

Využití diskriminantu kvadratické rovnice

JAROSLAV ŠVRČEK – DAG HRUBÝ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Pojem diskriminantu kvadratické rovnice patří mezi základní pojmy středoškolské matematiky. Setkáváme se s ním nejen při řešení kvadratických rovnic, ale také při studiu kvadratických funkcí nebo při určování tečen ke kuželosečkám. Cílem článku, který je určen především učitelům pracujícím s nadanými žáky, je poukázat na další možnosti využití známých vlastností diskriminantu při důkazech některých typů algebraických nerovností, při řešení jistých typů diofantovských rovnic a také při hledání extrémů některých funkcí bez použití diferenciálního počtu.

K pochopení uvedené problematiky nejsou potřebné žádné speciální znalosti přesahující rámec středoškolské matematiky. Připomeňme nyní základní pojmy, které budeme v tomto příspěvku používat.

Kvadratickou rovnici o neznámé x s reálnými koeficienty $a \neq 0$, b , c rozumíme rovnici

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Jak známo, tato kvadratická rovnice má dva reálné kořeny, právě když její *diskriminant* $D = b^2 - 4ac$ je nezáporný. V opačném případě má tato rovnice dva komplexně sdružené kořeny. Pro $D < 0$ nemá graf funkce $y = ax^2 + bx + c$ s osou x kartézského souřadnicového systému Oxy žádný společný bod.

Jednotlivé aplikace diskriminantu kvadratické rovnice budou dále prezentovány a komentovány při řešení konkrétních úloh. V závěru článku jsou pak uvedeny některé další neřešené úlohy k procvičení uvedených postupů.

1. Důkazy algebraických nerovností

Vlastnosti diskriminantu lze, jak vzápětí ukážeme, efektivně využít v důkazech algebraických nerovností, v nichž aspoň jedna z proměnných v dokazované nerovnosti je stupně 2.

Příklad 1 (6. česko-polsko-slovenská MO juniorů, 2017, viz [1])

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y platí nerovnost

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) \geq 2(xy - 1)(x + y).$$

Řešení. Danou nerovnost přepíšeme do ekvivalentního tvaru

$$(y - 1)^2 x^2 - 2(y^2 - 1)x + (y + 1)^2 \geq 0. \quad (1)$$

Je-li $y = 1$, je nerovnost (1) a také daná nerovnost splněna triviálně pro všechna reálná čísla x . Předpokládejme dále, že $y \neq 1$. V tomto případě lze na levou stranu (1) pohlížet jako na kvadratickou funkci o proměnné x a (reálném) parametru y . Snadno se vidí, že pro diskriminant odpovídající kvadratické rovnice platí

$$D = 4(y - 1)^2(y + 1)^2 - 4(y - 1)^2(y + 1)^2 = 0.$$

Vzhledem k tomu, že koeficient u kvadratického členu zkoumané funkce je kladný (platí totiž $(y - 1)^2 > 0$), je nerovnost (1) splněna pro libovolné reálné číslo x a pro libovolné $y \neq 1$. Tím jsme dokázali platnost dané nerovnosti pro všechna reálná čísla x, y .

Poznámka. Důkaz dané nerovnosti lze mj. vést např. využitím skutečnosti, že levá strana ekvivalentní nerovnosti (1) je druhou mocninou výrazu

$$x(y - 1) - (y + 1),$$

kde x, y jsou libovolná reálná čísla.

Příklad 2 (Cauchyho-Schwarzova nerovnost)

Nechť n je přirozené číslo. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) platí nerovnost

$$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2. \quad (2)$$

Kdy nastane rovnost?

Řešení. Pokud $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ nebo $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$, je nerovnost (1) splněna triviálně a navíc v ní nastane rovnost. Předpokládejme dále, že $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$, a uvažujme funkci $f(\lambda)$, kde

$$f(\lambda) = (\lambda x_1 - y_1)^2 + (\lambda x_2 - y_2)^2 + \dots + (\lambda x_n - y_n)^2 \quad (3)$$

s reálnými parametry x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Je zřejmé, že funkce $f(\lambda)$ nabývá pro všechna reálná čísla λ nezáporných hodnot, a to bez ohledu na volbu reálných parametrů x_i, y_i . Funkční předpis (3) upravíme dále (s ohledem na předpoklad $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 > 0$) do tvaru kvadratické funkce s proměnnou λ a reálnými parametry x_i, y_i . Platí

$$f(\lambda) = (x_1^2 + \dots + x_n^2)\lambda^2 - 2(x_1y_1 + \dots + x_ny_n)\lambda + (y_1^2 + \dots + y_n^2) \quad (4)$$

Vzhledem k tomu, že tato kvadratická funkce nabývá výhradně nezáporných hodnot, je její diskriminant D je nekladný, tj. platí nerovnost

$$D = 4(x_1y_1 + \dots + x_ny_n)^2 - 4(x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) \leq 0.$$

Odtud již bezprostředně plyne nerovnost (2) a důkaz je tedy i v tomto případě uzavřen.

Rovnost v (2) nastane s ohledem na tvar (3) funkce $f(\lambda)$, právě když existuje reálné číslo λ takové, že pro všechna $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ platí $\lambda x_i = y_i$ nebo pokud $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

2. Řešení diofantovských rovnic

V této části poukážeme na možnost využití diskriminantu kvadratické rovnice při řešení některých typů diofantovských rovnic. Níže prezentovaný postup se často nazývá *metoda diskriminantu*.

Příklad 3

Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel vyhovujících rovnici

$$x^2 + x + 1 = y^2.$$

Řešení. Danou diofantovskou rovnici můžeme řešit jako kvadratickou rovnici s neznámou x a celočíselným parametrem y ve tvaru

$$x^2 + x + (1 - y^2) = 0. \quad (5)$$

Snadno se přitom vidí, že pro každý celočíselný parametr y ($y \neq 0$) je diskriminant $D = 4y^2 - 3$ rovnice (5) kladný. K tomu, aby kvadratická rovnice (3) měla celočíselný kořen x je nutné (nikoliv však postačující), aby hodnota jeho diskriminantu byla druhou mocninou některého přirozeného čísla, tj. aby platilo

$$4y^2 - 3 = m^2,$$

kde m je přirozené číslo (právě tento krok je často označován jako metoda diskriminantu). Po úpravě poslední rovnice dostaneme

$$4y^2 - m^2 = (2y - m)(2y + m) = 3. \quad (6)$$

Protože pravá strana rovnice (6) má prvočíselnou hodnotou, máme právě dvě možnosti, jak rozložit prvočíslo 3 na součin dvou celočíselných činitelů. Platí tedy (bez ohledu na pořadí činitelů)

$$(2y - m)(2y + m) = 3 = 1 \cdot 3 = (-1) \cdot (-3).$$

Vzhledem k tomu, že m je přirozené číslo, je $2y - m < 2y + m$. Stačí tedy uvažovat pouze následující dvě soustavy lineárních rovnic o neznámých y a m . První z nich

$$\begin{aligned} 2y - m &= 1, \\ 2y + m &= 3 \end{aligned}$$

má řešení $y = 1$, $m = 1$ a pro diskriminant D příslušné kvadratické rovnice platí $D = 1$. Odpovídající hodnoty neznámé x v dané diofantovské rovnici pro nalezenou hodnotu y získáme dosazením $y = 1$ do rovnice (5) a řešíme tak kvadratickou rovnici $x^2 + x = 0$, která má celočíselné kořeny 0 a -1 .

Podobně řešením druhé soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 2y - m &= -3, \\ 2y + m &= -1 \end{aligned}$$

dostáváme $y = -1$ a $m = 1$. Dosazením za y do (5) řešíme stejnou kvadratickou rovnici jako v předchozím případě s kořeny 0 a -1 .

ZÁVĚR. Daná diofantovská rovnice má čtyři celočíselná řešení, jimiž jsou uspořádané dvojice $(x, y) \in \{(0; 1), (-1; 1), (0; -1), (-1; -1)\}$.

Poznámka. Z pohledu analytické geometrie kuželoseček představuje daná rovnice v příkladu 3 rovnici hyperboly. Závěr řešení této úlohy nás přitom

vede k zajímavému zjištění: Na obou větvích této hyperboly leží pouze 4 body s oběma celočíselnými souřadnicemi (tzv. mřížové body). Jejich souřadnice korespondují s řešeními dané úlohy.

Příklad 4 (50. Běloruská MO, 2000)

Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, pro něž platí

$$y(x^2 + 36) + x(y^2 - 36) + y^2(y - 12) = 0.$$

Řešení. Danou diofantovskou rovnici nejprve upravíme do tvaru kvadratické rovnice

$$yx^2 + (y^2 - 36)x + y(y - 6)^2 = 0 \quad (7)$$

s neznámou x a s celočíselným parametrem y . Je-li $y = 0$, pak podle (7) platí i $x = 0$, a dvojice $(x, y) = (0; 0)$ je řešením dané rovnice.

Dále nechť $y \neq 0$. Diskriminant D kvadratické rovnice (7) musí být nutně nezáporný a navíc musí být druhou mocninou některého celého nezáporného čísla. Platí přitom

$$D = (y^2 - 36)^2 - 4y^2(y - 6)^2 = (y - 6)^2[(y + 6)^2 - 4y^2] = 3(y - 6)^2(6 - y)(y + 2).$$

Odtud plyne, že buď $y - 6 = 0$, tj. $y = 6$, nebo součin $3(6 - y)(y + 2)$ musí být druhou mocninou některého celého nezáporného čísla. Řešením kvadratické nerovnice

$$(6 - y)(y + 2) \geq 0$$

zjistíme, že hledaná celá čísla y patří do uzavřeného intervalu $\langle -2; 6 \rangle$. Postupným dosazením všech devíti celočíselných hodnot y z tohoto intervalu do výrazu $3(6 - y)(y + 2)$ snadno zjistíme, že tento výraz je dvojmocí některého celého nezáporného čísla, pouze pokud y nabývá některou ze tří celočíselných hodnot -2 , 4 nebo dříve určené číslo 6 .

Tím dostáváme další čtyři celočíselná řešení dané rovnice, kterými jsou uspořádané dvojice $(-8; -2)$, $(1; 4)$, $(4; 4)$ a $(0; 6)$.

ZÁVĚR. Daná diofantovská rovnice má pět celočíselných řešení, jimiž jsou uspořádané dvojice $(x, y) \in \{(0; 0), (-8; -2), (1; 4), (4; 4), (0; 6)\}$.

3. Vyšetřování extrémů funkcí

Hledání extrémů, tj. nalezení největší a nejmenší hodnoty dané funkce jedné reálné proměnné na svém definičním oboru patří mezi základní úkoly

při zkoumání průběhu dané funkce. Při řešení následujících dvou úloh ukážeme, jak je možno v některých případech postupovat při řešení uvedeného problému bez použití diferenciálního počtu (bez derivace funkce). Jedná se především o některé funkce, jejichž funkční předpis $y = f(x)$ lze po úpravě získat ve tvaru kvadratické rovnice s neznámou x a s (reálným) parametrem y , a také o samotné kvadratické funkce. Poznamenejme ještě, že při hledání extrémů (popř. lokálních extrémů) mnoha takových funkcí lze často využít (kromě diferenciálního počtu a nebo např. doplnění kvadratického trojčlenu na dvojmoc) také např. základní algebraické nerovnosti, jako je známá A-G nerovnost.

Příklad 5

Určete extrémy (kvadratické) funkce

$$y = 2x^2 - x + 1.$$

Řešení. Danou funkci upravíme do tvaru kvadratické rovnice

$$2x^2 - x + (1 - y) = 0 \tag{8}$$

s neznámou x a reálným parametrem y . Definičním oborem dané funkce je množina $\mathbb{R}$ všech reálných čísel, a proto pro libovolné y z hledaného oboru hodnot dané funkce existuje (aspoň jedno) $x \in \mathbb{R}$ takové, že platí (8). Určíme tedy všechna $y \in \mathbb{R}$, pro něž má kvadratická rovnice (8) reálné kořeny, tj. hledáme všechna $y \in \mathbb{R}$, pro něž je diskriminant rovnice (8) nezáporný. Pro diskriminant D rovnice (8) musí proto platit

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (1 - y) = 8y - 7 \geq 0,$$

a tudíž $y \geq 7/8$. Daná kvadratická funkce tedy nabývá svého minima $y = 7/8$ pro $x = 1/4$, jak snadno zjistíme dosazením nalezené nejmenší hodnoty $y = 7/8$ do dané rovnice nebo do rovnice (8). Z nalezeného výsledku je rovněž patrné, že daná funkce není shora omezená, což je ve shodě se známým chováním kvadratické funkce daného typu.

Příklad 6

Určete extrémy funkce

$$y = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Řešení. Pro $y \neq 0$, tj. pro $x \neq 0$ upravíme danou funkci do tvaru kvadratické rovnice

$$yx^2 - x + y = 0. \tag{9}$$

Definičním oborem dané funkce je i v tomto případě celá množina reálných čísel. Využitím vlastnosti diskriminantu kvadratické rovnice (9) určíme její obor hodnot. Kvadratická rovnice (9) má diskriminant $D = 1 - 4y^2$, který musí být nezáporný, tj. musí platit $1 - 4y^2 \geq 0$. Pro odpovídající funkční hodnoty y tedy platí $y \in \langle -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \rangle$. Odtud vidíme, že zkoumaná funkce je omezená, tj. omezená současně shora i zdola. Její minimální hodnota je $y = -\frac{1}{2}$, kterou, jak snadno zjistíme po dosazení za y do (9), nabývá pro $x = -1$. Její maximální hodnota je $y = \frac{1}{2}$, již daná funkce nabývá pro $x = 1$. Vzhledem k tomu, že funkční hodnota $y = 0$ (dosažená v bodě $x = 0$) není extrémální hodnotou dané funkce ($-\frac{1}{2} < 0 < \frac{1}{2}$), je daná úloha vyřešena.

K procvičení uvádíme trojici neřešených úloh (po jedné ke každé z výše uvedených aplikací diskriminantu kvadratické rovnice).

Příklad 7

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y, z platí nerovnost

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

a určete, kdy nastane rovnost.

Příklad 8

Určete všechny dvojice (m, n) celých čísel splňujících rovnici

$$m^2 + n^2 = mn + 3.$$

[Řešení: $(m, n) \in \{(1; -1), (-1; 1), (2; 1), (1, 2), (-2; -1), (-1; -2)\}$.]

Příklad 9

Určete extrémy funkce

$$y = \frac{x - 1}{x^2 + x + 1}.$$

$[y_{\min} = -1 - 2\sqrt{3}/3 \text{ pro } x = 1 - \sqrt{3}; y_{\max} = -1 + 2\sqrt{3}/3 \text{ pro } x = 1 + \sqrt{3}.]$

Literatura

- [1] Švrček, J.: 6. česko-polsko-slovenská MO juniorů. MFI, roč. 26 (2017), č. 4, s. 318–319.

