MATEMATIKA

Minkowského metoda měření délek, obsahů a povrchů geometrických útvarů

JOSEF POLÁK

Fakulta aplikovaných věd ZČU, Plzeň

Článek vychází u příležitosti autorova životního jubilea

Problém měření délek, obsahů a objemů geometrických útvarů historicky vznikl z praktických potřeb lidské populace, jejich měření bylo jednou z prvních matematických činností lidí. Pojmy délka úsečky, délka oblouku křivky, obsah rovinného obrazce a objem tělesa vznikly již ve starověké matematice (*Eudoxos, Eukleides, Archimedes*) a postupně byly precizovány. V 19. století k jejich precizaci značně přispěli zejména francouzský matematik *Camille Jordan* (1838–1922) a italský matematik *Giuseppe Peano* (1858–1932). Na konci 19. století a počátku 20. století pak především dva francouzští matematici *Émile Borel* (1871–1956) a *Henri Lebesgue* (1875–1941) měli zásadní zásluhu na vybudování exaktní *teorie míry geometrických útvarů* a jejím zobecnění v abstraktní *teorii míry množin* (nejen geometrických). Pro moderní matematiku ve 20. a 21. století je charakteristické, že se zabývá měřitelnými strukturami, v nichž je míra pojímána jako množinová funkce jistých vlastností, jež jsou zobecněním vlastností míry geometrických útvarů (množin bodů).

Míra geometrického útvaru je společný název pro délku útvaru na přímce či křivce, pro obsah útvaru v rovině či na ploše, pro objem útvaru v prostoru.

Obecně se pojem *míra útvaru* zavádí axiomaticky takto [1]:

Nechť je dán množinový systém $\mathcal{M}$ útvarů v takovém prostoru $\mathcal{P}$, ve kterém jsou definovány pojmy shodnost útvarů, vnitřní a hraniční bod útvaru. *Mírou útvarů* ze systému $\mathcal{M}$ nazýváme funkci m, která má tyto vlastnosti:

1. Každému útvaru $\mathsf{X} \in \mathcal{M}$ přiřazuje číslo $m(\mathsf{X}) \geq 0$.
2. Každým dvěma shodným útvarům X, Y $(\mathsf{X} \cong \mathsf{Y})$ přiřazuje totéž číslo $m(\mathsf{X}) = m(\mathsf{Y})$.
3. (*Aditivita míry m*) Každým dvěma útvarům X, Y, které nemají společný vnitřní bod, přiřazuje taková čísla $m(\mathsf{X})$, $m(\mathsf{Y})$, že
$$m(\mathsf{X} \cup \mathsf{Y}) = m(\mathsf{X}) + m(\mathsf{Y}).$$
4. Alespoň jednomu útvaru $\mathsf{E} \in \mathcal{M}$ je přiřazeno číslo $m\,(\mathsf{E})\, = 1$.

Konkrétní modely míry geometrických útvarů užívané ve školské geometrii byly vytvořeny již starořeckým matematikem *Archimedem ze Syrakus* a v moderním pojetí zejména francouzským matematikem *C. Jordanem* (v r. 1892). O této tzv. *Jordanově míře* a jejím užití v elementární geometrii a v matematické analýze pojednává podrobně řada našich knižních publikací (viz např. [2] a [3]). Omezené útvary, jimž přísluší nezáporná Jordanova míra, se nazývají *jordanovsky měřitelné*; rovinné útvary s kladnou mírou se nazývají ve školské geometrii *obrazce*, prostorové útvary s kladnou mírou jsou *tělesa*.

Další pro středoškolskou geometrii významnou alternativní metodou určování délek a obsahů geometrických útvarů je tzv. *Minkowského metoda*. Její základní idea má původ v pracích německých matematiků *Carla Wilhelma Borchardta* (1817–1880) a *Hermanna Minkowského* (1864–1909). Zásadní vliv na praktické uplatnění této metody ve výuce středoškolské geometrie měl pak francouzský matematik *Henri Lebesgue*, který ji zahrnul do svých přednášek o měření geometrických veličin pro studenty učitelství matematiky a do statí publikovaných v letech 1931–1935 ve švýcarském časopise „L'Enseignement mathématique" („Vyučování matematice"). Později vyšly souborně v knižním vydání rusky a francouzsky [4]. U nás byla Minkowského metoda systematicky použita v závěrečných partiích středoškolské učebnice geometrie *Jana Vyšína a kol.* z r. 1954 [5]. Zpracování těchto partií bylo originální na základě využití matematického aparátu limit posloupností a velmi přesné, ale pro žáky značně náročné. Obecnější pohled na problematiku měření útvarů v geometrii (včetně Minkowského metody) obsahovala polská publikace pro učitele matematiky z r. 1961 [6]. O možnosti využití základní (přibližné) ideje Minkowského metody v geometrii na základní škole se zmiňovala metodická publikace našich autorů *Karla Hruši* a *Jana Vyšína* z r. 1964. Zajímavou stať o definici délky oblouku rovinné křivky v Minkowského pojetí obsahuje pátý svazek ruské Encyklopedie elementární matematiky z r. 1966 [7] v jedné z kapitol o měření geometrických útvarů v rovině a v prostoru. Pozoruhodné je, že v ruských středoškolských učebnicích geometrie (zejména pro třídy s rozšířenou výukou matematiky) od šedesátých let minulého století až do současnosti je zcela obvyklé užití Minkowského metody ve stereometrii s uplatněním pojmu limity funkce, viz např. učebnice [8] a [9].

Naše literatura postrádá obecný výklad Minkowského metody a jejího užití v elementární geometrii. Cílem předloženého článku je stručné vysvětlení matematických základů Minkowského metody a uvedení jednoduchých příkladů použitelných ve středoškolské geometrii, resp. v geometrických aplikacích matematické analýzy.

Idea Minkowského metody

Základní idea Minkowského metody definování a výpočtu délek křivek v rovině a obsahů ploch, speciálně povrchů těles v prostoru, je velmi jednoduchá a názorná. Vychází se z reálných (hmotných) modelů uvažovaných geometrických útvarů (křivek, ploch). Rovinná křivka se modeluje jako stopa (tvaru proužku) vytvořená hrotem tužky, pera či rýsovacích prostředků. Vydělením obsahu tohoto proužku jeho šířkou se dostane přibližně délka modelované křivky. Plocha v prostoru, speciálně hranice tělesa se modeluje tenkou vrstvou látky, např. alobalu. Vydělíme-li objem této vrstvy její tloušťkou, dostaneme přibližně obsah vymodelované plochy. Přesnost výpočtu v obou případech bude tím větší, čím je menší tloušťka modelu.

Matematické vyjádření Minkowského metody, definiční vzorce

K matematickému vyjádření Minkowského metody určení (definice a výpočtu) délky rovinné křivky a obsahu plochy v prostoru se zavádí pojem h-obalu rovinné křivky a h-obalu plochy v prostoru (pro $h > 0$):

Definice 1

h-obalem rovinné křivky k nazýváme množinu M_h všech bodů X roviny, z nichž pro každý existuje takový bod $Y \in \mathsf{k}$, že platí $|XY| \leq h$. Je tvořen všemi body kruhů se středy na dané rovinné křivce k a s poloměry rovnými danému číslu $h > 0$.

Poznámka. h-obal rovinné křivky k je uzávěr jejího h-okolí v rovině.

Definice 2

h-obalem plochy F v prostoru nazýváme množinu M_h všech bodů X prostoru, z nichž pro každý existuje takový bod $Y \in \mathsf{F}$, že platí $|XY| \leq h$. Je tvořen všemi body koulí se středy na dané ploše F a s poloměry rovnými danému číslu $h > 0$.

Poznámka. h-obal plochy F v prostoru je uzávěr jejího h-okolí v prostoru.

Užitím těchto pojmů se definuje délka oblouku rovinné křivky k a obsah plochy F v prostoru podle Minkowského takto:

Definice 3

Délkou d oblouku rovinné křivky k podle Minkowského nazýváme konečnou limitu podílu obsahu (dvojrozměrné Jordanovy míry) S_h jejího h-obalu a čísla $2h$ pro $h \to 0+$, pokud tato limita existuje a je kladná:

$$d = \lim_{h \to 0+} \frac{S_h}{2h}. \tag{1}$$

Speciálně *délkou uzavřené rovinné křivky* k neboli *obvodem o rovinného obrazce* O, jehož je křivka k hranicí, podle Minkowského nazýváme za obdobných předpokladů limitu:

$$o = \lim_{h \to 0+} \frac{S_h}{2h}. \tag{1a}$$

Označíme-li S_h^+ obsah vnější části h-obalu křivky k a S_h^- obsah vnitřní části h-obalu křivky k, pak za obdobných předpokladů platí:

$$o = \lim_{h \to 0+} \frac{S_h^+}{h}, \tag{1b}$$

$$o = \lim_{h \to 0+} \frac{S_h^-}{h}. \tag{1c}$$

Definice 4

Obsahem S plochy F v prostoru podle Minkowského nazýváme konečnou limitu podílu objemu (trojrozměrné Jordanovy míry) V_h jejího h-obalu a čísla $2h$ pro $h \to 0+$, pokud tato limita existuje a je kladná:

$$S = \lim_{h \to 0+} \frac{V_h}{2h}. \tag{2}$$

Speciálně pro uzavřenou plochu F, která je hranicí tělesa T, představuje S *povrch tělesa*. Označíme-li V_h^+ objem vnější části h-obalu plochy F a V_h^- objem vnitřní části jejího h-obalu, pak za obdobných předpokladů platí:

$$S = \lim_{h\to 0+} \frac{V_h^+}{h}, \tag{2a}$$

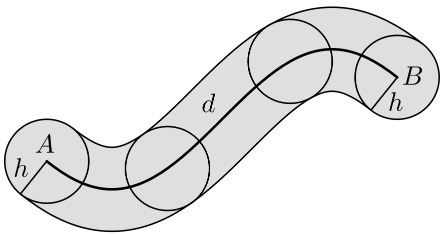
$$S = \lim_{h\to 0+} \frac{V_h^-}{h}. \tag{2b}$$

Definice 3 a 4 jsou teoreticky použitelné vždy za uvedených předpokladů. Jejich praktické použití k výpočtu délek oblouků rovinných křivek a obsahů ploch v prostoru je ovšem omezené jen na případy, kdy dovedeme vypočítat příslušné obsahy, resp. objemy jejich h-obalů.

Příklady užití Minkowského metody v elementární geometrii

a) Výpočet délky rovinné křivky

Délku d oblouku AB rovinné křivky k podle Minkowwského můžeme vypočítat užitím vzorce (1), jestliže dovedeme určit obsah S_h h-obalu oblouku AB (obr. 1). Jako nejjednodušší uvedeme nejprve ilustrativní příklad délky d úsečky AB.



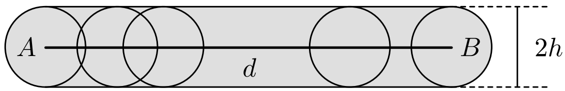
Obr. 1

Příklad 1

Prověřte, že Minkowského metodou dostáváme jako délku d libovolné úsečky AB její standardní délku $|AB|$.

Řešení: h-obal úsečky AB (obr. 2) má obsah $S_h = |AB| \cdot 2h + \pi h^2$ (kde $|AB|$ je délka úsečky jako vzdálenost bodů A, B), a tedy podle vzorce (1) pro její délku d podle Minkowského platí:

$$d = \lim_{h\to 0+} \frac{S_h}{2h} = \lim_{h\to 0+} \left(|AB| + \frac{\pi}{2} h\right) = |AB|.$$

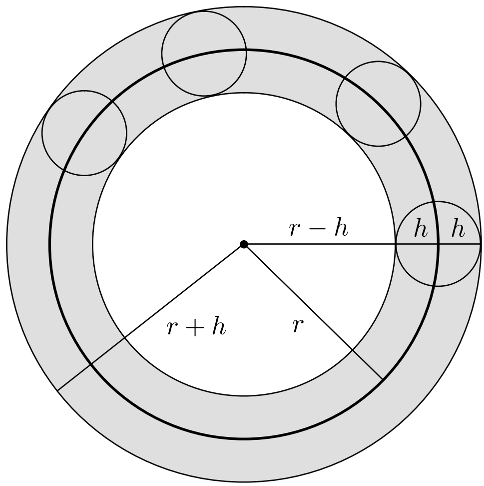


Obr. 2

Prakticky významné příklady užití Minkowského metody představují odvození vzorců pro délku kružnice (obvod kruhu) a délku kruhového oblouku.

Příklad 2

Odvoďte užitím Minkowského metody vzorec pro délku kružnice k (obvod kruhu) o poloměru r.



Obr. 3

Řešení: Označme $S(r)$ obsah kruhu o poloměru r, tj. $S(r) = \pi r^2$. Na obr. 3 je h-okolí kružnice k mezikruží o obsahu

$$S_h = S(r+h) - S(r-h) = 4\pi r h,$$

takže podle vzorce (1a) má kružnice délku

$$o = \lim_{h \to 0+} \frac{S(r+h) - S(r-h)}{2h} = 2\pi r.$$

Poznámka. Odvodili jsme takto, že obvod o kruhu o proměnném poloměru r je tzv. *symetrickou derivací* jeho obsahu $S(r) = \pi r^2$, $o(r) = S'_s(r)$. Užitím vzorců (1b), (1c) obdobně dostáváme:

$$o = \lim_{h \to 0+} \frac{S(r+h) - S(r)}{h} = 2\pi r, \quad o = \lim_{h \to 0+} \frac{S(r) - S(r-h)}{h} = 2\pi r.$$

Prvním z těchto vztahů je obvod o kruhu pro proměnný poloměr r vyjádřen jako *derivace zprava* jeho obsahu $S(r) = \pi r^2$ a druhým je vyjádřen jako jeho *derivace zleva.* Protože platí $S'_+(r) = S'_-(r) = 2\pi r$, plyne odtud, že symetrická derivace funkce $S(r) = \pi r^2$ je rovna její derivaci: $S'_s(r) = S'(r) = 2\pi r$. Zároveň zdůrazněme, že všechny tyto vztahy nejsou žádnou invariantní vlastností uvažovaného obrazce (kruhu) a jeho hranice (kružnice), neboť platí pouze, když za funkční proměnnou zvolíme poloměr r (nikoliv např. průměr d).

Příklad 3

Odvoďte užitím Minkowského metody vzorec pro délku oblouku kružnice o poloměru r příslušného k jejímu středovému úhlu ASB o velikosti x v obloukové míře.

Řešení: Příslušná kruhová výseč má obsah

$$S_v(r) = \pi r^2 \cdot \frac{x}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 x,$$

takže h-obal uvažovaného oblouku kružnice má obsah

$$S_h = \frac{1}{2}\big[(r+h)^2 - (r-h)^2\big]x + \pi h^2 = 2rxh + \pi h^2.$$

Ze vzorce (1) pak pro délku tohoto oblouku podle Minkowského dostáváme:

$$d = \lim_{h \to 0+} \frac{S_h}{2h} = \lim_{h \to 0+} \Big(rx + \frac{\pi}{2}h\Big) = rx.$$

Příklad 4

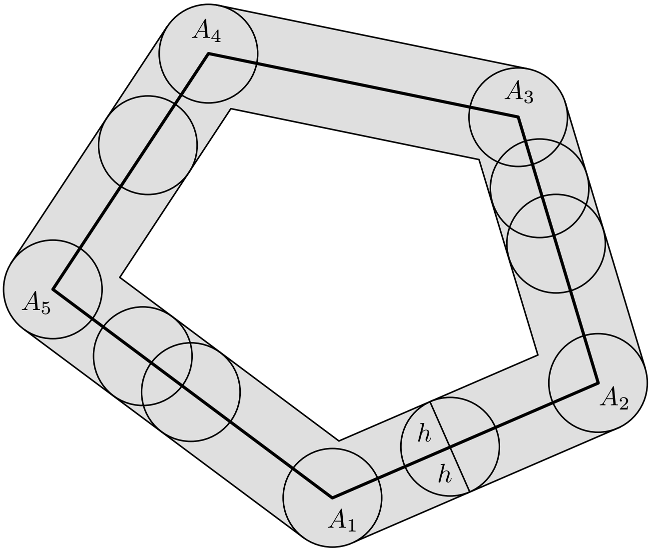
Odvoďte Minkowského metodou vzorec pro obvod konvexního mnohoúhelníku.

Řešení: Uvažujme libovolný konvexní n-úhelník $A_1A_2 \dots A_n$ se stranami délek $a_1, a_2, \dots, a_n$. Sestrojíme rovinné h-okolí jeho hranice (obr. 4 pro konvexní pětiúhelník), jehož vnější část má obsah

$$S_h^+ = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)h + \pi h^2.$$

Ze vzorce (1b) pak pro jeho obvod o plyne:

$$o = \lim_{h \to 0+} \frac{S_h^+}{h} = \lim_{h \to 0+} (a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \pi h) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$



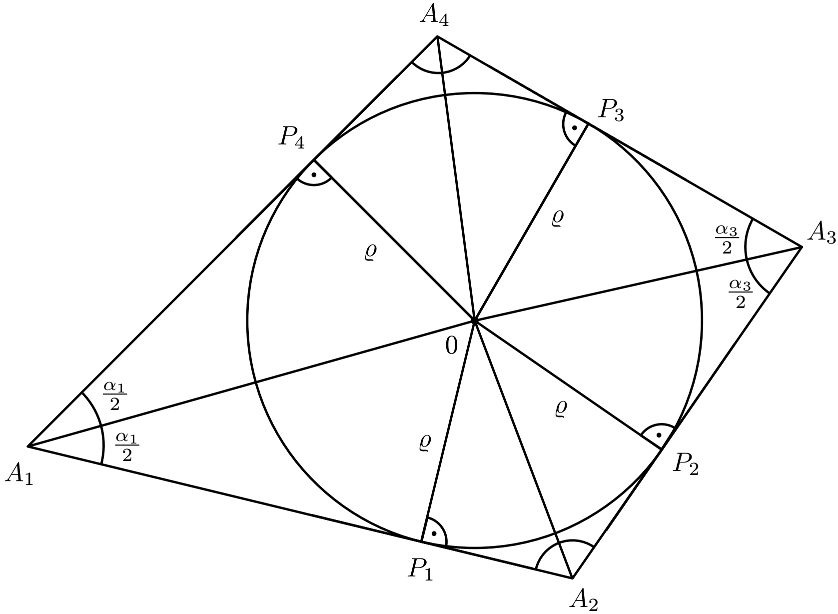
Obr. 4

Poznámka. Lze dokázat (viz [7]), že pro všechny jednoduché oblouky křivek schopné rektifikace, tj. mající konečnou délku definovanou jako limita posloupnosti vepsaných lomených čar, je tato délka rovna jeho délce podle Minkowského definice.

Příklad 5

Odvoďte, jaký platí speciálně vztah mezi obsahem S a obvodem o konvexního mnohoúhelníku, jemuž lze vepsat kružnici k (tzv. *tečnového mnohoúhelníku*).

Řešení: Označme O střed kružnice k vepsané tečnovému n-úhelníku $A_1A_2 \ldots A_n$, ϱ její poloměr a $P_1, P_2, \ldots, P_n$ dotykové body kružnice k se stranami tohoto n-úhelníku o délkách $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (obr. 5 pro $n = 4$). Dále označme $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jeho vnitřní úhly při vrcholech $A_1, A_2, \ldots, A_n$.



Obr. 5

Z rozkladu trojúhelníků $A_1A_2O, \ldots, A_nA_1O$ na pravoúhlé trojúhelníky A_1P_1O a A_2P_1O, ..., A_nP_nO a A_1P_nO plyne (obr. 5), že

$$a_1 = \varrho \operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2} + \varrho \operatorname{cotg} \frac{\alpha_2}{2}$$

čili

$$a_1 = c_1\varrho, \quad \text{kde } c_1 = \operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\alpha_2}{2},$$

...,

$$a_n = \varrho \operatorname{cotg} \frac{\alpha_n}{2} + \varrho \operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2}$$

čili

$$a_n = c_n\varrho, \quad \text{kde } c_n = \operatorname{cotg} \frac{\alpha_n}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2}.$$

Označíme-li

$$c = c_1 + c_2 + \ldots + c_n = 2\left(\operatorname{cotg} \frac{\alpha_1}{2} + \operatorname{cotg} \frac{\alpha_2}{2} + \ldots + \operatorname{cotg} \frac{\alpha_n}{2}\right),$$

dostáváme, že pro obvod a obsah tečnového n-úhelníku platí

$$o = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = c\varrho, \quad S = \frac{1}{2}a_1\varrho + \frac{1}{2}a_2\varrho + \ldots + \frac{1}{2}a_n\varrho = \frac{1}{2}c\varrho^2.$$

Pro funkce $o(\varrho) = c\varrho$ a $S(\varrho) = \frac{1}{2}c\varrho^2$ plyne jako triviální důsledek, že $S'(\varrho) = o(\varrho)$, tj. pro tečnový mnohoúhelník o poloměru vepsané kružnice ϱ platí, že derivace jeho obsahu S podle ϱ je rovna jeho obvodu o.

Poznámka. Speciálně odvozené vztahy $o = c\varrho$ a $S = \frac{1}{2}c\varrho^2$ platí pro libovolný trojúhelník, kde $c = 2\big(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\big)$ a pro každý pravidelný mnohoúhelník (kde např. pro rovnostranný trojúhelník je $c = 6\sqrt{3}$, pro čtverec $c = 8$, atd.).

b) Výpočet obsahu plochy v prostoru, speciálně povrchu tělesa

Obsah S plochy F v prostoru podle Minkowského můžeme vypočítat pomocí vzorce (2), jestliže dovedeme určit objem jejího h-obalu.

Příklad 6

Ověřte, že pro libovolný konvexní mnohoúhelník v prostoru obsah S určený podle Minkowského metody je týž jako jeho rovinný obsah S_p.

Řešení: h-obal uvažovaného n-úhelníku v prostoru má objem, který opět snadno vypočteme:

$$V_h = S_p \cdot 2h + \frac{1}{2}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\pi h^2 + \frac{4}{3}\pi h^3,$$

kde S_p je jeho rovinný obsah, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou délky jeho stran. Jeho obsah S podle Minkowského určíme užitím vzorce (2):

$$S = \lim_{h\to 0+} \frac{V_h}{2h} = \lim_{h\to 0+} \left[S_p + \frac{1}{4}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\pi h + \frac{2}{3}\pi h^2\right] = S_p.$$

Zvláště významná a prakticky užívaná je Minkowského metoda při definování a výpočtu povrchu těles. Pokud se hranice těles skládá z jednoduchých rovinných obrazců jako u mnohostěnů či ji lze „rozvinout“ do roviny jako u rotačního válce nebo rotačního kužele, výpočet povrchu tělesa je velmi jednoduchý. Povrch tělesa v takovém případě je rovný součtu obsahů rovinných obrazců, z nichž se skládá hranice tělesa. U těles, jejichž hranici nelze „rozvinout“ do roviny, jako jsou např. koule a její části, je nutné definovat, co se obecně rozumí *povrchem tělesa*. Nabízí se postupovat při této definici obdobně jako při definování délky oblouku křivky jako limity posloupnosti vepsaných lomených čar složených z n úseček pro $n \to \infty$. Avšak již v r. 1890 zveřejnil německý matematik *H. A. Schwarz* (1843–1921) článek, ve kterém ukázal, že povrchy oblých těles nelze bez doplňujících podmínek definovat jako limity posloupností povrchů vepsaných n-stěnů pro $n \to \infty$.

Poznámka. Označíme-li δ_n maximální rozměr stěn vepsaného n-stěnu (tj. největší vzdálenost mezi dvěma body na jeho stěnách), pak jako doplňkovou podmínku pro zvolenou posloupnost povrchů vepsaných n-stěnů a $n \to \infty$ je nutné klást $\delta_n \to 0$.

Praktické užití Minkowského metody je možné jen tehdy, když dovedeme vypočítat (elementárně či užitím integrálního počtu) objem h-obalu hranice tělesa. Z didaktického hlediska ovšem výhodu Minkowského metody určování (definice a výpočtu) povrchu těles představuje skutečnost, že je univerzální pro všechna tělesa (mnohostěny a rotační tělesa) ve středoškolské geometrii.

Příklad 7

Odvoďte užitím Minkowského metody vzorec pro povrch koule K o poloměru r.

