

MATEMATIKA

Diofantovské n -tice

IVAN CHAJDA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Řecký matematik Diofantos z Alexandrie (asi 250 n. l.) byl již ve starověku nazýván otcem algebry. Jsou po něm nazvány rovnice, které řešíme v oboru celých či přirozených čísel, jako diofantovské. Věnoval se řešením těchto rovnic a základům teorie čísel. Do této oblasti spadá i problém nalezení čtveřice čísel takových, že součin každých dvou *různých* (z nich) zvětšený o 1 je roven druhé mocnině některého čísla. Příkladem takové čtveřice je $[1, 3, 8, 120]$, neboť

$$\begin{array}{ll} 1 \cdot 3 + 1 = 2^2, & 3 \cdot 8 + 1 = 5^2, \\ 1 \cdot 8 + 1 = 3^2, & 3 \cdot 120 + 1 = 19^2, \\ 1 \cdot 120 + 1 = 11^2, & 8 \cdot 120 + 1 = 31^2. \end{array}$$

Diofantos se ovšem neomezoval na čísla přirozená, ale hledal takové čtveřice mezi čísly racionálními, které musí být i v základu druhých mocnin. Příkladem čtveřice, kterou našel, je

$$\left[\frac{1}{16}, \frac{33}{16}, \frac{17}{4}, \frac{105}{16} \right].$$

První uvedenou celočíselnou čtveřici našel až *P. Fermat* v 17. století. *L. Euler* našel nekonečně mnoho takových celočíselných čtveřic ve tvaru

$$[a, b, a + b + 2r, 4r(r + a)(r + b)],$$

kde $ab + 1 = r^2$. Nalezl ovšem také pětice kladných racionálních čísel s uvedenou vlastností. Toto zkoumání nás vede k následující definici.

Definice 1

Konečná posloupnost m přirozených čísel $a_1, a_2, \dots, a_m$ se nazývá *diofantovská m -tice*, je-li $a_i a_j + 1$ druhou mocninou přirozeného čísla pro všechna $1 \leq i < j \leq m$. Konečná posloupnost $a_1, a_2, \dots, a_m$ nenulových racionálních čísel se nazývá *racionální diofantovská m -tice*, je-li $a_i a_j + 1$ druhou mocninou racionálního čísla pro všechna $1 \leq i < j \leq m$.

Je přirozenou otázkou, pro která m existují tyto diofantovské m -tice, a v jakém počtu. Byla vyslovena základní hypotéza o možných délkách m takových celočíselných m -tic:

Hypotéza 1

Neeexistují diofantovské pětice.

Podstatný krok k vyřešení této hypotézy podnikli *A. Baker* a *H. Davenport*, viz [2] v r. 1969, když dokázali, že jediné přirozené číslo d takové, že $[1, 3, 8, d]$ je diofantovská čtveřice, je $d = 120$. Odtud plyne, že Fermatem nalezená čtveřice $[1, 3, 8, 120]$ nemůže být rozšířena na diofantovskou pětici. Avšak pro racionální čísla překvapivě existuje i racionální diofantovská šestice, jejíž příklad našel *P. Gibbs*, viz [7]:

$$\left[\frac{11}{192}, \frac{35}{192}, \frac{155}{27}, \frac{512}{27}, \frac{1235}{48}, \frac{180873}{16} \right].$$

Nabízí se myšlenka, zda existuje obecnější teorie, která by umožnila odpovědi na otázky o diofantovských m -ticích. Pokusíme se zde shrnout některé takové výsledky. V článku [1] dokázali *J. Arkin*, *V. E. Hoggart* a *E. G. Strauss*, že každou diofantovskou trojici lze rozšířit na diofantovskou čtveřici. Přesněji, je-li $[a, b, c]$ diofantovská trojice, a platí-li

$$ab + 1 = r^2, \quad ac + 1 = s^2, \quad bc + 1 = t^2,$$

kde r, s, t jsou přirozená čísla, pak $[a, b, c, d]$ jsou diofantovské čtveřice pro

$$d = a + b + c + 2abc + 2rst. \quad (1)$$

Čtenář snadno může ověřit, že platí

$$ad + 1 = (at + rs)^2, \quad bd + 1 = (bs + rt)^2, \quad cd + 1 = (cr + st)^2.$$

Otázkou zůstává, zda pro každou diofantovskou čtveřici $[a, b, c, d]$ takovou, že $d > \max\{a, b, c\}$, platí, že d splňuje (1). Jak již bylo zmíněno,

Baker a Davenport to dokázali pro trojici $[1, 3, 8]$. *M. Velupillai* [9] to dokázal pro $[2, 4, 12]$ a *K. S. Kedlaya* [8] pro trojice $[1, 3, 120]$, $[1, 8, 120]$, $[1, 8, 15]$, $[1, 15, 35]$, $[1, 24, 35]$ a $[2, 12, 24]$. Dokonce *A. Dujella* to dokázal pro všechny trojice tvaru $[k - 1, k + 1, 4k]$. Takové čtveřice $[a, b, c, d]$ se nazývají *regulární*. Ekvivalentní podmínkou k tomu, aby diofantovská čtveřice $[a, b, c, d]$ byla regulární, je splnění rovnosti

$$(a + b - c - d)^2 = 4(ab + 1)(cd + 1).$$

To je samozřejmě kvadratická rovnice pro d , jejíž jeden kořen je určen vztahem (1) a druhý je číslo

$$d = a + b + c + 2abc - 2rst.$$

Je dokázáno, že pro čísla a, b, c, d menší než 10^6 existuje právě 207 diofantovských čtveřic $[a, b, c, d]$, které jsou všechny regulární. Jelikož pro daná a, b, c je počet celočíselných bodů $[x, y]$ na křivce

$$y^2 = (ax + 1)(bx + 1)(cx + 1),$$

jak známo, konečný, plyne odtud, že nemůže existovat nekonečná posloupnost

$$a, b, c, \dots, x, \dots,$$

splňující Diofantovu podmínku (na pravé straně poslední rovnosti je součet tří druhých mocnin). Je tedy otázkou, jaké je největší číslo m , pro které existuje diofantovská m -tice. *A. Dujella* [5] dokázal v roce 2001, že $m \leq 8$. Avšak v roce 2004 tento výsledek sám podstatně zesílil dvěma tvrzeními:

Věta 1

Neeexistují diofantovské šestice.

Věta 2

Existuje nejvýše konečný počet diofantovských pětic.

Zda vůbec a kolik diofantovských pětic existuje, bylo zkoumáno řadou matematiků. Původní odhad byl, že pro jejich počet platí $Q < 10^{1930}$. Během několika let se tento odhad zpřesňoval, a nynější údaj je mnohem vylepšený, totiž $Q < 1,18 \cdot 10^{27}$. *Y. Fujita* [6] dokázal, že každá diofantovská pětice obsahuje regulární diofantovskou čtveřici a dále, je-li $[a, b, c, d, e]$ diofantovská pětice splňující $a < b < c < d < e$, pak musí platit jedna z podmínek:

- (i) $4a < b$; $4ab + a + b < c < b^{3/2}$,
- (ii) $4a < b$; $c = a + b + 2\sqrt{ab + 1}$,
- (iii) $4a < b$; $c > b^{3/2}$,
- (iiii) $b < 4a$; $c = a + b + 2\sqrt{ab + 1}$.

Pro racionální diofantovské pětice je situace zcela odlišná. Necht' $[a, b, c, d]$ je racionální diofantovská čtveřice, tj. pro vhodná racionální r_i platí

$$\begin{aligned} ab + 1 &= r_1^2, & bc + 1 &= r_4^2, \\ ac + 1 &= r_2^2, & bd + 1 &= r_5^2, \\ ad + 1 &= r_3^2, & cd + 1 &= r_6^2. \end{aligned}$$

Necht' $abcd \neq 1$. Položme

$$e = \frac{((a+b+c+d)(abcd+1) + 2abc + 2abd + 2acd + 2bcd \pm 2r_1r_2r_3r_4r_5r_6)}{(abcd-1)^2}.$$

Pak lze dokázat, že $[a, b, c, d, e]$ je racionální diofantovská pětice. S ohledem na symetrii stačí např. ukázat, že $ae + 1 = (ar_4r_5r_6 \pm r_1r_2r_3)^2 / (abcd - 1)^2$.

Příkladem takové pětice je

$$\left[\frac{1}{16}, \frac{33}{16}, \frac{17}{4}, \frac{105}{16}, e \right],$$

kde výpočtem, jak výše uvedeno, zjistíme dvě možné hodnoty

$$e = \frac{549120}{10201} \quad \text{nebo} \quad e = -\frac{26880}{177241}.$$

Již Eulerovi bylo známo, že existuje nekonečně mnoho racionálních diofantovských pětic, ale teprve nedávno bylo zkoumáno, zda existuje nekonečně mnoho takových šestic. Nejmenší z nich je

$$\left[\frac{19}{12}, \frac{33}{4}, \frac{52}{3}, \frac{60}{2209}, -\frac{495}{24964}, \frac{595}{12} \right].$$

Kromě toho bylo dokázáno, že existuje nekonečně mnoho racionálních diofantovských šestic, které obsahují trojici $\left[\frac{15}{14}, -\frac{16}{21}, \frac{7}{6} \right]$. Stejný výsledek byl odvozen i pro trojice

$$\left[\frac{48}{17}, -\frac{35}{102}, \frac{17}{6} \right] \quad \text{a} \quad \left[\frac{56}{69}, -\frac{165}{184}, \frac{23}{24} \right].$$

Otevřenou otázkou zůstává existence racionální diofantovské sedmice.

P. Gibbs našel 45 racionálních diofantovských šestic.

Při zkoumání celočíselných diofantovských m -tic jsme požadovali, aby $a_i a_j + 1$ bylo rovno r^2 pro některé přirozené číslo r , kdykoli $i \neq j$. Je totiž evidentní, že $a_i^2 + 1$ nemůže být druhou mocninou přirozeného čísla. Pro racionální diofantovské m -tice však takové omezení $i \neq j$ není nutné. Proto lze uvažovat i racionální diofantovské m -tice $[a_1, a_2, \dots, a_m]$, kde $a_i^2 + 1$ je rovněž čtverec racionálního čísla. Takové m -tice se nazývají *silné*. Příkladem silné diofantovské trojice je

$$\left[\frac{1976}{5607}, \frac{3780}{1691}, \frac{14596}{1197} \right].$$

Není však znám žádný příklad silné diofantovské čtveřice.

Náš přehled některých výsledků o diofantovských m -ticích, které poukávají pozornost matematiků pracujících v teorii čísel již po několik desetiletí, zakončíme vysvětlením, v které oblasti současného matematického výzkumu vznikají výše uvedené teorie a výsledky jako zajímavý „vedlejší produkt“. Je to v teorii eliptických křivek, což jsou právě křivky tvaru

$$y^2 = (ax + 1)(bx + 1)(cx + 1),$$

na kterých hledáme body s celočíselnými či racionálními souřadnicemi x, y . Že se jedná o poměrně složitý matematický aparát, který přesahuje elementární rámec našeho výkladu, si pravděpodobně čtenář umí představit.

Za pozornost stojí, že úloha s podobnou tematikou byla předložena reprezentantům na 27. mezinárodní matematické olympiádě, která se konala v roce 1986 ve Varšavě. viz např. [10]. Jako první byla zadána soutěžícím následující úloha:

Nechť a je přirozené číslo, různé od 2, 5, 13. Dokažte, že v množině $\{2, 5, 13, d\}$ lze nalézt dva prvky a, b takové, že $\sqrt{ab - 1}$ není celé číslo.

Zájemcům doporučujeme pokusit se o vlastní řešení této úlohy.

Literatura

- [1] *Arkin, J. – Hoggart, V. E. – Strauss E. G.*: On Euler's solution of a problem of Diophantus. *Fibonacci Quart.* **17** (1979).
- [2] *Baker, A. – Davenport, H.*: The equations $3x^2 - 2 = y^2$ and $8x^2 - 7 = z^2$. *Quart. J. Mathem. Oxford Ser. (2)* **20** (1969).

- [3] *Dujella, A.*: The problem of the extension of a parametric family of Diophantine triples, *Publ. Math. Debrecen* **51** (1997).
- [4] *Dujella, A.*: What is a Diophantine m -tuple? *Notices of the Amer. Math. Soc.*, **63** (7), (2016).
- [5] *Dujella, A.*: An absolute bound for the size of Diophantine m -tuples. *Journal of Number Theory* **89** (2001).
- [6] *Fujita, Y.*: Any Diophantine quintuple contains a regular Diophantine quadruple. *Journal of Number Theory* **129** (2009).
- [7] *Gibbs, P.*: Some rational Diophantine sextuples. *Glas. Mat. Ser. III, Soft Computing* **41** (2006).
- [8] *Kedlaya, K. S.*: Solving constrained Pell equations. *Math. Comp* **67** (1998).
- [9] *Veluppillai, M.*: The equations $z^2 - 3y^2 = -2$ and $z^2 - 6x^2 = -5$. A Collection of Manuscripts Related to the Fibonacci sequence, The Fibonacci Association, Santa Clara, 1980.
- [10] 35. ročník MO na středních školách, SPN, Praha, 1988.

Polibky kružnic: Jakob Steiner, 1. část

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Již ve starověkém Řecku bylo známo: Pokud sečna z vnějšího bodu X protíná kružnici $k(O; r)$ v bodech A, B a tečna z téhož bodu má s kružnicí dotyk v bodě T , pak

$$|AX| \cdot |BX| = |AT|^2. \quad (1)$$

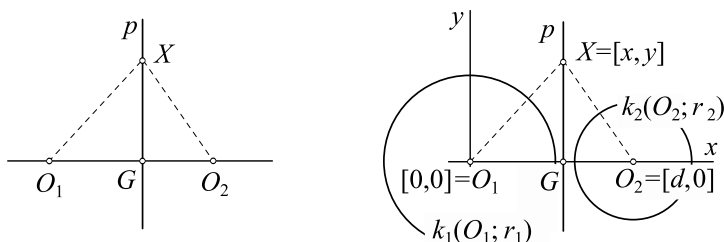
Eukleidovy *Základy* uvádí i analogickou větu pro vnitřní bod kružnice. Rovněž byla známa analogická věta pro vnitřní bod X kružnice k . Jakob Steiner (1796–1863) ve své první knižně vydané práci [2] tyto poznatky rozšířil. Zavedl veličinu zvanou *mocnost bodu ke kružnici* nebo též *mocnost kružnice k bodu*, kterou v dané rovině chápal jako charakteristiku vzájemné polohy libovolného bodu X a pevně zvolené kružnice k , resp.

jako charakteristiku polohy libovolné kružnice k vzhledem k pevně zvolenému bodu X .¹ Stručně ji lze definovat vztahem $\mu(X, k) = |OX|^2 - r^2$.

Poznamenejme, že mocnost úzce souvisí s analytickým vyjádřením kružnice: V kartézské soustavě souřadnic pro $O = [m, n]$ a $X = [x, y]$ je

$$\mu(X, k) = (x - m)^2 + (y - n)^2 - r^2. \quad (2)$$

Kružnice $k(O; r)$ má tedy rovnici $\mu(X, k) = 0$ a bod X je jejím vnějším, resp. vnitřním bodem, právě když $\mu(X, k) > 0$, resp. $\mu(X, k) < 0$.



Obr. 1 Množina bodů X (vlevo) a chordála p kružnic k_1, k_2 (vpravo)

Steiner nejprve hledal množinu všech bodů v rovině, které mají ke dvěma kružnicím stejnou mocnost, tzv. *chordála dvou kružnic*. Vyšel z poznatku, že pro body O_1, O_2 a G ležící v dané rovině na téže přímce je množinou všech bodů X s vlastností

$$|O_1X|^2 - |O_1G|^2 = |O_2X|^2 - |O_2G|^2$$

kolmice p na přímku O_1O_2 v bodě G (viz obr. 1 vlevo). Poslední vztah upravil na ekvivalentní tvar

$$|O_1X|^2 - |O_2X|^2 = |O_1G|^2 - |O_2G|^2 \quad (3)$$

a pak bodům O_1, O_2 přiřadil kružnice $k_1(O_1; r_1), k_2(O_2; r_2)$ libovolných poloměrů (obr. 1 vpravo). Bod X má k těmto kružnicím stejnou mocnost, právě když platí

$$|O_1X|^2 - r_1^2 = |O_2X|^2 - r_2^2,$$

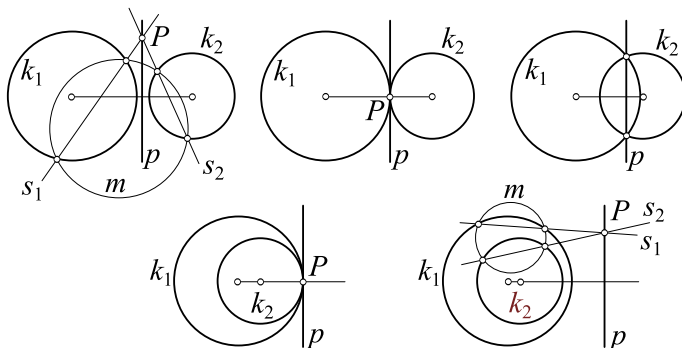
neboli

$$|O_1X|^2 - |O_2X|^2 = r_1^2 - r_2^2. \quad (4)$$

¹V originále *Potenz des Punkts in Bezug auf den Kreis*, resp. *Potenz des Kreises in Bezug auf den Punkt*. Česká terminologie název *mocnost kružnice k bodu* neuzivá.

Ze vztahů (3) a (4) nakonec usoudil, že chordálou kružnic k_1 a k_2 je přímka p při umístění bodu $G \in O_1O_2$ tak, aby platilo

$$|O_1G|^2 - |O_2G|^2 = r_1^2 - r_2^2. \quad (5)$$



Obr. 2 Chordála p pro různé vzájemné polohy kružnic k_1 a k_2

Stejný výsledek lze získat i analyticky. Při volbě kartézské soustavy souřadnic podle obr. 1 vpravo má podmínka $\mu(X, k_1) = \mu(X, k_2)$ tvar

$$x^2 + y^2 - r_1^2 = (x - d)^2 + y^2 - r_2^2$$

a odtud

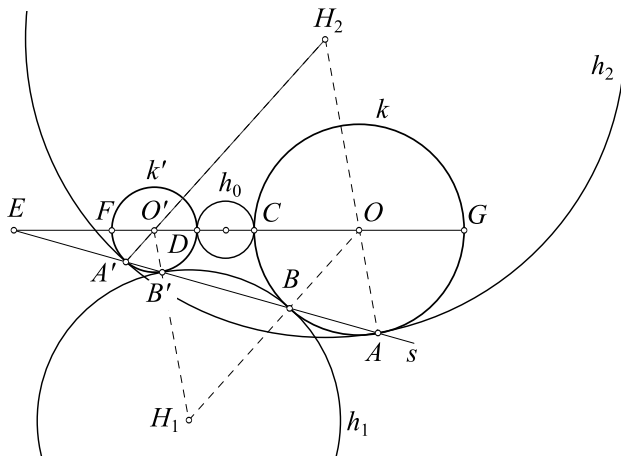
$$p: x = \frac{d}{2} + \frac{r_1^2 - r_2^2}{2d} (= |O_1G|).$$

Chordála kružnic $k_1(O_1; r_1)$ a $k_2(O_2; r_2)$ je tedy kolmice p k přímce O_1O_2 vedená kterýmkoliv bodem, jenž má k oběma kružnicím stejnou mocnost. Nemají-li kružnice společný bod, můžeme ji snadno sestavit užitím pomocné kružnice m , která má s kružnicemi k_1 a k_2 různoběžné společné secny s_1 a s_2 (obr. 2 vlevo nahoře a vpravo dole). Jejich průsečík P má stejnou mocnost ke všem třem kružnicím. Nazývá se *potenční střed* kružnic k_1 , k_2 a m .

Uvažujme dále kružnice $k(O; r)$ a $k'(O'; r')$ s vnějším středem E stejnolehlosti $\mathcal{H}_{E, \lambda}: k \rightarrow k'$. Sečna $s \neq OO'$ z bodu E protíná kružnici k v bodech B , A a kružnici k' v jejich obrazech $A' = \mathcal{H}_{E, \lambda}(B)$ a $B' = \mathcal{H}_{E, \lambda}(A)$ (obr. 3). Označme po řadě H_1 a H_2 průsečíky přímk OB , $O'B'$ a OA , $O'A'$. Snadno lze ověřit, že

$$|\sphericalangle H_1BB'| = |\sphericalangle O'A'B'| = |\sphericalangle A'B'O'| = |\sphericalangle H_1B'B|.$$

Trojúhelník $BB'H_1$ je tedy rovnoramenný a kružnice $h_1(H_1; |H_1B|)$ se vně dotýká kružnic k a k' v bodech B a B' . Analogicky má i kružnice $h_2(H_2; |H_2B|)$ vnitřní dotyky s kružnicemi k a k' v bodech A a A' . V předchozím článku [1] jsme dokázali i obrácené tvrzení: Jestliže má nějaká kružnice dotyky T a T' téhož typu s kružnicemi k a k' , pak přímka TT' prochází bodem E .²



Obr. 3 Společná mocnost kružnic k a k' k jejich středu stejnolehlosti E

Bod E má ke kružnici k mocnost $\mu = |EA| \cdot |EB| = |EC| \cdot |EG|$ a je středem stejnolehlosti s koeficientem

$$\lambda = |EB'|/|EA| = |EA'|/|EB| = |ED|/|EG| = |EF|/|EC|.$$

Pro součin obou konstant platí

$$c = \lambda\mu = |EB| \cdot |EB'| = |EA| \cdot |EA'| = |EC| \cdot |ED| = |EF| \cdot |EG|. \quad (6)$$

Analogický vztah lze odvodit i pro vnitřní střed stejnolehlosti kružnic. Konstantu c nazveme (v souladu se Steinerovým „gemeinschaftliche Potenz“ a anglickým „common power“) *společná mocnost kružnic k a k' vzhledem k jejich středu stejnolehlosti E* .

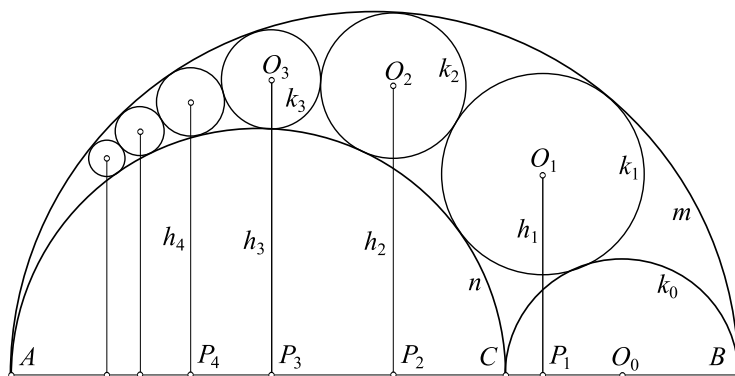
²Zkušenější čtenář zajisté poznal, že jde o důsledky Mongeovy věty o skládání stejnolehlostí.

Ze vztahu (6) plynou dva důsledky:

T1. Bod E má stejnou mocnost c ke každé z kružnic $h_0, h_1, h_2, \dots$, jež se dotýkají kružnic k a k' tak, že jsou dotyky buď oba vnitřní, nebo oba vnější.

T2. Rovnici (6) je dána kruhová inverze se základní kružnicí $z(E, \sqrt{c})$, která zobrazuje kružnici k na kružnici k' a každou z kružnic h_i na sebe.

Nutno zmínit, že Steiner postupoval jinak. Zde jsme uvedli rychlejší cestu a to jen k poznatkům, které budeme potřebovat. Termín *kruhová inverze* byl zaveden později. Z nepublikovaných Steinerových prací je známo, že inverzi užíval. Je prvním známým matematikem, který po éře starověku znovu objevil kruhovou inverzi.



