

Pětiúhelník získaný skládáním papíru

MARTINA ŠTĚPÁNOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V rámci planimetrie se žáci na základní škole učí sestavit některé pravidelné n -úhelníky. Zcela jistě by měli umět eukleidovsky sestavit rovnostranný trojúhelník, čtverec či (kružnici vepsaný) pravidelný šestiúhelník a pravidelný osmiúhelník. Později se rovněž seznámí (většinou bez odůvodnění) s konstrukcí pravidelného pětiúhelníku a desetiúhelníku. V článku ukážeme, jak získat pětiúhelník pouze pomocí skládání čtvercového archu papíru a následného jediného stříhu nůžkami. Rozložené origami na první pohled vypadá jako pětiúhelník pravidelný. Je tomu však skutečně tak? Na otázku odpovíme pomocí výpočtů z oblasti středoškolské analytické geometrie. Nejprve však zakreslíme postupně vzniklé ohyby na papíře. Při tomto úkolu procvičíme svou prostorovou představivost.

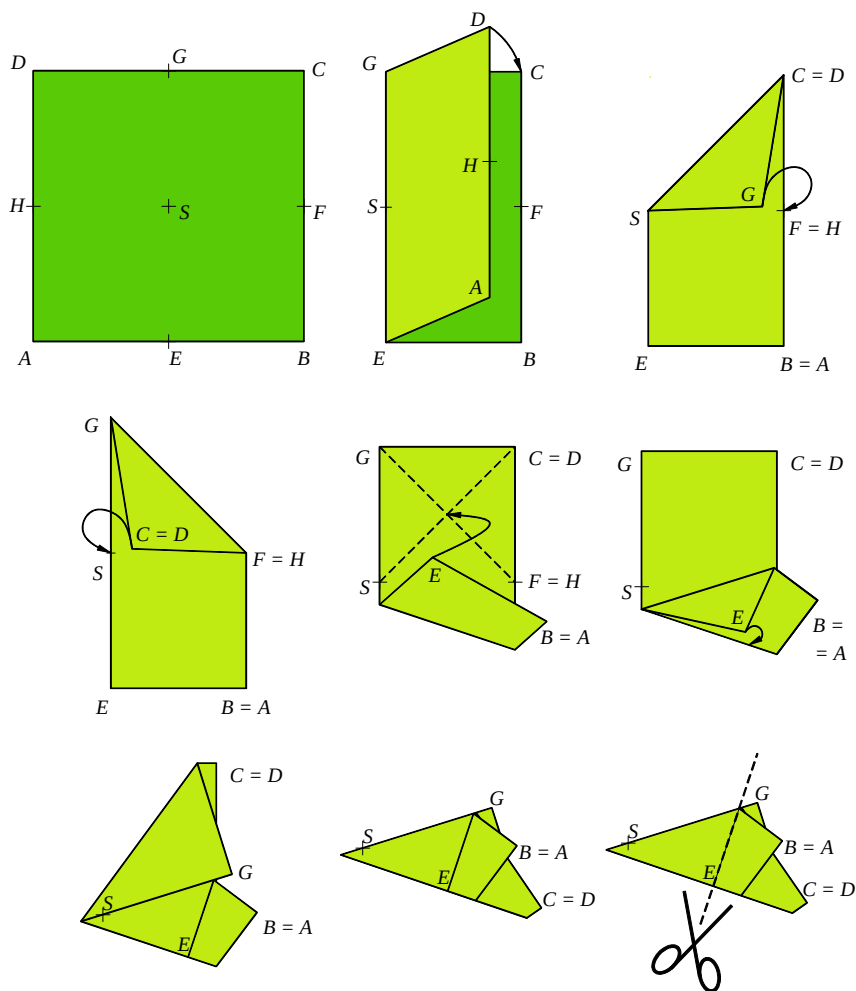
V článku jsou představeny dva algoritmy získání pětiúhelníku. Jsou založeny na postupech zveřejněných ve videích [3] a [4], která jsou volně dostupná na internetu.

Pracovat budeme s archem papíru tvaru čtverce. Budeme přitom předpokládat, že je papír „ideálně tenký“, tj. že skládanky mají i po provedení všech kroků algoritmů nulovou výšku, že na ohyby není nutné počítat s malou částí papíru navíc apod.

Střed čtverce označme S , jeho vrcholy A, B, C, D a středy jeho stran E, F, G, H . Pro zjednodušení vyjadřování nebudeme vždy zcela exaktně rozlišovat konečné útvary od nekonečných (budeme tedy např. mluvit o *ose jisté úsečky* namísto o *úsečce, která leží na ose jisté úsečky*, o *úhlu* namísto *průniku úhlu a oblasti papíru* atd.).

První skládanka

Popíšeme první postup (viz [3]) pro získání pětiúhelníku. Sedm kroků algoritmu je znázorněno na obr. 1, který je zřejmě srozumitelnějším návodem než následující stručný, místy ne zcela exaktní slovní popis.



Obr. 1

- 1 Čtverec přehneme tak, aby jeho strana AD splynula se stranou BC .
 - 2 Bod G ztotožníme s bodem $F = H$ (tj. úsečka GC splyne s úsečkou FC a úsečka GS splyne s úsečkou FS), zvýrazníme místo ohybu a navrátíme zpět do stavu před krokem 2.
 - 3 Bod $C = D$ ztotožníme s bodem S (tj. úsečka CG splyne s úsečkou SG a úsečka CF splyne s úsečkou SF), zvýrazníme místo ohybu a navrátíme zpět do stavu před krokem 3.
 - 4 Bod E ztotožníme s průsečíkem ohybů z kroků 2 a 3.
 - 5 Bod E dále „navrátíme částečně zpět“ tak, aby část původní úsečky EG splynula s částí ohybu z kroku 4.
 - 6 Zbývající část původní úsečky EG ztotožníme s ohybem z kroku 5.
 - 7 Podél tohoto ohybu dále skládanku přehneme „přibližně v polovině“ (vrchní část skládanky složíme pod spodní část).
- ⊕ Skládanku přestříháme podél okraje papíru procházejícího bodem E na dva díly a výsledný útvar nalezneme v části obsahující střed S výchozího čtverce.

Není nutné prozrazovat těm, kteří origami skládají, co má být výsledkem. Před rozbalením ustrížené části je lze nechat hádat, jaký útvar získali.¹

Pokusme se nyní pomocí středoškolských znalostí dokázat, zda pětiúhelník je, či není pravidelný.² Pokud bychom úlohu zadali ve výuce (např. v semináři před maturitou), bylo by jistě zajímavé pozorovat, kterou oblast matematiky jednotliví studenti zvolí. Možná by se někdo snažil dopídit výsledku pomocí různých známých vět a vztahů (Pythagorova věta, Eukleidovy věty o výšce a odvěsně, goniometrické identity apod.), jiný by „vsadil“ na komplexní čísla. Za nejvhodnější považujeme prostředky analytické geometrie. Při jejich využití existují způsoby výpočtů (např. níže uvedené), které vedou k cíli velmi rychle.

Také je vhodné zamyslet se nad základní taktikou dokazování: nejvhodnější bude prověřit shodnost jistých úhlů. Pravidelný pětiúhelník je složen z pěti rovnoramenných trojúhelníků, které mají při hlavním vrcholu úhel o velikosti 72° . Úhel téže velikosti svírají rovněž výšky zmíněných trojúhelníků vedené společným hlavním vrcholem. Pokud by útvar nebyl

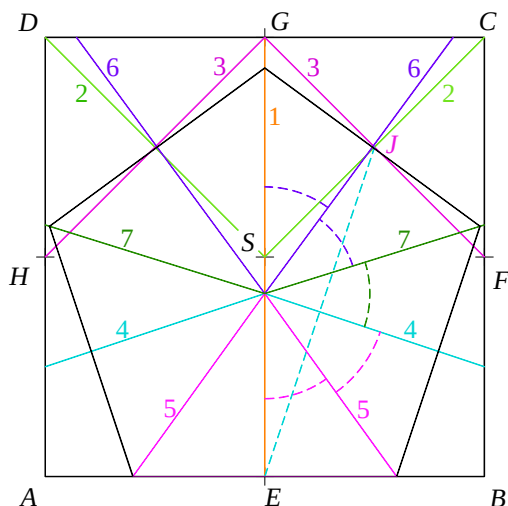
¹Při mém „pokusu“ s dospělými lidmi byly prvními dvěma tipy „hvězdice“ a „osmiúhelník“.

²Pětiúhelník je zcela jistě osově souměrný podle osy EG .

pravidelným pětiúhelníkem, stačilo by tedy k důkazu této vlastnosti nalézt alespoň jeden z uvedených deseti úhlů, jehož velikost není 72° .

Ať tak či onak, stěžejním prvním krokem bude do výchozího čtverce narýsovat úsečky odpovídající ohybům vzniklým v jednotlivých krocích pracovního postupu. Tento úkol bude nejjednodušší, pokud skládanku skutečně vyrobíme a při zakreslování úseček budeme jak pozorovat obr. 1, tak rozložený pětiúhelník. Kdo si chce úlohu ztížit, nebude rozprostřenou skládku využívat.

Výsledek je uveden na obr. 2. Jednotlivé ohyby (úsečky) jsou značeny plnou čarou a jsou k nim připojena čísla značící příslušné kroky. Čárkované jsou značeny pomocné geometrické útvary.



Obr. 2

Připojme k zakresleným úsečkám raději výslovně několik poznámek:³ je-li J průsečík úseček 2 a 3, leží úsečka 4 na ose úsečky EJ ; úsečka 6 neprochází bodem J ; úsečka 6 leží na ose úhlu s rameny 1 a 7, je proto nutné nejprve znázornit úsečku 7 a teprve poté úsečku 6; vrchol pětiúhelníku na úsečce 7 neleží na straně původního čtverce (odstřižená část by tedy neměla být rozstřížena na více dílů).

³Vzhledem k osově souměrnosti pětiúhelníku budeme veškeré popisy, tvrzení apod. vztahovat pouze k jediné (a to pravé) polovině čtverce.

Po zkoušce naší prostorové představivosti procvičme znalosti analytické geometrie. Čtverec umístíme do vhodného kartézského souřadnicového systému tak, aby bod S měl souřadnice $[0; 0]$ a aby bod E měl souřadnice $[0; -1]$.⁴ Průsečík J úseček 2 a 3 má poté souřadnice $[0,5; 0,5]$ a směrový vektor s_{EJ} přímky EJ je (až na nenulový násobek)

$$s_{EJ} = (0,5; 1,5).$$

Směrový vektor s_4 osy úsečky EJ , tj. směrový vektor přímky 4, je tedy (až na nenulový násobek)

$$s_4 = (1,5; -0,5).$$

Vypočítejme nyní odchylku α přímek 1 a 4, tj. velikost úhlu vektorů s_1 a s_4 , kde $s_1 = (0; -1)$ je směrovým vektorem přímky 1:

$$\cos \alpha = \frac{|s_1 \cdot s_4|}{\|s_1\| \cdot \|s_4\|} = \frac{|(0; -1) \cdot (1,5; -0,5)|}{\|(0; -1)\| \cdot \|(1,5; -0,5)\|} = \frac{0,5}{\sqrt{2,5}} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

a proto

$$\alpha \doteq 71^\circ 34'.$$

Z postupu při tvorbě origami plyne, že přímky 1 a 4 jsou výškami dvou z pěti rovnoramenných trojúhelníků, z nichž je složen vystřižený útvar. Tento pětiúhelník proto není pravidelný.

Odchyly přímek 1 a 5, 5 a 4, 4 a 7 jsou shodné, menší ($\doteq 35^\circ 47'$) než „požadovaných“ 36° . Shodné odchyly přímek 7 a 6, 6 a 1 jsou tedy naopak mírně větší než 36° .⁵

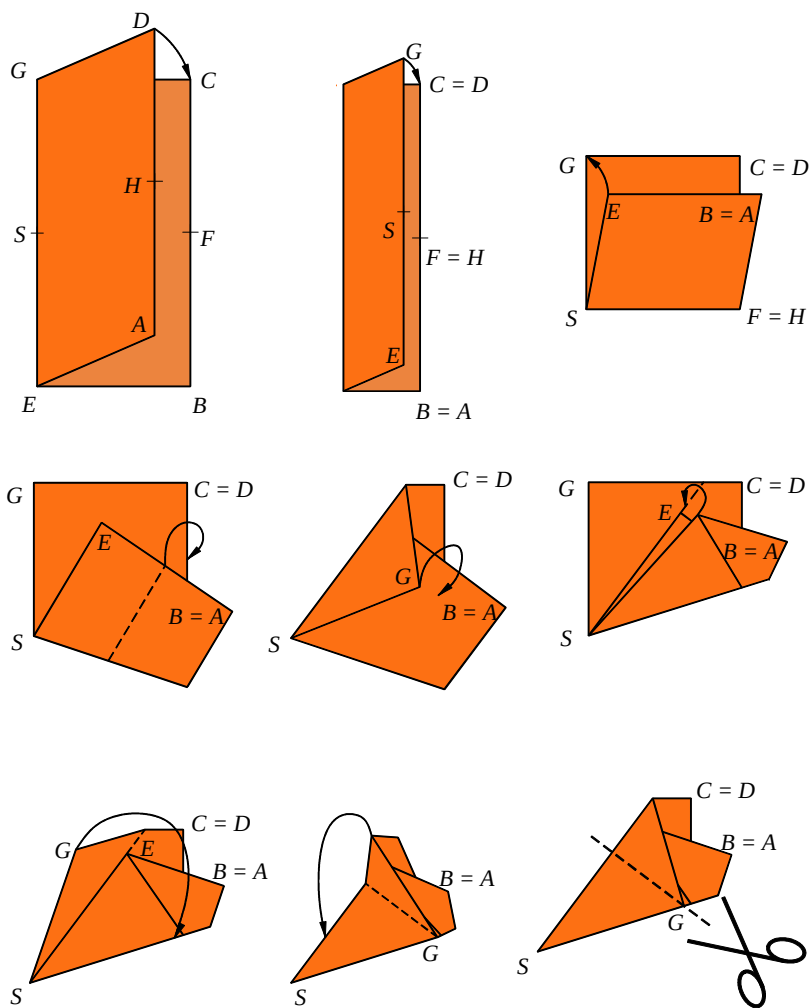
Druhá skládanka

Druhý postup (viz [4]) při vytváření pětiúhelníku lze rozdělit do následujících osmi kroků.⁶ Níže popsany proces opět doporučujeme sledovat současně na jeho grafickém ztvárnění (obr. 3).

⁴Přímka FH , resp. EG tedy splývá s osou x , resp. y souřadnicového systému.

⁵Při kroku 7 proto nedochází k přesnému překrytí dvou úhlů, čehož si však při skládání reálného papíru (a v důsledku omezeného lidského vnímání při sledování obr. 1 či videa [3]) zřejmě nevšimneme.

⁶V článku je algoritmus oproti videu [4] (kvůli snazšímu popisu bez využití kamery) nepodstatně modifikován.

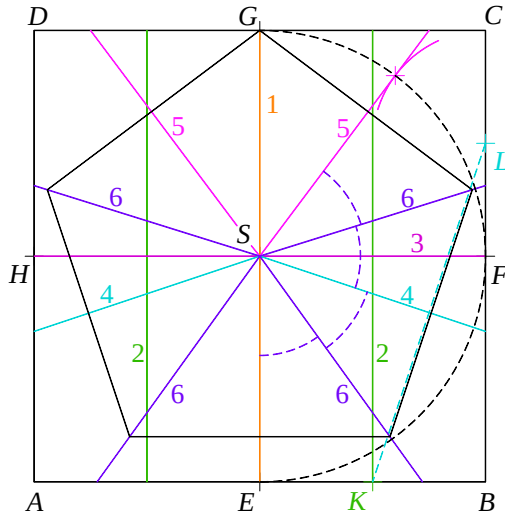


Obr. 3

- 1 Čtverec přehneme tak, aby jeho strana AD splynula se stranou BC .
- 2 Dále s touto stranou dočasně ztotožníme i úsečku EG , zvýrazníme místo ohybu a navrátíme zpět do stavu před krokem 2.
- 3 Obdélník $EBCG$ přeložíme tak, aby úsečka EB byla totožná s úsečkou GC , zvýrazníme místo ohybu a navrátíme zpět do stavu před krokem 3.

- 4 Papír dále složíme tak, aby průsečík ohybu z kroku 2 a úsečky EB byl na úsečce FC a vytvořený ohyb procházel bodem S .
 - 5 Nyní podél úsečky SE přehneme část papíru obsahující bod G , zvýrazníme místo ohybu a navrátíme zpět do stavu před krokem 5.
 - 6 Ohyb (přesněji řečeno část ohybu) z kroku 4 ztotožníme s úsečkou SE .
 - 7 Dále v podstatě zopakujeme krok 5,⁷ ale po složení papíru ho již nenavracíme zpět.
 - 8 Zřejmým přeložením skládanky si vytvoříme ohyb, který prochází bodem G a je kolmý (mimo jiné) na „přikrytou“ úsečku SE . Poté se navrátíme do stavu před krokem 8.
- ⊕ Dle přehybu z kroku 8 skládanku přestříhneme na dvě části. Výsledný pětiúhelník je opět v segmentu obsahujícím bod S .

Zakresleme nejprve do čtverce úsečky reprezentující jednotlivé ohyby. Řešení je na obr. 4.



Obr. 4

K potvrzení či vyvrácení pravidelnosti pětiúhelníku využijeme opět analytickou geometrii. Výchozí čtverec umístíme jako u předchozího origami,

⁷Krok 5 bychom mohli vynechat. Podržíme se však odkazovaného videa, jehož je tento krok součástí. Reálný papír se skutečně lépe a „přesněji“ přehýbá přes menší počet vrstev archu.

tj. $S [0; 0]$, $E [0; -1]$. Z postupu při vytváření skládanky je zřejmé, že čtyři úhly značené na obr. 4 čárkovaně jsou shodné. Stačí tedy vypočítat velikost jakéhokoliv z nich, nebo velikost pátého úhlu, s nímž čtyři předchozí tvoří úhel přímý.

Bod, jenž je průsečíkem ohybu z kroku 2 a úsečky EB , označme K a bod na úsečce FC , se kterým je bod K ztotožněn v kroku 4, označme L . Bod K má souřadnice $[0,5; -1]$, a tedy bod L má souřadnice $[1; 0,5]$.

Přímka 5 (obr. 4) je tečnou z bodu S ke kružnici se středem L a poloměrem 0,5. Rovnice uvedené kružnice je

$$(x - 1)^2 + (y - 0,5)^2 = 0,5^2,$$

parametrická rovnice přímky 5 je⁸

$$\begin{aligned} x &= at \\ y &= t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tečna má s kružnicí jediný společný bod, proto musí mít kvadratická rovnice

$$(at - 1)^2 + (t - 0,5)^2 = 0,5^2$$

jediné řešení (dvojnásobný kořen). Diskriminant D této rovnice s neznámou t musí být tedy roven 0.

Rovnici dále upravíme na ekvivalentní tvar

$$t^2(a^2 + 1) - t(2a + 1) + 1 = 0,$$

z čehož plyne

$$D = (2a + 1)^2 - 4(a^2 + 1) = 0$$

a následně

$$a = 0,75.$$

Směrový vektor s_5 přímky 5 je tudíž $s_5 = (0,75; 1)$.

Vypočítejme odchylku β přímk 1 a 5, neboli velikost úhlu vektorů s_1 a s_5 , kde $s_1 = (0; 1)$ je směrovým vektorem přímky 1:

$$\cos \beta = \frac{|s_1 \cdot s_5|}{\|s_1\| \cdot \|s_5\|} = \frac{|(0; 1) \cdot (0,75; 1)|}{\|(0; 1)\| \cdot \|(0,75; 1)\|} = \frac{1}{1,25} = 0,8,$$

⁸Přímka 5 má směrový vektor $(a, 1)$, kde hodnotu a musíme určit. Volbou čísla 1 ve druhé složce vektoru zároveň vylučujeme druhou tečnu uvedených vlastností, tj. osu x .

a tedy $\beta \doteq 36^\circ 52'$. Protože je papír stříhán kolmo na přímku 5 a současně $\beta \neq 36^\circ$, není pětiúhelník pravidelný.

Čtyři shodné, čárkovaně vyznačené úhly jsou tedy menší než 36° .⁹

Připojme opět několik zřejmých poznámek: ostroúhlý trojúhelník, jehož dvě strany leží na úsečkách 1 a 6 a třetí strana je kolmá na úsečku 5, není rovnoramenný; vzdálenost vrcholu G od středu S je sice 1, ale čtyři ostatní vrcholy jsou ke středu blíže, jak je vidět z půlkružnice narýsované na obr. 4 čárkovanou čarou; odštířená část zůstane opět vcelku.

Dále podotkneme, že pětiúhelníky vytvořené v první a v druhé skládance nejsou totožné. Z pohledu na obr. 2 a obr. 4 je také zřejmé, že jsou jinak umístěny vzhledem k okrajům výchozího archu papíru: strana prvního, resp. druhého pětiúhelníku, leží, resp. neleží, na straně čtverce.

Třetí skládanka

Nakonec přiložme odkaz [5] na video, na němž lze sledovat třetí algoritmus pro vytvoření pětiúhelníku z papíru tvaru čtverce. Zakreslení jednotlivých ohybů do čtverce necháváme na čtenáři. Bude to jediný úkol, u kterého předpokládáme zamyšlení, neboť zjištění, zda alespoň tentokrát dostaneme pětiúhelník pravidelný, je v tomto případě triviální.

Čtenář si rovněž může zkusit nakreslit obrázek znázorňující stavy papíru po jednotlivých krocích algoritmu, tj. analogii obr. 1 či obr. 3. Také zde si prověří svou prostorovou představivost (zvláště pokud se „zřekne“ pohledu na reálnou skládanku) a při přesném rýsování současně procvičí sestrojování obrazů mnohoúhelníků v osově afinitě v rovině (tj. učivo probírané v úvodních hodinách deskriptivní geometrie).

Rovněž ve třetím případě je pětiúhelník ve čtverci umístěn v poloze odlišné od předcházejících. Postup jeho vzniku totiž začíná přehybem papíru nikoli podél úsečky EG , ale podél úsečky AC . Pětiúhelník je tedy osově souměrný dle úhlopříčky původního čtverce.

Závěr

Co říci závěrem? Snad popřát nejen hodně zdaru při znázorňování jednotlivých ohybů a při výpočtech, ale i příjemnou zábavu při tvorbě skládanek, pro kterou lze nadchnout i nejmenší členy rodiny.

Návody na půvabná, často trojrozměrná origami lze najít nejen na internetu, ale i v řadě tištěných publikací prodávaných v běžné síti knih-

⁹Úsečka SG proto po kroku 7 přesně nelícuje s úsečkou 6.

kupectví. Existují rovněž tituly monotematicky koncipované (skládání zvířat, šperků atd.) či určené speciálně pro malé děti. Na straně druhé lze čerpat informace z odborných monografií věnovaných studiu origami po matematické stránce. Z obsáhlých publikací, které se zabývají touto problematikou, jmenujme monografii *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra* [1], kterou napsali Erik Demaine a Joseph O'Rourke, či knihu *Origami Design Secrets: Mathematical Methods for an Ancient Art* [2] od Roberta J. Langa.