Řešení: Označme $V(r)$ objem koule o poloměru r, tj. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Z prostorové analogie obr. 3 je zřejmé, že h-okolí koule K má objem

$$V_h = V(r+h) - V(r-h) = \frac{8}{3}\pi h(3r^2 + h^2)$$

a podle vzorce (2) má proto koule povrch

$$S = \lim_{h \to 0+} \frac{V(r+h) - V(r-h)}{2h} = 4\pi r^2.$$

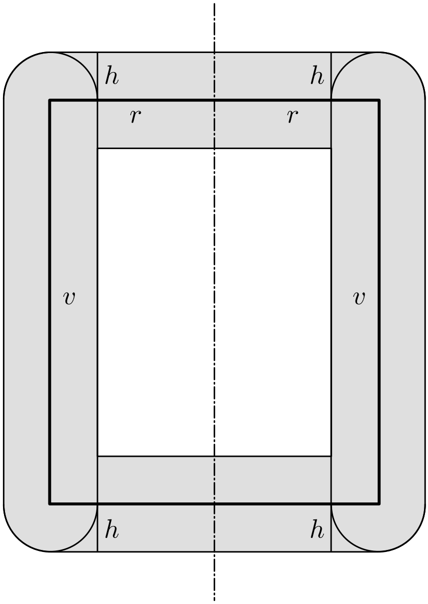
Poznámka. Odvodili jsme takto užitím vzorce (2), že povrch S koule o poloměru r je *symetrickou derivací* jejího objemu $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$: $S(r) = V'_s(r)$. Užitím vzorců (2a), (2b) obdobně dostáváme:

$$S = \lim_{h \to 0+} \frac{V(r+h) - V(r)}{h} = 4\pi r^2, \quad S = \lim_{h \to 0+} \frac{V(r) - V(r-h)}{h} = 4\pi r^2.$$

Prvním z těchto vztahů je povrch S koule o proměnném poloměru r vyjádřen jako *derivace zprava* jejího objemu $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ a druhým je vyjádřen jako jeho *derivace zleva*. Protože podle těchto vztahů pro ně platí $V'_+(r) = V'_-(r) = 4\pi r^2$, plyne odtud, že symetrická derivace funkce $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ je rovna její derivaci, tj. $V'_s(r) = V'(r) = 4\pi r^2$. Zároveň opět zdůrazněme, že tyto vztahy nejsou invariantní vlastností uvažovaného tělesa (koule) a jeho hranice (koulové plochy), neboť platí pouze, když za funkční proměnnou se zvolí jejich poloměr r (nikoliv např. průměr d).

Příklad 8

Užitím Minkowského metody odvoďte vzorec pro povrch rotačního válce o poloměru podstavy r a výšce v.



Obr. 6

Řešení: h-okolí hranice válce je znázorněno na obr. 6. Výpočet jeho objemu V_h a objemu jeho vnější části V_h^+ je obtížnější, objem jeho vnitřní části V_h^- však vypočteme jednoduše jako rozdíl objemů dvou rotačních válců:

$$V_h^- = \pi r^2 v - \pi(r-h)^2(v-2h) = \pi h(2rv + 2r^2 - vh - 4rh + 2h^2).$$

Podle vzorce (2b) pro povrch daného rotačního válce platí:

$$S = \lim_{h\to 0+} \frac{V_h^-}{h} = \lim_{h\to 0+} \pi(2rv + 2r^2 - vh - 4rh + 2h^2) = 2\pi rv + 2\pi r^2.$$

Příklad 9

Odvoďte Minkowského metodou vzorec pro povrch S konvexního mnohostěnu.

Řešení: Uvažujme libovolný konvexní s-stěn se stěnami o obsazích S_1, $S_2, \ldots, S_s$. Pro vnější část objemu h-obalu jeho hranice lze odvodit vztah

$$V_h^+ = (S_1 + S_2 + \ldots + S_s)h + \frac{1}{2}Ch^2 + \frac{4}{3}\pi h^3,$$

kde C je konstanta rovná součtu součinů délek hran mnohostěnu a velikostí příslušných vnějších úhlů. (Přitom vnějším úhlem příslušným k hraně se rozumí úhel sevřený vnějšími normálami ke stěnám, jež mají společnou tuto hranu.) Povrch S mnohostěnu vypočteme užitím vzorce (2a):

$$S = \lim_{h\to 0+} \frac{V_h^+}{h} = \lim_{h\to 0+} \left(S_1 + S_2 + \ldots + S_s + \frac{1}{2}Ch + \frac{4}{3}\pi h^2\right) =$$
$$= S_1 + S_2 + \ldots + S_s.$$

Příklad 10

Odvoďte, jaký platí vztah speciálně mezi objemem V a povrchem S konvexního mnohostěnu, jemuž lze vepsat kouli K (tzv. *tečného mnohostěnu*).

Řešení: Označme O střed vepsané koule K a ϱ její poloměr. Pomocí stejnolehlosti se středem O a koeficientem stejnolehlosti ϱ dostáváme, že pro obsahy všech stěn tečnového mnohostěnu platí $S_i = c_i\varrho^2$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$. Odtud plyne pro jeho povrch vztah

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_s = (c_1 + c_2 + \ldots + c_s)\varrho^2,$$

čili

$$S = c\varrho^2 \quad (\text{kde } c = c_1 + c_2 + \ldots + c_s).$$

Jeho objem vypočteme jako součet objemů s jehlanů o obsazích podstav S_i a výšce ϱ (s hlavním vrcholem O):

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_s =$$
$$= \frac{1}{3}S_1\varrho + \frac{1}{3}S_2\varrho + \ldots + \frac{1}{3}S_s\varrho = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \ldots + S_s)\varrho = \frac{1}{3}S\varrho$$

čili

$$V = \frac{1}{3}c\varrho^3.$$

Pro funkce $S(\varrho) = c\varrho^2$ a $V(\varrho) = \frac{1}{3}c\varrho^3$ plyne jako triviální důsledek, že $V'(\varrho) = S(\varrho)$, tj. pro tečný mnohostěn o poloměru vepsané koule ϱ je derivace jeho objemu podle ϱ rovna jeho povrchu S.

Poznámka. Speciálně vztahy odvozené v příkladu 10 platí pro všechny pravidelné mnohostěny.

Příklad 11

Anuloid vzniklý rotací kruhu o poloměru r kolem osy o ve vzdálenosti R od středu kruhu má objem $V = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 R r^2$. Určete užitím Minkowského metody vzorec pro povrch S anuloidu.

Řešení: Uvažujeme objem h-obalu anuloidu jako funkci proměnné r:

$$V_h = V(r+h) - V(r-h) = 2\pi r \cdot 2\pi R \cdot 2h$$

a ze vzorce (2) pak pro povrch anuloidu dostáváme:

$$S = \lim_{h\to 0+} \frac{V_h}{2h} = \lim_{h\to 0+} \frac{V(r+h) - V(r-h)}{2h} = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 R r.$$

Poznámka. Odvození vzorce pro povrch anuloidu lze provést též užitím vzorců (2a), (2b) a vyslovit obdobné závěry jako v poznámce k příkladu 7.

Literatura

[1] *Sedláček, J. a kol.*: Slovník školské matematiky. SPN, Praha 1981.

[2] *Vyšín, J. a kol.*: Geometrie pro pedagogické fakulty. I. díl. SPN, Praha 1965. Geometria pre pedagogické fakulty. II. diel. SPN, Bratislava 1970.

[3] *Schwabik, Š. – Šarmanová, P.*: Malý průvodce historií integrálu. (Dějiny matematiky, sv. 6.) Prometheus, Praha 1996.

[4] *Lebesgue, H.*: La mesure des grandeurs. Institut de Mathématiques Université, Genéve 1956. (Ruský překlad: Ob izmerenii veličin. – 2. vyd. GUPI, Moskva 1960.)

[5] *Vyšín, J. a kol.*: Geometrie pro jedenáctý postupný ročník. SPN, Praha 1954.

[6] *Moszner, Z.*: O mierzeniu w matematyce. PZWS, Warszawa 1961.

[7] *Boltjanskij, V. G. – Jaglom, I. M. (red.)*: Enciklopedija elementarnoj matěmatiki. Kniga 5 – Geometrija. Nauka, Moskva 1966.

[8] *Pogorelov, A. V.*: Geometrija dlja 6–10 klassov sredněj školy. Prosveščenije, Moskva 1986. (5. vydání.)

[9] *Kalinin, A. J. – Těrešin, D. A.*: Stereometrija dlja 11 klassa. Eksperimentalnyj učebnik dlja škol s uglublennym izučenijem matěmatiki. Izdatělstvo MFTI, Moskva 2001.

Odhady a odhadování v matematice

OLDŘICH ODVÁRKO – JARMILA ROBOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Tenkrát na „základce“

Jeden z autorů článku učil před lety externě v 5. ročníku[1] základní školy, kde v tématu desetinná čísla zadal následující úlohu, kterou objevil v jedné české sbírce z matematiky:

Piskor etruský patří mezi nejmenší savce. Má hmotnost 2,5 g a jeho srdce 0,045 g. Vyjádřete hmotnost piskora a jeho srdce v kilogramech.

Obr. 1

Vyučujícímu bylo jasné, že úloha je vytvořená uměle, a tím spíše byl zvědav na reakce žáků. Úlohu zadal k samostatné práci. Žáci bez rozpaků převáděli gramy na kilogramy, někteří správně, jiní špatně. Při kontrole výsledků se učitel zeptal, zda vědí, jak vypadá zvíře – piskor etruský (obr. 1, [5]). Žáci nevěděli.[2] Podstatné ale bylo, že byli překvapení a divili se, proč se na to učitel ptá. Jejich úkolem bylo přece převádět gramy na kilogramy.

[1] Tehdy se jednalo o první ročník druhého stupně osmileté základní školy.

[2] Ani to vědět nemohli. Autoři sbírky převzali úlohu zřejmě ze slovenského zdroje. Po poradě s odborníky se zjistilo, že v českém názvosloví jde o bělozubku nejmenší (latinsky Suncus etruscus).

Učitele zajímalo, jaký mají žáci odhad velikosti piskora etruského. Rozpětím rukou postupně ukazoval různé zmenšující se velikosti a ptal se, zda to již odpovídá piskorovi. Žáci se sborově shodli na velikosti menšího králíka.

Učitel měl dále připravenu sadu kuchyňských závaží v rozmezí 1 gram až 500 gramů. Závaží postupně kolovala mezi žáky a ti měli rozhodnout, které z nich má přibližně stejnou hmotnost jako piskor (závaží byla z období Rakouska-Uherska a jednotky na nich byly značeny jinak, než je tomu v současné době). Tady se žáci neshodli – přibližně polovina z nich zvolila závaží o hmotnosti 100 gramů, druhá polovina 200 gramů.

Formálnost zadání dané úlohy vedla k tomu, že žáci problém nechápali jako reálnou situaci. Žáci sice věděli, že 1 g = 0,001 kg, ale neměli představu o tom, čemu v realitě hmotnost jednoho gramu odpovídá. Jejich odhady byly proto nesprávné. Bohužel se i dnes ve školské matematice setkáváme s tím, že žáci dělají hrubé chyby v odhadech, vyhýbají se jim a podceňují je. Je ale chyba jen na straně žáků?

Co je vlastně odhad?

Zamysleme se nad tím, co se ve školské matematice rozumí slovem *odhad*. Encyklopedie Wikipedia v české verzi uvádí následující neurčité objasnění: *Odhad je vypočítané nebo jen ze zkušenosti předpovězené více či méně přibližné určení výsledku nebo informace, která je využitelná, i když jsou vstupní data nekompletní, nejistá, nebo zašumělá.* [6]

Slovenská verze téže encyklopedie uvádí podle našeho názoru výstižnější vysvětlení: *Odhad je posúdenie, ocenenie (obyčajne približné) hodnoty, schopnosti, množstva, veľkosti a pod. niečeho.* [7]

Bez znalosti dalšího kontextu lze jen obtížně zformulovat výstižnou charakteristiku pojmu odhad. V následujícím textu budeme používat slova *odhad* či *odhadni* ve výuce matematiky k označení úkolů, ve kterých nejde o přesný výsledek, ale o vytvoření správné představy o možném výsledku daného úkolu. Odhadování ve výuce školské matematiky považujeme za základní součást adekvátního pohledu na matematický problém. V některých případech je odhad finálním výsledkem řešení problému. Častěji však bývá součástí úvodních úvah vedoucích k vyřešení úkolu či prostředkem kontroly správnosti získaného výsledku.

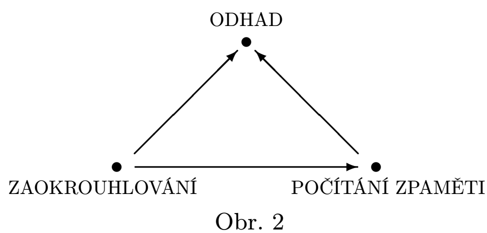
Naskýtá se otázka, zda výuka ve škole systematicky a cíleně vede žáky k odhadování různých veličin. Přitom Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání [4] v charakteristice vzdělávací oblasti *Matematika a její* *aplikace* na odhady pamatuje: „Učí se [žáci] získávat číselné údaje měřením, odhadováním, výpočtem a zaokrouhlováním.“, „…učí se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, obvod a obsah (resp. povrch a objem).“ V cílovém zaměření i v očekávaných výstupech jsou tyto požadavky pro první i druhý stupeň dále rozvedeny a konkretizovány. V rámcových vzdělávacích programech pro jednotlivé typy středních škol je odhadování zmíněno obvykle jen v očekávaných výstupech konkrétního tematického celku.

Na prvním stupni základní školy by odhady měly být běžnou součástí výuky. Žáci mohou například odhadovat hmotnost učebnice, školní tašky, lahve s pitím ke svačině či hmotnost jedné křídy. Stejně tak mohou cvičit odhady délky lavice, učebny, délku svého kroku či odhad vzdálenosti mezi školou a náměstím a odhad času potřebného k ujití této vzdálenosti. Takovýchto situací k odhadování je nepřeberné množství. Charakteristickým rysem při jejich řešení je pozorování, porovnávání, odhadování (nikoliv výpočet) a následná kontrola pomocí měřicího přístroje (metru, váhy, stopek apod.). Tyto úlohy by neměly být jen doménou matematiky, ale měly by prostupovat dalšími předměty s přírodovědným zaměřením.

Zaokrouhlování, počítání zpaměti a odhadování

Podívejme se na další situaci, se kterou se setkal druhý z autorů článku při nákupu hifi systému za cenu 4 590 Kč a blu-ray přehrávače za 2 799 Kč. Prodavač zadal kupované zboží do počítačového systému a vystavil pro pokladnu účet na 10 188 Kč. Po delším dohadování o výši celkové ceny se ukázalo, že prodavač omylem vložil přehrávač do počítače dvakrát. Prodavač více věřil technice–počítači než vlastnímu úsudku. Mělo mu být jasné, že i hrubý odhad „5 000 Kč + 3 000 Kč“ dává výsledek, který je podstatně nižší.

Základem pro správné odhadování je jednak *dovednost zaokrouhlovat* čísla, jednak *dovednost počítat zpaměti*, jak ukazuje schéma na obrázku 2.



Obr. 2

Ve školské matematice je věnována poměrně značná pozornost zaokrouhlování výsledků podle matematických pravidel na daný řád. Na základě našich zkušeností z praxe na základních a středních školách se zdá, že v případě počítání zpaměti tomu tak již není; někdy se dokonce hovoří o tom, že početní dril do současné školy vůbec nepatří. Uvedené tvrzení zřejmě vychází z rozsáhlého využívání výpočetních prostředků v běžné praxi. Pak se ovšem nemůžeme divit, že žák například součin $5 \cdot 8$ počítá na kalkulačce. Domníváme se, že matematické rozcvičky, při kterých se trénuje malá i velká násobilka, pamětní sčítání, odčítání, násobení a dělení do výuky školské matematiky rozhodně patří. Uvádíme několik příkladů, ve kterých se při odhadech ukazuje význam počítání zpaměti.

Příklad 1

Rozměry kvádru jsou 4,1 m, 2,8 m a 3,9 m. Odhadněte, který z následujících údajů je nejblíže objemu kvádru zaokrouhlenému na celé krychlové metry:

85 m^3, 65 m^3, 45 m^3, 25 m^3.

Řešení. Objem kvádru V odhadneme tak, že zaokrouhlíme jeho rozměry na celé metry:

$$V \doteq 4\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{m} \cdot 4\,\mathrm{m} = (3 \cdot 16)\,\mathrm{m}^3 = 48\,\mathrm{m}^3.$$

Objem kvádru je nejblíže 45 m^3. Budeme-li počítat s danými rozměry kvádru, dospějeme k výsledku $V = 44{,}772\,\mathrm{m}^3$.

Příklad 2

Poloměr r podstavy rotačního kužele je 4,2 cm, jeho výška v je 6,1 cm. Odhadněte, který z následujících objemů nejlépe odpovídá objemu kužele zaokrouhlenému na celé krychlové centimetry:

130 cm^3, 100 cm^3, 70 cm^3, 40 cm^3.

Řešení. Objem kužele V určíme pomocí vztahu $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$. Při určení objemu kužele využijeme zaokrouhlení jeho rozměrů na celé centimetry, číslo π zaokrouhlíme na celé číslo 3:

$$V \doteq \left(\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4^2 \cdot 6\right) \mathrm{cm}^3 = 96\,\mathrm{cm}^3.$$

Objem kužele je nejblíže 100 cm^3. Pokud bychom počítali s danými rozměry kužele a číslem π zaokrouhleným na 3,14, pak po zaokrouhlení na dvě desetinná místa dostaneme $V \doteq 112{,}63$ cm^3.

Hrubé odhady nám v některých situacích samozřejmě nestačí, neboť účelnost hrubého odhadu souvisí s konkrétními údaji v úloze. Pokud bychom např. v předchozí úloze zvětšili výšku kužele o 0,2 cm na $v = 6{,}3$ cm, odhad objemu se nezmění. Dospěli bychom ke stejnému závěru, že objem kužele je nejblíže 100 cm^3. Při výpočtu s nezaokrouhlenými rozměry bychom však získali objem 116,32 cm^3, čemuž z nabídky lépe odpovídá údaj 130 cm^3.

Příklad 3

Odhadni, které z čísel 2 500, 3 000, 3 500 je nejblíže součtu čísel $756 + 1\,748 + 254$.

Řešení. Jednotlivé sčítance zaokrouhlíme na celá sta a určíme jejich součet:

$$800 + 1\,700 + 300 = 2\,800.$$

Nejblíže danému součtu je číslo 3 000. Přesný součet je 2 758.

Dolní a horní odhady

V reálné praxi je potřeba umět zaokrouhlovat také *nahoru* i *dolů* na požadovaný řád čísla. Například při vyplňování daně z příjmu se základ daně počítá se zaokrouhlením na celá sta korun dolů, vypočítaná daň se zaokrouhluje na celé koruny nahoru, záloha na daň se zaokrouhluje na celé stokoruny nahoru. Těmto problémům jsme se věnovali v článku [3]. Užití dolních a horních odhadů ukážeme opět na příkladech.

Příklad 4

Prodejce nabízí nový typ televizoru buď za 19 900 Kč, nebo na splátky. V případě, že se zákazník rozhodne využít prodeje na splátky, zaplatí v prodejně akontaci 20 % z ceny televizoru a dále postupně uhradí 20 měsíčních splátek, každou ve výši 4,86 % z prodejní ceny. Máme odhadnout, kolik nejvýše stojí televizor při prodeji na splátky.

Řešení. Odhadneme, kolik korun *nejvýše* za televizor zaplatíme. K tomu využijeme *horní odhad* celkové ceny při prodeji na splátky. Zaokrouhlíme cenu televizoru na celé tisíce nahoru, tj. na 20 000 Kč; akontace 20 % ze zaokrouhlené ceny pak činí 4 000 Kč. Výši splátky v procentech také zaokrouhlíme opět nahoru, a to na 5 %; v tom případě je jedna splátka 1 000 Kč. Celková cena při prodeji na splátky je pak dána součtem akontace a dvaceti měsíčních splátek:

$$4\,000 \text{ Kč} + 20 \cdot 1000 \text{ Kč} = 24\,000 \text{ Kč}.$$

Horní odhad ceny za daných podmínek je 24 000 Kč. Pokud bychom nezaokrouhlili vstupní údaje, byla by akontace 3 980 Kč, splátka 967,14 Kč a celková cena

$$3\,980\,\text{Kč} + 20 \cdot 967{,}14\,\text{Kč} = 23\,322{,}80\,\text{Kč}.$$

Příklad 5

Pavel zvažuje uložit 32 000 Kč na termínovaný vklad na 3 roky. Roční úroková sazba termínovaného vkladu je 0,74 %, banka používá složené úročení, úroky připisuje na konci každého roku. Pavel chce odhadnout, kolik korun *nejméně* získá na úrocích po zdanění celkem.

Řešení. Využijeme *dolní odhad.* Nejdříve zaokrouhlíme dolů úrokovou sazbu na 0,7 % a vklad na 30 000 Kč. Daň z úroků činí 15 %, tj. zdaňovací koeficient je 0,85, po zaokrouhlení dolů je 0,8. Dolní odhad ročního úroku po zdanění je potom

$$0{,}8 \cdot 0{,}007 \cdot 30\,000\,\text{Kč} = 0{,}005\,6 \cdot 30\,000\,\text{Kč}.$$

Výsledek výpočtu odhadneme zdola pomocí součinu $0{,}005 \cdot 30\,000$ Kč. Jde tedy o půl procenta z 30 000 Kč, tj. $0{,}5 \cdot 300$ Kč $= 150$ Kč. Vzhledem k tomu, že úroková sazba i vklad jsou nízké, můžeme při odhadu využít jednoduché úročení namísto složeného. Celkový úrok po zdanění za 3 roky činí $3 \cdot 150\,\text{Kč} = 450\,\text{Kč}$. Odhadem Pavel získá na úrocích po zdanění *aspoň* 450 Kč.

V případě, že bychom nezaokrouhlili vstupní údaje, použili složené úročení a výsledek zaokrouhlili na celé koruny, činil by celkový zdaněný úrok za 3 roky 608 Kč, neboť

$$32\,000\,\text{Kč} \cdot [(1 + 0{,}85 \cdot 0{,}007\,4)^3 - 1] \doteq 607{,}65\,\text{Kč}.$$

Příklad 6

Banka nabízí spotřebitelské úvěry do 100 000 Kč s roční procentní sazbou nákladů[3] (RPSN) ve výši 14 %, úročí na konci každého měsíce. Zajímá nás, zda při úvěru 45 000 Kč nám banka umožní splácet měsíčně *jen* 400 Kč.

---

[3]Roční procentní sazba nákladů (RPSN) je číslo vyjadřující procentuální podíl z dlužné částky, který musí spotřebitel zaplatit za období jednoho roku v souvislosti se splátkami, správou a dalšími výdaji spojenými s čerpáním úvěru (zdroj Wikipedia).

Řešení. Měsíční splátka nesmí být samozřejmě nižší než je úrok z úvěru za první měsíc. K řešení můžeme využít *dolní odhad* měsíční splátky.[4] Roční úroková sazba úvěru činí 14 %, proto úroková sazba vztažená k jednomu měsíci je 1/12 ze 14 %. Zaokrouhlíme tedy 14 % dolů na 12 %, úroková sazba vztažená k jednomu měsíci je potom 1/12 z 12 %, tj. 1 %. Dolní odhad měsíčního úroku z částky 45 000 Kč je

$$0{,}01 \cdot 45\,000\,\text{Kč} = 450\,\text{Kč}.$$

Banka nám tedy úvěr neposkytne, neboť bychom splátkou 400 Kč neuhradili ani úrok za první měsíc úvěru; výše dluhu by tak stále narůstala.

Příklad 7 Máme rozhodnout, která z následujících možností platí: Součin čísel 532 a 27 je
a) menší než 1 000, b) menší než 10 000,
c) větší než 10 000, d) větší než 20 000.

Řešení. Pomocí *dolního odhadu* zjistíme, že součin $532 \cdot 27$ nemůže být menší než $500 \cdot 20 = 10\,000$. Tím vyloučíme možnosti a), b). S využitím *horního odhadu* $600 \cdot 30 = 18\,000$ vyloučíme možnost d). Tak dospějeme k závěru, že součin daných čísel je větší než 10 000.

Příklad 8

Chceme rozhodnout, zda podíl 724 : 1 590 je menší či větší než 0,5.

Řešení. Tento příklad je obtížnější než předchozí. Můžeme postupovat takto:

Číslo 724 je menší než 750, tedy 724 : 1 590 je menší než 750 : 1 590. Číslo 1 590 je větší než 1 500, proto 700 : 1 590 je menší než 750 : 1 500. Víme, že 750 : 1 500 = 0,5, a tedy 724 : 1 590 je menší než 0,5. Stručněji:

$$724 : 1\,590 < 750 : 1\,590 < 750 : 1\,500 = 0,5.$$

Závěr

Trénink odhadů na úlohách obdobného typu, které jsme zde uvedli, by měl mít své nezastupitelné místo při výpočtech ve všech tematických celcích školské matematiky. Jen tak si mohou žáci uvědomit význam odhadování v běžných životních situacích, výhodnost odhadů v matematických úlohách a naučí se s odhady pracovat.

[4] Zkušený čtenář výsledek odhadne přímo ze zadání.

L i t e r a t u r a

[1] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Matematika pro 6. ročník, část 2. Prometheus, Praha, 2010.

[2] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Matematika pro 9. ročník, část 2. Prometheus, Praha, 2013.

[3] *Odvárko, O. – Robová, J.*: Zaokrouhlování podruhé. Matematika-fyzika-informatika, roč. 16 (2007), č. 9, s. 513–520.

[4] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. MŠMT, Praha, 2013.

[5] https://en.wikipedia.org/wiki/Etruscan_shrew.

[6] Wikipedia (česká verze): https://cs.wikipedia.org/wiki/Odhad.