Obr. 4 Řetězec kružnic vepsaných do arbelu

Zmíněné výsledky Steiner využil ke zjednodušení důkazu Pappova *starodávného tvrzení*, podle něž pro kružnice $k_j(O_j; r_j)$ vepsané do arbelu na obr. 4 platí $h_j = 2jr_j$ (podrobněji viz [1]). Uvedl, že podíly h_j/r_j , kde $j = 0, 1, 2, \dots$, tvoří i pro jiné řetězce kružnic analogicky vepsaných mezi kružnice m a n aritmetickou posloupnost

$$\frac{h_0}{r_0}, \quad \frac{h_0}{r_0} + 2, \quad \frac{h_0}{r_0} + 4, \quad \dots, \quad (7)$$

přičemž v arbelu z obr. 4 je $h_0 = 0$. Důkaz učinil odvozením rekurentního vztahu

$$\frac{h'}{r'} = \frac{h}{r} + 2 \quad (8)$$

pro dvě sousední kružnice řetězce.

Postupným využitím podobnosti trojúhelníků $AP'V'$ a APV , faktu, že rovnoběžné promítání ve směru přímky p zachovává poměry odpovídajících úseků na přímkách AB a EO , a vnější stejnolehlosti kružnic k' a k určíme

a odtud po ekvivalentní úpravě vztah (8).

11

The diagram shows two circles, k and n , with centers O and O' respectively. A horizontal line p passes through points C , P , P' , and A . A vertical line segment VP connects the center O to point V . A curve m is tangent to circle k at point T and passes through point A . Other points labeled include V' , E , and k' .

U třetí konfigurace (obr. 7) je tomu jinak. Kružnice m a n mají s kružnicí k vnitřní dotyk a s kružnicí k' vnější dotyk. Vnějšímu středu E z obr. 5 zde odpovídá vnitřní střed I stejnolehlosti kružnic k a k' . Postup je opět stejný až na to, že v posloupnosti kroků (9) bude ve jmenovateli prvního zlomku výraz $r - h$ místo původního $r + h$. Pro tuto konfiguraci má proto výsledný vztah tvar

Příště si ukážeme, jak Steiner odvodil Descartesovu větu o dotýkajících se kružnicích.

O jedné cestě z geometrie přes aritmetiku k algebře a zpět

FILIP ROUBÍČEK

Matematický ústav AV ČR, Praha

Vzdělávání je společností často nahlíženo v kontextu jejích proměn a aktuálních požadavků, proto zamyšlení se nad otázkou *Co, jak a proč se má ve škole vyučovat?* je stále aktuální. Přestože matematika představuje jeden z hlavních oborů základního vzdělání, jehož vzdělávací obsah zůstává ve srovnání s jinými obory dlouhá léta téměř neměnný, didaktici matematiky neustávají v hledání cest, jak matematické vzdělávání zkvalitňovat, jak zefektivnit vyučovací proces, jak motivovat děti k učení se matematice. Mnohé zapomenuté myšlenky se opět vynořují a uplatňují v novém společenském kontextu s ohledem na podmínky a potřeby školské praxe.

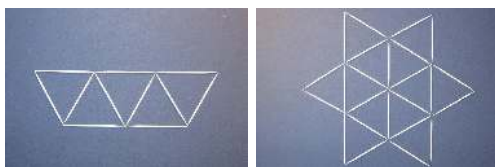
V přístupech, které jsou v současném matematickém vzdělávání prosazovány [4], je kladen důraz na aktivizaci žáků ve vyučování a uplatňování postupů, které napomáhají jejich porozumění matematice a tím usnadňují její aplikaci. Všeobecně se uznává, že učitel, který vede žáky k aktivnímu přístupu k učení se matematice, vytváří podmínky pro zkvalitnění jejich matematického poznání i pro zvýšení jejich zájmu o matematiku. V rámci své výuky poskytuje žákům prostor pro matematickou diskusi, kladení otázek, formulování domněnek, vzájemné sdílení řešitelských postupů a další formy prezentace jejich matematického uvažování. Do výuky zařazuje modelování, experimentování, analyzování dat a jiné postupy, které žákům přirozeně nabízejí příležitosti k zobecňování a zdůvodňování. Učitel aktivizuje žáky také tím, že podporuje jejich snahu problém vyřešit, reflektuje jejich zjištění a hodnotí význam zjištěného pro řešení problému. To od něj vyžaduje schopnost pružně a správně reagovat na různé žákovské podněty.

Kromě zajištění podmínek pro autonomní a kooperativní učení je nutné věnovat pozornost matematickému obsahu předkládaných úloh nebo úkolů a zvážit, zda žáci jsou dostatečně vybaveni poznatky pro jejich řešení. Východiskem pro žákovská objevování bývají otevřené matematické úlohy, tedy takové, které popisují neurčitou, nejednoznačnou nebo žákům neznámou matematickou situaci a požadují její komplexní prozkoumání. Ne-

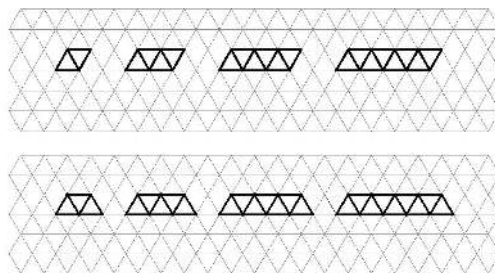
určitá vstupní situace nabízí řešiteli možnost rozhodnout se, jakými případy se bude zabývat, a vybrat si cesty, kterými se vydá. Žáky nepřiměje k objevování jednoduchá úloha, kterou vyřeší naučeným postupem, ale ani složitá úloha, kterou nedovedou správně uchopit jim dostupnými matematickými prostředky. V některých případech je třeba iniciovat žákovské objevování diskusí, při které si žáci spíše uvědomí, jak mohou uvažovat a jakým způsobem lze zadanou situaci prozkoumat. Vhodným podnětem pro objevování může být také pro žáky neobvyklé prostředí, v němž je situace zadána.

Specifické prostředí jako podnět k objevování

Příkladem specifického prostředí v planimetrii je konstruování útvarů ve čtvercové síti nebo v pravidelné trojúhelníkové síti. Proces objevování pravidelností ukážeme na geometrických obrazcích, které jsou sestaveny ze shodných rovnostranných trojúhelníků. Takové obrazce můžeme vytvořit například pomocí párátek, jak je znázorněno na obr. 1. Je však třeba upozornit, že modelování pomocí párátek přináší úskalí v tom, že umožňuje vytvářet obrazce ze shodných rovnostranných trojúhelníků, které nerespektují trojúhelníkovou síť. Tomuto problému lze předejít tím, že žákům poskytneme pro záznam sestavených obrazců listy papíru s předtisknutou trojúhelníkovou sítí (obr. 2).



Obr. 1 Příklady obrazců sestavených z párátek

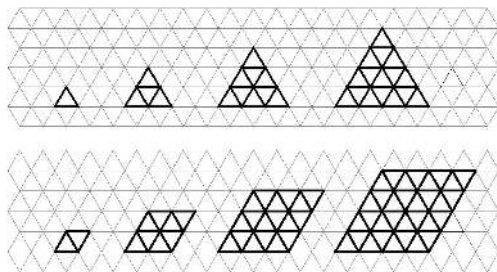


Obr. 2 Posloupnosti rovnoběžníků a lichoběžníků v trojúhelníkové síti

V prostředí trojúhelníkové sítě zadáme žákům následující úlohu:

Sestavte různé obrazce tvořené shodnými rovnostrannými trojúhelníky ze třech párátek. Zjistěte, kolik párátek je potřeba k sestavení nějakého většího obrazce.

Úloha je otevřená v tom, že neurčuje tvar a velikost výchozího obrazce ani způsob jeho zvětšování. Tato skutečnost umožňuje přirozenou diferenciaci ve třídě, tzn. přizpůsobit obtížnost úlohy schopnostem jednotlivých žáků. Je na žáků jako řešiteli, aby si vymezil oblast svého zkoumání a určil případy, jimiž se bude zabývat. Je zřejmé, že je snazší začít hledat pravidelnosti na jednodušších obrazcích, jako jsou rovnoběžníky, rovnoramenné lichoběžníky nebo rovnostranné trojúhelníky (obr. 2 a 3), než se hned zabývat složitějšími obrazci, jako je šesticípá hvězda na obr. 1.



Obr. 3 Posloupnosti trojúhelníků a kosočtverců v trojúhelníkové síti

Uvedená úloha vychází z geometrického prostředí, ale jejím výstupem je popis určité pravidelnosti, resp. aritmetické nebo algebraické vyjádření změny velikosti obrazce. Přitom prodlužování v jednom směru (viz posloupnost kosodélníků nebo rovnoramenných lichoběžníků na obr. 2) se vyznačuje jinou kvantitativní změnou než zvětšování ve dvou směrech (viz posloupnost rovnostranných trojúhelníků nebo kosočtverců na obr. 3, kde se jedná o posloupnosti podobných obrazců, neuvažujeme-li úsečky uvnitř útvaru). V případě prodlužování bude výsledkem lineární závislost, zatímco ve druhém případě půjde o závislost kvadratickou, jak ukážeme dále.

Některé řešitelské strategie

Při zkoumání pravidelností mohou žáci využít různé přístupy. Mladší žáci nebo žáci, kteří z různých důvodů upřednostňují konkrétní objekty před abstraktními, nejčastěji volí postup, kdy modelují obrazce z párátek (případně je zakreslují do trojúhelníkové sítě) a párátko (resp. úsečky) postupně počítají. Tato strategie je obvyklá i u ostatních žáků v počátku

zkoumání, kdy se snaží zorientovat v neznámé situaci a matematicky ji uchopit. Následně někteří žáci ustupují od vytváření konkrétních modelů a pracují pouze s počty páráték. Posloupnost obrazců nahrazují číselnou posloupností a pozorují kvantitativní změny. Nalezenou pravidelnost se poté snaží popsat aritmeticky. Žáci, kteří dovedou vztahy abstrahovat, modelují složitější obrazce pomocí jednodušších a vyvozují aritmetické nebo algebraické vyjádření změny počtu páráték pro další případy z popsanych vztahů.

Na základě pozorování byly vymezeny tři základní řešitelské strategie (resp. úrovně řešení):

- a) modelování posloupnosti obrazců pomocí páráték (případně jejich grafické znázorňování) a postupné určování počtu páráték
- b) modelování posloupnosti obrazců pomocí čísel (vyjadřujících počet páráték) a hledání aritmetické pravidelnosti
- c) modelování složitějšího obrazce pomocí jednodušších a aritmetické nebo algebraické vyvozování

První z uvedených strategií je založena na manipulaci s konkrétními modely, kterou žáci volí většinou jen na začátku řešení úlohy. V průběhu řešení, kdy nahlédnou určité souvislosti, tuto strategii zcela nebo částečně opouštějí a zkoumají kvantitativní změny prostřednictvím aritmetických vztahů. Opora konkrétního modelu se však znovu objevuje při zkoumání složitějších obrazců. Správně algebraicky popsat vztahy mezi počty páráték (tj. vyjádřit jejich počty pomocí proměnné) zejména ve složitějších případech se daří jen některým žákům, kteří dovedou pracovat s algebraickými výrazy a provádět jejich úpravy.

Uvedené strategie můžeme názorně ilustrovat na příkladu posloupnosti rovnoběžníků a lichoběžníků na obr. 2. V případě strategie a) žáci nejprve sestaví nejjednodušší rovnoběžník, který je tvořen dvěma shodnými rovnostrannými trojúhelníky. Jde o kosočtverec sestavený z pěti páráték. Poté jednu jeho stranu prodlouží o jedno párátko, doplní na kosodélník složený ze dvou shodných kosočtverců a určí celkový počet páráték devět. Tímto způsobem pokračují a postupně určují počty páráték pro další kosodélníky. Počet páráték v dalším obrazci většinou zjišťují opakovaným přepočítáváním páráték po jednom. Někteří žáci si po určitém počtu kroků uvědomí, že další prodloužený kosodélník získají přidáním čtyř páráték. Toto zjištění však vychází z manipulativní činnosti s konkrétními modely a je podloženo zkušeností z víceméně mechanického modelování kosodélníků, příp. jejich zakreslování do trojúhelníkové sítě.

Určení počtu páráték u několika prvních rovnoběžníků se stává východiskem pro nahrazení posloupnosti rovnoběžníků číselnou posloupností 5, 9, 13, 17, ..., tzn. žáci přecházejí ke strategii b). Doplní posloupnost o další čísla 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, ... a objevují pravidelnost prostřednictvím uvedené číselné posloupnosti bez opory konkrétních modelů. Určují diferenci mezi čísly a objevenou pravidelnost vyjadřují slovy „další je vždy o čtyři větší“ nebo „dál to bude plus čtyři“. Odpověď na otázku, kolik páráték potřebujete na kosodélník, který má stranu dlouhou 10, buď zjistí postupným dopočítáním $29 + 4 + 4 + 4 = 41$, nebo vyjádří výpočtem $5 + 9 \cdot 4 = 41$, zatímco žáci upřednostňující strategii a) kosodélník se stranou dané délky nejprve vymodelují. Uvedený výraz je už jen krůčkem k zobecnění pro kosodélník s libovolnou délkou strany n . Vodítkem pro vyvození obecného vztahu $5 + (n - 1) \cdot 4 = 4n + 1$ je určení počtu páráték pro další konkrétní délky stran, např.

$$\text{pro } n = 10: \quad 5 + (10 - 1) \cdot 4 = 5 + 36 = 41 = 4 \cdot 10 + 1$$

$$\text{pro } n = 20: \quad 5 + (20 - 1) \cdot 4 = 5 + 76 = 81 = 4 \cdot 20 + 1$$

$$\text{pro } n = 50: \quad 5 + (50 - 1) \cdot 4 = 5 + 196 = 201 = 4 \cdot 50 + 1$$

$$\text{pro } n = 100: \quad 5 + (100 - 1) \cdot 4 = 5 + 396 = 401 = 4 \cdot 100 + 1$$

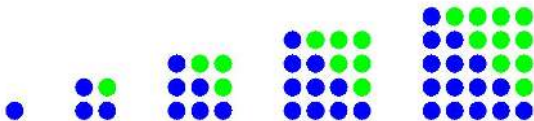
Volba strategie se zřetelně projeví při změně posloupnosti obrazců, například místo rovnoběžníků žáci zkoumají lichoběžníky (viz obr. 2). V případě strategie a) žáci celý proces opakují od začátku, tzn. modelují jednotlivé lichoběžníky a postupně určují počty páráték. Žáci, kteří použijí strategii b), vyjdou z nové řady čísel 7, 11, 15, 19, 24, ..., opět určí diferenci a pomocí ní vyjádří hledaný počet. Objeví se však i žáci, kteří jsou schopni abstrahovat a získané poznatky využít pro nový případ. Takovým žákům je vlastní strategie c) – uvědomí si, že lichoběžník vznikne z rovnoběžníku přidáním dvou páráték, a zobecněný vztah pro rovnoběžník upraví snadno na vztah pro lichoběžník $4n + 1 + 2 = 4n + 3$.

Hledání souvislostí

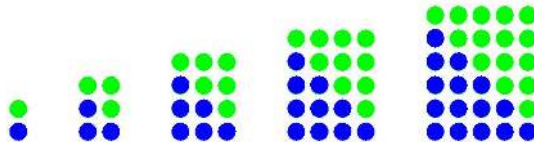
Řešení otevřených úloh často vyžaduje propojovat poznatky z různých oblastí matematiky, tedy schopnost nahlížet zkoumané situace z různých úhlů pohledu a popisovat je prostřednictvím různých matematických nástrojů, jak bylo naznačeno výše. Popsané strategie, které žáci použili při řešení uvedené úlohy a ve kterých žáci popisují posloupnosti obrazců v trojúhelníkové síti, které vznikly prodloužením jednoho jejich rozměru, pomocí aritmetických, příp. algebraických prostředků, zaznamenáme i v případě

druhého způsobu zvětšování obrazců (tj. při zvětšování obou rozměrů). V případě posloupnosti rovnostranných trojúhelníků nebo kosočtverců (viz obr. 3) je však určování počtů párátek a následné zobecnění náročnější. Počty párátek narůstají nelineárně a vyjádření pravidelnosti v posloupnosti 3, 9, 18, 30, 45, ... (pro trojúhelníky) nebo v posloupnosti 5, 16, 33, 56, 85, ... (pro kosočtverce) vyžaduje hlubší analýzu a využití určitých souvislostí a dalších matematických poznatků.

Posloupnost 3, 9, 18, 30, 45, ... je posloupností trojnásobků trojúhelníkových čísel 1, 3, 6, 10, 15, ... Poznátka o trojúhelníkových číslech a jiných figurálních číslech bývá v učebnicích matematiky pro základní školy zařazována zřídka, přestože mohou být vítaným zpestřením výuky matematiky i podnětem pro žákovská objevování. O figurálních číslech pojednává řada populárně naučných publikací o matematice, např. [1, 2, 3]. Poznátka o čtvercových a trojúhelníkových číslech mohou žáci využít pro zobecnění zmíněné posloupnosti 3, 9, 18, 30, 45, ... Označení čtvercových čísel podle jejich grafické reprezentace je žákům zřejmé z různých modelů. Díky souvislostem s dalšími poznatkami (obsah čtverce, druhá mocnina) rozpoznají tato čísla snáze než čísla trojúhelníková, i když jejich označení vzniklo obdobně. Poznatkem, že každé čtvercové číslo lze rozdělit na dvě po sobě jdoucí čísla trojúhelníková, mohou žáci jednoduše nahlédnout prostřednictvím názorné reprezentace (obráz. 4) a dále odvodit vztah pro obecné vyjádření trojúhelníkového čísla (obráz. 5). Pomocí obecného zápisu trojúhelníkového čísla $\frac{1}{2}n(n+1)$ je již snadné najít algebraické vyjádření pro počet párátek v rovnostranném trojúhelníku $3 \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$.

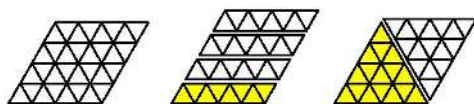


Obr. 4 Vyjádření čtvercového čísla pomocí dvou po sobě jdoucích trojúhelníkových čísel



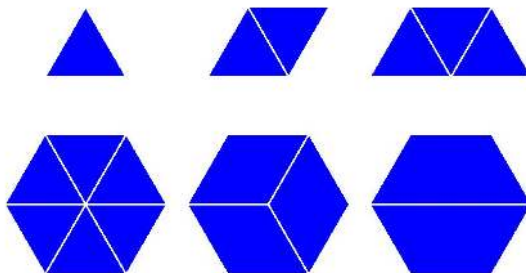
Obr. 5 Odvození vztahu pro obecné vyjádření trojúhelníkového čísla

Z uvedených obecných vyjádření pomocí proměnné n lze určit nejen počet párátek pro libovolně velký obrazce daného tvaru, ale také vyvodit vztahy pro další obrazce. Například z odvozených vztahů lze získat vztah pro zvětšený kosočtverec, a to dvojnásobem: buď uvažujeme n -násobek kosodélníku s délkou n , nebo složíme kosočtverec ze dvou rovnostranných trojúhelníků (obr. 6).



Obr. 6 Možnosti sestavení kosočtverce z kosodélníků a trojúhelníků

V případě odvození vztahu pro šestiúhelník se nabízejí tři možnosti: šestiúhelník lze sestavit ze šesti rovnostranných trojúhelníků, třech kosočtvců nebo ze dvou rovnoramenných lichoběžníků (obr. 7).

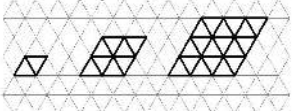
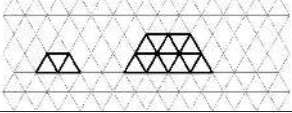
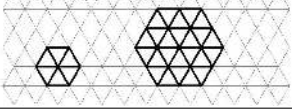


Obr. 7 Možnosti sestavení pravidelného šestiúhelníku z trojúhelníků, kosočtvců a lichoběžníků

V tabulce 1 jsou ukázány možnosti algebraického odvození vztahu pro kosočtverec, rovnoramenný lichoběžník a pravidelný šestiúhelník.

Výše naznačené postupy lze použít nejen pro algebraická vyjádření, ale také pro aritmetické vyjádření s tím, že počet se určuje pro obrazec konkrétní velikosti. Možnost aritmetického odvozování počtu párátek pro pravidelný šestiúhelník bez obecných vztahů s proměnnou n je naznačeno v tabulce 2. Skládání složitějších obrazců z jednodušších je založeno na geometrické představě a dřívější zkušenosti s vytvářením těchto obrazců pomocí trojúhelníkové skládačky (obr. 7). Při odvozování vztahů se tedy žáci opět vracejí ke konkrétním geometrickým obrazcům.

Tabulka 1 Možnosti algebraického odvození vztahů pro další obrazce

	Trojúhelník $T_n = 3A_n = \frac{3}{2}(n^2 + n)$ trojúhelníkové číslo $A_n = \frac{n(n+1)}{2}$
	Kosočtverec $K_n = n \cdot (4n + 1) - n \cdot (n - 1) = 3n^2 + 2n$ $K_n = 2T_n - n = 3n^2 + 2n$
	Lichoběžník $L_n = K_n + T_n - n = \frac{1}{2}(9n^2 + 5n)$
	Šestiúhelník $S_n = 6T_n - 6n = 3K_n - 3n =$ $= 2L_n - 2n = 9n^2 + 3n$

Tabulka 2 Možnosti aritmetického odvození počtu párátek pro další obrazce

Délka strany	1	2	3	4
Trojúhelníkové číslo	1	3	6	10
Trojúhelník	$3 \cdot 1 = 3$	$3 \cdot 3 = 9$	$3 \cdot 6 = 18$	$3 \cdot 10 = 30$
Kosočtverec	$2 \cdot 3 - 1 = 5$	$2 \cdot 9 - 2 = 16$	$2 \cdot 18 - 3 = 33$	$2 \cdot 30 - 4 = 56$
Lichoběžník	$3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 7$	$3 \cdot 9 - 2 \cdot 2 = 23$	$3 \cdot 18 - 2 \cdot 3 = 48$	$3 \cdot 30 - 2 \cdot 4 = 82$
Šestiúhelník ze 6 trojúhelníků	$6 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 12$	$6 \cdot 9 - 6 \cdot 2 = 42$	$6 \cdot 18 - 6 \cdot 3 = 90$	$6 \cdot 30 - 6 \cdot 4 = 156$
Šestiúhelník ze 3 kosočtverců	$3 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 12$	$3 \cdot 16 - 3 \cdot 2 = 42$	$3 \cdot 33 - 3 \cdot 3 = 90$	$3 \cdot 56 - 3 \cdot 4 = 156$
Šestiúhelník ze 2 lichoběžníků	$2 \cdot 7 - 2 \cdot 1 = 12$	$2 \cdot 23 - 2 \cdot 2 = 42$	$2 \cdot 48 - 2 \cdot 3 = 90$	$2 \cdot 82 - 2 \cdot 4 = 156$

Z algebr zpět do geometrie

Nalezené zobecnění v aritmetické či algebraické podobě lze využít nejen k odvození jiných vztahů, jak bylo ukázáno výše, ale také ke snazšímu nalezení konkrétních hodnot nebo k řešení úloh, které vyžaduje užití určitého

zobecnění (například užití vztahu s proměnnou pro sestavení rovnice nebo nerovnice). Uvedme dva příklady úloh, které lze snadno řešit využitím zobecněných vztahů pro obrazce v trojúhelníkové síti:

Které obrazce a jak velké lze sestavit ze 100 párátek?