Literatura

- [1] Demaine, E. D., O'Rourke, J.: *Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, Madrid, Cape Town, Singapore, São Paulo, 2007.
- [2] Lang, R. J.: *Origami Design Secrets: Mathematical Methods for an Ancient Art*, 2. vydání, A K Peters/CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2011.
- [3] <https://www.youtube.com/watch?v=4kJmJUQVbO0>
- [4] <https://www.youtube.com/watch?v=7pkqGZ5f0es>
- [5] https://www.youtube.com/watch?v=B_JGnazbB1k

Hra Abaku

OLGA KAČENKOVÁ

Základní škola Tuchlovice

Abaku je hra pro 1 až 4, nejčastěji ale 2 hráče, která procvičí výborně základní počtářské dovednosti a schopnost kombinovat. Hrát se dá online, existuje i v deskovém provedení. Její princip je podobný jako u písmenkové hry scrabble. Na herním plánu skládáte z pěti čísel příklad tak, aby vodorovně nebo svisle navazoval na nějaký už vytvořený. Jeden příklad obsahuje vždy jednu početní operaci: sčítání, odčítání, násobení, dělení, druhé a třetí mocniny a druhé a třetí odmocniny přirozených čísel. Tyto početní operace, stejně jako rovnítko si na správných místech pouze „myslíte“, ve hře jsou jen číselné kameny s čísly 0–9. Např. ložená pětice 35237 tak představuje příklad $35 + 2 = 37$. Hráči získávají body podle číselné hodnoty

kamenů použitých k vytvoření příkladů. Na hracím plánu jsou bonusová políčka, která znásobují zisk jednotlivých kamenů či celého příkladu, který byl nově vytvořen a políčkem prochází. Přiložením kamenů v řádku nebo sloupci však může vzniknout i více příkladů, bodový zisk se pak započítává za každý příklad. Např. řada 7298 skrývá příklady $72 : 9 = 8$ i $7 + 2 = 9$. Podrobná pravidla hry můžete nalézt na webových stránkách, například <https://www.hry.cz/hra/abaku>.



Obr. 1

Představme si nyní podobu asi nejčastěji hrané verze – abaku online pro dva. Hrát můžete například na <http://www.duelovky.cz/abaku> – buď si počkáte na soupeře někde ve světě nebo vyzvete kolegu, s nímž jste domluvení, a pošlete si vygenerovaný odkaz. Velkou výhodou online hraní je, že všechny příklady, které vzniknou přiložením vašich kamenů, za vás počítá počítač a leckdy vám tak odhalí příklad, o kterém jste ani netušili, že jste jej vytvořili.

Hra začíná. Pět čísel dole uprostřed obrazovky je vaše aktuální sada kamenů, se kterými můžete hrát. Začínající hráč má ikonku vlevo, druhý z hráčů vpravo. První číslo pod hráčovým jménem ukazuje celkové skóre v rozehrané hře. Číslo u sáčku pod jménem je počet kamenů, které vám ještě zbývá umístit. Nad herním plánkem je počítadlo času. Chýlíte-li se ke konci svého dvacetisekundového limitu pro jedno kolo hry, posledních pět sekund zazní navíc i zvukové odpočítávání. Tmavě modrá pole znásobují zisk za celý příklad $3\times$, světlemodrá $2\times$. Tmavě zelená pole znásobují číslo, které na ně umístíte, $3\times$, světlezelená $2\times$.

Zahajující hráč umísťuje první kombinaci alespoň ze dvou kamenů přes středové pole hracího plánu. Je jedno, zda svisle či vodorovně. Příklady se čtou vždy zleva doprava a shora dolů.



Obr. 2

Jaké příklady se hráči 046644 započítají? $18 - 8 = 10$, $1 * 8 = 8$, $8 : 8 = 1$. Celkový bodový zisk po započtení všech bonusů je 73 bodů.



Obr. 3

Tah hráče v tomto případě skončil odesláním tahu. Po připsání bodů se doplní kameny ze sáčku. Hráč může svůj tah ukončit také odesláním prázdného tahu, vypršením časového limitu nebo výměnou kamenů.

Časem si každý z hráčů vytvoří vlastní oblíbené strategie. Vyplatí se hojně využívat bonusová pole či alespoň znemožnit soupeři, aby je obsadil on. Leckdy je delší příklad obodován méně, než jeden správně přiložený kámen, využívající bonusu. S výhodou užijete znalosti „dobrých řad“, které skrývají několik příkladů zároveň (např. 2464) a rozšíříte-li v dalším kole takovou řadu o „správná čísla“, vynese vám velký bodový zisk (24648).

Pro zajímavost se podívejme na tah našeho hráče, kterým získal 162 bodů v jednom kole:



Obr. 4

Z nabízených kamenů vybral čtyři, které umístil vpravo nahoru (využil dvě bonusová pole).



Obr. 5

Příklady, které se mu bodovaly: $\sqrt{4} = 2$, $86 - 84 = 2$, $8 : 4 = 2$.

Pro žáky základních i středních škol se koná online celostátní soutěž *Liga Abaku* – v letošním školním roce běží již její 4. ročník. Soutěž se koná pod záštitou MŠMT.

Na stránkách *Ligy Abaku* <http://liga.abaku.cz/Home.aspx> doporučuji všem učitelům *Metodiku hry*, kterou zpracovala Mgr. Alena Vávrová. Najdou zde spoustu námětů pro práci v hodinách matematiky. Alena Vávrová je také autorkou knihy *Abaku metodika a didaktika pro učitele ZŠ*, kterou vydalo nakladatelství AL. 21 s. r. o. v roce 2015 a která obsahuje mimo jiné i přílohy využitelné v hodinách matematiky jako pracovní listy. Žáci Aleny Vávrové ze ZŠ Karla Čapka v Praze natočili o abaku zajímavá videa. První z celého seriálu: <https://www.youtube.com/watch?v=24pPgWUVF2E>

Abaku se prezentuje jako nejlepší početní hra v celém vesmíru. Chcete-li u dětí (a nejen dětí) upevnit zábavnou formou počtářské dovednosti, určitě hru vyzkoušejte.

Slovní úlohy a život společnosti

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Je zajímavé a užitečné nahlédnout do minulosti, zda a jaké byly vazby mezi texty slovních úloh v učebnicích matematiky a reálným životem společnosti v jednotlivých historických obdobích. V tomto článku se podíváme do českých škol v Rakousko-Uhersku, které jsou dnešním studentům i učitelům nejméně známé.

Vymezení tématu

Víme, že význam matematiky je především v její schopnosti modelovat reálné situace a problémy a podstatně tak přispívat k jejich řešení. Ve školních podmínkách se s principy této činnosti setkávají žáci při řešení slovních úloh s reálným obsahem.

Každá taková slovní matematická úloha jako celek (tj. včetně textu) má několik stránek, některé si někdy ani neuvědomujeme. Předně je součástí matematiky, což je její aspekt odborný. Dále je součástí matematického vzdělávání, vyučovacího procesu nebo samostatného studia, což je vlastně také výuka, kde však objekt výuky je současně jejím subjektem. Dostá-

váme tak aspekt didaktický. Další hledisko je systémové: Matematická úloha vždy představuje nějaký systém, ve své formulaci definuje prvky tohoto systému, vazby mezi nimi a obvykle i problém, který je třeba v tomto systému vyřešit. Matematická úloha je též jazykovým projevem a literárním textem, neboť přináší souvislou informaci o nějakém dílčím problému matematickém nebo jiném, při jehož řešení se matematika uplatní. V podmínkách školy vystupuje někdy i stránka výchovná, pokud u žáků navozuje smysl pro správné mezilidské vztahy a slušné chování. Nu a konečně slovní matematické úlohy s reálným obsahem vypovídají také o své době, nejen o stavu vědy a techniky, ale i o současné lidské společnosti, o jejím životě a problémech. A právě této stránce se dále ponejvíce věnujeme.

Společenská prestiž (školské) matematiky závisí na její prokázané užitečnosti, ale i na tom, jak reaguje na soudobý svět. Zda a jak se používají ty části matematiky, které jsou v dané době aktuální, zda jsou na soudobé úrovni technické prostředky použité v úlohách a co se říká o životě lidí. Tyto vztahy jsou nejvíce viditelné právě na slovních úlohách s reálným obsahem. Pokud školská matematika zanedbává tato hlediska, pak se oprávněně ozývají hlasy – k čemu ta matematika vůbec je? Tímto se však nijak nedotýkáme slovních úloh historických a úloh zábavných, které často obsahují i reálné absurdnosti, ale jejichž občasné použití výuku okořeňuje.

Reálné slovní úlohy poskytují žákům pohled do reality zprostředkovaný autory těchto úloh, tedy autory matematických učebnic a sbírek úloh. Mnoho autorů úloh (učebnic a sbírek příkladů) při historickém pohledu ctilo zásadu, že jejich úlohy mají žáky informovat o realitě pravdivě, že tedy reálný obsah matematických úloh má v obecné rovině odpovídat skutečností, které žáci vidí kolem sebe, protože jen takové úlohy přispívají žákům k poznávání světa. Tím v „obecné rovině“ je myšleno, že pokud se taková úloha použije při výuce matematiky, má být aktuální její podstata a také, že údaje v ní použité nejsou ve velkém rozporu s aktuální realitou. Avšak nemusí být vhodné, aby v učebnicích a sbírkách byly úlohy s nejnovějšími aktuálními daty krátkodobé platnosti, protože takové úlohy brzy ztrácejí aktuálnost a po čase mohou být až směšné, jako dnes např. úlohy o spoření a úrocích. Aktuální úlohy by měly zařazovat (nebo tradiční úlohy aktualizovat) samotní učitelé.

Mnoho úloh přechází do následujících historických etap, jen si změni kabát (postaví nové kulisy), je naprosto přirozené, že se i dnes setkáváme s úlohami, které řešili žáci už tehdy, ale někdy nevhodný kabát může úlohu zcela pokazit.

Vytvořit novou dobrou a reálnou úlohu (cennou matematicky i didakticky) k historicky novým situacím však není jednoduché. Autor musí prokázat dobrou znalost příslušné reality, aby byla pravdivá, neobsahovala mnoho nových pojmů, a aby se nedotkla některé významné nebo hájené části společnosti, které by téma úlohy mohlo být nemilé právě proto, že by takové úlohy pravdivě odhalovaly některé – řekněme – jevy. To platí ve všech historických obdobích.

Realita má ovšem velmi mnoho rozměrů. Kromě podnětů objektivních je zde život člověka a lidské společnosti, „v užším smyslu“, tj. s čím se člověk ve svém životě setkává a co jeho život ovlivňuje. Člověk se narodí, vyrůstá, bydlí, pracuje, nakupuje, jí, vzdělává se, hledá partnera (partnerku), má rodinu, podniká, hospodaří s penězi, pečuje o zdraví, zajímá se o kulturu, sport a společenský život, cestuje, má koníčky, je ovlivňován stávajícím politickým a ekonomickým systémem, hledá východiska, plánuje, uplatňuje se.

Projdeme-li si texty matematických úloh v českých učebnicích a sbírkách příkladů od počátku jejich výskytu v 19. století, můžeme autenticky sledovat, jak se v nich odráží nebo neodráží stav a proměny společnosti. Pro znázornění života lidí a lidských vztahů si prohlédneme několik úloh v dále citovaných českých matematických učebnicích a sbírkách příkladů (většinou uvádíme jen pro nás podstatnou část textu), které byly za Rakousko-Uherska v používání. V archivu Muzea Komenského v Přerově jsme vybrali 6 knižních titulů, některá témata úloh se vyskytují téměř shodně ve více z nich. Nejde o vědeckou studii, ovšem vybrané učebnice jsou natolik výmluvné, že dále uváděné komentáře lze považovat za docela výstižné.

Slovní úlohy v Rakousko-Uhersku

Začalo vydávání školní matematických učebnic v českém jazyce, vytvářela se česká matematická terminologie. Pro lepší orientaci jsme průzkum rozdělili na pět okruhů, kterými nyní projdeme.

A. Podnikání a finance

[1] (1892)

- Obchodník poslal z Oděsy do Hamburku 4100 čtvrtí pšenice. . .
- Překupník koupil od obchodníka. . .

[2] (1902)

- Výtěžek z uhelných dolů rozděluje se rovnou měrou na 20 akcií patřícím dvěma bratrům, majitelům těchto dolů... (o dědických podílech dětí)

- Lichvář půjčil statkáři 5 000 K na 5 %, avšak hned při výplatě srazil za 4 léta úroky, takže statkáři vyplatil jen 4 000 K. Na kolik ze sta půjčil vlastně lichvář statkáři?

- K jistému podniku se spolčily osoby A, B, C, D (úloha uvádí různé vklady a rozdělení výnosů, v knize je více podobných úloh).

- Statkář najal zahradníka na měsíc s tou podmínkou, že mu bude dávat stravu a 160 h mzdy za každý den pracovní, kterého dne by však zahradník nepracoval, že musí platit 60 h za stravu. Kolik dní pracoval zahradník, vydělal-li za měsíc 34,8 K?

- Kapitalista má na třech místech půjčeny peníze, celkem 22 000 K, a sice na 4 %, 4 ½ % a 5 %. Dostává ročně 976 K úroků... .

- Kdosi koupil dva doly, z nichž jeden nese 1 092 K příjmů...

[3] (1907)

- Pán najal sluhu a slíbil mu ročně 120 K mzdy a nový oblek...

Poznámka. V úlohách vystupují také: velkostatkáři, komisionář, peněžník. Najdeme zde systém úloh s nadpisy, které nám už (zatím?) dnes nic moc neříkají: Nejdůležitější počty občanské a kupecké, cenné papíry; počet lhůtový, počet podílový (spolkový), počte řetězový, mincovní, směnečný, burza; jedná se dále o zisk a ztráty a jsou tu dosti podrobné informace pro vzdělávání obchodníků, včetně základů jednoduchého účetnictví...

[4] (1909)

- V dolech knížete Schwarzenberga na tuhu vytěženo bylo roku 1900 90 020 q tuhy; kterou cenu měla tato tuha, prodal-li se 1 kg průměrně za 11 hal?

- Lichvář půjčil rolníku, který z nepravého studu nechtěl si vypůjčiti v záložně, na směnku 500 K na půl roku, z nichž hned si strhl 30 K na úroky; za kolik procent byla půjčka uzavřena?

Poznámka. V dalších úlohách najdeme obchodníky a velkoobchodníky a opět pojmy z obchodování: tára a vývažek, diskonto, rabat a nádavek, odměna a dohodné, zisk a ztráta, počet řetězový – výměny peněz, míry, váhy a peníze, hra na burze, směnky, rozčet kupní, prodejní a výrobní ceny, počítání cenných papírů, počet lhůtový, počet spolkový, dále úlohy

o spoření, pojištění, též nemocenské a úrazové pojištění při úrazech a smrti dělníků.

[6] (1912)

- Statkář najal dělníka s podmínkou, že mu bude dávat stravu a 16 K mzdy za každý den pracovní, avšak za každý den, kdy by nepracoval, že musí zaplatit 6 K za stravu. Kolik dní pracoval dělník, vydělal-li za měsíc 348 K? (Srovnej s úlohou z [2].)

- Kupec rozmnožoval své jmění ročně o 20 %; měl na počátku 250 000 K, po 4 letech 357 360 K. Kolik ročně utratil?

- Obchodní cestující má slíbenou provizi p %. Jak závisí jeho výdělek na ceně prodaného zboží?

- Kapitalista uložil 50 000 K na 4 %, za tři roky potom uložil 80 000 K na 5 %. Po kolika letech vynesou obě tyto jistiny stejné úroky?

- Kapitalista má své jmění obnášející 150 000 K uloženo jednak ve dvou spořitelnách, v jedné na 4 %, ve druhé na 4 ½ %, jednak v akciích, jež mu nesou 7 %; má pak ze svého kapitálu úhrnný příjem 8 500 K. Po nějaké době naskytne se mu možnost koupit akcie téhož druhu. . .

Poznámka. Dále jsou tu četné úlohy o cenných papírech.

Komentář k okruhu A.

Podmínkám a praxi podnikání je věnována velká pozornost, zejména obchodu a drobnému podnikání. Bez jakéhokoli sociálního hodnocení se setkáváme s běžnými postavami tohoto období – s kapitalisty, statkáři, podnikateli, kupci (ale též s lichváři, před nimiž úlohy tiše varují) a se širokým sortimentem úloh týkajících se podnikatelských a obchodních aktivit těchto osob.

B. Dělníci, jejich práce a život

[2] (1902)

- 35 dělníků kope příkop 8 hodin denně po 24 dní, a pak se v úloze uvažuje o stejné práci 20 dělníků 10 hodin denně.

- V místnosti tovární, v níž pracovalo 9 mužů, 6 žen a 5 dětí přišlo k úrazu 5 osob. Jaká je pravděpodobnost, že to byli sami muži, samé ženy, samé děti?

Poznámka. U podobné úlohy v [6] o deset let později je použita alternativa „žádne dítě“.

[3] (1907)

• 65 v továrně zaměstnaných dělníků žádalo za zvýšení denní mzdy o 20 h; továrník povolil toto zvýšení, propustil však několik dělníků, by se dosavadní denní mzda všech, jež činila 150 K, nezvětšila. Kolik dělníků propustil?

• ... dělníci při $10\frac{1}{2}$ hodinové denní práci...

• Vydělá-li nádeník za $3\frac{3}{4}$ dne $5\frac{1}{4}$ K ...

• V továrně propuštěno bylo 105 dělníků a ostatním snížena byla mzda o 15 %. Tím klesla denní výplata na polovičku. Kolik dělníků zaměstnáno bylo dříve v továrně?

• V továrně zaměstnáno bylo 140 dělníků, již dostávali denně 392 K mzdy. Když bylo méně objednávek, propustil továrník několik dělníků a ostatním snížil mzdu o 15 %, čímž klesla denní výplata na 273 K 70 h. Kolik dělníků propustil?

[4] (1909)

• Horníci domáhali se zvýšení mzdy; místo přídatku snížena jim doba pracovní (šichta) z deseti hodin na devět; kolik procent mzdy vykazoval přídatek touto formou daný?

[5] (1910)

• Dělník Sláma vydělal si v pondělí při skládání cihel 2 K. V úterý si vydělal na nádraží 5 K. Kolik...

• Tovární dělník vydělá si denně 2 K. Oč si vydělá více mistr, platí-li mu továrník 7 K denně?

• Hospodářští dělníci pracují denně 10 hodin. Kolik hodin mají odpočinku?

• Dělnictvo domáhá se pracovní doby, která by se rovnala jedné třetině hodin celého dne; kolikahodinová pracovní doba to jest?

Komentář k okruhu B.

Z úloh vidíme, že nebyla stanovena denní pracovní doba, jsme svědky požadavků na zvýšení mzdy, snižování mzdy a propouštění dělníků, setkáváme se i s dětskou prací v továrnách. Opět běžné a neskrývané problémy dané doby.

C. Život společnosti a sociální záležitosti

Úlohy si všímaly celkového prostředí života společnosti a problémů dalších vrstev obyvatelstva.

[2] (1902)

• Na drahách rakouských jezdí průměrně 1,2 % osob ve třídě I, 9,3 % osob ve třídě II. Jede-li za rok 99 345 000 osob ve třídě III, kolik všech cestujících použilo dráhy toho roku?

[3] (1907)

• Úředník spotřebuje ze svého ročního služného $\frac{5}{8}$ na byt a stravu, $\frac{1}{6}$ na šatstvo a prádlo a $\frac{1}{9}$ na ostatní potřeby. Ušetří 420 K. Kolik jest jeho služné?

[4] (1909)

- Spotřebuje-li rodina na výživu denně 3 K, kolik. . .
- V Jihlavě připadá na 689 obyvatel národnosti německé 181 obyvatel národnosti české; kolik tu žilo Čechů v roce 1900, byli-li 20 680 Němců?
- V Olomouci bylo napočítáno v roce 1900 mezi 19 761 obyvateli 6 194 Čechů; kolik procent obyvatelstva bylo národnosti české?
- Průměrné stáří člověka je v Rakousko-Uhersku 30 roku, ve Španělsku 31 roků, ve Francii 34 roky, a v Rusku 29,6 roku. . .

[5] (1910)

• U nás mají chudí lidé každé úterý v týdnu dovoleno nosit si suché roští z lesa. Maminka donesla v úterý ráno jednu nůši a odpoledne čtyři. . .

Poznámka. V této knize je v sérii jednoduchých úloh podán naprosto ojedinělý obrázek pestrosti společnosti, což muselo být pro tehdejší žáky velmi informativní; vystupují zde: pan lesník, pan revírník, hajný, drvař, starosta, rolník, drůbežnice, domkář, hospodář, selka, šafářka, včelař, povozník, vozka, posluha, služka, prادلena, čeledín, kupec, obchodník, hokynář, podomní obchodnice, překupnice, pan inženýr, lékař, správce velkostatku, stavitel, pan účetní, úředník, topič na dráze, stolař, stolařský pomocník, mistr krejčovský, krejčí, švadlena, sklenář, pan nadučitel, pan učitel, paní učitelová, slečna učitelka, slečna ručních prací, školník, městský strážník, obecní strážník, pekař, pekařský učeň, ovocnář, zelinářka, zelinář, řezník, výčepník, hostinská, učeň, tovaryš, obuvník, kolář, perleťář, zemědělský dělník, tovární dělník, havíř, hutník, malíř, zámečník, tesařský mistr, papírník, knihař, mlynářka, mletci, hrnčír, kloboučník, krupař, mlékař, mlékařka, máslařka, výměnkář, trafikant, strojník, kovář, zedník, majitelka pletacího stroje, výrobce sodovek, rekruti, vojín, . . .

Komentář k okruhu C.

Vidíme, že úlohy si všímají širokého sortimentu problémů různých vrstev obyvatelstva. Je zvláštní, že o rolnících je úloh poměrně málo a nedávají obrázek o jejich životě a problémech.

D. Státní záležitosti

[2] (1902)

- Státní rozpočet v naší říši vykazoval roku 1900 celkem potřebu 1 585 403 933 K.
- Stát potřebuje na mimořádné vydání 10 milionů K. K účelu tomuto vypíše se půjčka. . .

[4] (1909)

- Císař František Josef I. narodil se 18. srpna 1830 v Schönbrunně u Vídně; jak byl starý dne 2. prosince r. 1908, kdy slavil 60. jubileum své vlády?
- Úlohy na věk: J. Dobrovský, K. Havlíček, P. Diviš, B. Němcová, J. Jungmann, . . .

Komentář k okruhu D.