O porovnání mocnin a^b a b^a

JAROMÍR ŠIMŠA

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

Výuka diferenciálního počtu na gymnáziích vrcholí praktickými ukázkami vyšetřování průběhu konkrétně zadávaných elementárních funkcí. Z časových důvodů přitom žákům neuvádíme motivační situace, které k potřebě zkoumání té či oné funkce vedou. V učebnici [1] sice pár takových praktických ukázek z oblasti geometrie a fyziky nechybí, otázkou však zůstává, kolik z nich v omezeném čase stačíme s žáky probrat. V tomto článku se proto budeme věnovat jedné poměrně málo známé, pojmově dobře přístupné a časově nenáročné ukázce užití diferenciálního počtu v oblasti číselných výpočtů, ukázce, na kterou lze i k našemu předmětu lhostejnější žáky navnadit nabídkou experimentování s kalkulačkami. Ukážeme rovněž, jak lze dané téma pro matematicky zdatnější žáky prodloužit o malou exkurzi do teorie racionálních čísel. Méně zdatným žákům můžeme místo toho alespoň nabídnout zajímavý příklad na počítání s mocninami, který autor článku v žádné sbírce příkladů na úpravy algebraických výrazů snad nikdy neviděl (určitě by si ho zejména v mladším věku zapamatoval). Něco z článku lze uplatnit i při dřívější výuce věnované elementárním, konkrétně mocninným a exponenciálním funkcím.

Slíbený námět je prozrazen již v názvu našeho článku: budeme řešit *jak pro daná kladná reálná čísla a a b v případě $a \neq b$ rozhodnout, která z mocnin a^b nebo b^a je větším číslem*. Ukážeme, že pro některé takové dvojice (a, b) je odpověď snadná (příklad 1), pro jiné dvojice lze uplatnit hlubší větu 1, k jejímuž důkazu budeme – možná poněkud překvapivě – potřebovat právě diferenciální počet. Konečně pro zbývající dvojice (a, b) je porovnání mocniny a^b s mocninou b^a obtížnou otázkou, při níž přes předpoklad $a \neq b$ nelze vyloučit kuriózní rovnost $a^b = b^a$. Té se budeme též v článku zevrubně věnovat a mj. pro ni dokážeme pozoruhodnou větu 2.

Co vše napoví kalkulačka

Žáky vybavené kalkulačkami s tlačítkem $\boxed{\wedge}$ můžeme vyzvat, aby se pokusili zjistit nějaké poznatky o srovnání hodnot a^b a b^a cestou různých voleb kladných čísel a a b . Nemusíme k tomu hned dodávat nějaké in-

strukce, stačí jen poznamenat, proč nás nezajímá ani případ $a = b$, ani případ, kdy jedno z čísel a, b je rovno jedné.

Není vyloučeno, že brzy poté se někdo z žáků vytasí s překvapivou rovností $2^4 = 4^2$. Pokud ne, můžeme třídu k hledání takového příkladu ponouknout. A když už ono dvojí vyjádření čísla 16 napíšeme na tabuli, zeptáme se vzápětí žáků, zda někdo najde jiný příklad téhož ražení. Protože se tak patrně nestane¹⁾, po chvíli dotyčného ticha vyzveme žáky, aby rovnost $a^b = b^a$ otestovali na kalkulačce pro hodnoty $a = \sqrt{3}$ a $b = 3\sqrt{3}$ – bude to současně i prověrka toho, jak dobře žáci práci s kalkulačkou ovládají i jak je kalkulačka přesná. V některých třídách si pak dovolíme i položit znepokojující otázku, zda shodnost obou na displeji zobrazených výsledků mocnění je skutečným důkazem posuzované rovnosti. Ten pak s žáky snadno provedeme, když obě strany rovnosti upravíme na mocninu čísla 3 s týmž exponentem $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

V druhé fázi numerického experimentování s kalkulačkou nasměrujeme žáky, aby porovnávali hodnoty mocnin a^b a b^a pro dvojice kladných čísel a, b s malou (kladnou) odchylkou $|a - b|$. Nejdříve je přitom vyzveme k ověření nerovností

$$\begin{aligned} 2,1^2 &> 2^{2,1} & (4,41 > 4,287\dots), \\ 3,1^3 &< 3^{3,1} & (29,791 < 30,135\dots), \end{aligned}$$

které ukazují, že čísla 2 a 3 patří, obrazně řečeno, do dvou různých táborů čísel, protože mají v daném ohledu protichůdné vlastnosti. Žáci mohou dále otestovat, že do tábora čísla 2 patří všechna (kladná) čísla menší než 2 a že do tábora čísla 3 patří všechna čísla větší než 3. Pak můžeme vystupňovat napětí ve třídě otázkou, kdo najde co největší číslo z prvního tábora (patří tam například číslo 2,6) a co nejmenší číslo z druhého tábora (s číslem kupříkladu 2,8). Třeba se pak někdo z žactva přihlásí s domněnkou, že oba tábory na číselné ose odděluje proslulé číslo e , které známe jako *základ přirozených logaritmů*. Budeme tak s žáky motivováni k „intervalovému“ vymezení obou táborů danému níže ve větě 1, která dotyčnou hypotézu v obecnější podobě potvrzuje a kterou užitím derivací snadno dokážeme. Ve třídách, kde diferenciální počet neprobíráme, můžeme žákům větu 1 pouze prozradit, ilustrovat její obsah dalšími numerickými ukázkami a obecně vyřešit alespoň následující příklad.

¹⁾ Jak se dále ukáže, není toto negativní konstatování projevem autorova pedagogického pesimismu. Při psaní článku ho naopak provázela opačná duševní vlastnost, jak je snad místy z textu patrné. Autor dokonce věří, že si ho přečtou nejen recenzenti.

Příklad 1

Je-li $0 < a < 1 < b$, je z čísel a^b , b^a větší to druhé. Dokažte.

Řešení. Exponenciální funkce $y = r^x$ s daným základem r je v proměnné x jak známo klesající, resp. rostoucí, je-li $0 < r < 1$, resp. $r > 1$. Odtud dvojím užitím (pro $r = a$ a pro $r = b$) za předpokladu $0 < a < 1 < b$ dostaneme potřebné:

$$b^a > b^0 = 1 > a = a^1 > a^b.$$

Věta 1

Pro libovolná kladná reálná čísla a, b v případě $a < b \leq e$ platí $b^a > a^b$, zatímco v případě $e \leq a < b$ platí naopak $a^b > b^a$.

Důkaz. Jak účinně vystihnout, kdy pro kladná čísla a, b platí nerovnost $a^b > b^a$? Jejím logaritmováním a následným vydělením součinem ab dostaneme ekvivalence

$$a^b > b^a \iff b \ln a > a \ln b \iff \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln b}{b}.$$

S ohledem na symetrii řešené otázky v číslech a, b vidíme, že porovnání hodnot a^b, b^a dopadne *vždy stejně* jako porovnání hodnot $f(a), f(b)$ (v tomto pořadí) pro funkci f definovanou na množině všech kladných čísel předpisem

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Tvrzení dokazované věty tak lze zapsat implikacemi

$$0 < a < b \leq e \Rightarrow f(a) < f(b) \quad \text{a} \quad e \leq a < b \Rightarrow f(a) > f(b),$$

které vyjadřují právě to, že funkce f je rostoucí na intervalu $(0, e)$ a klesající na intervalu (e, ∞) . To můžeme (podle známé poučky z diferenciálního počtu) ověřit výpočtem její derivace a určením intervalů, kde je tato derivace kladná, resp. záporná:

$$f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x} \right)' = \frac{(1/x) \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

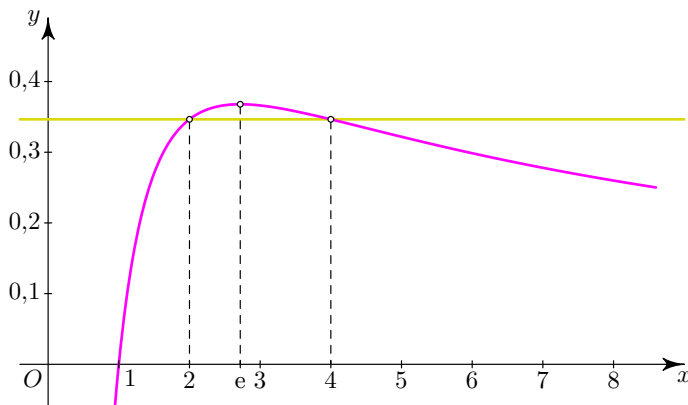
$$f'(x) > 0 \iff \ln x < 1 \iff x \in (0, e),$$

$$f'(x) < 0 \iff \ln x > 1 \iff x \in (e, \infty).$$

Tím je celý důkaz hotov.²⁾ Graf funkce f , kterou jsme při něm využili, je vykreslen na obr. 1, a to společně s přímkou o rovnici $y = c$, kde konstanta c je společná hodnota funkce f v bodech $x = 2$ a $x = 4$. Skutečně,

$$f(2) = \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{1}{4} \ln 4 = f(4),$$

což odpovídá také dříve uvedené rovnosti $2^4 = 4^2$.



Obr. 1

Případ rovnosti $a^b = b^a$

Podle příkladu 1 a postupu z důkazu věty 1 je zřejmé, že porovnání mocnin a^b a b^a je problematické v situaci, kdy obě čísla a, b jsou větší než 1 a přitom „odděleny“ číslem e , tedy $1 < a < e < b$ bez újmy na obecnosti. Graf funkce f to dobře dokládá, navíc umožňuje graficky určovat dvojice čísel (a, b) splňující podmínky

$$a^b = b^a, \quad \text{kde } a \in (1, e) \text{ a } b \in (e, \infty),$$

a to s mírou přesnosti odpovídající kvalitě jeho vykreslení. Dokonce je očividné (a Bolzanovou větou o mezihodnotách spojitě funkce exaktně zaručené), že pro každé $a \in (1, e)$ existuje taková dvojice (a, b) s (jediným) vhodným $b \in (e, \infty)$. Bylo by jistě žádoucí mít pro dotyčné dvojice (a, b)

²⁾Fakt, že intervaly monotonie $(0, e)$ a (e, ∞) můžeme rozšířit na intervaly $(0, e)$ a (e, ∞) , je důsledkem spojitosti funkce f (v bodě e).

analytické vzorce! Ano, takové vzorce existují a uvedeme je teď v zadání úkolu, který může nezasvěceného vykonavatele v případě úspěšného dopočtu docela mile překvapit.

Příklad 2

Vypočtěte rozdíl $a^b - b^a$ pro hodnoty a, b určené vzorcí

$$a = \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r \quad a \quad b = \left(1 + \frac{1}{r}\right)^{r+1}, \quad (\text{V})$$

kde $r > 0$ je dané číslo.

Řešení. Hledaný rozdíl je roven *nule* pro každé $r > 0$, neboť obě mocniny a^b a b^a se pro určená a, b rovnají:

$$\begin{aligned} a^b &= \left[\left(1 + \frac{1}{r}\right)^r \right]^{(1 + \frac{1}{r})^{r+1}} = \left(\frac{r+1}{r} \right)^{r \cdot [\frac{(r+1)}{r}]^{r+1}} = \\ &= \left(\frac{r+1}{r} \right)^{\frac{(r+1)^{r+1}}{r^r}} = \left(\frac{r+1}{r} \right)^{(r+1)a} = \left[\left(1 + \frac{1}{r}\right)^{r+1} \right]^a = b^a. \end{aligned}$$

K příkladu 2 dodejme, že volbou $r = 1/2$ ve vzorcích (V) dostaneme dvojici čísel $a = \sqrt{3}$ a $b = 3\sqrt{3}$, se kterou jsme se seznámili už dříve. To však nijak nesnižuje údiv nad možností, že někdo mohl dotyčné vzorce pro dvojice čísel (a, b) s vlastností $a^b = b^a$ jen tak uhadnout. Poodhalíme roušku oné záhady krátkou úvahou, která nás dokonce přivede k odvození vzorců (V) pro *každé* řešení rovnice $a^b = b^a$ v oboru kladných reálných čísel a a b , pro něž navíc platí $a < b$.

Díky poslední nerovnosti máme $b = ka$ pro vhodné (reálné) číslo $k > 1$. Dosadíme-li to do rovnice $a^b = b^a$, dostaneme

$$a^{ka} = (ka)^a,$$

odkud po umocnění obou stran číslem $1/a$ obdržíme

$$a^k = ka \quad \text{neboli} \quad a^{k-1} = k,$$

takže po dalším umocnění, tentokrát číslem $1/(k-1)$, dojdeme k vyjádřením

$$a = k^{\frac{1}{k-1}} \quad a \quad b = ka = k^{1 + \frac{1}{k-1}}.$$

Přejdeme-li od parametru $k > 1$ k novému parametru $r = 1/(k - 1) > 0$, s ohledem na zpětný vztah $k = 1 + \frac{1}{r}$ již zřejmě obdržíme vzorce (V).

Poté, co jsme objasnili původ vzorců (V), obraťme naši pozornost na atraktivní úkol, kterým je řešení rovnice $a^b = b^a$ v oboru kladných *racionálních* čísel a a b .³⁾ Protože nás nezajímají triviální řešení $a = b$, můžeme díky symetrii opět předpokládat, že platí $a < b$. Stojíme tak podle předchozího výkladu vlastně před otázkou, pro která kladná reálná čísla r určují vzorce (V) dvě racionální čísla a a b .

Mezi hledaná čísla r zřejmě patří všechna přirozená čísla, kterým odpovídají dvojice (a, b) tvaru

$$(2, 4), \left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right), \left(\frac{64}{27}, \frac{256}{81}\right), \dots$$

(vyčíslili jsme je pouze pro $r = 1, 2, 3$). Že pro jiné hodnoty r již žádnou dvojici racionálních čísel nedostaneme, je netriviální poznatek, který nyní uvedeme i s úplným důkazem.