Pokud se žákům podařilo provést zobecnění v algebraické podobě, mohou objevené vztahy použít pro sestavení rovnice, případně nerovnice (uvažujeme-li formulaci „nejvýše ze 100 párátek“) a pomocí ní úlohu řešit. Z podoby výrazu na levé straně rovnice (příp. nerovnice) lze vyvodit, zda řešení vůbec existuje. V případě, že žáci mají k dispozici jen aritmetické vyjádření, pracují s konkrétními hodnotami (tab. 2). Žáci se nemusí omezovat jen na výběr obrazců, jimiž se předtím zabývali, ale mohou navrhnout i další možnosti úpravou známých obrazců (například doplněním párátek).

Které geometrické obrazce lze vytvořit z lichého (sudého) počtu párátek?

Při řešení této úlohy můžeme také využít rovnici. Na základě koeficientů v rovnici lze rozhodnout, zda popsaná závislost splňuje danou podmínku lichosti (sudosti). Pro mnohé žáky však bude jednodušší pracovat s konkrétními počty (tab. 2.).

Závěr

Při řešení výše popsané úlohy s obrazci z párátek žáci přirozeně uplatňují některé postupy charakteristické pro bádání. Patří mezi ně modelování, pozorování, navrhování postupů, usuzování, vyvozování, zobecňování a ověřování. Vytváření názorných modelů zkoumaných útvarů a jejich pozorování umožňuje žákům uchopit neznámou situaci, získat informace pro její popis a snáze porozumět podstatě problému. Pomocí konkrétních modelů žáci snadno určí počet prvků zkoumaných objektů a nahlédnou vzájemné vztahy. Výsledkem práce s konkrétními modely je nalezení aritmetického modelu pro popis sledované pravidelnosti a jeho případné zobecnění, tj. vyvození algebraického vyjádření tohoto modelu. Správnost algebraického vyjádření žáci většinou ověřují dosazením a porovnáním se známou hodnotou. V průběhu řešení je vhodné, aby žáci své návrhy diskutovali, kladli otázky, zdůvodňovali svá tvrzení a formulovali závěry. V některých situacích, kdy se žáci v situaci ztrácejí, nenacházejí cestu k jádru problému a v důsledku toho klesá jejich zájem o řešení problému, se doporučuje, aby učitel podněcoval žáky k diskusi kladením návodných otázek, shrnutím žakovských tvrzení, výzvou k jejich ověření.

Výše popsané úlohy představují pouze některé z mnoha možností, jak v rámci učiva matematiky základní školy objevovat souvislosti mezi poznatky z geometrie, aritmetiky a algebry. Lze najít další modifikace těchto úloh, zkoumat jinou specifickou skupinu útvarů nebo jiné charakteristiky těchto útvarů, řešit situace s jinými vstupními podmínkami. V případě obrazců z páráték sestrojených v trojúhelníkové síti mohou žáci dále objevovat souvislosti mezi obvodem a obsahem. Obvod obrazců, které prodlužujeme nebo zvětšujeme v obou rozměrech, se mění lineárně, u podobných obrazců se jedná o přímou úměrnost. Obsah (vyjádřený počtem rovnostranných trojúhelníků) obrazců, které prodlužujeme, se mění lineárně, zatímco obsah podobných obrazců nelineárně.

Přestože zobecnění zkoumaných pravidelností bude u mladších žáků nejčastěji vyjádřeno aritmetickými prostředky, protože zápis s proměnnou bude pro ně zatím příliš abstraktní, je důležité tato zobecnění při řešení takových úloh provádět a připravovat je tak na pozdější poznávání závislostí a jejich algebraizaci. Je možné, že mezi žáky se objeví jedinci, kteří porozumí algebraickému zápisu dříve a budou schopni takový zápis bez problémů používat. Učitel by se neměl nechat odradit od zařazování aktivit, jejichž výstupem je určité zobecnění, jen proto, že žáci nezvládnou zapsat zobecnění algebraicky. Existují různé cesty, jak zobecnění hledat a formulovat, ale podstata je stejná. Je třeba charakterizovat společné vlastnosti objektů, pojmenovat invarianty (tj. vlastnosti, které jsou pro sledované objekty neměnné), zjistit, co a jak je závislé na změnách.

Literatura

- [1] *Ball, J.*: Mysli si číslo. Slovart, Praha, 2006.
- [2] *Crilly, T.*: Matematika – 50 myšlenek, které musíte znát. Slovart, Praha, 2010.
- [3] *Chajda, R.*: Hravá matematika – hříčky s plochami i křivkami, úhly, čísla a šiframi. Albatros Media, Praha, 2012.
- [4] *Samková, L. a kol.*: Badatelsky orientované vyučování matematice. Scientia in Educatione, roč. 6 (2015), č. 1.

Poděkování.

Článek vznikl s podporou grantu GAČR 14-01417S a RVO 67985840.

Zajímavé matematické úlohy

V pravidelné rubrice Zajímavé matematické úlohy začínáme nový ročník a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 231 a 232 můžete zaslat nejpozději do 20. 3. 2017 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 231

Nechť S je střed pravidelného dvanáctiúhelníku $A_1A_2 \dots A_{12}$. Označme R průsečík přímek A_4A_9 a A_6A_{11} . Dokažte, že čtyřúhelník A_9RSA_{11} je tětívový.

Karel Pazourek

Úloha 232

Je dán obdélník s celočíselnými délkami stran a obvodem 28. Dokažte, že z kruhu o poloměru 10 lze vystřihnout čtyři kopie tohoto obdélníku.

Josef Tkadlec

Dále uvádíme řešení úloh 227 a 228, jejichž zadání byla zveřejněna ve čtvrtém čísle minulého ročníku našeho časopisu.

Úloha 227

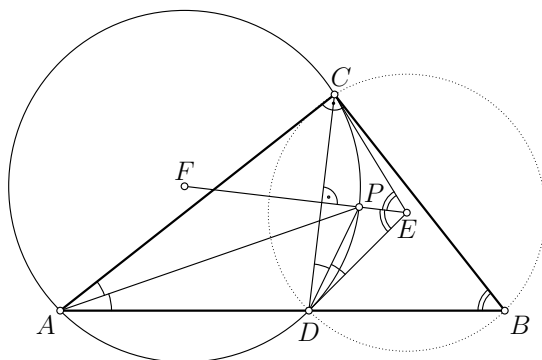
Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC , pro jehož odvěsny platí $|AC| > |BC|$. Nechť D je průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přeponou AB a E, F nechť značí po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům BDC, ADC . Dokažte, že průsečík P osy vnitřního úhlu při vrcholu A a přímky EF je středem kružnice vepsané trojúhelníku CDE .

Jaroslav Švrček & Waldemar Pompe (Warszawa)

Řešení. Středy E a F kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům BDC, ADC leží na ose společné strany CD , tedy přímka EF je osou úsečky CD . Z rovnosti poloměrů $|CE| = |DE|$ kružnice opsané trojúhelníku BCD plyne, že trojúhelník CDE je rovnoramenný a osa jeho základny CD je tak osou jeho vnitřního úhlu při vrcholu E . Velikost středového úhlu CED kružnice opsané trojúhelníku BCD je rovna dvojnásobku jemu odpovídajícího úhlu CBD . Protože EF je osa úhlu CED , platí $|\sphericalangle FEC| = |\sphericalangle CBD|$ a

zbývající úhly v pravoúhlých trojúhelnících s přeponami AB a ED (viz obr.) jsou shodné, a navíc platí $|\sphericalangle EDC| = |\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BAD|$.

Přímka AP je osou vnitřního úhlu trojúhelníku ACD při vrcholu A , přímka EF je osou jeho strany CD . Tyto dvě přímky se tedy protínají ve středu oblouku CD (neobahujícího bod A) kružnice opsané tomuto trojúhelníku. Velikosti obvodových úhlů odpovídajících tětivě CP této kružnice jsou shodné, platí tedy $\frac{1}{2}|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CDP|$ a ze shodnosti úhlů DAC a EDC tak plyne, že přímka DP je osou vnitřního úhlu trojúhelníku CDE při vrcholu D .



Osy vnitřních úhlů trojúhelníku CED při vrcholech E a D se protínají v bodě P , který je tak středem kružnice vepsané tomuto trojúhelníku, což jsme měli dokázat.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich, *Veronika Hladíková* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Lenka Kopfová* z MG v Opavě, *Danil Koževnikov* z GJK v Praze 6, Parlérova, *Josef Minařík* z G v Brně, Kpt. Jaroše, *Ondřej Motlíček* z G v Šumperku, *Hedvika Ranošová* z G v Praze 4, Budějovická, *Martin Raška* z WG v Ostravě-Porubě a *Jáchym Solecký* z PORG v Praze 8.

Úloha 228

Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ ($ac \neq 0$), pro něž jsou

$$\overline{ab} + \overline{cd}, \quad \overline{ab} - \overline{cd}, \quad (\overline{ab} + \overline{cd})/(\overline{ab} - \overline{cd}) \quad \text{a} \quad a + b + c + d$$

druhými mocninami některých přirozených čísel.

Radek Horenský

Řešení. Necht m, n jsou přirozená čísla, pro která platí

$$\overline{ab} + \overline{cd} = m^2, \quad \overline{ab} - \overline{cd} = n^2.$$

Součet a rozdíl libovolných dvou celých čísel mají stejnou paritu, tedy i čísla m a n mají stejnou paritu. Řešením soustavy dostaneme

$$\overline{ab} = \frac{1}{2}(m^2 + n^2), \quad \overline{cd} = \frac{1}{2}(m^2 - n^2).$$

Protože $\overline{ab}$ a $\overline{cd}$ jsou dvojmístná čísla, můžeme čísla m^2 a n^2 v odhadnout hodnotami $20 \leq m^2 < 200$, $1 \leq n^2 < 90$. Proto

$$m \in \{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}, \quad n \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}.$$

Třetí podmínka, že $(\overline{ab} + \overline{cd})/(\overline{ab} - \overline{cd})$ je druhou mocninou přirozeného čísla, znamená, že $n \mid m$. Navíc $m > n$, protože $\overline{cd}$ je dvojmístné (tedy kladné) číslo.

Rozeberme jednotlivé situace podle proměnné n .

- a) Pokud $n = 1$, potom m je liché číslo větší než n . Hodnoty vypočtené podle v těchto případech jsou uvedeny v následující tabulce.

m	5	7	9	11	13
n	1	1	1	1	1
$\overline{ab}$	13	25	41	61	85
$\overline{cd}$	12	24	40	60	84

Podmínce, že součet číslic $a + b + c + d$ je druhou mocninou přirozeného čísla vyhovují pouze čísla $\overline{abcd} \in \{4140; 8584\}$.

- b) Pokud $n = 2$, potom m je sudé číslo větší než n . Hodnoty vypočtené podle v těchto případech jsou uvedeny v následující tabulce.

m	6	8	10	12	14
n	2	2	2	2	2
$\overline{ab}$	20	34	52	74	100
$\overline{cd}$	16	30	48	70	96

V poslední dvojici nejsou dvě dvojmístná čísla. Podmínce, že součet čísl $a + b + c + d$ je druhou mocninou přirozeného čísla vyhovuje pouze číslo $\overline{abcd} = 2016$.

- c) Pokud $n = 3$, potom m je lichý násobek n větší než 3. Takový existuje právě jeden, a to $m = 9$. Těmto číslům odpovídají dvojice $\overline{ab} = 45$, $\overline{cd} = 36$. Tato dvojice ovšem nevyhovuje podmínce pro součet čísl $a + b + c + d$.
- d) Pokud $n = 4$, potom m je násobek 4 větší než 4. Hodnoty vypočtené podle v těchto případech jsou uvedeny v následující tabulce.

m	8	12
n	4	4
$\overline{ab}$	40	80
$\overline{cd}$	24	64

Podmínce, že součet čísl $a + b + c + d$ je druhou mocninou přirozeného čísla nevyhovuje žádné číslo.

- e) Pokud $n = 5; 7; 9$, potom m je lichý násobek n větší než n . Takové číslo m ovšem v dané množině neexistuje.
- f) Pokud $n = 6$, potom m je násobek 6 větší než 6. Této podmínce vyhovuje pouze $m = 12$, potom $\overline{ab} = 90$, $\overline{cd} = 54$. Tato dvojice ovšem nevyhovuje podmínce pro součet čísl $a + b + c + d$.
- g) Pokud $n = 8$, potom m je násobek 8 větší než 8. Takové číslo ovšem v přípustné množině neexistuje.

Podmínkám úlohy vyhovují tři trojice čísel $\overline{abcd}$, jsou to čísla 2016, 4140 a 8584.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich, *Lenka Kopfová* z MG v Opavě, *Danil Koževnikov* a *Jan Petr*, oba z GJK v Praze 6, *Parléřova*, *Jakub Mestek* z G v Jihlavě, *Jana Masaryka*, *Josef Minařík* a *Ondřej Svoboda*, oba z G v Brně, *Kpt. Jaroše*, *Ondřej Motlíček* z G v Šumperku, *Martin Raška* a *Jiří Škrobánek*, oba z WG v Ostravě-Porubě. Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

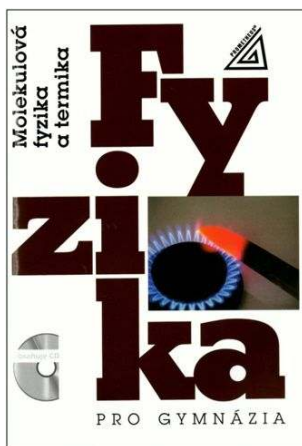
Pavel Calábek

FYZIKA

Přepřracované vydání učebnice Molekulová fyzika a termika pro gymnázia

EMANUEL SVOBODA

Nakladatelství Prometheus, spol. s r. o. vydalo v roce 2016 jako své šesté přepřracované vydání učebnici [1] pro výuku molekulové fyziky a termiky na gymnáziích (obr. 1). Oproti dosavadním pěti vydáním došlo k několika změnám. Především bylo zvoleno nové uspořádání obsahu učiva z molekulové fyziky a termiky podobným způsobem, jako tomu je u učebnic Mechanika, Elektřina a magnetismus a Optika.



Obr. 1



Obr. 2

Učivo molekulové fyziky a termiky zůstalo rozděleno na sedm kapitol, jako tomu bylo dopsud. Zůstaly také stejné názvy jednotlivých kapitol. Ale oproti předcházejícím vydáním učebnice „zeštíhlela“ (z původních 243 stran na 187 stran). Její papírová forma obsahuje jen učivo, které odpovídá požadavkům Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia [2, s. 28], (dále jen RVP G), obor Fyzika. Na konci učebnice jsou specifikovány cíle, jimiž příslušné učivo přispívá k utváření a rozvíjení klíčových kompetencí žáků.

Rozšiřující učivo, které jde nad rámec učiva a očekávaných výstupů podle RVP G, je na přiloženém CD (obr. 2) jako součást učebnice. Došlo také k výměně některých motivačních obrázků na začátku jednotlivých kapitol učebnice.

Rozšiřující učivo (označené pro orientaci písmenem R) obsahuje 15 námětů:

- R1 Stručný historický přehled vývoje názorů na strukturu látek
- R2 Modely struktur látek různých skupenství
- R3 Rovnovážný stav soustavy jako stav s největší pravděpodobností výskytu
- R4 Realizace termodynamické teplotní stupnice použitím plynového teploměru
- R5 Vedení tepla stejnorodou deskou
- R6 Graf rozdělení molekul podle velikosti jejich okamžitých rychlostí
- R7 Interpretace střední kvadratické rychlosti
- R8 Odvození základní rovnice pro tlak ideálního plynu
- R9 Typy stavové rovnice pro ideální plyn
- R10 Stavové změny ideálního plynu z energetického hlediska
- R11 Plyny při nízkém a vysokém tlaku
- R12 Výpočet práce plynu při stálém tlaku
- R13 Předávání tepla z hlediska molekulové fyziky
- R14 Typy krystalů podle vazeb mezi částicemi
- R15 Chladicí stroj a tepelné čerpadlo

Z uvedeného přehledu námětů rozšiřujícího učiva je vidět, že v učebnicovém textu bylo výrazně zredukováno učivo o plynech. Sedm námětů (R6–R12) bylo z dřívějšího textu v učebnici přeřazeno na CD do oddílu rozšiřující učivo. Toto přeřazení také umožnilo doplnit text rozšiřujícího učiva o barevné obrázky, např. druhy vývěv v R11 nebo různé krystaly v R14.

Dále jsou na přiloženém CD uvedena *teoretická a laboratorní cvičení*. Teoretická cvičení (označení TC) obsahují jednak řešené příklady, jednak soubory dalších úloh, řada z nich je nových. Cílem těchto cvičení, kterých je celkem 8, je prohloubení poznatků získaných ve výukových hodinách a jejich využití k řešení konkrétních problémů.

Teoretická cvičení mají tyto náměty:

- TC1 Relativní atomová a molekulová hmotnost. Látkové množství. Molární veličiny
- TC2 Změna vnitřní energie soustavy při konání práce a při tepelné výměně
- TC3 Stavová rovnice ideálního plynu
- TC4 Tepelné děje s ideálním plynem
- TC5 Práce ideálního plynu. Kruhový děj
- TC6 Deformace pevného tělesa
- TC7 Teplotní roztažnost pevných látek
- TC8 Tepelná výměna při změně skupenství látek

První teoretické cvičení má dvě části. V první části učitel zavede (resp. v návaznosti na učivo chemie zopakuje) pojmy: relativní atomová a relativní molekulová hmotnost, Avogadrova konstanta, látkové množství, molární hmotnost a molární objem. Na konkrétních příkladech se v druhé části cvičení procvičují zavedené pojmy. Realizovat toto teoretické cvičení je nutné, neboť pojmy v něm uvedené se pak používají při řešení úloh v TC3 a u úloh zařazených do rozšiřujícího učiva v R7, R9 a R12.

Uspořádání úloh ve většině cvičení je voleno tak, aby při řešení určitých úloh mohli studenti pracovat podle pokynů učitele ve dvou skupinách, a pak např. společně diskutovat postupy při řešení jednotlivých úloh.

Podobně s cílem prohloubit a upevnit poznatky získané ve výukových hodinách, podpořit rozvoj samostatnosti a aktivity žáků, vytváření manuálních dovedností a pracovních návyků jsou koncipována *laboratorní cvičení* (označení LC). Náměty sedmi cvičení jsou tyto:

- LC1 Přibližné určení průměru molekuly kyseliny olejové
- LC2 Určení měrné tepelné kapacity pevné látky a měření teploty užitím směšovacího kalorimetru
- LC3 Ověření Hookeova zákona
- LC4 Určení povrchového napětí kapaliny z kapilární elevace
- LC5 Určení povrchového napětí kapaliny kapkovou metodou
- LC6 Určení měrného skupenského tepla tání
- LC7 Určení měrného skupenského tepla varu

Příložené CD obsahuje i další doplňující a obrazové materiály. Jsou jimi:

- *Historické poznámky* k 17 významným osobnostem historie molekulové fyziky a termiky (označení H1 až H17). V textu učebnice, popř. v textu rozšiřujícího učiva, jsou odkazy na tyto osobnosti. Ke zpracování tohoto námětu byla mimo jiné využita publikace [3] se svolením autora publikace *doc. Ing. Ivana Štolla, CSc.* Uvedení významných osobností bylo vedeno snahou podpořit naplňování hodnotových cílů při výuce fyziky, především úctu k historii fyziky jako nezastupitelné součásti kulturního dědictví a prohlubování zájmu o přírodní vědy. V neposlední řadě pak poskytnout předmětu fyzika náměty pro realizaci průřezového tématu *Výchova k myšlení v evropských a globálních souvislostech*.

- *Slovníček vybraných fyzikálních pojmů*, který přehledně shrnuje důležité fyzikální pojmy ze středoškolského učiva molekulové fyziky a termiky. Ve slovníčku jsou k českým názvům pojmů uvedeny anglické ekvivalenty. Pojmy jsou uspořádány abecedně, některé rozšiřují poznatky z molekulové fyziky a termiky jdou nad rámec středoškolského učiva.

- *Videozáznamy* (odkazy na ně jsou označeny písmenem V a příslušnou číslicí, např. V1), jejichž autory jsou *Mgr. Petr Kácovský, Ph.D., Mgr. Lucie Filipenská a Mgr. Pavel Böhml*. Náměty 11 videozáznamů jsou:

- Brownův pohyb; simulace tepelného pohybu a Brownova pohybu;
- tepelná vodivost plastu a kovu;
- Boyleův–Mariottův zákon;
- závislost tlaku plynu na teplotě;
- Hookeův zákon;
- povrchové napětí;
- závislost teploty varu vody na tlaku;
- změna teploty při vypařování;
- soutěž teploměrů;
- kritický stav látky (konkrétně oxidu uhličitého).

- Webové stránky, ze kterých lze čerpat další poznatky z molekulové fyziky a termiky. Především jsou uvedeny webové stránky obsahující vhodné experimenty týkající se učiva molekulové fyziky a termiky.

Odkazy na doplňující materiály jsou vyznačeny v textu učebnice nebo v textech na CD barevnou značkou, např. **CD → R9**, což je v tomto případě odkaz na rozšiřující učivo o typech stavové rovnice ideálního plynu.

Umístění některých částí učebního textu z molekulové fyziky a termiky a dalších doplňujících materiálů na příloženém CD (obr. 3) sleduje, podobně jako je tomu např. u nově vydaných učebnic z mechaniky a optiky

pro gymnázia, trend širšího využívání elektronických nosičů ve fyzikálním vzdělávání na střední škole.

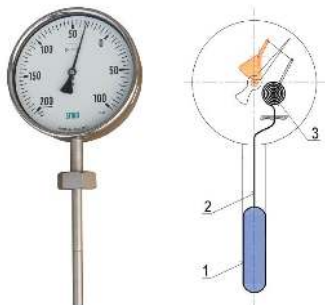


Obr. 3

Všechny textové části učebních materiálů na CD jsou ve formátu pdf, takže by neměl být žádný problém s jejich případným přenosem např. na flash disk nebo do paměti tabletu, případně si text vytisknout na vlastní tiskárně. Je však třeba i zde připomenout, že kopie vybraných částí učebního textu je možné vytvořit výhradně pro vlastní potřebu. Není ani možné hromadné rozmnožování učebního textu, který by byl pak rozdáván žákům jako učební pomůcka.

Z hlediska *metodického zpracování* učiva molekulové fyziky a termiky pro gymnázium došlo k drobným změnám ve formulacích a ke změnám v souvislosti s důslednějším oddělením základního učiva od učiva rozšiřujícího. To se týká především první a třetí kapitoly. Uvedme si některé změny v článcích těchto kapitol:

V první kapitole v čl. 1.5 s názvem *Termodynamická teplota* (v předchozích vydáních čl. 1.7) je po zdůvodnění potřeby zavést teplotní stupnici nezávislou na náplni teploměru uvedena definice termodynamické teploty a jednotky kelvin. Následuje pak jen informace, že termodynamická teplotní stupnice se dá vytvořit použitím plynového teploměru a v ní měřit termodynamickou teplotu, ale pojednání o plynovém teploměru je zařazeno na CD jako rozšiřující učivo (R4). Do této části je také zařazen jednak obrázek plynového teploměru pro průmyslové využití, jednak schéma tohoto teploměru (obr. 4). Záleží na učiteli, jak v rámci ŠVP a časově tematického plánu bude konstruovat obsahové zaměření kapitoly o termodynamické teplotě. Podstatné je, aby student správně převáděl Celsiovu teplotu na termodynamickou teplotu a obráceně. Tuto dovednost potřebuje mít pro úspěšné řešení především úloh z molekulové fyziky plynů.