Je pozoruhodné, že v úlohách se vyskytují i význační čeští vlastenci, aniž by rakouské úřady něco namítaly.

E. Dobročinnost

[1] (1892)

- Kdosi chtěl své peníze dáti chudým žákům vyznamenaným. Kdyby dal každému 3 dukáty, bylo by se mu dvou dukátů nedostávalo. Kdyby dal každému 2 dukáty, bylo by mu 5 dukátů zbylo. Kolik mělo být podílených a kolik dukátů chtěl rozdat?

[2] (1902)

- Lidumil odkázal chudým v obci 1000 K, na jednotlivce připadlo 12.5 K, 4 nedostali nic. Kolik chudých je v obci?

[3] (1907)

- Lidumil chce peníze, které má při sobě, rozdat chudým. Kdyby dal každému po třech dvacetihaléřích, nedostávaly by se mu dva dvacetihaléře. Kdyby dal každému po dvou dvacetihaléřích, zbylo by mu 6 dvacetihaléřů. Kolik jest chudých?

- Boháč, jenž neměl příbuzných, odkázal ze svého jmění 22 ½ % chudým, 30 % sirotčinci, 20 % na vodovod rodného města, 16 % příteli a zbytek v obnosu 7820 K sluhům. Které bylo jeho jmění?

[4] (1909)

- Bohatý bezdětný muž odkázal ze svého jmění 190 209 K poslední vůli...

Komentář k okruhu E.

Tyto ojedinělé úlohy se tematicky poněkud vymykají ostatním, ale patrně patří do kontextu doby. S odstupem 100 let nelze bez hlubšího poznání historie posoudit, zda a jak často takové situace nastávaly nebo šlo jen o jistý popud směrem k bohatým lidem.

Závěrečný komentář.

Autoři českých učebnic za Rakousko-Uherska v mnoha úlohách reagovali na současný život a jeho problémy. Jsou tu boháči, kteří mohou kupovat doly, kapitalisté, kteří svůj kapitál používají na další zisky, statkáři, obchodníci se svými starostmi, ale na druhé straně drobní řemeslníci a pak dělníci s jejich pracovními podmínkami a propouštěním z práce, kteří usilují o zkrácení pracovní doby a o zvýšení mezd, vidíme tu i reakce zaměstnavatelů (úlohy nikomu nestraní). Nezakrývají se ani některé záporné jevy, jako je činnost lichvářů, práce dětí, pracovní úrazy. Můžeme soudit, že v úlohách je život (jeho vybrané části) popisován tak, jak jej žáci patrně viděli kolem sebe. Znalec historie Rakousko-Uherska by mohl dodat, která témata nebyla připomenuta.

Pohledy do historie slovních matematických úloh jsou jednak zajímavé a jednak jsou pro nás jedním z podnětů k zamyšlení, zda a jak může dnes matematická úloha navázat v tomto ohledu spojení se současným životem a světem.

Autorova poznámka o historii jeho kontaktu s tématem článku.

Matematizací reálných situací jsem se teoreticky i prakticky zabýval desítky let. V průběhu 90. let jsem zadal několik diplomových prací, v nichž měli diplomanti vyhodnocovat slovní úlohy v jednotlivých historických etapách po stránce matematické, didaktické (typické metody a úlohy) a nácviu matematizace reálných situací a měli si všimnout i souvislosti svých témat s příslušnou současností od let, co začaly vycházet české učebnice matematiky (bylo dohodnuto využívání pracovního archivu přerovského Mu-

zea Komenského a jeho knižního fondu). Tak bylo diplomovými pracemi zpracováno několik témat, zejména: doprava a pohyb, rozvoj vědy a techniky, výrobní činnosti, rodina a škola, aktivity volného času (sport a hry), příroda (zeměpis, nebeská tělesa), ekonomická oblast (pojišťovnictví), zemědělství (vč. ekologie). Úmyslně jsem nepožadoval hodnocení pohledu na život člověka ve společnosti, který je dosti citlivý a vyžaduje větší životní zkušenosti. S odstupem času jsem se mu věnoval sám a podrobně prošel archiv uvedeného muzea. S pracovní prezentací jsem vystoupil na semináři Katedry algebry a geometrie PřF UP s tématem „Matematika v životě člověka“ (2014) a o rok později „Život člověka v matematice“, jehož část je podkladem tohoto článku.

Literatura

- [1] Taftl, E.: Algebra, Vyšším třídám středních škol českých. JČM, Praha 1892.
- [2] Hromádko, F. – Strnad, A.: Sbírka úloh z algebry pro vyšší třídy středních škol. 6. upravené vydání, JČM, Praha, 1902.
- [3] Domin, K.: Aritmetika v úlohách pro ústavy učitelské. 3. vyd., Karel Šolc, Kutná Hora, 1907.
- [4] Fryček, L.: Počtářství. Na českých školách měšťanských v úlohách ku potřebě všech tříd škol měšťanských. Karel Šolc, Kutná Hora, 1909.
- [5] Koerbler, J.: Pamětné počítání v užitých příkladech s počtářskými zábavami. Alois Šašek, Velké Meziříčí, 1910.
- [6] Bydžovský, B. – Vojtěch, J.: Sbírka úloh z matematiky, pro vyšší třídy středních škol. JČM, Praha, 1912.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 233 a 234 můžete zaslat nejpozději do 1. 6. 2017 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz.

Úloha 233

Dokažte, že desítkový zápis nekonečně mnoha přirozených mocnin čísla 4 začíná číslicí 9.

Jacek Uryga & Pavel Calábek

Úloha 234

Na stranách AC a BC rovnostranného trojúhelníku ABC leží po řadě body K a L tak, že čtyřúhelníku $ABLK$ lze opsat kružnici. Poloměr této kružnice je $\sqrt{7}$ krát větší než poloměr kružnice opsané trojúhelníku CKL . Určete poměr, v němž dělí body K a L strany AC a BC .

Jaroslav Zhouf

Dále uvádíme řešení úloh 229 a 230, jejichž zadání byla zveřejněna v pátem čísle minulého ročníku našeho časopisu.

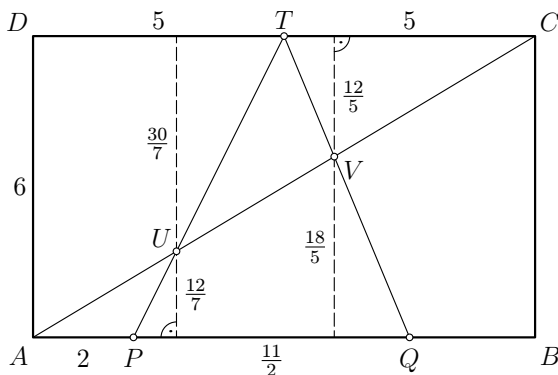
Úloha 229

Je dán obdélník $ABCD$ se stranami délek $|AB| = 10$ a $|BC| = 6$. Pro vnitřní body P, Q strany AB platí $|AB| = 5|AP| = 4|QB|$. Označme T střed strany CD a U, V průsečíky úhlopříčky AC s úsečkami PT a QT . Určete poměr obsahů trojúhelníků UVT a ACD .

Jozef Mészáros

Řešení podle Antona Hnátha. Podle zadání platí $|AP| = 2$, $|AQ| = \frac{15}{2}$, $|CT| = |DT| = 5$. Snadno určíme obsah trojúhelníku ACD , platí

$$S_{ACD} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 6 = 30.$$



Ze shodnosti střídavých úhlů UAP a UCT resp. vrcholových úhlů AUP a CUT plyne, že trojúhelníky APU a CUT jsou podobné s koeficientem podobnosti

$$|AP| : |CT| = 2 : 5,$$

jejich výšky ke stranám AP a CT jsou tedy v témže poměru. Snadno dopočítáme, že vzdálenost bodu U od přímky AP je $\frac{12}{7}$ (a bodu U od přímky CT je $\frac{30}{7}$). Obsah trojúhelníku APU tak je

$$S_{APU} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{12}{7} = \frac{12}{7}.$$

Analogicky zjistíme, že jsou podobné také trojúhelníky AVQ a CVT s koeficientem podobnosti

$$|AQ| : |CT| = \frac{15}{2} : 5 = 3 : 2.$$

Velikost výšky trojúhelníku CVT na stranu CT tak je $\frac{12}{5}$ a pro jeho obsah platí

$$S_{CVT} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{12}{5} = 6.$$

(Velikost výšky trojúhelníku AVC na stranu CT je $\frac{18}{5}$.)

Obsah čtyřúhelníku $AUTD$ spočteme jako rozdíl obsahů lichoběžníku $APTD$ a trojúhelníku APU , platí

$$S_{AUTD} = S_{APTD} - S_{APU} = \frac{1}{2} \cdot (2 + 5) \cdot 6 - \frac{12}{7} = \frac{135}{7}.$$

Pro obsah trojúhelníku UVT tak platí

$$S_{UVT} = S_{ACD} - S_{AUTD} - S_{CVT} = 30 - \frac{135}{7} - 6 = \frac{33}{7}.$$

Nyní snadno dopočteme hledaný poměr obsahů trojúhelníků UVT a ACD , platí

$$S_{UVT} : S_{ACD} = \frac{33}{7} : 30 = 11 : 70.$$

Správná řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan a *František Jáchim* z Volyně. Neúplné řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy.

Úloha 230

Adámek dostal k Vánocům 2015 (správně seřizené, přesně jdoucí) mechanické hodinky s ukazatelem data 1–31. Vždy o půlnoci se číslo dne zvětší o 1, nebo číslo 31 přejde na 1. V březnu 2016 si Adámek všiml, že datum na hodinkách se neshoduje se skutečným číslem dne. Zjistěte den, měsíc a rok, kdy by opět poprvé došlo ke shodě, pokud by Adámek jako dosud data neseřizoval. Jak by se výsledek změnil, pokud by Adámek dostal hodinky o Vánocích 2014? Najděte racionální způsob výpočtu.

Stanislav Trávníček

Řešení podle Antona Hnátha. Do následující tabulky zapišme zpoždění (ve dnech), o jaké se zvětší zpoždění na ukazateli data 1. den následující po měsíci, který nemá 31 dní.

	Nepřestupný rok	Přestupný rok
1. března	3	2
1. května	1	1
1. července	1	1
1. října	1	1
1. prosince	1	1
celkem	7	6

Pokud Adam dostal hodiny na Vánoce 2015, v březnu 2016 (přestupný rok) bude zpoždění 2 dny. Datum na hodinkách bude správné, až bude zpoždění na ukazateli data násobkem 31. Za roky 2016 (přestupný), 2017, 2018, 2019 bude zpoždění $6 + 7 + 7 + 7 = 27$ dnů. V přestupném roce 2020 nastane zpoždění právě 31 dnů od 1. července.

Pokud Adam dostal hodiny na Vánoce 2014, v březnu 2016 (přestupný rok) bude zpoždění 9 dnů. Za roky 2015, 2016 (přestupný), 2017, 2018 bude zpoždění opět $7 + 6 + 7 + 7 = 27$ dnů. V roce 2019 nastane zpoždění právě 31 dnů od 1. května.

Pokud Adámek dostal hodinky na Vánoce 2015, poprvé uvidí správné datum 1. července 2020, v případě Vánoc 2014 to bude již 1. května 2019.

Správná řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan a *Karol Gajdoš* z Trnavy.

Pavel Calábek

Komety ve výuce fyziky na středních školách

VLADIMÍR ŠTEFL

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

Komety jsou zvláštní kosmická tělesa ze sluneční soustavy, vyznačující se rychlým pohybem po hvězdné obloze a znatelnými změnami vzhledu. I při sledování pouhým okem proto vždy vyvolávaly velkou pozornost. Dostaly do vínku unikátní schopnost z relativně malých jader o rozměrech řádově kilometrů a hmotnostech zhruba 10^{13} – 10^{15} kg vytvářet atmosféry a následně ohony, dosahující svou velikostí až 10^7 km. Příčinou jejich vzniku je Slunce, které zahřívá jádra komet, kolem nichž vznikají řídké atmosféry – *komy* o poloměrech asi 10^4 km. Při pohybu směrem ke Slunci se rozvíjí postupně ohony, s úhlovou velikostí až několik desítek stupňů obloukové míry. Atraktivita a určité záhadnosti popsanych jevů je vhodné využít při výkladu problematiky ve výuce fyziky. Právě ona je klíčem a prostředkem k pochopení pohybu komet, jejich fyzikálních a chemických vlastností jakož i vzniku a orientaci ohonů.

Proč jsou poznatky o kometách důležité? Materiál jejich jader je nejméně přeměněným vzorkem „původní pralátky“, z které vznikla sluneční soustava. Poskytuje tak klíčové informace o chemických a fyzikálních vlastnostech z vnější části sluneční soustavy, kde se za velmi nízkých teplot před 4,6 miliardami let komety zformovaly. Chemické složení látky, z kterého jsou kometární jádra složena, získáváme z rozboru jejich spekter. Ta se při přibližování ke Slunci v důsledku nárůstu teploty mění, což v článku podrobně vysvětlíme. Současně odpovíme na žáky nejčastěji kladené otázky:

- Které gravitační a negravitační síly ovlivňují pohyb komet?
- Podle kterých zákonů a po jakých drahách se komety pohybují?

- Proč u komet dochází často ke změnám dráhových elementů, co je důvodem?
- Kde se nachází zdroj komet, jaký mechanismus vyvolává vychýlení z okraje sluneční soustavy na jejich dráhu do vnitřní části?
- Co je příčinou vzniku ohonu, z čeho je složen, mají ho všechny komety?
- Jak se mění jasnost komet při přibližování ke Slunci?
- Jaká je stavba komet, kde je uložena jejich největší hmotnost?
- Co je zdrojem energie záření komet?

U žáků se setkáváme s nesprávnými představami o kometách a jsou částečně shrnuty například v [1]. Uvedeme vybrané typické miskoncepce:

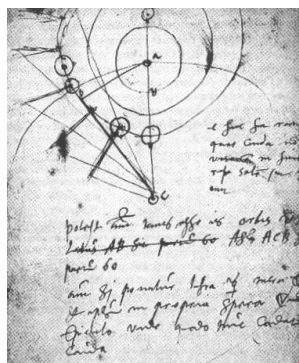
Ohony komet vytvářejí plyny ze startujících raket (novodobý návrat k Aristotelovské interpretaci polohy komet v atmosféře Země).

Při přiblížení komet ke Slunci začnou hořet plyny v ohonech.

Všechny komety musejí mít ohon, který se vždy táhne za nimi.

Komety nepatří do sluneční soustavy.

Přejděme k výkladu, v němž nejprve zmíníme historii. Důležitým mezníkem pro pochopení podstaty komet a prokázání jejich polohy v oblasti nad Měsícem bylo sledování jasné komety z konce roku 1577 s ohonem o délce až 20° . Na obr. 1 je skica komety, kterou vytvořil *Tycho Brahe* (1546–1601). Autor provedl porovnání vlastních pozorování s jinými na různých místech Evropy mezi listopadem 1577 a lednem 1578. Zjistil, že kometa ve shodném čase se vyznačovala stejnou polohou vzhledem ke hvězdám, tedy nenalezl žádnou znatelnou paralaxu. Přesněji konstatoval, že paralaxa komety není větší než $15'$. Na základě přesných pozorování a matematických výpočtů Tycho Brahe ve spisu [2] prokázal, že se nacházela za drahou Měsíce.



Obr. 1

Problematiku pohybu komety ve sluneční soustavě začneme dynamickou rovnicí, která vyjadřuje zrychlení komety, odpovídající působení více těles s rozšířením o negravitační vlivy, viz například [3]

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM_s}{r^3} \mathbf{r} - \sum_{i=1}^8 \frac{GM_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) + \mathbf{a}_{\text{ngr}},$$

kde $\mathbf{r}$ respektive $\mathbf{r}_i$ označují polohové vektory komety a planet v souřadné soustavě, v jejímž počátku je Slunce, M_s a M_i jsou hmotnosti Slunce a planet, $\mathbf{a}_{\text{ngr}}$ je zrychlení negravitačního původu vyvolané Jarkovského efektem či výtrysky částic. Prvně uvedený jev způsobuje změnu rychlosti pohybu a dráhy komety v důsledku zpožděného infračerveného vyzařování fotonů z povrchu jádra na neozářené straně poté, co byl na ozářené straně zahřát Sluncem. Při prográdní rotaci jádra (ve stejném smyslu jako obíhá kolem Slunce) dochází ke zrychlování pohybu, při retrográdní rotaci ke zpomalování. Druhým efektem je prudké uvolňování částic plynů respektive prachu v blízkosti perihélia drah, vznik výtrysků, které podle svého směru zrychlují či zpomalují pohyb jádra v důsledku platnosti principu akce a reakce. Struktury výtrysků lze na snímcích pozorovat až do vzdáleností tisíce km od jádra.

Fyzikální studium drah komet začal již *Isaac Newton* (1643–1727). Konkrétně zkoumal tvar křivek, po kterých se pohybují tělesa (komety) kolem nehybného středu (Slunce) při závislosti $F \sim 1/r^2$. Řešení problému v třetí knize *Principií* [4] rozšířil o interpretaci pohybu po kuželosečkách kolem centrálního tělesa a doplnil u třetího Keplerova zákona hmotnosti obíhajících těles. Newton potvrdil, že gravitační síla je přímo úměrná hmotnostem a nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti obou těles. Po překonání nesprávných představ o parabolických drahách komet dospěl k závěru, že podobně jako planety obíhají kolem Slunce po eliptických drahách s velkou výstředností.

Jde o nejjednodušší a nejnázornější situaci, obvykle připomínanou ve středoškolských učebnicích. Hovoříme o řešení tzv. problému dvou těles, kdy působící přitažlivá síla jakož i gravitační potenciální energie jsou závislé pouze na vzdálenosti od centrálního tělesa. Skalární veličina energie je pro žáky srozumitelná, a proto, jak je navrhováno např. v [5], při popisu pohybu komety budeme vycházet ze zákona zachování celkové mechanické energie. Je součtem kinetické a potenciální energie $E_c = E_k + E_p$. Pro

eliptické dráhy platí

$$\frac{mv^2}{2} - G\frac{mM}{r} = -G\frac{mM}{2a}, \quad (1)$$

kde m je hmotnost komety, M hmotnost Slunce ($M \doteq 1,99 \cdot 10^{30}$ kg), r je měnící se vzdálenost komety od Slunce a v její okamžitá rychlost. Platí pro ni vztah

$$v = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}. \quad (2)$$

Je tedy nenulová a proměnlivá, závislá na velikosti velké poloosy a . Rychlost dosahuje maximální hodnoty při největším silovém působení Slunce, tedy v perihéliu.

Aplikujeme zákon zachování celkové mechanické energie na případ Halleyovy komety ($m = 3 \cdot 10^{14}$ kg), budeme dosazovat do vztahů pro jednotlivé energie a do rovnice (1) pro případ perihélia $r = 0,587$ au a rychlosti $v = 54,6 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, a afélia $r = 35,079$ au a rychlosti $v = 0,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Připomínáme, že rychlost je počítána podle vztahu (2), kde $a = 17,834$ au. Z vypočítaných hodnot vytvoříme tabulku

	perihélium	afélium
E_k	$4,47 \cdot 10^{23} \text{ J}$	$1,22 \cdot 10^{20} \text{ J}$
E_p	$-4,54 \cdot 10^{23} \text{ J}$	$-7,58 \cdot 10^{21} \text{ J}$
E_c	$-7,00 \cdot 10^{21} \text{ J}$	$-7,46 \cdot 10^{21} \text{ J}$

Podle očekávání je maximální kinetická energie komety v perihéliu a minimální v aféliu. Gravitační potenciální energie je nulová v nekonečnu, větší zápornou hodnotu dosahuje v perihéliu. Úplný číselný souhlas velikostí energií nelze očekávat, dosud není úplně jistá hodnota hmotnosti Halleyovy komety a také se projevují nepřesnosti vyplývající ze zaokrouhlování.

Komety, tělesa s velmi malými hmotnostmi ve srovnání s planetami, jsou podrobovány velkým poruchovým silám, zejména pokud procházejí oblastí tzv. aktivit u velkých planet, jejichž poloměr činí v případě Jupiteru přibližně 0,322 au, u Saturnu 0,365 au. Výsledkem je změna dráhových elementů (pro žáky na středoškolské úrovni lze zmínit srozumitelnou velikost velké poloosy a oběžnou dobu).

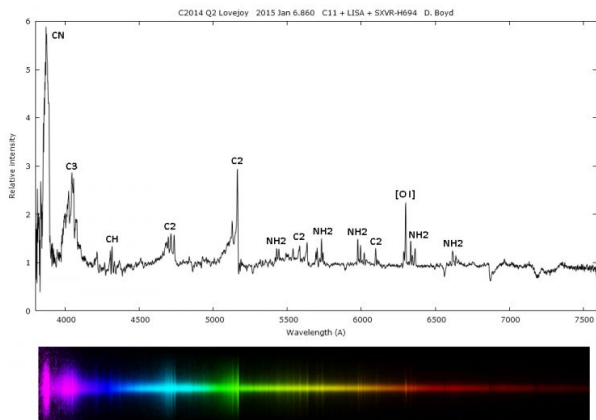
Velmi podrobně byl zkoumán pohyb známé Halleyovy komety, nazvané na počest *Edmonda Halleyho* (1656–1742), který prokázal její periodický charakter a předpověděl návrat v roce 1758. Jeho přesný výpočet *Alexisem Claudem Clairautem* (1713–1765) [6], byl úspěšným potvrzením zákona všeobecné gravitace. Clairaut ještě nepoužil k řešení problému tří těles diferenciální rovnice, viz detailní rozbor v [7]. Přesto přesvědčivě vyložil zpoždování návratu komety, objasnil, že příčinou je poruchové působení Jupiteru a Saturnu. Jak bylo propočítáno, vlivem Jupiteru se kometa zdržela při návratu k Slunci o 518 dnů, Saturnu o 100 dnů. Předpověděl průchod perihéliem na 13. dubna 1759, ve skutečnosti kometa jím prošla 13. března 1759. Poslední návrat ke Slunci rozebereme podrobněji v další části článku.

Zdrojem převážné většiny krátkoperiodických komet obíhajících po eliptických drahách je Kuiperův pás, rozložený ve vzdálenosti 35–50 au od Slunce. Původ parabolických a hyperbolických komet klademe do Oortova mračna nacházejícího se vně sluneční soustavy, zhruba ve vzdálenosti asi 50 000 au až 200 000 au.

Při přibližování komet ke Slunci narůstá teplota jádra, začínají se uvolňovat z povrchových vrstev atomy a molekuly, dochází k jejich excitaci, deexcitaci a dalším fyzikálním procesům, což se promítá do jejich spekter. Jsou rozdílná v závislosti na vzdálenosti od Slunce. V intervalu vzdáleností zhruba 11–3 au jsou spektra spojitá, neboť fotonové a korpuskulární záření je málo intenzivní a nevyvolá vznik emisního spektra. Spojité spektrum podobné Slunci má původ v odrazu slunečního spektra od prachových částic nebo v rozptylu na víceatomových molekulách.

