematické stránce zákona. Je naprosto zřejmé, že zákon platit nebude v případě souborů dat, kde jednotlivá čísla jsou vytvářena náhodným výběrem číslic na jednotlivých pozicích, přičemž tyto číslice jsou vybírány se stejnou pravděpodobností, což představuje rovnoměrné rozložení pravděpodobností. Takovéto soubory dat nás proto zajímat nemohou.

Pro soubory dat vyjadřujících hodnotu jisté přirozeně vymezené veličiny z reálného světa lze najít v literatuře celou řadu různých důkazů, zdůvodnění či odvození zákona první číslice. Z pochopitelných důvodů většina z nich je založena na metodách statistických a poznacích teorie pravděpodobnosti. Zájemcům můžeme doporučit například články T. P. Hilla [4], R. A. Raimiho [9], D. Cohena [3] nebo R. S. Pinkhama [7]. Pro naše potřeby však postačí následující odvození, jehož základní ideu jsme převzali z článku K. A. Rosse [10], otištěného v časopise *The American Mathematical Monthly*.

Uvažujme posloupnost danou funkčním předpisem $a_n = A\alpha^n$. Jako jednoduchý model pro tuto posloupnost můžeme použít peněžní hodnotu majetku firmy nebo nějaké výrobní či finanční společnosti, kde celočíselná proměnná n vyjadřuje čas v určitých jednotkách, například v letech. Číslo A udává peněžní hodnotu ve výchozím roce, kdy $n = 0$. Daný předpis předpokládá, že hodnota se mění exponenciálně, přičemž pro $\alpha > 1$ roste v čase a naopak při $0 < \alpha < 1$ klesá. Dále budeme pro zjednodušení předpokládat, že hodnota s časem roste. Protože vynásobením hodnot a_n mocninou čísla 10 se první číslice nemění, můžeme také předpokládat, že počáteční majetek $1 \leq A < 10$ a základ exponenciální funkce vyhovuje podmínce $1 < \alpha < 10$. Na obr. 1 je zobrazený průběh rostoucí exponenciální funkce $f(t) = A\alpha^t$ mezi funkčními hodnotami 10^k a 10^{k+1} . Z něho je jasné vidět, že čas, který odpovídá tomu, kdy první číslicí funkční hodnoty je 1, určuje interval $\langle c_1, c_2 \rangle$, první číslicí je 2 určuje interval $\langle c_2, c_3 \rangle$, atd.

Proto 1 je první číslicí déle, než když první číslicí je 2 nebo kterákoliv z ostatních číslic $3, \dots, 9$.



Obr. 1 Graf růstu majetku firmy

Nyní můžeme dokončit úvahu vedoucí k funkčnímu vyjádření zákona první číslice. Uvažujme libovolnou nenulovou číslici d , pak doba jejího umístění jakožto první číslice hodnot $f(t)$ odpovídá intervalu $\langle c_d, c_{d+1} \rangle$. Chceme určit délku tohoto intervalu v závislosti na hodnotě d . Podle obr. 1 platí zřejmě

$$\begin{aligned} f(c_d) &= A\alpha^{c_d} = d \cdot 10^k, \\ f(c_{d+1}) &= A\alpha^{c_{d+1}} = (d+1) \cdot 10^k \end{aligned}$$

a po zlogaritmování

$$\begin{aligned} \log A + c_d \log \alpha &= \log d + k, \\ \log A + c_{d+1} \log \alpha &= \log(d+1) + k. \end{aligned}$$

Odečtením posledních rovností a jejich jednoduchou úpravou dostáváme

$$\log(d+1) - \log d = (c_{d+1} - c_d) \log \alpha$$

neboli

$$c_{d+1} - c_d = \frac{1}{\log \alpha} (\log(d+1) - \log d),$$

kde $1/\log \alpha$ je konstanta nezávislá na k . Čas, kdy křivka roste od hodnoty 10^k do 10^{k+1} , je přesně

$$c_{10} - c_1 = \frac{1}{\log \alpha} (\log 10 - \log 1) = \frac{1}{\log \alpha}.$$

Jinými slovy, v tomto „jednotkovém“ časovém rozpětí, je poměrný časový úsek, kdy první číslice hodnot $f(t)$ je právě d , roven

$$P(d) = \log(d+1) - \log d = \log \frac{d+1}{d} = \log \left(1 + \frac{1}{d}\right).$$

Je zřejmé, že tato úvaha platí pro libovolnou celočíselnou hodnotu k .

Jestliže se vrátíme k modelové situaci s majetkem firmy, a tedy k diskrétním hodnotám $f(n) = A\alpha^n$ pro nezáporná celá čísla n , jsou příslušné body $[n, f(n)]$ rozmístěné podél křivky na obr. 1. Lze tedy očekávat, že relativní četnost výskytu těchto bodů v intervalu $\langle c_d, c_{d+1} \rangle$ bude také určena hodnotou $\log \frac{d+1}{d}$, která představuje pravděpodobnost $P(d)$, s níž se číslice d objevuje jako první číslice hodnot $f(n)$.

Získali jsme tedy funkční vyjádření zákona první číslice neboli Benfordova zákona v běžně používaném tvaru. Příslušné pravděpodobnosti pro jednotlivé číslice jsou v tab. 2. Náhodné veličiny, jejichž rozdělení odpovídá uvedeným hodnotám, se někdy označují jako veličiny podléhající Benfordovu rozdělení.

Tabulka 2 Pravděpodobnosti podle Benfordova zákona

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\log \frac{d+1}{d}$	0,3010	0,1761	0,1249	0,0969	0,0792	0,0670	0,0580	0,0512	0,0458

Ověření platnosti zákona na vybraných souborech

V zahraniční literatuře lze najít ověřování zákona první číslice na mnoha datových souborech přírodního (přirozeného) charakteru. Předchozí odvození ukazuje, že zákon jistě platí, jestliže se jedná o hodnoty náhodné veličiny, které se mění podle jistého exponenciálního růstu nebo klesání. Řada autorů se pokoušela stanovit přesnější charakteristiku číselných souborů, pro které zákon bude platit.

Jestliže bychom shrnuli alespoň nejdůležitější požadavky na dané soubory, můžeme je formulovat v těchto čtyřech bodech:

1. Číselná data musí být dána ve stejných měrných jednotkách (počet obyvatel, délková či plošná míra, peněžní měna apod.).

2. Dat musí být dostatečné množství, většinou se požaduje řádově tisíce dat, jako minimální se uvádí 500 hodnot.
3. Číselné hodnoty by měly být v rozpětí alespoň tří (logaritmických) řádů.
4. Číselné hodnoty by neměly být v příslušném rozpětí zdola ani shora nijak omezeny.

Z řady různých problémů souvisejících s Benfordovým zákonem, kterými se odborníci na tuto oblast zabývají, připomeňme alespoň úvahy směřující k důkazům nezávislosti Benfordova zákona na jednotkách, ve kterých jsou hodnoty příslušné veličiny určeny nebo nezávislosti na základu číselné soustavy, v níž jsou data zkoumaných souborů vyjádřena.

V české literatuře se objevilo jen několik seriózních pokusů ověřovat nebo přímo aplikovat v praxi Benfordův zákon [8]. Rozhodli jsme se proto vyzkoušet platnost zákona na dvou datově odlišných souborech, které jsou veřejně přístupné na internetu. V mnoha zahraničních odkazech je citováno ověřování zákona na určitých demografických souborech, které se často konkrétně týkají počtu obyvatel obcí, měst nebo států. Využili jsme proto toho, že v roce 2011 proběhlo v České republice sčítání lidu a analyzovali jsme soubor tvořený počty obyvatel všech 602 měst v naší republice [11]. Pro současný článek jsme aktualizovali toto šetření a použili jsme datový soubor počtu obyvatel všech 6253 obcí v ČR ke dni 31. 12. 2013. Zdrojem byl materiál ČSÚ a územně analytické podklady [13]. Výsledky jsou uvedeny v tab. 3, příslušné relativní četnosti vykazují ještě přesnější shodu s hodnotami získanými z Benfordova zákona, než v případě počtu obyvatel měst. Domníváme se, že lepší shoda je důsledkem zvětšení rozsahu zkoumaného souboru o jeden řád. Tento soubor splňuje všechny čtyři výše připomenuté podmínky na posuzovaný soubor dat. Největší počet obyvatel má samozřejmě hlavní město Praha, konkrétně 1 243 201, pouze 2 obyvatelé má Březina, okres Vyškov, v tomto případě se jedná o vojenský újezd.

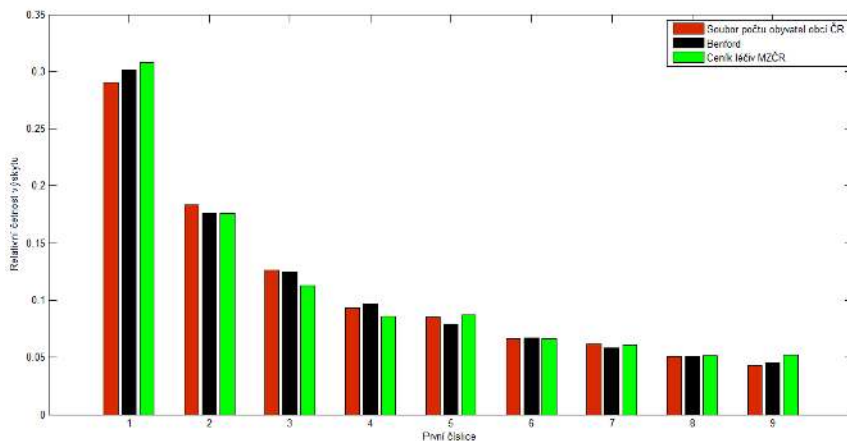
Jako druhý zkoumaný soubor jsme použili data ze zcela odlišné oblasti. Státní ústav pro kontrolu léčiv v souladu se zákonem zveřejňuje *Seznam cen a úhrad léčivých přípravků a potravin pro zvláštní lékařské účely hrazených ze zdravotního pojištění*. Seznam je každý měsíc aktualizován a uvádí úplný výčet léčivých přípravků a potravin pro zvláštní lékařské účely, o jejichž úhradě z veřejného zdravotního pojištění ústav rozhoduje [12]. Ceny (MFC) v tomto seznamu uvedené ke dni 5. 4. 2015 se pohybovaly přibližně v rozpětí od 10 do 100 000 Kč a celkový počet položek byl 8614.

Příslušné absolutní a relativní četnosti jsou uvedeny v posledních dvou řádcích tab. 3. Z údajů v tabulce je zřejmé, že soubor cen v ceníku také velice dobře odpovídá Benfordovu rozdělení pro první číslice.

Obr. 2 zcela jasně dokumentuje vizuálně míru shody relativních četností výskytu jednotlivých číslic 1 až 9 jako prvních číslic položek v analyzovaných souborech s předpokládanou pravděpodobností výskytu podle Benfordova zákona. Při detailním statistickém zpracování analýz datových souborů se ovšem zpravidla postupuje tak, že se stanoví jako nulová hypotéza shoda s Benfordovým rozložením a vhodným kritériem se hypotéza testuje. Nejčastěji se používá test dobré shody χ -kvadrát.

Tabulka 3 Absolutní a relativní četnosti (v %) výskytu první číslice d v daných souborech: A – počet obyvatel obcí ČR; B – ceník léčiv

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A abs.	1815	1147	790	583	531	414	387	319	267
A rel.	29,03	18,34	12,63	9,32	8,49	6,62	6,29	5,10	4,27
B abs.	2655	1514	970	742	749	569	522	446	447
B rel.	30,82	17,58	11,26	8,61	8,70	6,61	6,06	5,18	5,19



Obr. 2 Srovnání relativních četností v uvedených souborech

Pro případnou analýzu uvedeného typu lze najít na internetu řadu datových souborů, které je možné takto zkoumat. Vhodným zdrojem jsou

webové stránky Českého statistického úřadu nebo Eurostatu. Největším problémem je především zajistit dostatečný rozsah souboru a dostatečné rozpětí dat v souboru. Domníváme se ale, že by takováto aktivita mohla žáky zaujmout, protože většina z nich s internetovými vyhledávací běžně pracuje.

Závěrečné shrnutí

Jak už bylo dříve uvedeno, obsahuje on-line databáze [2] více než 600 titulů pojednávajících o Benfordově zákoně a jeho možném využití v různých oborech. Je zřejmé, že se tato databáze bude dále rozrůstat. Pro matematiky je zde však celá řada nedorozumění otázek. Několik z nich zformuloval K.A. Ross ve svém článku [10], který považujeme za stěžejní pro matematické chápání zákona.

V posledních letech se objevila řada studií, které se pokoušely aplikovat zákon první číslice při analýze datových souborů v ekonomické a finanční oblasti, kde se bezesporu jeví uplatnění tohoto zákona za nejefektivnější. Snažili jsme se proto zmapovat některé významnější pokusy o aplikaci Benfordova zákona v ekonomických vědách [11], včetně konkrétních výsledků hlavně v zahraničí. Cílem takových analýz bylo posoudit, zda číselné údaje v jednotlivých finančních výkazech a jiných ekonomických statistikách odpovídají Benfordovu rozdělení.

Z hlediska možného použití zákona první číslice můžeme také připomenout jednu situaci z politologie. Opakovaně se objevily pokusy detekovat s pomocí tohoto zákona falšování výsledku voleb v některých zemích, v případě zájmu může čtenář najít na internetu příslušné odkazy. Těžko lze posoudit, zda se jedná o skutečně detailní a fundovanou analýzu volebních výsledků. Zhodnocení je nutné nechat na odborníky v této oblasti.

Pro účinnější využití Benfordova zákona v praxi, je důležité rozšíření zákona na další platné číslice dat v souborech. Bez těchto úvah nejsou možnosti efektivního uplatnění zákona při formulování konkrétních závěrů příslušných analýz datových souborů plně fundované. Abychom lépe pochopili matematické okolnosti popisované zákonitosti, bylo by také třeba detailněji přihlédnout k odlišnostem v přístupu jednotlivých odborníků na problematiku zákona první číslice. To vše už je nad reálné možnosti tohoto příspěvku, který považujeme jen za základní vhled do „tajemství“ v našich zemích dosud málo připomínaného fenoménu.

Jako závěrečný výrok, který v jistém zjednodušení vyjadřuje cíl tohoto příspěvku, můžeme použít jemně upravenou citaci z článku P. Kantorka.

Aplikace Benfordova zákona je dalekosáhlá. Máme-li větší soubor jakýchkoliv dat, můžeme poměrně jednoduchým statistickým rozбором lehce zjistit, jsou-li data skutečná (přírodní), nebo podezřelá. Pochopitelně ale platí základní pravidlo statistiky: Čím více dat, tím lepší souhlas s teoretickou křivkou. Zákon se bohužel nedá použít k zlepšení šance výhry ve Sportce, protože nahodile tažená čísla 1 až 9 mohou být seřazena v libovolném pořadí. V každém případě je to však zákon fascinující a je zajímavé, jak málo i renomovaných akademiků o něm ví.

Literatura

- [1] *Benford, F.*: The law of anomalous numbers. Proc. Amer. Philos. Soc. **78** (1938), 551–572.
- [2] *Berger, A. – Hill, T. P.*: Benford Online Bibliography. 2015. [cit. 2015-04-14]. Dostupné z <http://www.benfordonline.net>.
- [3] *Cohen, D. I. A.*: An explanation of the first digit phenomenon. Journal of Combinatorial Theory **20** (1976), 367–370.
- [4] *Hill, T. P.*: A statistical derivation of the significant digit law. Statistical Science **10**, 4 (1996), 354–365.
- [5] *Kantorek, P.*: Benfordův zákon. Vesmír, roč. 77, 1998, s. 583.
- [6] *Newcombe, S.*: Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers. American Journal of Mathematics **4**, 1 (1881), 39–40.
- [7] *Pinkham, R. S.*: On the distribution of first significant digits. Annals of Mathematical Statistics **32** (1961), 1223–1230.
- [8] *Plaček, M.*: Benfordův zákon: fakta a mýty. Bulletin komory certifikovaných účetních. 1/2013, Praha, 2013, 43–46.
- [9] *Raimi, R. A.*: The first digit problem. The American Mathematical Monthly **83** (1976), 521–538.
- [10] *Ross, K. A.*: Benford's law, a growth industry. The American Mathematical Monthly **118**, 8 (2011), 571–583.
- [11] *Seibert, J. – Zahradka, J.*: Zákon první číslice a jeho aplikace. Scientific papers of the University of Pardubice. Series D, Faculty of Economics and Administration, roč. 30, 1/2014, 75–83.
- [12] Seznam cen a úhrad LP/PZLÚ k 2. 4. 2015. [cit. 2015-04-05]. Dostupné z <http://www.sukl.cz/sukl/oprava-predchoziho-seznamu-cen-a-uhrad-lp-pzlu>.
- [13] ČSÚ a územně analytické podklady. [cit. 2015-04-05]. Dostupné z https://www.czso.cz/csu/czso/csu_a_uzemne_analyticke_podklady.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 1. 6. 2016 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 223

V krabici bez víka s výškou 1 a s půdorysným rozměrem $m \times n$ (m, n jsou přirozená čísla) bylo uloženo mn dřevěných kostek (jednotkových krychlí). Nina si chtěla s kostkami hrát, když však otočila krabici dnem vzhůru, žádné kostky z ní nevypadly, protože byly v krabici „natěsno“ a pevně je držely stěny krabice. Nina poté vytáhla z krabice několik kostek. Když opět krabici otočila, s překvapením zjistila, že z ní opět žádné kostky nevypadly, protože každá kostka v krabici byla v některém řádku nebo sloupci, ve kterém žádná kostka nechyběla a stěny krabice tento řádek nebo sloupec stále udržely. Určete, kolika způsoby mohla Nina takto kostky z krabice vytáhnout.

Peter Novotný

Úloha 224

Najděte všechna přirozená čísla k , pro která existují celá čísla a, b, c taková, že $a + b + c = 0$ a současně $|ab|$, $|bc|$, $|ca|$ jsou k -té mocniny přirozených čísel.

Patrik Bak

Dále uvádíme řešení úloh 219 a 220, jejichž zadání byla zveřejněna v pátém čísle minulého (24.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 219

Celá čísla k, n splňují nerovnost

$$n \geq \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Dokažte, že pokud $k \geq 3$, lze číslo n zapsat ve tvaru součtu k navzájem různých celých kladných čísel, přičemž nejmenší z nich je sudé, druhé nejmenší je násobkem tří, třetí nejmenší násobkem čtyř atd., až největší z k sčítanců je násobkem $k+1$. Platí stejný závěr i v případě $k=2$?

Jaromír Šimša

Řešení. Nazvěme popsany součet jako „ k -rozklad čísla n “. Zvětšíme-li jeho největší sčítanec o $k+1$, dostaneme zřejmě k -rozklad čísla $n+k+1$. Proto podle principu matematické indukce bude závěr úlohy o k -rozkladech při pevném k platit, právě když k -rozklad bude mít prvních $k+1$ uvažovaných čísel n , tedy čísla

$$n \in \{n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n_0 + k\}, \quad \text{kde } n_0 = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Experimentováním a následnou indukci vzhledem k číslu k ověříme, že součet

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + k \cdot (k+1) \quad (1)$$

je právě k -rozklad prvního zkoumaného čísla n_0 . Když v tomto rozkladu změním druhý a třetí sčítanec, jak nyní zapíšeme

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots \rightarrow 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \dots,$$

dostaneme k -rozklad čísla $n_0 + 1$ (na tomto místě potřebujeme předpoklad $k \geq 3$). Ostatní potřebné k -rozklady čísel $n_0 + j$ pro $j \in \{2, 3, \dots, k\}$ dostaneme z (1) změnou vždy jediného sčítance $(j-1) \cdot j$ na $j \cdot j$, který i tak zůstane menší než následující sčítanec $j(j+1)$. Tím je závěr úlohy dokázán pro každé $k \geq 3$.

Pro $k = 2$ tvrzení úlohy neplatí: i když odpovídající $n_0 = 8$ má 2-rozklad (1), tedy $8 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3$, následující $n = 9$ žádný 2-rozklad nemá: rovnici $9 = 2a + 3b$ zřejmě vyhovují jediná přirozená čísla $a = 3$ a $b = 1$ (nutně totiž $3 \mid a$), avšak pro ně neplatí $2a < 3b$. (2-rozklady mají právě čísla 5, 8, 10 a všechna $n \geq 13$.)

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Martin Raszyk* z ETH Zürich. Neúplné řešení zaslal *Anton Hnáth* z Moravan.

Úloha 220

V každém ze dvou výrazů

$$A = 2^{3^{2^{\dots^3}}}, \quad B = 3^{2^{3^{\dots^2}}}$$

se pravidelně střídá 2016 dvojek a 2016 trojek. Hodnota kterého výrazu je větší?

Jozef Mészáros

Řešení podle Martina Raszyka. Nejprve si uvědomíme, že pro všechna přirozená čísla k platí

$$2^{2^{k+1}} = 2^{2 \cdot 2^k} = 4^{2^k} \geq 3^{2^k}. \quad (2)$$

Označme $a_0 = b_0 = 1$ a pro všechna přirozená čísla n položme

$$a_n = 2^{b_{n-1}}, \quad b_n = 3^{a_{n-1}}.$$

Snadno určíme

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 < 3 = b_1, \\ a_2 &= 2^3 = 8 < 9 = 3^2 = b_2, \\ a_3 &= 2^9 = 512 < 6561 = 3^8 = b_3, \\ a_4 &= 2^{6561} > 2^{1024} + 2. \end{aligned}$$

Přitom podle (2) je $2^{1024} = 2^{2^{10}} \geq 3^{2^9} = b_4$, proto platí $a_4 > b_4 + 2$.