Obr. 4

Ve třetí kapitole je upraven článek 3.2 *Rozdělení molekul plynu podle rychlostí*. V něm již není pojednání o možnosti znázornění tohoto rozdělení užitím histogramu, jen je uveden komentář k tabulkovému záznamu rozdělení molekul. Současně je zaveden pojem nejpravděpodobnější rychlost při dané teplotě plynu. V předchozím vydání byl tento pojem zaveden až v textu úlohy. Podrobněji je o grafu rozdělení molekul podle velikosti jejich okamžitých rychlostí pojednáno v R6.

Článek 3.3 nazvaný *Střední kvadratická rychlost* je doplněn oproti dřívějšímu vydání zavedením střední kinetické energie E_0 jedné molekuly, aby bylo ukázáno bezprostředně konkrétní využití druhé mocniny střední kvadratické rychlosti. O interpretaci střední kvadratické rychlosti pojednává R7.

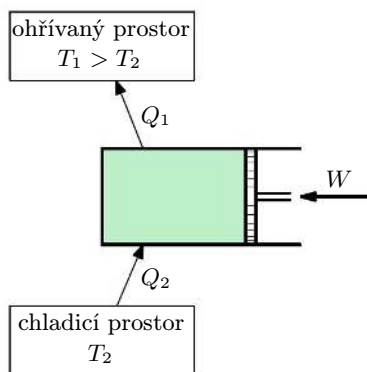
V následujícím článku 3.4 *Vnitřní energie a teplota ideálního plynu z hlediska molekulové fyziky* je pak uveden vztah pro střední kinetickou energii E_0 , kterou má jedna molekula ideálního plynu v důsledku neuspořádaného posuvného pohybu, a to pomocí termodynamické teploty (jak tomu bylo dopsud) a vztah vyjadřující určení termodynamické teploty pomocí druhé mocniny střední kvadratické rychlosti. Tím vznikla vhodnější možnost, jak charakterizovat teplotu z hlediska molekulové fyziky.

Ke změně došlo v obsahu čl. 3.5 *Tlak ideálního plynu z hlediska molekulové fyziky* vzhledem k předchozímu vydání učebnice. Článek je v upraveném vydání zkrácen tak, že je pouze uveden bez důkazu vztah pro střední hodnotu tlaku plynu. Odvození vztahu za zjednodušujících předpokladů je jako rozšiřující učivo R8 zařazeno na CD. Vztahu pro tlak p bylo využito v čl. 3.5 k snadnému odvození jeho závislosti na hustotě plynu. To není samoúčelné odvození, protože umožňuje studentům ukázat, jak se dá změněním tlaku a hustoty plynu získat hodnota střední kvadratické rychlosti

(pro danou termodynamickou teplotu plynu), která je přímému měření nedostupná.

V upraveném učebnicovém vydání bylo pozměněno pojednání v čl. 3.6 *Stavová rovnice ideálního plynu stálé hmotnosti*. Výchozím vztahem je stavová rovnice ve tvaru $pV/T = \text{konst.}$, která je sdělena (teoretické odvození je námětem rozšiřujícího učiva R9 na CD). Experimentální odvození závisí na pomůckovém vybavení škol. Vztah $pV/T = \text{konst.}$ je pak rozebírán z hlediska jednoduchých tepelných dějů, jako tomu bylo doposud v předchozích vydáních učebnice. Protože učivo o stavových změnách ideálního plynu z energetického hlediska bylo zařazeno do rozšiřujícího učiva (R10), je v upravené učebnici za jednoduché tepelné děje zařazen také adiabatický děj s uvedením Poissonova zákona, ale bez odvození.

K některým drobným změnám došlo i v dalších kapitolách učebnice. Např. v sedmé kapitole předchozího vydání byla pouze stručná zmínka o chladicím stroji a tepelném čerpadle a to až závěru kapitoly o změnách skupenství látky. V novém vydání je na tato zařízení upozorněno již ve čtvrté kapitole a to v čl. 4.3 *Druhý termodynamický zákon* s odkazem na rozšiřující učivo R15. V tomto rozšiřujícím učivu je uvedeno jednoduché schéma činnosti cyklicky pracujícího chladicího stroje (obr. 5), účinnost tohoto stroje je charakterizována chladicím faktorem (mezinárodní značka EER). Dále je uvedeno s vysvětlením jednoduché schéma tepelného čerpadla jako alternativního zdroje obnovitelné energie. Pro porovnávání efektivity tepelných čerpadel je uveden topný faktor (mezinárodní značka COP). Informace doplňuje tabulka tzv. třídy energetické účinnosti s faktory EER a COP, se kterou se mohou studenti setkat v praxi.



Obr. 5

Po technické stránce CD připravil *Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.*, obrazy v učebnici zhotovil programem Metapost *doc. Mgr. Miroslav Brož, Ph.D.* Revizi upraveného vydání učebnice posoudily lektorky *RNDr. Margita Hubeňáková* a *RNDr. Dana Mandíková, CSc.* Pro tisk učebnici velmi pečlivě připravili redaktori nakladatelství Prometheus *Mgr. Milena Osobová* a *PaedDr. Bohuslav Rothanzl*.

Hlavní autor učebnice Molekulová fyzika a termika pro gymnázia děkuje všem spolupracovníkům, lektorkám a redaktorům za kvalitní práci. Věřím, že i toto přepracování učebnice doplněné vybranými učebními materiály na CD bude pro učitele fyziky i žáky gymnázií vhodnou a hlavně přínosnou učební pomůckou. Učivo molekulové fyziky a termiky spojuje poznatky fyziky makrosvěta a fyziky mikrosvěta a je vlastně úvodem do studia mikrosvěta, které čeká studenty v dalším ročníku gymnaziálního vzdělávání.

Literatura

- [1] *Svoboda, E., Bartuška, K.*: Fyzika pro gymnázia. Molekulová fyzika a termika. Šesté přepracované vydání. Prometheus, Praha, 2016.
- [2] Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. VÚP v Praze, 2007. [cit. 24. 10. 2016]. Dostupné na: <http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-gymnazia>
- [3] *Štoll, I.*: Dějiny fyziky. Prometheus, Praha, 2009.

Jednoduchý průmyslový manipulátor

PETR ADÁMEK – VÍT BARABÁŠ

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Trend současné výuky s praktickým využitím výpočetní techniky v odborných předmětech fyziky, informatiky, matematiky, chemie, s různou úrovní a poměrem zastoupení oborů mechaniky, optiky, elektroniky, automatizace, robotiky, případně mechatroniky i jiných oborů, směřuje k téměř úplnému a stále rozšiřnějšímu nahrazování reálného experimentu virtuální

realitou. Výchozím postupem je algoritmus experimentu v podobě matematického modelu, který je pak vhodně prezentován nejčastěji v grafické a animované podobě. Tento trend je neoddiskutovatelný z hlediska výhod, které poskytuje [1]. Hlavními výhodami je možnost prezentace nebo náhrady experimentů, které prakticky nelze provést, nebo zobrazit a realizovat. Například pohyb a interakce elementárních částic, iontů v různých fyzikálních polích, zobrazení funkce elektrického obvodu, jeho součástek nebo průběh chemické reakce, interakce-kolize těles. Další výhodou je spolehlivost a opakovatelnost výsledku a v neposlední řadě bezpečnost a hygiena výuky i šetrnost k životnímu prostředí. Virtuální experiment eliminuje nežádoucí vlivy fyzikálních podmínek reálného experimentu, včetně vlivu experimentátora.

Pro specifické druhy výuky, jako je praktické seznámení s reálnými jevy, systémy i procesy nebo pro konstruktivistický model vzdělávání [2, 3], badatelsky orientovanou výuku, *learning by doing* nebo podobných přístupů na nižších stupních škol, je určen tento příspěvek. Příspěvek předkládá technické řešení a částečnou realizaci jednoduchého zařízení, které pokrývá prakticky orientovanou výuku fyziky, informatiky, elektroniky, automatizace, mechatroniky, robotiky, dle možné zvolené aplikace.

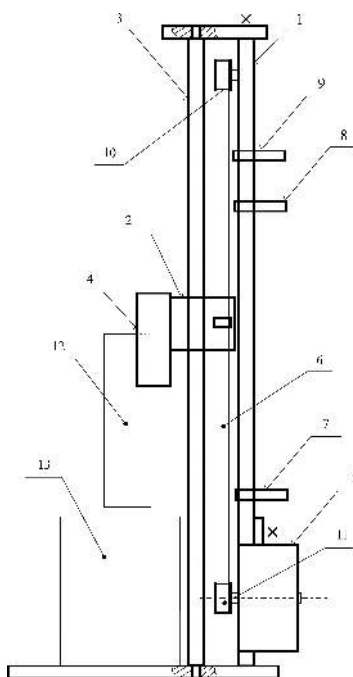
Popis konstrukce experimentálního průmyslového manipulátoru pro praktickou výuku

Uvedené zařízení vzniklo původně na FZÚ ČR v.v.i. na základě požadavku vytváření tenkých vrstev jiným postupem, tedy pro účely porovnání s používanými plazmatickými technologiemi depozice tenkých vrstev [4]. Jak vyplývá z anglického názvu průmyslového manipulátoru pro vytváření vrstev z roztoků: *dip* – ponořit, *coater* – pokrývač. „Dip-Coater“ [5, 6, 7] je zařízení, které vhodný předmět, například krycí nebo podkladové sklíčko do mikroskopu, definovanou rychlostí ponoří do nádoby s roztokem, v roztoku sklíčko, vzorek setrvá stanovený čas a opět definovanou rychlostí sklíčko vytáhne. Na sklíčko se v roztoku vytvoří vrstva, kterou požadujeme. Původní konstrukce vycházela z použití mechanických konstrukčních dílů vyřazené tiskárny, které byly uzpůsobeny ke konstrukci i funkci manipulátoru „Dip-Coater“ a taktéž doplněny o další díly.

Mechanická konstrukce manipulátoru

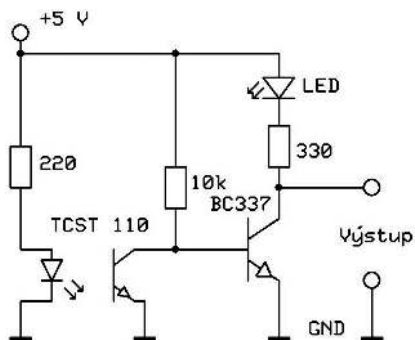
Rám tvoří svislý nosník z plochého ocelového profilu $35 \times 4 \times 400$ mm, na který jsou v horní dolní části šrouby M5 přišroubovány vrtané držáky

Svislý nosník je přišroubován dvěma šrouby M5 stejnými dvěma protilehlými držáky k základně z ocelového plátu $100 \times 150 \times 10$ mm. Nosník je možno přišroubovat na podkladovou desku stolu nebo desku z jiného materiálu. Držák tvaru L $30 \times 65 \times 1,5$ mm, přišroubovaný dvěma šrouby M5 v dolní části, slouží k upevnění vhodného motoru. Způsob upevnění všech držáků, respektive svtání držáků s nosníkem, umožňuje přizpůsobení délce dostupné vodící tyče, poloze motoru a dalším částem konstrukce. Po vodící tyči se pohybuje posuvný vozík, použitý a upravený též z vyřazené tiskárny. Vertikální posuv vozíku je zajištěn ozubeným řemenem upevněným ve vozíku. Řemen je veden v horní části po kladce s napínáním použitým a upraveným z tiskárny a připevněným plochým držákem $30 \times 65 \times 1,5$ mm.

Matematika – fizyka – informatika **26** 2017

Legenda k obr. 1: 1 – svislý nosník, 2 – posuvný vozík, 3 – vodící tyč, 4 – držák vzorků, 5 – krokový motor, 6 – řemen, 7 – dolní, 8 – střední, 9 – horní snímač polohy, 10 – kladka řemenu, 11 – řemenice, 12 – krycí skříčko, vzorek, 13 – kádinka s roztokem.

Do vyvrtaných otvorů není třeba řezat závity, lze využít díry průchozí a použít šrouby osadit plochými podložkami a maticemi M5. Poloha vozíku s přišroubovanou a nastavitelnou mechanickou závorou je snímána třemi fotosnímači s přerušováním paprsku, optickými závorami, například TCST110 [8], ve výchozí, horní koncové, středové a spodní koncové poloze. Poloha snímačů s výstupem TTL a optickou indikací dosažení pozice svítící LED je též nastavitelná. Schéma snímačů polohy je na obr. 2. V dolní části je přišroubován krokový motor řady SMR 300-300 napájený 24 V [9] s převodovkou s nalisovanou vysoustruženou řemenicí s o průměru 15 mm, vrtanou dírou o průměru 9,9 mm a šířkou 4 mm z polyamidu. Řemenici lze též upravit z kladky vyjmuté z tiskárny převrtáním díry dle průměru hřídele použité převodovky nebo přímo na průměr hřídele motoru. Převodovka s výstupním hřídelem o průměru 10 mm a velkým převodovým poměrem vykoná 1 otáčku za 1 minutu při napájení krokového motoru 50 Hz. Uvedená pohonná jednotka umožňuje plynulý posun vozíku s upevněnými až osmi vzorky, skříčky o relativně vysoké hmotnosti rychlostí 10 mm/s a 1 mm/s i nižší, dle frekvence řídicích impulsů.

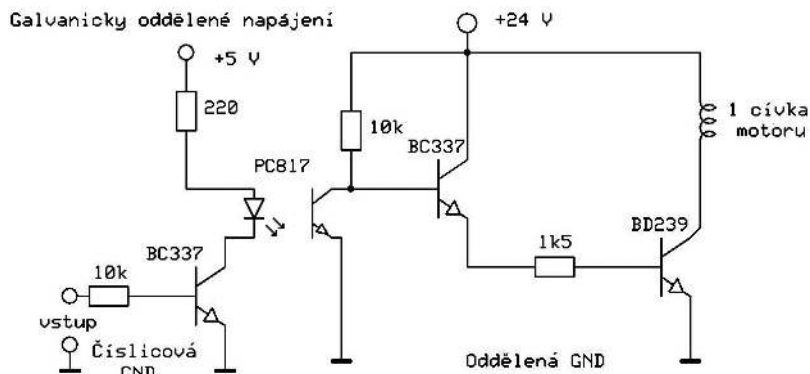


Obr. 2 Snímač polohy s optickou závorou, výstupem TTL a indikací dosažení pozice

Provedení spínačů krokových motorů

Spínače krokového motoru vycházejí z napájení motoru SMR 300-300, 24 V, pro který byl navržen napájecí zdroj s transformátorem do tiště-

ných spojů [10]. Výkon transformátoru 230 V/15 V s odděleným vinutím a izolačním napětí 4 kV je ověřen pro výkon 8–10 VA a jmenovité výstupní napětí 15 V při zátěži. Toto nestabilizované napětí je po usměrnění a filtraci vyšší, až +26 V, a i při kolísajícím odběru ze zdroje je toto provedení vyhovující pro napájení až dvou krokových motorů. Po doplnění zdroje monolitickým pětivoltovým stabilizátorem 7805 [11] poskytuje též stabilizované napájení +5 V pro číslicové obvody, optoelektrické vazební členy i spínače. Ke konstrukci univerzálního spínače posloužilo Darlingtonovo zapojení tranzistorů BC 337 [12] a BD 239 [13], které umožňuje připojení optoelektrických vazebních členů PC817 [14] pro galvanické oddělení až 5 kV od řídicí elektroniky počítače. Ke spínání uvedeného typu krokového motoru jsou potřebné čtyři spínače (obr 3). Jako řídicí jednotka bylo použito v našem případě PC (viz dále).



Obr. 3 Budič jedné cívky krokového motoru

Řídicí systém a rozhraní

Původně byl pro řízení manipulátoru „Dip-Coater“ použit vyřazený osobní počítač řady PC, podobně jako v případech [15, 16]. Ovládání krokového motoru i indikace stavů snímačů polohy bylo přenášeno standardním paralelním rozhraním pro tiskárnu, respektive výstupním portem ve standardním režimu „SPP“ [17, 18]. Všechny signály jsou v parametrech číslicové logiky TTL, logická „0“ (0 V–0,75 V), logická „1“ (3,5 V–5 V), výstupní proudy do –1 mA, resp. pro budiče s optoelektrickými vazebními členy +1 mA. K výstupu z PC, resp. ovládání krokového motoru, byl používán osmibitový střadač výstupního slova na báze adresy 378h, 888d

dekadicky, fyzický datový výstup odpovídá pin nebo dutinka 2–9, bit 0 – „2“ ÷ bit 7 – „9“, resp. pro jeden krokový motor dutinky „2“, „3“, „4“, „5“ oproti nulovému potenciálu na dutince „13“ na konektoru CANON25. Pro snímání polohy vozíku slouží tři detektory. Signál pro vstup detektorů je čten ze vstupního stavového registru na adrese (bázová adresa +1) tj. 379h., dekadicky 889d. Signál horního detektoru je snímán jako logická úroveň na dutince „11“ (signál/BUSY), signál středního detektoru je snímán na dutince „10“ (signál ACK), signál dolního detektoru je snímán na dutince „12“ (signál PE). Dutinka „13“ je uzemněna a dutinka „15“ je přivedena na +5 V přes rezistor 10 kΩ.

Programové vybavení

K použitému řídicímu systému vyřazeného osobního počítače byly dostupné vývojové prostředky firmy MICROSOFT Co[®], programovací jazyky BASIC[®], C[®], včetně operačního systému. Vyvinuté testovací a aplikační programy byly spouštěny pod OS MS-DOS[®]. Pro tyto účely použitý výkonný systém, přes svou morální zastaralost, umožňuje jednoduše napsat libovolně složitý řídicí program, včetně záznamu a zálohování komentáře, prostřednictvím standardního výstupu na disk nebo grafického výstupu na displej. Navíc se dané řešení ukázalo jako ekonomicky nejvýhodnější, protože veškeré informatické komponenty byly k dispozici a kromě objektu řízení, vyvinutého manipulátoru, nebylo třeba nic pořizovat.

Dosažené parametry

Výše popsaný průmyslový manipulátor umožňuje nastavení držáku vzorků do výchozí polohy, manuální zavedení vzorků do držáku, jejich namáčení do roztoků nastavitelnou, programovatelnou rychlostí, libovolnou nastavitelnou hloubku ponoření a přesnou dobu setrvání v roztoku a přesné a spojitě vytažení vzorků z roztoku bez zákrmitů do výchozí polohy, nastavitelné setrvání v poloze do oschnutí vzorků a jejich vyjmutí. Programovatelná rychlost posuvu vozíku, respektive rychlosti pohybu vzorků 0,0003 mm/s až 20 mm/s. Hmotnost vzorků, tedy zatížení vozíku manipulátoru, může přesáhnout 100 g. Při optimalizované rychlosti posuvu 10 mm/s je pohyb rovnoměrný a spojitý. Je tak vytvářena kvalitní vrstva přibližně stejné tloušťky bez povrchového zvlnění. Program nebo proces může být kdykoli přerušen. Obslužný program umožňuje vytváření protokolů k prováděným experimentům, vkládání komentářů, podmínek experimentu, datu, reálném čase a času a rychlosti pohybu vzorku a uchovávání jednotlivých dat o experimentech ukládáním v textovém formátu na disk.

Aplikační doporučení

Jednotlivé mechanické a elektronické části průmyslového manipulátoru „Dip-Coater“, taktéž řídicí jednotky, je možno libovolně měnit, dle technologických podmínek a požadavků výuky. Pro manipulátor byl vyvinut i „bezprocesorový“ jednoúčelový řídicí sekvenční obvod s využitím programovatelných logických obvodů GAL [19] a obvodů nízké a střední integrace SSI, MSI. Pro konstrukci řídicí jednotky se nabízejí, stále dostupnější i vyvíjející se mikroprocesorové stavebnice, například mikroprocesorové stavebnice Lab-Jack® [20], Raspberry-pi® [21] nebo oblíbené a stále zdokonalované a rozšiřované Arduino® [22].

Pro aplikace ve vzdělávacím procesu, ať už ve výuce nebo výzkumu, je v současnosti upravována verze podobného zařízení, které je řízeno mikroprocesorovou stavebnicí Arduino®, ke kterému je bez úprav původní zařízení–manipulátor připojitelné i včetně alternativy s napájením 3,3 V. Je možno přímo připojit jak budiče krokového motoru, tak bezkontaktní snímače polohy. Použitelné jsou i vytvořené dosavadní široce dostupné programové prostředky i zpracované knihovny prakticky bez úprav. Nejjednodušší aplikací pro badatelsky orientovanou praktickou výuku [23] na nižších stupních škol je možnost, aby žáci sami sestavovali přístroj s průběžným vysvětlením funkce jednotlivých částí zařízení. Dále z hlediska tvorby nejjednodušších algoritmů a následně programů je postačující využití prostého vertikálního posuvu s nastavitelnou polohou („model výtahu“) i bez využití snímačů polohy. Postupně lze algoritmy a programy rozvíjet s programově nastavitelnou rychlostí a dále s vyhodnocováním stavů snímačů polohy. Zařízení lze používat i v horizontální poloze, pro jinou formu horizontálního manipulátoru.

Jiným doplňkem je doplnění vozíku fotodetektorem a snímání intenzity světla rozloženého hranolem nebo mřížkou, tedy vytvoření nejjednoduššího spektrometru. Tvůrčím rozšiřováním manipulátoru o další části, například o elektromagnetické kleště, lze jeho využití dále zdokonalovat. Postupným zapojováním elektronických, mechanických a softwarových komponentů je možné se propracovat k ukázce elementárního zpětnovazebního řízení v automatizaci, případně k nejjednodušším aplikacím v robotice, tvorbě programů v informatice a v mechatronice.

Závěr

Vyvinutý průmyslový manipulátor je pod názvem „Dip-Coater“ komerčně dostupný, podle vybavení a s nabízenými funkcemi jej lze pořídit za

1 000 až 5 000 USD [6, 7, 8]. Pro původní účely časově omezené experimentální depozice tenkých vrstev z roztoků, je s dosaženými výše uvedenými parametry zcela dostačující a umožňuje další adaptace a modifikace podle požadavků vývoje a potřeb experimentů dané problematiky. Jeho zkonstruování vyžaduje pouze jednoduché strojové vybavení, vrtáčku, vrtáky 5 mm a 10 mm, pilu na kov, páječku. Manipulátor je materiálově nenáročný, a to jak z hlediska jeho konstrukce, tak pořízení řídicí jednotky. Potřebujeme polyamid nebo silon o délce 10 mm a průměru 15 mm až 20 mm na kladku a řemenici, dále ocelovou tyč $30 \times 4 \times 600$ mm, 6 ks šroubů M5 $\times$ 10 mm, 6 ks matic M5 k mechanické konstrukci nosníku. Elektronická část vyžaduje univerzální desku tištěných spojů nebo desku pro výrobu obrazce tištěných spojů 100×150 mm, Dále 11krát tranzistor BC377-40, 4krát BD239, 3krát optická závora TCST110 a miniaturní rezistory – viz schémata optické závory a budiče krokových motorů. Pro napájecí zdroj je nutné pořídit transformátor 230 V/15 V, 8–10 VA, usměrňovací blok 1,5 A, elektrolytické kondenzátory 4700 mF/35 V, stabilizátor napětí 5 V/1 A. Nejnákladnější částí je výše uvedený krokový motor, avšak motor, který je dodáván k systému Arduino® [22], je ekonomicky i technicky výhodnější, je dodáván i s modulem budičů a napájecím zdrojem. Alternativním zdrojem komponent i jiného materiálu může být vyřazená tiskárna, ať už mozaiková nebo „Ink-jet“, případně PC použité na řídicí jednotku. Navíc zařízení, které je vyvíjené na různých úrovních i z hlediska pokrytí předmětů a cílů výuky, se jeví jako vhodné pro výukové účely i z hlediska ekonomické dostupnosti.