Ve vzdálenosti 3 au od Slunce se ve spektrech kom objevují především emisní pásy kyanu CN na vlnové délce $\lambda = 388,3$ nm. Podstatu jejich vzniku vyložil *Polidore Ferdinand Swing* (1906–1983) roku 1941 v [8]. Kvanta slunečního záření o původních vlnových délkách z ultrafialového oboru excitují molekuly, které je převyzáří s větší vlnovou délkou, zpravidla ve viditelném oboru. Proces se nazývá rezonanční fluorescence.

Molekuly C_3 , NH_2 složené ze tří atomů pozorujeme při klesající vzdálenosti od Slunce od 2 au ve spektrech komet. Od vzdálenosti zhruba 1,8 au je ve spektru zjišťován tzv. *Swanův pás* C_2 , nazvaný na počest objevitele *Josepha Wilsona Swana* (1828–1914), tvořený emisními čarami ve viditelné oblasti (obr. 2). Přispívají nejvýrazněji k celkové jasnosti komety, neboť lidské oko je nejvíce citlivé v noci prostřednictvím tyčinek (šedo-černé vidění) v modrozelené oblasti spektra v okolí $\lambda_{\max} = 510$ nm.



Obr. 2

Ve spektrech kom sledujeme emisní radikály OH, NH, CH na vzdálenosti 1,5 au od Slunce. Od této a menší vzdálenosti se projevuje již i záření kometárních ohonů, např. pozorujeme CO^+ , N_2^+ , CO_2^+ , H_2O^+ . Samotná koma v uvedené heliocentrické vzdálenosti má parabolický tvar, její maximální rozměr je přibližně při 0,9–1,6 au.

Se zmenšováním heliocentrické vzdálenosti intenzita molekulárních pásů narůstá. Od vzdálenosti 0,7 au od Slunce pozorujeme v jejich spektrech kovy, sodíkový dublet, při ještě menších vzdálenostech Fe, Ni, Cr, V, Cu.

Zpětně lze z pozorované hvězdné velikosti komety určit počet N vyzařujících molekul uhlíku v atmosféře komety. Pro vzdálenost od Slunce 1 au platí vztah (výpočet podle [9])

$$N = \frac{10^{-0,4(m_k - m_1)} \Delta^2 r^2}{1,37 \cdot 10^{-38} f(C_2)},$$

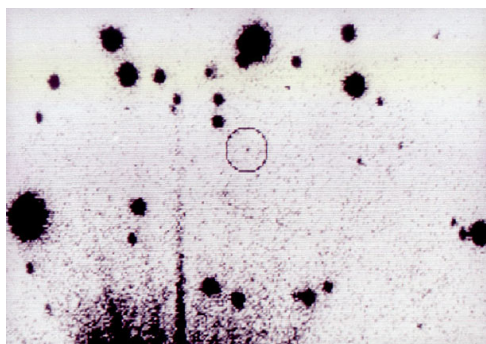
kde m_k je vizuální pozorovaná hvězdná velikost, m_1 je hvězdná velikost odpovídající osvětlení jednoho luxu $m_1 = -13,78$ mag, síla oscilátoru Swanova pásu je $f(C_2) = 0,031$. Ve vzorovém příkladu $m_k = 6,22$ mag, $\Delta = r = 1$ au. Dosazením získáme

$$N = \frac{10^{-0,4 \cdot 20}}{4,25 \cdot 10^{-40}} = 2,35 \cdot 10^{31} \text{ molekul.}$$

Při hmotnosti jedné molekuly $\text{C}_2 \doteq 5 \cdot 10^{-26}$ kg je pozorovaná okamžitá hmotnost uhlíkové atmosféry $1,2 \cdot 10^6$ kg.

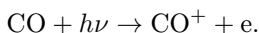
Podle obecně přijatého modelu *Freda Lawrence Whippla* (1906–2004) z roku 1950 [10] tvoří jádra komet „špinavá hmota“ složená z ledu a pórovitého materiálu. Z toho důvodu se vyznačují nízkou hustotou, zpravidla menší než $10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Při každém průchodu perihéliem se z povrchu jádra například u Halleyovy komety uvolňuje přibližně $3 \cdot 10^{11} \text{ kg}$ hmoty jádra. Po chemické stránce jsou jádra tvořena H_2O , NH_3 , CH_4 , CO_2 , mají nízká albeda 0,02–0,05. Koma je složena z OH , NH , CH , CN , CH_2 , NH_2 , C_2 .

Komety se formují při přibližování ke Slunci. Ve větších radiálních vzdálenostech, nad 10 au od Slunce jsou komety bez ohonu a komy, viz snímek Halleyovy komety pořízený na observatoři Mount Palomar Haleovým dalekohledem 16. října 1982, kdy se nacházela ve vzdálenosti 11 au (obr. 3).



Obr. 3

U komet rozlišujeme v principu dva základní ohony, iontový a prachový. Vznik prvního vyložil *Hannes Alfvén* (1908–1995) v roce 1957 [11]. Ukázal, že magnetické pole zamrznuté do plazmatu slunečního větru interaguje s kometárními ionty. Přitom se deformují siločáry magnetického pole spojené s látkou slunečního větru. Vytváří se iontový ohon mířící radiálně od Slunce (obr. 4). Je zpravidla modravě zabarven, což je vyvoláno přítomností CO^+ , CH^+ , CO_2^+ , H_2O^+ . Především CO^+ , hlavní složka tohoto ohonu, se vyznačuje silnými pásy s vlnovými délkami pod 500 nm. Ionizaci molekul při dostatečné energii záření Slunce od vzdálenosti 2 au, při typických hustotách 10^8 – 10^9 molekul v m^{-3} , popisujeme rovnicí



Zjednodušeně shrnuto, iontový ohon vzniká fotoionizací molekul slunečním zářením a interakcí se slunečním větrem, jenž dopadá na kometu rychlostí zhruba 300 – $500 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.



Obr. 4

Druhý ohon – prachový je nažloutlý a zakřivený (obr. 4). Částice o velikosti řádově 1 cm následují při pohybu jádra komety. Menší částice o průměrné velikosti 1 μm , získávají různá zrychlení působením tlaku slunečního záření a pohybují se tak po jiné dráze. Proto se prachový ohon může rozdělit na dva.

Na přivrácené straně jádra komety při přibližování ke Slunci narůstá teplota, dochází k vypařování a sublimaci plynu, vznikají výtrysky, které strhávají i částice prachu. Pohybují se v gravitačním poli jádra komety. Dále na ně působí přitažlivost Slunce, přestože se nachází mnohem dále než jádro. To má velmi malou hmotnost proto ve větších vzdálenostech od něj již můžeme jeho gravitační působení zanedbávat. Rozhodující je přitažlivost Slunce.

Uvažujme zkušební částici poloměru R_{c} uvolněnou z povrchu jádra komety. Působí na ni síla způsobená tlakem záření

$$F_z = \frac{L_S}{4\pi r^2} \frac{\pi R_{\text{c}}^2}{c}$$

a gravitační síla Slunce

$$F_g = \frac{GM_S m_{\text{c}}}{r^2} = \frac{4\pi GM_S \rho_{\text{c}} R_{\text{c}}^3}{3r^2}.$$

Poměr velikostí obou sil je

$$\frac{F_g}{F_z} = \frac{16\pi M_S \rho_{\text{c}} R_{\text{c}} c}{3L_S},$$

obě ubývají s druhou mocninou vzdálenosti od Slunce. Budou si rovny při

tzv. kritickém poloměru částic

$$R_{\text{čk}} = \frac{3L_S}{16\pi GM_S \rho_{\text{čc}}},$$

pro hustotu $\rho_{\text{čc}} = 3\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ je $R_{\text{čk}} \doteq 10^{-7} \text{ m}$. Gravitační silové působení Slunce bude převládat, jestliže poloměr částic bude větší než $R_{\text{čk}}$. Naopak malé prachové částice budou odtlačovány z okolí jádra komety při poloměru menším $R_{\text{čk}}$.

Úvaha je zjednodušená, ve skutečnosti kritická velikost poloměru částic je srovnatelná s vlnovou délkou záření Slunce. Menší částice $R_{\text{čk}} \ll \lambda$ jsou méně efektivní při absorpci záření, mají absorpční účinný průřez mnohem menší než πR^2 . Prachové částice tak budou záření více rozptylovat než absorbovat. Odpudivé síly vyvolané tlakem slunečního záření závisejí na koeficientu absorpce. Některé z částic jsou odtlačovány silou, výrazněji převyšující sílu a získávají rychlosti značně převyšující tepelné, řádově $1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Procesy probíhající na povrchu jádra komety popisujeme rovnicí energetické rovnováhy

$$\frac{L_S e^{-\tau} (1 - A)}{4\pi r^2} \pi R_j^2 = 4\pi R_j^2 \varepsilon \sigma T^4 + \frac{L(T)Z}{N_A} + 4\pi R_j^2 K(T) \frac{\Delta T}{\Delta x}.$$

Význam symbolů v ní je následující: L_S je zářivý výkon Slunce, τ optická tloušťka komy, A albedo jádra, r heliocentrická vzdálenost komety, R_j poloměr jádra, ε jeho emisní schopnost, σ je Stefanova–Boltzmannova konstanta, T teplota na povrchu komety, $L(T)$ latentní teplo sublimace na 1 mol, Z tempo produkce plynu, N_A Avogadrova konstanta, $K(T)$ tepelná vodivost povrchové vrstvy jádra a ΔT je rozdíl teplot mezi povrchovými vrstvami jádra o tloušťce Δx .

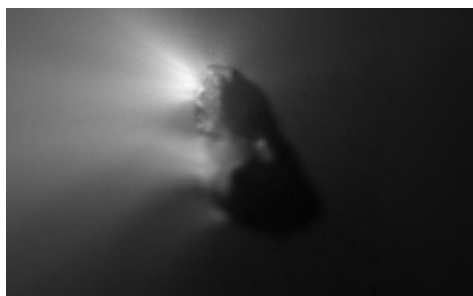
Po obsahové stránce levá strana rovnice vyjadřuje zářivý výkon Slunce absorbovaný povrchem jádra komety. První člen na pravé straně zachycuje vyzařování jádra o teplotě T , druhý člen interpretujeme jako velikost jeho sublimace ledu, třetí popisuje vedení tepla směrem dovnitř jádra.

Probíhající sublimace ochlazuje jeho povrch, neboť část energie slunečního záření se spotřebovává na skupenskou přeměnu. Výpočet velikosti částic pro tři sublimační ledy H_2O , CO_2 a CO kometárního jádra je detailně rozveden v článku [3].

Intenzivní sublimací jsou částice ledu a prachu z povrchu jádra přenášeny do atmosféry komety, kde dochází k dalším procesům, jejichž výsledkem je pozorované zvýšení jasnosti. K němu může dojít i druhým výrazně-

ším mechanismem, čímž je předpokládána destrukce povrchových vrstev jádra.

Přejděme ke konkrétním kometám. Jak jsme již uvedli, poslední návrat Halleyovy komety ke Slunci nastal v roce 1986. K jejímu jádru s tvarem burského oříšku o rozměrech $8 \times 7 \times 16$ km se přiblížila až na vzdálenost 600 km západoevropská sonda Giotto. Získala řadu snímků, z nichž jeden z 14. března 1986 ze vzdálenosti 6 500 km je na obr. 5, kde na Sluncem ozářené části jádra zřetelně pozorujeme aktivní výtrysky. Na povrchu jádra jsou dále viditelné terénní nerovnosti a krátery. Během každého návratu ke Slunci jádro ztratí přibližně 1 m až 10 m povrchové vrstvy. Denně při průchodu perihéliem unikne z povrchu zhruba 10^9 kg prachu a plynu. V aféliu dráhy dosahuje povrchová teplota jádra kolem 60 K, ve vzdálenosti 1 au od Slunce 276 K, v perihéliu se povrch zahřívá až na 400 K. Velký teplotní gradient způsobuje prohřívání povrchových vrstev. Gravitační zrychlení na povrchu jádra dosahuje $1,5 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$, úniková rychlost činí $9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Vyvržené částice s hmotností nad 0,01 g se pohybují kolem jádra po balistických drahách, méně hmotné unikají a vytvářejí „prachovou komu“. Její vnitřní část sahá do vzdálenosti 80 000 km, vnější až do 300 000 km. Ve větších vzdálenostech od Slunce je plynný obal jádra spíše symetrický, při přiblížování k němu se mění na oválný.



Obr. 5

V posledním období vyvolala pozornost kometa Čurjumova–Gerasimenkové, objevená *Klímem Ivanovičem Čurjumovem* (1937–2016) a *Světlanou Ivanovnou Gerasimenkovou* (1945). Jde o méně aktivní starší krátkoperiodickou kometu s nejvyšší jasností až po průchodu perihéliem. Proto byla zvolena k měkkému přistání modulu Philae, vypuštěného z kosmické sondy Rosetta, která startovala ze Země v březnu 2004. Po navedení na oběžnou dráhu komety z ní byl v listopadu 2014 vypuštěn modul Philae, jenž 12. 11.

2014 přistál na povrchu jádra (obr. 6). Dopadl na tvrdší povrch, než bylo plánováno, nezůstal tak řádně upevněn. Přesto se většinu z naplánovaných experimentů podařilo splnit. Stanovená hmotnost jádra činí řádově $5 \cdot 10^{12}$ kg při rozměrech $4,1 \times 3,2 \times 1,3$ km. Jádro zřejmě vzniklo spojením dvou různých těles v rané etapě vývoje sluneční soustavy. Svrchní vrstva obsahuje uhlík, kyslík a složitější molekuly, aceton, propaldehyd, acetamid atd., celkem na 16 organických sloučenin. Na ozařované části jádra byla zjištěna teplota 90–143 K. V jeho útrobách jsou dutiny, pórovité jádro je slepeno z kousků ledu a prachu, průměrná hustota je nízká, zhruba $0,47 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Pro učitele a žáky je vhodný učební materiál [12], vyzdvihující vybrané fyzikální jevy spojené s výše zmíněným projektem, například s přistáním modulu Philae na kometárním jádru. Možné využití úloh s problematikou komet, včetně ukázek, je v článku [13].

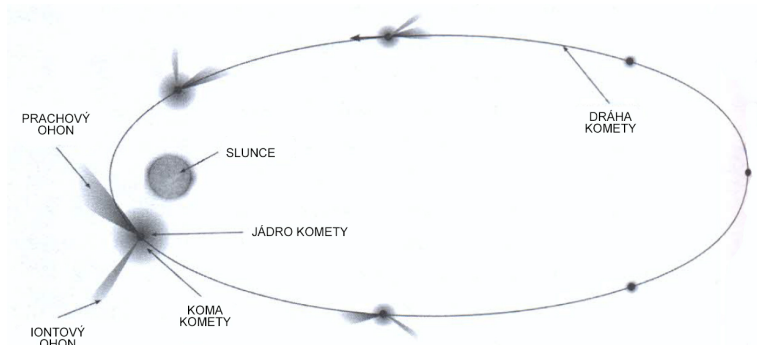


Obr. 6

Vzhledem ke značnému emotivnímu působení pozorování na žáky lze doporučit u komet sledování a zaznamenávání jejich polohy, jasnosti, tvaru komy a ohonu. Podrobnější český návod najdeme například v [14]. Údaje takto získané využijeme při výkladu vzniku a vývoje ohonů komet na jejich dráze při oběhu kolem Slunce. Napomohou k odstranění některých miskoncepcí, k tomu je vhodný jednoduchý názorný obr. 7, který vznikl úpravou podle [3]. Analýza příčin nesprávných představ je prováděna v [15].

Komety zajímají nejenom astronomy, ale i matematiky, fyziky, chemiky, biology, historiky a další. V určitém slova smyslu jde o téma průřezové, můžeme v něm rozvíjet mezipředmětové vztahy. Základem výkladu jevů spojených s kometami je aplikace fyziky a chemie při použití matematiky. Připomeňme Nobelovskou přednášku [16] z roku 1971 německo-kanadského chemika *Gerharda Herzberga* (1904–1999), v níž mimo jiné již popsány mechanismy objasnil přítomnost CH_2 a C_3 v pozorovaných spektrech komet.

Ponecháme na učiteli fyziky, aby provedl vhodný výklad fyzikálních jevů spojených s kometami. K tomu může napomoci obsah článku shrnující poznatky o podstatě a původu komet, o jejich fyzikálních a chemických vlastnostech.



Obr. 7

Literatura

- [1] Comins, N. F.: Sources of Misconceptions in Astronomy. Third International Seminars of Misconceptions and Educational in Sciences and Mathematics. Cornell University, 1993.
- [2] Brahe, Tycho: De munde aetherii recentioribus phaenomenis Liber secundes. Uraniborgi, 1588.
- [3] Gronkowski, P., Wesolowski, M., Wójcik, A., Niemec, A.: Emisja materii z powierzchni jąder kometarnych. Fizyka w Szkole 62 (2016), č. 3, s. 24–29.
- [4] Newton, I.: The Principia – Mathematical Principles of Natural Philosophy. University of California Press, Berkeley, Los Angeles, London, 1989.
- [5] Follows, M.: Changing speed of comets. Physics Education 38 (2003), č. 5, s. 429–432.
- [6] Clairaut, A. C.: Théorie du mouvement des comètes, dans laquelle on a égard aux altérations que leurs orbites éprouvent par l'action des planètes. Avec l'application de cette théorie à la comète qui a été observée dans les années 1531, 1607, 1682 & 1759. Paris, 1760.
- [7] Wilson, C.: Clairaut's calculation of the eighteenth-century return of Halley's comet. Journal for the History of Astronomy 24 (1993), č. 1-2, s. 1–15.
- [8] Swing, P.: Complex structure of cometary bands tentatively ascribed to the contour of the solar spectrum. Lick observatory bulletin 508 (1941), s. 131–136.
- [9] Beljajev, N. A., Čurjumov, K. I.: Kometa Galleja i jeje nabljudenije. Nauka, Moskva, 1985.

- [10] *Whipple, F.*: A comet model. I. The acceleration of Comet Encke. *Astrophysical Journal* 111 (1950), s. 375–394.
- [11] *Alfvén, H.*: On the theory of comet tails. *Tellus* 9 (1957), s. 92–96.
- [12] *Eleftheriou, M.*: Teaching with Rosetta and Philae. *Science in School*, č. 36, s. 34–35. www.scienceinschool.org
- [13] *Domanski, J., Štefl, V.*: Obfítość komet i nauczanie fizyki. *Postepy Astronomii* 44 (1997), č. 3, s. 43–44.
- [14] *Míček, I.*: Komety a meteory – možnosti využití pozorování ve výuce. In: *Brána do vesmíru. Hvězdárna Valašské Meziříčí*, 2014.
- [15] *LoPresto, M. C.*: Comparing modern methods of active & collaborative learning & learner – centered teaching to traditional lectures. PhD thesis, James Cook University, 2012.
- [16] *Herzberg, G.*: Spectroscopic studies of molecular structure. Nobel lecture, December 1971.

Ocenění PRÆMIUM BOHEMIÆ 2016

BOHUMIL VYBÍRAL – JAN KŘÍŽ

Univerzita Hradec Králové



Mezinárodní přírodovědné olympiády s celosvětovou účastí, organizované ve fyzice, chemii, biologii, matematice a informatice, přinesly v roce 2016 českým studentům jednu zlatou, deset stříbrných a šest bronzových medailí. Tento úspěch byl korunován udělením prestižních nadačních cen PRÆMIUM BOHEMIÆ 2016. Stalo se tak v neděli 4. prosince 2016 na státním zámku Sychrov. Ceny již od roku 2001 uděluje rodinná *Nadace*

Bohuslava Jana Horáčka Českému ráji. V roce 2016 byly tyto ceny uděleny již po šestnácté. Za dobu své existence nadace českým studentům, přírodovědným olympionikům ze světových soutěží, udělila celkem 337 cen PRÆMIUM BOHEMIÆ v celkové výši 5,87 miliónů Kč. Oceněných studentů

je méně než počet cen, protože statut pro udílení cen umožňuje, aby v určitém roce jeden student získal najednou i více cen (prakticky dvě ceny), pokud na více různých přírodovědných olympiádách se světovou účastí v daném roce získal medaili (v roce 2016 se tak stalo ve dvou případech). Olympionikovi může být nadační cena udělena i opakovaně v různých letech, přiveze-li ze světa medaile (v historii je několik případů třikrát i čtyřikrát opakovaných laureátů PRÆMIUM BOHEMIÆ). Co tato cena českému medailistovi přináší? Je to medaile B. J. Horáčka ze stejného kovu jako medaile olympijská (s vyraženým jménem laureáta na rubu), diplom a finanční odměna. Ta za zlatou medaili za rok 2016 činila 50 tisíc Kč, za stříbrnou 25 tisíc Kč a za bronzovou 15 tisíc Kč.

Přírodovědné olympiády v České republice

V České republice se v přírodovědné oblasti pro středoškoláky organizuje šest olympiád, které mají celosvětové vyústění: ve fyzice (FO), chemii (ChO), biologii (BiO), matematice (MO), informatice (organizuje se v rámci MO jako kategorie P) a rovněž v astronomii (s astrofyzikou) (AO). Tyto soutěže jsou u nás dlouhodobě zakořeněny. Ve školním roce 2015/16 se konaly tyto ročníky olympiád: FO 57., ChO 52., BiO 50., MO 65., MO/P 31., AO 13. Tyto olympiády mají propracovaný systém činnosti. Kladou si za cíl vyhledávat a pěstovat talenty v uvedených oborech, které jsou významným činitelem pro rozvoj vzdělanosti, tvořivosti a prosperity našeho státu a lidstva vůbec. Pořádat olympiádu neznamena jen připravit soutěžní úlohy a zorganizovat jednotlivá kola soutěže. S olympioniky, zejména s těmi úspěšnými, je třeba pracovat systematicky, např. formou seminářů, soustředění, letních táborů či vydáváním studijních brožurek. Škola totiž nemůže vybavit talentované studenty znalostmi a dovednostmi potřebnými pro úspěch na mezinárodních prestižních soutěžích. Nejlepší řešitelé nejvyšší kategorie uvedených olympiád postupují do mezinárodní (světové) soutěže.

Mezinárodní (světové) přírodovědné olympiády v roce 2016

K tomu, abychom navštívili oceňované přírodovědné olympiády, museli bychom procestovat kus světa. Tak se symbolicky vydejme na dlouhou poznávací cestu po Evropě a Asii s cílem mapovat kroky českých olympioniků na jejich poutích za medailemi. Použijeme-li dějepisnou terminologii, můžeme konstatovat, že po roce 2015 i v roce 2016 pokračovala doba převážně stříbrná – ze 17 medailí jich 10 bylo stříbrných.