Užitím principu matematické indukce dále dokážeme, že pro všechna přirozená čísla $n \geq 2$ platí

$$a_{2n} > b_{2n} + 2. \quad (3)$$

Pro $n = 2$ je to nerovnost $a_4 > b_4 + 2$ odvozená výše. Nechť dále (3) platí pro nějaké přirozené číslo $n \geq 2$. Potom platí

$$a_{2(n+1)} = 2^{b_{2n+1}} = 2^{3^{a_{2n}}} \geq 2^{2^{a_{2n}}} > 2^{2^{b_{2n}+2}} = 2^{2 \cdot 2^{b_{2n}+1}} \geq 2^{2^{b_{2n}+1}} + 2,$$

přičemž jsme využili odhad $c^2 > c + 2$ pro $c = 2^{2^{b_{2n}+1}} > 2$. Podle nerovnosti (2) platí

$$2^{2^{b_{2n}+1}} \geq 3^{2^{b_{2n}}} = 3^{a_{2n+1}} = b_{2n+2}.$$

Spojením obou předchozích nerovností pak dostaneme

$$a_{2(n+1)} > b_{2n+2} + 2 = b_{2(n+1)} + 2.$$

Užitím principu matematické indukce proto nerovnost (3) platí pro všechna přirozená čísla $n \geq 2$.

Odtud již plyne $A > B$, protože podle (3) platí pro $n = 2016$

$$A = a_{2 \cdot 2016} > b_{2 \cdot 2016} + 2 = B + 2 > B.$$

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

Pavel Calábek

Realizace konstruktivistického přístupu ve výuce fyziky prostřednictvím úloh zadaných formou diskuze

EVA HEJNOVÁ

Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem

V souvislosti s neustálým růstem množství informací dochází v celém světě k výrazným změnám, které vyvolávají potřebu nových vzdělávacích cílů, resp. inovací těch stávajících [1]. V této souvislosti se velmi často mluví o pedagogickém konstruktivismu, který představuje v didaktice jedno z dominantních soudobých paradigmat [2]. Jeho základním východiskem je, že žák si své poznání konstruuje sám na základě vlastních zkušeností (kognitivní konstruktivismus), a to tak že nové situace chápe v návaznosti na to, čemu už porozuměl dříve. V procesu konstrukce poznání zároveň hraje důležitou roli i sociální interakce a kultura. V této souvislosti se pak hovoří o tzv. sociálním konstruktivismu, který je realizován ve výuce tak, že žáci řeší problémy ze života, přičemž důraz je kladen na tvořivé myšlení a práci dětí ve skupinách.

O konstruktivismu jakožto teorii učení bylo napsáno již mnoho odborných publikací a této problematice bylo věnováno velké množství výzkumů. Jejich výsledky ukázaly, že konstruktivistické přístupy mohou přispět ke zlepšení současného stavu výuky, co se týče motivace žáků i co se týče hlubšího porozumění základním poznatkům a pojmům [3]. V konstruktivistické škole se zároveň mění i povaha hodnocení žáků, které již neslouží kontrole a třídění žáků, ale stává se nástrojem učení [4].

Mnohé výzkumy ukázaly [5, 6], že děti si do výuky přinášejí vlastní představy o tom, jak funguje okolní svět, často označované jako prekoncepce (někdy též jako intuitivní nebo prvotní představy). V odborné literatuře [6] se zpravidla rozlišují dva typy prekonceptí: správné prekoncepce, které jsou v souladu s vědeckými poznatky, a chybné prekoncepce (označované též jako miskoncepce), které jsou s vědeckými poznatky v rozporu.

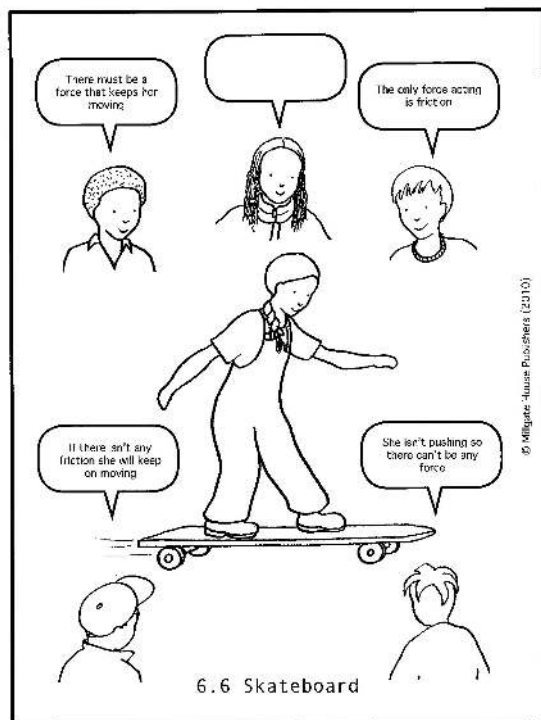
Konstruktivistické pojetí učení počítá s tím, že tyto prekoncepce výrazně ovlivňují další učení žáků. Účelem výzkumů v oblasti prekonceptí je jednak zjišťovat, jaké představy žáci mají a poté navrhnout postupy a strategie, jak tyto představy modifikovat, rozšířit nebo nahradit jinými, „vědeckějšími“ [6]. Má-li žák pochopit nový fyzikální poznatek nebo pojem, je třeba nejprve zjistit, jaké představy o určitém pojmu již má, zda jsou správné, nebo je třeba je pozměnit, případně zda jsou zcela v rozporu s vědeckými poznatky. Poslední případ bývá z hlediska další výukové strategie nejkomplikovanější, neboť je třeba, aby si žák svoji chybnou představu uvědomil, pochopil, v čem se mýlí, a osvojil si představu správnou.

I když je v konstruktivismu kladen výrazný akcent na aktivní poznávání žáka, klíčovou roli v celém procesu stále hraje učitel, který zpravidla předkládá problémové situace, je jakýmsi podporujícím průvodcem, který hledá, kam až žák učivo zvládl, a poskytuje potřebnou zpětnou vazbu při žákově učení.

Pro samotné učitele však bývá často obtížné realizovat konstruktivistické přístupy v běžné školní praxi a hledat skutečně účinné výukové strategie [7]. Důvody pro to jsou různé, např. velký počet žáků ve třídách, nedostatek času s ohledem na nízkou hodinovou dotaci pro fyziku, nedostatek vhodných výukových materiálů i chybějících metodických návodů, jak konstruktivistické přístupy v hodinách fyziky realizovat.

Úlohy zadané formou diskuze

V tomto článku bych proto ráda představila vyučovací metodu, která může dobře pomoci při realizaci konstruktivistického přístupu ve výuce fyziky. Tato metoda je založena na úlohách, které jsou žákům předkládány ve formě diskuze (viz ukázka úlohy na obr. 1). V zahraničí je tento typ úloh zpravidla označován jako „concept cartoons“ [8]. V české odborné literatuře není pro tento typ úloh zatím zaveden žádný ustálený český název. Učitelé označují neformálně tyto úlohy jako „úlohy s bublinou“, „bublinové úlohy“ nebo také „obrázkové úlohy“. V následujícím textu budeme tyto úlohy nejčastěji označovat jako úlohy zadané formou diskuze.



Obr. 1 Ukázka úlohy zadané formou diskuze [8]

Vyučovací metoda s využitím tohoto typu úloh vychází z konstruktivistických přístupů, má velký motivační potenciál a účinně pomáhá rekonstruovat chybné představy žáků. Její nespornou předností je i to, že je dobře použitelná v běžné školní praxi a umožňuje úspěšně pracovat i s žáky, kteří mají např. problémy s chováním, čtením, vyjadřováním apod.

Úloha zadaná formou diskuze má zpravidla podobu kresby (obr. 1), ve které vystupuje několik mluvčích (nejčastěji tři nebo čtyři). Diskutujícími mohou být nejen děti, ale i komiksové postavičky, pro menší děti lze použít i pohádkové postavy, zvířata apod. Počet mluvčích se přitom zpravidla odvozuje od počtu miskoncepcí, které byly pro danou oblast pomocí výzkumů identifikovány. Jednotliví diskutující vyslovují své názory na předložený problém, který nemusí být explicitně formulován, neboť vyplývá přirozeně ze situace znázorněné na obrázku.

Na obr. 2 je ukázka jiné varianty zadání tohoto typu úlohy, kdy je úvodní problém předložen ve formě stručného textu.

Pohybové zákony *Sněžný skútr*

Honza jede na sněžném skútru po vodorovné cestě stálou rychlostí.

A
Vojta: Tahová síla motoru je větší než třecí síla, aby skútr mohl jet dopředu.

B
Petr: Třecí síla je větší než tahová síla, jinak by skútr zrychloval.

C
Katka: Obě síly jsou stejně velké, jejich výslednice je nulová.

D
Martina: Nemáte pravdu. Já si myslím, že...

Pravidla

Obr. 2 Ukázka jiné formy zadání úlohy

Kresba znázorňující situaci, o níž se diskutuje, je v tomto případě nahrazena fotografií. Jednotliví mluvčí mají jména, což usnadňuje diskusi. Děti na obrázku vyslovují své názory na předložený problém, přičemž jedno z jejich tvrzení je zpravidla z vědeckého hlediska správné (resp. přijatelné), ale nemusí to tak být nutně vždy. Jednotlivé problémové situace jsou zpravidla formulovány jako více, či méně otevřené, takže záleží i na tom, jak si žáci úlohu „zkomplikují“ úvahami typu „to přece může záviset na...“, „vezmeme-li v úvahu, že“ apod. Z tohoto důvodu přidali tvůrci těchto úloh, Stuart Naylor a Brenda Keogh, ještě jednoho mluvčího [8], který žádný názor nevyslovuje, ale říká pouze „Nemáte pravdu. Já si myslím, že...“ (viz obr. 1 a 2). Žákům se tak nabízí možnost formulovat vlastní tvrzení, pokud žádné z předchozích pro ně není z nějakého důvodu přijatelné.

Příklady úloh zadaných formou diskuse

Abychom učitelům usnadnili realizaci konstruktivistického přístupu ve výuce fyziky, vytvořili jsme dva soubory úloh pro témata Pohybové zákony a Gravitace (každý soubor zahrnuje 16 úloh), které jsou určeny pro žáky základních škol, ale jsou použitelné i pro žáky středních škol. Úlohy zahrnují většinu miskoncepcí, které žáci v dané oblasti nejčastěji mají. Učitelé

mohou pomocí nich zjistit, jaké představy žáci mají a poskytnout jim při učení bezprostřední zpětnou vazbu. Proto lze tyto úlohy využít i jako dobrý nástroj pro formativní hodnocení [9]. Ke každé úloze je zpracována metodická poznámka, v níž je předložený problém podrobně rozebrán, u některých úloh jsou uvedeny i náměty na další aktivity, jež může učitel s žáky realizovat. Soubory úloh (ve formátu PDF a FLP pro interaktivní tabuli typu ActivBoard) a metodické poznámky k úlohám včetně řešení jsou dostupné na http://physics.ujep.cz/~ehejnova/Pro_ucitele/index4.html.

V dalším textu představíme několik úloh zadaných formou diskuse (Míček a Země, Míček, Padání těles a Delfín). U těchto vybraných úloh uvádíme pro zajímavost úspěšnost jejich řešení studenty oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ na Pedagogické fakultě UJEP v Ústí nad Labem. Studenti řešili samostatně osm vybraných úloh na téma Gravitace, neboť toto téma koresponduje s fyzikálním učivem, probíraným v rámci přírodovědy na 1. stupni základní školy. Pro srovnání uvádíme také úspěšnost řešení úloh studenty 1. ročníku Podkrušnohorského gymnázia v Mostě (upřesněme, že se jedná o 1. ročník vyššího gymnázia). Úlohy byly zadány studentům na jaře roku 2015. Průzkumu se účastnilo 23 studentů 3. ročníku studijního oboru Učitelství pro 1. stupeň a 49 žáků z 1. ročníku gymnázia.

Úloha Míček a Země (obr. 3)

Gravitace
Míček a Země

Malý míček padá na povrch Země.

A
Martina
Země přitahuje gravitační silou míček, ale míček na Zemi žádnou silou nepůsobí.

B
Petr
Země i míček na sebe působí stejně velkými přitažlivými silami.

C
Katka
Země i míček na sebe působí přitažlivými silami, ale Země působí na míček mnohem větší silou, protože má oproti míčku obrovskou hmotnost.

D
Lukáš
Nemáte pravdu. Já si myslím, že ...

*„Stálo měnou, E a já, - Vlastnosti“
(Stálo a tělo (ZT))*

Poznámka

Obr. 3

Komentář k úloze Míček a Země

Správná odpověď je B. Žáci často nechápou gravitační působení jako vzájemné působení dvou těles, jež je závislé na hmotnosti obou těles. Typická miskoncepce, se kterou setkáváme i u vysokoškolských studentů je, že při vzájemném gravitačním působení dvou těles s různými hmotnostmi působí těžší těleso na lehčí větší gravitační silou.

Žáci často vycházejí z představy, že Země je velická a přitahuje hodně věcí, musí tedy mít (podle nich) velkou sílu [6]. Je pro ně obtížné uvědomit si, že míček, který padá k Zemi, ji přitahuje stejně velkou silou jako ona míček.

Děti mají běžnou zkušenost, že všechna tělesa padají k Zemi. Obvykle tedy vůbec nevnímají vzájemné gravitační působení mezi jakýmkoliv předměty – gravitace je pro ně spíše „něco“, co se nachází vně těles, není chápána jako vlastnost všech těles [6]. To, že nepozorujeme, že by Země byla v důsledku působení síly přitahována k míčku, plyne z toho, že pohybový účinek síly působící na těleso je tím menší, čím větší je hmotnost tělesa (v našem případě tedy Země). Protože Země má velkou hmotnost, přitažlivá síla míčku s ní v podstatě nepohne.

Aby si žáci tuto skutečnost uvědomili, je vhodné nakreslit síly přímo do obrázku a znázornit je stejně velkými opačně orientovanými šipkami. Obrázek je také vhodné otočit o 180° (pokud pracujeme na interaktivní tabuli, není to problém) a podívat se na situaci i z opačné perspektivy, tj. stejně jako říkáme, že Země přitahuje míček, lze říkat, že i míček přitahuje stejně velkou silou Zemi.

Tato představa – tj. že při vzájemném gravitačním působení dvou těles s různými hmotnostmi působí těžší těleso na lehčí větší gravitační silou – patří zpravidla k těm nejodolnějším nejenom u žáků na základní škole, ale i u studentů na střední či vysoké škole.

To dokládají i výsledky našeho průzkumu, který byl proveden u studentů učitelství pro 1. stupeň základní školy. V našem průzkumu zastávalo 52 % studentů stanovisko Katky, která tvrdí, že na padající míček působí Země mnohem větší silou, protože má oproti míčku velkou hmotnost. Téměř čtvrtina studentů (přesněji 22 %) si myslí, že Země přitahuje gravitační silou míček, ale míček na Zemi žádnou silou nepůsobí. Pouze 26 % studentů uvedlo správnou odpověď, tj. že Země i míček na sebe působí stejně velkými přitažlivými silami.

Co se týče studentů gymnázia, správnou odpověď zvolilo 33 % z nich.

Úloha Míček (obr. 4)

Obr. 4

Komentář k úloze Míček

Z vědeckého hlediska je nejpříjemnější odpověď A (za předpokladu, že zanedbáme odporovou sílu vzduchu a vztlačovou sílu). Žáci se často mylně domnívají, že na míček působí gravitační síla a síla ruky, která se postupně zmenšuje [6], a také že se působení gravitace neuplatňuje ihned po vyhození míčku, ale až s určitým zpožděním nebo poté, co přestanou působit jiné síly (v tomto případě síla ruky). Děti si myslí, že tato síla musí být větší než gravitační síla, jinak by se míček musel pohybovat dolů. Žáci se také někdy chybně domnívají, že v bodě obratu na míček žádná síla nepůsobí, myslí si, že gravitační síla začne zase působit, až když míček začne padat dolů.

I tyto miskoncepce patří k velmi odolným, zejména co se týče představy „síly ruky“. V našem průzkumu 52 % vysokoškolských studentů uvedlo, že při vyhození míčku ve směru svislém vzhůru na něj působí gravitační síla Země a síla ruky, která se postupně zmenšuje. 31 % si myslí, že v okamžiku, kdy se míček v nejvyšším bodě zastaví, na něj žádná síla nepůsobí. Správnou odpověď uvedlo pouze 17 % studentů.

Gymnaziální studenti byli při řešení této úlohy podstatně úspěšnější, správnou odpověď zvolilo 58 % studentů. Zde je nutné podotknout, že šlo

o studenty 1. ročníku, v němž je učivo z mechaniky aktuálně probíráno, a studenti je mají v čerstvé paměti.

Pro vysokoškolské studenty to byla problematika, se kterou se pravděpodobně nesetkali již několik let, na základě čehož by bylo možné usuzovat, že dospělí lidé, včetně těch vysokoškolsky vzdělaných, se často ke svým původním mylným představám vrací.

Úloha Padání těles 2 (obr. 5)

The screenshot shows a presentation slide titled "Gravitace Padání těles 2". It features a central text box stating: "Tenisový míček a papírovou kouli stejné velikosti pustíme ze stejné výšky a ve stejný okamžik z ruky." Below this, four students (A, B, C, D) are shown with their responses:

- A (Jirka):** "Tenisový míček padá rychleji, protože je těžší." (The tennis ball falls faster because it is heavier.)
- B (Jana):** "Obě tělesa padají stejně rychle." (Both bodies fall at the same speed.)
- C (Katka):** "Papírová koule nemůže za žádných okolností dopadnout na zem ve stejný okamžik jako míček." (The paper ball cannot land on the ground at the same time as the ball under any circumstances.)
- D (Vojta):** "Nemáte pravdu. Já si myslím, že ..." (You are wrong. I think that ...)

On the right side of the slide, there is a video frame showing a hand dropping a ball, and a small text "Zdroj: YouTube.com". At the bottom right, there is a vertical label "Poznamka".

Obr. 5

Komentář k úloze Padání těles 2

Ani jedna odpověď není správná, za správnou bychom mohli považovat odpověď Jany (B), ale pouze za předpokladu, že by pád probíhal ve vakuu.

Žáci si však často chybně myslí, že těžší tělesa padají vždy rychleji (tj. i ve vakuu). Při volném pádu těles ve vakuu je ale průběh rychlosti všech těles v daném místě stejný, nezávislý na jejich hmotnosti či tvaru, tj. míček i papírová koule by ve vzduchoprázdnu dopadly na zem ve stejný okamžik.

Míček i papírová koule padající ve vzduchu dopadnou přibližně ve stejný okamžik, pokud odporová i vztlačková síla působící na míček a na papírovou kouli bude přibližně stejná a tělesa budou padat z malé výšky, aby se neprojevil vliv odporové síly. Pokus s padáním těles o stejné velikosti (tj. stejném objemu) můžeme provést také tak, že místo papírové koule použijeme druhý tenisový míček, který naplníme např. broky, pískem, kamínky

apod., aby měl výrazněji větší hmotnost než míček prázdný. Míčky pak necháme padat ze stejné výšky. Pokud výška není příliš velká, dopadnou míčky přibližně ve stejný okamžik. Při pádu z větší výšky se však projeví odporová síla vzduchu, takže těžší míček dopadne dříve – zrychlení těžšího míčku bude větší. Okamžik dopadu těles lze zaznamenat přesněji např. videokamerou.

Závislost rychlosti padání na odporové síle lze dobře ukázat na jednoduchém pokusu, kdy necháme padat list novin a zmačkaný malý útržek z novin. Noviny, i když jsou těžší, padají pomaleji. Tímto způsobem lze dobře demonstrovat působení odporové síly vzduchu, která závisí na tvaru a velikosti předmětu (a také na jeho rychlosti).

Pro demonstraci volného pádu těles je vhodný známý pokus s Newtonovou trubicí, který je možné pustit i na videu. Dobře zde lze využít i videonahrávku padání těles na Měsíci (pokus, který provedli astronauti na Měsíci, když nechali zároveň padat kladívko a paví pero), která je dostupná např. na http://www.youtube.com/watch?v=5C5_dOEyAfk. Velmi efektní je také pád bowlingové koule a perí v největší vakuové komoře na světě, pokus je dostupný na <http://www.ac24.cz/zpravy-ze-sveta/5290-bowlingova-koule-a-peri-padaji-v-nejvetsi-vakuove-komore-na-svete>.

Zajímavé videonahrávky k padání těles lze také nalézt v pořadu Rande s fyzikou:

<http://www.ceskatelevize.cz/porady/10319921345-rande-s-fyzikou/211563230150002-zrychleni-a-volny-pad/video/>

<http://www.ceskatelevize.cz/porady/10319921345-rande-s-fyzikou/211563230150006-tiha-a-beztizny-stav/>

Náš průzkum ukázal, že představa, že těžší tělesa padají rychleji, patří k těm nejrozšířenějším. 91 % studentů učitelství pro 1. stupeň ZŠ uvedlo, že těžší těleso padá rychleji. Gymnaziální studenti volili nejčastěji odpověď B (87 % studentů), tj. že obě tělesa padají stejně rychle.