Literatura

- [1] Tesař, J.: Virtuální měření ve fyzikálním praktiku. Otevřené a distanční vzdělávání na vysokých školách – současný stav a perspektivy. In: Academia film Olomouc 2000, s. 80–83.
- [2] Průcha, J., Walterová, E., Mareš, J.: Pedagogický slovník. Portál, Praha, 2001.
- [3] Roučová, E.: Multimedia in Education of Teachers. In: Schola 2001, Trnava, ed. STU Bratislava 2001, s. 104–107.
- [4] Kment, S., Kluson, P., Bartkova, H., Krysa, J., Churpita, O., Cada, M., Virostko, P., Kohout, M., Hubicka, Z: Advanced methods for titanium (IV) oxide thin functional coatings. Surface and Coating Technology 202 (2008), s. 2379–2383.
- [5] <http://www.mtixtl.com/dip-coater-desktop.aspx>, 2. 2. 2016.
- [6] <http://www.nadetech.com/index.php/en/products/dip-coater>, 2. 2. 2016.
- [7] <http://machinery.alibaba.com/dip-coater.html>, 2. 2. 2016.
- [8] <http://www.gme.cz/tcst1103-p523-174>, 6. 2. 2016.

- [9] <http://www.elektromotory-bor.cz/cz/krokove-motory/krokovy-motor-reverzacni-smr-300-300-ri-24.html>, 4. 2. 2016.
- [10] http://www.conrad.cz/transformator-do-dps-gerth-ei-48-16-8-prim-230-v-sek-15-v-666-ma-10-va.k1092959?gclid=CJadmomq3soCFUn4wgodNvgKAg#utm_source=google&utm_medium=agregator&utm_campaign=2016&utm_content=1092959, 4. 2. 2016.
- [11] <http://www.ges.cz/cz/stabilizator-napeti-7805-to220-GES05002908.html>, 5. 2. 2016.
- [12] <http://www.gme.cz/bipolarni-tranzistor-bc337-40-to92-p210-019>, 5. 2. 2016.
- [13] <http://www.gme.cz/products/search?term=BD239>, 5. 2. 2016.
- [14] <http://www.ges.cz/cz/pc817-GES05114567.html>, 2. 2. 2016.
- [15] *Jihočeská univerzita, Pedagogická fakulta, Zemědělská fakulta, České Budějovice: Mobilní elektronický měřicí systém pro měření parametrů zemědělských strojů.* Původci: Adámek, P., Fríd, M., Frolík, J., České republiky. Užité vzor č. přihláška UV 2013-27868, registrační č. 25973, 17. 10. 2013. www.upv.cz, 8. 2. 2016.
- [16] *Adámek, P.: Measuring system for digital data acquisition of parameters of Diesel engines.* In: Sborník XVII DIDMATTECH 2004, RZESOW, Poland, pp. 444–448, ed. Zakład Dydaktyki Techniki i Informatyki – Uniwersytet Rzesowski.
- [17] *Šnorek, M.: Standardní rozhraní PC.* Grada, Praha, 1992.
- [18] http://www.interfacebus.com/Design_Centronics_Connector_PinOuts.html, 2. 2. 2016.
- [19] <https://sites.google.com/site/ustics131/pal-pla-gal>, 6. 2. 2016.
- [20] <https://labjack.com/>, 5. 2. 2016.
- [21] <http://rpishop.cz/raspberry-pi-pocitace/8-raspberry-pi-0766897151323.html>, 5. 2. 2016.
- [22] <http://www.arduino-shop.cz/?gclid=CPHA76XM4MoCFQQUwwodD-0CvA>, 5. 2. 2016.
- [23] *Yu Wang et al.: Exploration in practical-oriented teaching of mechatronics engineering education.* http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-27552-4_17#page-1, 9. 2. 2016.

Maximální rychlost podání v tenisu

JIRÍ KOHOUT – KAREL RAUNER

Fakulta pedagogická, Západočeská univerzita, Plzeň

V první části článku ukážeme, jak stanovit maximální možnou velikost rychlosti (dále jen rychlost, směrem rychlosti se nezabýváme) tenisového

podání (obr. 1) užitím zjednodušeného modelu využitelného v rámci středoškolské fyziky. Ve druhé části se pak podrobněji zamyslíme nad přesností modelu, uvedeme některá jeho možná vylepšení a porovnáme naše poznatky s tím, co je známo z literatury.

Pro rychlost míčku při podání je samozřejmě důležitá maximální rychlost ruky tenisty, který drží tenisovou raketu. Jak ji ale určit? Pomůžeme si jinou sportovní disciplínou z oboru lehké atletiky. Podobný pohyb paže můžeme totiž vidět při hodu oštěpem (obr. 2). Špičkovým výkonem při hodu oštěpem je výkon 90 metrů. Předpokládejme, že je oštěp vyhozen pod úhlem 45° a že se pohybuje po parabole jako při vrhu šikmém. Mezi délkou l hodu a počáteční rychlostí v můžeme jednoduše odvodit vztah

$$v = \sqrt{g \cdot l},$$

kde g je velikost tíhového zrychlení. Článek se zabývá jen odhadem, proto dosadíme $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $l = 90 \text{ m}$ a vyjde $v = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Samozřejmě, že let oštěpu je velmi složitý¹, působí na něj odporová síla vzduchu, na druhou stranu sportovcům při vrcholových výkonech pomáhá vítr.



Obr. 1 Tenisové podání Rogera Federera

¹Podrobnější informace o biofyzice hodu oštěpem lze nalézt například na http://is.muni.cz/th/72727/fyps_m/diplomova_prace.pdf



Obr. 2 Hod oštěpem v podání českého reprezentanta Jakuba Vadlejcha

Předpokládáme, že hmotnost tenisové rakety a oštěpu je přitom řádově srovnatelná – hmotnost rakety je typicky zhruba 300 gramů, hmotnost mužského oštěpu 800 gramů. Menší hmotnost rakety může být „dorována“ momentem setrvačnosti a větším odporem vzduchu. Rychlost ruky je navíc při malých hmotnostech házeného předmětu na hmotnosti nezávislá. Při hodu oštěpem se ovšem atlet rozbíhá. Odhadneme rychlost běhu na $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Proto budeme počítat s tím, že ruka tenisty se může pohybovat maximálně rychlostí $v = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Protože soustava paže-raketa při podání rotuje kolem ramenního kloubu, bude rychlost výpletu rakety v místě dotyku s míčkem větší (obr. 3).



Obr. 3 Parametry soustavy paže-raketa při tenisovém podání

Předpokládáme-li stejnou úhlovou rychlost, platí pro rychlost v_r výpletu v místě dotyku s míčkem

$$v_r = v \cdot \frac{r_p + r_r}{r_p},$$

po dosažení $v_r = 43 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Kdyby byla hmotnost míčku proti raketě zanedbatelná, míček by po úderu letěl dvojnásobnou rychlostí². To by znamenalo rychlost $310 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Ve skutečnosti předá raketa po úderu část hybnosti i energie míčku. Předpokládáme, že srážka rakety s míčkem je dokonale pružná a pro výpočet můžeme proto vedle zákona zachování hybnosti³ použít i zákon zachování mechanické energie. Označíme rychlost míčku indexem v_m , rakety r , index 1 znamená před srážkou, index 2 po srážce. Horizontální rychlost míčku před srážkou v_{m1} je při podání s dostatečnou přesností rovna nule. Hmotnost rakety označíme m_r , hmotnost míčku m_m :

$$m_r v_{r1} = m_r v_{r2} + m_m v_{m2},$$

$$\frac{1}{2} m_r v_{r1}^2 = \frac{1}{2} m_r v_{r2}^2 + \frac{1}{2} m_m v_{m2}^2.$$

Jednoduchým výpočtem (detailně je postup uveden např. v [1]) dojdeme k hledanému vztahu

$$v_{m2} = \frac{2m_r}{m_r + m_m} v_{r1},$$

Protože hmotnosti jsou $m_r = 300 \text{ g}$ a $m_m = 58 \text{ g}$, je vypočítaná maximální rychlost podání $72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, tj. $259 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Při porovnání se světovým rekordem $263 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, kterého dosáhl australský tenista *Samuel Groth* v roce 2012, se může zdát přesnost našeho výpočtu obdivuhodná. Je ale pravděpodobné, že se chyby v odhadech a předpokladech shodou okolností eliminovaly.

Pojďme se podívat na možné nepřesnosti v předchozím výpočtu poněkud podrobněji (za cenu toho, že již mírně překročíme rozsah klasické středoškolské fyziky a následné úvahy tak budou vhodné spíše pro hlubší zájemce o tuto problematiku). Předně je otázka, do jaké míry interakci mezi raketou a míčkem můžeme pokládat za pružný ráz. Tímto tématem se experimentálně i teoreticky zabývali různí autoři a zjistili, že tzv. koeficient restituace e (poměr rychlostí po odrazu a před odrazem) vystihující míru pružnosti daného rázu (dokonale nepružný ráz má $e = 0$, dokonale pružný ráz poté $e = 1$) nabývá pro danou situaci a rychlost rakety před

²V soustavě spojené s raketou se míček blíží rychlostí $43 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, po odrazu se vzhledem k raketě vzdaluje stejnou rychlostí. Protože raketa se v soustavě spojené s kurtem pohybuje stejnou rychlostí, je rychlost míčku vzhledem ke kurtu dvojnásobná.

³Vzhledem k tomu, že srážka rakety a míčku trvá velmi krátkou dobu (nejdéle 5 milisekund), můžeme zanedbat silové působení ruky na raketu během srážky.

srážkou s míčkem hodnoty zhruba $e = 0,6$ [2]. Při znalosti koeficientu restituce je možné vztah (5) pro rychlost míčku po srážce převést jednoduchým postupem (podrobnosti např. v [1]) do tvaru

$$v_{m2} = \frac{(1 + e) m_r}{m_r + m_m} v_{r1}.$$

Všimněme si, že pro dokonale pružný ráz (tj. $e = 1$) získáváme rovnou vztah (5). Pro uvažované hodnoty hmotnosti míčku a rakety (a koeficientu restituce) snadno zjistíme, že rychlost míčku je cca o 35 % větší ve srovnání s rychlostí rakety před srážkou (v případě dokonale pružného rázu to bylo téměř o 70 %). Uvedených 35 % je v poměrně dobrém souladu s experimentem. Například Mitchell [3] uvádí rychlost rakety (měřeno v místě dopadu míčku těsně před srážkou) $33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a rychlost míčku po srážce $45 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, Chow [4] poté naměřil pro první podání u testovaných mužů hodnoty $39 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a $51 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Gross pak na základě komplexního modelu spočítal pro více než 100 různých tenisových raket rychlosti míčku typicky o 35 %–40 % větší ve srovnání s rychlostí rakety [5]. Pro výše uvedenou rychlost rakety $v_r = 43 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ bychom tak dostali rychlost míčku cca $58 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, což je $209 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a tedy výrazně pod rekordní hodnotou.

Zdá se tedy, že rychlost rakety v místě dopadu musela být při rekordním podání ve skutečnosti znatelně větší než oněch $43 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. To může souviset například s tím, že vzdálenost dopadu míčku $r_r = 50 \text{ cm}$ od držadla rakety byla uvažována pro případ, kdy místo dotyku raketa-míček je přibližně ve středu výpletu (podle norem Mezinárodní tenisové federace může být samotná délka rakety až $73,7 \text{ cm}$, přičemž délka výpletu nesmí přesáhnout $39,4 \text{ cm}$ [6]). Jak se však můžeme přesvědčit díky velice zajímavým zpomaleným analýzám podání, které jsou dostupné volně na Youtube⁴, při podání o vysokých rychlostech dojde velmi často k zásahu míčku v horní části rakety, kde je v souladu se vztahem (2) příslušná rychlost rakety větší. V případě, že $r_r = 65 \text{ cm}$ (to není pro dané rozměry rakety nerealistická hodnota) by rychlost rakety v místě dopadu byla $v_r = 48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, což by následně odpovídalo (za předpokladu, že $e = 0,6$) rychlosti podání téměř $235 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

To je sice stále o něco menší hodnota než výše uvedený rekord, ale soulad je již podstatně lepší. Nebudeme zde dále pokračovat ve zpřesňování modelu, pouze uvedme, že v odborné literatuře lze najít studie (např. [5]), kde je vzata do úvahy i rotace rakety při zásahu mimo její těžiště

⁴Např. na <https://www.youtube.com/watch?v=VHV1YbeznCo>

a následně je stanovena tzv. efektivní hmotnost rakety, u níž hraje roli i její moment setrvačnosti (jeho stanovení popisuje detailně Brody v [7]) a vzdálenost od místa dopadu míčku. Tyto komplexnější modely mohou vést ještě k přesnějším odhadům, vyžadují však již podrobnější rozbor a nejsou tak úplně vhodné pro školskou fyziku. Rozhodně však platí, že využití fyziky v tenisu je zajímavé (a v České republice dosud prakticky nestudované) téma potenciálně zvyšující motivaci studentů. Svědčí o tom i články zaměřené tímto směrem a publikované v uznávaných zahraničních fyzikálně-didaktických časopisech *Physics Teacher* [7] a *American Journal of Physics* [8, 9].

Literatura

- [1] *Jířů, J.*: Hybnost a energie při vzájemném působení těles – studijní text pro FO kategorie D. Dostupné na <http://black-hole.cz/fo/down/hybnost.pdf> [citováno dne 31. 7. 2016].
- [2] *Miller, S. – Messner S.*: On the dynamic coefficient of restitution of tennis balls. In: Miller, S (ed.): *Tennis Science and Technology 2*, Toronto: Webcom, 2003, s. 97–104.
- [3] *Mitchell, S. R., a kol.*: Head speed vs. racket inertia in the tennis serve. *Sports Engineering*, roč. 3 (2000), č. 2, s. 99–110.
- [4] *Chow, J., a kol.*: Comparing the pre- and post-impact ball and racquet kinematics of elite tennis players' first and second serves: a preliminary study. *Journal of Sports Science*, roč. 21 (2003), č. 7, s. 529–537.
- [5] *Cross, R. – Nathan, A. M.*: Performance versus moment of inertia of sporting implements. *Sports Technology*, roč. 2 (2009), č. 1-2, s. 7–15.
- [6] *TF.*: ITF Rules of Tennis 2016 (s. 22). [citováno dne 31. 7. 2016]
Dostupné na: <http://www.itftennis.com/media/220771/220771.pdf>
- [7] *Brody, H.*: The moment of inertia of a tennis racket. *The Physics Teacher*, roč. 5 (1985), č. 4, s. 213–216.
- [8] *Brody, H.*: The physics of tennis III. The ball-racket interaction. *American Journal of Physics*, roč. 65 (1997), č. 10, s. 981–987.
- [9] *Cross, R.*: Impact of a ball with a bat or racket. *American Journal of Physics*, roč. 67 (1999), č. 8, s. 692–702.

Zdroje vyobrazení

Obr. 1 <https://www.flickr.com/photos/myersphotography/12007189485/>

Obr. 2 <http://www.izun.eu/sport/czu-bude-mit-sveho-zastupce-v-olympijskem-londyne>

Zčásti úspěšný pokus o výrobu závaží

FRANTIŠEK JÁCHIM

Základní škola, Volyně

Při měření hmotnosti žáci běžně využívají digitální váhy, jejichž obsluha je jednoduchá a měření rychlé i přesné. Pro větší zajímavost hodin fyziky jsme některá vážení prováděli i na pákových vahách, přičemž jsem žákům chtěl ukázat, že tato vážení vyžadují trpělivost a jistou zručnost při provádění a také odhad, podle kterého volí užití závaží. Co mne ale nejvíce překvapilo, byl zájem žáků o sadu závaží. Proč jsou zrovna takových hodnot, jak se vyrábějí, že jsou přesná, atd. Z řad žáků vznikl nápad, závaží si vyrobit. Když jsme se domluvili, jakým způsobem se pokusíme sadu závaží zhotovit, uspořádal jsem návrhy dětí do následujících kroků.

1. *Víčka z PET lahví upravit na závaží zcela libovolných hodnot.* Připravili jsme si víčka, olověné broky, svíčky a zápalky. Do víček dali žáci broky, zakapali je voskem (obr. 1), na digitální váze určili jejich hmotnost a zjištěnou hodnotu na ně nalepili. Postupně dostávali sady závaží nejrůznějších velikostí (obr. 2).

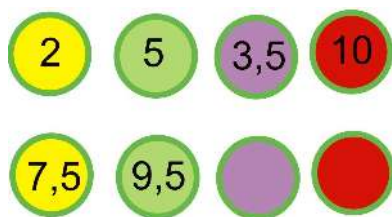


Obr. 1



Obr. 2

2. *Z víček PET lahví zhotovit závaží předem určených hodnot.* K tomu si zhotovili štítky s hodnotami budoucích závaží (obr. 3).



Obr. 3

Úkol byl již těžší, neboť hmotnost závaží byla „kvantována“ hmotností olověného broku a v detailu i hmotností kapky vosku. Činnost prováděli přímo na digitální váze s citlivostí 0,1 g (obr. 4). Po pečlivé práci se většinou podařilo zhotovit závaží požadovaných hodnot s tolerancí $\pm 0,1$ gramu.



Obr. 4

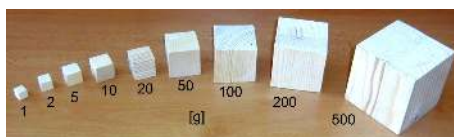
Odlišnou činností bylo uskutečnění druhého nápadu – zhotovení závaží ze dřeva. Domluvili jsme se s dětmi, že navrhne krychle ze dřeva, jejichž hmotnost bude odpovídat 1 g, 2 g, 5 g, 10 g, 50 g, 100 g, 200 g, 500 g, tedy hodnotám závaží v dodávané sadě. Výroba měla být provedena z trámku smrkového dřeva o průřezu 12×12 cm. Po zvážení a výpočtech jsme zjistili hustotu dřeva $\rho = 0,507 \text{ g/cm}^3$, pro další vlastní výpočty jsme použili hodnotu $\rho = 0,5 \text{ g/cm}^3$. Pak podle vztahu $V = m/\rho$ žáci počítali objem příslušných krychlí a já jim vypočetl délku jejich hrany. Dostali jsme následující tabulku:

Požadovaná hmotnost (g)	Objem (cm ³)	Hrana (cm)
1	2	1,3
2	4	1,6
5	10	2,2
10	20	2,7
20	40	3,4
50	100	4,6
100	200	5,8
200	400	7,4
500	1 000	10,0

Vyřiznutí krychlí nám s milimetrovou přesností provedli na místní VOŠ a SPŠ. Zajímavé bylo konečné posouzení vyrobených závaží (obr. 5, 6).



Obr. 5



Obr. 6

Porovnání skutečných hmotností dřevěných krychlí s požadovanou hmotností ukazuje tabulka.

Požadovaná hmotnost (g)	1	2	5	10	20	50	100	200	500
Skutečná hmotnost (g)	1,1	2,0	4,8	11	23	52,6	100,8	205	515

Wolfram|Alpha ve finanční matematice s aplikací geometrických posloupností

DANA ŘÍHOVÁ – LENKA VISKOTOVÁ

Provozně ekonomická fakulta, Mendelova univerzita, Brno

Na využití informačních technologií ve výuce a vzdělávání je v dnešní době kladen velký důraz, stejně tak je současným trendem podporovat finanční vzdělávání. A právě problematika finanční matematiky s využitím výpočetního nástroje Wolfram|Alpha je tématem tohoto článku. Internetový vyhledávač Wolfram|Alpha je volně přístupný prostřednictvím webového prohlížeče na adrese [6]. Kromě matematických výpočtů umožňuje rovněž řešit celou řadu témat z oblasti finanční matematiky. Ve výuce je vhodný zejména pro svou jednoduchost, intuitivní ovládání a volnou dostupnost.

Studenti střední školy se v hodinách matematiky setkávají s posloupnostmi zadanými rekurentně nebo předpisem pro n -tý člen, a to zejména u aritmetické a geometrické posloupnosti. V článku se budeme zmíněnou geometrickou posloupností zabývat, a to v souvislosti s jejími ekonomickými aplikacemi. Zaměříme se na oblast finanční matematiky, přičemž uvedeme případy složeného úročení, dlouhodobého spoření a splácení úvěru. Sestavíme příslušné modely, které odpovídají rekurentnímu zadání posloupnosti, a tyto modely doplníme vztahem pro n -tý člen vzniklé posloupnosti. Tímto postupem získáme základní vzorec daného finančního produktu. Ke každému typu uvedeme ilustrativní příklad. Odvození zmínovaných vzorců a řešení odpovídajících příkladů ukážeme také s pomocí

webové služby Wolfram|Alpha.

Připomeňme, že geometrická posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q je zadána rekurentním vztahem $a_{n+1} = a_n q$, $n \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ a n -tý člen této posloupnosti vypočteme předpisem

$$a_n = a_1 q^{n-1}. \quad (1)$$

Součet prvních n členů geometrické posloupnosti určíme podle vzorce

$$S = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1. \quad (2)$$

Složené úročení

Jestliže vložíme do banky peněžní částku (kapitál), přináší nám zisk ve formě úroků. Při složeném úročení se úroky připočítávají k počátečnímu kapitálu a v dalším období se tento zúročený kapitál bere jako základ pro další úročení. U tzv. složeného úročení polhůtního se úroky vyplácejí na konci každého úrokovacího období, které je definováno jako časový úsek mezi dvěma bezprostředně po sobě následujícími úročeními. V případě, že úročíme m -krát ročně (např. měsíčně), mluvíme o úrokovacím období področním.

Odvodíme vztah pro výpočet hodnoty splatné částky za dobu n úrokovacích období. Uvažujme počáteční hodnotu kapitálu K . Roční úroková sazba r , kterou poskytuje banka, se vyjadřuje v procentech za rok, což zapisujeme výrazem p.a. (z latinského *per annum*). Je vhodné ji ve výpočtech vyjadřovat jako desetinné číslo $r \in (0, 1)$. Úroky se mohou připsávat jednou nebo několikrát za rok, četnost jejich připsování za rok označme m . Úroková sazba za jedno úrokovací období je pak dána podílem $\frac{r}{m}$. Sazbu daně z úroků, která je 15 %, uvažovat nebudeme. Nechť P_n představuje stav kapitálu na konci n -tého úrokovacího období. V následujícím období můžeme výši kapitálu vypočítat ze vztahu

$$P_{n+1} = P_n + \frac{r}{m} P_n = \left(1 + \frac{r}{m}\right) P_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Jelikož známe počáteční hodnotu kapitálu K , reprezentuje

$$P_0 = K, \quad P_{n+1} = \left(1 + \frac{r}{m}\right) P_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

rekurentní zadání geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 1 + \frac{r}{m}$. Udává nám hodnotu zúročeného kapitálu.

Nyní si ukážeme postup výpočtu stavu kapitálu na konci jednotlivých úrokovacích období.

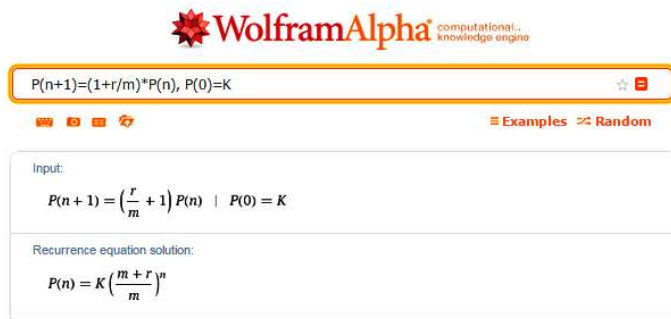
$$\begin{aligned} 1. \quad P_1 &= P_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right) = K \left(1 + \frac{r}{m}\right) \\ 2. \quad P_2 &= P_1 \left(1 + \frac{r}{m}\right) = K \left(1 + \frac{r}{m}\right)^2 \\ 3. \quad P_3 &= P_2 \left(1 + \frac{r}{m}\right) = K \left(1 + \frac{r}{m}\right)^3 \\ &\vdots \\ n\text{-té} \quad P_n &= P_{n-1} \left(1 + \frac{r}{m}\right) = K \left(1 + \frac{r}{m}\right)^n \end{aligned}$$

Z výše uvedené úvahy a také ze vztahu (1) plyne, že stav kapitálu úročeného m -krát za rok bude po uplynutí n úrokovacích období

$$P_n = K \left(1 + \frac{r}{m}\right)^n, \quad (4)$$

což je základní vzorec pro složené úročení, který zároveň představuje předpis pro výpočet n -tého členu geometrické posloupnosti (3) zadané rekurentně. Chceme-li zjistit, jaká bude výše splatné částky za N let, stačí položit $n = mN$.