Naši cestu začneme poměrně nedaleko – **Mezinárodní fyzikální olympiáda** (v roce 2016 v pořadí již 47.) se konala ve švýcarském Curychu. Bylo to na půdě curyšské univerzity, tedy na univerzitě, kde před více než 100 lety získal svůj první doktorát Albert Einstein. Pětice českých mladých fyziků se na tomto curyšském kolbišti utkala s dalšími 398 soutěžícími z 84 zemí pěti kontinentů. Všichni naši studenti uspěli a výsledkem jsou tři bronzové medaile a dvě čestná uznání. V neoficiálním pořadí států tak vystoupali na 35. místo.

Posuňme se nyní na východ, ale zůstaňme ještě v Evropě. 28. ročník **Mezinárodní olympiády v informatice** hostila metropole ruského Tatarstánu, Kazaň. Zúčastnilo se jí 308 řešitelů z 80 států celého světa. Čtveřice mladých českých programátorů dokázala zvítězit nad záłudnostmi algoritmů a domů přivezla poklad v podobě kompletní sady medailí. Jediná letošní zlatá medaile patří informatikovi *Václavu Volhejnovi*.

Naše cesta dál povede na jih, na pomezí Evropy a Asie, kde leží gruzínské hlavní město Tbilisi. Právě tam vyrazila na již 48. ročník **Mezinárodní chemické olympiády** čtveřice českých mladíků. Svedla chemické souboje s 264 vrstevníky z 67 světových zemí. Naši hoši si v nich vedli nadmíru úspěšně a vybojovali tři stříbrné a jednu bronzovou medaili.

Pokračujme ale v jihovýchodním kursu a přesuňme se do hlavního města východoasijského Vietnamu. V hlavním městě Hanoji si dali dostaveníčko světoví mladí biologové na **Mezinárodní biologické olympiádě** a to v historii již po 27. Dvě české dívky a dva mladíci bojovali s 253 přírodovědci z 63 zemí. Rovněž ve Vietnamu cinkaly stříbrné medaile a to pro všechny české nadějně biology. Česká republika tak patřila společně s Německem a Maďarskem k nejúspěšnějším státům Evropské unie.

Naše další cesta už nebude dlouhá. Severovýchodně od Hanoje nalezneme obchodní a ekonomické centrum Hongkong. Tam měla své dějiště nejstarší a také největší **Mezinárodní matematická olympiáda**, v pořadí již 57. Šest českých mladých matematiků změřilo své síly v historii rekordní konkurenci 602 soutěžících ze 109 zemí. Dvě stříbrné a jedna bronzová medaile a 37. místo v neoficiálním pořadí národů jsou jistě velmi cenným úspěchem.

Na cestě z východní Asie zpět domů se ještě zastavme v kolébce civilizace – Indii. Právě tam ve druhé dekádě prosince 2016 teprve probíhala jubilejní 10. **Mezinárodní olympiáda v astronomii s astrofyzikou**. Vzhledem k tomu, že se tato olympiáda konala až po datu udílení nadačních cen 2016, budou čeští držitelé medailí ocenění až v roce 2017.

Slavnost udílení cen

Slavnostní udílení cen se konalo v den 92. narozenin mecenáše B. J. Horáčka – v neděli 4. prosince 2016 v zámeckém divadle na státním zámku Sychrov. Zúčastnili se nejen ocenění studenti a studentky s rodinným doprovodem, nýbrž i vzácní hosté. Mezi ně patřili představitelé přírodovědných olympiád ČR, zástupci některých škol, předseda správní rady Nadace *Mgr. František Horáček* a členové správní a dozorčí rady Nadace a také zástupci sdělovacích prostředků. Za *Učenou společnost ČR* promluvil *prof. MUDr. Jan Štěpán, DrSc.* a jménem *Jednoty českých matematiků a fyziků* účastníky pozdravil *prof. Ing. Bohumil Vybíral, CSc. Doc. RNDr. Jan Kříž*, prorektor Univerzity Hradec Králové a předseda FO ve svém vystoupení seznámil přítomné s úspěchy jednotlivých českých reprezentací na světových přírodovědných olympiádách v roce 2016. Poté *Jan Horáček* (člen správní rady a syn mecenáše) a *prof. B. Vybíral* předali studentům a studentkám ocenění.



Obr. 1 *Bohuslav Jan Horáček* (1924–2002), jehož 92. narozeniny si účastníci slavnosti 4. 12. 2016 připomněli, ve středu oceněných studentů na prvním ročníku udílení cen *PRÆMIUM BOHEMIÆ* v zámeckém divadle na Sychrově dne 4. 12. 2016 (foto B. Vybíral)

Za vyznamenané studenty poté promluvil *Filip Bialas*, který získal na světových soutěžích v roce 2016 dvě stříbrné medaile. Slavnost moderovala *Mgr. Jaroslava Nývtová* (již po čtrnácté), která také se studentkami

a studenty Gymnázia ve Vrchlabí připravila hudební vystoupení. Reportáž o udílení cen PRÆMIUM BOHEMIÆ 2016 zařadila do večerních Událostí 4. 12. 2016 Česká televize (viz Archiv ČT na webu [2]). Byl rovněž profesionálně pořizován videozáznam podstatných částí slavnosti a byly natočeny rozhovory s některými účastníky (videozáznam bude umístěn na internet, na stránkách You Tube).

Z děkovného projevu laureáta ceny Præmium Bohemiæ Filipa Bialase



Obr. 2 Filip Bialas při děkovném projevu (foto B. Vybíral)

Je mi ctí, že jsem dostal možnost zde dnes, na této slavnostní události, promluvit jménem studentů. Před několika lety bych vůbec neřekl, jak moc mě nyní bude matematika, fyzika a informatika bavit a kolik se toho nad rámec středoškolského učiva naučím. Za to vše vděčím hlavně olympiádám, které mně daly zprvu potřebnou motivaci a posléze mně umožnily získat mnoho vědomostí, přátel a skvělých zážitků. Chtěl bych tedy nejdříve poděkovat všem organizátorům těchto soutěží. Díky mému zvýšenému zájmu o některé obory studia mám tu možnost prožívat středoškolský život asi dost odlišným způsobem než typický student. Mezinárodní olympiády mi umožnily procestovat kus světa a poznat mnoho zajímavých lidí. Nezanedbatelnou část svého života jsem však nestrávil jen na samotných soutěžích, ale i na různých odborných soustředěních, kde jsem se toho nejen mnoho naučil, ale také jsem se dostal do komunity lidí s podobnými zájmy.

Rád bych nyní poděkoval všem v našem blízkém okolí, kterým vděčíme za naše úspěchy a život, který nyní vedeme – rodině, přátelům i učitelům. Protože především oni nám poskytovali psychickou podporu a zastávali velkou roli nejen v začátcích naší soutěžní kariéry. Závěrem rád jménem všech oceněných děkuji panu Bohuslavu Janu Horáčkovi a všem, kteří se o Nadaci dále starají, za to, že se rozhodli podpořit právě nás – čehož si velmi vážím – a budoucím generacím přeji, aby se tato slavnostní událost dále opakovala, jak již tomu je letos po šestnácté. Jsem velmi zvědavý, kde budeme za několik let. Kdo z nás se vydá akademickou drahou a kdo se vydá třeba i úplně jiným směrem než to vypadá nyní. Ať ale dopadneme jakkoliv, tak myslím, že můžu za všechny říci, že olympiády nám daly do života cenné zkušenosti, které určitě někdy využijeme.

Laureáti Præmium Bohemiæ 2016

- *Fyzika (46. MFO): Kryštof Kolář* (bronzová medaile, absolvent Gymnázia, tř. Kapitána Jaroše v Brně, studuje St. Hugh's College v Oxfordu). *Lukáš Honsa* (bronzová medaile, absolvent Gymnázia, Jírovcova v Českých Budějovicích, studuje MFF Univerzity Karlovy v Praze). *Jiří Etrych* (bronzová medaile, absolvent Gymnázia, Dašická, Pardubice, studuje Trinity College v Cambridge).
- *Chemie (48. MChO): Jiří Etrych* (stříbrná medaile) (viz Fyzika). *Josef Tomeček* (stříbrná medaile, studuje Gymnázium Jana Pivečky a SOŠ, Slavičín). *Ladislav Prener* (stříbrná medaile, absolvent Gymnázia, Jírovcova, České Budějovice, studuje VŠCHT v Praze). *Pavel Zelenka* (bronzová medaile, absolvent Gymnázia, Studentská v Ostrově, studuje VŠCHT v Praze).
- *Biologie (27. MBO): Kateřina Kubíková* (stříbrná medaile, studuje Gymnázium, Botičská v Praze 2). *Václav Bočan* (stříbrná medaile, absolvent Podkrušnohorského gymnázia, Most, studuje Přírodovědeckou fakultu UK v Praze). *Jan Pražák* (stříbrná medaile, absolvent Biskupského gymnázia B. Balbína, Hradec Králové). *Zuzana Konvičková* (stříbrná medaile, absolventka Gymnázia, Pontassievská, Znojmo, studuje Druhou lékařskou fakultu UK v Praze).
- *Matematika (57. MMO): Filip Bialas* (stříbrná medaile, studuje Gymnázium Opatov, Praha 4). *Pavel Hudec* (stříbrná medaile, studuje Gymnázium Jiřího Gutha-Jarkovského, Praha 1). *Pavel Turek* (bronzová medaile, studuje Gymnázium, Tomkova, Olomouc-Hejčín).

- *Informatika (28. IOI): Václav Volhejn* (zlatá medaile, studuje Gymnázium Jana Keplera, Praha 6). *Filip Bialas* (stříbrná medaile) (viz Matematika), *Richard Hladík* (bronzová medaile, studuje Gymnázium a obchodní akademii, Mariánské Lázně).



Obr. 3 Student Václav Volhejn při přebírání zlaté medaile, J. Horáček a B. Vybíral (foto J. Kříž)

Literatura

- [1] *Vybíral, B., Kříž, J.*: PRÆMIUM BOHEMIÆ 2016. Vydala Nadace B. Jana Horáčka Českému ráji, Turnov, 2016.
- [2] *Události na ČT 1 a 24 dne 4. 12. 2016*: www.ceskatelevize.cz/porady/1097181328-udalosti/216411000101204/video/508293
- [2] Internetový archiv Euscreen Beta. Dostupné z: http://euscreen.eu/play.jsp?id=EUS_B680B46FFCCA4861AB3F0B5EAD212A82
- [4] *Vybíral, B.*: PRÆMIUM BOHEMIÆ – neobyčejný příklad mecenášství. *Vesmír*, roč. 72 (2013), č. 7-8, s. 392–396.

Moderní detektory ionizujícího záření a jejich využití ve výuce

LEONTÝNA BRÍZOVÁ – MICHAELA KRÍŽOVÁ – JAN ŠLÉGR

Přírodovědecká fakulta UHK, Hradec Králové

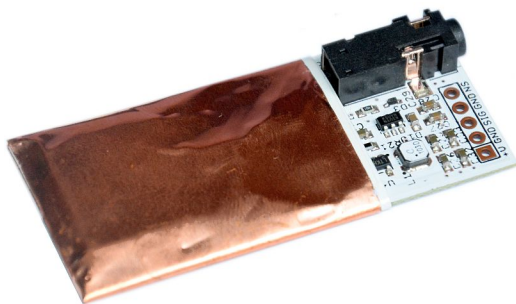
Úvod

Na mnoha školách jsou stále používány detektory ionizujícího záření s Geiger-Müllerovými trubiciemi STS-5 a CBM-20 (a to i v nové soupravě Gamabeta z roku 2007). Tyto sovětské trubice se pro školní použití hodí velmi dobře, neboť jsou i při typickém školním zacházení prakticky neshaditelné (autor jednu osobně přejel kolečkovou židlí a i poté trubice fungovala). Pokud dojde k neopravitelné poruše elektroniky detektoru, obvykle se uvažuje o koupi nového. Ceny didaktických pomůcek v ČR jsou již drahou dobou mimo realitu, proto se učitel s omezeným rozpočtem může poohlédnout jinde. Od roku 2011, kdy došlo k havárii v jaderné elektrárně ve Fukušimě, však ceny dozimetrů i samotných GM trubic skokově vzrostly. Při konstrukci detektorů se navíc projevují nevýhody GM trubice – pro své fungování vyžadují vysoké napětí a na výstupu tvarovač impulsů. V zahraniční literatuře se sice objevují návody na stavbu GM počítačů využívaných vtipně např. zdroj vysokého napětí z kopírky [2], nicméně ideální by bylo zdroj vysokého napětí zcela eliminovat. Z těchto příčin se nejvíce jako pravděpodobné ani nahrazení GM počítačů ve školách scintilačními detektory, jejichž fotonásobiče rovněž vyžadují vysoké napětí (a navíc jsou cenově ještě mnohem výše).

Polovodičové detektory ionizujícího záření

Zajímavou alternativou jsou polovodičové detektory. Jejich princip je podobný jako u fotodiod. Na křemíkovém wafferu je vytvořen velmi tenký přechod PN (široký řádově 100 μm) a tato dioda je zapojena v závěrném směru. Vystavení této prostorové konfigurace ionizujícímu záření způsobí vznik párů elektron-díra a tím slabého ionizačního proudu, který lze měřit. Japonská společnost *Radiation Watch* [3], která poprvé použila polovodičové detektory v náramkových hodinkách, nabízí několik typů hotových modulů, které využívají polovodičový detektor. Kromě modulu, který lze

přes konektor typu jack připojit k chytrému mobilnímu telefonu (impulsy se vtipně přenášejí jako zvukový signál – konektor mobilního telefonu totiž umožňuje i připojení mikrofону), je zajímavý modul na obr. 1. Lze jej napájet napětím 3 V až 9 V a jeho výstupem jsou přímo TTL impulsy odpovídající průletu částice.



Obr. 1 Polovodičový detektor beta a gama záření (skutečná velikost je $5,5 \times 2,5$ cm)

Realizované experimenty

Na obr. 2 je uspořádání experimentu pro měření pološířky a koeficientu absorpce materiálů. Demonstrační čítač, který je třetí iterací projektu *PhysDuino* [4, 5] je popsán na webu autorů [6]. Čítač funguje podobně jako ten ze soupravy Gamabeta [1]. Po zvolený časový interval (např. jedné minuty) čítá impulsy s detektorem, po jedné minutě se čítač zastaví, což je signalizováno rozsvícením desetinné tečky. Po vynulování lze měření opakovat a do cesty jsou částicím přidávány vrstvy hliníkového plechu o stejné tloušťce. Data o počtu impulsů jsou zároveň přes USB port přenášena do počítače, čímž lze zpracování dat urychlit. Protože je toto měření vždy relativní, lze použít libovolný zdroj ionizujícího záření, samozřejmě podle toho, chceme-li měřit absorpční koeficient pro záření beta nebo gama.



Obr. 2 Experiment k určení koeficientu absorpce

Čítač lze rovněž s jiným softwarem (který lze rovněž najít na webu autorů [6]) použít jako dozimetr – na displeji je pak zobrazen odhad dávkového ekvivalentu v mikrosievertch za hodinu. Jedná se opravdu pouze o dohad, protože výpočet je proveden na základě počtu impulsů za minutu násobením tzv. Bulharskou konstantou. Polovodičový detektor totiž stejně jako GM trubice nedovede určit energii dopadající částice a tím její ionizační účinky. Kalibrací proti profesionálnímu dozimetru s GM trubicemi (který sám o sobě má přesnost měření 40 %) byla určena konstanta, která pro částice s radiačním váhovým faktorem 1 přepočítává počet impulsů za minutu na dávkový ekvivalent. Demonstrační dozimetr pak pro běžné radiační pozadí ukazuje hodnoty kolem $0,2 \mu\text{Sv} \cdot \text{h}^{-1}$.

Popsané polovodičové detektory mohou ve školním prostředí nahradit detektory s GM trubicemi, protože umožňují jednoduchou konstrukci zařízení přesně podle požadavků konstruktéra bez nutnosti zdroje vysokého napětí. Stejně jako GM trubice jsou citlivé na záření beta a gama (pro detekci záření alfa lze využít podobně jednoduše zhotovitelné detektory s ionizační komorou popsané v [7]).

Poděkování.

Příspěvek vznikl za podpory specifického výzkumu PřF UHK 2121/2016.

Literatura

- [1] Gamabeta se představuje. [online]. [cit. 2016-07-27]. Dostupný z: <https://www.cez.cz/cs/vyzkum-a-vzdelavani/pro-pedagogy/materialy-pro-vyuku/gamabeta/3.html>.
- [2] Goldader, J. D., Choi, S.: An Inexpensive Cosmic Ray Detector for the Classroom. *Physics Teacher*, v48 n9 p594-597 Dec 2010.
- [3] *Radiation Watch UK*: [online]. [cit. 2016-07-27]. Dostupný z: <http://www.radiation-watch.co.uk/fullfeatures>.
- [4] Kubínová, Š., Šlégr, J.: PhysDuino – cenově dostupný systém pro školní fyzikální měření. Sborník Veletrhu nápadů učitelů fyziky 19, Fakulta pedagogická ZČU, oddělení fyziky 2014.
- [5] Kubínová, Š., Šlégr, J.: Physics demonstrations with the Arduino board. *Physics Education*, vol. 50, no. 4.
- [6] Kubínová, Š., Šlégr, J.: PhysDuino – Low cost system for school experiments in physics. [online]. [cit. 2016-07-27]. Dostupný z: <http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/slegrja1/physduino/>.
- [7] Polák, Z., Polák J., Krbal, M.: Pokusy z radioaktivity na střední škole. Sborník Veletrhu nápadů učitelů fyziky 18, Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové, 2013. Dostupný z: <http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/18-25-Polak.html>.

Šikmý vrh z rozhledny

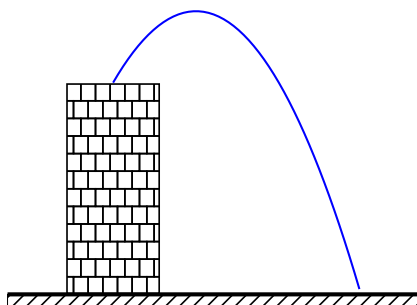
ONDŘEJ MOC – PETR EISENMANN

Fakulta sociálně ekonomická UJEP, Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem

Úvod

Příběh začíná v jedno letní dopoledne při výletu Klubu přátel diferenciální geometrie po krásách severních Čech. Členové klubu Petr a Ondra, věrní své zálibě v matematice a fyzice, po cestě změřili hloubku studně na hradě Helfenburk pomocí padajícího kamínku a stopek. Při návštěvě rozhledny u Náchovic se řeč stočila na další téma – šikmý vrh.

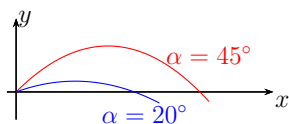
Oběma kamarádům bylo známo, že pokud se hladina vrhu a dopadu tělesa nachází ve stejné výšce, potom v prostředí bez odporu je optimální elevační úhel, při kterém vržené těleso dopadne do maximální možné vzdálenosti, roven 45° . Vznikla ovšem otázka, jak je to s tímto optimálním elevačním úhlem v situaci, kdy vržené těleso dopadá níže, než je výška vrhu, tedy např. při vrhu z rozhledny (obr. 1).



Obr. 1 Šikmý vrh z rozhledny

Petr tvrdil, že bez ohledu na to, z jaké výšky těleso vrháme, je elevační úhel, při kterém nastane maximální možná vzdálenost dopadu, stále roven 45° . Podle něj se tato situace od šikmého vrhu v rovině nijak neliší. Zdůvodňoval to tím, že kdybychom proložili bodem vrhu na rozhledně rovinu rovnoběžnou se zemí, bude trajektorie vrhu protínat tuto rovinu v bodě, který je v případě elevačního úhlu různého od 45° vzdálen od místa vrhu

méně, než je tomu v případě vrhu pod elevačním úhlem 45° (obr. 2).



Obr. 2 Trajektorie hmotného bodu vrhnutého šikmo při různých elevačních úhlech

Ondra zastával názor, že výhodnější je vrhnout těleso pod menším elevačním úhlem než je 45° , neboť vrhnuté těleso se v prostředí bez odporu pohybuje po parabole, a pokud vrhne těleso při elevačním úhlu menším než je 45° , potom se při svém letu vrátí do stejné výšky, jako ze které bylo vystřeleno, pod mírnějším úhlem, a od tohoto místa pak nepadá dolů tak rychle, jako kdyby do tohoto místa přiletělo pod úhlem 45° . Kdo z obou přátel má pravdu?

Řešení problému

Předpokládejme, že hmotný bod byl vystřelen v prostředí bez odporu a nyní koná šikmý vrh, přičemž vektor jeho počáteční rychlosti o velikosti v_0 svírá s vodorovnou rovinou úhel α . Oproti klasicky pojatým úlohám hmotný bod nedopadá na zem ve stejné výšce, ze které byl vystřelen, ale dopadá níže, což může být způsobeno např. výstřelem z okna rozhledny a následným dopadem na zem pod rozhlednou. Výškový rozdíl mezi místem výstřelu a místem dopadu označme symbolem h . Otázka zní: „Pod jakým elevačním úhlem je nutné hmotný bod vystřelit, aby byl jeho dolet maximální možný?“

Vektor počáteční rychlosti rozložíme do složek os x a y , kde

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha,$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \alpha.$$

Nyní, když známe počáteční rychlosti ve směru jednotlivých os, můžeme vyjádřit okamžité rychlosti ve směru obou os a souřadnice hmotného bodu v čase t . Počáteční bod pohybu umístíme do počátku souřadných os. Potom ve směru osy x hmotný bod koná rovnoměrný přímočarý pohyb a

platí:

$$\begin{aligned}v_x &= v_{0x} = v_0 \cdot \cos \alpha, \\x &= v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t.\end{aligned}\tag{1}$$

Ve směru osy y se jedná o rovnoměrně zpomalený a následně rovnoměrně zrychlený pohyb, kde platí

$$\begin{aligned}v_y &= v_{0y} - gt = v_0 \cdot \sin \alpha - gt, \\y &= v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2.\end{aligned}$$

K vyjádření celkově uražené dráhy potřebujeme znát celkovou dobu pohybu, označme tuto veličinu symbolem T . Tato veličina se skládá z doby, kdy těleso stoupalo vzhůru (označme ji symbolem t_n (index n značí *na-horu*)) a doby, kdy klesalo dolů (označme tento čas symbolem t_d (index d znamená *dolů*)). Je tedy $T = t_n + t_d$.