Věta 2

Nechť pro kladná racionální čísla a a b platí $a^b = b^a$, přičemž $a < b$. Pak existuje přirozené číslo n takové, že čísla a a b mají vyjádření

$$a = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{a} \quad b = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Důkaz. Popíšeme postup z článku [2]. Podle něho předpokládanou rovnost $a^b = b^a$ nejprve upravíme na

$$b = a^{\frac{b}{a}},$$

odkud po vydělení číslem a dostaneme

$$\frac{b}{a} = a^{\frac{b}{a} - 1}.$$

Díky předpokladu $a < b$ je exponent mocniny na pravé straně rovnosti *kladné* racionální číslo, které nyní zapíšeme zlomkem v základním tvaru:

$$\frac{b}{a} - 1 = \frac{m}{n},$$

³⁾V oboru *přirozených* čísel má tato rovnice za podmínky $a < b$ jediné řešení $(a, b) = (2, 4)$, jak plyne z věty 1, podle které pak totiž musí být $a \in (1, e)$, tj. nutně $a = 2$.

kde m a n jsou dvě nesoudělná přirozená čísla. Dosazením do obou stran dotyčné rovnosti tak dostaneme

$$\frac{m}{n} + 1 = a^{\frac{m}{n}},$$

neboli

$$\frac{m+n}{n} = a^{\frac{m}{n}}$$

odkud po umocnění obou stran na n -tou dostaneme

$$\frac{(m+n)^n}{n^n} = a^m. \quad (*)$$

S rovností $(*)$ spojíme klíčovou úvahu: zapíšeme-li racionální číslo a^m zlomkem v základním tvaru a poté jeho číselník i jmenovatel rozložíme na prvočinitele, bude každé prvočíslo p , přítomné ať už v číselníku či jmenovateli, vystupovat v mocnině, která má exponent dělitelný číslem m – bude totiž m -násobkem příslušného exponentu mocniny prvočísla p v číselníku, resp. jmenovateli toho zlomku v základním tvaru, který je roven číslu a . Odtud s ohledem na to, že čísla $m+n$, n jsou stejně jako čísla m , n nesoudělná, z odvozené rovnosti $(*)$ plyne, že také obě mocniny $(m+n)^n$ a n^n mají ve svých rozkladech všechna prvočísla zastoupená s exponenty dělitelnými číslem m . Protože však tyto exponenty jsou zřejmě i dělitelné číslem n , jsou dokonce dělitelné součinem mn (opět díky nesoudělnosti m a n). Proto existují přirozená čísla u a v taková, že

$$(m+n)^n = u^{mn} \quad \text{a} \quad n^n = v^{mn},$$

odkud po odmocnění plyne

$$m+n = u^m \quad \text{a} \quad n = v^m.$$

Rozdíl $u^m - v^m$ je tak roven číslu m , což je možné, jak vzápětí ukážeme, jedině v případě, kdy exponent m odečítaných mocnin je roven 1. Skutečně, v případě $m \geq 2$ bychom totiž podle binomické věty dostali

$$m = u^m - v^m \geq (v+1)^m - v^m > \binom{m}{1} v^{m-1} \geq m,$$

a tedy $m > m$, což je potřebný spor.

Dosazením $m = 1$ do (*) dostaneme již přímo dokazované vyjádření pro číslo a , pro číslo b pak stačí dosadit určené a do rovnosti

$$\frac{b}{a} - 1 = \frac{m}{n} = \frac{1}{n},$$

kterou jsme čísla m a n zavedli. Důkaz je hotov.

Na úplný závěr dodejme, že čísla z dokázané věty 2 tvoří posloupnosti

$$P = \left(\left[1 + \frac{1}{n} \right]^n \right)_{n=1}^{\infty}$$

a

$$Q = \left(\left[1 + \frac{1}{n} \right]^{n+1} \right)_{n=1}^{\infty},$$

které jsou známé tím, že v klasických kurzech matematické analýzy jsou využívány k samotné definici čísla e . Tak je tomu např. na str. 96–98 dnes již legendární učebnice [2] sepsané Vojtěchem Jarníkem. Tam je také podán elementární algebraický důkaz toho, že posloupnost P je rostoucí, posloupnost Q klesající a že obě mají stejnou limitu. Právě ta je pak prohlášena za číslo e a slouží později k odvození vlastnosti očekávané od základu přirozených logaritmů, kterou je rovnost

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Literatura

- [1] *Hrubý, D., – Kubát, J.*: Matematika pro gymnázia. Diferenciální a integrální počet. 2. vyd., Prometheus, Praha, 1997.
- [2] *Jarník, V.*: Diferenciální počet I. 6. vyd., Academia, Praha, 1974, URL: <http://dml.cz/dmlcz/401985>
- [3] *Sved, M.*: On the Rational Solutions of $x^y = y^x$. Mathematics Magazine, roč. 63 (1990), č. 1, s. 30–33.

Variace na téma lichoběžník a jeho obsah

JANA HROMADOVÁ – ZDENĚK HALAS – VLASTA MORAVCOVÁ –
JARMILA ROBOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Cílem článku je na konkrétním případě ukázat jeden z konstruktivistických přístupů, jímž lze ve školské matematice zavádět pojmy. Při poznávání cest, jak si děti budují nové pojmy, je užitečné podívat se na vznik pojmů v historickém vývoji člověka a jejich budování v matematice jako vědecké disciplíně.

Zamysleme se nejprve nad původem matematických pojmů. Ty zpočátku vznikaly převážně z popudu praxe. Představme si úrodné údolí řeky Nil, kde bylo po každoročních záplavách potřeba znovu a znovu vyměřovat pole, evidovat úrodu a stanovovat daně. Z potřeby řešení takovýchto konkrétních problémů se vytvářely první geometrické pojmy.

Při transformaci pojmů do školské matematiky je vhodné vycházet z historie, musíme však dbát na to, aby transformace byla přiměřená věku žáků a jejich schopnostem. Při zavádění pojmu se snažíme vycházet z reálné praxe. Postupně se pokoušíme žáky dovést k tomu, aby si vlastní aktivní činností nový pojem osvojili. Opíráme se při tom o již nabyté znalosti a zkušenosti žáků z předchozí výuky či ze života. Ukážeme si vše na konkrétním příkladu pojmu lichoběžník a jeho využití v praxi.

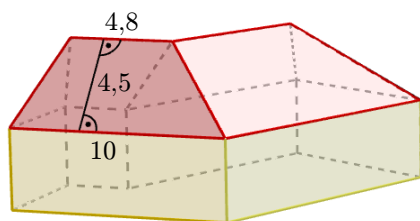
S pojmem lichoběžník se žáci obvykle setkávají poprvé v 7. ročníku základní školy (viz učebnice [1, 2]), respektive v sekundě na nižších stupních gymnázií (viz [3]). Lze předpokládat, že již dobře znají pojmy trojúhelník, čtyřúhelník, čtverec či obdélník, můžeme se tedy o tyto pojmy opřít a navázat na ně. V některých učebnicích je před lichoběžníkem probírán i rovnoběžník ([1, 2]), jinde je tomu naopak ([3]). Ve všech třech je pojem uveden definicí, v [1] a [2] jsou pak pomocí návodných otázek a úkolů postupně odvozeny základní vlastnosti lichoběžníků. Učebnice [3] je spíše výkladová, nevybízí přímo k samostatné činnosti žáka. V učebnicích nebývá příliš prostor pro motivační úlohy z reálné praxe. Předvedeme dále úlohu, kterou bychom mohli využít při prvním seznámení s lichoběžníkem. Vzhledem k tomu, že se jedná o úlohu z praxe, bude naším cílem i určení obsahu lichoběžníku.

Zadání motivační úlohy

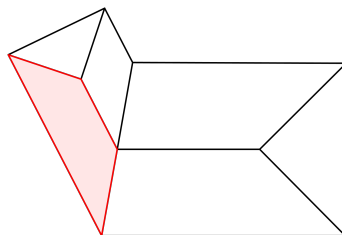
Část střechy rodinného domku je porostlá mechem (obr. 1). Pod mechem se dlouhodobě udržuje vlhkost a střešní krytina tím ztrácí kvalitu. Majitel domu proto zakoupil roztok sloužící k odstranění mečů. Výrobce udává spotřebu $1/4$ litru roztoku na 1 m^2 . Cena za litr roztoku je 63 Kč. Rozměry poškozené části střechy v metrech jsou znázorněny v obrázku (obr. 2), pro názornost je přiložen i půdorys domku (obr. 3). Jsme schopni ze zadaných údajů spočítat cenu roztoku potřebného k očištění dané části střechy?



Obr. 1



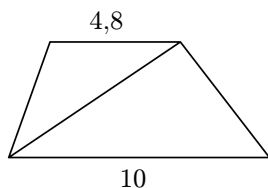
Obr. 2



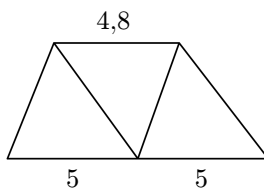
Obr. 3

Cílem této motivační úlohy je úvodní seznámení s pojmem lichoběžník a hledání vlastností a souvislostí s již žákům známými geometrickými útvary. Žáci by si měli všimnout, že zkoumaná část střechy má tvar čtyřúhelníku, který má dvě protější strany navzájem rovnoběžné a zbylé dvě různoběžné. Z fotografie (obr. 1) a přiloženého půdorysu (obr. 3) můžeme odhadnout, že různoběžné strany nejsou stejně dlouhé.

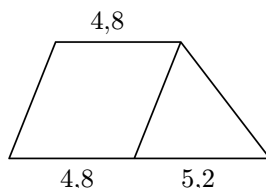
K určení ceny roztoku potřebného k vyčištění střechy potřebujeme znát obsah poškozené části střechy. Dokážeme vypočítat obsah neznámého čtyřúhelníku? Můžeme navést žáky k tomu, aby využili svých znalostí a rozložili zkoumaný čtyřúhelník na části, jejichž obsah spočítat umí. Žáky lze rozdělit do skupin a výpočet obsahu pojmut jako soutěž, na jejímž závěru si porovnáme výsledky. Pravděpodobně se sejdou různé návrhy, některé z nich jsou zobrazeny na následujících pěti obrázcích (obr. 4 až obr. 8):



Obr. 4



Obr. 5



Obr. 6

Na obr. 4 je čtyřúhelník rozdělen na dva trojúhelníky, jejichž základny mají délky 10 m a 4,8 m, oba trojúhelníky mají stejnou výšku 4,5 m. Pro obsah celého čtyřúhelníku platí

$$S = \left(\frac{10 \cdot 4,5}{2} + \frac{4,8 \cdot 4,5}{2} \right) \text{ m}^2 = 33,3 \text{ m}^2.$$

Na obr. 5 je čtyřúhelník rozdělen na tři trojúhelníky se společným vrcholem ve středu nejdelší strany. Tento způsob je sice složitější než předchozí varianta, ale lze předpokládat, že jej některý žák použije. Opět mají všechny trojúhelníky stejnou výšku, pro obsah tedy platí

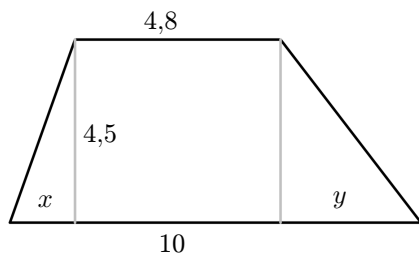
$$S = \left(2 \cdot \frac{5 \cdot 4,5}{2} + \frac{4,8 \cdot 4,5}{2} \right) \text{ m}^2 = 33,3 \text{ m}^2.$$

Analogicky bychom postupovali, kdyby společný vrchol byl libovolným jiným bodem nejdelší strany či strany s ní rovnoběžné.

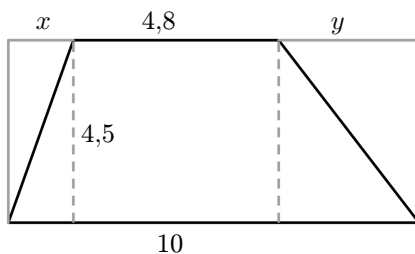
Na obr. 6 jsme použili rovnoběžník a trojúhelník. Strana rovnoběžníku má délku 4,8 m, příslušná výška je 4,5 m. Výška trojúhelníku je stejná,

odpovídající základna má délku $(10 - 4,8) \text{ m} = 5,2 \text{ m}$.

$$S = \left(4,8 \cdot 4,5 + \frac{5,2 \cdot 4,5}{2} \right) \text{ m}^2 = 33,3 \text{ m}^2.$$



Obr. 7



Obr. 8

Možná se najdou i žáci, kteří čtyřúhelník pomocí dvou svislých čar rozdělí na obdélník o stranách délky 4,8 m a 4,5 m a dva trojúhelníky o výšce 4,5 m (obr. 7), jejichž základny x , y sice neznáme, ale víme, že dohromady tvoří jeden trojúhelník o základně $x + y = (10 - 4,8) \text{ m} = 5,2 \text{ m}$.

$$S = \left(4,8 \cdot 4,5 + \frac{5,2 \cdot 4,5}{2} \right) \text{ m}^2 = 33,3 \text{ m}^2.$$

Není náhodou, že zápis výpočtu obsahu S k obrázkům obr. 6 a obr. 7 je stejný. Ukazuje se zde vazba mezi obsahem obdélníku a obsahem rovnoběžníku.¹⁾

Na obr. 8 je čtyřúhelník doplněn na obdélník o stranách délky 10 m a 4,5 m, od jehož obsahu odečteme obsahy trojúhelníků o základnách x , y a výšce 4,5 m.

$$S = \left(10 \cdot 4,5 - \frac{5,2 \cdot 4,5}{2} \right) \text{ m}^2 = 33,3 \text{ m}^2.$$

Při všech způsobech rozdělení vidíme, že velmi podstatná je znalost vzdálenosti dvou rovnoběžných stran čtyřúhelníku. Tato vzdálenost je společnou výškou všech výše zkoumaných útvarů. Pokud tuto informaci máme, jsme schopni úlohu vyřešit, a tedy kladně odpovědět na otázku z motivačního příkladu.

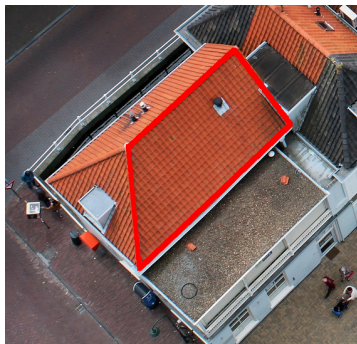
¹⁾Přesunutím vhodného trojúhelníku transformujeme rovnoběžník na obdélník o stejném obsahu (viz [1, str. 55], [3, str. 98]).

Litrové balení roztoku vystačí na ošetření 4 m^2 střechy. Na ošetření plochy $33,3 \text{ m}^2$ potřebujeme $\frac{33,3}{4} \text{ l} \doteq 8,325$ litru roztoku. Musíme tedy zakoupit 9 litrových balení v celkové ceně 567 Kč.

V motivační úloze jsme žákům předložili ke zkoumání jeden typ lichoběžníku. Chceme-li, aby si žáci pojem lichoběžník správně osvojili, je třeba jim předkládat i další ukázky. Na obr. 9 a 10 si všimněme červeně zvýrazněných částí střech domů.



Obr. 9



Obr. 10

Můžeme se žáky diskutovat, co mají všechny čtyřúhelníky použité k zastřešení domů společného. Zda, případně jak, se liší od již známých útvarů – čtverce, obdélníku či rovnoběžníku.

Dojdeme k závěru, že se jedná o čtyřúhelníky, které mají dvě protilehlé strany navzájem rovnoběžné, zbývající dvě strany jsou různoběžné. Můžeme si všimnout, že na obr. 9 jsou různoběžné strany čtyřúhelníku stejně dlouhé, zatímco v motivační úloze (obr. 1) měly různou délku. Podobně je tomu na obr. 10, kde je navíc jedna strana čtyřúhelníku kolmá k dvojici rovnoběžných stran. Tyto závěry ovšem nemusí být z předložených fotografií na první pohled patrné, vhodnější by bylo připravit si modely takových střech, ať již fyzické nebo alespoň virtuální za pomoci grafického softwaru.

Nyní již můžeme přejít k definici lichoběžníku a pojmenování jeho základních prvků.