Uvedený výsledek můžeme dostat také prostřednictvím webové služby Wolfram|Alpha, která je volně přístupná na adrese [6]. Do vstupního pole v žlutém rámečku stačí zapsat rekurentní zadání posloupnosti (3) oddělené čárkou a stisknout **enter**. Indexy píšeme do závorek. Jak ukazuje obr. 1, nejprve se zobrazí interpretace vstupních údajů, pod nimi pak vidíme výsledný vzorec, který odpovídá vztahu (4).



Obr. 1 Vzorec pro složené úročení

Příklad 1

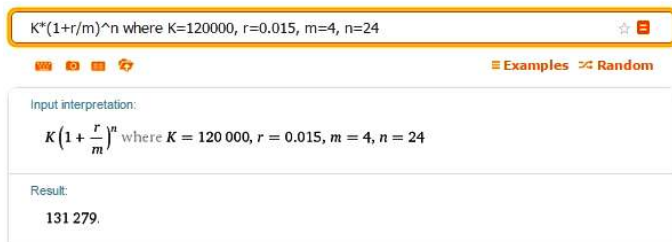
Jakou částku bude mít pan Sedláček na účtu za 6 let při úrokové sazbě 1,5 % p.a. se čtvrtletním připisováním úroků, jestliže počáteční vklad činí 120 000 Kč?

Řešení. K výpočtu splatné částky P_n použijeme vzorec (4), ve kterém počáteční vklad $K = 120\,000$, roční úroková sazba $r = 0,015$, počet úrokovacích období za rok $m = 4$ a celkový počet úrokovacích období $n = 4 \cdot 6 = 24$.

$$P_{24} = 120\,000 \left(1 + \frac{0,015}{4}\right)^{24} \doteq 131\,278,81$$

Daný vklad vzroste na 131 278,81 Kč.

Řešení pomocí Wolfram|Alpha. Příklad lze vypočítat tak, že do vstupního pole Wolfram|Alpha napíšeme vzorec (4) v obvyklé matematické syntaxi pro systémy počítačové algebry. Za ním uvedeme pomocné slovo **where** a hodnoty jednotlivých vstupních proměnných. Pod interpretací vstupních údajů se zobrazí vypočtená částka, jak ukazuje obr. 2.



Obr. 2 Výpočet příkladu 1 dosazením do vzorce

Pro některé typy úloh z oblasti financí nabízí Wolfram|Alpha v oddílu Examples > Money & Finance vytvořené formuláře, které stačí pouze vyplnit. U složeného úročení je nutné nejprve do vstupního pole zapsat klíčové slovo **compound interest**. Požadujeme-li frekvenci úročení roční, případně půlroční, čtvrtletní, měsíční, týdenní nebo denní, před klíčové slovo napíšeme **annual**, **semiannual**, **quarterly**, **monthly**, **weekly** nebo **daily**. Zobrazí se nám pak formulář, do kterého vepíšeme vstupní údaje. Za slovem **calculate** nejdříve vybereme, co chceme vypočítat. V příkladu 1 jsme chtěli zjistit splatnou částku, proto v rámečku zvolíme **future value**. Dále doplníme hodnotu počátečního vkladu **present value**, roční úrokovou sazbu **interest rate** a počet let zadáme pomocí **interest periods**.

Získaný výsledek zaokrouhlený na celé stovky i s použitým vzorcem je znázorněn na obr. 3.

quarterly compound interest

Assuming present and future value | Use present and future value (using dates) or [more](#) instead

Calculate: **future value**

- present value: 120000 Kč
- interest rate: 1.5 %
- interest periods: 6

Input information:

Present and future value:

future value: **Kč 131 300** (Czech koruny)

$FV = PV \left(1 + \frac{i}{f}\right)^{fn}$

Obr. 3 Výpočet příkladu 1 zadáním klíčových slov a vstupních údajů

Dlouhodobé spoření

Častým případem v praxi je, že klient do banky ukládá pravidelně obvykle stejnou peněžní částku (nazývá se anuita) po dobu několika úrokovacích období. Dlouhodobým spořením rozumíme takové spoření, kdy ukládáme vždy jednu úložku za jedno úrokovací období, a to buď na jeho začátku (dlouhodobé předlůžtní spoření), nebo na jeho konci (dlouhodobé polhlůtní spoření). Úložky jsou úročeny složeným úročením s roční úrokovou sazbou, kterou vyjádříme desetinným číslem $r \in (0, 1)$. Úrok je připisován na konci každého úrokovacího období. Zdanění úroků opět neuvažujeme.

Vypočteme celkovou naspořenou částku za n období, jestliže částku a ukládáme vždy koncem úrokovacího období. Počet úrokovacích období v roce a frekvence úročení je m . Za jedno úrokovací období máme úrokovou sazbu $\frac{r}{m}$. Označme S_n celkovou hodnotu naspořené částky včetně úroků na konci n -tého období. Naspořená částka se na konci každého úrokovacího období zvětší o připsané úroky z předchozí naspořené částky a o úložku a , což můžeme vyjádřit schématem

$$S_{n+1} = S_n + \frac{r}{m} S_n + a = \left(1 + \frac{r}{m}\right) S_n + a, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Protože počáteční hodnota naspořené částky je nulová, představuje

$$S_0 = 0, \quad S_{n+1} = \left(1 + \frac{r}{m}\right) S_n + a, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

rekurentní zadání posloupnosti.

Vyjádříme si stavy úspor na konci jednotlivých úrokovacích období.

$$1. \quad S_1 = a$$

$$2. \quad S_2 = S_1 \left(1 + \frac{r}{m}\right) + a = a \left(1 + \frac{r}{m}\right) + a$$

$$3. \quad S_3 = S_2 \left(1 + \frac{r}{m}\right) + a = \left[a \left(1 + \frac{r}{m}\right) + a\right] \left(1 + \frac{r}{m}\right) + a = \\ = a \left(1 + \frac{r}{m}\right)^2 + a \left(1 + \frac{r}{m}\right) + a$$

$\vdots$

$$n\text{-t}é \quad S_n = \underbrace{a \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n-1} + a \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n-2} + \dots + a \left(1 + \frac{r}{m}\right) + a}_{\text{součet prvních } n \text{ členů geometrické posloupnosti } \left(a \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}}$$

Vidíme, že celková naspořená částka na konci n -tého období je součtem prvních n členů geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 1 + \frac{r}{m}$ a prvním členem $a_1 = a$. Použijeme-li vzorec (2), dostaneme následující vztah k určení celkové naspořené částky

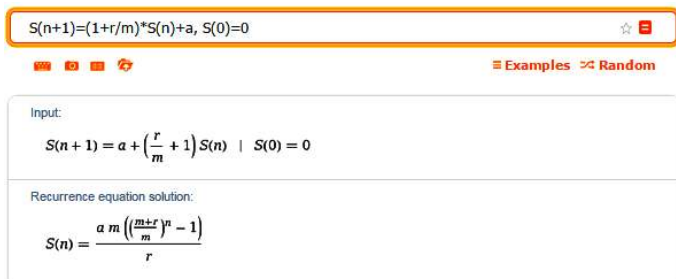
$$S_n = a \frac{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n - 1}{\frac{r}{m}}, \quad (6)$$

který je předpisem pro n -tý člen posloupnosti (5) definované rekurentně.

Vztah (6) získáme pomocí výpočetního nástroje Wolfram|Alpha, jestliže do vstupního pole zapíšeme rekurentní zadání (5). Výsledný vzorec pro S_n na obr. 4 dole je oproti (6) uveden pouze v jiném tvaru.

Jestliže známe konečnou výši naspořené částky S_n , můžeme z výše uvedeného vzorce (6) stanovit výši úložky

$$a = \frac{S_n \frac{r}{m}}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n - 1}.$$



Obr. 4 Naspořená částka při dlouhodobém spoření

Příklad 2

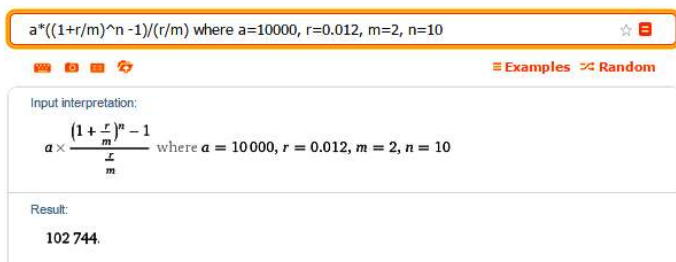
Pan Pokorný plánuje na konci každého pololetí posílat na spořicí účet s úrokovou sazbou 1,2 % p.a. částku 10 000 Kč. Úročení probíhá jednou za půl roku. Jakou částku naspoří za 5 let?

Řešení. Ze vzorce (6) vypočteme hodnotu cílové částky S_n , přičemž měsíční úložka $a = 10\,000$, roční úroková sazba $r = 0,012$, počet úrokovacích období za rok $m = 2$ a celkový počet období $n = 2 \cdot 5 = 10$.

$$S_{10} = 10\,000 \cdot \frac{\left(1 + \frac{0,012}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{0,012}{2}} \doteq 102\,743,66$$

Pan Pokorný naspoří za 5 let 102 743,66 Kč.

Řešení pomocí Wolfram|Alpha. Počítáme-li naspořenou částku pomocí vzorce (6), stačí jej zapsat do vstupního pole, kde přidáme slovo **where** a hodnoty jednotlivých proměnných, jak je vidět na obr. 5.



Obr. 5 Výpočet příkladu 2 dosazením do vzorce

I pro tento typ úlohy Wolfram|Alpha nabízí možnost doplnění potřebných údajů do připraveného formuláře. Do vstupního pole vepíšeme klíčové slovo **future value annuity**. Zobrazí se nám požadované vstupní údaje. Nejdříve v modrém okně dole klikneme na **future value**. Tím se nám za slovem **calculate** nahoře v rámečku objeví **future value**, chceme totiž vypočítat výslednou naspořenou částku. Pak klikneme úplně dole na výraz **payments per period**. Potom doplníme vstupní údaje: roční úrokovou sazbu **interest rate**, počet let **number of periods**, frekvenci vkladů **payments per period** a nakonec výši úločky **periodic payment**. Obrázek 6 ukazuje vypočtenou hodnotu naspořené částky po zaokrouhlení na celé stovky i použitý vzorec.

future value annuity

Examples Random

Assuming annuity | Use **annuity due** instead

Calculate **future value**

- interest rate: 1.2 %
- number of periods: 5
- payments per period: 2
- periodic payment: 10000 Kč

Assuming future value | Use **present value** instead

Also include: **periodic payment growth rate**

Result:

future value Kč102 700 (Czech koruny)

Equation:

$$FV = \frac{PMT \left(\left(1 + \frac{i}{f} \right)^{f \cdot n} - 1 \right)}{\frac{i}{f}}$$

Obr. 6 Výpočet příkladu 2 zadáním klíčových slov a vstupních údajů

Splácení úvěru

Kromě spořicích produktů nabízejí banky klientům také úvěry. Za poskytnutí peněžní částky požadují odměnu, kterou je úrok. V případě střednědobých a dlouhodobých úvěrů (tj. úvěrů s dobou splatnosti od 3 let výše) splácí klient dlužnou částku obvykle pravidelnými konstantními splátkami

(nazývají se anuity) po pevně stanovenou dobu.

Budeme se zabývat případem splácení úvěru ve výši D , který má být splacen i s úroky celkem n stejnými splátkami s , jež budou spláceny vždy koncem úrokovacího období. Roční úroková sazba je vyjádřena číslem $r \in (0, 1)$. Banka si úroky z dlužné částky připisuje na konci každého úrokovacího období, počet těchto období v roce označme m . Podíl $\frac{r}{m}$ pak představuje úrokovou sazbu za jedno úrokovací období. Zdanění úroků neuvážujeme. Naším úkolem je určit výši splátky s .

Nechť T_n značí zbývajících dlužnou částku po n -té splátce. Na konci následujícího období se výše dluhu zvýší o připsané úroky z dlužné částky a sníží o splátku s , což můžeme vyjádřit modelem

$$T_{n+1} = T_n + \frac{r}{m} T_n - s = \left(1 + \frac{r}{m}\right) T_n - s, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Hodnota úvěru je D , tudíž

$$T_0 = D, \quad T_{n+1} = \left(1 + \frac{r}{m}\right) T_n - s, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

je rekurentním zadáním posloupnosti.

Znáznorníme si výši dluhu na konci jednotlivých období.

$$\begin{aligned} 1. \quad T_1 &= D \left(1 + \frac{r}{m}\right) - s \\ 2. \quad T_2 &= T_1 \left(1 + \frac{r}{m}\right) - s = \left[D \left(1 + \frac{r}{m}\right) - s\right] \left(1 + \frac{r}{m}\right) - s = \\ &= D \left(1 + \frac{r}{m}\right)^2 - s \left(1 + \frac{r}{m}\right) - s = \\ &= D \left(1 + \frac{r}{m}\right)^2 - s \left[\left(1 + \frac{r}{m}\right) + 1\right] \\ 3. \quad T_3 &= T_2 \left(1 + \frac{r}{m}\right) - s = \\ &= \left[D \left(1 + \frac{r}{m}\right)^2 - s \left(1 + \frac{r}{m}\right) - s\right] \left(1 + \frac{r}{m}\right) - s = \\ &= D \left(1 + \frac{r}{m}\right)^3 - s \left(1 + \frac{r}{m}\right)^2 - s \left(1 + \frac{r}{m}\right) - s = \\ &= D \left(1 + \frac{r}{m}\right)^3 - s \left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^2 + \left(1 + \frac{r}{m}\right) + 1\right] \\ &\vdots \end{aligned}$$

n -té

$$T_n = D \left(1 + \frac{r}{m}\right)^n - s \underbrace{\left[\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n-1} + \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n-2} + \dots + \left(1 + \frac{r}{m}\right) + 1 \right]}_{\text{součet prvních } n \text{ členů geometrické posloupnosti } \left(s \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}}$$

Nyní pomocí vzorce (2) sečteme prvních n členů výše uvedené geometrické posloupnosti s kvocientem $q = 1 + \frac{r}{m}$ a prvním členem $a_1 = s$. Dostaneme součet

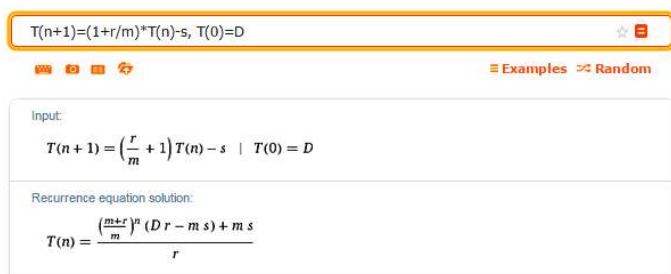
$$s \frac{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n - 1}{\frac{r}{m}}.$$

Dlužnou částku pak můžeme vyjádřit následovně

$$T_n = D \left(1 + \frac{r}{m}\right)^n - s \frac{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n - 1}{\frac{r}{m}}, \quad (8)$$

což je předpis pro n -tý člen rekurentně zadané posloupnosti (7). První člen na pravé straně rovnice značí částku, na kterou se po n obdobích zúčtil počáteční dluh, druhý člen představuje množství, na které se za stejnou dobu zúčtily pravidelné splátky. Rozdíl těchto členů tvoří zbývajícím dluh.

S využitím Wolfram|Alpha zapíšeme do vstupního pole rekurentní zadání (7). Získaný předpis pro zjištění dlužné částky T_n v dolní části obr. 7 je vyjádřen v poněkud jiném tvaru než (8), pomocí vhodných úprav jej lze snadno obdržet.



Obr. 7 Určení dlužné částky při splácení úvěru

V praxi se často určuje výše splátky úvěru při jeho dané počáteční výši, dané době splatnosti a dané úrokové sazbě. Pro výpočet hodnoty splátky

s použijeme podmínku $T_n = 0$, protože dluh má být splacen právě po n úrokovacích obdobích. Položíme-li vztah (8) roven nule:

$$0 = D \left(1 + \frac{r}{m}\right)^n - s \frac{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n - 1}{\frac{r}{m}},$$

dostaneme z uvedené rovnice následující vzorec pro výši konstantní splátky

$$s = \frac{\frac{r}{m} D \left(1 + \frac{r}{m}\right)^n}{\left(1 + \frac{r}{m}\right)^n - 1}. \quad (9)$$

Příklad 3

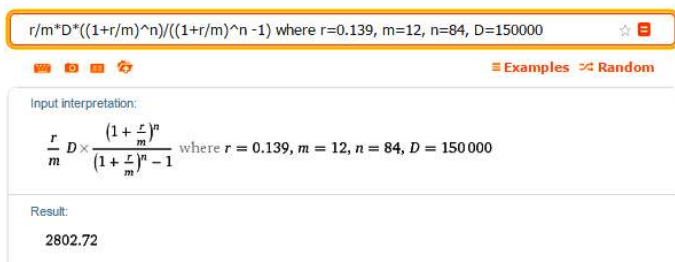
Paní Vodičková potřebuje úvěr na rekonstrukci kuchyně ve výši 150 000 Kč. Jaká musí být měsíční splátka, pokud úroková sazba činí 13,9 % p.a. a úvěr je poskytnut na dobu 7 let?

Řešení. Konstantní splátku s určíme pomocí vzorce (9), přičemž výše úvěru $D = 150\,000$, roční úroková sazba $r = 0,139$, počet úrokovacích období za rok $m = 12$ a celkový počet období $n = 12 \cdot 7 = 84$.

$$s = \frac{\frac{0,139}{12} \cdot 150\,000 \left(1 + \frac{0,139}{12}\right)^{84}}{\left(1 + \frac{0,139}{12}\right)^{84} - 1} \doteq 2802,72$$

Pravidelná měsíční splátka bude 2802,72 Kč.

Řešení pomocí Wolfram|Alpha. Abychom vypočetli měsíční splátku, napíšeme do vstupního pole vzorec (9), doplníme slovo **where** a hodnoty potřebných vstupních údajů, jak ukazuje obr. 8.



Obr. 8 Výpočet příkladu 3 dosazením do vzorce

Také v tomto případě Wolfram|Alpha nabízí zapsání vstupních údajů do připraveného formuláře. Nejprve ve vstupním poli napíšeme klíčové slovo **mortgage calculator**. Jakmile se objeví formulář, vepíšeme výši úvěru **loan amount**, dobu splatnosti v letech **loan period** a nakonec roční úrokovou sazbu **annual percentage rate**. Na obrázku 9 vidíme, že kromě vypočtené měsíční splátky se nám například zobrazí celková částka a úroky, které zaplatíme.

mortgage calculator

Assuming fixed rate mortgage | Use adjustable rate mortgage instead

loan amount: 150000 Kč

loan period: 7 yr

annual percentage rate: 13.9 %

Assuming loan amount | Use sale amount and down payment instead

Also include: points | interest-only period | tax rate | balloon payment

Monthly payments:

monthly payment	Kč2803
effective interest rate	14.821%

Units »

Mortgage totals:

principal paid	Kč150 000
total interest paid	Kč85 429
total payments	Kč235 429

principal

interest

Obr. 9 Výpočet příkladu 3 zadáním klíčových slov a vstupních údajů

Wolfram|Alpha navíc poskytne umořovací plán, ve kterém je pro každý rok uvedena zbývající hodnota dluhu, splacená částka a zaplacené úroky.

Závěr

Cílem článku bylo ukázat použití webové služby Wolfram|Alpha spolu s geometrickou posloupností ve finanční matematice, a to pro odvození vzorců vybraných základních finančních produktů. Zároveň byly uvedeny ilustrativní příklady a pomocí Wolfram|Alpha byla doplněna jejich řešení.

Jednalo se tedy o ukázkou propojení klasického středoškolského učiva s problematikou běžného života v oblasti financí za pomoci využití informačních technologií dnešní doby. Hlavním přínosem příspěvku je tudíž podpora finanční gramotnosti a využití znalostí z oblasti informatiky ve vzdělávání.

Závěrem poznamenejme, že ilustrační obrázky uvedené v článku byly získány prostřednictvím nástroje Wolfram|Alpha [6] a některé z nich byly vzhledem k svému rozsahu upraveny a zkráceny.

Literatura

- [1] *Odvárko, O.*: Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady. Prometheus, Praha, 2010.
- [2] *Odvárko, O.*: Úlohy z finanční matematiky pro střední školy. Prometheus, Praha, 2010.
- [3] *Pražák, P., Pražáková, B.*: Excel a rekurentně zadané posloupnosti ve finanční matematice. Matematika, fyzika, informatika, roč. 18 (2008/2009), č. 1, s. 42-51. Dostupné na: http://mfi.upol.cz/old/MFI_18_pdf/Inf_18_1.pdf
- [4] *Petrášková, V.*: Znalost problematiky penzijního připojištění – nezbytná součást finanční gramotnosti (I. část). Matematika, fyzika, informatika, roč. 21 (2011/2012), č. 7, s. 395–405. Dostupné na: http://mfi.upol.cz/old/MFI_21_pdf/MAT_21_07.PDF
- [5] *Radová, J., Dvořák, P., Málek, J.*: Finanční matematika pro každého. Grada, Praha, 2005.
- [6] Wolfram|Alpha. Dostupné na: <http://www.wolframalpha.com>

Užití software Wolfram Alpha při výuce matematiky

JIŘÍ MAZUREK

Obchodně podnikatelská fakulta SU, Karviná

Moderní výuka matematiky se v současnosti již neobejde bez vhodného matematického software, který může sloužit jak k jednodušším i složitějším výpočtům, tak k vizualizaci dat a výsledků, k simulacím, modelování,

optimalizaci, dobývání dat z databází, a podobně. Na středních a vysokých školách je používán například MS Excel, Derive, Cabri, Matlab, Maple, Mathematica, Statistica, Gretl, SPSS, NCSS, Scilab, CPLEX, LINGO apod. Nevýhodou těchto produktů je jejich vysoká cena. Výpočty či simulace lze ale provádět i na některých internetových portálech (např. [1]).

Zajímavou příležitostí ve výuce (nejen) matematiky nabízí program *Wolfram Alpha*, [2]. Jde o „odpovídací stroj“ vytvořený společností Wolfram Research na bázi softwaru *Mathematica* a spuštěný 15. 5. 2009. Jde o webovou službu, která si klade za cíl „zpřístupnit (učinit vypočítatelným) veškeré systematické vědění“ [2]. Základní verze je zdarma, některé pokročilejší aplikace jsou již zpoplatněny.

Obr. 1 ukazuje titulní stránku Wolfram Alpha. Položením dotazu do žlutého rámečku se služba spustí. Uživatel si může vybrat z mnoha tematických oblastí (viz nabídka ikon pod rámečkem), k dispozici jsou rovněž výuková videa, předem připravené ilustrativní příklady nebo simulace.