Úloha Delfín (obr. 6, s. 111)

Komentář k úloze Delfín

Správná odpověď je A. Děti si často myslí, že gravitační působení je závislé na prostředí a že se gravitační síla ve vodě zmenšuje, nebo se mění její směr, tj. gravitační síla působí ve vodě směrem nahoru [6]. V případě těles nacházejících se ve vodě žáci vycházejí z běžné zkušenosti, že tělesa jsou ve vodě „nadlehčována“ a zaměňují tak často gravitační a vztlakovou sílu. Neuvědomují si však, že výsledná působící síla působící na delfína ve

vodě je výslednicí těchto dvou sil (případně též odporové síly vody, pokud předpokládáme, že delfin se ve vodě pohybuje).

Gravitace **Delfin**

A Delfin vyskočil nad hladinu moře.

B Na delfina působí stejně velká gravitační síla nad hladinou moře i pod vodou.

C Pod vodou působí na delfina menší gravitační síla.

D Když je delfin pod vodou, působí na něj gravitační síla směrem nahoru.

E Když delfin vyskočí nad hladinu, gravitační síla na něj po dobu skoku nepůsobí.

F Nemáte pravdu. Já si myslím, že ...

Jana **Jirka** **Katka** **Vojta** **Martina**

Zdroj: Hltajzovna.mazovskostekow.pl

Obr. 6

Při řešení této úlohy byli vysokoškolští studenti nejúspěšnější, správnou odpověď zvolilo 68 % studentů. 32 % si myslí, že pod vodou působí na delfina menší gravitační síla, než když vyskočí nad hladinu. Odpověď Vojty, tj. že na delfina po dobu skoku gravitační síla nepůsobí, nezvolil nikdo z nich. Gymnaziální studenti byli opět při řešení úlohy úspěšnější, správnou odpověď zvolilo 80 % studentů.

Práce s úlohami zadaných formou diskuze ve výuce

Učitelé, kteří s úlohami zadanými formou diskuze ve výuce pracují, často uvádějí, že tento typ úloh velmi dobře motivuje žáky k diskusi. Při tvorbě výše uvedených úloh byl kladen důraz na to, aby problémy, o nichž děti diskutují, vycházely ze situací, které jsou žákům blízké (často se jedná o problémy týkající se jednoduchých situací z běžného života) nebo jsou pro ně nějakým způsobem zajímavé (úlohy mezipředmětově zaměřené, úlohy s astronomickou tematikou apod.).

Z hlediska odbourávání chybných představ žáků lze největší přínos úloh spatřovat v tom, že žáci mohou k danému problému vyslovovat své názory, klást další otázky, formulovat a zdůvodňovat své argumenty. Tento způsob

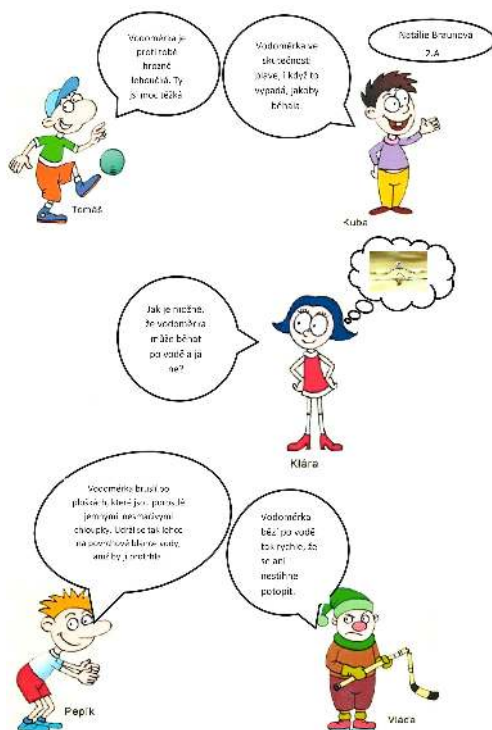
přemýšlení o problému pomáhá žákům k hlubšímu pochopení určitého fyzikálního pojmu nebo zákona, neboť si uvědomí, v čem byly jejich dřívější představy chybné (případně ne zcela správné) a mohou si tak lépe upevnit správné představy podložené argumenty. Cenné na tomto postupu je i to, že se žáci mohou seznámit s alternativními představami, které by je často ani nenapadly. Tento způsob učení dává dobrý předpoklad pro to, že u žáků dojde ke skutečně účinnému a trvalému odstranění miskoncepce.

Dalším důležitým aspektem této vyučovací metody je práce s chybou. Žák se při tomto přístupu tolik nebojí chybovat, neboť se do jisté míry může se svým názorem „skrýt“ za některého z mluvčích, takže to „není jeho chyba“, ale názor někoho jiného, s nímž se v jeho názoru ztotožňuje. Podstatné je i to, že žáci dostanou příležitost, aby zažili určitý pocit nejistoty, neboť neslyší jen to, co je správně, ale zjistí, co si o dané věci myslí někdo jiný (např. jeho spolužáci). Děti se tak učí nevěřit slepě pouze tomu, co říká a co si myslí učitel, což umožňuje přirozeně rozvíjet jejich kritické myšlení. Úlohy a následná diskuse mohou být také vhodným východiskem pro další zkoumání a bádání žáků [10].

Úlohy zadané ve formě diskuze lze použít ve všech fázích primárního i sekundárního vzdělávání [11]. Jsou také dobře využitelné pro přípravu budoucích učitelů v rámci pregraduálního vzdělávání i v rámci dalšího vzdělávání učitelů. Úlohy lze zařadit ve všech částech vyučovací hodiny; mohou sloužit k úvodní motivaci, výkladu i v rámci opakování. Při práci s úlohami je možné také dobře využít hlasovacích zařízení, přičemž je možné hlasovat i o každé odpovědi zvlášť [8].

Co se týče nejvhodnějšího postupu práce s úlohami ve výuce, autoři této vyučovací metody doporučují [3], aby se nejprve každý žák s úlohou seznámil, přičemž text úlohy je zpravidla nejprve přečten nahlas před celou třídou. Poté si žáci individuálně zaznamenají svoji odpověď, případně mohou hlasovat pomocí hlasovacích karet nebo hlasovacího zařízení, aby učitel získal první bezprostřední zpětnou vazbu. Pokud se ve volbě odpovědi žáci rozcházejí, je vhodné následně zařadit diskusi ve skupinách, kdy se žáci mezi sebou poradí, jakou společnou odpověď by zvolili. Klíčové při tom je, aby si každý člen skupiny uvědomil, co ho vedlo k případné změně názoru na předložený problém. Pro zvýšení efektivity celého procesu je možné použít též pracovní listy [12]. Po práci ve skupinách následuje celotřídní diskuse, při níž každá skupina uvede, na jakém názoru se její členové shodli a proč jsou jiné alternativy méně přijatelné nebo zcela nepřijatelné. Uvedený postup může být různými způsoby podle potřeby modifikován, žáci

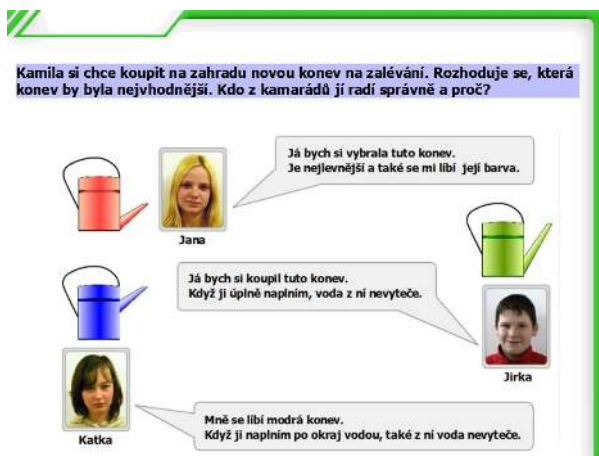
mohou např. do bublin psát vlastní vyjádření k předloženému problému. Schopní žáci, kteří s tímto typem úloh pracují delší dobu, mohou vymýšlet i celé vlastní úlohy k danému tématu. Alternativní odpovědi v tomto případě nebudou zřejmě zahrnovat nejčastější chybné představy, ale budou záviset spíše na nápaditosti a formulační dovednosti jednotlivých žáků. Takovou úlohu je možné zadat žákům např. jako domácí úkol (obr. 7), aby měli na její tvorbu dostatek času. Zajímavá je i možnost využití dramatizace, kdy žáci hrají role, v nichž zastávají stanoviska (buď svá, nebo jednotlivých mluvčích na obrázku) a obhajují, proč je jejich názor správný apod.



Obr. 7 Ukázka zpracování úlohy studentkou sekundy G Českolipská v Praze 7, kterou vytvořila na jaře 2015

Formu úloh zadaných pomocí diskuze lze využít ve výuce i jinými způsoby. Žáci mohou hodnotit správnost argumentace jednotlivých mluvčích, kteří vyjadřují své názory na předložený problém (obr. 8), tj. jednotlivá

vyjádření nemusejí zahrnovat pouze typické miskoncepce, nebo mohou doplňovat jednotlivá tvrzení (obr. 9), čímž se učí správně a přesně formulovat argumenty. Obě tyto úlohy [13] jsou určeny pro žáky 6. ročníku, u kterých lze pomocí těchto úloh nacvičovat a rozvíjet schopnost správného argumentování a přesného vyjadřování.



Obr. 8



Obr. 9

Z toho, co bylo uvedeno, je zřejmé, že konstruktivistický přístup je časově náročnější, než když učitel žákům prostě sdělí „jak to je“. Cílem tohoto přístupu je, aby žáci pochopili, že pokud chtějí něčemu dobře porozumět, musejí to pro sebe „objevit sami“. V běžné výuce nelze asi očekávat, že by bylo možné, aby si každý fyzikální poznatek žáci „objevovali“ pro sebe sami. Jednak to není časově reálné, jednak jsou některé pojmy či poznatky, u kterých to z mnoha důvodů možné není. Nicméně alespoň u vybraných fyzikálních poznatků by žáci měli mít možnost touto cestou jít, aby zjistili a také zažili, že chtějí-li se něco dozvědět a co nejlépe tomu porozumět, musí pro to vynaložit dostatečné úsilí.

Literatura

- [1] *Straková, J.*: Jak dál v kurikulární reformě. Pedagogická orientace, 2013, roč. 23, č. 5, s. 734–743.
- [2] *Průcha, J., Walterová, E., Mareš, E.*: Pedagogický slovník. Portál, Praha, 2009.
- [3] *Naylor, S., Keogh, B.*: Constructivism in Classroom: Theory into Practise. J. Sci. Teacher Edu. **10**, 2 (1999), 93–106.
- [4] *Košťálová, H., Straková, J.*: Hodnocení – důvěra, dialog, růst. SKAV, o. s., 2008. Dostupné na: http://www.inkluzivniskola.cz/sites/default/files/uploaded/skav_hodnoceni_web.pdf.
- [5] *Driver, R., Squires, A., Rushfors, P., Wood-Robinson, V.*: Making Sense of Secondary Science. Routledge Falmer, New York, 2003.
- [6] *Mandíková, D., Trna, J.*: Žákovské prekoncepce ve výuce fyziky. Paido, Brno, 2011.
- [7] *Naylor, S., Keogh, B.*: Concept cartoons, teaching and learning in science: evaluation. Int. J. Sci. Edu. **21**, 4 (1999), 431–446.
- [8] *Naylor, S., Keogh, B.*: Concept Cartoons in Science Education. Milgate House Publishers, Sandbach, 2010.
- [9] *Chin, CH., Teou, L.-Y.*: Using CC in Formative Assessment: Scaffolding students' argumentation. Int. J. Sci. Edu. **31**, 10 (2009), 1307–1332.
- [10] *Berg, E. van den, Kruit, P., Wu, F.*: Getting children to design experiment through concept cartoons. In: Bridging the gap between education research and practice. Leicester: EU Fibonacci conference on Inquiry Based Science & Mathematics Education, 2012. Dostupné na: <http://www.fibonacci-project.eu/resources/events/leicester-conference-2012.html>.
- [11] *Stephenson, P., Warwick, P.*: Using concept cartoons to support progression in students' understanding of light. Physics Education **37**, 2 (2002), 135–141.
- [12] *Kabapinar, F.*: Effectiveness of Teaching via Concept Cartoons from the Point of View of Constructivist Approach. Educational Sciences: Theory & Practice **5**, 1 (2005), 135–146.
- [13] *Hejnová, E. a kol.*: Vlastnosti látek a těles. Praha, Prometheus, 2011.

Úvod do nanotechnologií

LUCIE KOLÁŘOVÁ – ZUZANA TKÁČOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Ústav jadrového a fyzikálneho inžinierstva FEI STU, Bratislava, SLOVENSKO

Slyším a zapomínám.

Vidím a pamatuji si.

Dělám a chápu.

Čínské přísloví

Nanotechnologie jsou všude kolem nás. Spoustu zajímavých příkladů praktického uplatnění nanotechnologií najdeme v přírodě i v lidské historii. Široké spektrum elektronických, farmaceutických, kosmetických i textilních výrobků je vytvořeno nanotechnologiemi nebo obsahují nanomateriály. Nanotechnologie jsou dnes již součástí našeho každodenního života, i když o tom mnohdy ani nevíme, nebo si to neuvědomujeme. Tento vědní obor je opravdu na výsluní, což dokládá i ochota mnohých států na světě investovat obrovské množství peněz do nanotechnologického výzkumu. Díky tomuto rychlému rozvoji vzrůstá i potřeba toho, aby veřejnost pochopila, jaké možné výhody nebo rizika jim mohou nanotechnologie přinést. Některé produkty vytvořené nanotechnologiemi nám mohou usnadnit život, bohužel některé nanomateriály mohou mít negativní dopad na naše zdraví a životní prostředí.

Důležitou roli v tomto procesu hraje i vzdělávání a informovanost učitelů a žáků základních a středních škol. Učitelé by měli mít znalosti o základních konceptech (klíčových pojmech) nanovědy a nanotechnologií, aby je byli schopni začlenit do předmětů, které vyučují. Nanotechnologie by neměly být chápány jako zcela nový vědní obor, ale jako oblast integrující poznatky z různých oborů, jako jsou fyzika, chemie, biologie a věda o materiálech. Učitelé by měli vnímat jejich interdisciplinární povahu a propojení jednotlivých základních konceptů napříč všemi přírodovědnými předměty. Poznatky o nanotechnologiích by neměly být součástí běžného kurikula jen jako doplněk zajímavých aplikací nových technologií.

Před deseti lety začaly některé státy USA vytvářet výukové materiály a začleňovat nové poznatky do výuky na základních a středních školách (viz [1]). S menším zpožděním započaly tyto snahy i v Evropské unii for-

mou různých projektů. Jako příklad můžeme uvést projekt *NANOYOU* [2], jehož cílem bylo informovat mladé lidi ve státech EU o nanotechnologiích a jejich aplikacích a podporovat jejich účast na dialogu o etických a sociálních aspektech nanotechnologií. Dalším zajímavým projektem je *Time for Nano* [3], který si klade za cíl seznámit širokou veřejnost a zvláště mládež s benefity a riziky nanotechnologií.

Na internetu najdeme celou řadu materiálů vhodných pro výuku v anglickém jazyce. Bohužel, i když se o to snažily i mnohé projekty na vysokých školách v České republice, výukových materiálů v českém jazyce, ze kterých by mohli učitelé čerpat, je jen velmi málo. Jako úvodní informaci pro učitele fyziky, ale i pro žáky středních škol lze doporučit publikaci [4].

Tento článek nabízí učitelům základní orientaci k problematice začleňování poznatků o nanotechnologiích do výuky.

Nanohistorie

Některý ze žáků se může oprávněně ptát, kdy vlastně nanotechnologie vznikly. Zajímavé je, že ač považujeme tento obor za nový, má velmi staré kořeny. Vědci dnes díky možnostem, které nanotechnologie nabízejí, zjistili, že už některé starodávne artefakty obsahují nanomateriály. Nejstarší „nanotechnologové“ tak byli právě starověcí a středověcí mistři a umělci z různých koutů světa, kteří ani netušili, že materiály, které připravují, vděčí za své unikátní vlastnosti právě přítomnosti nanokrystalů a nanočástic.

Zmínit můžeme nanokrystaly galenitu v pigmentu na barvení vlasů ve starověkém Egyptě, nanokrystaly zlata a stříbra obsažené ve skle Lykurgových pohárů z období Římské říše, které jim dodávají zelenou nebo červenou barvu v závislosti na osvětlení, nebo nanotrubičky a nanodráty v damascénské oceli používané na Středním východě na výrobu pevných a ostrých mečů. Také barevné skleněné výplně oken – vitráže, které se vyráběly ve středověku a jsou vidět v mnoha kostelích, jsou vytvořeny ze skla s příměsí kovových nanočástic, kterým vděčí za své rozmanité barvy.

V polovině 19. století se staly předmětem bádání koloidní systémy. *Michael Faraday* byl prvním vědcem, který vedl systematické studie vlastností koloidu s kovovými částicemi, zejména se zlatem.

Důležitým vědeckým počinem v oblasti přístrojového vybavení bylo v roce 1931 sestavení prvního elektronového mikroskopu, které se připisuje *Ernstu Ruskovi* a *Maxi Knollovi*, ale nakonec jen Ruska za něj získal v roce 1986 Nobelovu cenu.

Za počátek moderní historie nanotechnologií se většinou uvádí rok 1959, kdy v Kalifornském technologickém institutu v USA (Caltech) zazněla přednáška *Richarda Feynmana* „There is plenty of room at the bottom, an invitation to enter a new field of physics“, která pojednávala o možnostech využití světa atomů a manipulace s atomy.

Pojem nanotechnologie poprvé použil až v roce 1974 *Norio Taniguchi*, který navrhl toto označení pro obrábění s tolerancí na jeden atom nebo molekulu. K jednomu z nejdůležitějších objevů nanotechnologií dochází v roce 1981, kdy *Gerd Binnig* a *Heinrich Rohrer* zkonstruovali skenovací tunelovací mikroskop (STM – *Scanning Tunneling Microscope*), schopný vidět jednotlivé atomy. Za tento počín dostali v roce 1986 Nobelovu cenu za fyziku. Ve stejném roce se týmu *Gerda Binniga*, *Calvina Quata* a *Christopha Gerbera* podařilo zkonstruovat mikroskop atomárních sil (AFM – *Atomic Force Microscope*), který mohl na rozdíl od STM zobrazit i nevodivé vzorky. O rok dříve se podařilo *Haroldu Krotoovi*, *Richardu Smalleymu* a *Robertu Curlovi* syntetizovat fullerén C_{60} , za což jim v roce 1996 byla udělena Nobelova cena za chemii.

Za zmínku stojí také rok 2003, kdy profesor *Oldřich Jirsák* z Katedry netkaných textilií Technické univerzity v Liberci vynalezl unikátní technologii *Nanospider*, která umožňuje průmyslovou výrobu netkaných textilií tvořených nanovláknky, tj. vlákny o průměru 20 nm až 500 nm.

Z velkého množství objevů na poli nanotechnologií bychom ještě závěrem připomněli alespoň rok 2010, kdy *Andre Geim* a *Konstantin Novoselov* získali Nobelovu cenu za fyziku za průlomové experimenty s uhlíkovým materiálem grafenem.

Základní koncepty nanotechnologií

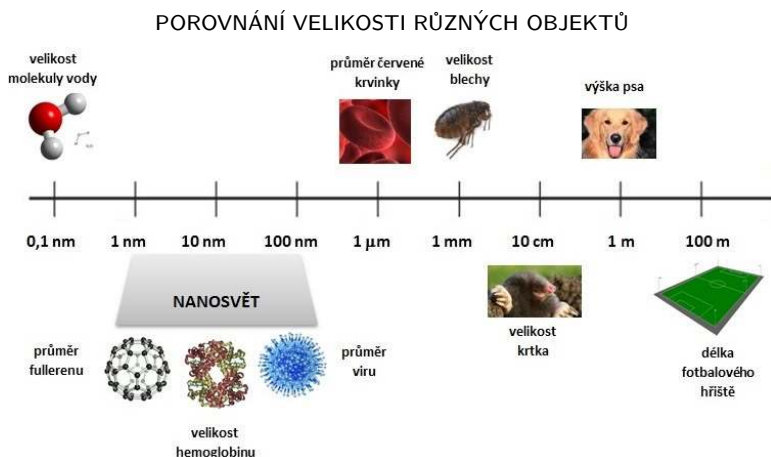
Při studiu nanotechnologií narazíme na základní koncepty, mezi něž patří *velikost a změna velikosti a poměr povrchové plochy k objemu*. Pochoopení těchto konceptů je předpokladem, abychom se mohli věnovat dalším, již pokročilým konceptům nanotechnologií.

Velikost a změna velikosti

Může se zdát, že tento koncept je vhodný spíše do výuky matematiky, ukazuje se však, že jeho pochopení je důležité pro všechny přírodní vědy, nejen pro nanotechnologie. Pomáhá také žákům uvědomit si, jak užitečná je matematika a její propojení s fyzikou, chemií, astronomií, geologií, geografii a historií.

Nano pochází z řeckého slova *νᾶνος* [nános], což znamená trpaslík. Předpona *nano* představuje miliardtinu. V případě délky je to jedna miliardtina metru, tj. jeden nanometr. Nanotechnologie se tedy zabývá objekty a jevy v rozsahu přibližně 1 nm až 100 nm (*nanoškála*). Jako nanomateriál označujeme materiál, jehož alespoň jeden rozměr dosahuje velikosti v uvedeném rozmezí, tzn. přibližně 1 nm až 100 nm.