[7] Wikipedia (slovenská verze): https://sk.wikipedia.org/wiki/Odhad.

Pojem vzdálenosti ve školské matematice

FRANTIŠEK KUŘINA

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

Tento příspěvek je konkretizací myšlenek uvedených v článku [7] *Pojem vzdálenosti v geometrii*, v němž jsem se dopustil závažné chyby. Zaměnil jsem totiž publikaci [10] *Standardy pro základní vzdělání* publikací [2] *Standardy a testové úlohy z matematiky*, z níž jsem vycházel. V publikaci [10] se o měření na několika místech mluví. Za tento omyl se autorům omlouvám.

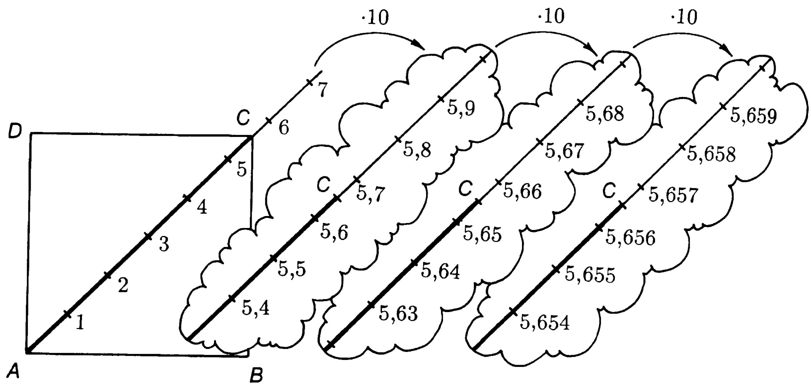
Základní škola

Právě tak, jak prioritně, protože v naléhavé potřebě pro praxi, se rozvinula v dávné lidské společnosti potřeba měření vzdáleností, měl by se přirozeně budovat tento pojem i v matematickém vzdělávání. Že je to dobře možné již na prvním stupni základní školy dokazuje Milan Hejný zpracováním svých učebnic vydávaných nakladatelstvím Fraus [5]. První etapa seznamování dítěte s měřením vzdáleností je tzv. krokování, které je ovšem spojeno s rozvíjením představ o malých přirozených číslech. Tato spjatost aritmetiky s geometrií je pro měření typická a vede, jak známo, k budování základních poznatků o reálných číslech ve vyšších třídách. V citovaných učebnicích měří žáci od druhé třídy délky na centimetry, metry i milimetry, měří délky stran trojúhelníku i jeho obvody, ba i obvod kruhu (na předmětech) i jeho průměr. V pátém ročníku se zavádějí v souvislosti s nákupy, ale i s měřením úseček, desetinná čísla a uvádějí se i čtverečné jednotky, v rozšiřujícím učivu pak např. i zlomky centimetrů (2/5 cm, . . .).

Pozoruhodný přístup k tréninku přesnosti měření délek formou soutěže realizoval *Milan Hejný*; píše o ní v publikaci [4].

Konstrukci velikosti úsečky jako desetinného čísla můžeme žákům přiblížit podle obr. 1 z knihy [6] popisem procesu měření úhlopříčky čtverce o straně délky 4 cm. Začneme-li měřit s jednotkou cm, dostaneme pro délku $|AC|$ úhlopříčky AC:

$$5\ \text{cm} \leq |AC| \leq 6\ \text{cm}.$$



Obr. 1

Máme-li určit délku $|AC|$ přesněji, rozdělíme úsečku 1 cm na 10 shodných částí a provádíme pro velikost úsečky nový odhad. Abychom mohli tento postup ilustrovat obrázkem, představíme si stupnici desetinásobně zvětšenou. Vyjde

$$5{,}6\ \text{cm} \leq |AC| \leq 5{,}7\ \text{cm}.$$

K přesnějšímu odhadu bychom mohli (alespoň teoreticky) dále zjemňovat stupnici rozdělením úsečky 1 mm na 10 shodných dílů. Dostali bychom

$$5{,}656\ \text{cm} \leq |AC| \leq 5{,}657\ \text{cm}.$$

Měřením tak konstruujeme dolní a horní aproximaci velikosti úsečky $|AC|$, tedy čísla $4\sqrt{2}$, které získáme výpočtem podle Pythagorovy věty. Podle kalkulačky, která zobrazuje 32 desetinných míst, je

$$|AC| = 5{,}65682424938019520675489683 9\,\text{cm}.$$

Známým způsobem lze ovšem dokázat, že $|AC|$ je iracionální číslo, představit však jeho racionální aproximaci měřením úseček považuji za důležité.

Matematika na základní škole by se podle mého názoru měla orientovat na činnosti připravující matematické pojmy, na experimentování, modelování a řešení úloh. Tomuto přístupu odpovídají publikace [10] a [3], v nichž je zmíněným přístupům věnována náležitá pozornost. Předmětem matematiky základní školy nejsou matematické struktury vytvořené matematickou vědou, ale realita žákova světa, kterou se snaží studovat aritmetickými a geometrickými prostředky, tedy počítáním, rýsováním a modelováním. Přitom by se ovšem měla na konkrétní úrovni pěstovat argumentace. Žák by neměl odcházet z hodiny matematiky s přesvědčením, že dnes jsme dokazovali, že shodné trojúhelníky jsou shodné.

Střední škola

Na některé souvislosti pojmu vzdálenost s ostatními oblastmi elementární matematiky jsem se pokusil poukázat v článku [7] a v první části tohoto příspěvku.

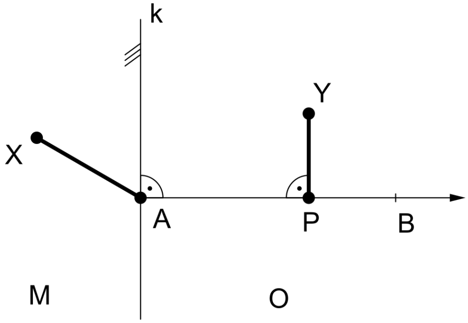
Gymnaziální matematika se s těmito důležitými otázkami vypořádává velkoryse již v prvním ročníku na samém začátku studia takto:

„Reálnými čísly nazýváme čísla, která jsou velikostmi úseček při zvolené jednotkové úsečce, čísla k nim opačná a nulu. Každé reálné číslo je na číselné ose znázorněno právě jedním bodem. Každý bod číselné osy je obrazem právě jednoho reálného čísla“ ([1, s. 26]).

Tato formulace dobře odpovídá axiomům vzdálenosti a měřítka, které jsem citoval v článku [7]. Problém je v tom, že tento přístup bez bližšího výkladu o konstrukci velikosti úsečky měřením a řešení vhodných úloh může přispívat k nebezpečí formalismu ve vyučování. K zeslabení tohoto nebezpečí mají sloužit tyto úvahy o vzdálenosti.

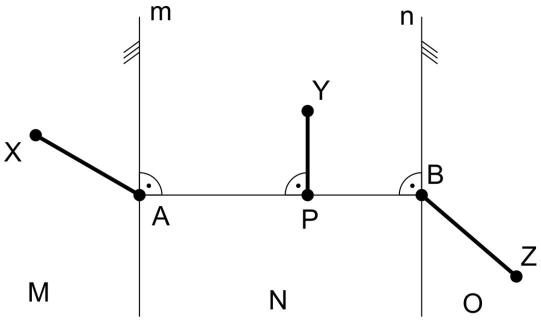
Znovu zdůrazňuji: Měření úseček je důležitý konstrukční prvek školské matematiky, který má výrazně posilovat spojení geometrie s aritmetikou, s teorií množin a logickými otázkami ve vyučování. Na pojmu vzdálenost je založena řada definic dalších geometrických útvarů, např. kružnice, kruh, osa úsečky, osa úhlu, kuželosečky, ... Některé pojmy se vzdáleností související nejsou vůbec ve středoškolské matematice zavedeny, ačkoliv se běžně používají, např. vzdálenost bodu od geometrického útvaru a vzdálenost dvou útvarů. Připomeňme proto: Vzdálenost bodu A od geometrického útvaru U lze definovat jako nejmenší ze vzdáleností $d(A, X)$, kde X je libovolný bod útvaru U. Vzdálenost útvarů U, V pak jako nejmenší ze vzdáleností $d(X, Y)$, kde X je libovolný bod útvaru U, Y pak libovolný bod útvaru V. Tento přístup je ovšem možný jen pro tzv. uzavřené útvary, které obsahují všechny své hraniční body. Pro útvary *otevřené* (např. vnitřky dvou kruhů) by definice vzdálenosti vyžadovala pojem *infima*, který nebývá ve středoškolském učivu obvykle zařazován.

V souladu s předcházejícím výkladem postupujeme při určování vzdálenosti bodu od polopřímky následujícím způsobem. V označení podle obr. 2 platí: vzdálenost libovolného bodu Y poloroviny $O = kB$ od polopřímky AB je velikost úsečky YP, kde P je pata kolmice sestrojené z bodu Y na přímku AB. V polorovině M opačné k polorovině O znamená vzdálenost bodu X od polopřímky AB velikost úsečky XA.



Obr. 2

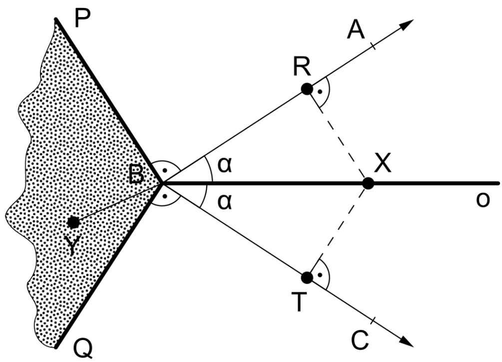
Podobně postupujeme u vzdálenosti bodu od úsečky. K určení vzdálenosti bodu od úsečky AB (obr. 3) sestrojíme po řadě v bodech A a B kolmice m, n k přímce AB, které rozdělí rovinu na tři oblasti M, N a O. V pásu N ohraničeném přímkami m a n měříme vzdálenost bodu Y od úsečky AB na kolmici k přímce AB. Je to velikost úsečky YP. V polorovině M opačné k polorovině mB je vzdálenost libovolného bodu X od úsečky AB velikost úsečky XA, v polorovině O opačné k polorovině nA je vzdálenost libovolného bodu Z od úsečky AB velikost úsečky ZB.



Obr. 3

Množina všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od ramen BA a BC daného dutého úhlu ABC není osa o tohoto úhlu, ačkoliv tato odpověď se vyskytuje např. v učebnicích ([9, s. 73], [8, s. 63]).

Podle obr. 2 musíme totiž odlišit pro měření vzdálenosti bodu od ramen úhlu v označení podle obr. 4 čtyři oblasti: $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ABP$, $\sphericalangle PBQ$ a $\sphericalangle QBC$. Protože každý bod Y úhlu PBQ má od obou ramen úhlu ABC stejnou vzdálenost, je řešením naší úlohy sjednocení úhlu PBQ s osou o úhlu ABC, neboť uvnitř úhlů ABP a QBC nemá žádný bod stejnou vzdálenost od ramene BA jako od ramene BC.



Obr. 4

Kdyby byl úhel ABC přímý, byla by hledanou množinou přímka p, která prochází bodem B a je kolmá k přímce AC.

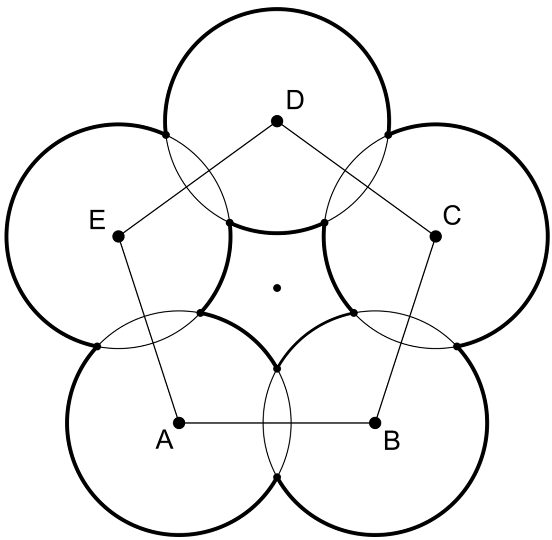
I v určování vzdálenosti dvou geometrických útvarů se v některých učebnicích vyskytují chyby. Např. výška trojúhelníku není vzdálenost jeho vrcholu od protilehlé strany a výšku lichoběžníku nelze definovat jako vzdálenost jeho základen. V případě potřeby můžeme podiskutovat se žáky o problematice např. nad lichoběžníkem se základnami 8 cm a 4 cm a rameny dlouhými 12 cm a 8 cm.

Ilustrujme nyní předcházející výklad několika úlohami.

Úloha 1

Určete množinu všech bodů roviny, které mají vzdálenost 2 *cm od množiny* $P = \{A, B, C, D, E\}$ *vrcholů pravidelného pětiúhelníku vepsaného do kružnice poloměru* 3 *cm.*

Výsledkem je sjednocení pěti shodných silně vyrýsovaných oblouků kružnic poloměru 2 cm vně pětiúhelníku a pěti oblouků kružnic téhož poloměru uvnitř pětiúhelníku (obr. 5). Podrobné zdůvodnění přenechám čtenáři.



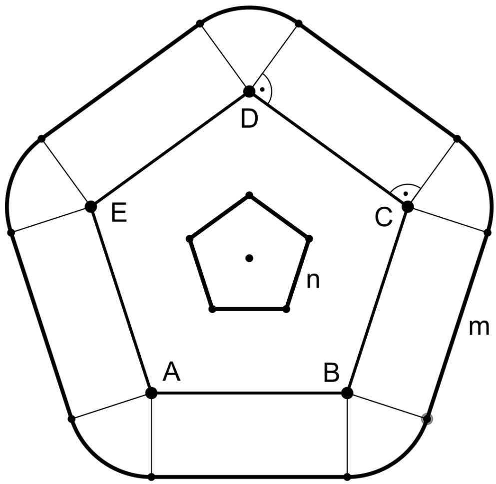
Obr. 5

V případě, že by daná vzdálenost byla např. 1 cm, bude výsledná množina sjednocení pěti kružnic poloměru 1 cm se středy v bodech A, B, C, D, E. V případě, že daná vzdálenost bude větší než 3 cm, bude výsledkem pětice kružnicových oblouků vně daného pětiúhelníku.

Úloha 2

Určete množinu všech bodů roviny, které mají vzdálenost 15 *mm od hranice pětiúhelníku* $ABCDE$ *vepsaného do kružnice poloměru* 30 *mm.*

Konstrukce výsledku (sjednocení hranice n pětiúhelníku uvnitř daného pětiúhelníku s čarou m složenou z úseček a oblouků kružnic) je patrná z obr. 6.



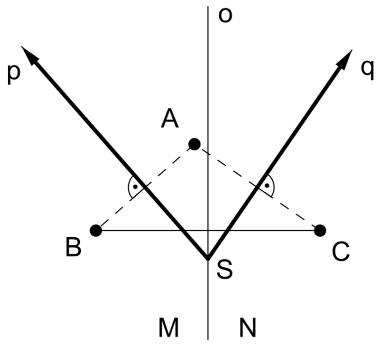
Obr. 6

Množina všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od daných tří nekolineárních bodů je, jak známo, jednoprvková množina (střed kružnice opsané trojúhelníku ABC).

Úloha 3

Je dán trojúhelník ABC (obr. 7). Určete množinu všech bodů jeho roviny, které mají stejnou vzdálenost od bodu A jako od dvouprvkové množiny $D = \{B, C\}$.

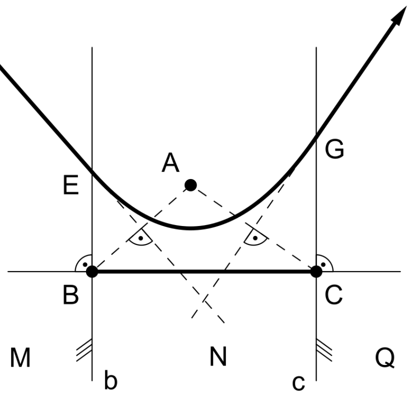
Sestrojme osu o úsečky BC. V polorovině $M = oB$ je vzdálenost bodu od množiny D rovna vzdálenosti tohoto bodu od bodu B, v polorovině $N = oC$ pak od bodu C. Hledaná množina je sjednocení polopřímek p, q s počátkem S, které jsou částmi os úseček AB a AC. Tato množina je hranicí dvou oblastí. Vnitřek úhlu, který obsahuje bod A, je množinou bodů, které jsou blíže k bodu A než k množině D. Vnitřek doplňkového úhlu je množinou všech bodů, které jsou blíže k množině D než k bodu A.



Obr. 7

Úloha 4

Je dán trojúhelník ABC (obr. 8). Určete množinu všech bodů jeho roviny, které mají stejnou vzdálenost od bodu A jako od úsečky BC.

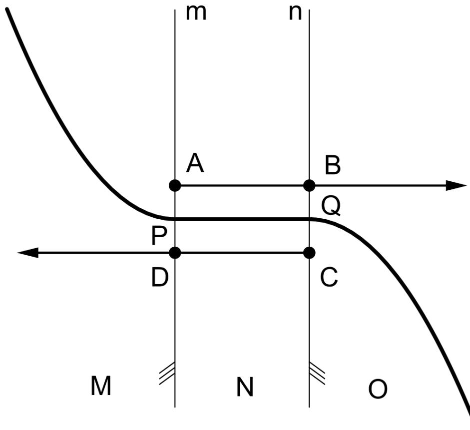


Obr. 8

V souladu s obr. 3 rozdělíme rovinu přímkami b a c na poloroviny M, Q a pás N. V pásu N měříme vzdálenost bodu od úsečky jako vzdálenost tohoto bodu od přímky a výsledkem je tedy oblouk EG paraboly s ohniskem A a řídící přímkou BC. Na oblouk EG pak navazují polopřímky, které jsou částmi os úseček AB a AC.

Úloha 5

Určete množinu všech bodů roviny, které mají stejnou vzdálenost od polopřímek AB a CD na rovnoběžných přímkách podle obr. 9.



Obr. 9

Výsledkem této úlohy je sjednocení částí dvou parabol s úsečkou PQ, která je střední příčkou obdélníku $ABCD$.

Úloha 6

Jsou dány kružnice $m(M, 4\ cm)$, $n(N, 1\ cm)$; $|MN| = 8\ cm$. Určete množinu všech bodů jejich roviny, které jsou stejně vzdáleny od kružnice m jako od kružnice n.

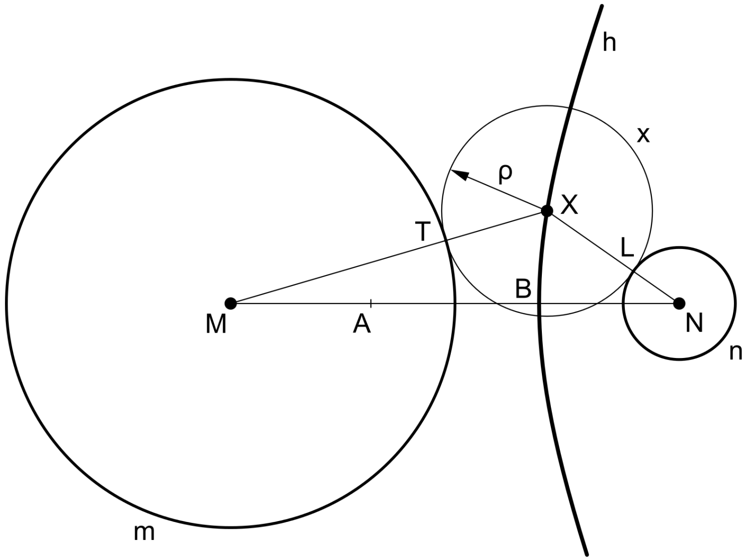
Jestliže je X libovolný bod, který splňuje podmínky úlohy, a ρ je jeho vzdálenost od každé z daných kružnic, je tento bod středem kružnice $x(X, \rho)$, která má s každou z nich vnější dotyk po řadě v bodech T a L (obr. 10). Protože platí

$$|MX| - 4 = |NX| - 1,$$

platí i

$$|MX| - |NX| = 3.$$

Bod X náleží tedy větvi h hyperboly s ohnisky M, N a hlavní osou délky 3 cm. Zřejmě každý bod této větve můžeme považovat za střed kružnice, která má s kružnicemi m, n vnější dotyk. Tato část hyperboly je tedy hledanou množinou.



Obr. 10

Shrnutí

Ačkoliv měření délek není v pravém slova smyslu matematickou činností, měli bychom mu věnovat již v matematice na základní škole mimořádnou pozornost. Je to činnost, která dala jméno celé oblasti matematiky a pojem vzdálenosti je základem důležitého matematického pojmu *metrický prostor*.

S měřením souvisí i práce s jednotkami míry a jejich převody, tedy s oblastí spjatou s praxí. Na okraj připomínám, že v roce 1988 shořela v atmosféře Marsu klimatické sonda *Mars Climate Orbiter*, neboť společnost, která řídila operaci během letu, poslala do řídícího centra NASA údaje o poloze pomocné rakety v mílích a stopách, tam se však domnívali, že jde o jednotky metrické.

Řešení úloh, které jsem na ukázku připomněl, umožňují spojovat experimentování a rýsování s teoretickými poznatky. Žáci tak mají možnosti rozvíjet své představy o matematických pojmech a jejich aplikacích. Hledáme-li množinu G, jejíž prvky mají vlastnost V, provádíme tak vlastně rozklad množiny bodů (roviny) na dvě oblasti: G je množina všech bodů, které mají vlastnost V a její doplněk G' je množina bodů, které vlastnost V nemají. Tento pohled lze samozřejmě rozvíjet i na tradičních úlohách školské matematiky. Je-li např. kružnice $k(S; r)$ množina všech bodů X roviny, pro které platí $|SX| = r$, pak vnitřek kruhu s hranicí k je množinou bodů X kružnice s průměrem AB, pro něž platí úhel AXB je tupý nebo přímý, vnějšek tohoto kruhu pak je množina těch bodů, pro něž platí úhel AXB je tupý nebo nulový. Rozklad příslušné množiny (např. roviny) je tak spojen s množinou všech možností odpovídajících dané výrokové formě.

Řešení úloh o vzdálenosti, jejichž příklady jsem zde uvedl, mohou být pro žáky zajímavé nejen hledáním postupu, ale v některých případech i „hezkým“ či překvapivým výsledkem. Úlohy vedou i k hlubšímu pochopení pojmu množina a její charakteristiky vlastnostmi jejích prvků. Tvořivý učitel si ovšem řadu úloh „praktické moudrosti“ s podobnou tematikou může sám vytvořit.

Literatura

[1] *Bušek, I., Boček. L., Calda, E.*: Matematika pro gymnázia. Základní poznatky z matematiky. Prometheus, Praha, 1992.

[2] *Fuchs, E., Hrubý, D. a kol.*: Standardy a testové úlohy z matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií. Prometheus, Praha, 2000.

[3] *Fuchs, E., Zelendová, E.*: Metodické komentáře ke Standardům pro základní vzdělávání. NÚV, Praha, 2015.

[4] *Hejný, M., Kuřina, F.*: Dítě, škola a matematika. Portál, Praha, 2015.

[5] *Hejný, M., Jirotková, D., Kratochvílová, J.*: Matematika pro 1. ročník základní školy. Fraus, Plzeň, 2007.

[6] *Kuřina, F. a kol.*: Matematika a porozumění světu. Academia, Praha, 2009.

[7] *Kuřina, F.*: Pojem vzdálenosti v geometrii. MFI, roč. 25, č. 4 (2016), s. 241–245.

[8] *Půlpán, Z., Trejbal, J.*: Matematika pro základní školy. 8. Geometrie. SPN, Praha, 2009.

[9] *Rosecká, Z., Míček, A.*: Geometrie. Učebnice pro 8. ročník. Nová škola, Brno, 1999.

[10] Standardy pro základní vzdělávání. Matematika a její aplikace. Dostupné na stránkách MŠMT.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 229 a 230 můžete zaslat nejpozději do 20. 1. 2017 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 229

Je dán obdélník $ABCD$ se stranami délek $|AB| = 10$ a $|BC| = 6$. Pro vnitřní body P, Q strany AB platí $|AB| = 5|AP| = 4|QB|$. Označme T střed strany CD a U, V průsečíky úhlopříčky AC s úsečkami PT a QT. Určete poměr obsahů trojúhelníků UVT a ACD.

Jozef Mészáros

Úloha 230

Adámek dostal k Vánocům 2015 (správně seřízené, přesně jdoucí) mechanické hodinky s ukazatelem data 1–31. Vždy o půlnoci se číslo dne zvětší o 1, nebo číslo 31 přejde na 1. V březnu 2016 si Adámek všiml, že datum na hodinkách se neshoduje se skutečným číslem dne. Zjistěte den, měsíc a rok, kdy by opět poprvé došlo ke shodě, pokud by Adámek jako dosud data neseřizoval. Jak by se výsledek změnil, pokud by Adámek dostal hodinky o Vánocích 2014? Najděte racionální způsob výpočtu.