Obr. 1 Hlavní stránka Wolfram Alpha

Další podrobnosti o Wolfram Alpha lze najít například v [3]. Hlavními přednostmi této webové služby jsou:

- snadná dostupnost (lze spustit zadarmo všude, kde je internet),
- unikátní rozsah databáze, kterou program disponuje (zahrnuje nejen matematiku, ale i další vědy: fyziku, biologii, chemii, geografii, historii, apod.),

- interaktivní prostředí s možností experimentovat a objevovat,
- grafické znázornění výsledků,
- propojenost mezi pojmy (zobrazí se nejen žádaný pojem, ale i jeho vztah k jiným pojmům),
- „umělá inteligence“, která umožňuje „komunikaci“ s programem ve všech oblastech lidského života.

Anglický jazyk nutný pro práci s Wolfram Alpha by už v dnešní době neměl být pro studenty střední školy překážkou. Často ani není nutné zadání úlohy, například rovnice, doprovodit slovně (slovesem „solve“), program se pustí do řešení automaticky. V případě nejednoznačného zadání se pak program uživatele zeptá, jak bylo zadání míněno.

Možnosti užití Wolfram Alpha ve výuce matematiky na střední škole

Pro výuku na střední škole nabízí Alpha například tyto možnosti:

- jednoduché i složitější numerické výpočty,
- vykreslení grafu funkce jedné a více proměnných, určení extrémů funkce, monotónnosti, apod.,
- určení definičního oboru a oboru hodnot funkce,
- řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav,
- výpočty s vektory, maticemi a determinanty,
- výpočet derivací a integrálů,
- rozklad celých (složených) čísel na prvočísla,
- výpočet faktoriálů a kombinačních čísel,
- výpočet kombinací, variací a permutací.

Wolfram Alpha může plnit ještě jednu velmi důležitou funkci, a tou je kontrola výsledků. Studenti se ve škole naučí řešit různé typy úloh, ale často si neumí správnost svého řešení ověřit, a to zvláště tehdy, je-li numerické řešení náročnější (např. při násobení matic). Kontrola výsledku, ve školní výuce často opomíjená, je přitom především při užití matematiky v praxi velmi důležitá. Nedílnou součástí výuky matematiky by mělo být i experimentování a objevování nového v intencích filozofie prof. Hejného (viz např. [4]). To Wolfram Alpha svou interaktivností umožňuje.

Pro praktickou ukázkou práce s programem byly vybrány následující úlohy:

1. Načrtněte graf funkce

$$y = 2 \sin x.$$

2. Řešte v $\mathbb{R}^2$ soustavu rovnic:

$$2x + 3y = 5$$

$$5x - 2y = 8$$

3. Určete definiční obor funkce

$$y = \sqrt{25 - x^2}.$$

4. Znázorněte graf funkce

$$z = x^2 + y^2.$$

5. Vypočtěte

$$\begin{vmatrix} 1, & 3 \\ 2, & 4 \end{vmatrix}$$

6. Určete počet kombinací a variací druhé třídy z osmi prvků.

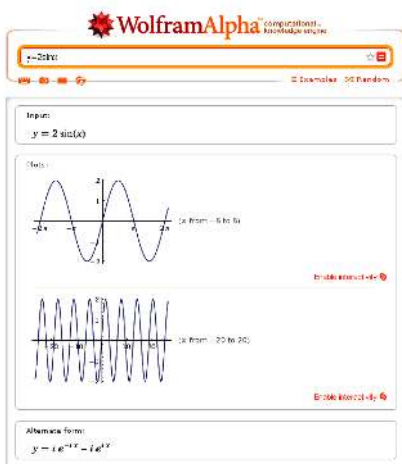
7. Zobrazte rovinu

$$x + 3y + 5z - 1 = 0.$$

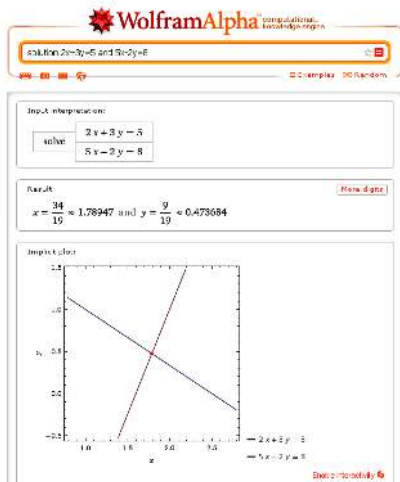
8. Načrtněte graf binomického rozdělení pro $n = 20$ a $p = 0,3$.

Řešení úloh je ukázáno postupně na obr. 2–7. Z důvodu úspory místa nejsou ukázány úplné výstupy programu na zadané otázky (ty jsou často značně rozsáhlé). Program totiž poskytne uživateli nejen řešení dané úlohy, ale i mnoho dalších informací souvisejících s daným problémem včetně vizualizace řešení pomocí grafů a obrázků (viz např. obr. 6).

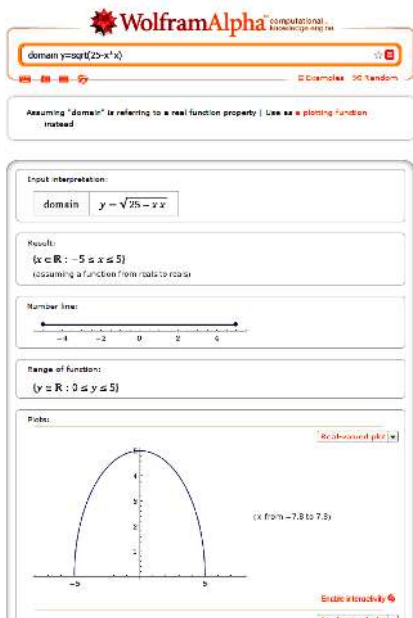
Protože Wolfram Alpha „umí“ více než jen matematiku, bylo do programu na závěr zadáno i jméno jednoho středně velkého města České republiky. Co vše o něm Wolfram Alpha ví? To nechť si čtenář (žáci) zkusí zjistit sám.



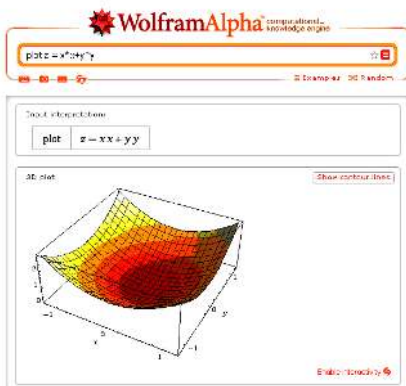
Obr. 2 Řešení soustavy rovnic



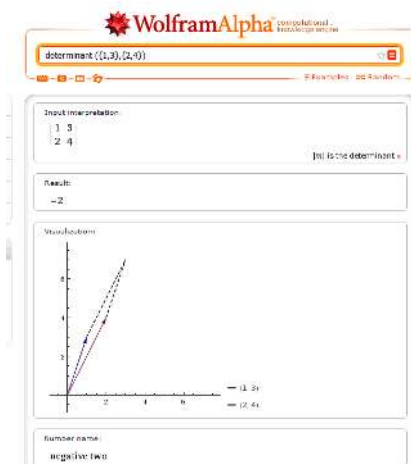
Obr. 3 Řešení soustavy rovnic



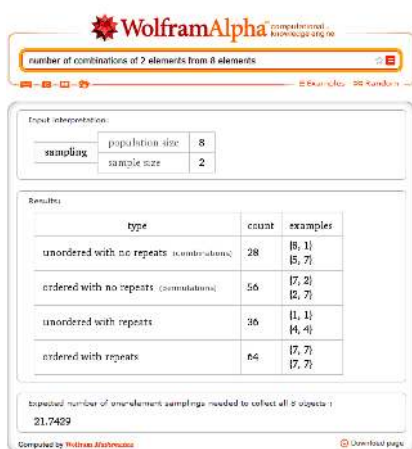
Obr. 4 Definiční obor funkce



Obr. 5 Graf funkce



Obr. 6 Výpočet determinantu



Obr. 7 Výpočet kombinací a variací po $n = 8$ a $k = 2$

Závěr

Cílem článku bylo předvést možnosti, které skýtá ve výuce matematiky na střední škole program Wolfram Alpha. Autor článku vyzkoušel program ve výuce na gymnáziu, studenti program velice zaujal a věnovali se jeho „zkoumání“ dokonce i ve svém volném čase. Ve většině případů je zaujala i možnost samotné komunikace s umělou inteligencí. Díky rozsáhlé databázi této webové služby ji lze využít i v jiných předmětech, než je matematika.

Literatura

- [1] meta-numerics.net
- [2] WolframAlpha. Dostupné na: <http://www.wolframalpha.com>
- [3] cs.wikipedia.org/wiki/Wolfram_Alpha
- [4] Hejný, M., Kuřina, F.: Dítě, škola a matematika. Portál, Praha, 2001.

Z HISTORIE

Ilya Prigogine: Velikán nerovnovážné termodynamiky

(K 100. výročí narození.)



Ilya Prigogine (prigožin), nositel Nobelovy ceny za chemii (1977), se ve dvacátém století významně podílel na rozvoji poznání zákonitostí nerovnovážných dějů v chemii, biologii a fyzice. Věnoval se především otázce nevratnosti procesů.

Narodil se 25. ledna 1917 v Moskvě, ale již ve svých čtyřech letech se spolu s rodiči přestěhoval nejprve do Německa a pak do Belgie. Roku 1929 se rodina usadila v Bruselu, kde později Prigogine získal univerzitní vzdělání (obor chemie na Université Libre de Bruxelles).

Ve třicátých letech minulého století byla termodynamika zpravidla vnímána jen jako termostatika rovnovážných procesů, a proto se i leckdo z předních fyziků pozastavoval nad snahou mladého Ilyi Prigogina studovat nevratné transportní děje (difúze, přenos tepla aj.) termodynamickými metodami. Díky podrobnému rozboru predikce a kauzality těchto dějů vytvořil v první polovině minulého století Ilya Prigogine základy nerovnovážné termodynamiky – nové oblasti termodynamiky, která se zabývá nerovnovážnými ději

a popisuje chování soustav v blízkosti rovnováhy. Dokázal přitom uplatnit své zkušenosti ze statistické mechaniky, kde se věnoval jednoduchým dynamickým modelům. Spolupracoval s mnohými fyziky a chemiky, především však s americkým fyzikálním chemikem norského původu *Larsem Onsagerem* (1903–1976), který přispěl značným podílem k popisu zmíněných procesů – společně tak vytvořili základy lineární nerovnovážné termodynamiky.

Fenomén nevratnosti, hrající v případě transportních jevů klíčovou úlohu, se dříve ztotožňoval s degradací a ztrátou užitečné práce. Zatímco izolované systémy vždy směřují do rovnovážného stavu, otevřené systémy mohou (ale nemusí) přejít do jistého stacionárního (na čase nezávislého) stavu, ve kterém dochází k průběžné výměně komponent mezi systémem a jeho okolím. Takové nevratné děje potřebují neustálý přítok energie k tomu, aby systém mohl konat práci. Pokud však termodynamické síly působící na otevřený systém dosáhnou jisté mezní hodnoty, opustí systém stabilitu stacionárního stavu a vlivem různých fluktuací se od něj vzdaluje. Prudce tím roste počet možných stavů, které systém může zaujmout, což je příčinou obtížné předvídatelného dalšího vývoje.

Tuto problematiku Prigogine podrobně studoval na řadě chemických a biologických systémů vzdálených od termodynamické rovnováhy. V polovině dvacátého století pak pod jeho vedením vznikl Bruselský institut nerovnovážné termodynamiky s cílem najít zobecněné vztahy pro živé systémy.

V nerovnovážných systémech může docházet k velkému zesílení náhodných, neměřitelných a nepředvídatelných poruch – fluktuací. Díky tomu se v nich vytvářejí makroskopické struktury, které nejsou jednoznačně odvoditelné z chování molekul tvořících systém. Aby Prigogine odlišil tyto struktury od rovnovážných, nazval je disipativní, protože rozptylují (disipují) teplo a jimi protékající energii do okolí.

Zároveň mohou fluktuace kladnou zpětnou vazbou způsobit až destabilizaci systémů, což má za následek zničení jejich původního uspořádání.

Existence disipativních struktur Prigogina velmi zaujala. Jeho nadšení vybudovat vhodnou teorii z hlediska nerovnovážné statistické mechaniky brzy vzbudilo i zájem spolupracovníků. V roce 1967 proto Prigogine založil Centrum pro statistickou mechaniku, později po něm přejmenované na Centrum I. Prigogina pro studium statistické mechaniky a komplexních systémů. Přestože řada problémů z teorie disipativních struktur a chaosu zůstává stále otevřená a Prigoginovy práce vyvolaly řadu diskuzí a sporů, daly především podnět mnoha fyzikům, biologům i chemikům k hledání dalších souvislostí na cestě k pochopení podstaty živých systémů.

Vývoj zmíněných oblastí fyziky prodělal za posledních padesát let díky Prigoginovi takový skok kupředu, že si jde jen stěží představit, jakým směrem by se ubíral bez jeho skvělých myšlenek a vědecké intuice.

Během svého života se Ilya Prigogine stal členem 64 vědeckých organizací, získal řadu ocenění (např. Francquiho cenu (1955), Rumpfordovu medaili (1976) aj.), z nichž jistě nejprestižnější je Nobelova cena za chemii (1977). Dále také obdržel více než padesát čestných titulů. Své poznatky se snažil zpřístupnit a popularizovat pro širší veřejnost – k jeho nejznámějším knihám patří *Rád z chaosu* (1984, spoluautorka *Isabelle Stengers*), tato publikace se zanedlouho po svém vydání stala bestsellerem a v roce 2001 se opožděně dočkala i českého překladu (nakl. Mladá fronta).

Ilya Prigogine – velikan nerovnovážné termodynamiky a výjimečný badatel o podstatě života – se kromě přírodních věd věnoval i filozofii, hudbě, dějinám, výtvarnému umění a archeologii.

Zemřel v Bruselu 28. května 2003 ve věku 86 let.

Literatura

- [1] *Buchanan, M.*: Všeobecný princip. Baronet, Praha, 2004.
- [2] *Duršpek, J.*: Moderní termodynamika v chemických a biologických procesech. Diplomová práce, Plzeň, FPE ZČU, 2005.
- [3] Informace Švédské akademie věd. (<http://nobel.sdsc.edu/laureates/chemistry-1977-1-autobio.html>).
- [4] *Obdržálek, J.*: Úvod do termodynamiky, molekulové a statistické fyziky. Matfyzpress, Praha, 2015.
- [5] *Prigogine, I., Kondepudi, D.*: John Wiley & Sons, Chichester, 1998.
- [6] *Prokšová, J.*: Entropie na středoškolské úrovni. Disertační práce. Praha, MFF UK, 2004.
- [7] *Prokšová, J., Obdržálek, J.*: Ilya Prigogine – představitel moderní termodynamiky. Školská fyzika, roč. 7 (2001/2), s. 17–20.

Jitka Prokšová

Carl David Anderson: objevitel pozitronu



Neeexistuje nic jiného než atomy a prázdný prostor. Vše ostatní je jen náš názor.

Démokritos

Znalosti nikdy nepřicházejí k lidstvu v konečné podobě. V první třetině 20. století již fyzikové věděli, že se hmota skládá

z elektronů, protonů a neutronů. Jak postupně získávali další informace, ukázalo se, že mnoho jevů teprve čeká na vysvětlení. Byla nalezena řada jiných subatomárních částic a vše začalo být mnohem složitější, než se zprvu předpokládalo.

Již v roce 1785 zjistil francouzský fyzik *Ch. A. Coulomb*, že nabitý elektroskop se na vzduchu vybíjí. Pozdější výzkumy německých fyziků *J. Elstera* a *H. F. Geitla* ukázaly, že příčinou tohoto vybíjení je ionizace vzduchu, jejímž původcem není záření vycházející z povrchových vrstev půdy ani záření radioaktivních plynů. Rok 1912 nebyl významný jen potopením Titaniku, ale také tehdy došlo k objevu dosud neznámého fenoménu – kosmického záření. V letech 1911 až 1913 zahájil rakouský fyzik *Victor Hess* (1883–1964), od roku 1910 asistent v radiologickém ústavu Vídeňské akademie věd, sérii experimentů s lety horkovzdušnými balóny vybavenými velmi citlivou verzí elektroskopu pro indikaci a měření elektrického náboje. Čtvrtý pokusný balón naplněný vodíkem s lidskou posádkou a pojmenovaný *Böhmen* byl také odstartován 7. srpna 1912 z chemičky v Ústí nad Labem. Cílem bylo ověřit ve větších výškách překvapivě zjištění německého fyzika *Theodora Wulfa* (1868–1946), učiněné v Paříži roku 1910 při výstupu na 307 m vysokou Eiffelovu věž. Pomocí jednoduchého detektoru nábojů zjistil, že vzduch ve větší výšce je více nabitý než dole, tedy opačně, než by se dalo čekat. Hess dosáhl v balonu výšky 5 300 m a vrátil se s objevem, který mu v roce 1937 vynesl polovinu Nobelovy cenu za fyziku.

Nový jev vysvětlil tím, že ionizující záření nevychází ze Země, ale z vesmíru (řec. kosmos). Otevřel tak pro řadu fyziků novou oblast vědeckého bádání s velkými možnostmi další objevů. Za primární kosmické záření je obvykle považován vysokoenergetický proud částic, které do zemské atmosféry proniká z kosmického prostoru. Ty se sráží s částicemi zemské atmosféry. Srážkami vznikají další a další částice a

výsledkem je sprška sekundárního kosmického záření, které dopadá na zemský povrch. Z největší části je tvořeno protony (kolem 90 %), zbytek tvoří jádra helia a těžších prvků, jisté malé zastoupení mají také elektrony.

Další součást představují stabilní neutrona. Pozdější výzkumy ukázaly, že kosmické záření je plné podivných, exotických a doslova mimozemských subatomárních částic. Mezi ty, kteří je nejintenzivněji zkoumali a shromáždili o nich značné množství poznatků do té doby neznámých, patřil vedle *R. A. Millikana* (Nobelova cena za fyziku za práce o elementárním elektrickém náboji a fotoelektrickém jevu), další americký experimentální fyzik *Carl David Anderson*.

Narodil se v roce 1905 v New Yorku švédským přistěhovalcům, kteří se rozhodli žít trvale v USA. Studoval fyziku a techniku na jednom z nejvýznamnějších vzdělávacích a výzkumných středisech na světě, prestižním soukromém Kalifornském technologickém institutu v Pasadena (*California Institute of Technology, Caltech*) – titul bakaláře v oborech fyzika a inženýrství (B. S.) získal v roce 1927, titul doktora (Ph. D.) v roce 1930. Po ukončení studia zde nastoupil jako asistent, v roce 1933 se stal profesorem experimentální fyziky a na Caltechu strávil většinu svého života. Během druhé světové války se aktivně podílel na projektech zadávaných Národní bezpečnostní komisí a Úřadem pro vědecký výzkum a rozvoj. Po skončení války se v roce 1946 oženil. V roce 1956 byl zvolen členem Národní akademie věd (USA). Zemřel v roce 1991 v kalifornském San Marinu a je pochován v Los Angeles.

Anderson se zpočátku se zabýval problémem prostorového rozložení fotonů produkovaných rentgenovými paprsky v různých plynech. Poté pod vedením profesora *R. A. Millikana* začal studovat vysokoenergetické kosmické záření pomocí fotografií z Wilsonovy mlžné komory. Během

tohoto výzkumu nečekaně objevil novou částici, jejíž dráha ukazovala na nepatrnou hmotnost částice s kladným elektrickým nábojem, a nazval ji *pozitron* podle slov „pozitivní elektron“. Objev pozitronu, publikovaný v roce 1932/33 (*The Positive Elektron*, Phys. Rev. 43, 491, 1933), potvrdil teoretickou předpověď anglického fyzika *P. A. M. Diraca* (Nobelova cena za fyziku – 1933) z roku 1928.

Objev pozitronu v kosmickém záření podnítl Andersona hledat tuto částici i v pozemských podmínkách. A tak v roce 1933 se svými spolupracovníky skutečně našel první přímý důkaz, že při dopadu určitého druhu záření gama na různé materiály vznikají elektron–pozitronové páry. V dalším období zkoumal rozdělení energie částic z vesmíru, energii kosmického záření a ztrátu energie elektronů s velkou rychlostí při průchodu různými látkami.

V roce 1936, kdy obdržel Nobelovu cenu za fyziku za významný objev pozitronu (sdílel ji s Viktorem Hessem), přivedl jej výzkum spršek kosmického záření znovu k velkému nálezu – se svým studentem *Sethem Neddermeyerem* objevil další novou částici. Tato částice se při průchodu magnetickým polem stáčela pod větším úhlem než elektrony, ale menším než protony. Dostala jméno *mion* a je to hmotnější příbuzný elektronu.

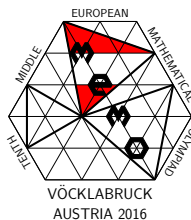
Japonský teoretický fyzik a profesor na univerzitě v Kjótu (NC za fyziku – 1949) *Hideki Yukawa* se snažil zjistit, co drží atomové jádro pohromadě. Roku 1934 naznačil, že tato silná síla (dnes známá jako silná interakce) by měla být zprostředkována částicemi střední velikosti, jejichž hmotnost je něco mezi elektronem a protonem (či neutronem). Tak teoreticky předpověděl existenci nových základních částic – mezonů, zprostředkujících silnou interakci mezi protonem a neutronem. Srážky kosmického záření s atmosférou měly větší rychlost než kterýkoli částicový urychlovač třicátých let minulého století. Daly se sice pozorovat jen s obtížemi, ale byl to

nejlepší způsob hledání dalších subatomárních částic s krátkou dobou života (miliardtiny sekundy). Další krok do poznání světa částic menších než atom byl učiněn.

Bohumil Tesařík

ZPRÁVY

10. ročník Středoevropské matematické olympiády



Jubilejní desátý ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO) se konal ve dnech 22.–28. srpna 2016 v rakouském Vöcklabrucku. Soutěže se zúčastnilo 60 soutěžících z deseti středoevropských zemí (Švýcarska, Německa, Slovinska, Chorvatska, Maďarska, Slovenska, Litvy, Polska, České republiky a pořádatel Rakouska). Každou zemi reprezentovalo šestičlenné družstvo složené z žáků, kteří v uplynulém školním roce nematurovali. České reprezentační družstvo bylo složeno ze tří vítězů a tří úspěšných řešitelů ústředního kola 65. ročníku v kategorii A, kteří splňovali podmínky této mezinárodní soutěže a nezúčastnili se 57. IMO v Hong Kongu.

Složení českého týmu na 10. MEMO bylo následující: *Lenka Kopfová* (1/4 MG Opava), *Danil Koževníkov* (6/8 GJK Praha 6), *Jan Petr* (7/8 GJK Praha 6), *Ondřej Motlíček* (7/8 G Šumperk), *Martin Raška* (6/8 WG Ostrava-Poruba) a *Ondřej Svoboda* (7/8 G Brno, tř. Kpt. Ja-

roše). Vedoucím české delegace a jejím zástupcem v jury byl *doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.*, z FIT ČVUT Praha, pedagogickým vedoucím družstva byl *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.*, z Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.

Den před soutěží jednotlivců provedla mezinárodní jury definitivní výběr všech 12 soutěžních úloh, a to po jedné z algebry, kombinatoriky, geometrie a teorie čísel pro soutěž jednotlivců, a dále pak po dvou jiných úlohách ze stejných oblastí pro týmovou soutěž. Individuální soutěž se konala ve středu 24. srpna, týmová soutěž proběhla o jeden den později. Po oba dny se přitom soutěžilo v učebnách Bundesrealgymnasiaschloß Wagrain ve Vöcklabrucku.