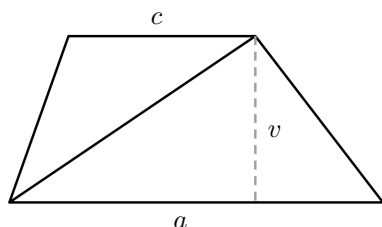
Lichoběžník je čtyřúhelník, který má jen jednu dvojici rovnoběžných protilehlých stran.

Jak vlastně vznikl název lichoběžník? Původ slova *lichý* vychází z indoevropského základu *leiku* ve smyslu *přebývat*, *zbývat*. Samotné slovo *lichý*

znamenal *nepárový, přebytný*, v pozdějším významu *odchylný*. Tento význam se pak objevuje v názvu *lichoběžníku*, který je tedy útvarem odchylným od rovnoběžníku. Viz např. [4, 5].

V některých starších učebnicích, např. [6], se můžeme též setkat s jiným vysvětlením původu pojmu – lichoběžník má svůj název podle toho, že je to čtyřúhelník, který má lichý počet párů rovnoběžných stran.

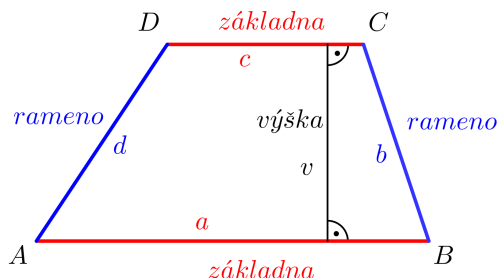
Vrátíme-li se k rozdělení lichoběžníku na části z motivační úlohy (obr. 11), můžeme s žáky snadno odvodit vzorec pro obsah lichoběžníku.



Obr. 11

$$S = \frac{a \cdot v}{2} + \frac{c \cdot v}{2} = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$$

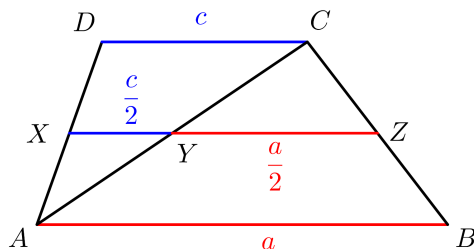
V uvedeném vzorci se vyskytují údaje a , c ; stranám a , c budeme říkat *základny*. Ty jsou rovnoběžné, a má tedy smysl hovořit o vzdálenosti přímek, na nichž základny leží, budeme ji nazývat výškou²⁾ a značit v . Pro označení zbývajících dvou stran budeme používat pojem *ramena*.



Obr. 12

²⁾ Pojem výšky je u lichoběžníku definován jako vzdálenost přímek, na nichž leží základny, ale někdy ji také chápeme jako příslušnou úsečku, kolmou k základnám (viz obr. 11, obr. 12).

Vrátíme-li se ke vztahu pro obsah ve tvaru $S = \frac{a+c}{2} \cdot v$, můžeme zkoumat geometrický význam úsečky o délce $\frac{a+c}{2}$. Rozdělme lichoběžník $ABCD$ (obr. 13) na trojúhelníky ABC , CDA a vyznačme v nich střední příčky XY , YZ rovnoběžné se základnami AB a CD . Z vlastností středních příček v trojúhelníku známe jejich délky $\frac{a}{2}$, $\frac{c}{2}$. Je zřejmé, že tyto příčky leží na jedné přímce,³⁾ z čehož vyplývá, že úsečka XZ je rovnoběžná se základnami a má délku $\frac{a+c}{2}$. Tuto úsečku (případně její délku) nazýváme *střední příčka* lichoběžníku.

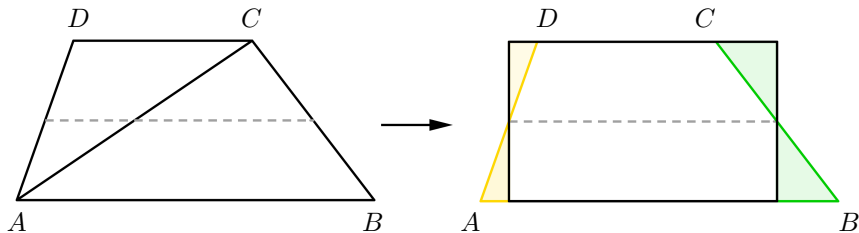


Obr. 13

Označíme-li délku střední příčky s , můžeme vztah pro obsah lichoběžníku zapsat ve tvaru

$$S = \frac{a+c}{2} \cdot v = s \cdot v.$$

Nyní se lze ptát na geometrický význam výrazu $s \cdot v$. Žáci by mohli přijít na to, že obsah lichoběžníku odpovídá obsahu obdélníku o stranách s a v (obr. 14).



Obr. 14

Dále je vhodné se žáky diskutovat, kde se s lichoběžníkem setkáváme v reálném životě. Takových příkladů je celá řada: okénka u auta (obr. 15),

³⁾Obě procházejí středem Y úsečky AC a tímto bodem lze vést jedinou rovnoběžku se základnami (plyne z pátého Eukleidova postulátu).

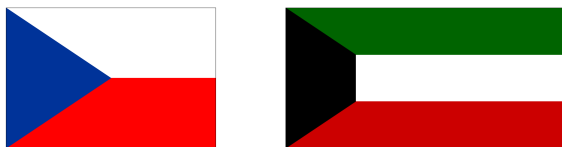
okna budovy (obr. 16), vlajky (obr. 17), dlažba na chodníku, lichoběžníkový závit šroubu atd. Několik jich můžeme žákům ukázat a necháme na nich, aby do příští vyučovací hodiny dohledali další příklady, popřípadě přinesli obrázky zachycující využití lichoběžníků v praxi.



Obr. 15



Obr. 16

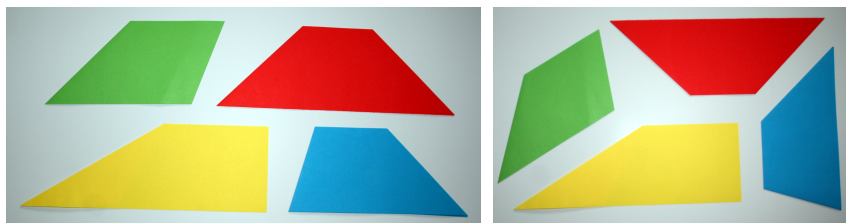


Obr. 17

Významnou roli při objevování nových poznatků a souvislostí mezi nimi hrají didaktické pomůcky, s nimiž žáci manipulují. Je známo, že přijímáme-li nové poznatky nejen vizuálně či verbálně, ale též hmatem (hapticky), dochází k propojení více center v mozku, a tím i k lepšímu zapamatování poznatků (viz např. [7, str. 152–153]).

Do výuky můžeme zařadit následující aktivitu. Rozdáme žákům papír formátu A4, popřípadě jej ještě rozdělíme podélně na dvě poloviny,

abychom získali užší pruh papíru. Úkolem žáků bude ohýbáním papíru vytvořit lichoběžníky různých tvarů. Ty pak připneme na magnetickou tabuli či na nástěnku a společně diskutujeme, zda se skutečně jedná o lichoběžníky a zda některé z nich mají společné vlastnosti. Po žácích chceme, aby u každého lichoběžníku určili základny a ramena, popř. vyznačili výšky a střední příčky. Pokud žádný žák nevytvoří „nelichoběžník“, použijeme předem připravený čtyřúhelník, který není lichoběžníkem, abychom žákům ukázali i protipříklad⁴⁾. Postupně tak můžeme dojít k pojmům *rovnoramenný* a *pravoúhlý lichoběžník*. Několik různých lichoběžníků si pak žáci překreslí do sešitu. Dbáme na to, aby nekreslili všechny lichoběžníky se základnami ve vodorovném směru, aby nebyla vždy delší základna „dole“ a aby se mezi nimi objevily oba výše uvedené speciální typy (obr. 18 vpravo). Cílem je, aby si nezafixovali pojem lichoběžník jen pro speciální případy či polohy (obr. 18 vlevo).



Obr. 18

Téma lichoběžníku jsme v článku zdaleka nevyčerpali. Jistě by nás napadla řada dalších způsobů odvození vzorců pro obsah lichoběžníku či délku střední příčky, k nimž by žáci mohli dospět vlastní činností. V rozporu s humornou pedagogickou zásadou č. 28 Emila Caldý⁵⁾ není naším cílem sdělit žákům vše, co víme. Naopak, chceme jim nechat prostor k osvojení pojmu vlastní aktivní činností, aby základy, které budujeme, byly dostatečně pevné. Postup popsany v článku lze aplikovat i na další geometrické pojmy.

⁴⁾ Zajímavé je, že například v anglických učebnicích je lichoběžník definován jako čtyřúhelník, který má minimálně jeden pár rovnoběžných stran, tedy mezi lichoběžníky patří i rovnoběžník, potažmo obdélník, či čtverec. Při této definici bychom s protipříklady museli být opatrní a volit takový čtyřúhelník, který nemá žádné rovnoběžné strany. Za povšimnutí stojí i to, že strany, které nazýváme ramena, se v anglosaské literatuře nazývají legs, tj. „nohy“ lichoběžníku.

⁵⁾ Umíme-li daný příklad vyřešit více způsoby, ukážeme je. Jedním způsobem je žák deprimován pouze jednou. ([8], str. 20).

Literatura

- [1] *Odvárko, O. – Kadleček, J.*: Matematika 3 pro 7. ročník základní školy. Prometheus, Praha 2012.
- [2] *Šarounová, A. a kol.*: Matematika 7, II. díl pro ZŠ. Prometheus, Praha, 1998.
- [3] *Herman, J. a kol.*: Trojúhelníky a čtyřúhelníky – Matematika – Sekunda. Prometheus, Praha, 2010.
- [4] *Holub, J. – Lyer, S.*: Stručný etymologický slovník jazyka českého. SPN, Praha, 1978.
- [5] *Machek, V.*: Etymologický slovník jazyka českého. NLN, Praha, 1997.
- [6] *Schubert, E.*: Methodika měřického tvaroznalství. Nakladatel Alois Šásek, Velké Meziříčí, 1894.
- [7] *Spitzer, M.*: Digitální demence. Host, Brno, 2016.
- [8] *Calda, E.*: Pedagogické zásady a termíny ve výuce M & F. Prometheus, Praha, 2003.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 237 a 238 můžete zaslat nejpozději do 20. 1. 2018 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu mfi@upol.cz.

Úloha 239

Označme M střed základny AB rovnoramenného trojúhelníku ABC a F patu kolmice z bodu M na stranu BC . Přímka ℓ je kolmá k AF a prochází bodem C . Dokažte, že přímka ℓ prochází středem úsečky MF .

Robert Geretschläger (Graz)

Úloha 240

Petr vyložil na stůl 2017 karet popsaných čísly $1, 2, \dots, 2017$. Na líci každé karty je napsáno právě jedno přirozené číslo, rub je prázdný a karty jsou otočeny rubem nahoru. Poté s kartami provedl následujících 2017 kroků. V k -tém kroku otočil (zaměnil rub a líc) každou kartu označenou číslem dělitelným k . (V prvním kroku otočil všechny karty lícem nahoru,

poté otočil rubem nahoru všechny karty popsané sudými čísly, atd.) Určete součet čísel na kartičkách obrácených lícem nahoru po těchto 2017 krocích.

Jozef Mészáros

Dále uvádíme řešení úloh 235 a 236, jejichž zadání byla zveřejněna ve třetím čísle aktuálního ročníku našeho časopisu.

Úloha 235

Na jednotkové kružnici se středem S je dána konečná množina oblouků délek menších než π , přitom součet délek všech oblouků je větší než 2π . Dokažte, že existuje přímka procházející bodem S , která protíná aspoň tři z těchto oblouků.

Jacek Uryga (Katowice)

Řešení. Označme O danou množinu oblouků. Délka každého oblouku o z množiny O je menší než π , proto tento oblouk nemá žádný společný bod s obloukem o' , který je souměrně sdružený s obloukem o podle bodu S . Označme O' množinu všech souměrně sdružených oblouků s oblouky množiny O .

Podle zadání je součet délek všech oblouků množiny $O \cup O'$ větší než 4π . Pokud by každý bod dané jednotkové kružnice s obvodem 2π patřil nejvýše dvěma obloukům množiny $O \cup O'$, součet délek všech oblouků této množiny by byl menší než 4π , což je spor. Proto existuje alespoň jeden bod A dané jednotkové kružnice, který patří alespoň třem obloukům množiny $O \cup O'$. Některé z nich jsou z O , jiné z O' .

Uvažujme nyní přímku AS . Pokud bod A patří oblouku $o \in O$, protíná přímka AS oblouk o v bodě A . Přímka AS dále prochází bodem A' souměrně sdruženým s bodem A podle S . Pokud bod A patří oblouku $b' \in O'$, protíná přímka AS v bodě A' oblouk $b \in O$, který je vzorem oblouku b' v souměrnosti se středem S . Podle tvrzení prvního odstavce není bod A bodem oblouku b . Existují tak tři různé oblouky z množiny O , kterými prochází přímka AS , což jsme měli dokázat.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Martin Raszyk* z ETH Zürich, *Matěj Doležálek* z G v Humpolci, *Denisa Chytilová* a *Jana Pallová*, obě z GJŠ v Přerově, *Vít Jelínek*, *Josef Minařík*, *Tomáš Perutka*, *Štěpán Šmíd*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Danil Koževnikov* z GJK v Praze 6, *Parléřova*, *Vojtěch Lengál* z GChD v Praze 5, *Zborovská*, *Jiří Nábělek* a *Bára Tížková*, oba z GMK v Bílovci.

Neúplné řešení zaslali *Jozef Mészáros* z Jelky a *Vojtěch Lanz* z GChD v Praze 5, *Zborovská*, *Vít Pískovský* z GOH v Ostravě-Porubě, *Martin*

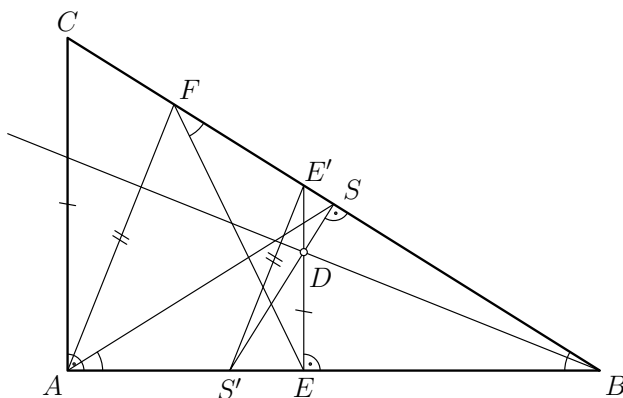
Raška a Jiří Škrobánek, oba z WG v Ostravě-Porubě a *Václav Steinhouser* z G v Dačicích.