Stanislav Trávníček

Dále uvádíme řešení úloh 225 a 226, jejichž zadání byla zveřejněna ve třetím čísle aktuálního ročníku našeho časopisu.

Úloha 225

Určete počet všech uspořádaných šestic (a, b, c, d, e, f) přirozených čísel, jejichž součet je 2 016, a přitom všechny zlomky

$$\frac{a+b}{c+d},\quad \frac{b+c}{d+e},\quad \frac{c+d}{e+f},\quad \frac{d+e}{f+a},\quad \frac{e+f}{a+b},\quad \frac{f+a}{b+c}$$

mají celočíselné hodnoty.

Jaroslav Švrček

Řešení. Protože a, b, c, d, e, f jsou přirozená čísla a zlomky nabývají celočíselné hodnoty, je tato hodnota přirozeným číslem. Vynásobením prvního, třetího a pátého zlomku dostaneme

$$\frac{a+b}{c+d} \cdot \frac{c+d}{e+f} \cdot \frac{e+f}{a+b} = 1.$$

Tedy hodnoty všech tří zlomků jsou nutně rovny jedné a platí

$$a+b = c+d, \tag{1}$$
$$c+d = e+f. \tag{2}$$

Podobnou úvahou pro druhý, čtvrtý a šestý zlomek dostaneme

$$b+c = d+e, \tag{3}$$
$$d+e = f+a. \tag{4}$$

Sečtením rovnic (1) a (4), respektive (2) a (3) dostaneme po úpravě

$$b+e = c+f, \tag{5}$$
$$b+2c = 2e+f. \tag{6}$$

Odečtením rovnic (5) a (6) pak po úpravě získáme $c = e$. Z rovnice (5) tak plyne $b = f$. Z rovnice (2) dále obdržíme $d = f$ a konečně z rovnice (4) máme $a = e$. Proto platí $a = c = e$ a $b = d = f$. Vidíme, že za těchto podmínek jsou hodnoty všech zadaných zlomků rovny 1.

Protože součet všech zadaných čísel a, b, c, d, e, f je 2016, plyne odtud $a + b = 672$. Snadno vidíme, že existuje 671 dvojic přirozených čísel (a, b), která vyhovují této rovnici, jsou to dvojice $(1; 671), (2; 672), \ldots, (671; 1)$.

Existuje tak 671 uspořádaných šestic (a, b, c, d, e, f) čísel vyhovujících zadání.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Martin Raszyk* z ETH Zürich, *Veronika Hladíková* a *Klára Karasová*, obě z G v Plzni, Mikulášské nám., *Lenka Kopfová* z MG v Opavě, *Danil Koževnikov* a *Jan Petr*, oba z GJK v Praze 6, Parléřova, *Jakub Mestek* z G v Jihlavě, Jana Masaryka, *Josef Minařík* a *Ondřej Svoboda*, oba z G v Brně, Kpt. Jaroše, *Ondřej Motlíček* z G v Šumperku, *Hedvika Ranošová* z G v Praze 4, Budějovická, *Martin Raška* a *Jiří Škrobánek*, oba z WG v Ostravě-Porubě a *Jáchym Solecký* z PORG v Praze 8.

Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

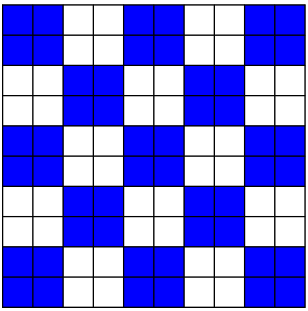
Úloha 226

Na každém poli šachovnice 10×10 sedí jedna blecha. Po tlesknutí přeskočí každá blecha ve směru řádku nebo sloupce právě jedno pole a dopadne opět na šachovnici. Poté na některých polích šachovnice bude několik blech a některá pole zůstanou prázdná. Určete nejmenší možný počet prázdných polí.

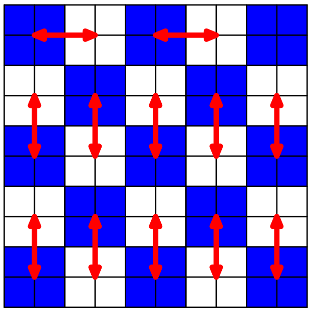
Pavel Calábek

Řešení. Obarvěme pole šachovnice tak, jak vidíte na obrázku 1. Je na něm 52 tmavých polí a 48 světlých polí. Po tlesknutí přeskočí každá blecha ze světlého pole na tmavé anebo z tmavého pole na světlé. Proto po tlesknutí zbude aspoň $52 - 48 = 4$ tmavých prázdných polí.

Pokud blechy přeskočí mezi poli tmavých a světlých čtverců tak, jak je naznačeno na obr. 2 a blechy z horního pravého tmavého čtverce přeskočí na libovolné vhodné pole, zbudou na šachovnici právě 4 prázdná pole.



Obr. 1



Obr. 2

Na šachovnici proto po tlesknutí zůstanou aspoň 4 volná pole.

Správná řešení zaslali *Martin Raszyk* z ETH Zürich, *Veronika Hladíková* a *Klára Karasová*, obě z G v Plzni, Mikulášské nám., *Lenka Kopfová* z MG v Opavě, *Jan Petr*, z GJK v Praze 6, Parléřova, *Josef Minařík* a *Ondřej Svoboda*, oba z G v Brně, Kpt. Jaroše, *Hedvika Ranošová* z G v Praze 4, Budějovická, *Martin Raška* z WG v Ostravě-Porubě, *Jáchym Solecký* z PORG v Praze 8,

Neúplné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *František Jáchim* z Volyně, *Danil Koževnikov* z GJK v Praze 6, Parléřova a *Jiří Škrobánek*, oba z WG v Ostravě-Porubě.

Pavel Calábek

FYZIKA

Měření hladiny intenzity zvuku ve školním prostředí

VÍT BEDNÁŘ – JIŘÍ TESAŘ – VLADIMÍR VOCHOZKA

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Teoretická východiska

Akustická informace se šíří pomocí podélné zvukové vlny, projevujícím se střídavým zhušťováním a zřeďováním částic daného prostředí. Okamžitou akustickou výchylku lze charakterizovat pomocí vztahu (1), kde A je amplituda vlnění, ω úhlová frekvence a x vzdálenost od zdroje zvuku [1, s. 3–13]

$$u(t,x) = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) . \tag{1}$$

Podle Weberova–Fechnerova zákona existuje logaritmická závislost mezi objektivními veličinami a subjektivním vjemem člověka. Má-li zvuk intenzitu I, pak v logaritmické stupnici lze vyjádřit hladinu intenzity zvuku L vztahem (2)

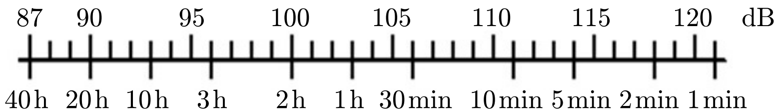
$$L_I = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \sum_{i=1}^{n} \frac{I_i}{I_0} . \tag{2}$$

Použitím funkce logaritmus se rozsah prahových intenzit snižuje na 12 dílů, resp. 120 při vyjádření v decibelech. Někdy se lze setkat s jednotkou dBA, což je jednotka, která má v sobě obsaženo označení pro použitý tzv. „váhový filtr A“. V tabulce 1 jsou hodnoty hladin intenzit zvuků a konkrétní příklady zvuků [2].

Tabulka 1 Příklady zvuků dané hladiny intenzity

Hladina intenzity zvuku [dB]	Příklady zvuku
0	Práh slyšitelnosti lidského ucha
10	Šelest listí
20	Šum listí
30	Šepot, velmi tichý byt
40	Tlumený hovor, malý šum v bytě
50	Zapnutý televizor
60	Silně frekventovaná silnice
70	Křik, tunel metra
80	Silně reprodukovaná hudba
90	Jedoucí vlak, motorová vozidla
100	Maximální hluk motorky
110	Diskotéka
120	Startující letadlo
130	Práh bolestivosti
140	Akustické trauma

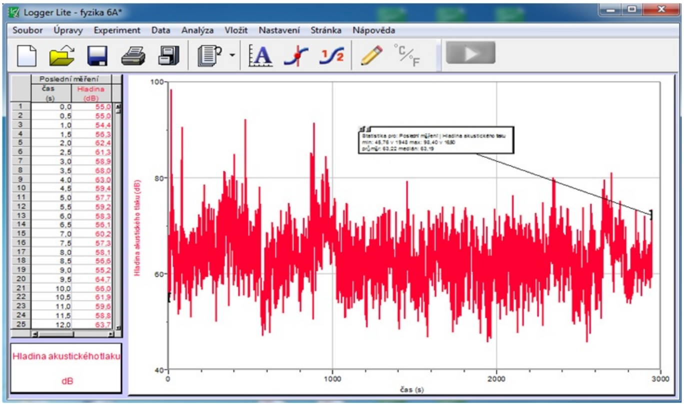
Srozumitelnost mluveného slova je ovlivněna akustikou daného prostoru. Tato problematika je v souvislosti se školním prostředím řešena Nařízením vlády 502/2000 Sb [3]. Zvuk, který se stává pro organismus zátěží, se nazývá hluk. Na obr. 1 je znázorněno nejvyšší doporučené týdenní zatížení sluchového orgánu v závislosti na hladině intenzity zvuku, aby nedošlo k poškození sluchu. Rizikem poškození není jen samotná hladina intenzity zvuku, ale i doba, po kterou je člověk této energii vystaven.



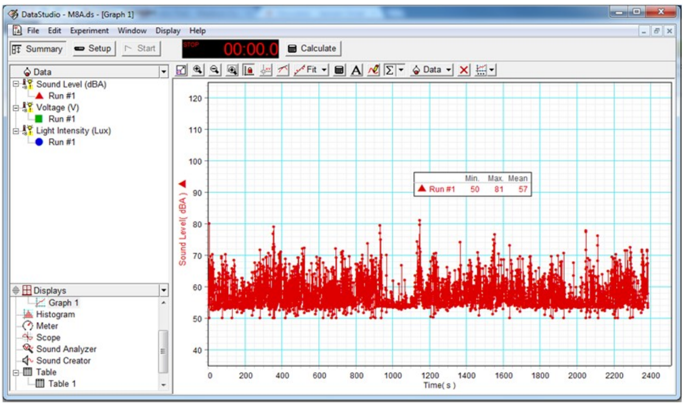
Obr. 1 Nejvyšší týdenní zatížení sluchu v závislosti na hladině intenzity zvuku

Měření hladiny intenzity zvuku – akustické imise

Měření byla prováděna pomocí senzoru *Sound Level Meter* od firmy Vernier [4] a senzoru *General Science MultiMeasure* od firmy Pasco [5]. Senzory byly umístěny dle vyhlášky č.13/1977, tzn. 1,2 m až 1,5 m nad podlahou, uprostřed místnosti, dveře i okna byly zavřeny. Základní možností, jak připojit měřicí senzory, je připojení pomocí USB Linku do PC. Na výběr jsou ale i další alternativy propojení. Vyhodnocování naměřených hodnot probíhalo v software *LoggerLite* [6], resp. v software *DataStudio* [7].



Obr. 2 Záznam hladin intenzity zvuků pomocí systému Vernier



Obr. 3 Záznam hladin intenzity zvuků pomocí systému Pasco

První měření si kladlo za cíl změřit hodnotu akustických imisí v prázdných učebnách různých škol. Měření probíhala na čtyřech odlišných místech. Cílem bylo vybrat takové školy, které se od sebe liší geografickým umístněním v závislosti na možnostech ovlivnění měření okolními akustickými imisemi. Taková měření musí být realizována v době, kdy uvnitř budovy nejsou studenti.

V tabulce 2 jsou uvedeny hodnoty akustických imisí učeben různých vzdělávacích institucí. K měření byla použita vzorkovací frekvence $f = 1$ Hz a senzor Sound Level Meter. Tento senzor byl pro všechna měření nastaven pro tzv. frekvenční vážení v poloze A [4]. Na senzoru je žádoucí nastavit měřící rozsah 35–90 dB. Vzhledem k tomu, že naměřené hodnoty akustických imisí prázdných učeben se mohou pohybovat okolo spodní hranice měřicího rozsahu senzoru, je zapotřebí pak takové hodnoty brát spíše za orientační, nežli za přesně určující. Výsledná hodnota hladiny intenzity zvuku, tzv. ekvivalentní hladina, je hodnota odpovídající průměru všech naměřených hodnot.

Tabulka 2 Měření akustických imisí prázdných učeben

Základní škola	$L_{A\mathrm{eq}}$ [dB]
ZŠ a MŠ Lišov	34
KAFT, Pedagogická fakulta JU	36
Jazyková škola České Budějovice	35
ZŠ Planá nad Lužnicí	37

Z tabulky vyplývá, že nejlépe je na tom ZŠ a MŠ Lišov, což odpovídá geografickému umístnění školy – velmi klidné místo na okraji malého města s téměř nulovou okolní dopravou. Největší hodnota akustických imisí působících zvenčí do prostoru učeben byla naměřena na ZŠ Planá nad Lužnicí. Škola je umístěna velmi blízko velmi vytížené komunikace České Budějovice–Praha.

Jedno z dalších měření bylo zaměřeno na zjištění ekvivalentní hladiny intenzity zvuku při výuce samotné. Ekvivalentní hladina je určena jako průměr všech hodnot získaných při měření, měření probíhalo při výuce jednoho pedagoga, různých předmětů a odlišných tříd. Dané hodnoty byly získány pomocí senzoru Sound Level Meter.

Tabulka 3 Měření ekvivalentní hladiny intenzity zvuku – stejný pedagog

Základní škola, předmět, vyučující	$L_{A\mathrm{eq}}$ [dB]
ZŠ a MŠ Lišov, fyzika 6.A, Bednář	63
ZŠ a MŠ Lišov, matematika 8.A, Bednář	55
ZŠ a MŠ Lišov, fyzika 9.A, Bednář	57
ZŠ a MŠ Lišov, fyzika 9.B, Bednář	60

Naměřené výsledky přesně odpovídají poznatkům z dané školy. Vyučujícímu se vždy třída 8.A jevila jako ta nejméně „hlučná“. Naopak v 6.A se pravidelně setkává s větší hlučností ze stran žáků. Obdobná měření byla provedena na ZŠ Planá nad Lužnicí. Naměřené hodnoty jsou výsledky měření při hodinách fyziky ve stejné učebně při výuce dvou různých pedagogů. Měření bylo provedeno pomocí senzoru General Science MultiMeasure, který zaznamenává hodnoty v rozmezí 50–100 dBA [5].

Tabulka 4 Měření hladin intenzity zvuku při výuce fyziky různými pedagogy

Základní škola, předmět, vyučující	$L_{A\mathrm{eq}}$ [dB]
ZŠ Planá nad Lužnicí, fyzika 6.A, Vochozka V.	64
ZŠ Planá nad Lužnicí, fyzika 6.B, Vochozka V.	58
ZŠ Planá nad Lužnicí, fyzika 9. roč., jiný pedagog	58
ZŠ Planá nad Lužnicí, fyzika 8.A, jiný pedagog	56

Z tabulky je vidět, že ekvivalentní hladina intenzity zvuku je při výuce fyziky pro všechny třídy v rozmezí mezi 56–58 dBA. Vyšší hodnota byla pouze ve třídě 6.A.

V tabulce 5 jsou změřeny ekvivalentní hladiny intenzity zvuku pro učebny fyziky na ZŠ a MŠ Lišov a ZŠ Planá nad Lužnicí v čase, kdy probíhala přestávka mezi výukou, a žáci byli přítomni v učebnách. Měření na ZŠ a MŠ Lišov bylo prováděno pomocí senzoru od firmy Vernier [4]. Měření na ZŠ Planá nad Lužnicí bylo prováděno pomocí senzoru od firmy Pasco [5].

Tabulka 5 Měření hladin intenzity zvuku v učebnách fyziky

Základní škola, učebna	L_{Aeq} [dB]
ZŠ a MŠ Lišov, učebna fyziky	68
ZŠ Planá nad Lužnicí, učebna fyziky	64

Vzhledem k tomu, že měření byla prováděna buď senzorem Sound Level Meter od firmy Vernier, nebo senzorem General Science MultiMeasure od firmy Pasco je žádoucí porovnat naměřené výsledky danými senzory mezi sebou. V tabulce 6 jsou uvedeny hodnoty změřené pomocí uvedených senzorů. Pro toto měření byly senzory zapojeny paralelně do jednoho PC a mohly tak nezávisle na sobě zaznamenávat měřená data.

Tabulka 6 Porovnání naměřených hodnot senzorů Sound Level Meter a General Science MultiMeasure

Název instituce	Vernier – L_{Aeq}	Pasco – L_{Aeq} [dB]
PF JČU, fyzikální praktika	58	59
ZŠ a MŠ Lišov, matematika	55	57
ZŠ a MŠ Lišov, fyzika	63	62
ZŠ a MŠ Lišov, tělesná výchova	69	71

Ze vzájemného porovnání naměřených hodnot daných senzorů lze říci, že výsledky se od sebe liší minimálními hodnotami. Jednotlivé senzory tedy i jimi naměřené hodnoty lze tak považovat za srovnatelné.

Závěr

Cílem příspěvku bylo nastínit možnosti měření akustických imisí ve školním prostředí. Z hodnot zjištěných při měření je zřejmé, že v současné době hodnoty hladin intenzity zvuku ve školním prostředí zatím nedosahují takových hodnot, aby docházelo při dlouhodobějším setrvání v takovýchto prostorách k porušení sluchového ústrojí. Pozitivní informací je, že současné naměřené hodnoty jsou srovnatelné s hodnotami naměřenými v roce 2003 (viz [1]).

Literatura

[1] *Capůrka, D.*: Měření hlučnosti na různých typech škol. Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2003.
[2] *Reichl, J., Všetička, M.*: Encyklopedie fyziky. (online). (cit. 2013-04-21). Dostupné z: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/208-zakladni-definice.
[3] *Zdraví a zdravotnictví*: Ochrana zdraví před nepříznivými účinky hluku a vibrací (502/2000 Sb.) (online). (cit. 2013-04-21). Dostupné z: http://www.zdrav.cz/modules.php?op=modload&name=News&file=article&sid=1902.
[4] *Vernier*: Vybavení pro výuku přírodovědných oborů (online). (cit. 2013-04-21). Dostupné z: http://www.vernier.cz/produkty/podrobne-informace/kod/slm-bta/.
[5] *Pasco*: Science education (online). (cit. 2013-04-21).
Dostupné z: http://www.pasco.cz/index.php?option=com_content&task=view&id=161&Itemid=1.
[6] *Vernier*: Vybavení pro výuku přírodovědných oborů (online). (cit. 2013-04-21). Dostupné z: http://www.vernier.cz/produkty/senzory.
[5] *Pasco*: Science education (online). (cit. 2013-04-21). Dostupné z: www.pasco.cz.

Matematické modelovanie na počítači vo vyučovaní fyziky

VERONIKA TIMKOVÁ[1] – *ZUZANA JEŠKOVÁ*[1] – *JAN VÁLEK*[2]

[1]Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice, SLOVENSKO

[2]Pedagogická fakulta MU, Brno

Úvod

S nástupom školskej reformy na Slovensku roku 2008 došlo vo vzdelávaní k značným zmenám, na ktoré väčšina škôl nebola pripravená. Zmeny zasiahli nielen obsah, ale aj metódy výučby, ktoré boli doposiaľ viac orientované na získavanie poznatkov a hlavným cieľom boli výstupné teoretické vedomosti žiakov. Cieľom reformy je preniesť ťažisko výučby orientovanej na obsah vzdelávania smerom k rozvoju spôsobilostí a zručností žiakov. Veľký dôraz sa kladie na uplatňovanie interaktívnych metód vo vzdelávaní a aktívneho žiackeho učenia.

Obdobná situácia nastala tiež v Českej republike, kde od r. 2005 začal platiť nový Rámcový vzdelávací program pre základné vzdelávanie. Zmeny vychádzali z novej stratégie vzdelávania, ktorá kladie dôraz na činnostný a bádateľský charakter výučby prírodných vied. Na túto reformu nadväzovala následne reforma stredoškolského vzdelávania, ktorá sa niesla v podobnom duchu, t.j. okrem porozumenia vedeckých poznatkov zdôrazňuje aj žiacke osvojovanie si empirických a teoretických metód prírodovedného výskumu.

V slovenských aj českých vzdelávacích programoch zameraných na prírodné vedy sa často objavuje pojem výskum, resp. bádanie. Tento prístup v súčasnosti často skloňovaný v celoeurópskom kontexte ako *Inquiry-based science education*, alebo prírodovedné vzdelávanie založené na aktívnom žiackom bádaní [1, 2] znamená, že žiak pracuje podobným spôsobom ako vedec a cieľom nie je len poznatok ako taký, ale aj cesta, ako sa žiak k tomuto poznatku dopracuje. Tento spôsob vzdelávania súvisí hlavne s experimentovaním, ale súčasťou práce vedca je aj tvorba modelov a teórií, ktorými sledovaný jav popisuje. Modelovanie (smerujúce predovšetkým k tvorbe matematických modelov situácií) tak ide ruka v ruke s experimentovaním, preto by aj v prírodovednom vzdelávaní mali byť tieto dva procesy zastúpené. Deje prebiehajúce okolo nás sú však väčšinou zložité a ich popis a riešenie často presahuje rámec strednej školy. V súčasnosti dostupné digitálne technológie však môžu práve ako v oblasti experimentovania tak aj pri tvorbe a využívaní matematických modelov fyzikálnych javov významne pomôcť. Pri tvorbe matematických modelov javov často pomáhajú obísť náročnú matematiku, čím vieme žiakom predstaviť a popísať deje, ktoré sú bližšie realite a ktoré nedokážu sami spočítať. Implementovať matematické modelovanie do fyzikálneho vzdelávania na stredných školách však nie je jednoduché. Do veľkej miery závisí od pripravenosti učiteľa a jeho zručností a schopností v tejto oblasti.

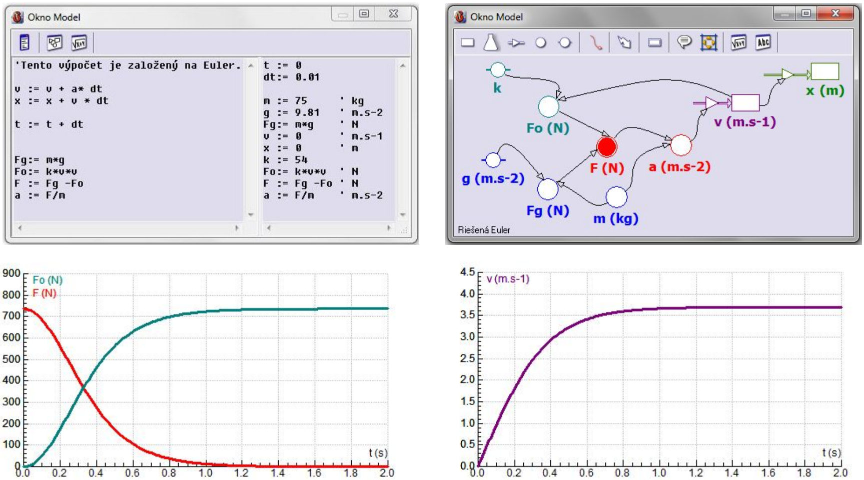
Matematické modelovanie na počítači

Ak hovoríme o matematickom modelovaní, máme na mysli model nejakého javu alebo systému, ktorý je reprezentovaný matematicky najčastejšie v podobe rovníc, pričom každý z parametrov rovnice odpovedá nejakej fyzikálnej veličine popisujúcej vlastnosti systému. Ak poznáme matematickú funkciu, ktorá je riešením rovnice, môžeme pomocou počítača zobraziť grafickú reprezentáciu modelovaného javu. Tento postup je známy ako *statické modelovanie*. Na druhej strane, *dynamické modelovanie* je založené na výpočtoch vykonávaných v postupnosti elementárnych krokov. Počas stanoveného konštantného kroku, resp. intervalu, ktorý najčastejšie predstavuje časový interval, považujeme hodnoty premenných za konštantné. Toto zjednodušenie vedie k približnému výsledku, pričom jeho presnosť rastie s klesajúcou veľkosťou časového intervalu. Počítač nám pomáha v tom, že dokáže realizovať veľké množstvo výpočtov v relatívne krátkom čase a zostavením dynamického modelu môže aj žiak strednej školy riešiť náročnejšie problémy, ktoré by na základe svojich matematických schopností vyriešiť nedokázal. Dynamické modelovanie ako jeden z prístupov k riešeniu fyzikálnych problémov sa v našom vzdelávaní systematickejšie objavuje od začiatku 90-tych rokov [3, 4, 5, 6]. Mnohí autori zaoberajúci sa touto problematikou vytvorili viacero výučbových materiálov vhodných k zaradeniu na strednej škole [7, 8, 9].