Chceme-li vyjádřit t_n , stačí si uvědomit, že v okamžiku, kdy pohyb vzhůru ustane, je okamžitá svislá rychlost v_y rovna nule, platí tedy

$$v_y = v_{0y} - gt_n = v_0 \cdot \sin \alpha - gt_n = 0,$$

z čehož úpravou poslední rovnosti dostaneme

$$t_n = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}.\tag{2}$$

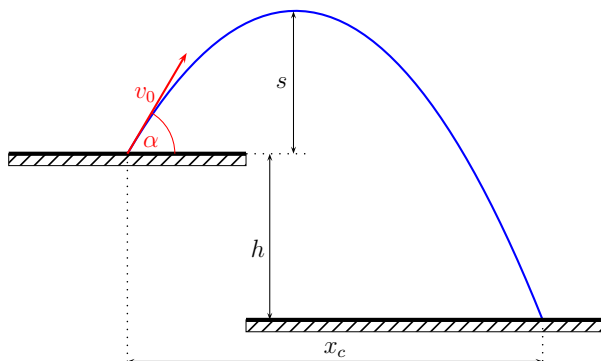
Označme symbolem s výšku, do které hmotný bod vystoupá při pohybu vzhůru za dobu t_n (obr. 3).

S použitím vzorce (2) platí

$$s = \frac{1}{2}g(t_n)^2 = \frac{1}{2}g \cdot \left(\frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Při návratu z výšky s proletí hmotný bod rovinou počátku pohybu a pokračuje směrem dolů do hloubky h . Na zem tedy dopadne z výšky $H = s + h$. Platí

$$H = s + h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g} + h = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha + 2gh}{2g} = \frac{1}{2}g(t_d)^2.\tag{3}$$



Obr. 3 Trajektorie hmotného bodu při dopadu do hloubky h

Z poslední rovnosti ve vztahu (3) vyjádříme hodnotu t_d

$$t_d = \frac{\sqrt{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}. \quad (4)$$

Víme, že pro celkovou dobu pohybu platí $T = t_n + t_d$, čímž z rovností (2) a (4) dostáváme

$$T = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha}{g} + \frac{\sqrt{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha + 2gh}}{g} = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}. \quad (5)$$

Nyní se zaměříme na délku vrhu, tedy na vzdálenost místa dopadu od kolmice spuštěné místem výstřelu k vodorovné rovině. Vzhledem k tomu, že se jedná o celkovou vzdálenost uraženou ve směru osy x , označíme ji symbolem x_c (obr. 3). Při výpočtu hodnoty x_c vyjdeme ze vztahů (1) a (5). Je

$$x_c = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot T = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot \frac{v_0 \cdot \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}. \quad (6)$$

Ze vztahu (6) je zřejmé, že vzdálenost dopadu x_c závisí na třech veličinách – hloubce h , počáteční rychlosti v_0 a elevačním úhlu α . Vzhledem k fyzikální podstatě sledovaného jevu lze předpokládat, že s rostoucí hodnotou h , resp. v_0 se bude zvyšovat i vzdálenost dopadu. Svou pozornost

proto zaměříme pouze na závislost x_c na počátečním elevačním úhlu α a určíme, při jaké hodnotě α bude x_c maximální, tj. nalezneme lokální maximum funkce $x_c(\alpha)$. Vzhledem k tomu, že výraz ve vzorci (6) budeme derivovat vzhledem k proměnné α , upravíme jej do tvaru vhodnějšího pro derivování:

$$x_c = \frac{v_0}{2g} \cdot \left(v_0 \sin 2\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 2\alpha + 8gh \cos^2 \alpha} \right) \quad (7)$$

Funkci (7) zderivujeme podle α . Tím dostaneme

$$x'_c = \frac{v_0}{2g} \cdot \left(v_0 \cdot 2 \cos 2\alpha + \frac{v_0^2 \cdot 2 \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot 2 + 8gh \cdot 2 \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha)}{2 \cdot \sqrt{v_0^2 \sin^2 2\alpha + 8gh \cos^2 \alpha}} \right).$$

Tuto derivaci položíme rovnu nule, čímž po následných úpravách dostaneme rovnost

$$2v_0 \cos 2\alpha = \frac{4gh \sin 2\alpha - v_0^2 \cdot \sin 4\alpha}{\sqrt{v_0^2 \sin^2 2\alpha + 8gh \cos^2 \alpha}}. \quad (8)$$

Dalšími úpravami budeme směřovat k vyjádření optimálního elevačního úhlu α z rovnosti (8). Vynásobením obou stran rovnice (8) odmocninou ve jmenovateli zlomku a následným umocněním obou stran rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} 4v_0^2 \cos^2 2\alpha \cdot (v_0^2 \sin^2 2\alpha + 8gh \cos^2 \alpha) &= \\ &= 16g^2 h^2 \sin^2 2\alpha - 8gh \sin 2\alpha v_0^2 \sin 4\alpha + v_0^4 \sin^2 4\alpha. \end{aligned}$$

S využitím rovnosti $4 \sin^2(2\alpha) \cdot \cos^2(2\alpha) = \sin^2(4\alpha)$ převedeme předchozí vztah do tvaru

$$\begin{aligned} v_0^4 \sin^2 4\alpha + 32v_0^2 gh \cdot \cos^2 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha &= \\ &= v_0^4 \sin^2 4\alpha + 16g^2 h^2 \sin^2 2\alpha - 8v_0^2 gh \sin 2\alpha \cdot \sin 4\alpha. \end{aligned}$$

Odečtením výrazu $v_0^4 \cdot \sin^2(4\alpha)$ a následným vydělením obou stran rovnice výrazem $8gh$ dostaneme

$$4v_0^2 \cdot \cos^2 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha + v_0^2 \sin 2\alpha \cdot \sin 4\alpha = 2gh \sin^2 2\alpha.$$

Nyní na levé straně rovnice vytkneme člen v_0^2 a dále použijeme vzorce pro dvojnásobný argument funkcí sinus a kosinus.

$$\begin{aligned} v_0^2 \cdot (4 \cos^2 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot 2 \cdot 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha) = \\ = 2gh (2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha)^2 \end{aligned}$$

Obě strany rovnice vydělíme výrazem $4 \cos^2 \alpha$. Tím se zbavujeme jednoho kořenu rovnice, a to $\alpha = 90^\circ$. Při výstřelu pod elevačním úhlem $\alpha = 90^\circ$ je z fyzikální podstaty jevu $x_c = 0$. Toto řešení přináší minimum funkce, a proto nás tento případ nebude dál zajímat.

$$v_0^2 \cdot (\cos^2 2\alpha + 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos 2\alpha) = 2gh \cdot \sin^2 \alpha$$

Na levé straně rovnice vytkneme výraz $\cos 2\alpha$. Následnou úpravou se elegantně zbavíme zbývajících goniometrických funkcí na levé straně rovnice:

$$v_0^2 \cdot \cos 2\alpha = 2gh \cdot \sin^2 \alpha$$

Pomocí rovností $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ dostaneme

$$\sin^2 \alpha = \frac{v_0^2}{2v_0^2 + 2gh}. \quad (9)$$

Předpokládáme $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$, tedy $\sqrt{\sin^2 \alpha} = \sin \alpha$. Vyjádřením proměnné α z rovnosti (9) získáme

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + gh}} \right). \quad (10)$$

Nyní by bylo matematicky korektní ověřit, že pro uvedený úhel se opravdu jedná o maximum funkce x_c , např. pro uvedený úhel vypočítat hodnotu druhé derivace funkce (7). Odkážeme se na fyzikální intuici, která říká, že se skutečně jedná o maximum. Ze vzorce (10) je zřejmé, že optimální elevační úhel, při kterém těleso doletí nejdále, je funkcí dvou proměnných v_0 a h . Tím se ukázalo, že pro různé hloubky h optimální elevační úhel α nabývá různé hodnoty. Ovšem nelze říci, že při konkrétní hloubce h je optimální elevační úhel α roven konkrétní hodnotě, neboť je dále ovlivněn hodnotou počáteční rychlosti v_0 . Při dané hodnotě h tedy dvěma různým počátečním rychlostem budou příslušet i dvě různé hodnoty optimálních elevačních úhlů.

Diskuse nalezeného řešení

Vzorec (10) podrobíme dalšímu zkoumání. Ověříme, zda nám dává očekávané výsledky pro $h = 0$, tedy v případě, kdy těleso dopadá do stejné výšky, jako ze které bylo vystřeleno. Vzhledem k tomu, že jsme při předchozích úpravách dělili výrazem $8gh$, platí vzorec (10) za předpokladu $h \neq 0$. Pro zjištění optimálního elevačního úhlu α při dopadu do stejné výšky, jaká byla při výstřelu, použijeme limitní přechod pro $h \rightarrow 0$. Tím dostaneme

$$\begin{aligned}\alpha &= \lim_{h \rightarrow 0} \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g \cdot h}} \right) = \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + g \cdot 0}} \right) \\ &= \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2}} \right) = \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 45^\circ.\end{aligned}$$

Tento výsledek je v naprostém souladu s naším očekáváním. Z provedeného výpočtu navíc plyne, že v případě $h = 0$ je optimální úhel roven 45° při jakékoliv počáteční rychlosti. Toto je jediný případ, kdy optimální elevační úhel na počáteční rychlosti nezávisí.

Nyní můžeme odpovědět na úvodní otázku článku. Předpokládejme, že $h > 0$, tj. rovina dopadu leží níže než rovina výstřelu. Pak platí (ne)rovnosti

$$0 < v_0^2 < v_0^2 + gh,$$

resp.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2}} > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + gh}}.$$

Vzhledem k tomu, že funkce arcsinus je rostoucí na celém definičním oboru, platí i následující (ne)rovnosti

$$\begin{aligned}45^\circ = \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) &= \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2}} \right) > \\ &> \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + gh}} \right) = \alpha.\end{aligned}$$

Tím dostáváme, že pro $h > 0$ je $\alpha < 45^\circ$, a s rostoucí hodnotou h se velikost optimálního elevačního úhlu α snižuje. Ukázalo se, že v diskusi obou přátel měl pravdu Ondra.

Otázkou zůstává, zda při neomezeném růstu h klesá hodnota optimálního elevačního úhlu α k nule, či zda existuje nějaká kladná hodnota, ke které se α asymptoticky přibližuje. V následující části se proto zaměříme na situaci, kdy hodnota h roste nade všechny meze, tedy pro $h \rightarrow \infty$. Potom je

$$\alpha = \lim_{h \rightarrow \infty} \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + gh}} \right) = \arcsin 0 = 0^\circ.$$

Tím se potvrdilo, že při nekonečné výšce rozhledny vede k nejdelšímu doletu (možná paradoxně) vrh ve vodorovném směru.

Jak je tomu v případě, že rovina dopadu leží nad rovinou výstřelu, v našem případě pro $h < 0$? Potom platí

$$0 < v_0^2 + gh < v_0^2,$$

resp.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + gh}} > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + gh}} \right) > \\ &> \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2}} \right) = \arcsin \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 45^\circ. \end{aligned}$$

V tomto případě se velikost optimálního elevačního úhlu zvyšuje nad 45° .

V následujících tabulkách pro lepší představu uvádíme některé hodnoty, které plynou ze vzorců (7) a (10). Tabulka 1 uvádí hodnotu optimálního elevačního úhlu (vyjádřenou ve stupních) v závislosti na vybraných hodnotách počáteční rychlosti v_0 (v $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) a hloubky h (v metrech).

Z tabulky 1 je patrný vliv počáteční rychlosti na velikost optimálního elevačního úhlu. Zatímco při nízkých počátečních rychlostech ($10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$) se velikost optimálního elevačního úhlu s rostoucí hloubkou h „rychle“ blíží k nule, pro vyšší počáteční rychlosti dochází ke snižování optimálního elevačního úhlu velice zvolna.

Řada čtenářů si jistě položí otázku, jak velký rozdíl je v doletu při optimálním elevačním úhlu a elevačním úhlu 45° . Bude rozdíl v centimetrech,

metrech, či stovkách metrů? Sledujme proto, jak silný efekt má použití optimálního elevačního úhlu namísto původně předpokládaných 45° . O tom podává svědectví tabulka 2. V této tabulce jsou pro každou dvojici hodnot počáteční rychlosti a hloubky uvedeny dvě hodnoty. Horní hodnota představuje dolet (v metrech) při optimálním elevačním úhlu, spodní číslo v buňce představuje dolet při elevačním úhlu 45° .

Tabulka 1 Hodnoty optimálního elevačního úhlu pro různé počáteční rychlosti a hloubky

hloubka	10	100	1 000
poč. rychlost			
10	30	12,310	4,035
100	44,716	42,392	30
1 000	44,997	44,971	44,716

Tabulka 2 Dolet hmotného bodu pro různé počáteční rychlosti a hloubky při volbě optimálního elevačního úhlu a elevačního úhlu 45°

hloubka	10	100	1 000
poč. rychlost			
10	17,32	45,83	141,77
	16,18	37,02	105,12
100	1 009,95	1 095,45	1 732,05
	1 009,90	1 091,61	1 618,03
1 000	100 010,00	100 099,95	100 995,04
	100 010,00	100 099,90	100 990,20

Pokročilé optimalizace pro webové vyhledávače

MARTIN TRNEČKA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Tento článek navazuje na [3], kde jsme se věnovali problematice webového vyhledávání, základním principům a metodám SEO. Skončili jsme u optimalizací, které jsou úzce spojené se syntaxí jazyka HTML. V tomto článku na tyto optimalizace navážeme a budeme se věnovat pokročilým metodám SEO. Cílem obou dílů je podat srozumitelný výklad principů SEO. Učitelé informatiky a výpočetní techniky, kteří se ve své výuce zabývají problematikou webového vyhledávání, tak získají přehled o některých aktuálních tématech v této oblasti.

Pokročilé SEO

Pokročilé SEO zahrnuje především aspekty, které již nejsou zcela v režii tvůrce či majitele webu. Tvůrce webu ale může vhodnou úpravou webové stránky tyto aspekty alespoň částečně ovlivnit. Jako první se podíváme na optimalizaci ležící na pomezí mezi základní a pokročilou, která se týká URL adres.

URL adresy

URL (Uniform Resource Locator) adresa představuje jednoznačný identifikátor webových stránek a podstránek s touto stránkou spojených. Cílem optimalizace zahrnující URL jsou takzvaná „hezká URL“. Nejlepší jsou dobře zapamatovatelné a především logické URL adresy. Podíváme se nyní na několik hypotetických adres, které by mohly odkazovat na stránku zaměstnance, a zvažme jejich význam:

1. <http://www.example.com?location=staff&employee=berners-lee>
2. <http://www.example.com/staff/bernersleeinfo.html>
3. <http://www.example.com/staff/berners-lee-info.html>
4. <http://www.example.com/staff/tim-berners-lee>
5. <http://www.example.com/staff/berners-lee>
6. <http://www.example.com/berners-lee>

První URL adresa patří do kategorie označované jako *dynamická*. Obvykle je můžeme najít na automaticky generovaných stránkách jako jsou například diskuzní fóra. Tento typ URL adres je z hlediska SEO nejméně vhodný. V tomto konkrétním případě jsou parametry `location` a `employee` smysluplné. V praxi tomu ale často nebývá, nemluvě o tom, že pro uživatele je taková adresa těžko zapamatovatelná. Webové vyhledávače dokáží s dynamickými URL adresami pracovat, ale z celkového pohledu SEO jsou vhodné spíše na generované stránky, jako jsou výše zmíněná diskuzní fóra nebo různé výsledky vyhledávání. Při práci s dynamickými URL adresami je zapotřebí dát si pozor na prohazování pořadí parametrů, které může v některých případech působit zmátkně.

Druhá a třetí URL adresa se od sebe liší jen velmi nepatrně. Prostřední část URL adresy `/staff/` nese informaci o aktuální sekci stránek. Obě adresy jsou zakončeny příponou `.html`. Přípony určující typ souboru jsou považovány za přežitek a dnes se již moc nepoužívají. Z hlediska webového vyhledávání jsou názvy stránek `bernersleeinfo` a `berners-lee-info` v URL v podstatě srovnatelné. Z pohledu uživatele je preferovanější druhá varianta, která je lépe zapamatovatelná.

Čtvrtá adresa je tím nejlepším řešením. Neobsahuje žádné pro uživatele nepodstatné informace a je v ní jasně zanesena logická struktura webové stránky.

V páté adrese není na rozdíl od předchozí uvedeno křestní jméno. Z hlediska vyhledávání je lepší v URL uvést co nejvíce relevantních informací. Pátá varianta tedy nenese všechny potřebné informace.

Poslední adresa jako jediná neobsahuje informaci o sekci. Příslušný web není vůbec strukturován a všechny informace jsou prezentovány na jedné úrovni. To je v případě menšího webu s několika málo podstránkami snesitelné. V případě rozsáhlejšího webu je tato URL z hlediska SEO zcela nepřijatelná.

Odkazy

Tím nejdůležitějším v kategorii pokročilé SEO jsou odkazy.¹ Pokud odkazujeme na důvěryhodné a kvalitní weby, zlepšuje se celkové hodnocení naší stránky. Je nutné si uvědomit, že takové odkazy nemohou být na stránku přidány uměle. Pokud není odkaz relevantní pro náš web, nemá žádný přínos. Odkazy mohou být přínosné, ale i naopak. Za nekvalitní odkazy, tedy například odkazy na spam, ilegální obsah či torrent sítě,² je celkové hodnocení stránky výrazně sníženo.

Důležitější než stránky, na které odkazuje náš web, jsou stránky, které naopak na náš web ukazují. Tyto odkazy se nazývají zpětné. Opět platí, že pokud na nás odkazují kvalitní stránky, je hodnocení našeho webu lepší. Stejně tak pokud na nás odkazují stránky nepřilíš valné reputace, může být hodnocení našeho webu sníženo. Málo kvalitních odkazů na webovou stránku je nejčastější důvod špatného umístění ve výsledcích vyhledávání.

Jak by tedy měl vypadat kvalitní odkaz? Především by měl být z důvěryhodného a tématicky příbuzného webu. Samotný odkaz by měl ležet uvnitř souvislého textu, měl by být dlouhodobě funkční a měl by vést na konkrétní podstránku našeho webu. Stránka, která odkazuje, by neměla mít mnoho dalších odkazů. Kvalita je v tomto případě důležitější než kvantita – jeden kvalitní odkaz je lepší než stovky nekvalitních.

Další SEO metody

Jako pokročilé SEO metody jsou dále označovány některé technické úpravy na webu. Příkladem je kvalitní navigační a organizační struktura, které není vždy jednoduché dosáhnout. Tím je myšleno, že náš web bude logicky strukturován do jednotlivých podstránek, které budou mezi sebou navzájem provázané pomocí snadno použitelné navigace. Dalším příkladem je sémantické pojmenovávání elementů. To znamená, že pokud chceme pracovat např. s elementem obsahujícím hlavní obsah, použijeme ve zdrojovém kódu pro jeho identifikaci³ místo pojmenování `class="hello1234"` pojmenování `class="main-content"`. Druhé pojmenování je logičtější a

¹Jazyk HTML je založen na jazyku SGML (Standard Generalized Mark-up Language). Jednou z mála odlišností jsou právě odkazy, které jazyk SGML vůbec neobsahoval. Bez odkazů by služba WWW měla zcela jinou podobu. Není tedy divu, že odkazy jsou tím nejdůležitějším elementem webové stránky, který určují její strukturu. Vyhledávací algoritmy tuto strukturu sledují a hodnotí.

²Torrent sítě slouží pro distribuci (zejména velkých) souborů. Obvykle jsou používány pro distribuci ilegálního obsahu jako například nelegální kopie filmů.

³Každá HTML značka může být pojmenována pomocí atributu `id` nebo `class`.

smysluplnější jak z pohledu návštěvníka, tak z pohledu tvůrce webové stránky. Do stejné kategorie patří i publikování obsahu pomocí standardů ATOM či RSS.

Další optimalizace se týkají duplicitního obsahu webových stránek. Pokud máme dvě stejné či jen velice podobné stránky, je novější stránka penalizována. Extrémním případem jsou obsahově chudé stránky, kde navigace, která je na všech podstránkách stejná, obsahuje více informací než jednotlivé podstránky. Stejně tak je dobré se vyvarovat přirozených duplicit v URL adrese. Tím je myšleno prohazování parametrů u dynamických adres o kterém jsme již mluvili a také uvádění URL s **www** a bez **www** prefixu. Prefix **www** v URL adrese má historické důvody a dnes již není nutný. Na stránku by mělo být odkazováno konzistentním způsobem a toho je možné docílit jediné tak, že stránka si sama vynutí správný typ adresy.

Novinky v SEO

Jak bylo napsáno v předešlém článku, algoritmy pro určování finální pozice webové stránky ve výsledcích vyhledávání se neustále mění. Z tohoto důvodu se některé techniky SEO mění s každým updatem vyhledávacího algoritmu. Někdy může být konkrétní metoda přínosná, jindy jsme za její uvedení na stránce naopak penalizováni. V následující části se podíváme na některé novinky v oblasti optimalizace stránek.

První novinkou v SEO je, že vyhledávání na mobilních zařízeních, jako je například chytrý telefon, není stejné jako vyhledávání na klasickém počítači. Vyhledávače preferují stránky, které jsou přizpůsobené pro zařízení, na kterém jsou vyhledávány. Je tedy vždy výhodné, aby byly stránky rozumně zobrazitelné a použitelné na co největším počtu různých zařízení.

Další záležitostí je celková velikost webu. Vyhledávače preferují stránky, které se načítají co nejrychleji. Především nezkušení programátoři se v posledních letech naučili používat celou řadu knihoven (například různé rozšíření vycházející z velice populární knihovny jQuery) usnadňující vývoj webu. Tyto knihovny jsou obvykle velké a pokud jich je na stránce mnoho, může se stát, že jednoduchá webová stránka má i několik megabajtů. Používání knihoven je jistě správná věc,⁴ ale je vždy dobré zvážit, zda je nutné vkládat velkou knihovnu kvůli jedinému grafickému efektu použitému na

⁴Knihovny dramatickým způsobem usnadňují vývoj webových stránek. Díky nim vytvoří působivé stránky i amatérský zájemce o tvorbu webu. Na druhou stranu bezmyšlenkovité používání knihoven staví tvůrce webu do role uživatele. Tvůrce webu pak jen používá technologii, aniž by porozuměl hlubším principům, na kterých je založena. Tento fenomén je obecným problémem dnešní přetechnizované doby.

jediné stránce. S tím jde ruku v ruce i design webu, který je mnohdy přemrštěný a zahrnuje obrovské obrázky, které jen přidávají na velikosti stránky. Typickým příkladem jsou grafické slideshow na úvodní stránce, kvůli kterým se na mobilním zařízení stránka vůbec nezobrazí. Obecně platí, že čím menší je zařízení, na kterém chceme stránku zobrazit, tím menší by měla být i velikost⁵ této stránky.

Stáří webové domény je rovněž důležité. Dnešní vyhledávače zvýhodňují starší a zaběhnuté webové adresy. Zdali se nový webový projekt prosadí nebo zmizí v hlubinách internetu, je obvykle otázka času. Se stářím domény úzce souvisí pojem autoritativní doména. Za autoritativní domény jsou považovány ty domény, které jsou často odkazovány či citovány. K tomu se v dnešní době hojně používají různé sociální sítě. Aby se webová stránka stala autoritativní, musí si vybudovat dobrou pověst a to především kvalitním obsahem.