Každý objekt má velikost, kterou definujeme pomocí tří rozměrů tj. šířky, hloubky a výšky. Určit velikost objektu můžeme jeho porovnáváním se srovnávacím objektem (*etalonem*).



Obr. 1 Velikosti různých objektů

Velký rozsah velikostí je užitečné si rozdělit do škál (stupnic) nebo „světů“ (makro, mikro, nano, ...) (obr. 1). Každou škálu nebo „svět“ můžeme charakterizovat typickými objekty, nástroji pro zpřístupnění objektů a modelem popisujícím chování látky v dané škále. Hranice mezi „světy“ nejsou ostře definovány, ale jsou rozmazané. Škála je důležitá pro vysvětlení různých jevů. Na základě zkušeností z makrosvěta, ve kterém funguje klasická fyzika, se snažíme předpovídat chování materiálu. Jenže když přecházíme z makrosvěta přes nanosvět do světa atomů, schopnost klasické fyziky předpovídat chování látky začne selhávat. V nanosvětě a světě atomů platí totiž jiná pravidla. K vysvětlení potřebujeme kvantovou mechaniku. Je důležité si také uvědomit souvislost sil se škálou. Gravitační síly, které převládají v makrosvětě, se v nanosvětě stávají zanedbatelně malé a dominantními se stávají síly elektromagnetické.

Vlastnosti charakterizují povahu materiálu, jak se chová, jak reaguje a interaguje s okolím, a pro jaké aplikace může být využit. Vlastnosti materiálu v nanoškále jsou často nečekané a odlišné od těch dobře známých u objemového materiálu. Mnoho let je oxid titaničitý přidáván do opalovacích krémů, avšak bílá vrstva, kterou krém zanechával, nebyla pro zákazníky žádoucí. Když se částice oxidu titaničitého zmenší na velikost 10 nm až 100 nm, mají jiné optické vlastnosti. Krém obsahující nanočástice se jeví průhledný, ale stále chrání před UV zářením. Určité nanomateriály vykazují třeba lepší mechanické vlastnosti než běžné konstrukční materiály, např. uhlíkové nanotrubičky patří mezi nejpevnější materiály.

I malá změna velikosti objektu může způsobit relativně velké změny jeho povrchu a ještě větší změny jeho objemu. Když zdvojnásobíme délku hrany krychle, její povrch se zvětší čtyřikrát a její objem dokonce osmkrát. Vlastnosti látky závisející na objemu se budou měnit rychleji než vlastnosti, které závisejí na povrchu. Pro zajímavost, kdyby gazela s dlouhýma a štíhlýma nohama vyrostla do velikosti slona, pod váhou těla by se zlomily její nohy. Zatímco hmotnost gazely je úměrná jejímu objemu, pevnost gazelích nohou roste pouze s plochou průřezu jejich kostí.

Poměr povrchové plochy k objemu

Když se velikost materiálu blíží velikosti nanočástic, dochází k obrovskému nárůstu specifické povrchové plochy (m^2/g) a to má souvislost s vlastnostmi jako jsou teplota tání, rychlost reakce, vztlínání, adheze. Proto jsou v nanosvětě některé vlastnosti materiálů výraznější. Když např. krychli o hraně 1 m, objemu 1 m^3 a povrchu 6 m^2 budeme dělit na menší a menší krychličky o hraně 1 nm a objemu 1 nm^3 , bude celkový povrch všech krychliček z původní krychle $6\,000 \text{ km}^2$. To je plocha o něco větší, než je Moravskoslezský kraj, který má rozlohu $5\,500 \text{ km}^2$.

Atomy na povrchu nanomateriálu se účastní menšího počtu vazeb než atomy uvnitř a mají tak ve srovnání s nimi přebytek energie. Jelikož mají povrchové atomy větší energii, jsou více chemicky reaktivní. Dělení materiálu na menší části vede k větší povrchové ploše a na povrch se tedy dostane více atomů ve vyšším energetickém stavu.

Velikost povrchové plochy závisí také na tvaru materiálu – krychle o stejném objemu jako koule má větší povrchovou plochu.

Náměty na nanoaktivity do výuky fyziky

Nanotechnologie můžeme do výuky zařadit různými způsoby. Uvedeme několik příkladů.

Nanohistorikové aneb pátrání v písemných pramenech po historii nanotechnologií

„Detektivní“ aktivita s možností využití internetu je vhodná pro samostudium žáků a jejich přípravu na hodinu věnovanou nanotechnologiím, nebo zadání domácího úkolu po úvodní hodině nanotechnologií k prohloubení základních poznatků.

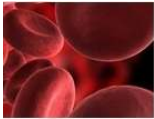
Žákům zadáme různé pojmy související s historií nanotechnologií, ke kterým si mají najít na internetu nebo v doporučené literatuře další informace, které zpracují ve formě malého plakátu. V další hodině žáci sestaví časovou osu nanotechnologií, kterou lze využít při další výuce.

Vhodnými náměty pro poznání historie a vývoje nanotechnologií mohou být např.: egyptská modrá – pigment používaný Egypťany před tisíci lety, Lykurgovy poháry – poháry ze 4. stol. n. l. měnící barvu podle osvětlení, damascénská ocel – materiál se zvláštní vnitřní strukturou používaný k výrobě sečných zbraní, vitráže v kostelích, *Ernst Ruska* – tvůrce prvního elektronového mikroskopu, „Tam dole je spousta místa“ – výrok *R. Feynmana* z roku 1959 o možnostech využití světa atomů, Mooreův zákon – předpoklad exponenciálního růstu počtu tranzistorů v integrovaných obvodech, *Gerd Binnig* – vynálezce vzorkovacího tunelového mikroskopu, objev fullerenu C_{60} – zvláštní struktury molekuly tvořené atomy uhlíku, objev AFM – mikroskopu atomárních sil, *Sumio Iijima* – vynálezce uhlíkových nanotrubiček, Nanospider – technologie výroby netkaných textilií z nanovláken, Nobelova cena za experimenty s grafenem, atd.

Pexeso velikostí

Představa nanometru je pro mnohé žáky obtížná. Pro seznámení s malými velikostmi je vhodná hra, kterou můžeme nazvat Pexeso velikostí. Vybereme si několik velikostí např. od 1 metru až k 1 angströmu¹ a k nim přiřadíme vhodné objekty. Vytvoříme si sadu kartiček s velikostmi a sadu s objekty (viz [5]). Žáci pak hledají k dané velikosti správný objekt. S většími objekty nemívají problém. Ten nastává u menších objektů, jako je např. červená krvinka, virus, molekula vody atd., které už pouhým okem nevidíme a tedy běžně se s nimi nesetkáváme. Ke společné frontální kontrole správnosti řešení můžeme použít některou z mnohých na internetu dostupných interaktivních pomůcek, tzv. *nanozoomů* (např. *Scale of Universe* [6]) nebo video *Powers of Ten* dostupné na YouTube.

¹ Angström, značka Å ($1\text{ Å} = 10^{-10}\text{ m} = 0,1\text{ nm}$) je jednotka délky, která nepatří do soustavy SI. Používá se výjimečně v některých oborech fyziky mikrosvěta, popř. k vyjadřování hodnot vlnových délek ve spektrometrii.

10^{-6} m (1 mikrometr)	červená krvinka 
------------------------------	--

Obr. 2 Ukázka kartičky pexesa

Miliarda a jedna miliardtina

K získání představy o přibližné velikosti jedné miliardtiny použijeme jednoduchou matematickou představu. Když si chceme vizualizovat měřítko 1 : 1 000 000 000, vezmeme si jeden list papíru a „miliardu listů“ papíru. 10 listů papíru má přibližně tloušťku 1 mm, 1 000 listů bude mít 10 cm, 1 000 000 listů bude mít 100 m a 1 000 000 000 listů bude mít 100 km, což je přibližně cestovní vzdálenost mezi Olomoucí a Ostravou. Jeden list z jedné miliardy listů nám představuje jednu miliardtinu.

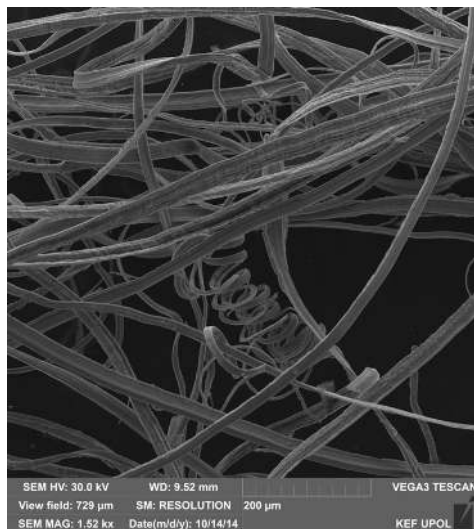
Když se věci zmenšují

Velmi efektními a na realizaci v podmínkách běžné třídy jednoduchými demonstracemi můžeme ukázat vliv změny velikosti objektů na jejich vlastnosti. K prvnímu experimentu použijeme velmi jemnou ocelovou vlnu typu 0000 (s průměrem ocelových vláken $50\ \mu\text{m}$) (obr. 3), kterou zapálíme. Na rozdíl od oceli, jak ji známe v našem makrosvětě, se tato jemná ocelová vlna lehce zapálí. Používá se dokonce jako zapalovač. Hoří, i když je mokrá, a na zapálení stačí jedna jiskra.

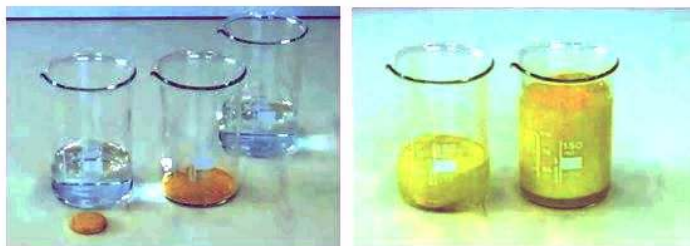
Ocelová vlna hoří velmi bouřlivě a jiskry z ní vylétávají do okolí. Proto je dobré použít k experimentu jen malé množství ocelové vlny, kterou uchopíme do pinzety. Na stůl položíme nehořlavou podložku a experiment provádíme nad miskou s vodou, ve které na konci vlnu bezpečně uhasíme. Ke zvýšené reaktivitě a hořlavosti ocelové vlny dochází v důsledku zmenšování velikosti jednotlivých vláken, přičemž se zvyšuje jejich povrch. Větší povrchová plocha znamená více atomů materiálu nacházejících se na povrchu a právě tyto povrchové atomy zodpovídají za reaktivitu materiálu.

Pokud nemáme ocelovou vlnu, můžeme tento jev ukázat na dvou šumivých tabletách, které rozpustíme v kádinkách s vodou (obr. 4). Do jedné kádinky vhodíme celou tabletu a do té druhé tabletu rozdrčenou na jemný prášek (lepší je rozdrčenou tabletu zalít stejným množstvím vody, do které

vhazujeme celou tabletu). V obou případech je objem tablety stejný, rozdíl je jen ve velikosti jednotlivých částic, které budou ve vodě reagovat.



Obr. 3 Snímek ocelové vlny z elektronového mikroskopu



Obr. 4 Reakce šumivých tablet

Zvětšování povrchové plochy si mohou žáci prakticky vyzkoušet na krájení kostky syru s hranou 1 cm. Nejprve vypočítají povrch této kostky, což je 6 cm^2 . Postupně krájí původní kostku na 8 stejných kostek s poloviční délkou hrany a opět spočítají celkový povrch všech kostiček. Postup můžeme ještě jednou zopakovat. Objem zůstává stejný (složením kostiček získáme původní kostku), při výpočtu však žáci zjistí postupně výrazný nárůst povrchové plochy.

Všechny tyto aktivity jsou jednoduché na přípravu a u žáků oblíbené. Mnozí z nich jsou výsledky překvapení, protože nemají představu, jak malé jsou pro nás objekty neviditelné pouhým okem, nebo jak velká je jedna miliarda. Také rozdíl v reakci celé a rozdrobené šumivé tablety vyvolává údiv na jejich tvářích, protože nepředpokládají, že se reakce bude lišit. Aktivity byly vyzkoušeny českými i slovenskými žáky v běžné výuce na střední škole nebo v rámci výukového programu „Co se děje v nanosvětě“ v Interaktivním muzeu vědy Pevnost poznání v Olomouci.

Koncept velikosti můžeme zařadit do výuky hned v úvodních hodinách fyziky do učiva o fyzikálních veličinách a jednotkách. Pro žáka bude užitečné, když si pod jednotlivými čísly bude moci představit i objekty. Druhý koncept, poměr povrchové plochy k objemu, je možné připojit k prvnímu a propojit tyto dva základní koncepty. Žáci tak budou připraveni pro výuku dalších zajímavých konceptů nanotechnologií a jejich možných aplikací. Druhou možností je vložit tento koncept do úvodu molekulové fyziky.

Začleněním nanotechnologií do výuky fyziky můžeme motivovat studenty k většímu zájmu o přírodovědné a technické obory a dáme jim možnost posouzení informací, které se na ně hrnou z médií, a rozlišit tak ty seriózní od těch klamných.

Poděkování. Děkujeme Mgr. Tomáši Ingrovi za pořízení snímku ocelové vlny.

Literatura

- [1] <http://www.nano.gov/education-training/teacher-resources>.
- [2] <http://www.nanoyou.eu>.
- [3] <http://www.timefornano.eu>.
- [4] Kubínek, R.: Nanotechnologie. In: Lepil, O. a kol.: Fyzika aktuálně, příručka nejen pro učitele. Prometheus, Praha, 2009, s. 129–153.
- [5] How Big Is It? Center for probing nanoscale, Stanford University, dostupné na: <http://teachers.stanford.edu/activities/HowBigIsIt/HowBigIsIt-ActivityGuide.pdf>.
- [6] The Scale of the Universe, dostupné na: <http://scaleofuniverse.com>.
- [7] Stevens, S. Y., Sutherland, L. M., Krajcik, J. S.: The big ideas of nanoscale science & engineering: a guidebook for secondary teachers. NSTApress 2009.
- [8] Tkáčová, Z., Lavický, T.: Základy nanovědy a nanotechnologií pre učiteľov. Metodicko-pedagogické centrum v Bratislave, Bratislava, 2014.
- [9] Kolářová, L.: Úvod do nanovědy a nanotechnologií. 1. vyd., Vyd. Univerzity Palackého, Olomouc, 2014.
- [10] Blonder, R., Sakhnini, S.: Teaching two basic nanotechnology concepts in secondary school by using a variety of teaching methods. Chem. Educ. Res. Pract. **13** (2012), 500–516.

Jednoduchý seismograf pro školní použití

MICHAELA KŘÍŽOVÁ – JAN ŠLÉGR – KAMILA VÁŇOVÁ

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové, Hradec Králové

Přestože zemětřesení patří k největším přírodním ohrožením (nejen počty obětí a měrou škod, ale i velikostí zasaženého území), v učebnicích fyziky pro střední školy je jim věnováno jen velmi málo prostoru. Přitom při výuce vlnění lze zemětřesení použít jako motivační faktor i průřezové téma. Zemětřesné vlny se totiž šíří jednak jako vlnění podélné (P-vlny), jednak jako vlnění příčné (S-vlny), lze diskutovat lom, odraz a ohyb mechanického vlnění a v neposlední řadě záznam kmitavého pohybu pomocí seismografů. Protože na internetu lze najít velmi kvalitní informace (např. [1, 2]), které může po nutné didaktické transformaci pedagog využít k podpoře výuky vlnění, bylo by vhodné doplnit výuku ještě experimentem. K experimentům může být využit dále popsán demonstrační seismograf. V zahraničí jsou pro školní použití dostupné zjednodušené verze profesionálních seismografů, např. [3] nebo [4], které jsou však s cenami v řádu desítek tisíců mimo možnosti většiny škol.

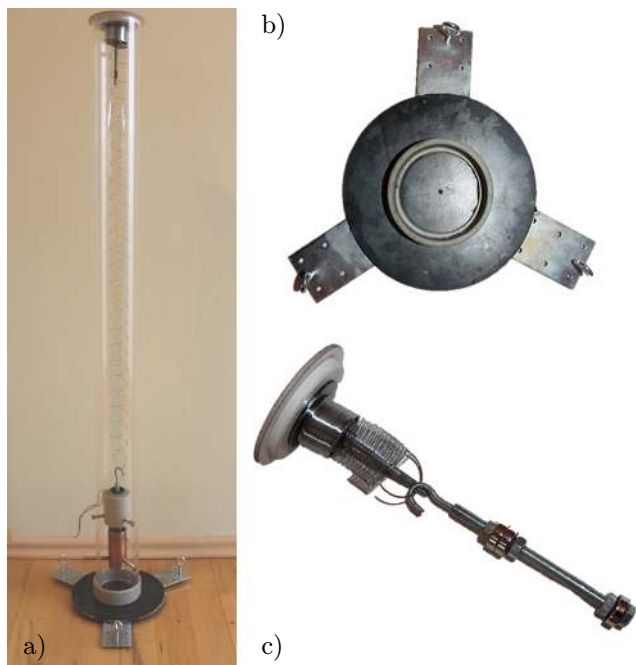
Mechanická konstrukce

Celkový pohled na seismograf je na obr. 1a). Na základně (obr. 1b) je umístěna trubka z plexiskla, ve které je citlivý pružinový oscilátor. Popsaný seismograf vychází z osvědčené konstrukce [5], která je v zahraniční literatuře označována jako „Slinky seismometer“, podle dlouhé pružiny, která se od čtyřicátých let 20. století prodává jako dětská hračka (bližší informace je možné najít v [6]). Tato pružina je dostupná i v České republice a jedná se o výbornou didaktickou pomůcku – s lehkým závažím na konci ji lze využít k demonstraci platnosti vztahu

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (1)$$

neboť tuhost pružiny lze snadno změřit. V případě této pružiny lze vyjít z definice tuhosti jako síly nutné k protažení pružiny o jeden metr délky.

Uvedené měření je hezkou aplikací lineární regrese (hledá se konstanta úměrnosti k ve vzorci $F = ky$), navíc při zpracování v tabulkovém kalkulaátoru není tato regrese pro žáky náročná. V popisovaném případě vede k hodnotě $k = 1,57 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$.



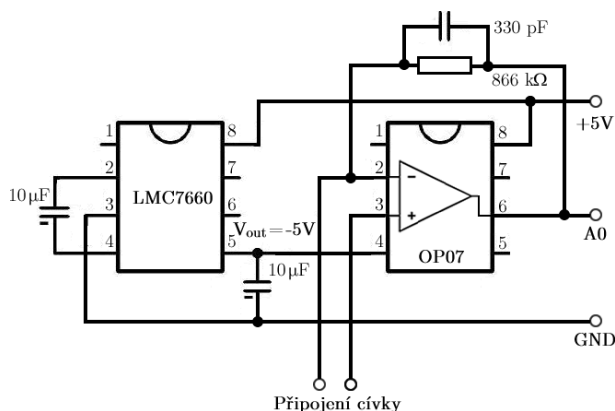
Obr. 1 Mechanická konstrukce seismografu: a) celkový pohled, b) detail podstavý s rameny pro ustavení, c) detail pružného závěsu s magnety

V případě popsaného seismografu je použita polovina délky menší verze této pružiny, na které jsou zavěšeny dva neodymové magnety, které procházejí cívkou a následně jeden magnet, který prochází hliníkovou nebo měděnou trubičkou zajišťující tlumení (obr. 1c).

Vlastní frekvence netlumených kmitů může být vypočtena ze vztahu (1). Hmotnost zavěšeného tělesa byla změřena s přesností na desetinu gramu jako $m = 90,0 \text{ g}$ a vede k teoretické hodnotě periody $T = 1,49 \text{ s}$. Měřením času deseti kmitů byla experimentálně určena hodnota $T_{\text{exp}} = 1,53 \text{ s}$, což je pěkná shoda (vzorec (1) platí poměrně přesně, protože je hmotnost pružiny malá v porovnání s hmotností zavěšeného závaží).

Zesilovač napětí

Napětí indukované na cívce je i pro výrazné otřesy (způsobené dupáním kolem seismografu) v řádu milivoltů. Pokud je k dispozici dostatečně citlivý osciloskop (ideálně digitální, který umožňuje nastavit rychlost časové základny v jednotkách až desítkách sekund), lze k demonstračním účelům použít samotný seismograf. Pro záznam slabších otřesů je však nutný zesilovač napětí. Uplatní se jednak při divácky vděčných demonstracích, kdy učitel lehkým ťukáním na zeď vyvolá odezvu na měřicím přístroji na druhé straně místnosti, ale zejména při dlouhodobějším zaznamenávání a hledání zemětřesení.



Obr. 2 Schéma zesilovače napětí

Zapojení zesilovače je na obr. 2. Výstup cívky je přímo připojen na vstup nízkošumového operačního zesilovače OP07. Tento operační zesilovač potřebuje zdroj symetrického napájecího napětí (+5 V a -5 V proti společné zemi), proto je ještě použit integrovaný obvod LMC7660, který vyžaduje pouze další dvě součástky. Zapojení bylo nejprve realizováno v nepájivém kontaktním poli (doporučujeme nejprve oživit zdroj záporného napětí a pak zesilovač), poté na kousku univerzální desky plošných spojů určené pro kartu Arduino (viz dále).