V nasledujúcich kapitolách budeme matematické modelovanie na počítači, či už statické alebo dynamické, rozdeľovať do troch úrovní

- Využívanie hotových modelov (apletov, počítačových simulácií) vytvorených na tomto princípe, pričom učiteľ, ani žiaci do matematickej podoby modelu skrývajúcej sa za modelom nezasahujú ani ho nijak neupravujú. Výstupom modelu pritom môže byť počítačová simulácia, resp. animácia alebo graf vhodnej závislosti popisujúcej fyzikálnu situáciu.
- Úprava existujúcich modelov a samostatná tvorba modelov učiteľom vo vhodnom programe, pričom žiak je v pozícii používateľa modelu, t.j. pracuje so simuláciou.
- Úprava existujúcich modelov a samostatná tvorba modelov žiakmi vo vhodnom programe pod vedením učiteľa.

Pre prírodovedné vzdelávanie existuje niekoľko dostupných modelovacích programov, ktoré umožňujú vytvárať statické a dynamické modely (napr. Modellus, MS Excel, COACH, dávnejšie Famulus). Na Slovensku často používaný systém COACH 6 (http://cma-science.nl/en/) umožňuje vytvárať matematické modely v textovom a grafickom móde. Textový model je založený na rovniciach a výpočtoch, ktoré sa cyklicky opakujú. Pri ikonografickom modelovaní sú premenné reprezentované grafickými symbolmi. Obr. 1 predstavuje dynamický model pohybu parašutistu, na ktorého počas pádu pôsobí sila, ktorej veľkosť sa mení, pričom však počas zvoleného malého časového intervalu považujeme výslednú silu, resp. zrýchlenie a rýchlosť za konštantné veličiny. Kvôli širokej ponuke možností je tento program možné využívať na všetkých troch úrovniach modelovania. Samozrejme, že môžeme vo výučbe používať aj klasické programovacie jazyky, v ktorých pripravíme základné knižnice príkazov a žiaci ich následne môžu využívať vo svojich modeloch (napr.: Pascal, C alebo rozhranie, pomocou ktorého je možné okamžite prezentovať modely on-line, ako je napríklad PHP) [10, 11, 12].



Obr. 1 Model parašutistu v grafickom a textovom móde a odpovedajúce grafy závislosti výslednej pôsobiacej sily, odporovej sily a rýchlosti jeho pohybu (COACH 6)

Menej náročnou verziou programov na tvorbu modelov je Algodoo (http://www.algodoo.com/), predtým Phun [13]. V tomto programe je možné „nakresliť“ rôzne telesá a následne im priradiť určité fyzikálne vlastnosti, preto je možné s ním pracovať i na základnej škole. Avšak ide skôr o prostredie na vytváranie simulácií a apletov, ktorých fyzikálna podstata nám ostáva skrytá a my vidíme len výsledné vlastnosti nasimulovaného systému, preto ho môžeme využívať len na prvej a obmedzene na druhej úrovni modelovania. Ešte menšie požiadavky na užívateľa kladú aj na internete dostupné počítačové aplety a simulácie, napr. PheT, simulácie Waltera Fendta a ďalšie.

Matematické modelovanie na počítači v školskej praxi – prieskum

V súvislosti s metódou matematického modelovania sme sa zaoberali otázkou, *do akej miery sa vo vyučovaní fyziky metóda matematického modelovania na počítači na stredných školách využíva s čím úzko súvisí otázka, či sú učitelia pripravení a zruční v tejto oblasti.* Pri hľadaní odpovede sme realizovali výskum, v rámci ktorého sme so zreteľom na matematické modelovanie analyzovali vzdelávacie programy a zároveň sme zisťovali aktuálny stav vo výučbe prostredníctvom dotazníka, ktorý sme zadali vzorke učiteľov fyziky zo Slovenska a Čiech.

Analýza štátnych vzdelávacích programov

Aj keď sa v súčasnom štátnom vzdelávacom programe Fyzika ISCED 3A pre gymnáziá na Slovensku skloňujú pojmy „bádanie a experiment" kľúčové slovo matematické modelovanie sme v ňom hľadali márne. Slovo „modelovanie" sme našli len v spojení s modelmi objektov alebo javov. Ak sa ale zameriame na podstatu modelovania, tak môžeme modelovanie nájsť veľmi nepriamo pri cieľoch predmetu fyzika ako napríklad opísať spôsoby, ako prírodné vedy pracujú; formulovať a testovať hypotézy v podmienkach riadenia premenných veličín; organizovať, prezentovať a vyhodnocovať dáta rôznymi spôsobmi a vytvárať predpovede založené na dátach [14]. Modelovanie sa tiež objavuje v cieľových požiadavkách na maturitu z fyziky. Konkrétne v oblasti Aplikácia má byť žiak schopný pracovať s počítačom v oblasti matematického modelovania fyzikálnych situácií, fyzikálnych závislostí a spracovania výsledkov fyzikálnych meraní [15].

Podobná situácia je aj v Českej republike. V Rámcovom vzdelávacom programe pre gymnáziá (RVP G) v oblasti Človek a príroda v odbore Fyzika sa explicitne matematické modelovanie nenachádza. Prácu s modelmi môžeme nájsť len medzi riadkami cieľových zameraní oblasti Človek a príroda, kde sa na str. 27 uvádza, že žiak má byť vedený k [16]:

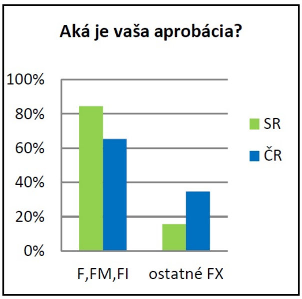
- „tvorbě modelu přírodního objektu či procesu umožňujícího pro daný poznávací účel vhodně reprezentovat jejich podstatné rysy či zákonitosti,
- používání adekvátních matematických a grafických prostředků k vyjadřování přírodovědných vztahů a zákonů,
- využívání prostředků moderních technologií v průběhu přírodovědné poznávací činnosti."

Modelovanie sa objavuje aj v českých požiadavkách na maturitné skúšky. Uvádza sa, že žiak má vedieť vytvárať fyzikálny model reálnej situácie (zjednodušovať, charakterizovať fyzikálnymi veličinami, rozlíšiť podstatné vlastnosti od nepodstatných, rozlíšiť premenné veličiny a stále parametre, vybrať fyzikálny zákon a rozpoznať medze jeho platnosti, rozhodnúť, či daný model je vhodný pre daný problém) [17].

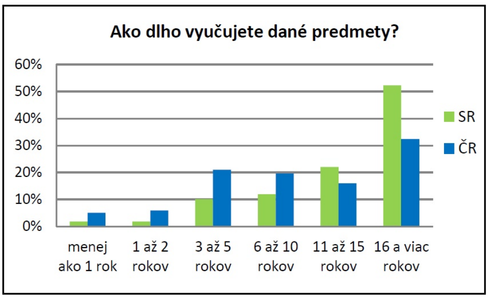
Napriek tomu, že vzdelávacie programy na Slovensku ani v Čechách explicitne nezaväzujú učiteľa k využívaniu matematického modelovania sme osobne presvedčení, že táto metóda má vo vyučovaní fyziky na strednej škole svoje miesto. Preto sme sa pozreli na túto problematiku podrobnejšie s cieľom zistiť detailné informácie o postavení tejto metódy a pripravenosti učiteľa k jej používaniu. V priebehu rokov 2013–2015 sme uskutočnili a analyzovali dva nezávislé prieskumy v Čechách aj na Slovensku. Realizácia prebehla formou elektronických dotazníkov. Aj keď nešlo o úplne identické prieskumy, ich obsah bol veľmi podobný, preto sme sa rozhodli predstaviť niekoľko spoločných výsledkov.

Výskumná vzorka

Prieskumu sa zúčastnilo spolu 109 slovenských a 219 českých učiteľov zo základných a stredných škôl. Najskôr sme zisťovali zloženie našich respondentov. Išlo prevažne o učiteľov fyziky, resp. fyziky v kombinácii s matematikou alebo informatikou (obr. 2) s dlhoročnou praxou (obr. 3).



Obr. 2 Rozdelenie respondentov podľa aprobácie

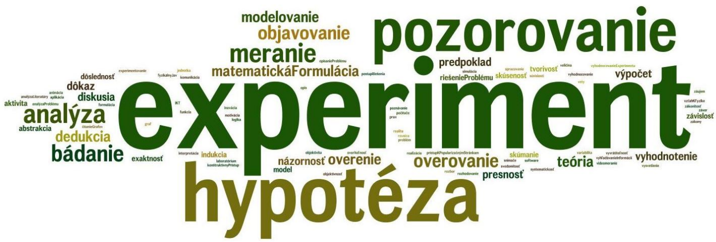


Obr. 3 Rozdelenie respondentov podľa dĺžky pedagogickej praxe

Výsledky prieskumu

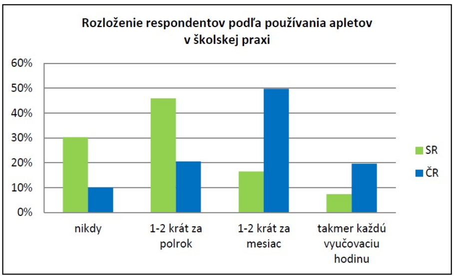
Zaujímavé výsledky poskytla jedna z úvodných otázok dotazníka, ktorá od účastníkov požadovala charakterizovať *vedecký prístup k riešeniu prob-*

lémov, a to pomocou štyroch kľúčových slov, ktoré učitelia považujú v odpovedi na uvedenú otázku za najpodstatnejšie. Hoci túto otázku zodpovedala len menšia vzorka slovenských učiteľov (57), odpovede sú zaujímavé, preto ich na tomto mieste uvádzame v podobe slovného mračna, v ktorom veľkosti uvedených kľúčových slov reprezentujú frekvenciu výskytu uvedených kľúčových slov (obr. 4). Z mračna vidieť, že dominantné postavenie v odpovediach respondentov zaujíma jednoznačne experiment. Slová ako model, modelovanie sa síce v odpovediach respondentov objavujú, avšak vo veľmi malej miere, podobne ako ďalšie s tým súvisiace pojmy (teória, matematická formulácia, abstrakcia, dedukcia, analýza, riešenie problému, IKT a pod.). Experiment učitelia považujú za najdôležitejšiu vedeckú metódu, čo koreluje aj s obsahom štátneho vzdelávacieho programu.



Obr. 4 Slovné mračno – kľúčové slová charakterizujúce vedecký prístup k riešeniu problémov

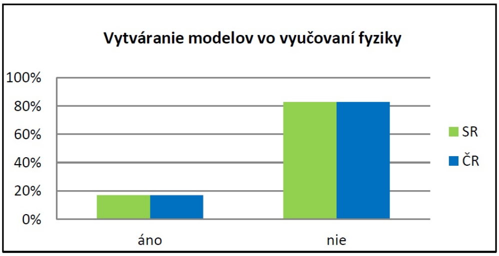
V ďalších otázkach sme sa postupne zameriavali na prvé dve úrovne využívania matematických modelov na počítači, a to od používania hotových apletov až k tvorbe vlastných modelov učiteľom v niektorom z dostupných nato určených programov.



Obr. 5 Rozloženie respondentov podľa používania apletov v školskej praxi

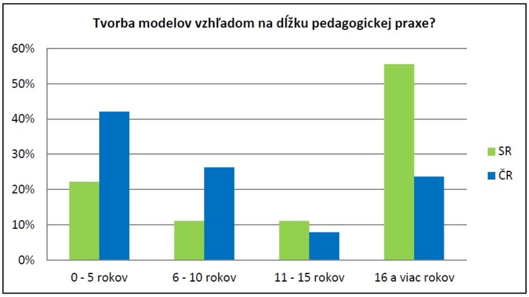
V otázke *či a ako často využívajú počas vyučovacích hodín aplety* môžeme vidieť mierny rozdiel medzi slovenskými a českými respondentmi (obr. 5). Zatiaľ čo českí učitelia sa hlásia k používaniu apletov v najväčšej miere raz až dvakrát za mesiac, u slovenských učiteľov je to len raz až dvakrát za polrok. Neprehliadnuteľný je aj fakt, že až 30 % slovenských učiteľov uvádza, že aplety nepoužíva na hodinách vôbec.

Ďalšia otázka smerovala k vyššej úrovni využívania modelovania, t.j. týkala sa samostatnej tvorby matematických modelov učiteľom. Zisťovali sme, či sú učitelia schopní vytvárať modely, čo je jedným z prvých predpokladov, aby ich mohli použiť aj vo vyučovaní a naučiť modelovať aj svojich žiakov. V tomto prípade sa slovenskí a českí respondenti nelíšili (obr. 6). U českých respondentov sa k schopnosti vytvárať modely hlási len 17 % učiteľov rovnako ako na Slovensku. Vzhľadom na toto nízke percento učiteľov sme už ďalej nezisťovali, či sa medzi mini nachádzajú aj takí, ktorí prešli na najvyššiu úroveň modelovania a vytvárajú modely spolu so žiakmi v rámci výučby fyziky. Pozrime sa ale bližšie na týchto učiteľov aby sme zistili, čo ich k matematickému modelovaniu na počítači priviedlo.



Obr. 6 Rozloženie respondentov podľa používania/vytvárania modelov v školskej praxi

Prvým faktorom, ktorý by mohol používanie modelovania ovplyvňovať, je vek respondentov, resp. dĺžka ich pedagogickej praxe. Z obr. 7 badáme výraznejší rozdiel medzi stavom v Čechách a na Slovensku. Zatiaľ čo v Čechách sa modelovaniu venujú predovšetkým mladí učitelia, na Slovensku je to práve naopak. Pôvod gramotnosti starších slovenských učiteľov s dlhoročnou praxou môžeme hľadať zrejme v kurzoch celoživotného vzdelávania, ktoré títo učitelia navštevujú. U mladých učiteľov pravdepodobne vyplýva z ich čerstvých skúseností z vysokých škôl, kde sa modelovaniu začína venovať väčšia pozornosť. Zaujímavé je, že v najmenšej miere modelujú učitelia v takpovediac najlepších rokoch, t.j. s praxou 11 až 15 rokov.



Obr. 7 Rozloženie respondentov, ktorí vytvárajú modely vzhľadom na dĺžku ich pedagogickej praxe

Skúsenosti učiteľov s modelovaním na vysokej škole uvádza tabuľka 1. Najprv sme sa zamerali opäť na najjednoduchšiu formu používania modelov, t.j. apletov, resp. počítačových simulácií (tab. 1). Všimnime si najmä respondentov, ktorí aplety používajú. Vidíme, že aj napriek tomu, že veľká časť učiteľov, ktorá používa aplety v praxi, počas svojho vysokoškolského štúdia s apletmi nepracovala. Títo učitelia sú však schopní ich používať a aj to v školskej praxi uplatňujú, či už v Čechách alebo na Slovensku.

Tabuľka 1 Počty českých/slovenských respondentov, podľa používania modelov – apletov v praxi vzhľadom na skúsenosti z vysokoškolského štúdia

	Pracovali s apletmi na univerzite		Nepracovali s apletmi na univerzite		spolu	
	ČR	SR	ČR	SR	ČR	SR
Používajú aplety v praxi	47	15	150	61	197	76
Nepoužívajú aplety v praxi	12	7	10	26	22	33
spolu	59	22	160	87	219	109

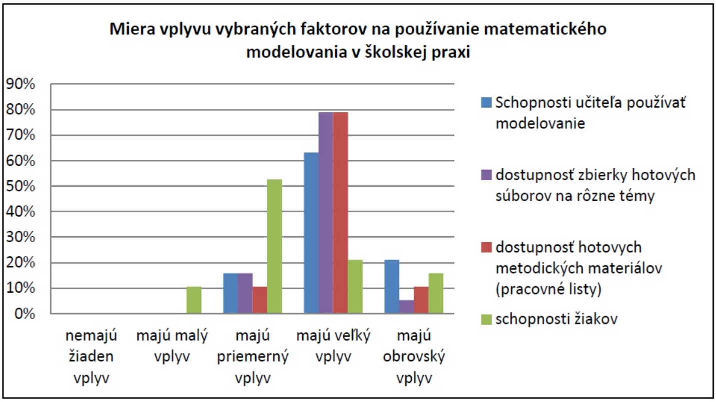
Na druhej strane, ak sa zameriame na vytváranie modelov učiteľmi, čo je oproti používaniu hotových apletov oveľa náročnejšie, môžeme pozorovať presne opačný výsledok. Markantnejšie je to viditeľné u českých respondentov (tab. 2), kde až 68 % tých, čo vytvárali modely už na univerzite, vytvárajú modely aj v súčasnosti. Údaje zo Slovenska vyzerajú na prvý pohľad pesimistickejšie (tab. 2). Avšak, slovenskí respondenti boli z väčšej časti učitelia s dlhoročnou praxou (až 52 % s praxou väčšou ako 16 rokov), takže je len prirodzené, že sa počas vysokoškolského štúdia s matematickým modelovaním na počítači nestretli. Napriek tomu, ako sme spomínali vyššie, práve oni v najväčšej miere modelovanie používajú aj na vyššej úrovni. Zisťovali sme preto, či sa s ním stretli niekde inde. Hodnoty v zátvorke v tabuľke 2 predstavujú nielen respondentov, ktorí sa s modelovaním stretli počas vysokoškolského štúdia ale aj počas doplňujúceho štúdia, resp. počas školení v rámci celoživotného vzdelávania. Tým sme sa dostali k podobným výsledkom ako v Čechách, teda až 72 % učiteľov, ktorí sa s modelovaním stretli počas svojho štúdia či iného vzdelávania, modely aj vytvára. Všimnime si tiež, že len veľmi málo z nich (iba 31 % českých a 28 % slovenských učiteľov), ktorí tvoria modely bolo schopných prejsť na túto úroveň pomocou samoštúdia (tab. 2), zatiaľ čo pri apletoch to bolo 76 % českých a 80 % slovenských učiteľov, ktorí aplety používajú (tab. 1).

Tabuľka 2 Počty českých/slovenských respondentov, podľa tvorby modelov v praxi vzhľadom na skúsenosti z vysokoškolského štúdia

	Vytvárali modely na univerzite		Nevytvárali modely na univerzite		spolu	
	ČR	SR	ČR	SR	ČR	SR
Tvoria modely	26	8(13)	12	10(5)	38	18
Netvoria modely	33	14(16)	148	77(75)	181	91
spolu	59	22(29)	160	87(80)	219	109

Ďalšia kategória otázok smerovala k tomu, *do akej miery ovplyvňujú určité faktory reálne zaradenie modelovania do vyučovacieho procesu* (obr. 8). Z odpovedí 57 slovenských učiteľov vidíme, že schopnosti žiakov vidia učitelia ako najmenej podstatný faktor pre reálne využívanie modelovania. Zdá sa, že učitelia svojim žiakom dôverujú ale naopak, už menej dôverujú svojim vlastným schopnostiam, ktoré považujú popri učiteľmi najviac zdôrazňovanej nevyhnutnej dostupnosti metodických materiálov a počítačových súborov za kľúčové.

Učitelia však uvádzajú aj ďalšie faktory. Veľký alebo obrovský vplyv má podľa nich aj materiálne vybavenie učební, či už hardvérové (90 % respondentov) alebo softvérové (73 % respondentov), možnosť delenia hodín (73 % respondentov) a samozrejme aj dostatočná časová dotácia fyziky (84 % respondentov). Čo sa týka českých respondentov, im sme položili sériu otázok už konkrétne zameraných na dostupnosť podporných materiálov (tab. 3). Aj tu môžeme badať tendenciu záujmu o viac podporných materiálov, či už sa jedná o pripravené modely alebo pracovné listy.



Obr. 8 Vplyv vybraných faktorov na používanie matematického modelovania v školskej praxi

Tabuľka 3 Otázky týkajúce sa potreby dostupnosti hotových počítačových modelov a pedagogických materiálov

		ČR	
		áno	nie
1.	Pokud bude více počítačových modelů dostupných na internetu na jednom místě, uvítám to a budu s nimi pracovat.	195	19
2.	Pokud budou počítačové modely dostupné na internetu bez nutnosti instalovat do počítače další programy, uvítám to a budu s nimi pracovat.	202	17
3.	Pokud bych mohl/a zaslat návrh na nový model, využil/a bych této možnosti.	101	118
4.	Pokud budou počítačové modely vycházet z dějů v běžném životě, budu s nimi v hodinách pracovat.	206	13
5.	Pokud budou k počítačovým modelům vytvořeny pracovní listy, uvítám to a budu s modely a pracovními listy pracovat.	173	46
6.	Pokud budou dostupné počítačové modely interaktivní, uvítám to a budu s nimi pracovat.	197	22

Diskusia a záver

Na záver v krátkosti zhrnieme výsledky prieskumu zameraného na používanie matematického modelovania na počítači na Slovensku aj v Čechách.

1. Ukazuje sa, že Slovensko a Česká republika sú na tom čo sa týka matematického modelovania na počítači veľmi podobne. Aj keď českí učitelia používajú počítačové simulácie a aplety vo väčšej miere ako slovenskí učitelia, tvorba matematických modelov učiteľom na počítači je zastúpená približne rovnako. Ukazuje sa tiež rozdielna veková kategória používateľov modelovania na vyššej úrovni. Zatiaľ čo v Čechách ide o mladých učiteľov, na Slovensku sú to skôr učitelia s dlhoročnou praxou, ktorí sa intenzívnejšie venujú ďalšiemu vzdelávaniu.
2. Používanie matematického modelovania na počítači v najjednoduchšej forme cez hotové aplety a počítačové simulácie, nerobí učiteľom v praxi problém aj bez nejakého špeciálneho vzdelávania. Aplety dostupné napr. na internete sú zvyčajne pripravené tak, že aj učiteľ–začiatočník dokáže s nimi bez problémov pracovať.
3. Ak hovoríme o druhej úrovni, na ktorej sa matematické modelovanie môže v škole využívať, t.j. úprava modelu, resp. tvorba modelu učiteľom, sú výsledky pesimistickejšie. K schopnosti tvoriť matematické modely sa prihlásila len jedna šestina učiteľov z Čiech a Slovenska. Z toho môžeme usúdiť, že žiaci vo vyučovaní fyziky nepoužívajú matematické modelovanie na počítači na opis fyzikálnych javov ani na riešenie úloh. Zároveň sa ukázalo, že naučiť sa tvoriť modely nie je pre učiteľov jednoduché. Iba jedna tretina respondentov, ktorí sa prihlásili k tejto úrovni modelovania, to zvládla samoštúdiom. Z uvedeného vyplýva, že bez ďalšieho vzdelávania učiteľov v tejto oblasti sa metóda matematického modelovania do praxe bude implementovať veľmi ťažko. Práve tu sa ukazuje, aký veľký vplyv má vysokoškolská príprava a ďalšie vzdelávanie na školskú prax. Zároveň je to jasným signálom, aby boli do študijného plánu študentov učiteľstva zaradzované také predmety, kde sa študenti zoznámia aj s touto vo vede používanou a dôležitou metódou.

Snahou vzdelávacích inštitúcií zameraných na prípravu budúcich učiteľov fyziky je vzdelávať budúcich učiteľov a učiteľov z praxe aj v oblasti matematického modelovania. Na Slovensku je učiteľom z praxe ako aj študentom učiteľstva v kombinácii s fyzikou ponúkaný kurz Aktívne bádanie v počítačom podporovanom laboratóriu (akreditovaný na PF UPJŠ v Košiciach, http://ccv.upjs.sk/kontinualnevzdelavanie.php). Okrem digitálnych nástrojov zameraných na meranie pomocou počítačových senzorov, meranie z videozáznamu alebo obrázku sa kurz v jednom zo svojich modulov venuje aj matematickému modelovaniu na počítači s dôrazom na dynamické modelovanie. Podobný kurz sa pripravuje aj na Pedagogickej fakulte MU v Brne.

Za dôležité tiež považujeme to, aby sa študenti fyziky na univerzite s metódou dynamického modelovania stretli aj v štandardnej výučbe. Na PF UPJŠ v Košiciach sa snažíme využívať dynamické modelovanie na počítači už aj počas základného kurzu fyziky na riešenie fyzikálnych úloh ako aj pri riešení semestrálnych projektov zameraných na riešenie vybraných problémov z mechaniky, kedy je úlohou študentov navrhnúť vhodné experimenty a vytvoriť odpovedajúcu teóriu, resp. matematický model na počítači. Podobne v Čechách sa študenti s touto metódou stretávajú už počas bakalárskeho stupňa aj v rámci špeciálnych predmetov, ako napr. Počítače vo fyzike, kde sa s princípmi dynamického modelovania stretávajú v podobe riešenia úloh pomocou vhodného softvéru.

Na podporu reálneho využívania matematického modelovanie na počítači vo vyučovaní fyziky na strednej škole vytvárame zbierku metodických materiálov pre učiteľa a pracovných listov pre žiaka spolu s podpornými počítačovými súbormi aktivít, resp. vzorových výsledkov. V súčasnosti overujeme návrh metodiky implementácie modelovania na počítači vo výučbe fyziky v 1. ročníku gymnázia. Navrhnutá metodika poskytne učiteľom podrobný postup, ako so žiakmi modelovať a ako modelovanie využívať v spojení s experimentom tak ako je to obvyklé v reálnej vede.

Literatura

[1] *Held, Ľ. a kol.*: Výskumne ladená koncepcia prírodovedného vzdelávania (IBSE v slovenskom kontexte). VEDA, Bratislava, 2011.