Dalším faktorem je, zda je daná stránka šifrována. Přesněji řečeno, jestli nabízí variantu přes **https** protokol. Bohužel i v dnešní době nejsou stále všechny webové stránky vyžadující přihlášení šifrovány. V roce 2014 společnost Google oznámila, že bude klást stále větší důraz na stránky poskytující šifrování. V současnosti není zcela jasné, jak velký tento důraz je, ale je zřejmé, že poskytnutí šifrování by mělo být naprostou samozřejmostí v případě, že vyžadujeme jakékoli informace od uživatele webové stránky.

SEO mýty

Jak již víme, algoritmy pro hodnocení webových stránek nejsou zcela známé a především se často mění. Jedním z důsledků je, že SEO je často zahaleno různými mýty, kterých se nejeden tvůrce webu zatvrzele drží. Navíc literatura věnující se problematice SEO je mnohdy nepřesná a zavádějící. Získat kvalitní znalosti z oblasti SEO lze jediné praxí.⁶ Vyjmenovat všechny mýty, které se týkají SEO, by vydalo na celou knihu. Ve stručnosti se podíváme jen na některé z nich.

Jedním z nejstarších mýtů je, že tabulkový layout⁷ je pro SEO stejný jako layout vytvořený za použití CSS. Tabulkový layout je minulostí, ale zejména s příchodem moderního Material designu⁸ se spousta mladých

⁵Do velikosti stránky se započítává velikost všech souborů, které jsou nutné pro zobrazení stránky v prohlížeči.

⁶Studovat SEO znamená studovat ho neustále. Nelze se spolehnout na již jednou získané znalosti. To platí pro všechny webové technologie, které se neustále vyvíjejí.

⁷Tabulkovým layoutem je myšleno rozmístění hlavních prvků stránky (hlavičky, navigace, hlavního obsahu, patičky) do buněk tabulky.

⁸Grafický styl představený na konci roku 2014 společností Google, který se v sou-

programátorů nevědomky vrací právě k tomuto způsobu tvorby webu. Tabulkový layout byl zavržen zejména proto, že se samotná tabulka zobrazovala až poté, co se celá načetla do paměti. Dnešní moderní prohlížeče sice tabulku vykreslují postupně, tabulky by však měly být používány výhradně pro tabulková data. Jejich použití pro layout je sémanticky nesprávné a hodnocení stránky může uškodit.

Dnes je již historickým přežitkem, že `<description>` a `<keywords>` jsou nejdůležitější tagy na celé stránce. Tyto značky začaly být hojně zneužívány především za pomoci spamových klíčových slov (často hledaných slov, které s webem nesouvisí), takže k nim dnes přistupují webové vyhledávače obezřetně. Například Google vůbec nevyužívá obsah značky `<description>` pro vytvoření popisku stránky. Stejně tak obsah tagu `<keywords>` již neslouží pro určení klíčových slov. Dodejme, že i přesto mají oba tagy význam, a to především z pohledu sémantického webu.⁹

Dalším mýtem je, že podíl počtu klíčových slov k počtu všech slov na stránce musí být přesně x procent. Ještě před pár lety bylo ono číslo x magickým zaklínadlem, které mohlo webovou stránku vystřelit na první příčky ve výsledcích vyhledávání. Dnes je již situace jiná. Vyhledávače sice hustotu klíčových slov sledují, ale správná hodnota neexistuje. Pokud je obsah kvalitní, klíčová slova se v něm vyskytují přirozeně a to je více než dostatečné. Nad klíčovými slovy je prováděna spam analýza, která zajistí, že již není možné využívat často hledaných nerelevantních slov pro zlepšení pozice webové stránky. Navíc je počítána sémantická vzdálenost klíčových slov. Například klíčová slova „rohlík“ a „chleba“ mají menší sémantickou vzdálenost než slova „rohlík“ a „auto“. Slova s velkou vzdáleností nemohou být klíčová. S klíčovými slovy je také spojený mýtus, že se nesmí skloňovat ani časovat. Vyhledávače si s tím velice dobře poradí a to i v případech češtiny. Používání velice populárních tag listů (seznam klíčových slov obvykle v podobě, kdy jsou nejdůležitější slova psána většími písmeny) je v dnešní době penalizováno. Bez přínosu také zůstává použití klíčových slov v odkazech.

časnosti těší velké oblibě a to nejen na webových stránkách, ale i například v mobilních aplikacích pro platformu Android.

⁹Sémantický web je považován za budoucnost WWW. Základní myšlenka, poprvé přestavena v článku [1], spočívá ve strukturovaném uložení informací a jejich významu na webu. Takovéto informace jsou snadněji vyhledatelné a strojově zpracovatelné. Pokud například uložíme na web obrázek, nepřidáme mu jen strohý popis, ale i informaci o tom, co se na obrázku nachází, kde a kdy byl pořízen a jak souvisí s obsahem webu. K tomuto účelu existuje celá řada technologií.

V souvislosti se SEO mýty je dále potřeba upozornit na nabídky mnohých SEO expertů, kteří garantují pozici ve vyhledávačích či dokonce registraci do webových vyhledávačů. Pozici ve vyhledávači totiž není možné nijak garantovat, stejně tak není potřeba registrovat stránku do webového vyhledávače. Fenoménem jsou analyzátoři SEO, které často nabízí naprosto zkreslené informace. Výsledky z těchto aplikací je vždy potřeba brát s nadhledem. Absence stoprocentního hodnocení nás vůbec nemusí znepokojovat – pro hodnocení jsou mnohdy použity zcela nesmyslné metriky.

Jak bylo napsáno v předchozím článku [3], SEO je především o obsahu. V tomto kontextu je v poslední době hojně diskutován content (obsahový) marketing [2]. Vymežit přesně tento pojem není jednoduché. Ve stručnosti je možné si ho představit jako nenucenou reklamu bez nabídky prodeje. Uživatelům poskytujeme zajímavý, zábavný a poučný obsah, který je upozorní na nás nebo náš produkt. Někteří jej považují za spásu, jiní za nesmysl.

Content marketing není ve skutečnosti nic nového. Poprvé byl představen již v roce 1895 a za více než sto let jeho existence bylo mnohokrát ověřeno, že funguje. Mezi velké propagátory content marketingu patří například Coca-Cola, Microsoft nebo Micheline. Nesmíme ale zapomínat, že se jedná o marketing. Jeho konkrétní podoba nemusí být vždy stejně úspěšná. Například reklama, která je úspěšná v zahraničí, nemusí oslovit české publikum. Content marketing je se SEO propojen tím nejdůležitějším, a sice obsahem. Mnozí SEO experti jej ale chápou nesprávně. Mnohdy je pak návštěvníkům webu vnucován obsah v podobě PR článků, videí a záplav příspěvků na sociálních sítích bez toho nejdůležitějšího — bez kvality. I zde platí, že přínos je přímo úměrný kvalitě.

Temná strana SEO

V předchozích částech jsme používali slovo penalizace. Penalizace znamená, že stránka získá záporné hodnocení nebo dokonce nebude vůbec indexována. Webové vyhledávače obvykle poskytují pouze informaci o tom, že použití zakázaných metod může být penalizováno. Situace je stejná jako u hodnotících algoritmů. Všechny postupy, které mohou být penalizovány nejsou zcela známy. Možnosti automatické penalizace jsou stále omezené. Velice populární se staly takzvané „bonzovací stránky“, na kterých je možné nahlásit nevhodné chování. Dodejme, že tyto stránky jsou hojně používány.

Hromadně se penalizované postupy označují jako neetické SEO metody. Mezi ty patří například umělé zvyšování četnosti klíčových slov za pomoci skrytého textu. Zvyšování kvantity odkazů na úkor kvality (např. spam v diskuzích nebo komentářích). Podvedení vyhledávacích robotů, kdy je vyhledávacímu programu podstrčen jiný obsah. V neposlední řadě se jedná o takzvaný „Ester Ládová fenomén“,¹⁰ kdy je na stránkách umístěna aktuálně hojně vyhledávaná informace za účelem zvýšení návštěvnosti.

Další neetickou techniku představují Google bomby, které ovlivňují vyhledávač Google. Tato technika je založena na následujícím principu. Pokud se odkazujeme na webovou stránku odkazem, který má určitý popis, je tento popis zohledňován při analýze klíčových slov. Pokud je takovýchto odkazů dostatečné množství, může se stát, že se tento popis stane hlavním klíčovým slovem či frází pro odkazovanou stránku. První známý případ použití Google bomby pochází z konce minulého tisíciletí, kdy po vyhledání fráze „more evil than Satan“ (horší než Satan) se ve výsledcích vyhledávání objevila na prvním místě domovská stránka společnosti Microsoft.

Ačkoliv jsou současné vyhledávače částečně imunní vůči výše popsaným neetickým metodám, neustále se objevují nové a nové podvodné přístupy, znesnadňující vyhledávačům jejich práci. Příkladem mohou být odkazující webové farmy, tedy obrovská armáda webů odkazujících se na konkrétní stránky, či metoda zvaná SEO poisoning, která je založena na infikování webového prohlížeče malwarem, který upravuje výsledky vyhledávání.

Dostáváme se tak k temné stránce webových optimalizací. SEO je často kritizováno, ale příliš se o tom nemluví. Hlavním důvodem kritiky je, že vyhledávací roboti nejsou dostatečně inteligentní. Stále nedokáží zcela automaticky rozpoznat podvodnou stránku. Další důvod pro kritiku představuje fakt, že veřejnost chápe SEO čistě jako pozici ve vyhledávacích, aniž by porozuměla hlubším mechanismům webového vyhledávání. Před rokem 2013, kdy Google poprvé představil updaty vyhledávacího algoritmu Panda a Penguin, byla mezi temnou a světlou stranou SEO vymezena jednoznačná mez. Příchodem těchto updatů se revolučně změnilo chápání SEO (viz [4]). Celková tolerance se posunula k temné straně a tento trend přetrvává až do současnosti. Některé na první pohled neetické metody jsou dnes webovými vyhledávači tolerovány. V případě dlouhodobě prověřených stránek je míra tolerance dokonce větší. Google se tak rozhodl dát zaběhnutým webovým stránkám prostředek pro boj s neetickou konkurencí.

¹⁰V anglicky mluvících zemích známí jako „Pamela Anderson fenomén“.

Závěr

Pokročilé SEO je spíše o technických maličkostech a především o chytrosti. Pokud bude majitel stránky přemýšlet o tom, jak jeho web vnímají uživatelé, a bude se jim snažit vyjít vstříc, výsledky se vždy dostaví a web bude prosperovat. Vždy je potřeba přemýšlet, zda má daná optimalizace přínos pro uživatele. Pokud tomu tak není, je zbytečná. Zatímco základní SEO by mělo být naprostou samozřejmostí, pokročilé SEO je mnohdy považováno za nadstandard. Správné principy SEO jsou součástí kvalitního webdesignu, které by měl dodržovat každý tvůrce webových stránek.

Poděkování. Tento článek byl vytvořen za podpory projektu IGA UP 2016, reg. č. IGA.PrF_2016_027. Děkuji Eduardu Bartlovi za jeho cenné rady a připomínky k textu.

Literatura

- [1] Berners-Lee, T., Hendler, J., Lassila, O.: The Semantic Web. Scientific American, 2001, s. 29–37.
- [2] Clark, A.: Search engine optimization 2016: Learn SEO with smart internet marketing strategies. 2015.
- [3] Trnecka, M.: Základní optimalizace pro webové vyhledávače. MFI, roč. 25 (2016), č. 3, s. 227–234.
- [4] Williams, A.: SEO 2014 & Beyond: Search engine optimization will never be the same again! 2014.

Bobřík učí informatiku

6. díl – Kódování

DANIEL LESSNER – JIŘÍ VANÍČEK

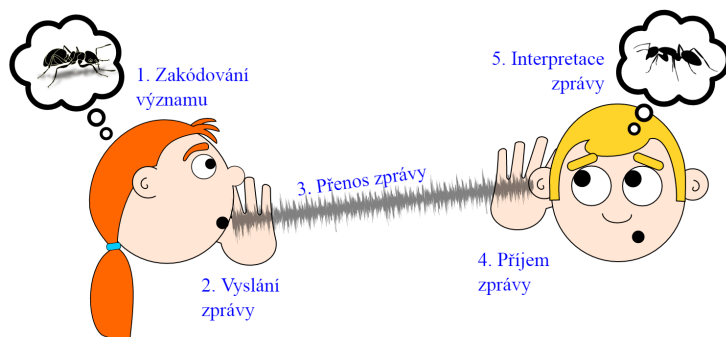
Matematicko-fyzikální fakulta, UK Praha

Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

V minulém dílu seriálu o situačních informatických úlohách jsme se seznámili s pojmem informace a s tím, jak informace ubírá možnosti. Příliš jsme ale nezdůrazňovali, že každá informace, pokud ji chceme zpracovat, musí být nějak fyzicky zaznamenána.

Abychom problematiku blíže prozkoumali, změníme úhel pohledu. Informaci lze definovat (nikoliv v matematickém smyslu) také jako zprávu spolu s jejím významem. Zpráva je zde posloupností znaků z předem dané množiny, tzv. abecedy. Do přesnějšího vymezení slova „význam“ se pouštět nebudeme, k tomu mají co říci spíše jiné obory, např. filozofie nebo psychologie.

V následujícím textu budeme používat jednoduchý model komunikační situace ukázaný na obr. 1. Při komunikaci se partnerovi snažíme sdělit naši myšlenku. Přímo (telepaticky) to ale neumíme. Myšlenku proto nějak zaznamenáme a tento záznam předáme partnerovi. Může jít o vyřčená slova nesená vzduchem, obrázek na papíře či pípání telegrafu. Proces vytváření zprávy odpovídající dané myšlence nazýváme kódování.



Obr. 1 Model komunikační situace¹

Komunikační partner obdrží naši zprávu (sérii změn tlaku vzduchu na ušní bubínek, barevné body na papíře promítnuté na sítnici oka apod.). Pokud partner zná způsob použitého kódování (např. když mluví stejnou řečí nebo když jsme se na způsobu předem domluvili), může ze zprávy dekodovat původní myšlenku.

Každá informace, kterou kdy přijmeme, je nějakým způsobem reprezentována, zakódována. Možnosti kódování zpráv jsou ovšem různé. Abychom se v těchto možnostech zorientovali a mohli rozhodnout, které kódování je lepší, potřebujeme se vyznat v podstatných vlastnostech kódování. Některé z nich nyní projdeme.

¹Obrázek převzat z učebnice Lessner: Učebnice informatiky pro každého, ksvi.mff.cuni.cz/ucebnice/index.php/Ucebnice/Informace/Uvod_a_komunikace se svolením autora.

Jako první se v informatice nabízí úspornost kódování. Chceme, aby byly zakódované zprávy co možná nejkratší, aby šly rychle předávat. Neměly by používat zbytečně velkou abecedu, zároveň kódování a dekodování nemá být příliš složité. Čtenáře jistě napadne, že tyto požadavky jsou vlastně protichůdné; v praxi proto hledáme optimální řešení pro danou situaci. Např. internetový provoz běžně komprimován není. První mobilní připojení ale na komprimaci přenášených dat spoléhala, neboť telefony dekomprimaci stíhaly v reálném čase.

Další protichůdné požadavky najdeme ve vztahu k chybám při přenosu. V praxi k chybám dochází a dobré kódování si s nimi musí umět poradit. Např. ve zprávě se použije několik kontrolních znaků navíc a příjemce díky nim případné poškození zprávy odhalí, nebo dokonce opraví (aniž by musel žádat o opakovaný přenos zprávy).

S otázkou chybovosti souvisí otázka důvěrnosti zprávy. Odesílatel chce mít jistotu, že nezměněnou zprávu přečte právě jen příjemce, a příjemce chce jistotu, že zprávu opravdu odeslal odesílatel. Dalšími důležitými vlastnostmi kódování jsou snadnost použití (nikoliv jako u úlohy Kódy měst) a robustnost (v úloze Chybějící část zprávy).

V této části představujeme několik soutěžních úloh z Bobříka informatiky, při nichž soutěžící musí vzít v úvahu vlastnosti kódování. Soutěžící musí prokázat schopnost daný kód přečíst či rozluštit, zakódovat zprávu, ale také posoudit, zda zvolený způsob kódování není z hlediska některé své vlastnosti problematický nebo nevhodný.

Kódy měst

Kategorie Kadet, autor Willem van der Vegt.

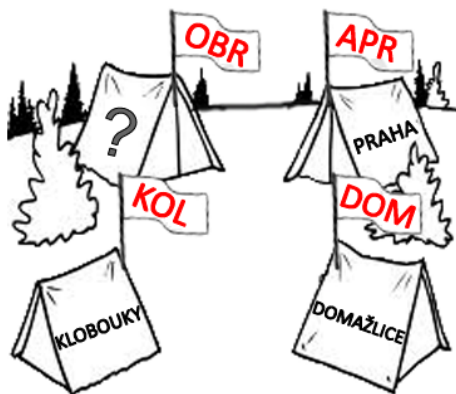
Zadání

Na skautském táboře se sjeli účastníci z celé republiky. Na svůj stan si každý vyvěsil praporek s kódem svého bydliště. Kód byl vytvořen následovně:

- Písmena názvu obce se seřadila podle četnosti výskytu.
- Nejčastěji se vyskytující znak se vzal jako první.
- Písmena se stejným počtem výskytů se seřadila v tom pořadí, v jakém se vyskytla v názvu města.
- Použila se první tři seřazená písmena.

Např. kód pro město HODONÍN byl ONH (písmena O a N se objevují dvakrát; O se objevuje první; z ostatních písmen použitých jednou je první

na řadě H: ONHDÍ). Několik dalších příkladů je vidět na obr. 2.



Obr. 2 Kódování měst

Která z následujících obcí nemá kód OBR?

- A) BOROHRÁDEK B) BOROVNICE C) BROUMOV D) OBORA

Co má tato úloha společného s informatikou

V úloze se sleduje, který z kódů je vytvořen podle popsanych pravidel. Můžeme v ní vidět nevhodně navržené kódování. Mnoho různých měst totiž dostává stejný kód, který tím pádem nelze jednoznačně dekódovat. S podobnou situací se setkáváme ve školním rozvrhu hodin. Na prvním stupni může vystačit jednopísmenná zkratka předmětu, později by ale nebylo možné odlišit zeměpis od základů společenských věd nebo historii od hudební výchovy. Proto jsou později zkratky předmětů aspoň dvou-písmenné. Ještě zapeklitější je pak situace na školách vysokých s množstvím podobných předmětů. Podobně se tvůrce rozvrhu musí rozhodovat v případě zkratk jmen učitelů. Zvolený systém musí všechny učitele jednoznačně rozlišit, musí umožnit snadné odvození zkratky učitele podle jména (i obráceně) a nesmí selhat, ani když na školu přijde učitel se stejnými iniciálami.

Zdůvodnění správné odpovědi

Správná odpověď je BOROHRÁDEK: jeho kód není OBR, ale ORB (dvakrát je přítomno O a R, proto musí být nejprve R a po něm B).

Velikosti kalhot

Kategorie Junior, autor Juha Vartiainen.

Zadání

Radek pracuje ve firmě, která vyrábí pánské kalhoty různých velikostí – S, M, L a X. Jeho úkolem je vložit kalhoty do krabice a na víko přidat razítko podle velikosti kalhot. Při razítkování se nedělají žádné mezery, vytváří se jedna řada znaků, např. SMMXLS.

Firma se rozhodla snížit počet razítek na dvě: O a $\diamond$. Radek tedy musí vymyslet jiný způsob značení vík beden, aby dvěma znaky nahradil čtyři písmena.

Který z následujících způsobů značení může bez obav použít?

- A) S: $\diamond$, M: $\diamond\diamond$, L: $\diamond\diamond\diamond$, X: $\diamond\diamond\diamond\diamond$
- B) S: $\diamond$, M: O, L: $\diamond\diamond$, X: O $\diamond$
- C) S: O, M: O $\diamond$, L: OO, X: O $\diamond$ O
- D) S: $\diamond$, M: O $\diamond$, L: OO $\diamond$, X: OOO

Co má tato úloha společného s informatikou

Častou metodou kódování je kódování s proměnnou délkou kódu pro jednotlivé znaky. Je používáno především tam, kde je požadována co nejkratší délka výsledného kódu (např. Huffmanova komprese, podrobně popsána na https://cs.wikipedia.org/wiki/Huffmanovo_kódování). Protože ale potom není hned jasné, kde jednotlivé kódy končí, je potřeba zajistit, aby kód žádného znaku netvořil začátek jiného kódu. Příklady nevhodných návrhů ukazuje právě tato úloha.

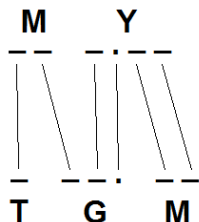
Podobný problém kdysi řešili výrobci telegrafu při používání Morseovy abecedy. Operátoři byli cvičeni v tom, aby dělali mezery mezi slovy třikrát delší než mezi písmeny. Pokud by je nedělali správně, mohlo docházet k omylům, např. řada znaků ---.-- může být mezerami rozdělena různými způsoby, jak je vidět na obr. 3. Podívejte se na video na <https://goo.gl/303z6y>.

Zdůvodnění správné odpovědi

Protože mezi značkami pro jednotlivé kalhoty nejsou žádné mezery, musí být jednotlivé kódy jednoznačné. To platí pouze u odpovědi D.

- V kódu A) S: $\diamond$, M: $\diamond\diamond$, L: $\diamond\diamond\diamond$, X: $\diamond\diamond\diamond\diamond$ by například X ($\diamond\diamond\diamond\diamond$) mohlo znamenat LS, SL i MM.
- V kódu B) S: $\diamond$, M: O, L: $\diamond\diamond$, X: O $\diamond$ by např. X (O $\diamond$) mohlo znamenat i MS.

- V kódu C) S: O, M: O◇, L: OO, X: O◇O by např. L (OO) mohlo znamenat i SS.
- Kód D) S: ◇, M: O◇, L: OO◇, X: OOO je správný, zde nemůže dojít k žádné záměně.



Obr. 3 Mezery na různých místech telegrafického záznamu mohou vytvářet ze stejného sledu teček a čárek různé zprávy

Chybějící část zprávy

Kategorie Senior, autoři Paul Miotti, Ivo Blöchliger.

Zadání

Honza dostal od Jirky tajnou zprávu, jejíž část někdo bohužel zamazal červenou barvou, jak můžeme vidět na obr. 4.

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Obr. 4 Chybějící informace

Chlapci možnost poškození zprávy předpokládali. Proto ke vzkazu přidali řádek a sloupec navíc. Každý čtverec v pravém sloupci (6) nebo v posledním řádku (6) je začerněný, pokud je v daném sloupci nebo řádku vzkazu lichý počet černých čtverců.

Která možnost patří místo červeného čtverce?