Rezistor a kondenzátor ve zpětné vazbě tvoří filtr typu dolní propust pro zlepšení odolnosti zapojení vůči vnějším elektromagnetickým polím s frekvencemi v řádu desítek kilohertzů. Tato pole jsou v okolí spínaných zdrojů a cívka seismografu v jejich přítomnosti překvapivě ochotně indukuje nežádoucí napětí.

Počítačové rozhraní a obslužný program

Jako nejlevnější platforma pro přenos dat do počítače byla zvolena experimentální karta Arduino, která obsahuje celkem pět desetibitových analogových vstupů, 16 digitálních vstupů/výstupů a k počítači se připojuje přes rozhraní USB, kde emuluje sériový port, což velmi usnadňuje komunikaci na straně počítače. Bližší informace o platformě Arduino lze nalézt v [7], didaktické nasazení popisuje příspěvek [8]. Pro školní použití je kromě snadné práce s kartou nespornou výhodou cena, která je díky popularitě platformy v řádu několika málo stovek korun za jeden kus.

Pro zajímavost uvádíme program karty Arduino pro použití se seismografem (zdrojové kódy pro desku Arduino, stejně jako výše uvedené schéma a fotografie z realizace jsou na webu autorů [9]):

```
void setup()
{
    Serial.begin(9600);
}
void loop()
{
    int sensorValue = analogRead(A0);
    float voltage = trunc(sensorValue * (50000.0 / 1023.0));
    Serial.println(voltage,0);
    delay(200);
}
```

Po inicializaci komunikace přes USB port emulující sériové rozhraní program každých 200 milisekund přečte hodnotu na analogovém vstupu A0 a odešle ji do počítače. Na straně počítače pak běží program, který hodnoty zaznamenává do souboru a vykresluje (program v prostředí Borland Delphi 7 včetně zdrojových kódů lze stáhnout z webu [9]).

Popsaný seismograf může být vhodným doplňkem výuky kmitání a vlnění na střední škole, stejně jako technických aplikací fyziky, elektromagnetické indukce a vířivých proudů. Pro dlouhodobější experimenty je nutné najít pro seismograf vhodné místo, ideálně ve sklepě školy, dosti daleko od chodeb plných dupajících žáků. I tak jsou v datech patrné rozdíly mezi dnem a nocí či průjezdy těžkých automobilů po blízkých silnicích.

Pokud by některá ze škol v seismicky aktivní oblasti České republiky měla zájem o dlouhodobou zápůjčku seismografu, pomoc se stavbou či výše popsaný zesilovač, může kontaktovat autory na adrese jan.slegr@uhk.cz.

Poděkování. Tento příspěvek vznikl za podpory specifického výzkumu PŘF UHK 2119/2015.

Literatura

- [1] Zemětřesení. [online], [cit. 2015-12-09]. Dostupné z: <http://geotech.fce.vutbr.cz/studium/geologie/skripta/ZEMETR.htm>.
- [2] Zemětřesení – Přírodní katastrofy a environmentální hazardy – multimediální výuková příručka. [online] [cit. 2015-12-09]. Dostupné z: <http://www.sci.muni.cz/~herber/quake.htm>.
- [3] SEP Seismometer System. [online]. [cit. 2015-12-09]. Dostupné z: <http://bit.ly/lM3bw1Y>.
- [4] Seismographs in Schools. [online]. [cit. 2015-12-09]. Dostupné z: <https://www.iris.edu/hq/sis/>.
- [5] TC1 Vertical Seismometer Plans. [online]. [cit. 2015-12-09]. Dostupné z: <https://tclseismometer.wordpress.com/>.
- [6] Slinky. Wikipedia. [online]. [cit. 2015-12-09]. Dostupné z: <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Slinky/>.
- [7] Seznámení s Arduinem. [online]. [cit. 2015-1-21]. Dostupné z: <http://www.hwkitchen.com/news/arduino-uvod-1/>.
- [8] Kubínová, Š., Šlégr, J.: PhysDuino – Dostupný systém pro školní laborování založený na platformě Arduino. [online]. [cit. 2015-1-21]. Dostupné z: <http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/slegrjal/physduino/>.
- [9] Šlégr, J.: Jednoduchý seismograf pro školní použití. [online]. [cit. 2015-1-21]. Dostupné z <http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/slegrjal/seismo/>.

Tři netradiční oscilátory – konstruktivistický přístup k výuce fyziky

ČENĚK KODEJŠKA – GIORGIO DE NUNZIO

Gymnázium, Nový Bydžov – Università del Salento, Itálie

(Dokončení z minulého čísla)

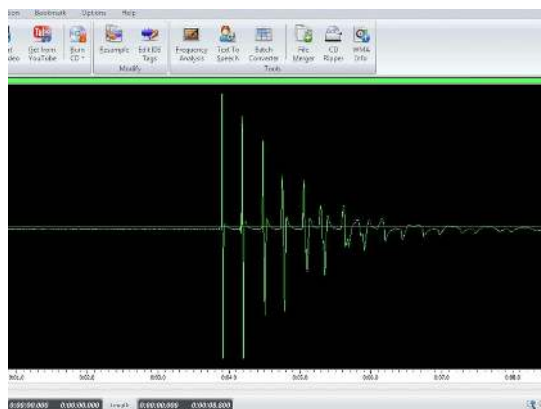
3. Určení logaritmického dekrementu útlumu kmitů vodního sloupce v U-trubici

Pro realizaci kmitů v U-trubici jsme použili U-trubici opatřenou kouty se zábrusem, které nám umožnily udržet výchylku vodního sloupce

v trubici. Oscilátor jsme pak aktivovali otočením kohoutu. Nejprve jsme v rovnovážné poloze kapaliny zaměřili laserový paprsek na meniskus v jednom rameni U-trubice. Pak jsme vytvořili v trubici fouknutím přetlak nebo nasátím podtlak, a v jednom rameni jsme uzavřeli kohout. Druhý musí zůstat trvale otevřený nebo musí být druhé rameno bez kohoutu. Voda tak zůstane v nerovnovázné poloze s výchylkou y . Po spuštění měření v programu FAE jsme otevřeli kohout a nechali proběhnout tlumené kmity vodního sloupce. Uspořádání experimentu je na obr. 6 a oscilogram kmitů můžete vidět na obr. 7.



Obr. 6 Kmity vodního sloupce v U-trubici s detailem rovnovážné polohy



Obr. 7 Oscilogram kmitů vodního sloupce v U-trubici

Vnitřní průměr trubice jsme určili posuvným měřidlem, kterým jsme změřili průměr spodního konce kónického zábrusu, jehož rozměr je totožný s vnitřním průměrem U-trubice. Kmity jsou dobře registrovatelné i bez obarvení vody a na obr. 7 je vidět i rychlý pokles amplitudy.

Pro vlastní odečet amplitudy je třeba v programu FAE změnit obvyklou vertikální stupnici z hodnoty *Sample Values* nebo *Decibel Values* na *Normalized values*. Nastavení provedeme na záložce nazvané *Options*, která obsahuje kartu pojmenovanou *Editor View*. Na ní se nachází dvě tlačítka: *Horizontal Scale* a *Vertical Scale*. Normalizovaná stupnice na vertikální škále má rozsah od 0 do 110 normalizovaných jednotek. Vzhledem k tomu, že při výpočtu koeficientu útlumu počítáme s poměrem dvou po sobě jdoucích amplitud, je jednotka stupnice nevýznamná. V dalším kroku jsme porovnali naměřenou hodnotu periody tlumených kmitů s výpočtem podle vztahu (14) nebo (15). Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 2.

Tabulka 2 Určení logaritmického dekrementu útlumu a periody tlumených kmitů

Č. měř.	A_n	A_{n+1}	δ	T_{exp} (s)	b (s^{-1})	T (s)
1	100	90	0,105	0,575	0,183	0,595
2	107	95	0,119	0,571	0,208	0,595
3	105	85	0,211	0,575	0,367	0,595
4	107	90	0,173	0,576	0,300	0,595
5	107	95	0,119	0,568	0,210	0,595
6	60	47	0,244	0,650	0,375	0,677
7	74	47	0,454	0,645	0,704	0,678
8	73	45	0,484	0,644	0,752	0,678
9	65	47	0,324	0,649	0,499	0,677
10	60	45	0,288	0,661	0,436	0,677

Objem kapaliny v trubici u měření 1 až 5 byl $V = 31$ ml, u měření 6 až 10 byla jeho hodnota $V = 40$ ml. Vnitřní průměr trubice měl velikost $d = 15 \cdot 10^{-3}$ m. Z těchto hodnot lze určit délku vodního sloupce jako $l = 4V/\pi d^2$, která pro prvních pět měření měla hodnotu $l = 0,176$ m, které odpovídá perioda netlumených kmitů $T_0 = 0,595$ s. Pro dalších pět měření vychází délka vodního sloupce $l = 0,227$ m a perioda $T_0 = 0,676$ s.

Odečet amplitud A_n a A_{n+1} jsme provedli u prvních pěti měření nejprve pro první dvě největší hodnoty a pro dalších pět měření jsme amplitudy odečítali na třetím a čtvrtém píku. Logaritmický dekrement útlumu δ jsme určili z rovnice (10), ze které jsme vypočítali i koeficient tlumení b ze vztahu $b = \delta/T_{\text{exp}}$. Hodnota periody T_{exp} byla určena experimentálně v programu FAE, hodnota periody T byla vypočítána ze vztahu (15).

Z výsledků naměřených hodnot je patrné, že experimentálně určená perioda T_{exp} je vždy menší než T_0 , což odporuje teoretickému závěru, který plyne z rovnice (14) nebo (15). Vysvětlení tohoto závěru se nám prozatím nepodařilo najít. Průměrná hodnota periody tlumených kmitů byla určena v případě prvních pěti měření jako $T = (0,595 \pm 0,002)$ s, v případě druhých pěti měření jsme dospěli k $T = (0,650 \pm 0,003)$ s. Z výše uvedeného vyplývá, že výpočet periody tlumených kmitů podle výše zmíněných vztahů potvrzuje hypotézu, že koeficient tlumení b má na velikost periody zanedbatelný vliv a platí $T \doteq T_0$. Ke stejnému závěru dospěli i Tesař a Bartoš, viz [3].

Dále můžeme konstatovat, že logaritmický dekrement útlumu δ vypočítaný z poměru A_3 a A_4 je v průměru 2,5krát větší než ten, který je určený z poměru A_1 a A_2 . Tento rozdíl může být sice způsoben rozdílným množstvím kapaliny v trubici u prvních pěti a posledních pěti pokusů, ale ověřili jsme si, že i v rámci daných pěti měření není tato veličina konstantní, jak předpokládá teorie, ale hodnota δ je u poměru třetího a čtvrtého píku přibližně dva krát větší než u poměru prvního a druhého píku.

Předpokládáme, že se zde při pohybu kapaliny v U-trubici projevují další jevy (např. tření mezi stěnou trubice a kapalinou, viskozita kapaliny), které ovlivňují jak tlumení, tak periodu reálných kmitů.

4. Určení poloměru a momentu setrvačnosti prstence z periody jeho kmitů

Pro poslední problémovou úlohu jsme zvolili určení poloměru R a momentu setrvačnosti prstence J_0 vzhledem k ose otáčení procházející jeho těžištěm. To se v ideálním případě nachází mimo vlastní těleso prstence přímo v jeho středu.

Největším problémem pro studenty bylo odvození pohybové rovnice kmitů prstence, protože fyzické kyvadlo není standardním obsahem tematických plánů, a teorii bylo potřeba studentům speciálně vysvětlit.

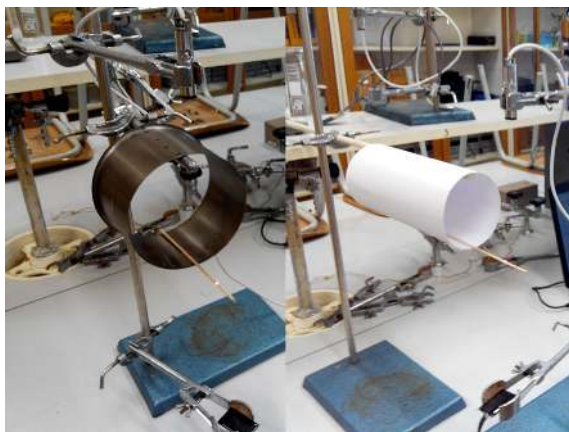
Pak se již mohli zabývat vlastní realizací experimentu a navrhnout materiál nebo předmět, ze kterého bude možné prstenec vyrobit. Z několika

různých variant jsme pak vybrali kovový nástavec, který se běžně používá na vstupu do komínového tělesa, a papírový prstenec vyrobený z tvrdé čtvrtky. I zde byl uplatněn konstruktivistický princip, že studenti museli najít takové řešení, které je levné a snadno realizovatelné.

Prstenec jsme opatřili špejlí, která při kmitání přerušovala paprsek optické brány. Délka špejle by měla být zejména v případě lehkého papírového prstence co nejkratší, aby její hmotnost nezkreslovala vlastní měření. V případě papírového prstence jsme na základě několika cvičných experimentů dospěli k závěru, že krátké prstence jsou díky své malé hmotnosti nevhodné, a špejle připevněná izolepou k vnitřní straně prstence značně zvyšuje chybu měření. Proto jsme finální laboratorní cvičení provedli s prstencem vyrobeným z celé čtvrtky formátu A4. I zde platí, co bylo řečeno v minulé kapitole. Před vlastním cvičením je třeba věnovat minimálně jedno laboratorní cvičení přípravě experimentu, výrobě prstenců a nácvičku správného rozkmitání prstence.

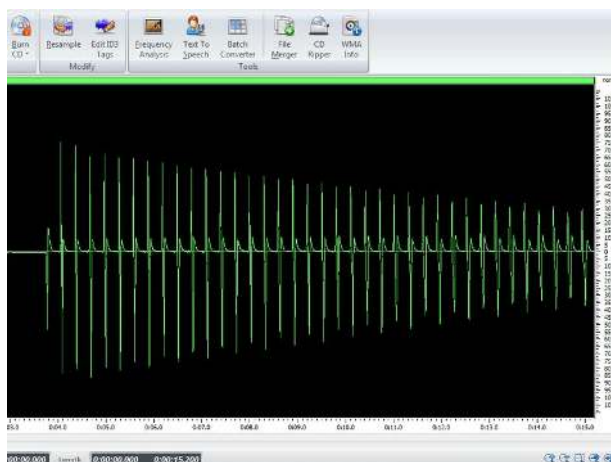
Naši poslední hypotézou bylo, že vlivem připevněné špejle (a u papírového prstence i vlivem jeho nízké hmotnosti) bude relativní chyba měření větší než 10 %, a že i tento experiment patří spíše do oblasti teoretického procvičení a pro experimentální ověření fyzikální veličiny, jako je např. moment setrvačnosti prstence, se nehodí.

Uspořádání experimentu můžeme vidět na obr. 8, kde je v levé polovině zobrazen kovový prstenec a v pravé je provedení s papírovou variantou. Průběh kmitů je vyobrazen na obr. 9.



Obr. 8 Experimentální uspořádání kmitů prstence

Prstenec byl zavěšen na 1 m dlouhých, kulatých tyčích o průměru 8 mm nebo 10 mm, které se používají k uchycení koberce na schodišti. V případě papírového provedení se také osvědčilo připevnit špejli na tu stranu prstence, kde byl izolepou slepen dohromady. Na protější straně prstence pak nic nebrání hladkému průběhu kmitavého pohybu.



Obr. 9 Oscilogram kmitů prstence zavěšeného na vodorovné tyči

Experimentálně zjištěné hodnoty pro oba prstence jsou uvedeny v tabulce 3. Kovový prstenec o poloměru $R_1 = (65 \pm 1)$ mm měl hmotnost $m_1 = (143,2 \pm 0,5)$ g, papírový prstenec o poloměru $R_2 = (45 \pm 2)$ mm vážil $m_2 = (12,1 \pm 0,5)$ g, přičemž hmotnost byla měřena digitálními váhami bez připevněné špejle. Hmotnost špejle jsme při výpočtech považovali vzhledem k hmotnosti prstenců za zanedbatelnou. Poloměry jsme určili z průměrů prstenců, které jsme změřili pomocí posuvného měřidla.

Periodu kmitů jsme zaznamenávali v programu FAE a následně jsme z rovnice (20) vypočítali poloměr prstence. Známe-li poloměr prstence a periodu kmitů, můžeme ze vztahu (19) vypočítat nejprve moment setrvačnosti J prstence vzhledem k ose otáčení, která neprochází těžištěm, a pak ze vztahu

$$J_0 = J - md^2 = J - mR^2$$

i moment setrvačnosti vzhledem k ose otáčení procházející těžištěm prstence. Tuto hodnotu pak můžeme porovnat s teoreticky vypočítanou hodnotou ze vztahu (18).

Tabulka 3 Určení momentu setrvačnosti prstenců

kovový prstenec			papírový prstenec		
$\frac{T}{s}$	$\frac{J}{10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$	$\frac{J_0}{10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$	$\frac{T}{s}$	$\frac{J}{10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$	$\frac{J_0}{10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$
0,689	99,8	49,9	0,612	52,5	26
0,690	100,4	50,2	0,609	51,5	26
0,690	100,4	50,2	0,611	52,2	26
0,687	98,7	49,3	0,610	51,8	26
0,691	101,0	50,5	0,610	51,8	26
0,689	99,8	49,9	0,612	52,5	26
0,686	98,1	49,1	0,605	50,2	25
0,685	97,5	48,8	0,607	50,8	25

Absolutní chybu jednotlivých hodnot momentu setrvačnosti J určíme z rovnice (23) a podobně pro určení chyby měření v případě J_0 vyjdeme ze vztahu (24):

$$\Delta J = J \left(\frac{2\Delta T}{T} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta R}{R} \right) \quad (23)$$

$$\Delta J_0 = J_0 \left(\frac{\Delta J}{J} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta R}{R} \right) \quad (24)$$

Průměrná hodnota momentu setrvačnosti vzhledem k ose otáčení neprocházející těžištěm stanovená ze všech měření má v případě kovového prstence velikost $J = (100 \pm 1) \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, analogicky stanovená průměrná hodnota momentu setrvačnosti vzhledem k ose otáčení procházející těžištěm byla určena jako $J_0 = (50 \pm 1) \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Hodnota J_0 vypočítaná z rovnice (18) má velikost $J_0 \doteq 61 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

I když relativní chyba měření δJ_0 činí pouze 1,2 %, z porovnání experimentálně naměřené hodnoty a teoreticky vypočítané hodnoty J_0 plyne, že experimentální hodnota je o cca 18 % menší než teoreticky vypočítaná.

Závěr

Zabývali jsme se třemi novými experimenty se zvukovou kartou, jejichž teoretické i experimentální provedení vychází z konstruktivistického pojetí teorie učení. U každého experimentu jsme na základě dosavadních zkušeností s obdobnými experimenty, viz [1, 2], stanovili hypotézu o velikosti relativní chyby měření a použitelnosti zajímavého myšlenkového experimentu pro reálné fyzikální měření v podmínkách školní laboratoře.

Výhodou všech experimentů byla opět cenová dostupnost použitých pomůcek a základního vybavení, jednoduchost provedení experimentů a možnost jejich realizace v rámci laboratorních cvičení. Novým přístupem tentokrát bylo to, že sami žáci museli na základě teoretické přípravy navrhnout postup provedení a cenově dostupné pomůcky k uskutečnění experimentu.

Experimenty byly nejprve studentům předloženy v teoretické rovině jako myšlenkový experiment. Žáci měli odvodit, na základě řešení lineární homogenní diferenciální rovnice, výsledný vztah pro periodu netlumených kmitů. Z takto získaného vztahu byla pak určena veličina, jejíž velikost měli na základě měření periody kmitů daného oscilátoru vypočítat a na závěr určit i chybu měření.

V prvním experimentu jsme zkoumali kmity zkumavky v kapalině, ze kterých jsme určovali hustotu kapaliny. Zde se jako nejtěžší pro žáky ukázalo být vyvážení zkumavky, aby kmitala svisle, a při pohybu se neky-mácela ze strany na stranu, což se při teoretickém výkladu vůbec nepředpokládalo. Průměrná hodnota hustoty vody určené tímto způsobem byla $\rho = (1\,020 \pm 30) \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Relativní chyba měření činí $\delta\rho = 3 \%$, což je v dobrém souladu s měřením realizovaným ve školní laboratoři.

Druhý experiment se zabýval kmity kapalinového sloupce v U-trubici. Žáci pomocí naměřené periody a velikosti amplitud určovali logaritmický dekrement útlumu a koeficient tlumení, a vyhodnocovali vliv tohoto parametru na velikost periody. V souladu s obecně známými fakty (viz např. [3]), jsme dospěli k závěru, že experimentálně naměřená hodnota periody tlumených kmitů a teoreticky vypočítaná hodnota netlumených kmitů se neliší o více než o 4 % (což je odchylka v rámci chyby měření), takže platí $T \doteq T_0$.

Ve třetím experimentu jsme řešili kmity tenkého prstence zavěšeného na vodorovné tyči. Pro kovový prstenec jsme získali díky jeho tvaru odchylku od teoretické hodnoty momentu setrvačnosti vůči ose otáčení procházející těžištěm tělesa J_0 cca 10 %, v případě papírového prstence, vytvořeného

ze čtvrtky papíru, se experimentálně zjištěná hodnota J_0 se 4 % relativní chybou měření shodovala s teoreticky vypočítanou hodnotou.