[2] *Ješková, Z., Kireš, M., Onderová, Ľ.*: Školská reforma na Slovensku mení spôsob výučby prírodných vied. Československý časopis pro fyziku 5–6, 2012.

[3] *Dvořák, L.*: Famulus 3.1. Výukové programy I. Modely. Computer Equipment, Praha, 1992.

[4] *Dvořák, L.*: Famulus 3.5. Příručka uživatele. Computer Equipment, Praha, 1992.

[5] *Dvořák, L., Květoň, K.*: Famulus: a tool and an environment for computation, modelling and other tasks in research, engineering and CAE. In: Proccedings of the International Conference CBLIS ’93, Vienna, Dec. 1993.

[6] *Lepil, O.*: Demonstrace a model ve výuce o kmitech. Didaktika fyziky po čtyřiceti letech, sborník k jubileu J. Brockmeyerové-Fenclové, ZČU Plzeň, 1997, s. 43–49.

[7] *Lepil, O.*: Modelování dějů v elektrických obvodech. MFI, roč. 10, 2001, s. 603–610.

[8] *Lepil, O., Richterek, L.*: Dynamické modelování. Repronis, Olomouc, 2007. Dostupné z: http://www.ufm.sgo.cz/ke_stazeni/Dynamicke_modelovani.pdf

[9] *The Ješková, Z. a kol.*: Využitie informačných a komunikačných technológií v predmete fyzika pre stredné školy. Učebný materiál – modul 3. 1. vydanie. Elfa, Košice, 2010.

[10] *Válek, J., Sládek, P.*: Web based dynamic modeling by means of PHP and JavaScript. In: J. Kapounová, K. Kostolányová. Information and Communication Technologies in Education. Rožnov pod Radhoštěm: Univerzita Ostrava, 2012, s. 291–301.

[11] *Válek, J., Sládek, P.*: Web based dynamic modeling by means of PHP and JavaScript – part II. In: J. Kapounová, K. Kostolányová. Information and Communication Technologies in Education. Rožnov pod Radhoštem: Univerzita Ostrava, 2013, s. 294–302.

[12] *Válek, J., Sládek, P., Novák, P.*: Web based dynamic modeling by means of PHP and JavaScript – part III. In: J. Kapounová, K. Kostolányová. Information and Communication Technologies in Education. Rožnov pod Radhoštem: Univerzita Ostrava, 2014, s. 264–271.

[13] *Burk, J.*: Raising the energy level of my physics classes Home About Computational Modeling More than a blogroll Physics Teacher Camp Algodoo physics-a virtual physics lab for computational thinking. Quantum Progress. 2011. Dostupné z: https://quantumprogress.wordpress.com/2011/11/27/algodoo-physics-a-virtual-physics-lab-for-computational-thinking/

[14] Štátny vzdelávací program pre gymnázia v Slovenskej republike, ISCED 3A – Vyššie sekundárne vzdelávanie. Štátny pedagogický ústav, Bratislava, 2011. Dostupné z: http://www.statpedu.sk/files/documents/svp/gymnazia/isced3_spu_uprava.pdf

[15] Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z fyziky. Štátny pedagogický ústav, Bratislava, 2011. Dostupné z: http://www.statpedu.sk/sites/default/files/dokumenty/cielove-poziadavky-na-maturitne-skusky/fyzika_cp.pdf

[16] Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. Výzkumný ústav pedagogický, Praha, 2007. Dostupné z: http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPG-2007-07_final.pdf

[17] Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání: Katalog požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky, zkušební předmět: fyzika. 2008. Dostupné z: http://www.kavalirka.cz/download/upload/kavalirka_1232988087_64.pdf

[18] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Výzkumný ústav pedagogický, Praha, 2007. Dostupné z: http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPZV_2007-07.pdf

[19] *Timková, V., Ješková, Z.*: Implementation of computer modeling in physics education, In: J. Kapounová, K. Kostolányová. Information and Communication Technologies in Education. Rožnov pod Radhoštem: Univerzita Ostrava, 2014, s. 245–253.

[20] *Timková, V.*: Matematické modelovanie fyzikálnych javov s podporou počítača vo vyučovaní fyziky: rigorózna práca. UPJŠ, Košice, 2014.

[21] *Válek, J.*: Modelování fyzikálních jevů pro využití ve výuce fyziky na ZŠ a SŠ. Dizertační práce, Univerzita Palackého, Olomouc, 2014.

INFORMATIKA

Jak skáče žabka
(Úlohy z MO kategorie P, 34. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Tentokrát se blíže seznámíme s jednou soutěžní úlohou z aktuálního 65. ročníku Matematické olympiády kategorie P (školní rok 2015/16). Byla zadána jako praktická úloha domácího kola a ačkoliv za ni téměř každý z řešitelů získal nějaké body, ve většině případů to byly jenom 2 až 4 body z 10 možných, což odpovídá nějakému velmi primitivnímu a neefektivnímu řešení založenému na zkoušení všech možností hrubou silou. Z téměř stovky účastníků domácího kola olympiády vyřešilo tuto úlohu zcela správně na plný počet bodů pouze jedenáct.

Všechny soutěžní úlohy pro celý 65. ročník MO kategorie P připravili naši slovenští kolegové z Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislavě. Zadání úlohy si zde uvedeme v českém překladu jenom s mírnými textovými úpravami, řešení rozebereme trochu podrobněji a doplníme ho nově napsanými programovými ukázkami.

* * * * * * * * * * * * *

Žabka Šandyna ráda skáče po kamenech v rybníku. V rybníku jich je celkem n a jsou očíslovány od 1 do n. Kameny jsou malé, takže si je představíme jako body. Kámen s číslem i leží na souřadnicích x_i, y_i. Šandyna dnes doskákala z kamene číslo 1 na kámen číslo n. Cestou mohla některé kameny (včetně kamenů 1 a n) navštívit i vícekrát. Žabka dokáže skočit libovolně daleko. Skákání ji ale unavuje, a tak každý její skok kromě prvního je vždy (ostře) kratší než skok bezprostředně předcházející.

Soutěžní úloha

Pro dané polohy kamenů spočítejte, kolik nejvýše skoků mohla žabka Šandyna provést během své cesty z kamene 1 na kámen n.

Formát vstupu

Na prvním řádku vstupu je zadán počet kamenů n. Na i-tém z následujících n řádků jsou uvedeny souřadnice kamene číslo i. Jediný řádek výstupu obsahuje jedno celé číslo – maximální možný počet skoků.

Omezení a hodnocení

Řešení bude testováno s deseti sadami vstupních dat. Za každý testovací vstup můžete získat 1 bod. V jednotlivých vstupních sadách je maximální hodnota n následující: 2, 3, 7, 18, 50, 100, 200, 1000, 2000, 3000.

Všechny souřadnice jsou z rozsahu od 0 do 10^9 včetně. V prvních pěti testovacích vstupech dokonce žádná souřadnice nepřekročí hodnotu 10^4.

Příklad

Vstup:	Výstup:
6	7
0 1	
5 0	
8 3	
3 3	
3 5	
3 2	

Vysvětlení: Jedna optimální posloupnost sedmi skoků vedoucí z kamene číslo 1 na kámen číslo 6 vypadá takto: $1 \to 3 \to 5 \to 1 \to 6 \to 5 \to 4 \to 6$. Tyto skoky mají postupně délky: $2\sqrt{17} > \sqrt{29} > 5 > \sqrt{10} > 3 > 2 > 1$.

* * * * * * * * * * * *

Nejjednodušší řešení je založeno na prostém zkoušení všech možných cest z kamene číslo 1 na kámen číslo n, jak by žabka mohla skákat. Takové řešení velmi snadno naprogramujeme pomocí rekurze. Rekurzivní procedura dostane ve vstupních parametrech číslo kamene, kde právě stojí žabka, počet již uskutečněných skoků od startu a délku posledního provedeného skoku. Procedura v cyklu postupně zkusí provést skok na každý z ostatních kamenů a je-li takový skok možný (tzn. je-li kratší než dosud poslední provedený skok), procedura se rekurzívně zavolá na cílový kámen tohoto skoku. Kdykoliv se žabka ocitne na cílovém kameni číslo n, může zlepšit (tj. zvýšit) dosud maximální nalezený počet skoků z kamene 1 na kámen n. I po dosažení kamene číslo n ale bude ještě zkoušet skákat dál.

```
program Zabka1;

const MaxKamenu = 3000;              {maximální počet kamenů}
var N: integer;                      {skutečný počet kamenů}
    Kameny: array[1..MaxKamenu] of
      record x, y: longint end;      {souřadnice kamenů}
    Max: integer;                    {výsledný max. počet skoků}
    i: integer;

function Vzdal(a, b: integer): int64;
{počítá kvadrát vzdálenosti kamenů číslo a, b}
var dx, dy: longint;
begin
dx:=Kameny[a].x - Kameny[b].x;
dy:=Kameny[a].y - Kameny[b].y;
Vzdal:=dx*dx + dy*dy
end; {Vzdal}

procedure Cesta(Kde: integer; Skoky: longint;
                Naposled: int64);
{parametry: kde žabka stojí, kolik skoků dosud udělala, kvadrát
délky posledního skoku; procedura používá globální proměnné N
a Max, výsledný maximální počet skoků ze startu do cíle bude
v proměnné Max}
var i: integer;
begin
if (Kde = N) and (Skoky > Max) then Max:= Skoky;
                                  {žabka je v cíli}
for i:=1 to N do             {žabka zkusí skočit na i-tý kámen}
  if (i <> Kde) and (Vzdal(i, Kde) < Naposled) then
                                  {skok na i-tý kámen je možný}
    Cesta(i, Skoky+1, Vzdal(i, Kde));
end; {Cesta}

begin
read(N);
for i:=1 to N do
  read(Kameny[i].x, Kameny[i].y);
Max:=0;
Cesta(1, 0, 999999999999999999);
writeln(Max)
end.
```

V ukázkovém programu si všimněte, že místo délky skoku počítáme všude s kvadrátem délky skoku. Díky tomuto technickému triku se vyhneme výpočtu druhé odmocniny a celý výpočet tak můžeme provádět v celočíselné aritmetice. Ta je rychlejší než aritmetika reálná a hlavně v ní nehrozí žádné riziko vzniku zaokrouhlovacích chyb.

Výše uvedený postup „hrubou silou" je sice teoreticky správný, ale je velmi neefektivní, neboť se při něm mnohokrát opakovaně zkouší stejné posloupnosti skoků. Takové řešení bude proto použitelné jen pro velmi malé hodnoty n. Vzhledem k odstupňované velikosti testovacích vstupních dat (viz zadání úlohy) jste ovšem i s takto primitivním řešením mohli v soutěži získat tři až čtyři body z celkových deseti možných.

Zásadního zlepšení dosáhneme, když se dobrou organizací práce vyhneme opakovanému provádění toho, co jsme už jednou udělali. To je základní myšlenka programovací techniky zvané dynamické programování. Časová složitost algoritmu se tak rázem sníží z exponenciální na polynomiální (v našem konkrétním případě na kubickou) a program začne zvládat zpracovat dostatečně rychle i mnohem rozsáhlejší vstupní data.

Představte si, že žabka už provedla několik skoků a zajímá nás, jak nejlépe může z této situace pokračovat dále do cíle. Odpověď na tuto otázku vůbec nezávisí na tom, kudy žabka dosud skákala, závisí pouze na jejím zatím posledním skoku. Poslední skok totiž přesně určuje, kde se nyní žabka nachází a jak nejvýše dlouhý skok může následně provést.

Při celkovém počtu n kamenů existuje $n \cdot (n-1)$ možností, odkud kam mohl vést zatím poslední skok žabky. Pro každou z těchto možností chceme určit, kolik nejvýše skoků ještě může žabka udělat cestou do cíle. Každou z těchto $\mathrm{O}(n^2)$ možností dokážeme vyřešit tak, že postupně vyzkoušíme $\mathrm{O}(n)$ variant, kam žabka skočí následujícím skokem. Pro každou z těchto variant tak dostaneme jednu novou otázku téhož typu, k jejímuž zodpovězení použijeme rekurzívní volání.

Kdybychom přímo implementovali právě popsaný postup, nedostali bychom nic jiného, než dříve uvedené řešení hrubou silou. Můžeme zde ale využít programovací techniku, které se říká „chytrá rekurze". Jakmile vyřešíme některou z uvažovaných možností skoku, nalezenou odpověď nejen bezprostředně použijeme, ale také si ji zaznamenáme do tabulky. Pokud se někdy později při výpočtu programu objeví stejná otázka, jednoduše vrátíme uloženou hodnotu z tabulky – tedy nebudeme už provádět žádné zkoušení možností ani žádné rekurzívní volání.

Takto upravený program bude řešit každou z uvažovaných $O(n^2)$ možností skoku pouze jednou a vyřeší ji v čase nejvýše $O(n)$. Celkově tedy program vykoná $O(n^3)$ kroků výpočtu, po nichž budeme mít zaplněnou celou uvažovanou tabulku. Nakonec v tabulce projdeme všechny skoky vycházející z kamene číslo 1 a z jejich hodnot určíme maximum. Tím zjistíme, jaký maximální počet skoků žabky může následovat po jejím prvním skoku z kamene číslo 1. Výslednou hodnotu získáme tak, že toto maximum zvýšíme o 1, tzn. započítáme ještě první skok.

```
program Zabka2;

const MaxKamenu = 3000;             {maximální počet kamenů}
var N: integer;                     {skutečný počet kamenů}
    Kameny: array[1..MaxKamenu] of
      record x, y: longint end;     {souřadnice kamenů}
    Max: integer;                   {výsledný max. počet skoků}
    T: array[1..MaxKamenu, 1..MaxKamenu] of longint;
    {T[a,b]= max. počet skoků do cíle
     následujících po skoku a->b,
     hodnota -1 = cesta neexistuje,
     hodnota -2 = zatím neznáme}
    i, j: integer;

function Vzdal(a, b: integer): int64;
{kvadrát vzdálenosti kamenů číslo a, b}
var dx, dy: longint;
begin
dx:=Kameny[a].x - Kameny[b].x;
dy:=Kameny[a].y - Kameny[b].y;
Vzdal:=dx*dx + dy*dy
end; {Vzdal}

function Skok(a, b: integer): longint;
{počítá, kolik nejvýše skoků může ještě následovat po skoku
mezi kameny a->b cestou na cílový kámen N;
pokud taková cesta neexistuje, funkce vrací -1;
funkce používá globální proměnné N a T}
var Naposled: int64;  {kvadrát délky posledního skoku a->b}
    DoCile: longint;  {maximální počet navazujících
                       skoků do cíle}
    i: integer;
begin
Naposled:= Vzdal(a, b);
DoCile:= -1;
for i:=1 to N do          {žabka zkusí skočit dále z kamene b}
  if (i <> b) and (Vzdal(i, b) < Naposled) then
                                 {navazující skok b->i}
```

```
    begin
    if T[b, i] = -2 then T[b, i]:= Skok(b, i);
    if T[b, i] > DoCile then DoCile:= T[b, i]
    end;
if DoCile >= 0 then {existuje navazující cesta z b až do cíle}
  Skok:=DoCile + 1
else if b = N then  {jsme v cíli, nelze pokračovat až do cíle}
  Skok:= 0
else               {nejsme v cíli a nelze pokračovat až do cíle}
  Skok:=-1
end; {Skok}

begin
read(N);
for i:=1 to N do read(Kameny[i].x, Kameny[i].y);
Max:= 0;
for i:=1 to N do
  for j:=1 to N do
    T[i, j]:= -2;          {příznak, že hodnotu ještě neznáme}
for i:=2 to N do
  begin
  if T[1, i] = -2 then T[1, i]:= Skok(1, i);
  if T[1, i] > Max then Max:= T[1, i];
  end;
writeln(Max + 1)
end.
```

Předchozí řešení úlohy můžeme ještě více vylepšit. Ušetřit se dá na tom, že při výpočtu každé hodnoty v tabulce procházíme vždy všechny navazující skoky, a to včetně těch, které už v dané situaci nemůžeme provést, neboť jsou delší. Nabízí se proto možnost uspořádat všechny možné skoky z kamene na kámen sestupně podle jejich délky. (V programu opět použijeme raději druhou mocninu délky, jelikož tu si můžeme uložit do celočíselné proměnné.) Když pak budeme zpracovávat skoky v tomto pořadí, budeme mít jistotu, že každý právě zpracovávaný skok má kratší délku, než všechny předchozí již zpracované skoky, takže na ně může navázat při cestě žabky ze startu do cíle.

Uvedená úvaha by takto přesně fungovala pouze v případě, že by délky všech skoků byly navzájem různé. Některé skoky ale mohou mít stejnou délku a ty budeme muset zpracovat vždy všechny najednou, neboť žabka nemůže provést dva stejně dlouhé skoky po sobě. Všechny možné skoky z jednoho kamene na druhý si proto předem roztřídíme do skupin podle jejich délky a až takto vzniklé skupiny skoků uspořádáme podle délky skoku, počínaje od největší délky.

Pro každý kámen si budeme pamatovat, jakým nejvyšším počtem skoků se na něj dokážeme dostat z kamene číslo 1. Na začátku je to 0 pro startovní kámen číslo 1 a „nekonečno“ pro každý jiný kámen (tam zatím neznáme žádnou cestu). Postupně budeme zkoušet použít skoky v pořadí od nejdelších po nejkratší a vždy přepočítáme jenom ty údaje, které se týkají právě zpracovávaného skoku. Když zpracováváme skok z kamene A na kámen B, podíváme se, kolika nejvýše skoky (jedná se zcela jistě o delší skoky) jsme se dokázali dostat ze startu na kámen A. Jestliže je to K skoků, pak se nyní umíme dostat na kámen B pomocí $K+1$ skoků. Pokud byla dosud uložená hodnota pro kámen B menší, zvýšíme ji na $K+1$.

Časová složitost posledního popsaného řešení je $\mathrm{O}(n^2 \log n)$. Jeho nejpomalejší částí je uspořádání všech $\mathrm{O}(n^2)$ různých existujících skoků mezi kameny podle délky. Samotné zpracování skoků je pak už rychlejší, každý z $\mathrm{O}(n^2)$ skoků zpracujeme v konstantním čase.

```
program Zabka3;

const MaxKamenu = 3000;                    {maximální počet kamenů}
type Skok = record
       odkud, kam: integer;  {čísla kamenů, odkud kam se skáče}
       delka: int64;         {kvadrát délky skoku odkud -> kam}
     end;
     PoleSkoku = array[1..MaxKamenu*MaxKamenu] of Skok;

var N: integer;                            {skutečný počet kamenů}
    Kameny: array[1..MaxKamenu] of
      record x, y: longint end;            {souřadnice kamenů}
    Skoky: PoleSkoku;
    M_stare, M_nove: array[1..MaxKamenu] of longint;
      {maximální počet skoků ze startu na tento kámen;
       staré a nové hodnoty řeší více skoků téže délky}
    i, j: integer;
    s: longint;

function Vzdal(a, b: integer): int64;
{kvadrát vzdálenosti kamenů číslo a, b}
var dx, dy: longint;
begin
dx:=Kameny[a].x - Kameny[b].x;
dy:=Kameny[a].y - Kameny[b].y;
Vzdal:=dx*dx + dy*dy
end; {Vzdal}

procedure SeraditSestupne(var P: PoleSkoku; N: longint);
{libovolný třídicí algoritmus s časovou složitostí O(N.logN);
```

```
my zde pro jednoduchost použijeme jenom bublinkové třídění}
var i, j: longint;
    x: Skok;
begin
for i:=N-1 downto 1 do
  for j:=1 to i do
    if P[j].delka < P[j+1].delka then
      begin x:=P[j]; P[j]:=P[j+1]; P[j+1]:=x end
end; {SeraditSestupne}

begin
{Načtení vstupu a inicializace polí M:}
read(N);
for i:=1 to N do
  begin
  read(Kameny[i].x, Kameny[i].y);
  M_stare[i]:=-1; {nekonečno}
  end;
M_stare[1]:=0;     {na startu jsme na nula skoků}
M_nove:=M_stare;

{Vytvoření seznamu všech N*(N-1) možných skoků z kamene na kámen,
řazeno sestupně podle délky skoku:}
s:=0;
for i:=1 to N do
  for j:=1 to N do
    if j <> i then
      begin  {skok i->j}
      s:=s + 1;
      Skoky[s].odkud:=i;
      Skoky[s].kam:=j;
      Skoky[s].delka:=Vzdal(i, j);
      end;
SeraditSestupne(Skoky, s);

{Výpočet hodnot M:}
for s:=1 to N*(N-1) do   {zpracujme skok Skoky[s]}
  begin
  if (s > 1) and (Skoky[s].delka < Skoky[s-1].delka) then
    M_stare:=M_nove;      {začínají skoky kratší délky}
  if (M_stare[Skoky[s].odkud] >= 0) and
     (M_nove[Skoky[s].kam] < M_stare[Skoky[s].odkud] + 1) then
     M_nove[Skoky[s].kam] := M_stare[Skoky[s].odkud] + 1;
  end;

writeln(M_nove[N])
end.
```

Principy vyhledávání informací v prostředí internetu

LIBOR MĚSÍČEK – PAVEL PETRUS

Přírodovědecká fakulta UJEP – Pedagogická fakulta UJEP, Ústí nad Labem

V hodinách informatiky na středních školách se žáci seznamují s internetem. Cílem tohoto článku je seznámit žáky s fungováním internetových vyhledávačů a ukázat, jakým způsobem lze s nimi efektivně pracovat. Článek také okrajově popisuje nástroje umožňující analyzovat hledané fráze.

Principy fungování vyhledávačů

Internet tvoří v současné době přibližně 4,57 miliard viditelných stránek (údaj k 1. 6. 2016) [1]. Na první pohled je jasné, že není možné procházet všechny weby k nalezení požadované informace, ale je nutné k tomu použít nějaké nástroje. V podstatě máme k dispozici jen dva nástroje: katalogy a vyhledávače.

Katalog si můžeme přiblížit na příkladu telefonního seznamu typu „Zlaté stránky“, kde např. v kategorii instalatérství bylo možné najít instalatéry. Katalog je tedy internetová stránka (web), který obsahuje rozdělení dalších webů do jednotlivých kategorií (případně podkategorií) dle příslušnosti k dané kategorii (podkategorii). Weby jsou do katalogů umísťovány ručně a přední pozice v daných kategoriích lze zakoupit. Nejznámější české katalogy jsou Seznam.cz, Centrum.cz a Atlas.cz. Stránky Seznam.cz umožňují vyhledávat s pomocí katalogu, ale je na nich k dispozici i internetový vyhledávač.

Internetový vyhledávač (*search engine*) je naopak nástroj, který aktivně prohledává web. V současné době existuje několik vyhledávačů, např. Google.com, Seznam.cz, Yahoo.com, Bing.com. Vyhledávače pracují ve třech krocích.

V **prvním kroku** robot (pavouk) sbírá data. Robot (pavouk) je počítačový program, který slouží k prohledávání internetových stránek. Robot začne na nějaké stránce, např. to může být stránka katalogu. Na dané stránce najde další odkazy, které dále sleduje, tj. vstoupí na odkazované weby, stáhne si jejich obsah a hledá odkazy na další stránky. Robot si samozřejmě pamatuje stránky, které již navštívil. Jeho pohyb lze znázornit graficky tak, že odkazy jsou čáry mezi body, kde body představují jednotlivé weby (od toho název pavouk). Roboti se po určitém časovém úseku (dnů až měsíců) vrací na již navštívené stránky, aby zaznamenali změny na stránkách, odhalili nefunkční stránky, ale hlavně znovu přeindexovali dané stránky. Indexace stránek je ohodnocení daných stránek na základě celé řady parametrů (více v druhém kroku vyhledávače).

Výsledné ohodnocení se poté uloží do databáze daného vyhledávače. Indexace stránek probíhá při každém navštívení daného webu a tím dojde k aktualizaci ohodnocení příslušného webu. Každý vyhledávač má svého robota, kde ty nejznámější jsou SeznamBot (Seznam.cz), Googlebot (Google.com), Slurp (Yahoo.com) a Bingbot (Bing.com). Existují ovšem stránky, na které se robot vrací pravidelně i vícekrát denně, protože obsahují aktuální a často vyhledávané informace. Pro zajištění rychlejšího zachycení změn je možné používat jiné metody než klasický crawler (např. sledovat informační kanál RSS stránky a nové články pomocí něj indexovat). Příkladem jsou zpravodajské weby novinky.cz, idnes.cz, cnn.com a bbc.co.uk. Zveřejněný článek nebo informace jsou tak během hodin dohledatelné i ve vyhledávači. Pokud zadáme přímo titulek nebo frázi z článku, Google umístí jako první výsledek odkaz na plný text článku i s hlavní fotografií z článku.

Autoři webových stránek se mohou pokusit ovlivnit chování robota na svých stránkách pomocí dvou souborů: robots.txt a sitemap.xml. Některé vyhledávače ovšem ignorují nastavení a indexují bez ohledu na obsah souborů robots.txt a sitemap.xml.