Co má tato úloha společného s informatikou

Úloha se týká zabezpečení přenosu signálu proti chybám, což je klasická partie informatiky. Když se na dálku (třeba po Internetu) přenáší signál, může dojít k jeho poškození. Kvůli poklesu napětí, změně světelných podmínek nebo změně magnetického pole může příjemce signálu obdržet 0 namísto 1 nebo naopak. To změni význam celé zprávy a celou ji tak znehodnotí.

Abychom tomuto nebezpečí předešli, zavádíme kontrolní mechanismy. Například součástí našeho rodného čísla je čtyřčíslí vybrané tak, aby bylo rodné číslo dělitelné jedenáctí. Pomocí dělení pak může být snadno odhalena chyba způsobená např. překlepem. Další metodou jsou kontrolní součty (https://cs.wikipedia.org/wiki/Kontrolní_součet), které byly použity v soutěžní úloze. Kontrolní součty v této úloze umožňují nejen zjistit, že k chybě došlo, ale také ve které části zprávy se tak stalo. Čím více kontrolních informací zašleme, tím rozsáhlejšímu poškození zprávy můžeme předejít.

Související informatické poznatky používáme intuitivně např. při diktování čísla bankovního účtu nebo telefonního čísla, kdy jej jednou sdělíme po dvojčíslicích a jednou po trojčíslicích, nebo necháme příjemce číslo pro kontrolu zopakovat. Podívejte se též na videa se školními aktivitami na detekování chyby na <http://csunplugged.org/error-detection>.

Zdůvodnění správné odpovědi

Jestliže poslední řádek a sloupec přidávají černý čtverec k lichému počtu černých čtverců a k sudému počtu nepřidává, musí být počet černých čtverců sudý ve všech řádcích a sloupcích (kromě posledního), viz obr. 5.

Správně je odpověď B). Na rozdíl od ostatních odpovědí mají všechny řádky i sloupce (kromě posledních s č. 6) sudý počet černých čtverců. Ostatní odpovědi nejsou správné: odpovědi A) a C) mají ve sloupci 3 a odpověď D) ve sloupci 4 lichý počet černých čtverců.

Doplňující otázka: Mohla zamazaná část zprávy vypadat ještě jinak, než nabízí naše čtyři odpovědi?

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Obr. 5 Doplnění chybějící informace

Agent Tajný

Kategorie Senior.

Zadání

Abeceda agenta Tajného má pouze 5 písmen. Tabulka ukazuje, jak se kódují.

S	O	N	E	T
10	01	11	001	000

Dostali jsme čtyři tajné zprávy. Která je od agenta Tajného?

- A) 110100001111
- B) 110100000100
- C) 110100000110
- D) 110100011111

Co má tato úloha společného s informatikou

Šifrování je jednou z důležitých součástí informatiky. Např. data přenášená po internetu ve skutečnosti prochází mnoha cizími zařízeními, která je tím pádem mohou číst. Proto je důležité mít možnost posílaná data zašifrovat. Z uvedeného plyne i rozdíl mezi kódováním a šifrováním: smyslem šifrování je skrýt informace v (jinak viditelné) zprávě před nepovolanými,

nebo jim aspoň přečtení zprávy náležitě ztížit. Naopak pro zamýšlené příjemce má být přečtení zprávy snadné a rychlé. Typickým řešením je použití šifrovacích klíčů známých jen omezenému okruhu lidí. Jiným (starším a nebezpečnějším) je zatajení samotného šifrovacího a dešifrovacího algoritmu.

Připomeňme slavné „šifrovací“ příběhy z 2. světové války. Nacistické Německo používalo šifrovací stroj Enigma, který i přes svoji vyspělost Britové dokázali po ukořisťení jednoho exempláře „prolomit“ a tajné zprávy dešifrovat již z kraje války.

Američané používali systém šifrování založený na indiánském jazyce Navaho. Zvláště vycvičení příslušníci tohoto nepočetného kmene byli součástí vojenských jednotek a zajišťovali komunikaci s ostatními. Jejich systém nebyl nikdy prolomen. Šifrování tak výrazně přispělo k úspěchu či porážce ve válce.

Zdůvodnění správné odpovědi

Správně je odpověď C) 11|01|000|001|10. Dešifrovanou zprávou je slovo NOTES. Když budeme ostatní zprávy rozdělovat na bloky nul a jedniček, uvidíme, že některé tyto bloky neodpovídají zašifrovaným písmenům abecedy agenta Tajného (tyto bloky jsou podtrženy):

11|01|000|01|11|1

11|01|000|11|11|1

11|01|000|001|00

Ověřte sami, že ani jednu z těchto tří zpráv nelze rozdělit tak, aby vznikala pouze písmena abecedy agenta Tajného.

Kódování obrázku

Kategorie Senior, autor Ilja Posov.

Zadání

Tomáš vymyslel způsob, jak zakódovat černobílý obrázek. Každý obrázek je popsán výpisem barev v jeho buňkách. Kóduje se zleva doprava a shora dolů.



Například BBBBČČČBB zakóduje obrázek

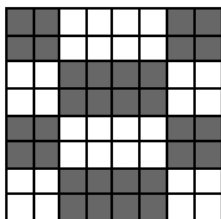
Pak Tomáš svůj kód vylepšil. Stejná písmena za sebou napsal pouze jednou a uvedl, kolikrát se opakují. Takto zapsal předchozí obrázek pouze šesti symboly: 4B3Č2B.

Při dalším vylepšení nepsal opakování jen pro jednotlivá písmena, ale pro celé bloky, které dával do závorek.

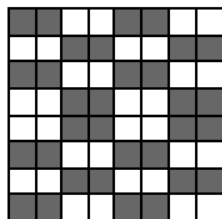


Například 4(ČB)Č zakóduje obrázek

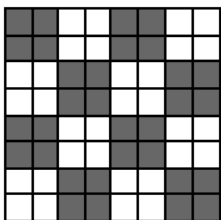
Který z následujících obrázků odpovídá kódu 2 (4 (2Č2B) 4 (2B2Č))?



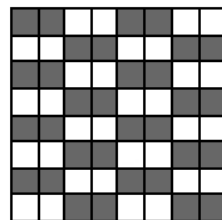
A)



B)



C)



D)

Co má tato úloha společného s informatikou

Úloha úzce souvisí s kódováním, tedy s domluveným způsobem záznamu informace pomocí předem dané sady znaků a pravidel. I text tohoto článku je zakódováním informací, zde pomocí znaků latinské abecedy a pravidel českého jazyka. Jiným příkladem kódování je Morseova abeceda.

Různá kódování jsou různě efektivní – podobně, jako se někdo vyjadřuje stručně a někdo jiný sdělí totéž velmi rozvlácným způsobem. Kódování z našeho příkladu je úsporné ve srovnání s jednoduchou maticí nul a jedniček (které bychom přidělili podle barvy příslušného pixelu).

Pokud chce čtenář přemýšlet nad důsledky, může si rozmyslet, na jakých obrázcích je kódování z naší úlohy nejúspornější. Patrně odhalí, že půjde o obrázky obsahující pravidelné vzory. Kódování uchovává veškerou informaci obsaženou v obrázku a nepravidelný obrázek nelze zakódovat příliš

úsporně. Lze také říci, že takový obrázek obsahuje mnoho informace – na rozdíl od obrázků typu bílá plocha, šachovnice atp. To je pro leckoho překvapivé: více informace zachycuje chaos a nahodilost, nikoliv řád. Je to nakonec známo i ze školy: zapamatování látky založené na několika dobře zorganizovaných pravidlech (počítání se zlomky, rozpoznání románského slohu) je snazší, než zapamatování látky obsahující mnoho výjimek (anglická slovesa v minulém čase).

Zdůvodnění správného řešení

Správný obrázek je C). Ostatní řešení jsou nesprávná:

- Když se podíváme na kód 2 (4 (2Č2B) 4 (2B2Č)), zjistíme, že se celá vnější závorka opakuje dvakrát. Takže správný obrázek musí mít horní a dolní polovinu stejnou, což obrázek D) nesplňuje – nemůže být správným řešením.
- Uvnitř velké závorky jsou další dvě závorky, které se čtyřikrát opakují. Každá z nich je jiná. Znamená to, že první dva řádky se musí lišit od druhých dvou řádků tabulky. Toto nesplňuje obrázek A).
- Kód (2Č2B) v první závorce se opakuje čtyřikrát a můžeme jej rozepsat jako ČČBBČČBB. Tomu neodpovídá první řádek obrázku B), který je souměrný podle svislé osy.

Závěrem

Úlohy ze soutěže jsou k dispozici na webu soutěže Bobřík informatiky <http://www.ibobr.cz>. Zde jsou stále přístupné archívni soutěžní testy. Učitel, který chce použít takové úlohy ve své výuce informatiky, může žáky nechat test vyplnit a poté nad odpověďmi žáků diskutovat. Může také test spustit při projekci před třídou a hromadně řešit pouze vybrané úlohy. Touto formou se žáci mohou seznámit s informatickými problémy a udělat si lepší představu o tom, jaké problémy informatika řeší a jaké myšlení vyžaduje. Budou pak ke studiu oboru připraveni lépe, než absolvováním pouhého praktického kurzu programování nebo naučením se technickým faktům o počítačích. I ti žáci, kteří obor studovat nepůjdou, se tu mohou naučit užitečné přístupy k řešení problémů, se kterými se ve škole nesetkali.

LITERATURA

Johannes Kepler: O šestiúhelné sněhové vločce poutavé čtení o „ničem“

Některé dárky přetrvávají celá staletí. Příkladem může být i útlé pojednání slavného německého matematika a astronoma *Johannese Keplera* (1571 Weil der Stadt – 1630 Řezno) sepsané v Praze roku 1611 jako novoroční pozdrav a dárek svému mecenáši a patronovi, kancléři Jeho Císařské milosti *Janu Matoušovi Wackerovi* z Wackenfelsu. Nakladatelství MatfyzPress připravilo pro české čtenáře dvojazyčné, latinsko-české vydání tohoto díla, jež je zajímavou sondou do Keplerova způsobu uvažování a argumentace (*Kepler, J.: O šestiúhelné sněhové vločce poutavé čtení o „ničem“*. MatfyzPress, Praha, 2016, ISBN 978-80-7378-328-0).



Podle Keplerových slov byla inspirací k sepsání pojednání chumelenice na Karlově mostě při jeho cestě na Hrad k císaři. S kancléřem Wackerem se znali od roku 1608 a spojovaly je i společné zájmy; kancléř např. zprostředkoval Keplerovi Galileova Hvězdného posla (i toto dílo je nyní k dispozici v českém překladu – viz recenzi F. Jáchima v předcházejícím, 1. čísle

26. ročníku MFI) a jako císařský vyslanec v Římě byl svědkem upálení *Giordana Bruna* – na jeho přezdítku Nolanus hravě odkazuje ono „nic“ z podtitulu, které má pan kancléř tak rád. . .

Český překlad *Petra Daniše* vychází ze souborného vydání Keplerových spisů v Mnichově roku 1941 a doplněn zasvěceným doslovem *Aleny Šolcové* na téma Kepler a Praha, kterou on sám nazýval „shromážděním národů“. Stručný životopis připomíná Keplerův plodný pobyt v naší metropoli orámovaný daty 19. 10. 1600 až 13. 4. 1612, kdy jako vdovec se dvěma malými dětmi po smrti císaře Rudolfa II. město opustil. V závěru knížky je pak uveden i soupis hlavních míst spojených s Keplerovým pobytem v Praze.

Jak v předmluvě připomíná *Václav Valvoda*, Keplerova rozsahem spíše drobná práce je spojená s hledáním počátečních idejí o vnější o vnitřní symetrii krystalických látek a i dnes může sloužit jako příklad vědeckého uvažování své doby. Kepler uvádí pět modelových představ o možné příčině hexagonálního tvaru sněhových vloček, přičemž se zvláště snaží hledat vnitřní a vnější příčiny v duchu svého přesvědčení, že „porovnáním mnoha omylů odhalíme pravdu“. Postupně se snaží čtivým, až skoro hravým stylem hledat odpovědi na otázky typu: „Co je to za sílu, která dává věcem tvar?“ Jako motivaci k tématu o vločkách píše: „Jsou menší než kapka vody, přesto mají vlastní tvar. To je přece vhodný dárek pro milovníka ničeho. Navíc je důstojným dárkem od matematika, který nic nemá a nic nedostává, neboť padá z nebe a je podobná hvězdám.“

Protože jde o průkopnické dílko svého druhu, Kepler sám v závěru naznačuje, že zatím ví o vločkách velmi málo: „Neboť já, když jsem zaklepal na dveře chemie a uviděl všechno, co zbývá prozkoumat, abychom se dobrali příčiny v této věci, raději chci od Tebe, pane z nejučenějších, slyšet, co si o tom myslíš, než Tě unavovat dalšími úvahami.“

Pokud vám nebo vašim přátelům není proti myslí Keplerovo zvolání „Ó, filosofie, bez tebe není život opravdový!“, knížečka by neměla ujít vaší pozornosti a může se stát i námětem na milý dárek podobně založeným přátelům. Keplerovi i vydavatelům se podařilo naplnit přesvědčení, že „tvořivý rozum nechce pouze naplnit daný účel, ale chce také tvořit věci krásné“.

Lukáš Richterek

Nepostradatelné matematické a fyzikální vzorce

Často říkám, že jestliže můžete cokoliv, o čem hovoříte, změřit nebo vyjádřit čísly, pak o tom vždy víte víc. . .

William Thomson – Lord Kelvin

Každý rok přinese spoustu nových dobrych knih a mnohem víc špatných. Vždy mě potěší, když mě někdo doporučí ty hodnotné, a ušetří mi tak práci s hledáním. A co máš rád sám, čiň jinému. Problém je v tom, že ročně vyjde u nás asi 17 tisíc titulů, z nichž významnou část představuje původní a přeložená literatura populárně-naučná, vědecká, technická či učebnicová z nejrůznějších oblastí přírodovědných a společenskovedných oborů. Další potíž spočívá v tom, jak ostatním čtenářům představit tituly, které by se pro mnohé z nich daly celé nebo z velké části, označit za užlechlou nudu.

Poněkud stranou všech ostatních vědních disciplín stojí matematika. Je to věda? Je to umění, od kterého ji lze těžko vnímat bez určitých, často značných a specializovaných znalostí? Je to styčný bod mezi rozumem a fantazií, kde je skutečné a neskutečné dokonale uspořádáno? Možná, ale možná je to něco úplně jiného. Věda o číslech a jejich studium patří patrně k nejstarším naukám na Zemi a její původ je ztracen v temnotách času. Nad vchodem do Platónovy Akademie prý stál nápis: „Bez znalosti geometrie sem nikdo nevstupuj.“ Matematiku lze dnes použít

s různou úspěšností na všechno. V nejednodušším pojetí se zabývá množstvím, základními způsoby počítání, strukturami čísel, vzory a jejich vzájemným propojením; prostorem, charakteristikou tvarů a ploch; a nakonec chápáním změn sledováním dynamických systémů od okamžiku do okamžiku. Matematika je nesmírně rozsáhlá; známe matematiku starou i moderní, teoretickou i aplikovanou, abstraktní i konkrétní. A co teprve názvy jednotlivých matematických oborů – teorie čísel, grup, množin, her, grafů, chaosu či informací, fraktály, filozofie matematiky, diskrétní geometrie, funkcionální analýza, kalkulus, pravděpodobnost, proudění, kryptografie atd.

V každodenním životě, aniž si to uvědomujeme, neustále narážíme na další obtížnou základní vědu úzce spjatou s matematikou – fyziku. Zkoumá obecné vlastnosti přírodních objektů a zákonitosti společné všem přírodním jevům. Vychází z jejich systematického pozorování, empirických zkušeností a experimentů, jejichž výsledky zpracovává matematicky do podoby fyzikálních zákonů a teorií, které pak zpětně experimentálně ověřuje. Ve fyzikální komunitě se traduje výrok významného teoretického fyzika a nositele Nobelovy ceny Paula Diraca o tom, že „fyzikální zákony by měly být matematicky krásné“. Byl přesvědčen, že pro krásnou teorii má příroda vždy uplatnění. Plna překvapení je zvláště fyzika moderní se svými představami a myšlenkami o hmotě v pohybu, fyzice vln, kvantových hlavolamech, dělení atomů nebo prostoru a času. Některé názvy fyzikálních jevů a používané pojmy znějí pro ty, kteří matematicko-fyzikální obory „nemusi“, jako šíření poplašených zpráv – antihmota, černé díry, vesmírná inflace, teorie strun, Schrödingerova kočka, Fraunhoferův ohyb, kvantová fyzika a relativita, motýlí jev, paradoxní částice aj.

Cesta k dnešní matematice a fyzice byla dlouhá a za poslední tři tisíciletí po ní kráčely nespočetné generace vzdě-

laných, mnohdy bez nadsázky geniálních učenců. Téměř neuvěřitelné spektrum matematických a fyzikálních vzorců, zákonů a principů, od těch nejprostších až po vysoce komplikované teorie, pokrývá útlá knížka britského filozofujícího matematika a aktivního hudebníka Matthewa Watkinse *Nepostradatelné matematické a fyzikální vzorce*. Navíc je vybavena mnoha zábavnými ilustracemi Matte Tweeda, které vysvětlují některé koncepty lépe než celé stránky textu. Publikaci z anglického originálu (2000 a 2012) přeložila Jiřina Vítů a vydalo ji jako 21. svazek oblíbené edice „malých knih, velkých myšlenek“ Pergamen nakladatelství Dokořán (Praha 2016, 1. české vydání, 58 stran).



Jakými zákony se řídí zvukové vlny? Chcete znát řetězový zlomek čísla π ? Hledáte vzorec pro objem kuželu? Sinus součtu úhlů? Sférický trojúhelník? Keplerovy a Newtonovy zákony? Gaussovo rozdělení? Balistickou rovnici? Kombinace a permutace? Matice a vektory? Nebo snad Avogadrovu, Faradayovu, Loschmidtovu, Planckovu či Rydbergovu konstantu? Moment setrvačnosti, Boyleův zákon, derivace, Planckovu délku, zákony elektromagnetického pole, teorii relativity? Pokud byste si rádi v přívětivé, nenáročné na pochopení a snadno použitelné podobě chtěli osvěžit trigonometrii, řešení kvadratických rovnic, infinitezimální počet, vztahy goniometrických funkcí, gravitační zákony, pře-

vody zajímavých a méně známých jednotek, něco ze statistiky nebo matematické analýzy a řady další oborů, jste na správné adrese. Pokud takovou potřebu nemáte, je možno v knize jen zalistovat a potěšit se největšími výtvary lidského ducha v hutné podobě rovnic a náčrtků, které jsou esteticky působivé samy o sobě. Vtipné kresby tuto jejich vlastnost jen umocňují. Využití čísel a symbolů k modelování, předpovídání a ovládání reality je mocnou zbraní, kterou můžeme mimo jiné nacházet souvislosti i ve zdánlivě velmi odlišných oblastech (světlo a elektřina, hmota a energie).

Autoři díla sice předkládají zájemcům ve všech věkových kategoriích prostřednictvím hlavních matematických a fyzikálních myšlenek, zhuštěných do podoby vzorců, jen letmý pohled do světa fyziky, ale snad – podobně jako dobrý turistický průvodce – nabízejí pro ně i něco navíc: *Fyzika není jen věda, ale je to také zábava.*

Bohumil Tesařík

Josef Polák:

DIDAKTIKA MATEMATIKY

Jak učit matematiku zajímavě
a užitečně

II. část – Obecná didaktika matematiky

Publikace vyšla v Nakladatelství Fraus v roce 2016 knižně (ISBN 978-80-7489-326-1) a elektronicky (na www.flexibooks.cz).

Kniha (o rozsahu 160 stran) je rozčleněna do 15 kapitol:

1. Didaktika matematiky, její význam, základní úkoly a metody
2. Matematika jako věda a jako školní předmět
3. Historický vývoj vyučování matematice
4. Didaktické zásady a poznávací procesy ve výuce matematiky

5. Metody vyučování a styly učení, tradiční a konstruktivistické pojetí vyučování matematice

6. Organizační formy vyučování matematice

7. Hodnocení znalostí, dovedností a návyků žáků v matematice

8. Komunikace ve vyučování matematice, jazyk matematiky a jeho uplatnění ve školské praxi

9. Učivo ve školním vzdělávání, psychodidaktický přístup k učivu, didaktický systém učiva matematiky

10. Matematické problémy a úlohy ve školské matematice

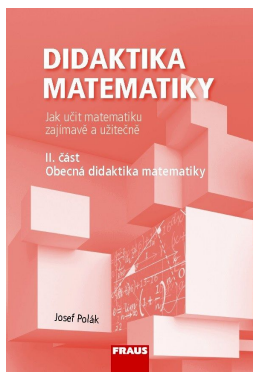
11. Aplikace matematiky, aplikační matematické úlohy

12. Environmentální výchova ve výuce matematiky

13. Netradiční (inovativní) metody a formy výuky matematiky, práce s talentovanými žáky v matematice

14. Využití informačních a komunikačních technologií ve výuce matematiky

15. Kurikulum a kutikulární reforma, základní kutikulární dokumenty a klíčové kompetence v matematice



Za významný přínos této II. části první české souborné knižní publikace didaktiky středoškolské matematiky pokládám autorovo velmi aktuální a systematické zpracování základních pojmů a metod obecné di-

daktiky matematiky. Obsahuje nejen jejich podrobné popisy, ale též didaktické rozbor v souladu se současnou pedagogickou literaturou. Charakteristické a prakticky velice důležité je, že autor v celé knize uvádí i četné příklady užití didaktické teorie ve školní praxi a konkrétní podněty pro práci učitele matematiky.

Publikace je velmi pěkně graficky zpracována, včetně názorných schémat a obrázků.

III. část – Historie matematiky pro učitele

Publikace vyšla v Nakladatelství Fraus v roce 2016 knižně (ISBN 978-80-7489-327-8) a elektronicky (na www.flexibooks.cz).

Kniha (o rozsahu 180 stran) je rozčleněna do 3 kapitol:

1. Historie matematiky ve stručném přehledu

2. Přehled významných světových matematiků

3. Medailonky význačných matematiků

V 1. kapitole se čtenář seznámí s periodizací dějin lidstva, s periodizací historického vývoje matematiky a s přehledem historie matematiky. 2. kapitola obsahuje stručné chronologické přehledy života a díla významných světových matematiků. Ve 3. kapitole autor jednotně vytvořil velmi zajímavé a čtivé medailonky význačných osobností světové matematiky.

Také celá III. část knihy je zpracována velice pěkně a přehledně graficky. Doplněna je o portréty některých významných matematiků. Může být zajímavá a užitečná nejen pro učitele matematiky, ale lze ji vřele doporučit i všem dalším čtenářům zajímavajícím se o historii matematiky a podivuhodné životní osudy význačných matematiků.

Autorovi lze jen vyjádřit obdiv, blahopřát a popřát hodně čtenářů z řad žáků, studentů i učitelů.

František Kopecký