Závěrem můžeme konstatovat, že při velké pečlivosti provádění experimentů a zejména na základě důkladné předchozí přípravy a předběžného testování, lze úspěšně realizovat fyzikální měření s relativní chybou do 4 %. Nepotvrdila se tedy naše původní hypotéza, že myšlenkové experimenty slouží pouze k teoretickému procvičení nabytých znalostí žáků a pro reálné měření nejsou vhodné. Ověřili jsme, že pomocí takovýchto experimentů, jsou-li provedeny výše uvedeným způsobem, lze dosáhnout ve školní laboratoři uspokojivých výsledků.

Výše popsané experimenty mohou být použity jako dobrý námět pro teoreticko-experimentální činnost v rámci semináře z fyziky na gymnáziu nebo jako laboratorní praktikum v prvním nebo druhém ročníku vysoké školy.

Experimentální ověřování probíhalo v součinnosti s Katedrou matematiky a fyziky na Univerzitě v Salentu, která se připojila do malého mezinárodního průzkumu, zaměřeného na dlouhodobé zkoumání vlivu realizace experimentů s využitím počítače na výběr přírodovědně zaměřených oborů při rozhodování o dalším studiu na vysoké škole. Výzkum v rámci České republiky byl již ukončen, italští studenti budou průzkumu podrobeni během následujících několika týdnů. Výsledky tohoto výzkumu by měly být známy během několika dalších měsíců a naši další společnou snahou bude tyto závěry publikovat v odborném zahraničním periodiku, zaměřeném na didaktiku fyziky a výuku fyziky na středních školách.

Literatura

- [1] Kodejška, Č.: Tři nové fyzikální experimenty se zvukovou kartou PC. MFI, 24 (2015), s. 109–123.
- [2] Kodejška, Č. a kol.: Fyzikální experimenty se zvukovou kartou PC. MFI, 22 (2013), s. 343–350.
- [3] Tesař, J., Bartoš, P.: Kmitavý pohyb trochu jinak. [online]. [cit. 03. 05. 2015] Dostupné z: <http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/13-31-Tesar.html>.
- [4] Šedivý, P. a kol.: Harmonické kmity mechanických soustav. Knihovnička Fyzikální olympiády č. 44, MAFY, Hradec Králové, 2000, s. 12–13.

INFORMATIKA

Bobřík učí informatiku

5. díl – Informace a jejich reprezentace

DANIEL LESSNER – JIŘÍ VANÍČEK

Matematicko-fyzikální fakulta, UK Praha

Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Slovo počítač je sice odvozeno od slova počítat, dnes už se ale na zpracovávaná data díváme spíš jako na informace, než jako na čísla. Tento rozdíl je nicméně skutečně jen v úhlu pohledu.

Ve škole se žáci typicky dozvědí, že všechna data v počítači jsou uložena pomocí nul a jedniček, že základní jednotkou informace je bit, jaké jsou násobné jednotky a jak s tím vším souvisí problematika velikosti souborů a přenosové rychlosti. Naučí se počítat kapacitu daného počtu bitů, tedy proč např. bajt (osmice bitů) umožňuje rozlišit 256 možností. Tato oblast informatiky úzce souvisí s matematikou. Poměrně jednoduchou strukturou, vhodnou pro první seznámení s kombinatorikou, jsou právě slova dané délky z dané abecedy (tedy variace s opakováním).

Méně často se žáci dozvědí, co to vlastně informace je, protože jde o dosti komplexní pojem. Žáci obvykle pracují s intuitivní představou a hlubší vztah mezi informacemi a např. množstvím dat, která jsou třeba k jejich uchování, jim zůstává skryt.

Jeden ze způsobů seznámení s podstatou informace se opírá o model vylučování možností. Ukažme si příklad: k narozeninám očekávám bicykl, knihu, tablet nebo deskovou hru. Všechny možnosti považuji za stejně možné. Pohledem na zabalený dárek v krabici pak získám nějakou informaci, např. je zjevné, že to nebude kolo. Potězkáním vytuším, jestli to bude kniha, zachrastění by odhalilo deskovou hru. Něco se dozvědět, tedy získat informaci, zde znamená vyloučit jednu nebo několik možností. Naopak, po-

kud nám někdo něco říká, ale nevylučuje tím žádné možnosti (např. dárek byl koupen v e-shopu), žádné informace nezískáváme. Čím více možností se nabízí, tím více informace potřebujeme k určení té správné.

Mají-li žáci aspoň základní představu o pravděpodobnosti (jako poměru počtu sledovaných a počtu všech jevů), lze pojem informace zobecnit. Nevím-li nic o tom, jak bude zítra, znamená to jinými slovy, že považuji všechny možnosti za stejně pravděpodobné. Pokud ale třeba na základě své zkušenosti, místa na Zemi, roční doby či počasí posledních dnů odhaduji na 70 % slunečno, o počasí něco vím. Kolik přesně toho vím, závisí právě na rozložení pravděpodobností jednotlivých variant. Když se něco nového dozvím, rozložení pravděpodobností se změní. Rozdíl mezi novým a původním rozložením odpovídá množství získané informace.

Například pokud házím ideálně spravedlivou hrací kostkou, o výsledku netuším nic a pravděpodobnost všech šesti výsledků je $1/6$. Pokud si všimnu, že někdo podstrčil kostku „cinknutou“, počítám s vyšší pravděpodobností pádu např. šestky (na úkor pravděpodobností ostatních). Odhacení falešnosti kostky tedy o výsledku hodu nese určité množství informace. Až se kostka dokutálí, bude pravděpodobnost skutečného výsledku 1 a ostatních 0. Hodem kostky všechnu neurčitost o výsledku odstraníme a všechnu informaci získáme. Více o této problematice (včetně vztahu informace a entropie) uvádí učebnice Informatika pro každého [1].

Uvedené pojetí informace souvisí s užitím pravděpodobnostního počtu. Pravděpodobnostně totiž modelujeme situace, o nichž máme málo informací. Uvažujeme v nich více než jednu možnost zároveň a pravděpodobnostní ohodnocení jednotlivých možností vlastně odpovídá tomu, co o situaci víme. Nijak přitom nezáleží na tom, jestli jsou v pozadí nějaké náhodné jevy, nebo tomu pozadí prostě jen nerozumíme. Více o informacích v souvislosti s pravděpodobností píše Bastl v článku Teorie informace [2].

V následujících úlohách chceme ukázat, jak informace omezuje počet možností, jak k jejímu uchování používáme bity a bajty nebo jak lze informace různým způsobem reprezentovat.

Uhodni tvar

Kategorie Junior, autorka Daniela Bezáková.

Zadání

Hraješ hru proti počítači. Na obrazovce je 9 obrázců (obrázek). Vybereš si jeden z nich, ale počítači neoznámíš, který. Pak se počítač začne ptát a

ty musíš pravdivě odpovídat ANO nebo NE.



Počítač smí dávat tyto otázky:

Je tvůj obrazec červený?

Je tvůj obrazec modrý?

Je tvůj obrazec žlutý?

Je tvůj obrazec kruh?

Je tvůj obrazec čtverec?

Je tvůj obrazec trojúhelník?

Úkolem počítače je uhodnout tvůj obrazec co nejdříve. Ty víš, že počítač je naprogramován hrát tuto hru nejlepším možným způsobem.

Kolik otázek musí počítač položit, aby jistě uhodl tvůj obrazec?

Co má tato úloha společného s informatikou

Jde o úlohu, při níž hledáme postup, jak omezit možnosti, tedy jak se získáním nějakých informací dostat k jedné správné možnosti. K vyřešení úlohy je potřeba objevit vhodný algoritmus omezování možností a spočítat jeho „časovou náročnost“. Potom může takovéto otázky pokládat místo člověka stroj a budeme si jisti, kolik otázek (a tím i času) bude potřeba na zjištění toho, co chceme vědět.

Zdůvodnění správné odpovědi

V úloze je třeba třídit podle dvou kritérií: tvar (3 možnosti) a barva (3 možnosti). Vezměme např. tvar: k rozlišení, který ze tří tvarů je správný, potřebujeme dvě otázky. Totéž platí pro barvu. Jsou tedy potřeba $2+2 = 4$ otázky.

Kdyby hádal člověk, mohl by se podle situace rozhodnout a některé otázky vynechat. V některých případech by mu stačily i 2 otázky (kdyby se náhodou napoprvé strefil do barvy i tvaru). S jistotou ovšem nemůžeme říci, že mu vždy budou stačit 2 nebo 3 otázky, aby obrazec uhodl. Proto nemůže být správná odpověď 2 ani 3.

Počítač je naprogramován, pracuje s algoritmem na nalezení hledaného tvaru. Algoritmu budou také stačit nanejvýš 4 otázky. A stejně jako člověk může na získané informace reagovat. Pokud např. na první otázku, týkající se tvaru, dostane odpověď ANO, není třeba se na tvar dotazovat podruhé.

Levák nebo pravák?

Kategorie Senior, autor Jiří Vaníček.

Zadání

Psychologové prováděli u žáků testy lateralit (tedy jestli je levák nebo pravák). Dali jim tři úkoly a výsledky zapisovali do počítače.

1. Sepněte ruce. (Psychologové do počítače zapsali, jestli žák měl nahoře levý nebo pravý palec.)



2. Podívejte se na obrázek. Rychle řekněte, jaké zvíře na něm vidíte. (Zapsali, zda žák viděl hlavu zajíce nebo kachny.)



3. Zatleskejte. (Zapsali, která ruka byla při tleskání nahoře, levá nebo pravá.)



Kolik nejméně paměti počítače je potřeba k zaznamenání odpovědi jednoho žáka?

- A) 3 bity B) 8 bitů C) 3 bajty D) 8 bajtů

Co má tato úloha společného s informatikou

K vyřešení úlohy je třeba znát základní jednotky informace a jejich význam. Řešitel musí zjistit, kolik je možných různých výsledků, a pomocí

kolika bitů či bajtů lze takový počet možností rozlišit. Podobně se ptá informatik např. při navrhování databáze zboží: od počtu různých položek se odvíjí délka identifikačního čísla. Identifikačním číslem je i rodné číslo. Nám v Česku slouží dobře, ale např. v Číně by naše rodné číslo nevyhovovalo proto, že nemůže nést dostatek informace k identifikaci jedince. Číňanů se denně narodí víc než 10 000, jenže v našem rodném čísle jsou k rozlišení dětí, narozených v daný den, za lomítkem k dispozici pouze 4 číslice.

Při navrhování sítě Internet se informatici zamýšleli, kolik se k němu nanejvýš bude připojovat počítačů, a podle toho volili délku IP adresy, tedy jednoznačného identifikátoru zařízení v síti. V té době nepředpokládali, že by různých zařízení mohlo být víc než čtyři miliardy, a zvolili proto čtyřbajtové adresy. Vznikající síť podcenili, takže se v současné době rozšiřuje standard adres pro jistotu rovnou šestnáctibajtových. Takové úvahy se opírají o stejné principy jako řešení této úlohy. Více o standardech IP adres na <http://cs.wikipedia.org/wiki/IPv6>.

Zdůvodnění správné odpovědi

Jeden bit (neboli dvojková číslice, tedy 0 nebo 1) je nejmenší jednotka informace. O bitech nejčastěji hovoříme v souvislosti s pamětí počítače. Do paměti o velikosti jednoho bitu lze uložit informaci určující jednu ze dvou možností (např. prší/neprší, správná odpověď/špatná odpověď, levák/pravák, pravdivé/nepravdivé).

Do dvou bitů uchováme informaci o jedné ze čtyř možností. Např. pokud budeme rozlišovat leváctví a pohlaví dotazovaných, mohou nastat čtyři možnosti (chlapec levák, chlapec pravák, dívka levák, dívka pravák) a ty zaznamenáme čtyřmi kombinacemi nul a jedniček (00, 01, 10, 11) – první bit zde označuje pohlaví, druhý laterality. Každý úkon testování laterality má dvě možné odpovědi (levý nebo pravý palec, kachna nebo zajíc, levá nebo pravá ruka je nahoře). Odpověď se dvěma možnostmi se vejde do paměti velikosti 1 bitu, když označíme např. 0 – zajíc, 1 – kachna a obdobně odpovědi na ostatní otázky. Na každou odpověď je potřeba 1 bit, na 3 odpovědi tedy postačí stačí 3 bity. Správná odpověď je A).

Bajt je jednotka informace, která obsahuje 8 bitů (možnost B) a může tak určit jednu z 256 možností (viz <http://cs.wikipedia.org/wiki/Bajt>). Tři bajty (možnost C) mohou rozlišit $256 \cdot 256 \cdot 256 = 256^3 = 16\,777\,216$ možností. Osm bajtů (možnost D) jich rozliší ještě mnohem víc (256^8), je jasné, že to správné řešení nebude.

Barevná hloubka

Kategorie Junior, autor Peter Tomcsányi.

Zadání

Nekomprimovaný bitmapový obrázek má rozměry 40 krát 50 pixelů a zabírá v paměti přesně 1000 bajtů.

Kolik nejvíce různých barev může používat?

- A) více než 16 000 B) 256 C) 128 D) 16

Co má tato úloha společného s informatikou

Tato úloha ukazuje další praktické využití výše popsaného vztahu mezi množstvím informace (či dat) a počtem možností. Čím věrnější barvy požadujeme, tím více jich musíme rozlišit, a tím více paměti zabere výsledný obrázek. Aby se vůbec dalo mluvit o obrázku, potřebujeme barvy aspoň dvě, např. černou a bílou, které si zakódujeme např. 0 a 1. Černobílý obrázek tedy potřebuje pro uchování informace o 1 pixelu 1 bit.

Dnešní zařízení běžně zobrazují miliony různých barevných odstínů a dostávají se tak ke hranici toho, co dovede rozlišit lidské oko a mozek. Potom ovšem potřebují k popsání barvy v jednom pixelu mnoho bitů. Čím více paměti je třeba na popsání barev pixelů, tím větší barevnou hloubku má daný obrázek. Např. pro běžně používané zobrazení True Color, v němž se používá asi 16,8 milionu barevných odstínů, je k jejich rozlišení třeba 24 bitů, tedy 3 bajty na každý pixel.

Více viz https://cs.wikipedia.org/wiki/Barevná_hloubka.

Zdůvodnění správné odpovědi

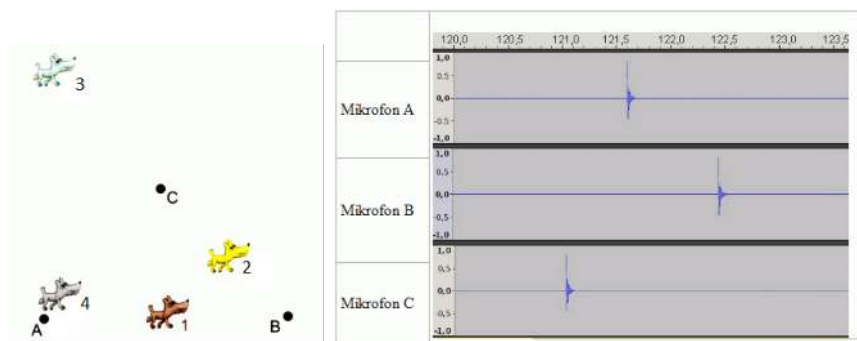
Obrázek má $40 \cdot 50$, tedy 2000 pixelů. Jeden bajt je 8 bitů, 1000 bajtů je 8000 bitů. Na jeden pixel tak připadají $8000/2000 = 4$ bity. Čtyřmi bity lze rozlišit nanejvýš $2^4 = 16$ barevných kombinací. Obrázek může mít nanejvýš 16 barev.

Akustická inteligence

Kategorie Junior, autor Heno Ivanov.

Zadání

Na podlaze stojí tři mikrofony (obrázek, černé tečky ukazují jejich umístění). Najednou jeden ze psů zaštěkal. Všechny tři mikrofony zachytily tento zvuk tak, jak ukazuje graf.



Který ze čtyř psů na obrázku zaštěkal?

1 – hnědý 2 – žlutý 3 – bělavý 4 – šedivý

Co má tato úloha společného s informatikou

K určení polohy v prostoru jsme zvyklí používat souřadnice. Není to však jediná možnost, zejména v situaci, kdy potřebujeme lokalizovat objekt, který něco vysílá (či přijímá), a máme k dispozici přijímače (nebo vysílače) na známých polohách. Přitom může jít o štěkající psy a mikrofony, o mobilní telefony a bezdrátově připojené počítače nebo třeba o GPS přijímače a satelity.

Poloha je pak určena vzdálenostmi od daných konkrétních bodů a může být reprezentována např. časovými údaji o zaznamenané události. Jinými slovy, tyto časové údaje o tom, kdy signály dorazily k přijímači, nesou stejnou informaci jako souřadnice.

Zdůvodnění správné odpovědi

Jak je vidět z grafu, mikrofon C zachytil zaštěkání psa nejdříve. Bělavý pes 3 je jediný pes, k němuž je mikrofon C nejbližší ze všech mikrofonů. Hnědý pes 1 má stejně daleko ke všem třem mikrofonům, žlutý pes 2 má stejně daleko k mikrofonu B a C, šedivý pes 4 má nejbližší k mikrofonu A. Správně je bělavý pes 3.

Zmenšování fotografií

Kategorie Junior, autor Jiří Vaníček.

Zadání

Pepík měl fotografii sochy v souboru v počítači (viz obrázek).



Nejprve obrázek v grafickém editoru zmenšil na 25 % a uložil ho. Poté nový soubor otevřel a zvětšil jej na 400 %. Jak potom obrázek vypadal?



A)



B)



C)



D)

Co má tato úloha společného s informatikou

Tato úloha se týká rastrových (bodových, bitmapových) obrázků a jejich škálování. Informace zachycená na digitální fotografii (na rozdíl třeba od vektorové grafiky) je uchována v jednotlivých pixelech (obrazových bodech). Jejich počet přímo souvisí s množstvím detailů, které lze na obrázku rozlišit.

Změnou velikosti obrázku se změní počet pixelů. Barvy nových pixelů přitom vychází z barev pixelů na odpovídajících místech původního obrázku. Zmenšovací algoritmy se snaží co možná nejlépe uchovat původní obrázek. Pokud např. původní velký obrázek obsahuje černou čáru o tloušťce jediného pixelu, je třeba dobře promyslet, co s ní: máme ji nechat splynout s pozadím, čímž možná obětujeme podstatný detail obrázku, nebo ji máme zachovat, čímž ji ale v novém obrázku nepoměrně zvýrazníme?

Zmenšením různých větších a vzájemně rovnocenných obrázků může vzniknout tentýž obrázek. Úloha zpětného zvětšování tudíž nemá jednoznačnou odpověď. Různé algoritmy preferují různé zvětšené obrázky podle účelu, kterému mají sloužit. Vylepšováním algoritmů pro škálování obrázků se zabývají informatici zaměření na počítačovou grafiku.

Zdůvodnění správné odpovědi

Správná odpověď je B). Obrázek se nejprve zmenší na 25 % a poté zvětší na 400 % (čtyřikrát se zmenší a pak se čtyřikrát zvětší). Jeho rozměry se tedy nezmění. Odpovědi A) a D) jsou nesprávné.

Po zmenšení obrázku každému novému pixelu odpovídá $4 \times 4 = 16$ pixelů z původního obrázku. Pixel má ale jen jednu barvu, není možné v něm uchovat 16 barev. Při zmenšení rastrového obrazu se proto část obrazové informace ztrácí. Ani zvětšením na původní (nebo libovolnou jinou) velikost tuto původní informaci nelze obnovit, není odkud ji vzít.

Konečný obrázek nemůže vypadat stejně jako původní. Místo původních detailů bude rozmazaný, „kostičkováný“ či jinak poškozený, což odpovídá odpovědi B). Odpověď C) by byla správně, kdybychom obrázek nejprve zvětšovali a pak zmenšovali.

Literatura

- [1] Lessner, D.: Učebnice informatiky pro každého. [online] MFF UK, 2015. Dostupné z <http://ksvi.mff.cuni.cz/ucebnice/index.php/Ucebnice/Informace>.
- [2] Bartl, E.: Teorie informace. MFI, roč. 24, č. 3, str. 219–228.
- [3] Předchozí díly seriálu Bobřík učí informatiku najdete v MFI roč. 22, č. 5 (úvodní díl), roč. 23, č. 2 (procházení grafů), roč. 23, č. 4 (algoritmické úlohy), roč. 24, č. 5 (použití logiky v informatice).

Arduino – základ pro levnou robotickou platformu

MILAN NOVÁK

Přírodovědecká fakulta JČU České Budějovice

Robotika se stává všudypřítomnou a lidé si zvykli na možnou interakci s roboty v každodenním životě. Pro výuku jsou robotické prostředky úspěšně využívány v průběhu několika desetiletí. Hlavní výhoda výuky robotiky je, že se jedná o interdisciplinární obor, který zahrnuje mechaniku, elektroniku a programování. Studenti se zdokonalují ve všech těchto předmětech současně a zároveň je pro ně zábavou konstruovat roboty [1, s. 2699]. Důležitým předpokladem pro výuku robotiky je, aby studenti měli možnost pracovat na vlastním technickém zařízení jednotlivě nebo v malých skupinách. Každý student by měl být schopen řešit v rámci výuky s danou platformou problémy bez nutné znalosti vyšších principů robotické platformy a daná platforma by měla být flexibilní a rozšiřitelná [2, s. 1046]. Z důvodu názornosti je lepší používat reálné roboty místo simulovaných prostředí [3, s. 5].