Soubor robots.txt každý robot navštíví jako první na dané stránce (pokud existuje). V tomto souboru jsou informace pro robota, zda může dané stránky prohledávat, či zda jsou na těchto stránkách pro něj nějaká omezení (např. zakázané adresáře). Důvodem omezení může být např. citlivost informací, které jsou umístěny na dané stránce. Pokud soubor neexistuje, tak to roboti chápou tak, že nemají jakékoliv omezení v následném zpracování. Soubor má podobu prostého textového souboru, který je umístěn v kořenovém adresáři. Na jednotlivých řádcích lze přesně specifikovat, co může který robot přesně prohledávat [2].

Soubor sitemap.xml má na rozdíl od souboru robots.txt pomoci vyhledávačům s orientací na konkrétním webu. Obsahuje odkazy na stránky a metadata. Metadata jsou data o datech, které vyhledávači poskytují další informace o jednotlivých stránkách (informace pro roboty, klíčová slova atd.). Má příponu XML a je rovněž umístěn v kořenovém adresáři webu. Soubor sitemap.xml lze napsat jako prostý text, či je možné ho vytvořit s pomocí generátorů (např. *Sitemap Generator*) [3]. Tento soubor najde využití hlavně u velkých webů, webů s rozsáhlým archivem stránek, které jsou izolovány, či jsou špatně propojené, web je relativně nový a směřuje na něj málo odkazů [4].

V **druhém kroku** dojde k indexování stránek. Stažené stránky se na základě celé řady faktorů (titulek, klíčová slova, popis, počet výskytu slov atd.) ohodnotí – je jim přiřazena váha *Google page rank (GPR)*. GPR (u Seznam.cz se nazývá S-rank) je číslo, které je přiřazeno ke každé stránce (URL). Má význam věrohodnosti (oblíbenosti) stránky. Hodnota GPR je v rozsahu 0 až 10, přičemž čím víc se GPR daného webu blíží k 10, tím je web oblíbenější [5]. Faktory, které ovlivňují hodnotu GPR, můžeme rozdělit do dvou skupin: on-page faktory a off-page faktory.

On-page faktor je vše, co se dá změnit na webu, aby se co nejlépe umístil mezi výsledky vyhledávání. Mezi ně patří titulek stránky, správně vyplněné meta značky description a keywords, obsah (ve smyslu vlastní text) stránky a řada dalších. Za nejdůležitější je považován titulek stránky, který by měl využívat klíčová slova a měl by být unikátní pro každou stránku. Uvádí se, že optimální délka titulku je kolem 50 znaků [6].

Off-page faktory jsou všechny faktory, které mají vliv na umístění mezi výsledky vyhledávání a provádí se mimo webové stránky. Jelikož jsou tyto faktory špatně ovlivnitelné, tak mají větší váhu než on-page faktory. Mezi hlavní off-page faktory patří zpětné odkazy, tj. z jakých stránek přicházejí, kolik jich je, jak jsou stránky relevantní, kde jsou umístěny a jaké je textové okolí odkazu [7].

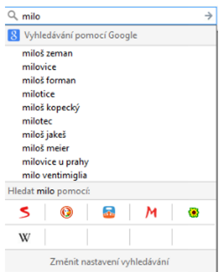
Pro zlepšení pořadí stránky ve výsledcích hledání slouží SEO (*search engine optimization*), což je označení metod pro vytváření a úpravu webových stránek tak, aby jejich obsah a podoba byla vhodná pro internetové vyhledávače. Cílem SEO je získat co nejlepší pozici pro danou stránku ve výsledcích vyhledávání relevantních slov nebo frází. K tomu lze užít povolené metody (*white hat SEO*) anebo nepovolené techniky (*black hat SEO*). Mezi nepovolené metody patří např. *link farms* (síť propojených webů, které na sebe vzájemně odkazují), *doorway* (stránka je sice naplněná slovy a frázemi spojenými s hledaným tématem, ale neobsahuje pro uživatele žádné hodnotné informace), neviditelný text. Jejich cílem je zvýšit podvodně Google page rank webu a tím se dostat na vyšší pozice při vyhledávání. Všechny vyhledávače se snaží proti těmto metodám bojovat a pokud jsou odhaleny, tak dojde k penalizaci stránek, které těchto metod využívají [8]. Pro zajímavost dodejme, že SeznamBot indexuje pouze stránky napsané v českém jazyce [9], výsledky ostatních jazyků přejímá z jiných vyhledávačů. Googlebot používá více než 200 parametrů, které mu pomáhají rozhodnout, které stránky obsahují vámi hledanou informaci [10]. Hodnota GPR není zárukou, že stránka bude na prvních pozicích při vyhledávání, ale je to jen jeden z řady parametrů, které ovliňují pořadí ve výsledcích. Přesný seznam kritérií a jejich vliv na výslednou váhu webu je přísně střeženým tajemstvím. Jednotlivé vyhledávače se stále vyvíjejí, a tudíž se počet a váha jednotlivých faktorů mění [11, 12].

V **třetím kroku** dojde k zpřístupnění výsledků uživatelům, kteří mohou zadávat dotazy do vyhledávače. Po zadání dotazu vyhledávač zobrazí SERP (search engine result page), což není nic jiného než stránka výsledků. Na SERP lze najít přirozené výsledky, které zobrazí vyhledávač, ale též reklamní odkazy (sponzorované odkazy) [11]. Při zadání dotazu vyhledávač prochází pouze své databáze, tudíž je schopen poskytnout výsledky v řádu desetin sekundy. Výsledky pro často vyhledávané fráze a slova pak vyhledávače mohou sestavit pouze jednou, a pak je na stejné dotazy pouze zobrazí. Tento seznam výsledků se aktualizuje několikrát denně.

V následujících třech kapitolách se seznámíme v krátkosti s Google Trends, Zeitgeist a poté s prací se dvěma nejznámějšími vyhledávači v České republice (Google a Seznam).

Google Trends a Zeitgeist

Témata a hesla vyhledávaná prostřednictvím vyhledávačů jsou samozřejmě sledována a zaznamenávána mj. za účelem analýzy zdrojů, sledování trendů a statistiky. Vyhledávače sledují, která slova jsou uživateli vyhledávána a na které stránky ze SERPu následně uživatel vstoupí. V minulosti zadané dotazy jsou cenným zdrojem pro našeptávání dotazů uživatelům. Obr. 1 ukazuje příklad našeptání dotazu, kdy stačí do příslušného pole prohlížeče Firefox zadat např. Miloš a prohlížeč prostřednictvím vyhledávače nabídne možná hledaná témata. Pokud uživatel najde v nabízeném seznamu hledaný dotaz, tak může přímo kliknutím dokončit dotaz a nemusí ho ručně celý vypisovat.



Obr. 1 Našeptávač v prohlížeči Firefox

Některé vyhledávače (např. Seznam, Google) sestavují každoročně žebříčky nejvyhledávanějších dotazů v kategoriích a komentují změny oproti minulým letům. Přehled hledaných termínů od společnosti Google.com se jmenuje Zeitgeist (lze přeložit jako Duch doby) a lze ho nalézt na adrese http://www.google.cz/trends/2014/. Společnost Seznam.cz má svůj žebříček za kompletní rok na adrese http://skokani.seznam.cz/?report=2014. Pokud nás zajímají aktuálně hledané termíny, tak např. Google používá http://www.google.cz/trends. Po zadání dotazu lze sledovat z jakých lokalit byl vyhledáván, kdy a jak se vyvíjí míra hledání. Termín Vánoce je hledaný pravidelně v období prosince, naopak Velikonoce jsou pohyblivým svátkem, tudíž na grafu vyhledávání tohoto slova v jednotlivých letech je jeho vrchol v různých měsících.

Práce s vyhledávačem Google

Otevřete svůj oblíbený internetový prohlížeč (Firefox, Internet Explorer, Chrome, Opera atd.) a do adresního řádku napište www.google.cz a potvrďte stisknutím klávesy ENTER. Dostanete se na úvodní stránku, která vypadá jako na obr. 2.

Obr. 2 Úvodní stránka Googlu

Pro zadávání dotazů budeme využívat textové pole uprostřed obrazovky. Abychom mohli efektivně hledat informace na internetu, je nutné znát pravidla vyhledávače a všechny možnosti, jež jsou pro daný vyhledávač k dispozici. V následujícím souhrnu najdete nejdůležitější pravidla a omezení:

1. Google nerozlišuje mezi velkými a malými písmeny v dotazu, tudíž dotazy ve tvaru: král, KRÁL, Král nám dají stejné výsledky.

2. Interpunkce v dotazu se ignoruje až na dvě výjimky, a to apostrof a pomlčku. Pomlčka se zpracovává odlišně od ostatní interpunkce a je to zřejmé na dotazu ping-pong. Výsledky budou odpovídat těmto třem dotazům dohromady: ping pong, ping-pong a pingpong.

3. Při zadávání dotazu je nutné mít na paměti slova, která se nejpravděpodobněji budou nalézat na hledané stránce. Když se budeme zajímat o aktuální cenu rohlíku tak dotaz: rohlík cena, zajistí, že mezi prvními výsledky budou letáky hypermarketů.

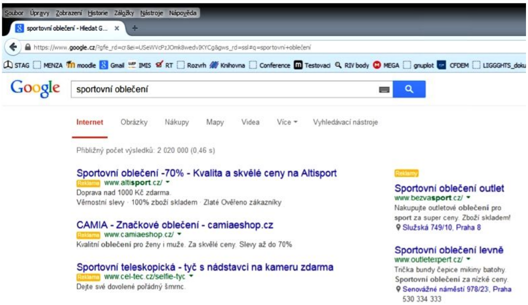
4. Google využívá celou paletu operátorů. Operátor je speciální výraz jímž ovlivňujeme vyhledávání. Může mít podobu jednoho znaku či slova. Seznam a použití nejužívanějších operátorů lze nalézt v tabulce 1.

5. Operátory lze řetězit a tím blíže specifikovat dotaz. Pokud se zajímáme o jaguára jako o zvíře, tak nás nezajímají stránky o voze jaguár a můžeme tak v dotazu tyto stránky předem vyloučit: jaguár rychlost -auto [13].

Tabulka 1 Přehled nejpoužívanějších operátorů pro vyhledávání v Google [14, 15]

Operátor	Použití	Příklad
+	Hledá stránky Google+ nebo krevní skupiny.	AB+
@	Hledá označení na sociálních sítích.	@agoogler
$	Hledá ceny (vyhledává ceny jen v dolarech).	nikon $400
#	Hledá populární témata podle tzv. hashtagu.	#throwbackthursday
-	Když je použita před slovem nebo dalším operátorem, tak z výsledků vyloučí weby, které dané údaje obsahují. Hlavní využití je u slov, které mají více významů.	jaguár rychlost -auto
“”	Hledá se na stránkách výraz v přesném tvaru, který je uveden v uvozovkách.	„královno temných spádů“
*	Slouží jako zástupný znak pro neznámé výrazy.	„lepší * v hrsti než * na střeše“
..	Užívá se mezi dvěma čísly bez mezer. Výsledky jsou v rozsahu čísel, jež tento operátor obklopují.	fotoaparát 2 000..5 000 Kč
site:	Hledá na konkrétních webech či doménách.	studium site:ujep.cz
link:	Hledá weby, které odkazují na určitý web.	link:youtube.com
related:	Hledá weby podobné zadané webové adrese, kterou již znáte.	related: aktualne.centrum.cz
OR	Hledá weby, kde se vyskytuje jedno ze slov před a za operátorem.	maraton OR závod
AND	Hledá weby, kde jsou obě slova spojená tímto operátorem.	kočka AND pes
info:	Hledá informace o webové adrese, včetně archivované verze stránky, podobných stránek a stránek, které na daný web odkazují.	info:google.com
intitle:	Hledá klíčové slovo pouze v titulku.	intitle:source
allintitle:	Hledá celý výraz v titulku.	allintitle:„open source“
inurl:	Hledá klíčové slovo v URL stránky.	inurl:open
allinurl:	Hledá celý výraz v URL.	allinurl: „open community“
filetype:	Hledá v souborech daného typu.	filetype:pdf
define:	Hledá definici daného slova.	define:lion

Po zadání dotazu a stisknutí klávesy ENTER dostanete stránku s jednotlivými výsledky (SERP) a řadu dalších informací, jak ukazuje obr. 3.



Obr. 3 Výsledky vyhledávání na Googlu

Podívejme se detailněji na tuto stránku. Nejprve se tam objevila lišta, kde je červeně vyznačeno, že jsme hledali v celém internetu. Máme možnosti přepnout výsledky na Obrázky, Nákupy, Mapy, Videa. Dále je tam rolovací nabídka Více, která ukrývá položky: Zprávy, Knihy a Aplikace. Zajímavější je ale položka Vyhledávací nástroje, na kterou když klikneme, zobrazí se další lišta na upřesnění vyhledávání pro Jazyk, Časový parametr, Lokalizace a Přesná shoda. Alternativou k zadání dotazu s použitím operátorů je ozubené tlačítko vpravo nahoře a poté volba Rozšíření vyhledávání. V následném formuláři je pak možné zadat dotaz bez použití operátorů.

Před vlastními výsledky můžeme naleznout informaci o přibližném počtu výsledků (2 020 000) a době hledání (0,46 s). U některých výsledků můžeme najít v žlutém oválu slovo Reklama, čímž nám Google označuje sponzorované odkazy (jsou na začátku a konci stránek). Výsledky obsahují titulek výsledku, který je zároveň odkazem na příslušnou stránku. Pokud je výsledkem vyhledávání soubor, tak je tato informace znázorněna hranatými závorkami a typem souboru. Následuje adresa URL, poté můžeme najít popis stránky, který je převzat z daných stránek [13].

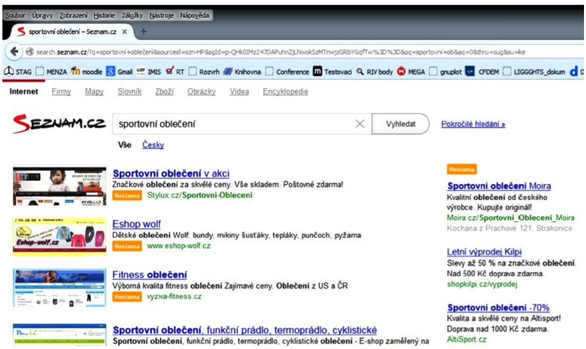
Práce s vyhledávačem Seznam

Práce s vyhledávačem Seznam je téměř totožná jako práce s Googlem. Největší rozdíl u Seznamu je ten, že indexuje primárně české stránky. Zahraniční výsledky jsou obvykle přejaty z jiného vyhledávače. Zásadní přínos vyhledávače Seznam spočívá v drobných optimalizacích určených speciálně pro „český internet“. Pracuje s téměř stejnými operátory jako Google, ale najde se tam pár odlišností, které najdete v tabulce 2.

Tabulka 2 Přehled operátorů Seznamu, které se liší oproti operátorům Googlu [16]

Operátor	Použití	Příklad
,	Při hledání nezáleží na tom, jak daleko jsou slova od sebe v textu.	penzion, Krušné hory
intext:	Vyhledání zadaného slova přednostně v obsahu stránky.	intext:nápověda
+	Tento operátor není povinný. Používá se v případě, kdy chcete vynutit hledání určitého slova. Nalezená stránka tedy musí slovo, kterému plus předchází, obsahovat. Pokud operátor plus není zadán, chová se vyhledávač stejně, jako by zadaný byl.	čočka + recept
host:	Podobný jako site, ale na rozdíl od site nerozšiřuje hledání na subdomény.	host:seznam.cz
lang:	Omezuje vyhledávání na určitý jazyk.	cars lang:cs

Po zadání dotazu dostanete výsledky na Seznamu v jiné grafické podobě, jak se můžete přesvědčit na obr. 4.



Obr. 4 Výsledky vyhledávání na Seznamu

Prvním rozdílem oproti Googlu je zobrazení náhledu stránky u výsledku. Druhý rozdíl spočívá v pravém panelu reklamních odkazů. Třetí rozdíl je přítomnost odkazu na stránky až po popisku.

Náměty na samostatné úlohy

Zadání

1. Vytvořte dotaz, který vyhledá ve vyhledávači Google stránky k tématu Lednice, dále z výsledků vyloučí chladničky a penziony a bude se zaměřovat jen na stránky z let 2013 až 2015.

2. Zjistěte, ze které lokality je nejčastěji vyhledáván pojem Krakonoš, jak se vyhledávání vyvíjelo v čase a jaké další související vyhledávání byla prováděna?

3. Jaký výraz byl nejhledanějším na Google.com v ČR v roce 2014 v kategorii „Co je“?

Řešení

1. Do vyhledávacího pole napíšeme Lednice -chladničky -penziony a ve Vyhledávacích nástrojích omezíme interval hledání na 2013 až 2015 (vlastní časový úsek).

2. V Google Trends zadáme do vyhledávácího pole Krakonoš. Vidíme vývoj vyhledávání v čase a v dolní části i související hledání. Nejvíce hledaným je v Královehradeckém kraji a z měst v Praze.

3. Najdeme si na stránce https://www.google.cz/trends/ odkaz na žebříčky pro rok 2014. Zde je uveden jako první Instagram.

Závěr

Článek shrnul způsoby vyhledávání informací na internetu, principy fungování vyhledávačů, způsoby formulování složitějších dotazů, upozornil na žebříčky nejvyhledávanějších slov a frází.

Internetové vyhledávače mohou být velmi užitečnými a mocnými nástroji, ale je nutné zdůraznit, že všechny informace na internetu nemusí být přesné či pravdivé. K výsledkům vyhledávání je tedy nutné přistupovat s kritickým myšlením a ne s větou: „Bylo to na internetu, tak to musí být pravda.“ Pro sledování „žhavých“ témat pak vyhledávače sestavují žebříčky hledaných frází podle oblastí.

Poděkování

Děkujeme projektu „Mezioborové vazby a podpora praxe v přírodovědných a technických studijních programech UJEP“ (OPVK CZ.1.07/2.2.00/28.0296).

Literatura

[1] http://www.worldwidewebsize.com/

[2] http://www.jakpsatweb.cz/robots-txt.html

[3] https://www.interval.cz/clanky/google-sitemaps/

[4] https://support.google.com/webmasters/answer/156184?hl=cs

[5] http://pagerank.jklir.net/?p=pagerank

[6] http://www.propagacenainternetu.cz/optimalizace-webovych-stranek-on-page-faktory.

[7] http://www.corporateict.cz/koutek-redaktora/jaky-je-vyznam-off-page-faktor-na-uspnost-optimalizace-pro-vyhledavae.html.

[8] http://www.seoradce.cz/techniky-seo.html

[9] http://napoveda.seznam.cz/cz/fulltext-hledani-v-internetu/nez-zacnete-tvorit-web

[10] https://www.google.com/intl/cs_cz/insidesearch/howsearchworks/algorithms.html

[11] http://www.jakpsatweb.cz/vyhledavace.html

[12] http://n-host.cz/2014/12/jak-funguje-vyhledavac/

[13] *Iskra, J.*: Google: tipy a návody pro vyhledávač, Gmail, YouTube, Earth a další aplikace, Brno, Computer Press, 2008.

[14] https://support.google.com/websearch/answer/2466433?hl=cs

[15] http://opencommunity.cz/operatory-google

[16] http://napoveda.seznam.cz/cz/fulltext-hledani-v-internetu/pokrocile-hledani/

ZPRÁVY

57. ročník Mezinárodní matematické olympiády

57. ročník Mezinárodní matematické olympiády (IMO) se uskutečnil 6.–16. července 2017 v Hongkongu, kam se soutěž vrátila po 22 letech, poprvé do Hongkongu pod čínskou správou. Soutěže se zúčastnilo rekordních 602 studentů z rekordních 109 zemí pěti kontinentů. Nechyběli žádní tradiční účastníci, poprvé se IMO zúčastnili Egypt, Irák, Jamajka, Keňa, Laos, Madagaskar a Myanmar.

Příprava soutěže tohoto rozsahu je během na dlouhou trať. Hlavní organizátor, Hongkongský výbor pro mezinárodní matematickou olympiádu (The International Mathematical Olympiad Hong Kong Committee Limited), ve spolupráci s Hongkongskou univerzitou věd a technologií (The Hong Kong University of Science and Technology, HKUST) a Úřadem pro vzdělávání Vlády zvláštní administrativní oblasti Hongkong pracovali s rozpočtem 20 milionů hongkongských dolarů (60 milionů korun), zajišťovali ubytování a stravování pro 1200 soutěžících, organizátorů a hostů a soutěž připravovali několik let dopředu. Samotná příprava soutěžních úloh započala v dubnu, kdy organizátoři obdrželi návrhy od jednotlivých zemí a vybrali z nich 32 úloh, které zařadili do tzv. *Shortlistu*. Vedoucí delegací a další členové *Jury* přiletěli do Hongkongu již 6. července a během třídenního zasedání vybrali ze Shortlistu šestici soutěžních úloh, připravili jejich překlad do národních jazyků a schválili návrh bodování. Těší nás, že jako šestá byla vybrána úloha *Bc. Josefa Tkadlece*, doktoranda na Institute of Science and Technology ve Vídni. Zadání všech úloh uvádíme níže.

České reprezentační družstvo sestavené na základě výsledků ústředního kola kategorie A 65. ročníku MO tvořili: *Filip Bialas* z G Opatov v Praze 4, *Pavel Hudec* z GJGJ v Praze 1, *Jakub Löwit* z G v Praze 9, Českolipská, *Daniel Pišťák* z GChD v Praze 5, *Marian Poljak* z GJŠ v Přerově a *Pavel Turek* z G v Olomouci-Hejčíně. Vedoucím českého družstva a zástupcem České republiky v mezinárodní jury byl *Mgr. Martin Panák, Ph.D.,* z Přírodovědecké fakulty MU v Brně, jeho zástupcem a pedagogickým vedoucím byl *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.,* z Přírodovědecké fakulty UP v Olomouci. Kromě Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy se na úhradě cestovného českého družstva podílela také Jednota českých matematiků a fyziků.

Soutěžící a jejich pedagogický doprovod začali přijíždět do Hongkongu 9. července a byli ubytováni v obřím kampusu organizující HKUST. Na slavnostním zahájení v neděli 10. července uvítali soutěžící *prof. K. P. Shum*, předseda organizačního výboru IMO, *prof. Tony F. Chan*, president HKUST a *Eddie Ng*, státní sekretář pro vzdělávání hongkongské vlády. Pro Evropany velmi nezvyklou součástí zahájení byl hudební doprovod symfonického orchestru s velkým zastoupením bicích nástrojů.

Vlastní soutěži byly vyhrazeny následující dva dny, v nichž soutěžící řešili každý den během 4,5 hodiny 3 soutěžní úlohy. V dalších dnech pobytu již soutěžící absolvovali naplánovaný poznávací program po Hongkongu, při němž navštívili například místní Disneyland. Ve stejných dnech vedoucí týmů koordinovali řešení žákovských úloh.

Po sečtení výsledků české družstvo v hodnocení zemí se 109 body obsadilo velmi pěkné 37. místo. Tento výsledek odrážel i velmi dobré výsledky jednotlivých soutěžících. *Filip Bialas* a *Pavel Hudec* s 28 body obsadili 45. místo a získali stříbrnou medaili, *Pavel Turek* s 21 body obsadil 146. místo a získal bronzovou medaili, *Marian Poljak* (15 bodů, 281. místo) a *Jakub Löwit* (11 bodů, 379. místo) získali čestné uznání, s formou se bohužel nepotkal *Daniel Pišťák* (6 bodů, 469. místo). Přitom ještě první čtyři jmenovaní mohli být trochu smutní, kdyby každý získali o bod více, získali by i lepší medaili. V celkovém hodnocení zemí se tradičně na prvních místech umístily Spojené státy (214 bodů, 6 zlatých medailí), Jižní Korea (207 bodů, 4 zlaté a 2 stříbrné medaile) a Čína (204 bodů, 4 zlaté a 2 stříbrné medaile). V soutěži jednotlivců získalo 6 řešitelů plný počet 42 bodů, tři z nich byli z Jižní Koreje, dva ze Spojených států a jeden z Číny.

Zájemci o podrobnější informace o průběhu 57. ročníku IMO mohou získat další informace na stránkách soutěže http://www.imo2016.org/Home.php, podrobnosti o výsledcích jednotlivých států a účastníků najdete také na internetové adrese http://www.imo-official.org.

Dále uvádíme texty všech šesti soutěžních úloh 57. ročníku IMO. (V závorce za textem úlohy je uvedena země, která úlohu do soutěže navrhla.)

1. soutěžní den (11. 7. 2016)

1. Trojúhelník BCF má pravý úhel u vrcholu B. Nechť A je bod na přímce CF takový, že $|FA| = |FB|$ a bod F leží mezi body A a C. Nechť D je bod takový, že $|DA| = |DC|$ a přímka AC je osou úhlu DAB. Dále nechť E je taková bod, že $|EA| = |ED|$ a přímka AD je osou úhlu EAC a nechť bod M je středem úsečky CF. Konečně nechť je X bod takový, že $AMXE$ je rovnoběžník (tedy $AM \parallel EX$ a $AE \parallel MX$). Dokažte, že přímky BD, FX a ME se protínají v jednom bodě.