Úloha 236

Uvnitř pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou BC je dán bod D tak, že $|DB| = |DC|$. Pro vnitřní bod E odvěsny AB platí $DE \parallel AC$. Pro vnitřní bod F přepony BC platí $|EB| = |EF|$. Dokažte, že přímka AF je kolmá na přímkou BD . *Patrik Bak*

Řešení. Označme S střed přepony BC . Z vlastností pravoúhlého trojúhelníku plyne, že $|SA| = |SB|$ a tedy ABS je rovnoramenný trojúhelník. Ze zadání plyne, že FBE je rovnoramenný trojúhelník, který má shodný vnitřní úhel u základny při vrcholu B jako trojúhelník ABS . Tyto dva trojúhelníky jsou tak podobné a platí

$$\frac{|BA|}{|BF|} = \frac{|BS|}{|BE|}. \quad (1)$$



Označme E' průsečík přímky BC s přímkou DE a S' průsečík přímky AB s přímkou DS . Podle zadání jsou oba trojúhelníky BSS' a BEE' pravoúhlé s pravými úhly při vrcholech S a E . První kolmost plyne z rovnosti $|DB| = |DC|$, tedy SD je osou úsečky BC , druhá kolmost plyne z kolmosti odvěsen pravoúhlého trojúhelníku ABC a rovnoběžnosti odvěsny AC s přímkou DE . Oba trojúhelníky BSS' a BEE' se také shodují ve vnitřním úhlu při vrcholu B , jsou tedy podobné a platí

$$\frac{|BS|}{|BE|} = \frac{|BS'|}{|BE'|}.$$

Spolu s (1) to znamená, že

$$\frac{|BA|}{|BF|} = \frac{|BS|}{|BE|} = \frac{|BS'|}{|BE'|}.$$

Odtud již vyplývá rovnoběžnost přímek FA a $E'S'$.

Bod D je průsečíkem výšek z vrcholů E' , S' trojúhelníku $E'S'B$, přímka BD je tak třetí výškou tohoto trojúhelníku a je kolmá na stranu $E'S'$. Proto je kolmá i na přímkou FA , která je s touto stranou rovnoběžná, což jsme měli dokázat.

Poznámka. U tohoto příkladu se objevilo mnoho neúplných řešení. Jejich idea byla velmi podobná. Řešitelé použili větu o obvodovém úhlu. Ukázali, že body E , B , S , D leží na jedné kružnici. Dále chtěli ukázat, že body A , E , S , F leží na jedné kružnici. I když zřejmě body F , S leží na úsečce BC , řešitelé si neuvědomili, že jejich pořadí závisí na délkách odvěsen trojúhelníku ABC . V případě $|AB| > |AC|$ leží na přeponě body v pořadí B , S , F , C , v případě $|AB| < |AC|$ jsou body v pořadí B , F , S , C (a v případě $|AB| = |AC|$ body S a F dokonce splývají). Potom určovali velikost úhlu EAF , porovnávali ji s velikostí úhlu ESB a nakonec s velikostí úhlu EDB . Podle svého obrázku diskutovali jeden z případů a neuvědomili si, že je třeba vést jinou (i když podobnou) diskusi ve druhém z případů. Například v případě na obrázku vzorového řešení leží čtyři uvedené body na kružnici, protože je vidět úsečka ES z bodů A a F pod stejným úhlem, ve druhém případě protože součet protilehlých úhlů u vrcholů A a S ve čtyřúhelníku $AEFS$ je 180° . Podobně se měla větvit diskuse při výpočtu úhlu EAF .

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich, *Matěj Doležálek* z G v Humpolci, *Jiří Škrobánek* z WG v Ostravě-Porubě a *Bára Tížková* z GMK v Bílovci.

Neúplné řešení zaslali *František Jáchim* z Volyně, *Denisa Chytilová* a *Jana Pallová*, obě z GJŠ v Přerově, *Vojtěch Lanz* a *Vojtěch Lengál*, oba z GChD v Praze 5, Zborovská, *Josef Minařík*, *Tomáš Perutka*, *Štěpán Šmíd*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Vít Pískovský* z GOH v Ostravě-Porubě, *Martin Raška* z WG v Ostravě-Porubě a *Václav Steinhouser* z G v Dačicích.

Pavel Calábek

Výsledky českých žáků v šetření TIMSS 2015

DANA MANDÍKOVÁ – VLADISLAV TOMÁŠEK

MFF UK, Praha – Česká školní inspekce, Praha

TIMSS (zkratka pro *Trends in International Mathematics and Science Study*) je mezinárodní projekt, který zjišťuje vědomosti a dovednosti žáků v matematice a přírodních vědách. Organizuje ho Mezinárodní asociace pro hodnocení výsledků vzdělávání (IEA). TIMSS se zaměřuje na devítileté a třináctileté žáky (obvykle jde o žáky 4. ročníků základních škol a 8. ročníků základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií) a probíhá ve čtyřletých cyklech. Česká republika se zapojila již do prvního šetření, které proběhlo v roce 1995, a účastnila se všech cyklů kromě roku 2003. V letech 2011 a 2015 byli u nás testováni jen žáci 4. ročníku základní školy.

Vědomosti a dovednosti žáků se zjišťují pomocí písemných testů, které obsahují úlohy z matematiky a přírodních věd. Součástí výzkumu je vždy i rozsáhlé dotazníkové šetření mezi řediteli, učiteli a žáky, které zjišťuje informace o podmínkách vzdělávání, průběhu výuky, rodinném zázemí žáků. Ty se pak využívají při vysvětlování rozdílů ve výsledcích žáků. V České republice se do šetření TIMSS v roce 2015 zapojilo 159 základních škol, přes 5000 žáků a jejich rodičů, téměř 350 učitelů a 159 ředitelů škol.

Článek podává základní informaci o celkových výsledcích českých žáků v šetření TIMSS 2015 a o jejich časovém vývoji v uplynulých dvaceti letech.

Koncepce šetření TIMSS 2015

Vědomosti a dovednosti žáků jsou v matematice i v přírodních vědách hodnoceny ze dvou pohledů označovaných jako obsah a operace. Obsah je vymezen učivem, jehož zvládnutí je testováno. Operace jsou vymezeny dovednostmi, které mají žáci při práci s učivem prokázat.

V tabulce 1 jsou uvedeny sledované oblasti učiva a dovednosti s podílem jejich zastoupení.

Tab. 1 Oblasti učiva a dovednosti

Oblasti učiva				Dovednosti	
Matematika		Přírodověda			
Čísla	50 %	Živá příroda	45 %	Prokazování znalostí	40 %
Geometrické tvary a měření	35 %	Neživá příroda	35 %	Používání znalostí	40 %
Znázornění dat	15 %	Nauka o Zemi	20 %	Uvažování	20 %

Prezentace výsledků

Výsledky zemí jsou ve výzkumu TIMSS prezentovány dvěma způsoby. Prvním je prezentace pomocí skóre (počtu bodů), které vyjadřují úspěšnost žáků na škálách výsledků. Pro matematiku i přírodovědu byly konstruovány jednak škály celkové, jednak škály dílčí odpovídající jednotlivým obsahovým a operačním kategoriím. Škály byly vytvořeny tak, aby umožňovaly srovnávat výsledky žáků v průběhu času.

Základem druhého způsobu prezentace výsledků žáků jsou čtyři vědomostní úrovně (jejich vymezení lze nalézt v [3, s. 54–57]; ukázky několika úloh pro různé úrovně jsou na konci tohoto článku). Každá tato úroveň je určena minimálním počtem bodů, kterého musí žák dosáhnout. Výsledky zemí jsou pak vyjádřeny procentuálním zastoupením jejich žáků na jednotlivých vědomostních úrovních.

Celkové výsledky a jejich vývoj

Šetření TIMSS 2015 se ve čtvrtých ročnících v matematice zúčastnilo 49 zemí (z toho dva samosprávné celky, Tchaj-wan a Hongkong), v přírodovědě to bylo o dvě země méně. Jejich přehled s průměrnými výsledky žáků lze nalézt např. v [3, s. 58–59].

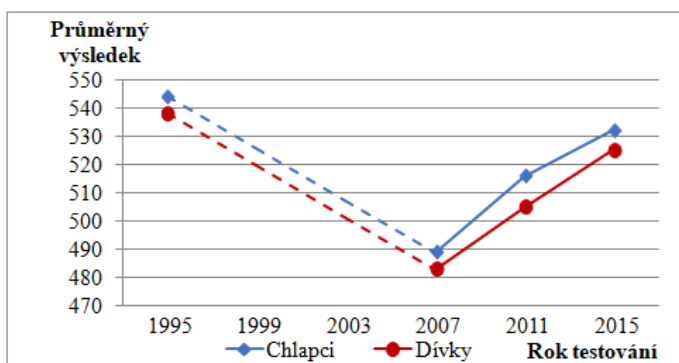
Matematika

Průměrný výsledek českých žáků 4. ročníku v matematice (528 bodů) byl nad průměrem škály TIMSS (500 bodů). Významně lepšího výsledku

než čeští žáci dosáhli žáci 18 zemí ze 49 zúčastněných. Nejlepší výsledky měli již tradičně žáci asijských zemí (Singapur, Hongkong, Korea, Tchaj-wan a Japonsko) následovaní žáky Severního Irska a Ruska. Výsledky žáků Nizozemska, Maďarska, Bulharska a Kypru byly srovnatelné s českými žáky.

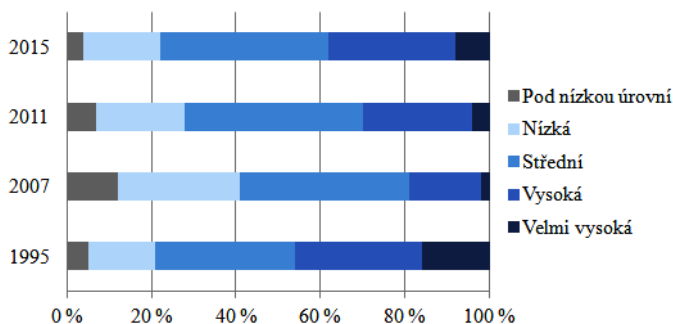
Z 15 zemí, které se zúčastnily šetření v roce 1995 i 2015, jen Česká republika a Nizozemsko dosáhly po dvaceti letech významně horšího průměrného výsledku, Maďarsko mělo výsledek srovnatelný a ostatní země se významně zlepšily (nejvíce Portugalsko). Čeští žáci se od roku 1995 do roku 2007 v matematice zhoršili nejvíce ze všech zemí, které se zapojily do obou šetření ([1, 5]). Od roku 2007 se výsledek českých žáků významně zlepšil jak v šetření 2011 ([4]), tak 2015, přesto je tento poslední výsledek stále o 13 bodů pod výsledkem v roce 1995.

Vývoj průměrných výsledků českých děvčat a chlapců ukazuje graf na obr. 1. Chlapci byli ve všech šetřeních významně lepší než děvčata.



Obr. 1 Vývoj výsledků českých chlapců a děvčat – matematika

Vývoj zastoupení českých žáků na jednotlivých vědomostních úrovních zachycuje graf na obr. 2. Podíl žáků na nízké vědomostní úrovni a pod ní se od roku 2007 do roku 2015 snižoval a je srovnatelný s rokem 1995. Zvyšoval se podíl žáků na dvou nejvyšších úrovních, ale přesto je jeho hodnota pro nejvyšší úroveň poloviční oproti roku 1995. Podíly českých dívek a chlapců ve vědomostních úrovních se liší málo. Alespoň druhé nejvyšší úroveň dosáhlo ale o 5 % chlapců více než dívek, což je statisticky významný rozdíl.

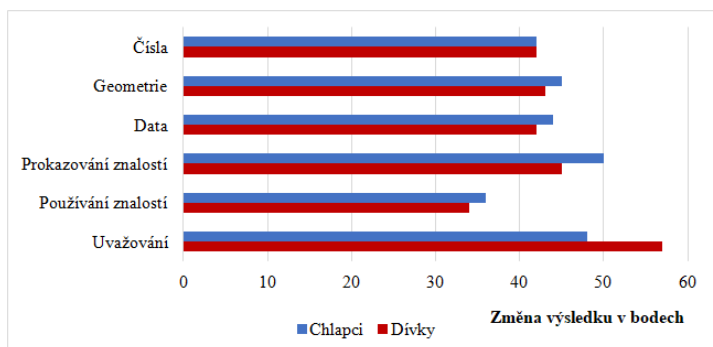


Obr. 2 Vývoj zastoupení českých žáků na vědomostních úrovních – matematika

Výsledky na dílčích škálách

Čeští žáci měli s celkovým výsledkem v matematice srovnatelné výsledky v tematickém okruhu čísla a v práci s daty, v geometrii dosáhli lepšího výsledku. Čeští chlapci byli lepší než dívky v okruhu čísla, ve zbylých dvou okruzích se jejich výsledky významně nelišily. Nejhorší výsledek měli chlapci i dívky v práci s daty.

Změny ve výsledcích na dílčích škálách se dají sledovat od roku 2007, kdy došlo ke snížení počtu tematických okruhů. Česká republika se za těchto osm let zlepšila ve všech třech okruzích učiva nejvíce z 18 zemí, které se do těchto šetření zapojily. Změnu ve výsledcích českých chlapců a dívek ve sledovaných okruzích učiva a dovednostech mezi lety 2007 a 2015 ukazuje graf na obr. 3.



Obr. 3 Změny ve výsledcích českých chlapců a dívek na dílčích škálách mezi roky 2007 a 2015 – matematika

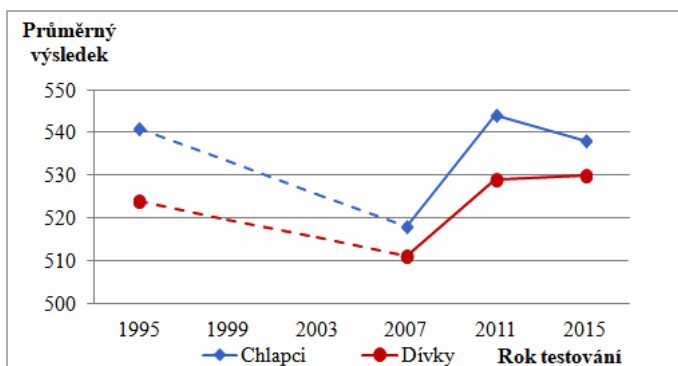
Co se sledovaných dovedností týče, vedli si čeští žáci ve srovnání s celkovým výsledkem v matematice hůře v prokazování znalostí a naopak lépe v uvažování. Čeští chlapci měli lepší výsledek než dívky v prokazování a v používání znalostí, v uvažování byly jejich výsledky srovnatelné.

Podobně jako u okruhů učiva se čeští žáci zlepšili za posledních osm let i ve sledovaných dovednostech nejvíce z 18 zúčastněných zemí. Největší bodový nárůst byl na škále uvažování (53 bodů).

Přírodověda

Výsledek českých žáků v přírodovědě byl nadprůměrný (534 bodů). Významně lepšího výsledku dosáhlo jedenáct zemí ze 47 zúčastněných. Nejlepší výsledky měli opět žáci ze Singapuru, Koreje a Japonska, následovaní žáky Ruska, Hongkongu, Tchaj-wanu, Finska a Polska. Srovnatelného výsledku s českými žáky dosáhli např. žáci v Maďarsku, Švédsku, Norsku, Anglii a Německu.