Z pohledu pořízení lze rozdělit robotické platformy do dvou hlavních skupin: komerční a vlastní. Nejjednodušší volbou učitele je nákup komerční robotické platformy, kterých je na trhu k dispozici celá škála. Jednotlivé komerční platformy se mohou lišit v množství připojitelných senzorů, v různém výpočetním výkonu, v různé složitosti ovládání a různými přístupy k metodice výuky pomocí této platformy [4, s. 3]. Hlavní nevýhodou těchto krabicových řešení je jejich uzavřenost. Student pracuje s komerční platformou jako s černou skříňkou – neví co se v ní děje. V některých případech výuky je to v pořádku, zejména při výuce samotné algoritmizace, ale robotika je komplexní obor a vzdělávací programy se mohou soustředit na mnoho různých tematických celků. To definuje předpoklad dostupné modularity, jednoduchosti, nízkých nákladů a schopnosti pokrýt interdisciplinární témata. Tyto požadavky částečně splňují jen některé platformy. Mezi komerční zástupce patří například LEGO Mindstorms, který bývá využíván na všech úrovních škol. Realizace robotických prostředků postavených na této platformě poskytuje modularitu a umožňuje vytvářet

robustní konstrukce. Využívá se také při různých „robotických soutěžích“. Přes uvedené klady je pořízení této platformy poměrně finančně náročné a tím i mnohdy pro školy cenově nedostupné v takovém množství, aby byla k dispozici každému studentovi. Studenti by se neměli soustředit pouze na možnost využití konkrétního již sestrojeného robota, ale měli by se zajímat o vnitřní činnost robotického celku a výuka by měla být více orientována na evoluční přístup, kdy je robot představován jako síť semi-inteligentních senzorů [4, s. 2].

Druhá cesta, která vede k získání robotické platformy, je vytvoření své vlastní, která bude splňovat konkrétní specifika pro výukové podmínky, které budou odpovídat konkrétním požadavkům a zaměření školy. Vlastní robotická platforma může být upravena podle využití v různých předmětech a studenti se také mohou dozvědět více o celém návrhovém procesu. Na druhou stranu tyto platformy vyžadují více času pro přípravu k používání ve výuce. Z tohoto důvodu se někdy využívá některého z komerčních řešení pro vytvoření mechanických součástí, které jsou následně osazeny vlastní elektronikou otevřené platformy. Lze je použít, pokud se studenti mají naučit elektroniku a základy práce s dalšími zařízeními, např. s měřicí technikou.

Platforma Arduino

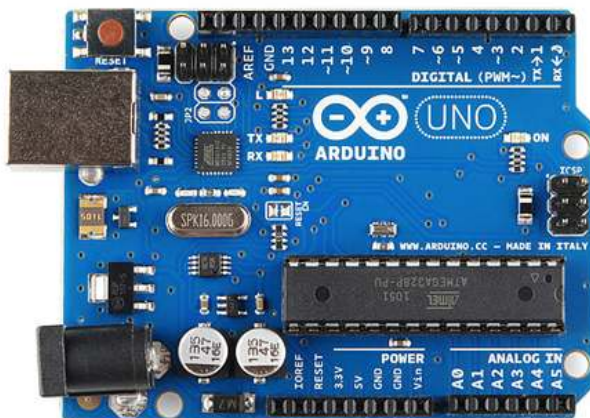
Základem každé robotické platformy je řídicí deska. Jádrem těchto desek tvoří mikrořadiče. V současné době existuje nepřeberné množství elektronických desek, určených nejenom pro robotické platformy.

Arduino je jednou z nejpopulárnějších a nejrychleji rozvíjejících se platform [6]. Je založena na mikrokontroleru Atmel, který nabízí celou řadu základních desek se standardizovaným programovacím rozhraním, což zjednodušuje první kontakt s elektronikou, přičemž je dostatečně výkonný pro používání v jakémkoliv projektu. Některé studie ukazují, že studenti, kteří využívají Arduino, obvykle dokáží přijít s kreativnějšími projekty než studenti využívající jiné platformy. K tomu přispívá i vysoká dostupnost vybavení pro Arduino, dobrá dokumentace a široká komunitní podpora. Na druhou stranu je Arduino komunita mnohdy zaměřena spíše na vytváření věcí tak, aby fungovaly, než na optimální způsob jejich výroby.

Široká komunita lidí, kteří vyvíjejí nástroje (software a hardware) pro tuto platformu, poskytuje své projekty a podporu ke studiu a úpravám podle vlastních potřeb. Platforma Arduino je pod licencí open-hardware a stala se velmi populární mezi lidmi, kteří právě začínají s elektronikou.

Jedním z hlavních důvodů rychlé popularizace je možnost připojit Arduino k počítači pomocí USB kabelu a nahrát programový kód do desky přímo z počítače. Dřívější platformy vyžadovaly pro účel programování přídatný hardware, tzv. programátor. Základním programovacím jazykem je Wiring, což je metajazyk nad C++. Přes knihovny C++ může být dále rozšířen a v jistých ohledech usnadňuje samotné programování.

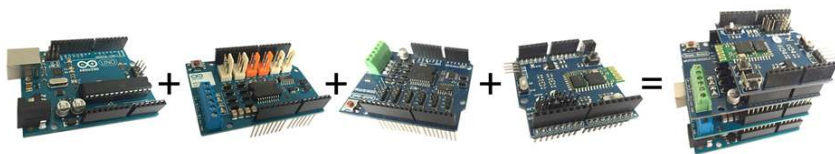
Jednou z nejpobulárnějších desek platformy Arduino pro první seznámení je typ UNO (obr. 1). Tato deska obsahuje 14 digitálních vstupních/výstupních pinů (z toho 6 lze použít jako výstupy využívající pulzně-širokovou modulaci), 6 analogových vstupů, USB konektor, napájecí konektor, tlačítko pro reset a další. Obsahuje tedy vše potřebné pro podporu mikrokontroleru. Desku stačí připojit pomocí USB kabelu k počítači nebo k napájecímu zdroji a může se začít pracovat.



Obr. 1

Moduly jsou základ

Základní deska Arduino UNO umožňuje připojení dalších modulů (obvodových desek), tzv. shieldů. Jejich vzájemné propojení je velmi jednoduché a poskytuje komplexní celek pro specifická řešení bez nutnosti složitěho propojování prostřednictvím drátových propojek. Jednotlivé obvodové moduly se jednoduše spojí prostřednictvím pinů a připravených vstupů na každé z desek (obr. 2).



Obr. 2

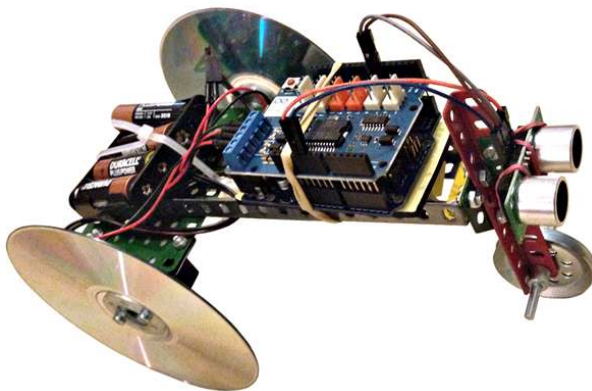
Existuje celá řada desek pro nejrůznější účely, které lze různě kombinovat, podle požadovaných funkcionalit výsledného zařízení. Lze spojit například základní desku Arduino UNO s WiFi obvodem pro bezdrátovou komunikaci nebo GPS pro určení polohy apod. Aby mohly být jednotlivé obvody takto jednoduše propojitelné musí splňovat pouze předpoklad, kterým je dodržení základní formy vstupně výstupních pinů základní desky. Konkrétní obvod pak může využívat jen některé vstupy či výstupy nebo naopak všechny. Tato vlastnost je velmi výhodná pro vývoj vlastních obvodů, protože lze použít univerzální nepájivé pole, které lze zakoupit jako obvod pro zapojení do základní desky. Na tomto obvodu se vyvine a otestuje konkrétní funkcionalita a následně se může vytvořit již konkrétní obvod, jehož základem je prototypové zapojení na nepájivém poli. Dochází tak k efektivnějšímu vývoji. Samotný obvod nepájivého pole pak poskytuje možné rozšíření pro využití v odborném vzdělávání v oblasti fyziky, elektroniky, mechatroniky apod., kdy si studenti mohou vyzkoušet specifická zapojení.

Arduino a senzory

Platforma Arduino umožňuje prostřednictvím jednoduchého kódu ovládat širokou škálu čidel: senzory světla, atmosférického tlaku, teplotní čidla, senzory oxidu uhelnatého, radioaktivity, vlhkosti nebo atmosférického tlaku. Uvedený výčet senzorů je pouze malou ukázkou z celé škály čidel, se kterými Arduino může pracovat. Pro konstrukci robotické platformy lze použít senzory k navigaci v prostředí, které pomáhají určovat směr pohybu. Ultrazvukové senzory (SONAR) patří mezi tzv. distanční senzory, které se využívají pro detekci objektu v blízkosti robota nebo k určení vzdálenosti od překážky. Infračervené reflexní senzory se používají pro řízení pohybu robota. Oblíbeným příkladem je sledování čáry. Tyto senzory umožňují také určit, zda se robot nachází na okraji povrchu, po kterém se robot pohybuje.

Ukázka robotického prostředku

Velmi jednoduchou ukázkou robotického prostředku, který je vystavěný na platformě Arduino, je kolový prostředek, který se autonomně vyhýbá překážkám. Jeho mechanická konstrukce využívá stavebnici Merkur, kola jsou vytvořena ze starých CD nosičů (obr. 3). Není tedy nutné využívat drahých komponent.

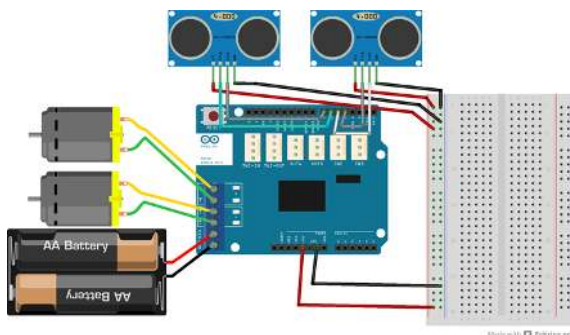


Obr. 3

Samotná elektronická část ukázky robotického prostředku se omezuje na následující komponenty:

1. deska Arduino UNO,
2. pole pro řízení motorů,
3. dva stejnosměrné motory,
4. jeden nebo dva ultrazvukové snímače,
5. nepájivé pole,
6. baterie.

Zapojení jednotlivých součástí je velmi jednoduché (obr. 4). Pole pro řízení motorů je nasazeno na vývojovou desku Arduino UNO. Nepájivé pole slouží pouze pro rozvod napájení pro ultrazvukové senzory, které se přivádí přímo z desky Arduino UNO. Ultrazvukové senzory jsou připojeny k digitálním vstupům na desce Arduino. Při využití pole řízení motorů stačí připojit motory na jeho sběrnici, která má i vstupy pro napájení. Pokud by nebylo použito pole řízení motorů, musel by se vytvořit tzv. H-můstek, který by suploval funkci pole.



Obr. 4

Pokud je obvod zapojen, stačí nahrát programový kód. Pro uvedený příklad, si lze z adresy <http://www.prf.jcu.cz/data/files/344/362/1890wiring-robot.ino> stáhnout soubor s kódem. K nahrání kódu je určené integrované vývojové prostředí (IDE), které je napsané v jazyce Java a lze jej zdarma stáhnout ze stránek <http://www.arduino.cc>. Stažený soubor se otevře ve vývojovém prostředí, pomocí kterého se nahraje do vývojové desky Arduino UNO. Samotný robotický prostředek se již začne chovat podle naprogramovaného kódu. V tomto případě se bude snažit vyhýbat překážkám.

Závěr

Tento článek je krátkým úvodem k široké problematice technologie Arduino, která může být použita jako základ pro levnou robotickou platformu. Arduino je ideální pro tvorbu interaktivních projektů, ve výuce podporuje kreativitu, týmovou spolupráci se zaměřením na technologie a mezioborovou spolupráci. To je také dáno variabilitou, kterou se platforma Arduino vyznačuje. Lze využívat jednak již existující pole, kterých je nepřeberné množství nebo vytvořit vlastní, zcela specifické obvody, které ve spojení s čidly vytváří různé hardwarové celky. Důležitým aspektem je okamžitá zpětná vazba. To znamená, že pokud je sestavené zařízení postaveno a naprogramováno v pořádku, studenti vidí, jak pracuje přímo v reálném prostředí. Jak se pohybuje, jak reaguje na okolí prostřednictvím čidel apod.

V článku je uvedena jednoduchá ukázka robotického prostředku, který využívá ultrazvukových čidel. Tato čidla stačí vyměnit za čidla infračervená při minimální změně programového kódu a studenti okamžitě zjistí

rozdíl v jejich citlivosti nebo dosahu. Tyto rozdíly pak vedou k osvojení principu jednotlivých čidel.

Díky otevřenosti platformy Arduino není problém vytvořit vlastní prototypová řešení, která budou zohledňovat specifické potřeby studentů a vyučujících. Při realizaci prototypových zařízení stačí dodržet základní rozložení vstupních/výstupních pinů základní desky Arduino. Existuje velké množství již existujících robotických platforem, jejichž základem je Arduino. Není proto nutné vytvářet zcela nová řešení, ale využít existující, popřípadě ho upravit podle požadavků a zabývat se pouze programováním.

Platforma Arduino v současné době obsahuje velké množství klonů, které se liší například v množství implementovaných senzorů v rámci jediné desky, počtem vstupů, způsobem připojení periférií a také cenou. V zásadě ale pracují na stejném principu s využitím jednotného programovacího rozhraní. V porovnání s platformou LEGO Mindstorms, které pracuje prioritně s originálními komponentami v podobě LEGO kostek, Arduino umožňuje využívat senzorů a dalších elektronických komponent od různých výrobců. Pro Arduino také neexistuje omezení v podobě znovupoužitelnosti základní desky pro stavbu jiného robotického prostředku nebo zařízení. Desku stačí opatřit jinými poli, senzory a nahrát jiný programový kód. Tím je tato platforma velmi flexibilní.

Literatura

- [1] *García-Saura, C. – González-Gómez, J.:* 5th International Conference of Education, Research and Innovation: Low cost educational platform for robotics, using open-source. ICERI201, Madrid, Spain, 2012.
- [2] Robot and Human interactive Communication, 2007. RO-MAN 2007. The 16th IEEE International Symposium on: A Study on External Form Design Factors for Robots as Elementary School Teaching Assistants. IEEE, Jeju, 2007.
- [3] *Balogh, R.:* Basic Activities with the Boe-Bot Mobile Robot. In: DidInfo2008. 14th International Conference. FPV UMB, Banská Bystrica, Slovakia, 2008.
- [4] *Bertelli, L., Bovo, F., Grespan, L., Galvan, S., Fiorini, P.:* Eddy: an open hardware robot for education. In: AMIRE 2007 Conference, 4th International Symposium on Autonomous Minirobots for Research and Edutainment, October 2007, Buenos Aires, Argentina, 2007.
- [5] What is Arduino? Arduino [online]. [cit. 2015-11-25]. Dostupné z: <https://www.arduino.cc/en/Guide/Introduction>.
- [6] *Balogh, R.:* Educational Robotic Platform based on Arduino. In: Proceedings of the 1st international conference on Robotics in Education, RiE2010, September 2010, FEI STU, Slovakia, 2010, 119–122.

Z HISTORIE

Malý proces s velkým mužem (K 400 letům procesu roku 1616 s Galileem Galileim)

Jakmile Galileo Galilei přešel od rozvíjení pozemské mechaniky k pozorování vesmíru a z toho vyvozování důsledků, dostal se do ostrých sporů s církví. Nakonec svoji při vědy s církevním učením prohrál a roku 1633 byl tribunálem odsouzen rozsudkem, v němž se mj. praví: „Odsuzujeme tě do vězení svatého oficia a jako spásná pokání ti ukládáme odříkávat po dobu tří let jednou týdně sedmero kajících žalmů: vyhrazujeme si možnost zmírnit, změnit nebo zčásti či úplně zrušit zmíněné tresty a pokání“ (z rozsudku, celý je uveden v [1, str. 148–149]). Současně bylo nařízeno veřejně zakázat jeho knihu *Dialogo sopra in due sistemi del mondo* (*Dialog o dvou systémech světa*), Florencie 1632 [3].

Galileův spor s církví měl ještě jeden vrchol, méně ostrý, a to roku 1616, kdy byl kardinály pouze napomenut, byť zcela jednoznačně a nadlouho. Události vedoucí k tomuto napomenutí bývají označovány jako malý proces, i když ve smyslu právním o soud nešlo. Podívejme se, proč a v čem si Galileo klér celoživotně zneprátlil.

Galileo Galilei prožil celý život v poměrně malé geografické oblasti od Padovy po Řím, v zemi v níž v 15. století vznikla renezanace a objevil se humanistický přístup k životu, založený na přesvědčení, že světu lze porozumět racionálním myšlením opřeným o pozorování, logické uvažování a aktivní prožívání. Kompaktní celek aristotelovské přírodní filozofie a křesťanské nauky vytvořený ve středověku se jevil jako přežitý, v rozporu se skutečností

i v oblasti myšlení. Církví však byl velmi intenzivně hájen.

Galileovy úspěchy a příkořími protkaná cesta začala na univerzitě v Pise, na níž vstoupil v září 1581. Především díky svému učiteli *Filippu Fantoniimu* získal sklon k matematice záhy podpořený dvorním matematikem velkovévody toskánského *Ostilio Riccim*. Zajímavý okamžik, při němž byl Galileo uveden v obecnější známost, nastal ne z úplně jasného důvodu v roce 1588, kdy byl florentskou akademií požádán o přednášku nad Dantovým spisem *Peklo*. Dnes se čtenáři samozřejmě zdá úsměvné, co že z Dantových veršů zjistil a veřejně sdělil: Lucifer je pětáctýřikrát větší než socha giganta na náměstí Sv. Petra v Římě, která sama je patnáctkrát větší než Dante. Přednáška zaujala i svojí formou. Galileo se předvedl jako velice dobrý řečník mající dar posluchače zaujmout. Skutečností je, že po této přednášce dostal nabídku na profesorské místo matematiky na univerzitě v Pise.

V té době začal konat své mechanické pokusy, zejména s volným pádem těles a s jejich pohybem po nakloněné rovině. Výsledkem byl jeho první spis *O pohybu*. Zajímavý je mj. tím, že výklad v něm probíhá tehdy zcela novou formou – diskusí mezi fiktivními postavami, konzervativním diskutérem a realistou, aristotelikem a člověkem renezančního typu, prostřednictvím něhož Galileo vykládal svoje poznatky a názory.

Stejný literární styl Galileo uplatnil i v dalších dílech, z nichž nejpodrobnější diskuse usměrňovaná třetí – jakoby nezávislou – osobou se odehrává v jeho *Dialogu o dvou systémech světa*. Do poznávání světa (pokud možno prostřednictvím pokusů a pozorování) vnesl metodu: Pozoruj a z toho, co vidíš, utvoř pravidlo. Pak se ptej, zda pravidlo platí i za jiných okolností. Ovšem tady narazil, a to překvapivě, na konzervativní názory svých pisánských univerzitních kolegů. Nakonec musel z univerzity odejít. Benátský senát

mu roku 1592 věnoval profesorské místo na univerzitě v Padově. A to byl opravdový start jeho vědecké dráhy. Velký úspěch zazžil se svojí vstupní přednáškou v prosinci 1592, jejíž obsah se nedochoval, ale kromě obsahu byla pro posluchače neméně důležitá působivá opět forma přednesu. Galileo tedy působil na univerzitě, ale vydělával pramálo. Jen stěží s penězi vyšel, přičemž musel ještě částečně hradit životní náklady otce a marnotratného bratra Michelangela. Základní obrát v jeho financích nepřinesla věda a výuka, ale sestrojení a následný prodej vojenského kružítká.

Budoucí konflikt s církví Galileo vyvolal především svými astronomickými objevy, z nichž vyvozoval tehdy velmi překvapivé závěry. Stal jedním z mála zastánců *Mikuláše Koperníka* a jeho heliocentrismu. Koperníkovu knihu o sluneč středním systému *O obězích nebeských sfér* nepochybně znal, přinejmenším její jednoznačné a nezpochybnitelné závěry. Když mu *Johann Kepler* poslal v roce 1597 jeden z výtisků svého *Kosmografického mystéria*, Galileo mu odepsal: „Tvou knihu přečtu s klidnou myslí. Udělám to tím raději, že Koperníkovu učení jsem přišel na chuť již před mnoha lety...“ ([2], str. 125).

Roku 1604 na obloze zazářila supernova. Jako první si jí povšiml kněz *Ilario Altobelli*, ale tak výrazný úkaz byl pozorován průběžně a samozřejmě se stal předmětem nejrůznějších diskuzí. Člen učitelského sboru padovské univerzity *Cesare Cremonini*, ač byl přítelem Galileovým a zastával protijezuitské postoje, v otázce supernovy se ukázal jako tvrdší aritotelik a oba muži se střetli svými spisy o tomto jevu: *Cremonini* pojednáním *Rozprava o nové hvězdě* a Galileo pojednáním *Dialog o nové hvězdě*. Spor nabyl rozměrů mezi dvěma státy – Římem, na jehož straně stál kardinál *Roberto Bellarmini*, a Benátkami, jejichž citlivější přístup k vědě projevoval Galileův zastánce, duchovní *Paolo Sarpi*.