Následující dva dny po soutěži družstev probíhala koordinace soutěžních úloh za přítomnosti vedoucích národních týmů. Každá soutěžní úloha byla přitom hodnocena nejvýše 8 body (s celočíselným bodovacím schématem v rozpětí 0–8 bodů). Soutěžící se svými rakouskými průvodci však v pátek 26. srpna absolvovali společný výlet do Linze, kde byli přijati na tamní radnici a poté navštívili místní univerzitu. Na poslední den pobytu v Rakousku, kterým byla sobota 27. srpna, připravili rakouští organizátoři pro všechny účastníky soutěže společný jednodenní výlet spojený s turistickou procházkou z Obertraunu kolem Halštatského jezera (Hallstätter See) s překrásnými výhledy na úbočí Dachsteinu.

Ihned po návratu byli na závěrečném slavnostním večeru (za přítomnosti náměstkyň rakouské federální ministryně pro vzdělávání *Sonji Hammerschmidové*) oficiálně vyhlášeni vítězové soutěže jednotlivců i soutěže družstev. V soutěži jednotlivců bylo letos uděleno 6 zlatých, 9 stříbrných a 16 bronzových medailí. Dva naši soutěžící – *Danil Koževnikov* a *Jan Petr* – získali stříbrné medaile a dále jediná dívka v celé soutěži – *Lenka Kopfová* – si domů přivezla medaili bronzovou. Cen-

ného, historicky dosud nejlepšího výsledku v soutěži družstev dosáhlo české reprezentační družstvo, které skončilo na vynikajícím 3. místě za družstvy Chorvatska a Polska, avšak před silnými celky Německa, Maďarska a dalšími středoevropskými týmy. Všichni členové našeho družstva tak převzali na slavnostním vyhlášení výsledků z rukou *prof. Gerda Barona*, rakouského iniciátora vzniku MEMO, bronzové medaile.

Podrobnější informace doplněné fotografií ze soutěže mohou zájemci nalézt na oficiálních stránkách 10. MEMO (www.math.aau.at/MEMO2016).

Na závěr uvádíme texty všech soutěžních úloh. V závorce je uvedena země, která úlohu navrhla.

Soutěž jednotlivců (24. srpna 2016)

Příklad I–1

Nechť $n \geq 2$ je přirozené číslo a $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou reálná čísla splňující současně podmínky

- (a) $x_j > -1$ pro $j = 1, 2, \dots, n$,
- (b) $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$.

Dokažte nerovnost

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{1+x_j} \geq \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{1+x_j^2}$$

a určete, kdy nastane rovnost.

(Rakousko)

Příklad I–2

Na tabuli je napsáno n ($n \geq 3$) přirozených čísel. V jednom kroku vybereme na tabuli tři čísla a, b, c , která jsou délkami stran nedegenerovaného, nerovnostranného trojúhelníku, a nahradíme je čísly $a + b - c$, $b + c - a$ a $c + a - b$. Dokažte, že neexistuje nekonečná posloupnost těchto kroků.

(Švýcarsko)

Příklad I–3

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, v němž $|\sphericalangle BAC| > 45^\circ$ a O značí střed kružnice jemu opsané. Bod P je takovým vnitřním bodem tohoto trojúhelníku, že body A, P, O, B leží na téže kružnici a přímka BP je kolmá k CP . Bod Q je takovým bodem úsečky BP , že přímka AQ je rovnoběžná s PO . Dokažte, že platí $|\sphericalangle QCB| = |\sphericalangle PCO|$.

(Slovensko)

Příklad I–4

Určete všechny funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$ je číslo $2(a + b - 1)$ dělitelné číslem $f(a) + f(b)$.

Poznámka. Symbol $\mathbb{N}$ značí množinu všech přirozených čísel, tj. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

(Chorvatsko)

Soutěž družstev

(25. srpna 2016)

Příklad T–1

Určete všechny trojice (a, b, c) reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$a^2 + ab + c = 0,$$

$$b^2 + bc + a = 0,$$

$$c^2 + ca + b = 0.$$

(Chorvatsko)

Příklad T–2

Nechť $\mathbb{R}$ značí množinu reálných čísel. Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x a y platí

$$f(x)f(y) = xf(f(y-x)) + xf(2x) + f(x^2).$$

(Litva)

Příklad T–3

Čtvercové území 8×8 , jehož strany jsou orientovány ve směrech sever–jih a východ–západ, je složena ze 64 parcel 1×1 . Na každé parcele může být postaven nejvýše jeden dům, jehož základy jsou shodné právě s touto parcelou.

Řekneme, že dům je ve *slunečním stínu*, právě když existují tři domy na

parcelách bezprostředně s ním sousedících současně na východě, jihu i na západě.

Jaký maximální počet domů lze současně postavit na daném čtvercovém území tak, aby žádný z nich nebyl ve slunečním stínu?

Poznámka. Domy na východní, jižní a západní straně celého území nejsou ve slunečním stínu.

(Chorvatsko)

Příklad T–4

Žáci střední školy psali test. Každá otázka byla hodnocena buď jedním bodem za správnou odpověď, nebo žádným bodem za chybnou odpověď. Každá otázka byla správně zodpovězena aspoň jedním žákem a přitom aspoň dva žáci nezískali na závěr stejný počet bodů. Dokažte, že existovala taková otázka, že žáci, kteří ji zodpověděli správně, dosáhli v průměru vyššího počtu bodů než ti, kteří ji zodpověděli chybně.

(Rakousko)

Příklad T–5

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, v němž $|AB| \neq |AC|$ a O je střed kružnice ω jemu opsané. Přímka AO protíná kružnici ω v dalším bodě D a přímku BC v bodě E . Kružnice opsaná trojúhelníku CDE protíná přímku CA v dalším bodě P . Přímka PE protíná přímku AB v bodě Q . Rovnoběžka s přímkou PE procházející bodem O protíná výšku trojúhelníku ABC z vrcholu A v bodě F . Dokažte, že $|FP| = |FQ|$.

(Chorvatsko)

Příklad T–6

Nechť ABC je trojúhelník, v němž $|AB| \neq |AC|$. Střed y jeho stran BC, CA, AB označme po řadě K, L, M . Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC , která má střed I , se dotýká strany BC v bodě D . Přímka g procházející středem úsečky ID , která je kolmá k přímce IK , protíná přímku LM v bodě P . Dokažte, že $|\sphericalangle PIA| = 90^\circ$.

(Polsko)

Příklad T-7

Přirozené číslo n nazveme *mozartovským*, právě když v posloupnosti čísel $1, 2, \dots, n$ je každá číslice desítkové soustavy použita v sudém počtu. Dokažte tvrzení:

- a) Každé mozartovské číslo je sudé.
- b) Existuje nekonečně mnoho mozartovských čísel.

(Slovensko)

Příklad T-8

Uvažujme rovnici $a^2 + b^2 + c^2 + n = abc$, kde a, b, c jsou přirozená čísla. Dokažte tvrzení:

- a) Pro $n = 2017$ neexistuje řešení (a, b, c) .
- b) Pro $n = 2016$ je číslo a dělitelné třemi pro každé řešení (a, b, c) .
- c) Pro $n = 2016$ má daná rovnice nekonečně mnoho řešení (a, b, c) .

(Rakousko)

Následující (11.) ročník MEMO se bude konat na základě oficiálního pozvání v roce 2017 v Litvě.



Český tým na 10. MEMO

Vedení českého reprezentačního týmu děkuje přerovské firmě MEOPTA a brněnské firmě Neogenia za jejich sponzorskou pomoc při zajištění jednotného oblečení všech členů reprezentačního družstva pro 10. MEMO.

Jaroslav Švrček

LITERATURA

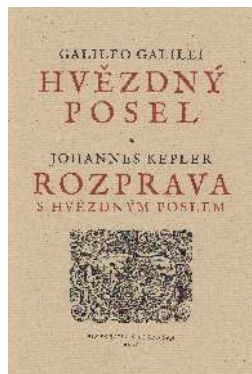
Galileo Galilei: Hvězdný posel

Johannes Kepler:

Rozprava s Hvězdným poslem

Péčí PhDr. A. Hadravové, PhD. a doc. RNDr. P. Hadravy, DrSc. se českému čtenáři dostávají do rukou dva pozoruhodné spisy, mající trvalé místo v dějinách astronomie. Vydalo je nakladatelství Pistorius & Olšanská v Příbrami v roce 2016 (207 s., ISBN 978-80-87855-38-6).

Prvním spisem je *Galileův Hvězdný posel* (*Sidereus nuncius*), shrnující jím provedená pozorování vesmíru dalekohledem z ledna a února 1610. Dílo jím zaslané na dvůr císaře Rudolfa II. se dostalo do rukou *Johannesa Keplera*, jehož zaujalo natolik, že velmi rychle Galileovi odpověděl svojí *Rozpravou s Hvězdným poslem* (*Dissertatio cum Nuncio sidereo*).



Pro lepší přehlednost je překlad formálně členěn číslováním částí podle témat, což čtenáři velmi usnadní orientaci v textu. O čem Galileo píše? Popisuje stavbu dalekohledu, který při pozorování používal, popisuje vzhled povrchu Měsíce i příčinu jeho popelavého svitu, předkládá zjištění, že hvězd je mnohem více, než je

jich vidět pouhým okem. (Při popisu kráteru Albategnius poznamenává, že tento má tvar území Čech lemované prstencem hor.) Poslední část spisu je vlastně pozorovacím deníkem s průběžnými nákresy poloh čtyř Jupiterových měsíců.

Dílo je připísáno toskánskému vévodovi Cosimovi II. Medicejskému, jehož jménem Galileo pojmenoval Jupiterovy měsíce – *Medicejské planety*. Tato skutečnost je zdvořilostní, hlavní význam spis získal tím, že se dostal do Prahy Johan-nesu Keplerovi.

Keplerova *Rozprava* je především oceněním Galileova pojednání. Vnitřní pohnutí k odpovědi nepochybně Kepler měl a navíc ho pobídl i císař Rudolf: „Odvalu mi dodal příkaz nejvyššího císaře Rudolfa II, který si vyžádal moje vyjádření k této věci“, píše.

Kepler nejprve popisuje vlastní snahy o sestavení dalekohledu se dvěma spojnými čočkami. Ustupuje od svého přesvědčení, že přesnost pozorování *Tychona Brahe* nemůže být překonána a uznává, že dalekohled převratným způsobem tuto přesnost může násobit.

V charakteristice nerovností povrchu Měsíce se s Galileem shoduje, má však za to, že na rozdíl od něj jsou tmavé rozsáhlé plochy na Měsíci moře, obdobně jako se jeví oceány na Zemi tmavší než pevnina, a světlé oblasti ukazují měsíční pevninu, zatímco Galileo považoval tmavší oblasti za pevninské.

Pokud jde o Jupiterovy satelity, soudí, že planeta je planeta obydlená a že měsíce k ní patří podobně jako Měsíc k Zemi. V uspořádání systému Jupitera vidí podporu Koperníkova heliocentризmu. I kolem ostatních planet obíhají měsíce, je jen otázkou dalších pozorování, kdy budou objeveny.

Kniha je uvedena základními charakteristikami obou spisů, grafickým zpracováním Galileova pozorování Jupiterových měsíců, zmínkou o velkém odpůrci Galileových objevů *Martinu Horkém* i o ohlasech

na Galileova pozorování. Zajímavá je i stať o norimberském astronomovi *Simonu Mariusovi*, jenž dal galileovským měsícům dnešní názvy.

Českému čtenáři se tak naskytla výborná příležitost prožít u knihy atmosféru, v níž došlo během velmi krátkého času k zásadním astronomickým objevům.

František Jáchim

Stanislav Trávníček:

Pojďme na to s počítačem
(i když nejsme informatici)



S odstupem dvou let od vydání knihy *Pojďme na to s matematikou (a někdy i s počítačem)* renomovaného autora *Stanislava Trávníčka* vyšla v roce 2015 ve Vydavatelství Univerzity Palackého v Olomouci jeho volně navazující publikace nazvaná *Pojďme na to s počítačem (i když nejsme informatici)*.

Autor, který je dlouholetým vysokoškolským učitelem matematiky a didaktiky matematiky s vazbami na informatiku, v ní soustředil řadu zajímavých (i v praxi využitelných) výsledků své dlouhodobé práce zaměřené na racionální využití počítačů. Publikace je přehledně rozčleněna do několika tematicky nezávislých kapitol, které pokrývají širokou oblast elementární matematiky (včetně několika náhledů do některých oblastí matematiky nadstandardní): Říše čísel, Po-

četní operace, Prvočísla, Součet dělitelů, Fibonacciho posloupnosti, Nahlédnutí do geometrie, Kombinatorika, Rozklady čísel, Grafy funkcí a Hry. V každé z nich je formulovááno a řešeno několik více nebo méně známých matematických úloh, jejichž vyřešení na počítači je jednak prakticky využitelné a navíc často poskytuje nebývalé vhledy do příslušné problematiky. V Trávníčkově knize jsou k řešení vytvářeny strukturované programy sestavené jen ze základních příkazů jazyka Pascal prostředky vhodnými i pro amatéry, které se ukázaly jako zcela dostačující a přitom programy pracují velmi efektivně. Uvedený přístup je v dostupné literatuře uplatňován spíše výjimečně.

Uvedená publikace, která je napsána vytříbeným matematickým jazykem, má celkově 112 textových stran. Jako bonus obsahuje elektronickou přílohu na CD, jejímž obsahem je více než 50 programů řešících úlohy formulované ve všech kapitolách, a to jejich zdrojový kód i soubor exe.

Možnosti použití publikace jsou dosti široké. Předně je tu zdůrazněna spjatost výuky matematiky s informatikou na středních školách, což oslovuje učitele matematiky i didaktiky. Programové analýzy, použité algoritmy a zdrojové texty programů jsou zase bohatým materiálem pro informatiky – hledání alternativních programových prostředků, vytváření verzí.

A konečně je tato kniha inspirací a povzbuzením pro všechny ty z nejruznějších oborů, kteří mají nestandardní odborný problém, kde by jim mohlo pomoci počítačové zpracování, aby po nezbytném poučení ochutnali svízele i radosti z tvorby počítačového programu.

Jaroslav Švrček

Keith Devlin: Jazyk matematiky

Kniha Keitha Devlina (344 stran, 110 ilustrací) vyšla v roce 2016 v 2. vydání v nakladatelství Dokořán. Z originálu *Language of mathematics* knihu přeložil Jan Švábenický. Autor se snaží přiblížit zřídka

vým čtenářům podstatu matematiky. To je dost odvážné, neboť, jak se tvrdí v knize, v roce 1900 bylo možno shrnout matematické znalosti do 80 knih, dnes jsou to statisíce. Přesto stojí za to přiblížit širší veřejnosti moderní matematiku.



K. Devlin, profesor na katedře matematiky Stanfordské univerzity, prokázal široké znalosti a nesporný literární i popularizační talent. Kniha je rozdělena do osmi kapitol, předmluvy a úvodu a rejstříku a barevné přílohy. Příjemně mě překvapila forma a vzhled knihy, která je vázaná. Úvod patří právem starověké matematice tedy Pythagorovi, Euklidovi a jeho Základům a prvočísłům.

Samostatné kapitoly patří zakladatelům moderní matematiky Gaussovi a Fermatovi. U něj se zmiňuje o Malé a Velké Fermatově větě. Druhá kapitola je o principech uvažování a důkazech. Tady myslím autor přestřelil, neboť přeceňuje schopnosti čtenářů. Sám jsem učitel matematiky a ani na VŠ jsem neměl základy logiky a vysvětlování autora mi připadá dost náročné. Myslím, že pro širší veřejnost bude těžko stravitelný hlavně způsob výkladu Aristotelovy logiky nebo Booleovy logiky.

V podkapitole o *Kurtu Gödelovi* mohl překladatel uvést, že se tento jeden z nejvýznamnějších světových matematiků 20. stol. narodil v Brně. Za zajímavou pro mě osobně považuji zmínku o matematické

lingvistice, o které jsem dosud téměř nic nevěděl. Zároveň jsem si potvrdil některé postupy, které jsem používal při amatérské analýze časopiseckého textu.

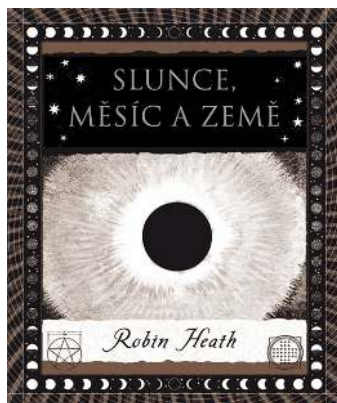
Pěkný je naopak výklad integrálního počtu a součtu nekonečné řady, trochu naivní mi připadá charakteristika inverzní funkce jako funkce, která původní funkci anuluje. Když se autor zmiňuje o limitě a *Karlu Weierstrassovi* a Augustinu Cauchyemu, měl se také zmínit o nejvýznamnějším českém matematikovi *Bernardu Bolzanovi*, který k rozvoji moderní matematiky v dané oblasti významně přispěl.

V další kapitole o geometrii překladatel v podkapitole o projektivní geometrii přeložil pojem, který se v češtině zpravidla překládá termínem dvojpoměr, jako křížový poměr. Širší veřejnost má zde možnost seznámit se s neeukleidovskou geometrií a její historií. V kapitole o teorii grup pak používá pojem polynomiální rovnice, který znám ze školy jako algebraická rovnice.

Nejzajímavější pro mě byla část o topologii, kde kromě zmínky o teorii grafů, je také zmíněna teorie uzlů, kterou jsem do té doby neznal. Poslední dvě kapitoly jsou o teorii pravděpodobnosti a vesmíru po tažmo fyzice. Vzhledem k tomu, že nejsem fyzik, byl pro mě obtížný výklad teorie elektromagnetického pole a teorie relativity. Kniha pomůže zvýšit povědomí širší veřejnosti o matematice u vzdělanější části populace a proto je užitečná. Matematika nám dává oči, kterými můžeme spatřit to, co by našemu zraku zůstalo jinak skryto, píše se na zadní straně obálky knihy. I když autor většinou nejde za hranici středoškolského nebo max. vysokoškolského kurzu matematiky, je kniha určitě užitečná, protože čtenáře seznamuje s historií jednotlivých matematických myšlenek, navíc jsem se řadu věcí z ní dozvěděl, i když mám matematické vzdělání. Na kvalitě knihy se podílel i výborný překlad. Co mně však chybělo, byl seznam použité literatury.

Karel Vašíček

Vzájemné pohyby Slunce, Měsíce a Země a jejich důsledky pro náš život



Dívejte se na hvězdy a uče se z nich!
Albert Einstein

Ačkoliv po celá tisíciletí byli lidé fascinováni a okouzleni nejen noční, ale i denní oblohou, v dnešní úspěchané době se málokdo zastaví, aby se pokochal krásami, které se nám při pohledu vzhůru nabízejí. Pro naše předky byli nebe a země, lidé a bohové, zvířata a rostliny nedílnou součástí jednoho celku a vzájemně na sebe působili. Slunce, Měsíc a hvězdy poskytovaly světlo a teplo, nezbytný předpoklad pro prospívání živých tvorů. Jejich pravidelné pohyby a proměny vedly k tomu, že je lidé začali využívat v běžném každodenním životě k měření času a námořní navigaci – jako hodiny, kalendář či kompas.

Systematická pozorování Slunce a Měsíce jsou zahájena mlhou dávnověku, kdy se věřilo, že především noční obloha dodává smysl a význam veškerému lidskému usilování. Zářezy na kostech starých asi 40 tisíc let znázorňují lunární cykly, a jejich sledováním, jako například úplňků, zatmění a konjunkcí planet, odvozovali starověcí astronomové základy kosmologie (vědního oboru zabývajícího se studiem původu, struktury a vývoje vesmíru, sna-

žícího se odpovědět na takové otázky, jak a kdy se zrodil vesmír, jaký je jeho celkový tvar, z čeho se skládá a jaký bude jeho konec), a to jak číselně, tak i geometricky.

Delfské přísloví „Jak nahoře, tak dole“ naznačuje, že se kosmické vzory odrážejí v pozemském životě a jsou tedy zdrojem informací pro lidský život. Ideálním příkladem tohoto přístupu je Velká pyramida v Gíze (2480 př. n. l.), orientovaná přesně podle světových stran, se šachtami zaměřenými na hvězdy, se základnou a výškou odpovídající „kvadratuře kruhu“ Země a Měsíce.

Staří Sumerové sledovali hvězdné cykly již v období okolo roku 2200 př. n. l. a později zavedli 24hodinový den a kruh o 360 stupních. Tyto starodávne znalosti převzali kolem roku 600 př. n. l. staří Řekové (*Eratosthenes*, *Eudoxos*, *Hipparchos*, *Meton*), poté Římané a po zániku jejich říše (kolem roku 500) pochodeň poznání převzali Arabové. V období počátků renesance se většina nashromážděných vědomostí vrátila zpět do Evropy (*Koperník*, *Galileo*, *Newton*). Od té doby se začala rozvíjet moderní astronomie (základem jejich znalosti je získávání pozorování kvantitativního charakteru a vysvětlování zjištěných jevů pomocí matematických a fyzikálních zákonů), řazená mezi základní přírodní vědy a tvořící součást školní výuky. Přesto většina dnešních lidí neví téměř nic o systému, ve kterém se Slunce, Měsíc a Země vzájemně pohybují, ačkoliv jsme na jeho rytmu naprosto existenčně závislí.

To vše chce trochu napravit a oživit alespoň něco z ducha dávných dob utlá (64 stran) a bohatě ilustrovaná (136 obrázků) knížka „Slunce, Měsíc a Země“, kterou napsal britský spisovatel a vědec na volné noze *Robin Heath*. Tento autor řady knih o archeoastronomii a architektuře prehistorických sídlišť sice vystudoval elektroinženýrství, ale záhy se přeorientoval na astronomii a astrologii, které také vyučuje na Oxfordské letní škole. Překlad *Jana Švábenického* vydalo nakladatelství Dokořán

(Praha 2015, 1. vyd.) v ediční řadě *Per-gamen*, ve které již téměř deset let systematicky mapuje pro českého čtenáře lidské poznání na pomezí vědy a tajemna, graficky atraktivně zpracované ochutnávky velkých témat, které se nebrání čisté spekulaci či mystice.

Ve stále vzrůstajících snahách objevovat, porozumět a řídit na světě úplně vše, se naše současná věda a kultura natolik odchýlila od cesty jednoduchosti a krásy, že nás udivuje a někdy až děsí, když se nějakým způsobem opět projeví. Jedna taková se ukrývá v cyklech Slunce a Měsíce pozorovaných ze Země, která je tak racionální, jednoduchá a elegantní, že není třeba žádného vědeckého prostředníka k jejímu výkladu. Ve 28 krátkých kapitolách doplněných diagramy a dalšími nápaditými vyobrazeními nás autor zavádí do problematiky vzájemných pohybů těchto tří vesmírných těles, tak jak je můžeme pozorovat ze Země. Podrobněji se pak věnuje pohybu Měsíce kolem Země a seznámení s jeho důsledky, tak důležitými pro veškerý život. Dozvíme se, proč dochází k zatměním Slunce a Měsíce, která z nich jsou čtenější a jak složité je zatmění předvídat. Čtenáři se také mohou pokusit sestavit kalendář, který by měl zohledňovat jak sluneční rok, tak i měsíční fáze, měl by mít jednoduché dělení do týdnů, měsíců a ročních období a vyjadřovat aktuální fázi a polohu Měsíce, přílivu, odlivu a zatmění. Závěrem lze nahlédnout do magie čísel skrytých v plánech megalitických kamenných kruhů, které v prehistorických dobách sloužily zřejmě také jako kamenné kalendáře.

K porozumění této určitě pozoruhodné publikace stačí čtenáři znalost základních početních úkonů, kalkulačka a obecné vědomosti zvědavého teenagera. Autor nám v ní neříká, které výklady vesmíru jsou správné a které ne. Navíc, některé otázky podle něho již vůbec nejsou pokládány, o odpovědích ani nemluvě.

Bohumil Tesařík