(*Belgie*)

2. Nalezněte všechna kladná celá n pro něž je možné tabulku $n \times n$ zaplnit písmeny I, M a O (do každého políčka právě jeden znak) tak, že:

- v každém řádku i každém sloupci je třetina písmen I, třetina M a třetina O,
- na každé diagonále, jejíž počet políček je dělitelný třemi, je rovněž třetina písmen I, třetina M a třetina O.

Poznámka. Řádky a sloupce tabulky jsou očíslovány čísly od 1 do n. Každé políčko tabulky tak odpovídá dvojici přirozených čísel (i, j), kde $1 \leq i, j \leq n$. Pro $n > 1$, má tabulka $4n - 2$ diagonál dvou typů. Diagonály prvního typu sestávají ze všech políček (i, j), pro která je $i + j$ konstantní, diagonály druhého typu jsou pak tvořeny všemi políčky, pro která je $i - j$ konstantní.

(*Austrálie*)

3. V rovině je dán konvexní mnohoúhelník $P = A_1A_2 \ldots A_k$. Vrcholy $A_1, A_2, \ldots, A_k$ mají celočíselné souřadnice a leží na kružnici. Nechť S je obsah k-úhelníku P. Dále je dáno liché kladné celé n takové, že čtverce délek stran mnohoúhelníku P jsou přirozená čísla dělitelná číslem n. Dokažte, že $2S$ je přirozené číslo dělitelné číslem n.

(*Rusko*)

2. soutěžní den (12. 7. 2016)

4. Množinu kladných celých čísel nazveme *voňavou*, jestliže obsahuje alespoň dva prvky a libovolný její prvek má nějakého (i více) společného prvočíselného dělitele s alespoň jedním jiným jejím prvkem. Uvažme polynom

$$P(n) = n^2 + n + 1.$$

Určete nejmenší celé kladné b, pro které existuje celé nezáporné a tak, že množina

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

je voňavá.

(*Lucembursko*)

5. Na tabuli je napsána rovnice

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-2016) = \\ = (x-1)(x-2)\ldots(x-2016)$$

sestávající z 2016 lineárních členů na každé straně. Určete minimální přirozené k, pro které je možné smazat právě k z těchto 4032 lineárních členů tak, že na každé straně zůstane alespoň jeden člen a výsledná rovnice nebude mít reálné řešení.

(*Rusko*)

6. V rovině je dáno n, $n \geq 2$, úseček tak, že se libovolné dvě z nich protínají ve vnitřním bodě obou, ale žádné tři se neprotínají v jednom bodě. Pepa vybere koncový bod každé úsečky a umístí do něj žábu, směrem k druhému koncovému bodu. Poté $(n-1)$-krát tleskne. Na každé tlesknutí každá žába neprodleně poskočí na následující průsečík na své úsečce. Žádná žába nemění směr svých skoků. Pepa by chtěl umístit žáby tak, aby žádné dvě z nich nebyly po žádném tlesknutí ve stejném průsečíku.

a) Dokažte, že Pepa tak může učinit, je-li n liché.

b) Dokažte, že Pepa tak nemůže učinit, je-li n sudé.

(*Česká republika*)

Následující 58. ročník Mezinárodní matematické olympiády se uskuteční v červenci 2017 v brazilském Rio de Janieru.

Pavel Calábek

Pět úspěchů na 47. ročníku Mezinárodní fyzikální olympiády

V roce 2016 proběhl už 47. ročník Mezinárodní fyzikální olympiády (MFO) – vrcholové světové soutěže středoškoláků ve fyzice. Soutěž pořádala ve dnech 11.–17. července 2016 Curyšská univerzita za podpory Lichtenštejnského knížectví a Asociace švýcarských přírodovědných a fyzikálních olympiád, hlavním partnerem byl Státní úřad pro vzdělávání, výzkum a inovace. Soutěž hostilo město Curych, aktivně se jí zúčastnilo celkem 398 studentů z 84 států a teritorií z pěti světových kontinentů.

Jednota českých matematiků a fyziků (JČMF), odborný garant Fyzikální olympiády na soutěž vyslala podle doporučení Ústřední komise Fyzikální olympiády sedmičlennou reprezentaci v tomto složení: *Petr Hrubý*, G Polička, *Lukáš Supik*, G Třinec, *Jiří Etrych*, G, Dašická, Pardubice, *Lukáš Honsa*, G, Jírovcova, České Budějovice, *Kryštof Kolář*, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno. Náhradníkem soutěžících, který sice necestoval, ale prošel stejnou přípravou, byl Šimon Karch, G Komenského, Havířov. Výpravu vedli *doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D.*, vedoucí delegace a *Mgr. Filip Studnička, Ph.D.*, zástupce vedoucího. Uvedení členové českého družstva byli vybráni na základě výběrového soustředění konaného 22.–24. 3. 2016 na katedře fyziky Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové.

Vlastní soutěž proběhla v prostorách kampusu Irchel curyšské univerzity stejně jako zahajovací ceremoniál, slavnostní zakončení pak ve Filharmonii Curych. Všechna zasedání Mezinárodní rady MFO probíhala v Technoparku, který byl umístěn blízko ubytování vedoucích delegací.

Společným programem pro soutěžící a jejich vedoucí bylo slavnostní zahájení (pondělí dopoledne), slavnostní zakončení (neděle dopoledne) a společná večeře v kampusu Irchel (čtvrtek večer). Pro studenty byly připraveny dva soutěžní půldny (úterý a čtvrtek dopoledne). Netradičně se začínalo experimentálními úlohami, teoretické úlohy přišly na řadu jako druhé. Ve zbylém čase organizátoři připravili prohlídky zajímavých míst Curychu a okolí, sportovní a společenské akce, jednodenní výlet do laboratoří CERN a jednodenní výlet do Lichtenštejnského knížectví.

Vedoucí věnovali dva celé dny (pondělí a středa) diskusím úloh a jejich následným překladům do národních jazyků. Dále pak opravě úloh a moderacím, tj. diskusím s komisemi hodnotitelů o hodnocení úloh. Ve volném čase absolvovali prohlídky zajímavých míst Curychu a okolí a jednodenní výlet do Lichtenštejnského knížectví.

Organizátoři připravili soutěžícím dvě velmi náročné experimentální úlohy, jejichž společným jmenovatelem bylo přiblížení zajímavých fyzikálních modelů. První úloha byla inspirována vývojem nové generace polovodičových součástek, jako jsou čipy nebo solární články. Studenti zkoumali elektrické vlastností materiálů s konečnými rozměry, tj. materiálů ve speciálním prostorovém uspořádání, kde není možné použít jednoduché modely měření fyzikálních veličin. Druhá úloha studovala model fázového přechodu v magnetických látkách. Studenti zkoumali rozdělení semínek máku v uzavřené vibrující nádobě s vloženou poruchou, která vyústila v neočekávané chování uspořádání semínek.

Teoretické úlohy předložené organizátory měly velmi atraktivní náměty, byly velmi náročné a vyžadovaly pokročilé znalosti fyziky a vytváření fyzikálních modelů. První úloha z oblasti mechaniky se zabývala studiem inerciálních a neinerciálních soustav. Studenti zkoumali rozdíl mezi gravitací zemskou a „gravitací“ umělou, vytvořenou rotující soustavou. Druhá úloha byla inspirována využitím nelineárních polovodičových prvků ve fyzikálním modelování. Studenti studovali vlastnosti tyristoru a jeho nelineární vlastnosti. Dále použili model elektronické součástky *neuristoru* (ze slov *neuron* a *tranzistor*) jako model neuronu a myšlenkovým experimentem uvažovali na jeho chování. Zajímavým způsobem tak aplikovali fyzikální model v biologii. Třetí úloha se očekávaně týkala Velkého hadronového urychlovače (*Large hadron collider*, LHC). V této úloze se studenti zabývali detekcí částic standardního modelu v laboratořích CERN.

Po konečném stavu hodnocení bylo rozhodnuto, že zlatou medaili získalo 47 soutěžících, stříbrnou 74 soutěžících a bronzovou medaili 98 soutěžících. Čestné uznání bylo uděleno 65 soutěžícím. Nejlepšího výsledku dosáhl soutěžící *Chenkai Mao* z Čínské lidové republiky, který získal 48,1 bodů z 50 možných. Česká republika se v neoficiálním pořadí států zařadila na 40. příčku (v Evropské unii na 14. místo). Umístění v polovině startovního pole je sice o něco horší než v minulých letech, za úspěch lze ale považovat fakt, že každý ze soutěžících získal nějaké ocenění, všichni tedy byli úspěšní. Letošní výsledky jednotlivých českých řešitelů jsou tyto: Kryštof Kolář, 28,9 bodů, bronzová medaile, 136. místo; Lukáš Honsa, 27,3 bodů, bronzová medaile, 150. místo; Jiří Etrych, 26,3 bodů, bronzová medaile, 160. místo; Lukáš Supik, 21,1 bodů, čestné uznání, 233. místo; Petr Hrubý, 18,5 bodů, čestné uznání, 262. místo.

Výsledky 47. MFO ukázaly, že členové českého družstva v obrovské konkurenci uspěli, byli na soutěž tedy dobře a pečlivě vybráni. Za zmínku stojí obstojný výsledek českého družstva v experimentální části soutěže, což lze považovat za úspěch speciální přípravy studentů, především během červnového soustředění na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové, než za úspěch systému. Skutečně je v posledních letech experimentální příprava na soustředěních výrazně preferována. Všech pět českých soutěžících bez diskuse prokázalo znalosti a experimentální dovednosti na mnohem vyšší úrovni, než by odpovídalo současným středoškolským požadavkům. Příští MFO proběhne v červenci 2017 v Indonésii. Česká delegace již obdržela pozvání k účasti. Více informací o 47. MFO včetně textů úloh naleznete na http://fyzikalniolympiada.cz/mfo/aktualni.

Filip Studnička, Jan Kříž

Mezinárodní olympiáda v informatice IOI 2016

Dvacátý osmý ročník Mezinárodní olympiády v informatice IOI 2016 se konal ve dnech 12.– 19. 8. 2016 v Rusku ve městě Kazaň. Hlavním pořadatelem byla Kazaňská federální univerzita, v jejímž univerzitním kampusu se celá akce konala. Tento nový rozsáhlý univerzitní areál byl vybudován teprve před třemi lety a sloužil původně jako „univerziádní vesnice“ pro ubytování účastníků letní sportovní univerziády v roce 2013. Pro potřeby IOI poskytl prostory pro ubytování a stravování, v místní sportovní hale organizátoři připravili rozsáhlý sál se soutěžními počítači. Slavnostní zahájení proběhlo v univerzitním koncertním sále. Na stejném místě se konaly také schůze mezinárodní jury, která je tvořena vedoucími všech delegací. Pro výběr a překlady soutěžních úloh do národních jazyků posloužily prostory místního lycea, které je také součástí areálu. Až na slavnostní zakončení olympiády tedy probíhalo všechno na jednom místě, což bylo pro účastníky velmi pohodlné a příjemné.

Soutěže IOI se letos zúčastnili studenti z 80 zemí z celého světa. Z každé země se mohou zúčastnit čtyři soutěžící a dva vedoucí, celkově letos soutěžilo 308 studentů. Naše české družstvo bylo sestaveno na základě výsledků ústředního kola 65. ročníku Matematické olympiády kategorie P a bylo tvořeno těmito vítězi ústředního kola MO-P: *Filip Bialas*, student Gymnázia Opatov v Praze 4, *Richard Hladík*, student Gymnázia a OA v Mariánských Lázních, *Ronald Luc*, student Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Václav Volhejn*, student Gymnázia Jana Keplera v Praze 6. Vedoucími české delegace na IOI 2016 byli *doc. RNDr. Tomáš Pitner, Ph.D.* z Fakulty informatiky Masarykovy univerzity v Brně a *doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc.* z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Již tradičně se naši účastníci IOI na soutěž předem připravovali společně s reprezentanty vybranými pro CEOI (Středoevropská olympiáda v informatice) na týdenním přípravném soustředění. Toto soustředění CPSPC se konalo ve druhé polovině června v Polsku na Varšavské univerzitě a bylo společné pro soutěžící z Čech, Polska a Slovenska.

Do Kazaně jsme přiletěli v pátek 12. 9. ráno a po registraci a ubytování jsme měli páteční odpoledne volné na odpočinek. Na večer připravili organizátoři krátký kulturní program, který předvedl všem účastníkům ruské a tatarské lidové písně a tance. V sobotu již na vedoucí delegací čekala první jednání mezinárodní jury, zatímco studenti měli možnost seznámit se prakticky se soutěžním prostředím na počítačích. V sobotu odpoledne proběhlo také slavnostní zahájení olympiády. Hned tentýž den večer se konalo jednání vedoucích všech delegací spojené s výběrem úloh pro první soutěžní den a následně překlady zadání úloh do rodných jazyků soutěžících.

V neděli probíhal první soutěžní den a souběžně s ním se konala i mezinárodní konference pro vedoucí národních delegací. Odpoledne po soutěži jsme se všichni společně vypravili na prohlídku Kazaně a prošli jsme historické centrum města. V odpočinkovém dni v pondělí jsme pokračovali v prohlídce Kazaně, tentokrát se zaměřením zejména na moderní sportoviště a novou výstavbu. Odpoledne jsme se pak mohli přímo v našem kampusu seznámit s místním tatarským folklórem.

V pondělí večer proběhla příprava úloh pro druhý soutěžní den, který se konal následně v úterý. Vpodvečer po skončení druhého soutěžního dne studenti ještě navštívili místní zábavní park, zatímco vedoucí měli jednání o průběhu a výsledcích olympiády.

Na středu byl pro všechny účastníky IOI připraven celodenní výlet – v jednom půldni jsme navštívili historické ostrovní město Svijažsk, ve druhém pak nově postavené město Innopolis nedaleko Kazaně, kde se na místní univerzitě konala výstava věnovaná problematice moderních informačních technologií.

Ve čtvrtek dopoledne proběhlo závěrečné jednání vedoucích všech delegací, které se zabývalo převážně otázkami budoucnosti IOI, volbou místa konání příštích ročníků a volbou členů mezinárodních řídicích orgánů. Pro soutěžící bylo zatím připraveno bližší seznámení s historií a současností Kazaňské federální univerzity. Ve čtvrtek odpoledne byla celá olympiáda zakončena vyhlášením výsledků a slavnostní večeří spojenou s kulturním představením.

Vlastní soutěž IOI probíhá podobným způsobem, jako praktická část ústředního kola naší Matematické olympiády kategorie P. Každý soutěžící má přidělen osobní počítač, na kterém řeší zadané algoritmické úlohy. V každém ze dvou soutěžních dnů jsou zadány tři úlohy a soutěžící mají na jejich vyřešení vymezen čas 5 hodin.

Úlohy je třeba dovést až do tvaru odladěného programu, hotové programy se odevzdávají k vyhodnocení prostřednictvím soutěžního prostředí.

Odevzdané programy se průběžně testují pomocí předem připravených sad testovacích dat. Prováděné testy jsou navíc omezeny časovými a paměťovými limity, aby se kromě otestování správnosti odlišila časová i paměťová efektivita algoritmu použitého jednotlivými účastníky soutěže. Při testování každé úlohy se používají sady testovacích dat různé velikosti, takže teoreticky správné řešení založené na neefektivním algoritmu zvládne dokončit výpočet pouze pro některé, menší testy. Takové řešení je potom ohodnoceno dílčím počtem bodů. Krátce po odevzdání vypracovaného programu do vyhodnocovacího systému se soutěžící dozví hodnocení svého řešení a má pak ještě možnost řešení opravit a odevzdat ho znovu. Jedná se o podobný systém, jaký používáme v posledních letech u nás v Matematické olympiádě kategorie P pro praktické úlohy domácího a ústředního kola. Diváci mohou během soutěže sledovat i průběžnou výsledkovou listinu, tu ale soutěžící nevidí.

Každá ze šesti soutěžních úloh je hodnocena maximálně 100 body, takže celkem bylo možné získat až 600 bodů. Letošním absolutním vítězem se stal student *Ce Jin* z Číny, který získal 597 bodů. Na základě přesně stanovených pravidel se na IOI podle dosažených bodů rozdělují medaile. Některou z medailí obdrží nejvýše polovina účastníků soutěže, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se rozdělují v poměru 1:2:3 s ohledem na to, aby soutěžící se stejným bodovým ziskem získali stejnou medaili. Na letošní IOI bylo uděleno celkem 154 medailí, z toho 26 zlatých, 51 stříbrných a 77 bronzových.

Výsledky našich soutěžících:
15. Václav Volhejn, 432 b. – zlatá medaile, 62. Filip Bialas, 341 b. – stříbrná medaile, 154. Richard Hladík, 240 b. – bronzová medaile, 185. Ronald Luc, 197 b. – HM.

Zisk tří medailí včetně jedné zlaté pro Českou republiku je výborným výsledkem, jakého jsme nedosáhli již dlouhou řadu let. Náš čtvrtý soutěžící sice medaili nezískal, ale jednu soutěžní úlohu vyřešil na plný počet bodů, což odpovídá čestnému ocenění HM užívanému v Mezinárodní matematické olympiádě. Mezinárodní olympiáda v informatice je výhradně soutěží jednotlivců a žádné oficiální pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlašováno. Dosažený medailový zisk nás však řadí do nejlepší čtvrtiny zúčastněných zemí. Slovenští reprezentanti získali na letošní IOI čtyři bronzové medaile. Nejúspěšnějšími zeměmi se třemi zlatými a jednou stříbrnou medailí se staly jako již tradičně Čína, Rusko a USA.

Všechny podrobnosti o soutěži i texty soutěžních úloh lze nalézt na webové stránce http://ioi2016.ru/, kompletní výsledková listina je k dispozici na stránce http://stats.ioinformatics.org/results/2016. Další ročníky Mezinárodní olympiády v informatice se budou konat postupně v Íránu (2017), Japonsku (2018), Azerbajdžánu (2019) a Singapuru (2020). Pořadatelé příští IOI 2017 z Íránu na místě pozvali delegace zúčastněné na IOI 2016, aby se zúčastnily také následujícího ročníku soutěže. Ten proběhne v Teheránu ve dnech 28. 7.–4. 8. 2017.

Pavel Töpfer

Středoevropská olympiáda v informatice CEOI 2016

Středoevropská olympiáda v informatice CEOI 2016 se konala 18.–23. 7. 2016 v Rumunsku ve městě Piatra-Neamt. Soutěž probíhala v prostorách místní střední školy se studijním programem zaměřeným na informatiku, účastníci byli ubytování v hotelu Ceahlau ve středu města. Celkem soutěžilo 52 studentů z 12 zemí. Vedle osmi tradičních účastnických středoevropských států (Česká republika, Chorvatsko, Maďarsko, Německo, Polsko, Rumunsko, Slovensko, Slovinsko) přijeli navíc jako hosté soutěžící z Bulharska, Švýcarska, Gruzie a Moldávie. Jako obvykle se „mimo soutěž“ zúčastnilo také druhé družstvo z pořadatelské země.

Reprezentační družstvo České republiky bylo sestaveno na základě výsledků dosažených v ústředním kole 65. ročníku Matematické olympiády kategorie P. Na celosvětovou informatickou olympiádu IOI 2016 (Rusko, Kazaň) byli vysláni čtyři nejlepší studenti z ústředního kola MO-P, pro účast na CEOI 2016 byli vybráni další čtyři nejlepší soutěžící z těch, kteří ještě nejsou v maturitním ročníku. Naši mladší soutěžící tak dostali příležitost získat na CEOI cenné zkušenosti, které mohou následně využít při úspěšně reprezentaci České republiky na IOI v příštím roce. Letos se CEOI zúčastnili tito studenti: *Martin Kurečka*, student Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Jan Priessnitz*, student Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Pavel Turek*, student Gymnázia Olomouc-Hejčín, *Petr Zelina*, student Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně. Vedoucími české delegace byli *Mgr. Filip Hlásek* a *Bc. Štěpán Šimsa*, oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Vlastní soutěž se tradičně odehrává v průběhu dvou soutěžních dnů. V každém dni soutěžící řeší tři úlohy, na které mají vždy pět hodin času. Večer před soutěží vedoucí všech delegací společně schválí soutěžní úlohy navržené pořadatelskou zemí, upraví podle potřeby jejich formulace a přeloží je pak do mateřského jazyka svých studentů. Čeští studenti tedy dostali jak anglickou, tak i českou verzi zadání úloh.

Každý soutěžící pracuje na přiděleném osobním počítači s nainstalovaným soutěžním prostředím, které umožňuje vyvíjet a testovat programy a odesílat je k vyhodnocení. Výsledné programy jsou testovány pomocí připravené sady testovacích dat a se stanovenými časovými limity. Tím je zajištěna nejen kontrola správnosti výsledků, ale pomocí časových limitů se také odliší kvalita použitého algoritmu. Při testování každé úlohy se používají sady testovacích dat různé velikosti a různé složitosti, takže teoreticky správné řešení založené na neefektivním algoritmu zvládne dokončit výpočet pouze pro některé, menší a jednodušší testy. Takové řešení je potom ohodnoceno částečným počtem bodů.

Poslední den proběhlo slavnostní zakončení soutěže s vyhlášením výsledků. Každá ze soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body, takže celkově bylo teoreticky možné získat až 600 bodů. To se však nikomu nepodařilo, neboť letošní soutěžní úlohy byly velmi obtížné. Celkový vítěz z Bulharska získal pouze 428 bodů. Úspěšnější polovina soutěžících dostává na CEOI medaili, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se rozdělují v přibližném poměru 1 : 2 : 3. Na CEOI 2016 bylo uděleno 5 zlatých, 9 stříbrných a 14 bronzových medailí. Středoevropská olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců, žádné pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlašováno.

Naši reprezentanti dosáhli následujících výsledků: 37. Petr Zelina, 105 bodů, 40. Pavel Turek, 89 bodů, 46. Jan Priessnitz, 63 bodů, 50. Martin Kurečka, 40 bodů. Nikdo z našich studentů nezískal žádnou medaili. Podobně dopadlo i slovenské družstvo, které skončilo pouze s jednou bronzovou medailí. Veškeré informace o soutěži, texty soutěžních úloh i podrobné výsledky všech soutěžících lze nalézt na Internetu na adrese http://www.ceoi2016.ro/. Následující 24. ročník Středoevropské olympiády v informatice CEOI 2017 se bude konat ve Slovinsku pravděpodobně ve dnech 10.– 15. 7. 2017.

Pavel Töpfer

MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA
Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXV (2016)

MATEMATIKA

FYZIKA

(s. 295) – *V. Bednář, J. Tesař, V. Vochozka*: Měření hladiny intenzity zvuku ve školním prostředí (s. 356) – *V. Timková, Z. Ješková, J. Válek*: Matematické modelovanie na počítači vo vyučovaní fyziky (s. 362)

INFORMATIKA

P. Töpfer: Optimalizace tras přívozů (Úlohy z MO – kategorie P, 33. část) (s. 59) – *S. Trávníček*: Variace a kombinace s omezeným opakováním (s. 68) – *D. Lessner, J. Vaníček*: Bobřík učí informatiku (5. díl – Informace a jejich reprezentace) (s. 138) – *M. Novák*: Arduino – základ pro levnou robotickou platformu(s. 147) – *M. Trnečka*: Základní optimalizace pro webové vyhledávače (s. 223) – *R. Bělohlávek*: Informatika jako obor (s. 299) – *P. Töpfer*: Jak skáče žabka (Úlohy z MO kategorie P, 34. část) (s. 376) – *L. Měsíček, P. Petrus*: Principy vyhledávání informací v prostředí internetu (s. 384)

ZPRÁVY

J. Zhouf: 9. Středoevropská matematická olympiáda (s. 76) – *M. Staněk*: Tři dny s matematikou (s. 78) – *J. Švrček*: Ústřední kolo 65. ročníku MO (kategorie A) (s. 231) – *P. Töpfer*: Ústřední kolo 65. ročníku MO (kategorie P) (s. 233) – *L. Richterek*: Celostátní kolo FO 2016 (s. 235) – *L. Richterek*: Rádiové spojení s ISS (s. 238) – *P. Calábek*: 57. ročník Mezinárodní matematické olympiády (s. 393) – *F. Studnička, J. Kříž*: Pět úspěchů na 47. ročníku Mezinárodní fyzikální olympiády (s. 396) – *P. Töpfer*: Mezinárodní olympiáda v informatice IOI 2016 (s. 397) – *P. Töpfer*: Středoevropská olympiáda v informatice CEOI 2016 (s. 399)

Z HISTORIE

F. Jáchim: Malý proces s velkým mužem (K 400 letům procesu roku 1616 s Galileem Galileim) (s. 154) – *B. Tesařík*: Jméno experimentálního fyzika Augustina Žáčka je spojeno s vynálezem radaru i „mikrovlnky" (s. 315)

LITERATURA

B. Tesařík: Příběh matematiky od zrodu prvních čísel k teorii chaosu (s. 79) – *B. Tesařík*: „Quod erat demonstrandum" (Q. E. D.) neboli „což mělo být dokázáno" (s. 157) – *B. Tesařík*: Géniové XX. století, jejichž vědecké objevy a technické vynálezy změnily svět (s. 158) – *B. Tesařík*: Chcete odhadnout svoji internetovou závislost? (s. 160)