Série Galileových objevů z počátku roku 1610 (Jupiterovy měsíce, nerovnosti měsíčního povrchu, fáze Venuše) vyvolala závažné trhliny v aristotelovské koncepci světa, tehdy jediného modelu vesmíru uznávaného církví s odkazem na bibli.

Existenci Jupiterových satelitů Galileo považoval v tu chvíli za nejpřesvědčivější důkaz správnosti Koperníkova heliocentrismu. Snažil se to vysvětlit v *Hvězdném poslu*, útlém spisku vytištěném v březnu 1610 v nákladu 550 kusů. Když jel spisek obhajovat do Říma v březnu 1611, spor zde doutnal, ale nepropukl ještě naplno. Papež *Pavel V.* udělil Galileovi audienci a také kardinál *Bellarmino* při návštěvě Galilea v jezuitské koleji nevystupoval proti němu nijak ostře.

Roky 1611 a 1612 přinesly ještě jeden objev vedoucí ke stupňování dramatu. Při pozorování Slunce si Galileo povšiml skvrn na jeho kotouči, vznikajících a měnících se tmavých míst. Jeho pojednání o jevu ještě nebylo hotové, když se objevil spis jakéhosi *Apella* *Tři listy o slunečních skvrnách*. Autor – jezuitský kněz a profesor matematiky v Ingostadt *Christoph Scheiner*, který psal pod tímto pseudonymem – se ohání svojí prioritou a hlavně jejich vysvětlením: jsou to jevy v zemské atmosféře promítnuté na sluneční kotouč. Galileo je vykládá následně ve spisu *Historie a ukázky slunečních skvrn a jejich vlastností* (1613) jako oblasti slunečního povrchu s jiným jasem a vlastním pohybem. Tím se sice nedostal do sporu s teologi, neboť jejich učení o Slunci nic nepravilo, ale postavil proti sobě aritoteliky, jímž se zbortil model ideálního vesmírného tělesa, jakým ostatně měly být i další planety. Geocentrický systém pohlížel na Slunce jako na jednu z planet.

Spor o Koperníka vedoucí až k zákazu jeho díla začal z původně nepatrné pohutky. Na jednom obědě u dvora v Pise 12. prosince 1613 se o Koperníkovi hovořilo v živé, ale přátelské diskuzi. Svě do diskuze si řekl mj. i profesor *Boscalia*, a to v tom smyslu, že pohyb Země je neuvěřitelný a je

zcela v rozporu s Písmem. Matematik, žák Galileův *Benedetto Castelli* navrhl v debatě, že by bylo dobré znát názor Galilea na tuto věc. Galileo napsal Castellimu svůj pohled v dopise, jehož hlavním obsahem je obhajoba Koperníkova díla. Jak se předpokládalo, text dopisu nebyl osobní, nýbrž měl do věci obecně vnést pohled tohoto učenice, proto se stal obecně známým. 21. prosince 1614 dominikán *Tomasso Caccini* z kazatelný plamenně zaútočil na Galilea v tom smyslu, že je to kacír a nový antikrist a že jeho matematika je vynález ďáblův. V únoru 1615 skončil Galileův dopis Caccinimu v rukou inkvizice a ta zahájila šetření. Olej do ohně Galileo přilil dopisem s obdobným obsahem toskánské velkovévodkyni *Kristině Lotrinské* (část dopisu je v [2, str. 315–317]). V tomto opět otevřeném dopise se snažil dokázat, že nové poznatky o vesmíru Písmu neodporují, neboť Písmo o astronomii hovoří velmi málo, a že útoky na něj od teologů jsou útoky pomlouvačů, kteří nedokáží teorii (koperníkovskou) vyvrátit. Pokud tedy zaútočil na teology přímo, dostal se na tenký led a nemohl čekat nic jiného, než silně negativní reakci.

Dne 24. února 1616 teologové a kardinálové přes umírněnost kardinála Bellarminiho, který byl dosud Galileovi nakloněn, projednali dvě tvrzení a zaujali k nim svá stanoviska:

1) *Slunce je ve středu světa a je zcela nehybné místním pohybem.*

2) *Země není ve středu světa ani není nehybná, ale pohybuje se celkovým pohybem a každodenním pohybem.* (Myšlen je oběh a rotace Země.)

Obě tvrzení byla shledána jako nesmyslná a kacírská. Papež přikázal kardinálu Bellarminovi, aby povolal Galilea a požadoval na něm, aby se uvedených tvrzení zřekl a vzdal se koperníkovské teorie k nim vedoucí. 26. února 1616 byl Galileo do sídla kardinála Bellarmina předvolán a vyzván aby se upustil od šíření, komentování a vyučování Koperníkova heliocent-

rického modelu světa, pokud nebude vysloveně uvádět, že jde o domněnku. Dále měl mít za povinnost nikde toto učení nepřednášet, neobhajovat ani slovem ani písmem. Galileo slíbil, že tuto výzvu bude respektovat.

Církev měla připravené tři scénáře pro případ, že s Galileem „budou potíže“. Pokud Galileo poslechne první výzvu a zaváže se, že bude Koperníkovo učení hájit pouze jako *domněnku*, věc bude dále odložena. Pokud ne, kardinál Bellarmino vydá Galileovi notářsky ověřený příkaz, aby se Koperníkova učení zřekl. Pokud ani to Galileo nepřijme, bude uvržen do vězení. Na počátku března 1616 byla současně Koperníkova kniha *Oběhy nebeských sfér* dána na index zakázaných knih vedený Kongregací svatého Officia, z něhož byla vyjmuta až v roce 1835.

Po tomto napomenutí jakoby Galileo ztratil motivaci k práci v astronomii. Obrátil pozornost k jiné oblasti fyziky, a to zkoumání hmoty jako takové. V této oblasti nemohl ve své době postupovat jinak, než vytvořil základy teorie, jež měla znaky atomistické teorie, zcela odlišné od dosud uznávané antické teorie čtyř živlů, z nichž je vše vytvořeno. Vznikl tak pozoruhodný spis *Prubíř* (1623). Útlum zájmu o astronomii byl ale jakýmsi nakročením pro napsání díla patrně nejzávažnějšího – *Dialogu o dvou systémech světa, Ptolemaiově a Koperníkově* (1633). Z fiktivních rozhovorů koperníkovce Salviatiho (ústý Salviatiho tlumočí Galileo své názory a dokládá je patričnými argumenty) a ptolemaiovice Simplicia jednoznačně číší Galileovo hluboké přesvědčení o pravdivosti heliocentrického uspořádání planet. Toto dílo nakonec – bohužel – dovedlo Galilea k pověstnému procesu z roku 1633, jehož výsledkem bylo uvržení učenice do domácího vězení a zapovězení jeho díla.

Literatura

- [1] *Namer, E.:* Případ Galilei. Praha, Mladá fronta, 1982.

- [2] White, M.: Antikrist Galileo. Praha, Academia, 2011.
- [3] Galilei, G.: Dialóg o dvou systémech světa. Bratislava, Vydavateľstvo SAV, 1962.
- [4] Loria, G.: Galileo Galilei. Praha, Svoboda, 1949.
- [5] Macháček, M.: Život, odsouzení a rehabilitace Galilea Galileiho. Čs. Čas. Fyz. 43 (1993), 117–132.

František Jáchim

LITERATURA

„Quod erat demonstrandum“ (Q. E. D.) neboli „což mělo být dokázáno“



Matematika je rozsáhlý obor a není možné, aby ji kdokoli zvládl v celé její šíři. Každý se však může pustit do jejího objevování a najít si k ní svou vlastní cestu. Hybnou silou čisté matematiky je honba matematiků za stoprocentními tvrzeními, doloženými důkazy vedoucími ke konečnému závěru, jenž je pak uložen do zavedeného matematického „skladistiště“. Charakteristickou vlastností matematických důkazů je to, že působí na stejnou oblast mozku, kterou vnímáme obrazové vjemy.

Pokud matematikové od časů Euklidových chtěli veřejně prohlásit, že ověřili pravdivost tvrzení nějaké věty, provedli to tak, že na konec jejího důkazu připsali tři písmena: Q. E. D. To je zkratka latinského slovního obratu „quod erat demonstrandum“ neboli „což mělo být dokázáno“ (do češtiny se dříve překládalo C. B. D. – „což bylo dokázati“). V současnosti se používá typografická značka (znak $\square$ nebo $\blacksquare$), které se také říká „halmos“ (po americkém matematikovi maďarského původu *Paulu R. Halmosovi*, který ji zavedl). Používá se v tištěných matematických textech k označení konce důkazu.

Matematika dnes pracuje s několika druhy důkazů: přímý důkaz, nepřímý důkaz, důkaz sporem, důkaz matematickou indukcí, důkaz dvojím výpočtem, důkaz řezem, důkazy pomocí klínů, důkaz zpřeházením a další. Úspěšný důkaz v sobě nese matematikův otisk důvěryhodnosti, čímž odděluje prokázaný teorem (větu) od domněnky, geniální myšlenky nebo prvního dojmu. Mezi vlastnosti, které od důkazu očekáváme, patří jeho pečlivost, přesnost, průhlednost, důvtip a v neposlední řadě také elegance. Některé důkazy jsou krátké, zvláště ty, které se objevují ve školních učebnicích. Jiné jsou delší, ty, jež podrobně rozepisují poslední poznatky v daném oboru, mohou zabrat celá čísla časopisů a dosahovat tisíců stránek. Celou argumentaci má v těchto případech šanci pochopit jen hrstka lidí.

Matematický důkaz je právě tím nástrojem, který odlišuje matematiku od všech ostatních oblastí lidského myšlení. Je-li nějaké tvrzení jednou dokázáno, už nikdy ho nelze vyvrátit, ať se změní móda, politická situace či lidské poznání jakýmkoli způsobem. Kromě nezpochybnitelnosti však mají matematické důkazy ještě jednu vlastnost: umějí být krásné.

Zde ukončíme malý exkurs do teorie velkého tématu matematického důkazu, abychom mohli upozornit všechny čtenáře populárně naučné literatury na nový,

atraktivně graficky zpracovaný útlý titul *Burkarda Polstera*, profesora matematiky na australské Monash University, Melbourne, „Q. E. D. Krása matematického důkazu“ (vydaný nakladatelstvím Dokořán, Praha, 2014, 12. svazek edice Pergamen, překlad anglického originálu z r. 2004 Luboš Pick), který je provede oblastí na hranici výtvarného umění a abstraktního myšlení, kde se tvary setkávají s myšlenkami a stává se z nich matematika. Autor o sobě uvádí, že kromě odborných publikací píše také knihy o matematice žonglování, ale i o filmu a zavazování tkaniček.

Srozumitelný a velmi názorně zpracovaný text – díky mnoha doprovodným obrázkům – představuje sbírku více než dvou desítek překvapivě jednoduchých a oku lahodících důkazů a jejich základních principů. Zaměřuje se především na důkazy, které mají graficky zajímavou reprezentaci, což však škálu úloh neomezuje jen na geometrii. Pro ilustraci uvádíme z obsahu: Pythagorova věta (důkaz řezáním), Najdete pí v pizze? (záhady kruhu), Cavalieriho princip (důkaz aproximací pomocí řezů), Archimedova věta (záhady kolem koule), Matematické domino (důkaz indukci), Možné nemožnosti (zdvojení, kvadratura a trisekce), Číslo v přírodě (geometrie růstu), Zlatý řez (oblíbené číslo matky přírody), Prvočísla bez konce (důkaz sporem), Uzly a mnohoúhelníky (důkaz ohýbáním papíru), Krájení čtverců (nové pohledy na staré recepty), Součty mocnin (důkaz dvojím výpočtem) aj.

Existuje jen málo lidí schopných ocenit a vychutnat si krásu a půvab světa matematiky. Nicméně, tato sbírka několika matematických objevů, včetně za nimi stojících myšlenek, je určena nejen profesionálním matematikům, ale byla napsána pro každého, koho zajímá krása světa matematického důkazu. Kniha by určitě neměla uniknout pozornosti učitelů matematiky, fyziky, výtvarné výchovy, technického kreslení a dalších vyučovacích předmětů.

Bohumil Tesařík

Géniové XX. století, jejichž vědecké objevy a technické vynálezy změnily svět

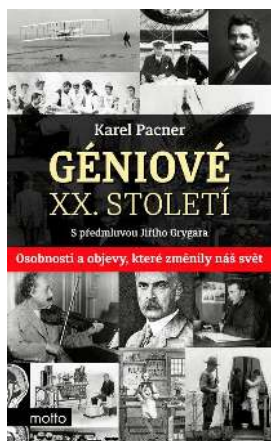
Genialita vlastně není nic jiného než schopnost chápat věci neobvyklým způsobem.

W. James

Dvacáté století dosáhlo v historii naší planety nejen smutného prvenství v desítkách milionů obětí světových i lokálních válečných konfliktů, ale, naštěstí, také v úspěších a epochálních objevech exaktních věd, díky kterým tempo technického pokroku nabralo naprosto nečekané obrátky. Život lidí se stal snazším a bohatším. Bylo by však zavádějící, pohlédnout ze současné perspektivy zpět a podlehnout pokušení vidět dvacáté století jako dobu vyvrcholení stavu poznání v jednotlivých oblastech vědy a techniky. Ze vzdálenější perspektivy snadno zjistíme, že koncem 19. století byli mnozí vědci přesvědčeni, že jejich obory jsou v podstatě uzavřenou vědou (nejčastěji zde bývá citován výrok tehdy uznávaného koryfeje fyziky *Williama Thomsona* alias *lorda Kelvina* o dvou obláčcích na jasném nebi fyzikálního výzkumu). Ode dneška za tisíc let se naše názory na podstatu života a vesmíru budou zdát stejně podivné, jako nám například připadá Keplerova cesta k objevu tří zákonů pohybu nebeských těles, považovaného za nebeskou harmonii, odrážející Boží plán podoby vesmíru.

Před téměř sto lety uvedl *Albert Einstein* v článku o vědeckém přínosu německého fyzika profesora *Emila Warburga* mimo jiné: „Obsah vědy se dá nepochybně pochopit a posoudit i bez znalosti individuálního vývoje těch, kdo ji vytvořili. Ale při takovém jednostranném objektivním vyličení vypadají jednotlivé kroky jako náhodné. Pochopení, jak byly tyto kroky možné, ba nutné, získá člověk teprve sledováním duševního vývoje jednotlivců, kteří měli na vývoji vědy rozhodující účast.“

Technickým vynálezům, novým technologiím, netradičním materiálům a chemickým látkám se specifickými možnostmi využití, jež mění svět a zasahují do každodenního života společnosti, předchází výzkumy mnoha přírodovědců a matematiků. Znamenaly hodně práce, léta driny, noci strávené v laboratoři, dílně či v pracovně, někdy také přispěla náhoda či štěstí. Ale ty přejí přece jen připraveným. Ovšem těch opravdu špičkových myslitelů bylo pouze několik desítek. Mnohé známe, někteří geniální vědci, lékaři a inženýři však upadli do trvalého zapomnění. A kdo tedy byli ti, jejichž práce změnila svět a zasáhla do života společnosti?



Karel Pacner (1936), fundovaný autor téměř 50 knižních titulů z oblasti literatury faktu, odborný publicista a neúnavný popularizátor vědy a zvláště pak kosmonautiky, historie čs. špiónáže, osudových okamžiků v soudobých dějinách Československa či portrétů významných žijících osobností české vědy, se rozhodl přiblížit širokému okruhu čtenářů skutečné hybatele dějin, kteří vytvořili své vědecké či technické dílo ve 20. století, a současně je seznámit se samotnými objevy a jejich mnohdy spleťtými, dramatickými i poučnými osudy. Do prvního dílu zamýš-

lené trilogie s názvem *Géniové XX. století*, vydané s podtitulem *Osobnosti a objevy, které změnilý náš svět* a s předmluvou Jiřího Grygara v nakladatelství Motto ve společnosti Albatros Media (Praha 2015, 1. vyd., 432 str.), zařadil autor životopisy 20 významných vědců a techniků z oblasti teoretické fyziky, elektrotechniky, kosmologie, geologie, chemie, letectví a medicíny. Patří k nim průkopník radiotelegrafie *Guglielmo Marconi*, otec moderní neurochirurgie *Harvey Cushing*, tvůrce kvantové teorie *Max Planck*, konstruktéři prvního letadla *Orville* a *Wilbur Wrightovi*, objevitel čtvrté krevní skupiny *Jan Janský*, objevitel teorie relativity *Albert Einstein*, vynálezce elektrokradiografu *Willem Einthoven*, objevitel podmíněných reflexů *Ivan Petrovič Pavlov*, autor teorie posunu kontinentů *Alfred Wegener*, objevitel rozpínání vesmíru *Alexandr Fridman*, vynálezce syntézy čpavku a inspirátor použití bojových plynů *Fritz Haber*, objevitel struktury atomu *Niels Bohr*, vynálezci penicilinu *Alexander Fleming*, *Howard Florey* a *Ernst Chain* a posléze objevitelé insulínu *Frederick Banting*, *John MacLeod*, *Charles Best* a *James Collip*. Vedle nich můžeme pomoci jmenného rejstříku vyhledat dalších 500 jmen vědců, vynálezců, lékařů, spisovatelů a dalších umělců či politiků, která nějak souvisí s obsahem jednotlivých životopisných medailonků hlavních protagonistů.

Příběhy lidí, o nichž se v knize hovoří, upozorňují také na další fascinující rys historického životopisu: jsou připomínkou toho, že velké objevy dělali a dělají lidé, kteří museli žít svůj každodenní život a zakoušeli radosti i starosti své doby v podstatě stejně jako mnozí z jejich současníků. Dokonce i na profesionální úrovni často udělali více, než kvůli čemu se na ně dnes vzpomíná.

Odvíjející se příběhy také usvědčují z nepravdy jeden z nejrozšířenějších, avšak přesto klamných mýtů o vědě – představu, že se vyvíjí v řadě revolučních skoků. Au-

tor jasně ukazuje, že věda ve skutečnosti postupuje kupředu řadou relativně malých kroků, z nichž každý staví na práci dřívějších vědců. V této souvislosti je často citována slavná Newtonova věta, že pokud viděl dále než ostatní, bylo to proto, že „stál na ramenou obrů“. Velké průlomy v zásadě vždy přicházely jako vyvrcholení mnohaleté usilovné práce několika generací. Pro současné generace je inspirativní skutečnost, že například ve fyzice většinu největších objevů učinili vědci ve věku od 20 do 30 let.

Již první svazek trilogie životopisů velikánů světové vědy a techniky naznačuje, že se celé dílo stane nejen užitečným zdrojem informací, ale také pramenem ušlechtilé zábavy pro čtenářskou veřejnost nejen odbornou. Sluší se popřát autorovi především zdraví a dostatek sil k dokončení tohoto náročného tvůrčího záměru.

Bohumil Tesařík

Chcete odhadnout svoji internetovou závislost?

Na základě výsledků již mnoha pedagogických, psychologických, psychiatrických, neurologických, sociologických a dalších odborných studií a mezinárodních šetření víme dnes jedno: digitální média (počítače, tablety, mobilní telefony, smartphony, organizéry a navigace, herní konzoly, notebooky a v neposlední řadě i televize) nám nejen usnadňují a obohacují život, ale současně mají vysoký závislostní potenciál a dlouhodobě škodí celému lidskému organismu – tělu a především mysli. Okrádají nás o spánek, berou nám duševní práci (tím způsobují ochabnutí paměti), vedou k poruchám pozornosti a čtení, snižují schopnost sebeovládání.

Dnes máme již ohledně závislostního potenciálu internetu a počítačů k dispozici řadu časopiseckých studií a knižních publikací. K nim patří dílo německého psychiatra M. Spitzera *Digitální demence*

(MFI 24, č. 3, s. 239). Obsahuje jednoduché testy s otázkami k odhadu ohrožení při užívání internetu:

1. Jak často je pro vás obtížné, jste-li online, ukončit užívání internetu?

2. Jak často pokračujete v užívání internetu, i když jste vlastně chtěli přestat?

3. Jak často vám druzí lidé, například váš partner, děti, rodiče nebo přátelé říkají, že byste měli internet užívat méně často?

4. Jak často dáváte internetu přednost před trávením času s druhými, například se svým partnerem, dětmi, rodiči, přáteli?

5. Jak často příliš málo spíte, protože jste online?

6. Jak často myslíte na internet, i když právě nejste online?

7. Jak často už se těšíte, že si zase sednete k internetu?

8. Jak často přemýšlíte o tom, že byste měli na internetu trávit méně času?

9. Jak často jste se neúspěšně pokoušeli trávit méně času na internetu?

10. Jak často své domácí úkoly plníte ve spěchu, abyste mohli jít dříve na internet?

11. Jak často zanedbáváte své každodenní povinnosti (práci, školu, rodinný život), protože jdete raději na internet?

12. Jak často chodíte na internet, když se cítíte na dně?

13. Jak často užíváte internet, abyste unikli starostem nebo potlačili špatnou náladu?

14. Jak často cítíte neklid, frustraci nebo podráždění, když nemůžete používat internet?

Vyhodnocení odpovědí:

Nikdy (0 bodů), výjimečně (1 bod), občas (2 body) často (3 body) a velmi často (4 body). Při čtrnácti otázkách lze tedy dosáhnout maximální výše 56 bodů (14×4), přičemž veškeré hodnoty od poloviny výš – tedy od 28 bodů – bývají považovány za zřetelnou indicii pro výskyt internetové závislosti.

Bohumil Tesařík