Výsledek českých žáků v přírodovědě v roce 2015 je srovnatelný s výsledkem z roku 1995. Zhoršení, ke kterému došlo v roce 2007 (bylo výrazně menší než v matematice), čeští žáci dohnali do roku 2011. Z 15 zemí, které se zúčastnily šetření v roce 1995 i 2015, se dvě zhoršily (Nizozemsko a Norsko), čtyři měly výsledek srovnatelný (ČR, USA, Austrálie a Nový Zéland), ostatních devět zemí se významně zlepšilo (nejvíce Slovinsko).

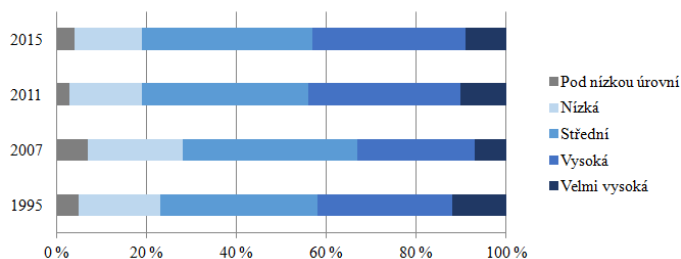


Obr. 4 Vývoj výsledků českých chlapců a děvčat – přírodověda

Vývoj průměrných výsledků českých děvčat a chlapců ukazuje graf na obr. 4. Chlapci byli ve všech šetřeních významně lepší než děvčata. Ve výsledcích chlapců jsou vidět větší změny než u dívek. Chlapci se od

posledního šetření mírně zhoršili a jejich výsledek je nepatrně horší než před dvaceti lety, zatímco výsledek dívek se téměř nezměnil a je naopak o něco lepší než před dvaceti lety.

Vývoj zastoupení českých žáků na jednotlivých vědomostních úrovních zachycuje graf na obr. 5. Podíl žáků na nízké vědomostní úrovni a pod ní po zvýšení v roce 2007 poklesl. Zastoupení žáků na dvou nejvyšších úrovních je srovnatelné s rokem 1995, podíl žáků na velmi vysoké úrovni ale poklesl. Na velmi vysoké úrovni je významně vyšší podíl českých chlapců než dívek, stejně tak je významně vyšší zastoupení chlapců dosahujících alespoň vysoké úrovně. V ostatních úrovních jsou rozdíly minimální.



Obr. 5 Vývoj zastoupení českých žáků na vědomostních úrovních – přírodověda

Výsledky na dílčích škálách

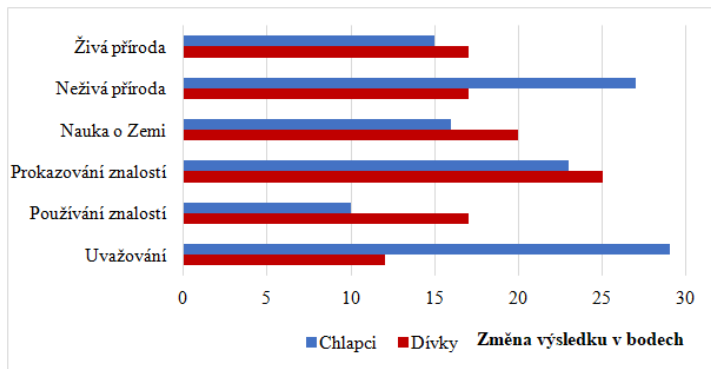
Čeští žáci si relativně lépe vedli v úlohách z okruhu živé přírody, méně úspěšní byli v úlohách z neživé přírody a nauky o Zemi, rozdíly ale nejsou příliš velké. Čeští chlapci byli lepší než dívky v okruhu neživá příroda a nauka o Zemi, v okruhu živá příroda se jejich výsledky významně nelišily.

Změny ve výsledcích na dílčích škálách se dají sledovat od roku 2007, kdy došlo ke snížení počtu okruhů. Výsledek českých žáků v roce 2015 byl oproti roku 2007 významně lepší ve všech třech okruzích učiva. Ke zlepšení ve všech třech okruzích došlo již od roku 2007 do roku 2011. Od roku 2011 do roku 2015 se pak výsledek významně zlepšil jen v okruhu neživá příroda. V okruhu nauka o Zemi zůstal výsledek srovnatelný a v okruhu živá příroda se významně zhoršil, což je zapříčiněno hlavně zhoršením chlapců.

Co se sledovaných dovedností týče, vedli si čeští žáci ve srovnání s celkovým výsledkem v přírodovědě výrazně lépe v prokazování znalostí a naopak hůře v jejich používání a v uvažování. Čeští chlapci měli významně lepší výsledek než dívky v prokazování znalostí, v používání znalostí a v uvažování byly jejich výsledky srovnatelné.

Čeští žáci se v období od roku 2007 do roku 2011 významně zlepšili v prokazování a používání znalostí, do roku 2015 se pak v těchto dovednostech nevýznamně zhoršili. V uvažování se v prvním období zlepšili jen nepatrně, do roku 2015 pak bylo zlepšení statisticky významné.

Změnu ve výsledcích českých chlapců a dívek ve sledovaných okruzích učiva a dovednostech mezi lety 2007 a 2015 ukazuje graf na obr. 6.



Obr. 6 Změny ve výsledcích českých chlapců a dívek na dílčích škálách mezi roky 2007 a 2015 – přírodověda

Postřehy z dotazníkových šetření

Součástí šetření TIMSS 2015 bylo dotazníkové šetření mezi řediteli škol, učiteli testovaných žáků, samotnými žáky a jejich rodiči. Dotazníky poskytují cenné doplňující informace a pomáhají při interpretacích výsledků. V dotaznících se obvykle vztahuje více položek k danému tématu a z odpovědí na ně se pak vytváří obecnější ukazatele (indexy). Dále uvádíme některá vybraná zjištění z dotazníkových šetření.

Čeští učitelé hodnotili podmínky pro výuku matematiky a přírodovědy na školách nejlépe ze všech zemí. Také podle ředitelů je výuka málo ovlivněna nedostatkem zdrojů. Česká republika tak patří mezi třetinu vyspělých zemí s nejlepšími podmínkami.

Klima na českých školách vyšlo v hodnocení jako průměrné. Rovněž závažnost kázeňských problémů žáků hodnotili čeští ředitelé na úrovni mezinárodního průměru a také bezpečnost prostředí na školách byla učiteli hodnocena jako průměrná v porovnání s ostatními zeměmi.

Se šikanou se čeští žáci podle jejich vyjádření setkávají méně často, než je průměr zúčastněných zemí. Přesto 12 % žáků uvedlo, že se s ní setkala

asi jednou týdně. Tato skupina žáků měla výrazně horší průměrný výsledek v testech než skupiny s méně častou šikanou.

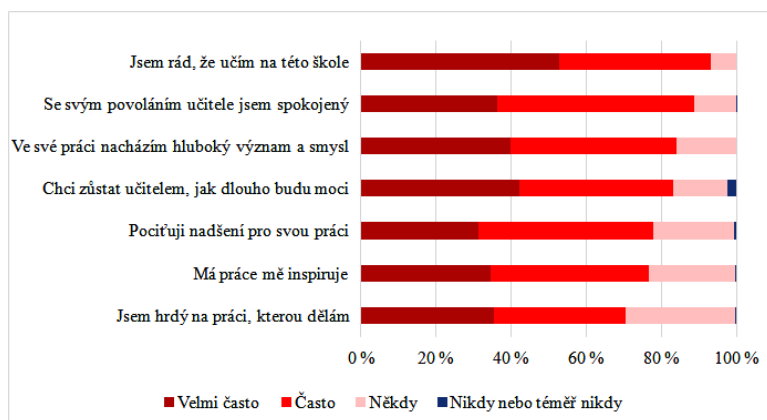
Sledoval se také důraz škol na studijní úspěch. Podle ředitelů patříme k zemím s menším důrazem na studijní úspěch. Z pohledu učitelů bylo hodnocení pozitivnější a řadíme se k průměrným zemím v Evropě.

Počet hodin matematiky je v České republice podprůměrný, a co se přírodovědy týče, patříme k zemím s nejnižším počtem hodin.

Čeští učitelé se cítí být po Japonsku při výuce nejméně omezováni nedostatečnými předchozími znalostmi žáků, vyrušováním, nezájmem o výuku, speciálními vzdělávacími potřebami žáků.

Do dalšího vzdělávání se zapojují čeští učitelé více v matematice než v přírodovědě. Oproti jiným evropským zemím se čeští učitelé mnohem méně vzdělávají v oblasti kurikula, obsahu předmětu a hodnocení žáků, naopak více ve využívání informačních technologií.

Čeští učitelé vyjádřili malou spokojenost se svým povoláním. Velmi spokojení učitelé vyučují jen třetinu žáků 4. ročníků – obr. 7 ukazuje, jak čeští učitelé hodnotili dílčí položky tvořící index spokojenosti s povoláním.

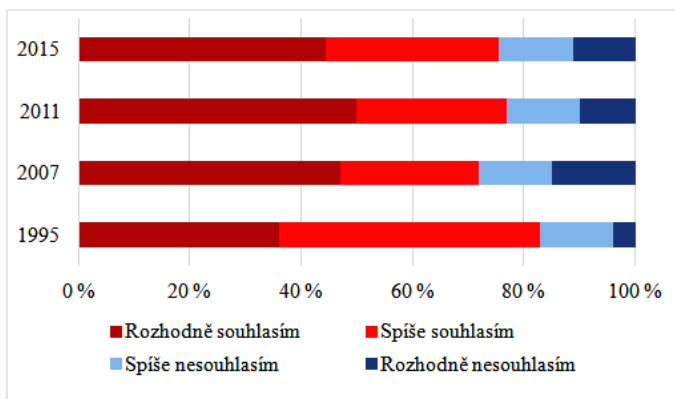


Obr. 7 Hodnocení dílčích položek indexu spokojenosti s povoláním českými učiteli

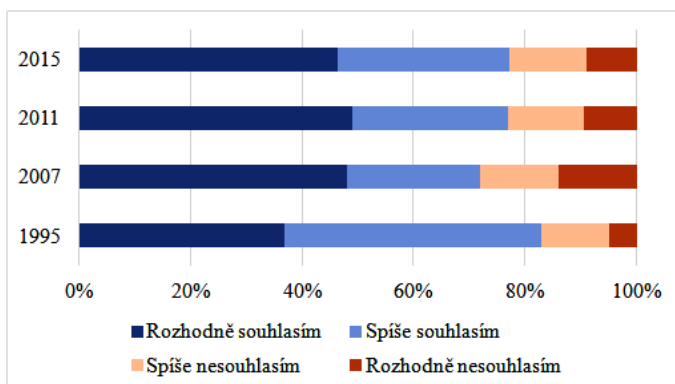
Žáci, kteří mají menší počáteční přípravu na školu, dosahují v testech TIMSS horších výsledků. V České republice je jedna z nejrozsáhlejších předškolních příprav, přesto podle hodnocení ředitelů patříme mezi země s nejnižší mírou počátečních dovedností při nástupu do školy. Také rodiče hodnotili schopnosti žáků jako velmi malé.

Čeští žáci chodí ze všech zúčastněných zemí do školy nejméně rádi, vyjádřili jednu z nejnižších sounáležitostí se školou a nemají k ní dobrý vztah.

Čeští žáci vyjádřili jen podprůměrnou chuť učit se matematiku a přírodovědu, v matematice poklesl zájem žáků o její studium a v obou předmětech si žáci málo věří. V grafech na obr. 8 a 9 je zachycen vývoj míry obliby matematiky a přírodovědy u českých žáků.



Obr. 8 Míra souhlasu českých žáků s tvrzením „Matematiku mám rád/a“.



Obr. 9 Míra souhlasu českých žáků s tvrzením „Přírodovědu mám rád/a“.

V České republice byla zjištěna velká souvislost mezi výsledky žáků a jejich rodinným zázemím.

Zajímavé je, že žáci s vlastním počítačem či tabletem dosáhli v průměru horšího výsledku než žáci, kteří ho nemají.

Závěr

V roce 1995, kdy se Česká republika poprvé zúčastnila šetření TIMSS, byli testováni žáci 4. i 8. ročníku a dosáhli velmi dobrých výsledků. V přírodních vědách i v matematice patřili mezi nejúspěšnější. V roce 1999 pak bylo šetření TIMSS zaměřeno pouze na 8. ročníky a výsledky českých žáků se zhoršily, což bylo připisováno změnám souvisejícím s prodloužením základní školy z osmi na devět let a přesunem některých tematických celků do vyšších ročníků. V roce 2003 se Česká republika šetření neúčastnila. V roce 2007 pak došlo u obou testovaných ročníků ke zhoršení. V matematice bylo zhoršení oproti roku 1995 významné u obou ročníků. V přírodovědě se žáci 4. ročníku též významně zhoršili. Výsledek žáků 8. ročníku byl na úrovni roku 1999.

V šetřeních v letech 2011 a 2015 se testovali bohužel pouze žáci 4. ročníku a dále lze sledovat změny jen v jejich výsledcích. Obě šetření přinesla zlepšení výsledků českých žáků. V matematice bylo zlepšení významné jak v období do roku 2011, tak do roku 2015. Přesto je výsledek stále horší než v roce 1995. Úrovně z roku 1995 nedosahuje ani podíl českých žáků s výbornými výsledky v matematice. V přírodovědě je výsledek českých žáků na úrovni roku 1995. Propad z roku 2007 dohnali žáci již za období do roku 2011 a do roku 2015 se pak výsledek nezměnil. O něco nižší než v roce 1995 zůstává podíl žáků s vynikajícími výsledky v přírodovědě.

Je zajímavé, že čeští ředitelé i učitelé hodnotili materiální podmínky pro výuku velmi dobře a uváděli, že při ní nejsou ani příliš omezování potřebami žáků. Dosažené výsledky žáků tomu ale úplně neodpovídají. Svou roli může hrát nízká spokojenost českých učitelů se svým povoláním, velmi malá sounáležitost žáků se školou a malý zájem učit se matematiku a přírodovědu. Jako průměrné je hodnoceno školní klima, malý důraz je v českých školách ve srovnání se zahraničím kladen na studijní úspěch. Důležité je proto hledat cesty, jak získávat zájem žáků o matematiku a přírodní vědy a motivovat je k učení. Je také potřeba vytvářet ve škole přátelskou atmosféru a bezpečné prostředí, ve kterém se žáci budou cítit dobře, pomáhat jim zvyšovat vlastní sebedůvěru a dávat prostor k aktivnímu zapojení do výuky. Vhodně motivovat je ale třeba i samotné učitele.

Literatura

- [1] Mandíková, D., Tomášek, V.: Výsledky českých žáků ve výzkumu TIMSS 2007. MFI, roč. 19 (2010), č. 5, s. 369–383.
- [2] Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Hooper, M.: TIMSS 2015 International Results in Mathematics and Science. November 2016. Dostupné na [cit.17-02-23]: <http://timssandpirls.bc.edu/isc/publications.html>
- [3] Tomášek, V., Basl, J., Janoušková, S.: Mezinárodní šetření TIMSS 2015. Národní zpráva. ČŠI, Praha, 2016.
- [4] Tomášek, V. a kol.: Národní zpráva TIMSS 2011. ČŠI, Praha, 2012.
- [5] Tomášek, V. a kol.: Výzkum TIMSS 2007. Obstojí čeští žáci v mezinárodní konkurenci? ÚIV, Praha, 2008.

Další informace a materiály k projektu TIMSS lze nalézt na adresách:

Mezinárodní stránky: <http://timssandpirls.bc.edu/>

Národní stránky: <http://www.csicr.cz/Prave-menu/Mezinarodni-setreni/TIMSS>

Příklady úloh pro různé vědomostní úrovně

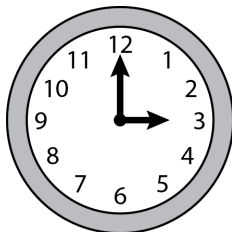
Matematika

Nízká úroveň

Který obdélník má $\frac{1}{3}$ vybarvenou?



Střední úroveň



Ve 3:00 svírají hodinové ručičky pravý úhel. Ve který jiný čas ručičky svírají pravý úhel?

- A) 3:15 B) 3:45 C) 9:00 D) 9:45

Vysoká úroveň

Bára vymyslela tuto hádanku o čtyřciferném čísle: Číslice na místě stovek je 7. Číslice na místě tisíců je větší než číslice na místě stovek. Číslice na místě jednotek je menší než číslice na místě stovek. Které je Bářino číslo?

- A) 2 708 B) 4 733 C) 8 726 D) 9 718

Velmi vysoká úroveň

Sylva má 12 kousků drátu, 40 kulatých korálků a 48 plochých korálků. Na výrobu jednoho náhrdelníku potřebuje 1 kousek drátu, 10 kulatých korálků a 8 plochých korálků. Jestliže Sylva udělá všechny náhrdelníky stejné, nejvýše kolik náhrdelníků může vyrobit?

- A) 40 B) 12 C) 5 D) 4

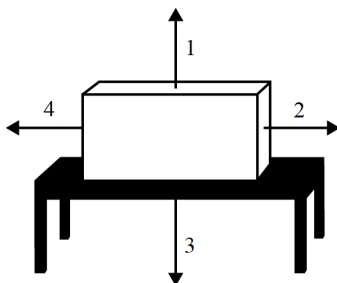
Přírodověda

Nízká úroveň

Voda se vyskytuje jako pevná látka, kapalina nebo plyn. Co z následujícího je pevná látka?

- A) pára B) kostka ledu C) mrak D) dešťová kapka

Střední úroveň



Prohlédni si kvádr, který leží na stole. Která šipka ukazuje směr působení gravitační síly?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

Vysoká úroveň

V následující tabulce jsou informace o počasí ze čtyř různých míst

Místo	Teplota	Oblačnost
<i>A</i>	5 °C	oblačno
<i>B</i>	−5 °C	jasno
<i>C</i>	−5 °C	oblačno
<i>D</i>	5 °C	jasno

Ve kterém místě bude s největší pravděpodobností sněžit?

A) místo *A* B) místo *B* C) místo *C* D) místo *D*

Velmi vysoká úroveň

Dravec je v potravním řetězci takový živočich, který se živí jinými živočichy. **Kořist** je živočich, který je potravou dravce.

Které tvrzení o dravcích a kořisti je pravdivé a které je nepravdivé?

Vybarvi jeden kroužek u každého tvrzení.

	Pravdivé	Nepravdivé
Živočich s ostrými zuby bude asi dravec. -----	☐	☐
Dravci jsou vždy větší než jejich kořist. -----	☐	☐
Velký živočich nemůže být kořistí. -----	☐	☐
Někteří živočichové mohou být zároveň dravcem i kořistí. -	☐	☐

Měříme teplotu vody. Jednoduché. Nebo ne?

PETR KÁCOVSKÝ

MFF UK, Praha

Teplota je fyzikální veličinou, která se v termodynamice zavádí jako charakteristika rovnovážného stavu termodynamického systému (tzv. empirická teplota, [1]). Podobně jako například s energií, také s teplotou se

setkáváme prakticky ve všech partiích fyziky – často přitom plní roli parametru, který determinuje podobu fyzikálních a chemických procesů; pro přírodní vědy je tak měření teploty významným zdrojem informací o našem světě.

Protože mnoho fyzikálních veličin a velká většina materiálových konstant je v reálném světě funkcí teploty, nabízí se mnoho různých principů, které lze k měření teploty využít [2]. V prvním přiblížení lze tyto techniky měření rozdělit na kontaktní a bezkontaktní, kde obě skupiny mají své výhody i slabá místa. Kontaktní měření teploty předpokládá dosažení rovnovážného stavu mezi teplotoměrným prvkem a měřenou látkou, které však nebývá dokonalé; naproti tomu bezkontaktní měření vyžadují poměrně dobrou (a nesamozřejmou!) znalost vlastností měřeného povrchu.

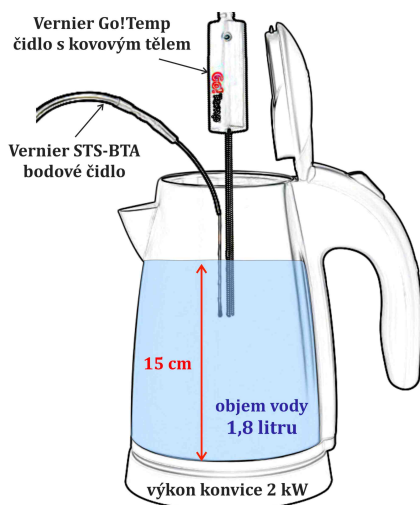
Tento článek popisuje tři jednoduché experimenty využívající kontaktní měření teploty termistorovými teploměry. Studované děje jsou spojeny s ohřevem či chladnutím vody a lze je zařadit do běžné středoškolské výuky v souvislosti s konceptem (měrné) tepelné kapacity, při zmínce o Newtonu zákonu ochlazování, proudění v kapalinách či během výkladu o změně hustoty vody s teplotou. Cílem autora je upozornit na to, že i jednoduchá měření mohou být zdrojem někdy i neočekávaných výsledků a jejich interpretace vyžaduje hlubší a komplexnější fyzikální vhled. Takové situace pak bývají bohatým zdrojem problémových otázek pro studenty, na jejichž základě lze propojovat poznatky z různých fyzikálních kapitol.

Experiment 1: Tepelná kapacita teploměru

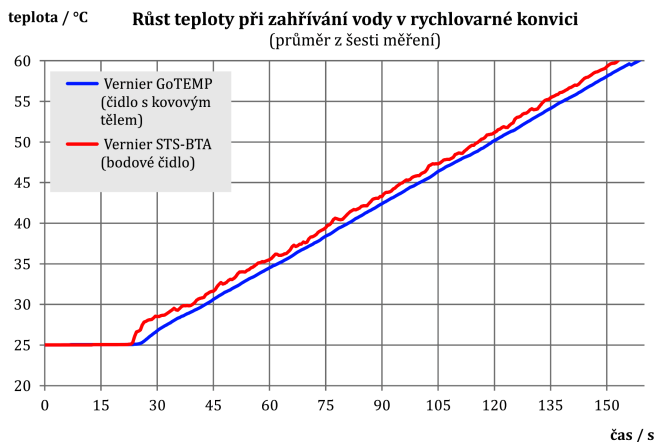
V rámci středoškolského učiva se zmiňuje tepelná kapacita ve významu jakési „ochoty“ těles měnit teplotu – tělesům s velkou tepelnou kapacitou je třeba k jejich ohřátí o $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ dodat více tepla než tělesům s tepelnou kapacitou malou. Pokud by měl náš teploměr, pro jednoduchost třeba o pokojové teplotě, velkou tepelnou kapacitu, přijal by například po ponoření do horké vody velké množství tepla, čímž by došlo k ochlazení vody a tudíž zkreslení měření. Při kontaktním měření teploty tedy zřejmě požadujeme, aby byla tepelná kapacita teploměrů co nejnižší. Následující experiment ukazuje, že splnění tohoto požadavku s sebou ale nese i určité obtíže při interpretaci některých dat.

Uspořádání experimentu: Do rychlovarné konvice s vodou byly do těsného sousedství umístěny dva teplotní senzory Vernier, jeden s masivním kovovým tělem (měřicí prvek je umístěn v jeho špičce), druhý ve formě bodového čidla; oba senzory byly situovány co nejbližše vertikální osy konvice

(obr. 1). Po zapnutí konvice byl oběma teploměry opakovaně proměřen nárůst teploty z pokojových $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ na teplotu $60\text{ }^{\circ}\text{C}$; průměr naměřených závislostí ukazuje obr. 2.



Obr. 1 Uspořádání experimentu

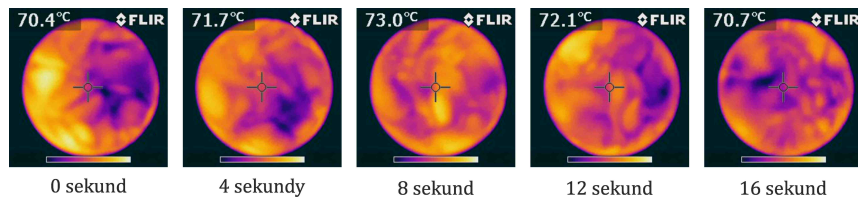


Obr. 2 Zahřívání vody se dvěma teplotními čidly (konvice byla zapnuta v čase $t = 10\text{ s}$)

Interpretace naměřených dat: V grafu na obr. 2 jsou patrné dva efekty. Prvním z nich je poloha naměřených křivek – během celého měření ukazuje bodové čidlo vyšší hodnoty než čidlo kovové. Tento jev je očekávatelný – bodové čidlo má velmi malou tepelnou kapacitu, jeho ohřev je tedy snadný a čidlo tak reaguje pružněji na změny teploty.

Druhý efekt, který při pohledu do grafu zaujme, je „neučesanost“ červené křivky – přestože jde o průměr z šesti měření, hodnoty měřené bodovým čidlem fluktuují výrazně více než v případě kovového teploměru. Zde je role rozdílné tepelné kapacity zcela zřejmá – zahřívající se kapalina během experimentu proudí a k čidlům se tak náhodně dostávají její chladnější a prohřátější části; zatímco bodový teploměr tyto nuance zachytí, kovové tělo teploměru se přizpůsobuje změnám velmi pomalu a drobné výkyvy teploty tak prakticky neregistruje;¹⁾ nárůst teploty se pak jeví být čistě lineární.

O tom, že proudění v kapalině skutečně značně ovlivňuje teplotu jednotlivých jejích částí, se lze přesvědčit například i termovizní kamerou. Na obr. 3 je sekvence snímků, na kterých je zachycena hladina vody v kádince; sekvence byla pořízena 10 minut poté, co byla do kádinky nalita vroucí voda. Je patrné, že v řádu sekund se teplota jednotlivých částí hladiny (i u značně „odstáté“ vody) mění v rozmezí cca 1 °C až 2 °C.



Obr. 3 Hladina chladnoucí kapaliny v kádince o objemu 250 ml; barevná škála snímku má rozsah 68 °C (fialová) až 76 °C (bílá), okolní pokojová teplota byla přibližně 25 °C.

Experiment 2: Chladnutí vody v různých hloubkách v odměrném válci

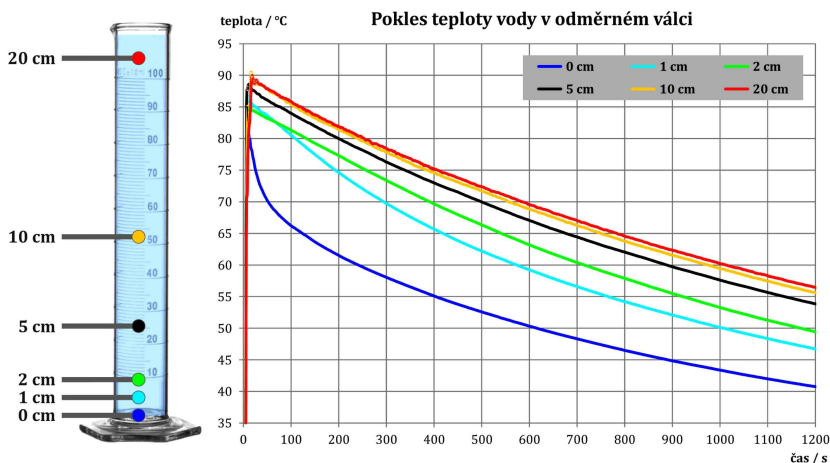
Mnoho chemických a fyzikálních situací vyžaduje měření teploty kapalin v delším časovém úseku minut či desítek minut. Kde v kapalině ale teplotu měřit, abychom dostali co nejpresnější údaje? U hladiny, u dna, někde

¹⁾Kromě toho je teplota měřená špičkou kovového čidla stabilizována vedením tepla z horní části teploměru, která je také obklopena vodou.

uprostřed? A lze vůbec hovořit o přesnosti, má smysl mluvit o teplotě kapaliny jako o jednom jediném čísle?

Cílem následujícího experimentu je ukázat, že odpovědi na výše uvedené otázky si zaslouhují naši pozornost, abychom při fyzikálních měřeních nedocházeli ke zcela zavádějícím výsledkům.

Uspořádání experimentu: V experimentu bylo pomocí bodového teploměru Vernier STS-BTA opakovaně proměřeno chladnutí vody o objemu 110 ml v po okraj naplněném odměrném válci o výšce 23 cm a průměru 2,5 cm. Voda byla do válce nalévána z rychlovarné konvice vždy téměř vroucí, tj. těsně pod svojí teplotou varu; teplota místnosti se pohybovala kolem 25 °C. Takto popsané měření bylo provedeno pro šest různých poloh teploměru ve válci (obr. 4 vlevo), přičemž pro každou polohu bylo pětkrát zopakováno a získaná data zprůměrována. Finální závislosti jsou vyneseny do grafu na obr. 4 vpravo.



Obr. 4 Vlevo uspořádání pokusu, vpravo naměřené závislosti. Vzdálenosti v legendě grafu představují výšku bodového teplotního čidla nade dnem nádoby.

Interpretace naměřených dat: Graf na obr. 4 dává jasné odpovědi na otázky uvedené v úvodu tohoto experimentu. Pokud nebudeme kapalinu v nádobě během jejího ohřívání či chladnutí neustále promíchávat, vytvoří se v ní teplotní rozdíly vyplývající ze závislosti hustoty kapaliny na teplotě. Významnost těchto rozdílů samozřejmě značně závisí na parametrech nádoby či druhu kapaliny – například anomální chování vody v rozmezí 0 °C a 4 °C je velmi unikátní.

Vysoký a úzký odměrný válec byl zvolen záměrně, aby zmíněné rozdíly vynikly, ovšem i v běžné skleničce je lze naměřit. Lze si povšimnout toho, že teplota ve válci se v daném čase rozhodně nemění lineárně s hloubkou – výrazně chladnější vrstva vody se vytváří v bezprostřední blízkosti dna válce, ale již ve čtvrtině výšky vodního sloupce se teploty blíží hodnotám měřeným v horní části nádoby. Pokud bychom ale porovnali údaje měřené teploměrem u dna a u hladiny, v některých okamžicích se během chladnutí původně vroucí vody budou v této konkrétní nádobě lišit až o $21\text{ }^{\circ}\text{C}$!

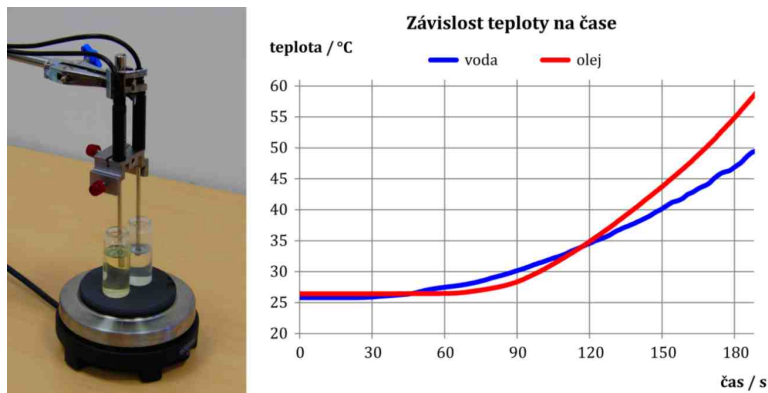
Jestliže podrobně rozebereme první sekundy měření, kdy dochází k nalévání vroucí vody do válce, zjistíme navíc, že v případě nejnižší položeného teploměru, který je vodou zaplaven nejdříve, se maximální měřená teplota ani nepřehoupala přes $82\text{ }^{\circ}\text{C}$; čím je teploměr výše, tím vyšší teplotu na počátku měření ukázal. Tento výsledek jde zdánlivě proti naší zkušenosti – voda by měla být nejteplejší ihned po vypnutí konvice, s tím, jak ji postupně do válce lijeme, by měla spíše chladnout; tento paradox může být ve výuce využit jako problémová úloha pro studenty. Vysvětlení se skrývá v tepelné výměně mezi nalévanou vodou a nádobou – ve chvíli, kdy je zaplaven nejnižší položený teploměr, je vody ve válci málo a rychle snižuje svoji teplotu při kontaktu se sklem válce. S rostoucím objemem přilité vody role ochlazování nádobou slábne, a výše položené teploměry tak naměří vyšší maximální teplotu; teplota měřená spodními teploměry ale již nevzroste, protože právě k nim klesá voda ochlazená v horních částech válce jeho stěnami.

Experiment 3: Porovnání měrné tepelné kapacity oleje a vody

Analogicky tepelné kapacitě představuje měrná tepelná kapacita jakousi ochotu látky měnit svoji teplotu; tentokrát je tato „ochota“ vztažena na jednotkovou hmotnost. Úvahám a výpočtům s měrnou tepelnou kapacitou se věnuje ve středoškolské výuce poměrně velká pozornost, úkolem bývá například určit ze závislosti teploty na dodaném teple měrnou tepelnou kapacitu dané látky [3]. Pokud má tedy například olej přibližně poloviční měrnou tepelnou kapacitu ve srovnání s vodou, je přirozené očekávat, že jeho teplota bude při zahřívání rychleji růst (... a při ochlazování rychleji klesat, na což se někdy ve víru kalorimetrických výpočtů zapomíná). Jestliže se ale toto očekávání pokusíme experimentálně potvrdit, můžeme narazit na efekt, který nám interpretaci poněkud zkomplikuje.

Uspořádání experimentu (zkrácený popis ze [4]): Do dvou menších nádobek byla odvážena stejná hmotnost oleje a vody a nádobky byly postaveny vedle sebe na plotnu elektrického vaříče; aby bylo měření co nejprůkaznější,

je vhodné je umístit středově symetricky vzhledem ke středu vařiče, aby bylo jejich zahřívání skutečně rovnocenné. Do každé nádoby bylo zavedeno teplotní čidlo Vernier, ať již bodové či s kovovým tělem (obr. 5 vlevo); podstatné je, aby oba teploměry měřily teplotu ve stejné výšce nade dnem nádoby. Současně se spuštěním měření byl vařič zapnut.



Obr. 5 Vlevo uspořádání pokusu, vpravo výsledná závislost

Interpretace naměřených dat: Vzorově naměřená data zachycuje obr. 5 vpravo. Je sice patrné, že za celou dobu měření se skutečně více ohřál olej než voda, což odpovídá očekávanému výsledku, ale zároveň je z grafu zřejmé, že po určitou dobu (v čase přibližně 30 až 90 sekund) se voda ohřívá rychleji než olej. Tento efekt není možné vysvětlit na základě rozdílných měrných tepelných kapacit obou kapalin.

Při hledání jeho původce si ale můžeme pomoci dvěma nepatrnými úpravami experimentu – pokud obě čidla zvedneme výše k hladině kapalin, efekt ještě posílíme; naopak, jestliže umístíme čidla těsně nad dno nádobek, bude efekt minimální a olej se bude prakticky od začátku měření „spořádaně“ zahřívát rychleji než voda.

Tyto dva dílčí experimenty, které je vhodné se studenty provést, již naznačují, že vysvětlení je třeba opět spojit s vlivem proudění v kapalinách. Zatímco málo viskózní voda proudí ode dna k teploměru poměrně snadno, olej s násobně větší dynamickou viskozitou cirkuluje znatelně pomaleji. Jestliže tedy zahříváme nádobky zespoda, trvá relativně dlouhou dobu, než ohřátý olej vystoupá ode dna k teplotnímu čidlu, které nárůst jeho teploty registruje. Efekt způsobený rozdílným prouděním ve vodě a v oleji je zjevně tím silnější, čím jsou teploměry vzdálenější ode dna.

Závěr

Měření teploty je ve výuce fyziky poměrně častým experimentálním úkonem, ze kterého lze zejména ve středoškolské termodynamice vyvozovat poměrně rozsáhlé závěry (teplotní změny při skupenských přeměnách, výsledky kalorimetrických úloh, teplotní závislosti hustoty, objemu, délky, atd.). Článek se ve třech výše uvedených experimentech snaží upozornit na skutečnost, že prosté měření teploty v nádobce s vodou může dávat v různých situacích různé výsledky – zásadním vlivem, který je třeba mít během takových měření na paměti, je vertikální proudění v kapalinách dané teplotně závislým rozdílem hustot. Stejně tak je u kontaktních měření třeba zohledňovat fakt, že teploměr měří vždy teplotu sebe sama, což nezbytně vnáší do výsledků vliv jeho vlastní tepelné kapacity.

Literatura

- [1] *Obdržálek, J.*: Úvod do termodynamiky, molekulové a statistické fyziky. Matfyzpress, Praha, 2015.
- [2] *Kreidl, M.*: Měření teploty – senzory a měřicí obvody. Technická literatura BEN, Praha, 2005.
- [3] *Svoboda, E., Bartuška, K.*: Fyzika pro gymnázia – Molekulová fyzika a termika. Prometheus, Praha, 2016.
- [4] *Kácovský, P.*: Experimenty podporující výuku termodynamiky na středoškolské úrovni. Disertační práce, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzita Karlovy, Praha, 2016.

Rozvíjanie vybraných zručností v Bádateľskom prírodovednom laboratóriu SteelPark Košice

MÁRIA BILIŠŇANSKÁ – MARIÁN KIREŠ

Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice, SLOVENSKO

Neformálne vzdelávanie a popularizačné podujatia sú celosvetovo využívané na podporu záujmu mládeže a budovanie pozitívneho postoja spoločnosti k vede. V mnohých metropolách už dlhodobo fungujú centrá vedy,

exploratória či zábavno-náučné parky, napríklad *Cité des Sciences et de l'industrie* v Paríži, *Universum* v Göteborgu, *Science Museum* v Londýne, *Palác zázrakov* v Budapešti a pod. Formou interaktívnych pokusov a hier sa v nich návštevníci zoznamujú so zákonmi prírody, Zeme a vesmíru. Zábavným spôsobom sa najmä u detí prebúdza záujem o tajomstvá okolitého sveta, nezabudnuteľnými zážitkami objavujú úžasný svet fyziky a ďalších prírodovedných predmetov. V súčasnej dobe, kedy sa osobné skúsenosti čoraz častejšie zamieňajú za počítačové simulácie, môžu žiaci na vlastnej koži okúsiť množstvo experimentov. Myšlienku kreatívnej fabriky priniesol do Košíc prezident košickej oceliarne – *George F. Babcoke*, U.S.Steel Košice. Návštevníci objavujú „príbeh ocele“ – od ťažby surovín, cez spracovanie až po výsledné výrobné procesy a hotové výrobky. Vyše 50 interaktívnych exponátov spája poznatky a kreativitu z viacerých vedných oblastí s výrobou a využitím hutníckych produktov.

Dva roky prevádzky centra ukázali, že výrazný podiel na návštevnosti centra majú školské skupiny žiakov. Pre opakovaný návrat do centra však vznikala prirodzená požiadavka zo strany učiteľov, využiť motivačnú funkciu vedeckého centra na posilnenie vzdelávacieho účinku, najmä v oblasti rozvíjania vybraných bádateľských zručností žiakov základných a stredných škôl. V priestoroch SteelPark sme preto v októbri 2014 zriadili a rozbehli aktivitu Bádateľského prírodovedného laboratória.

Bádateľské prírodovedné laboratórium

Bádateľské prírodovedné laboratórium (BPL) je určené žiakom základných a stredných škôl a ich učiteľom s cieľom získať skúsenosti s bádateľsky orientovanou výučbou. V neformálnom prostredí sa stretávajú s netradičnými meraniami, pozorovaniami spojenými s objavovaním nových poznatkov. Žiaci pracujú podľa návodu v pracovnom liste v troj alebo štvorčlenných skupinách, pod vedením zaškoleného lektora. Učiteľ je v pozícii pozorovateľa, ktorý sleduje priebeh výskumne ladenej koncepcie prírodovedného vzdelávania (IBSE) (*SAILS, Establish project*).

Aktivita v bádateľskom prírodovednom laboratóriu trvá 60 min. Jej náplňou je žiacke fyzikálne skúmanie podporujúce rozvíjanie vedeckej gramotnosti. S dôrazom na aktívnu účasť všetkých študentov a rozvoj ich experimentálnych zručností, maximálny počet žiakov v jednej skupine je šesťnásť. Ponúkané sú preto dve rôzne, paralelne bežiacie aktivity, počas ktorých je možné zapojiť všetkých žiakov klasickej triedy.

Aktívne prírodovedné experimentovanie rozvíja zručnosti študentov, núti ich aplikovať získané poznatky a prehľbuje pochopenie vybraných

javov. Netradičné pokusy motivujú mladých ľudí k tvorivej práci v menších skupinkách, k samostatnému objavovaniu a postupnému odhaľovaniu nových úloh. Podnetné prostredie novozriadeného vedeckého centra zároveň slúži na vťahnutie učiteľov do neformálneho vzdelávania. Nápady, metodiky a pracovné listy môžu využiť vo svojej vlastnej praxi na škole. Bádateľské prírodovedné laboratórium súčasne využívame ako podporu pre praktickú prípravu študentov medziodborového a učiteľského štúdia v kombinácii s fyzikou. Lektorovaním sa pripravujú na svoje budúce povolanie. Získavajú cenné skúsenosti s bádateľskými aktivitami, učia sa ich realizovať a podieľajú sa na zbere údajov didaktického prieskumu.



Obr. 1 Bádateľské prírodovedné laboratórium v SteelParku

Počas dvadsiatich mesiacov fungovania BPL sa na šesťnástich aktivitách vystriedalo 7 447 účastníkov. Ročná návštevnosť z roka na rok narastá. Počas troch školských rokov (2014/2015, 2015/2016, 2016/2017) bolo pre žiakov pripravených 16 aktivít. V nasledujúcej tabuľke sú uvedené názvy jednotlivých aktivít, počty žiakov základných a stredných škôl a celkový počet zúčastnených žiakov.

Tabuľka 1 Aktivity v BPL v šk. roku 2014/2015, 2015/2016 a 2016/2017

AKTIVITA	Mesiac	ZŠ	SŠ	spolu
		počet žiakov	počet žiakov	počet žiakov
2014/2015				
1. Dokážeme odvážiť vzduch?	OKTÓBER	134	183	317
2. Čo všetko nám prezradí laserový diaľkomer?	NOVEMBER	156	357	513
3. Súboj na labilnej táčke	DECEMBER / JANUÁR, JÚN	210	26	236
4. Stala sa vražda	FEBRUÁR / MAREC	342	81	423
5. Ako človek dýcha	FEBRUÁR / MAREC	295	113	408
6. Natankuj vodu a jazdi	APRÍL / MÁJ	298	151	449
7. Ako netopier zachytí náš pohyb	APRÍL / MÁJ	420	185	605
Spolu				2951
2015/2016				
8. Čo ukazuje váha	OKTÓBER / DECEMBER	410	102	512
9. Ako horí sviečka	OKTÓBER / DECEMBER	410	102	512
10. JO-JO, detská hračka plná fyziky	JANUÁR / FEBRUÁR	71	82	153
11. Po stopách fyzikálnej veličiny	JANUÁR / FEBRUÁR	220	71	291
12. Odkiaľ získavame kyslík, ktorý dýchame	MAREC / APRÍL	350	185	535
13. Tieni známe - neznáme	MAREC / APRÍL	387	163	550
14. Opravme rozbitý Galileov teplomer	MÁJ / JÚN	406	101	507
15. Ako fotiť pohybujúce sa objekty	MÁJ / JÚN	298	72	372
Spolu				3432
2016/2017				
1. Dokážeme odvážiť vzduch?	OKTÓBER / NOVEMBER	33	492	538
2. Čo všetko nám prezradí laserový diaľkomer?	OKTÓBER / NOVEMBER	28	377	526
8. Čo ukazuje váha	DECEMBER / FEBRUÁR			
16. Ako oklamať svoje zmysly	DECEMBER / FEBRUÁR			
Spolu				1064
Spolu 2014 - 2017				7447

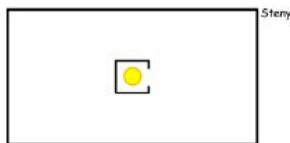
Mapovanie žiackych prekonceptov prostredníctvom vstupného koncept testu

Na širokej vzorke návštevníkov sme v rámci jednotlivých aktivít realizovali didaktický experiment skúmajúci prekoncepty a rozvoj vybraných zručností žiakov. V úvode aktivity píšú účastníci vstupný koncept test zameraný na kľúčové pojmy danej témy. Súčasne slúži na vťahnutie žiakov do danej problematiky a s ňou súvisiace problémy.

- *Prvá úloha v koncept teste: Zakreslite do obrázka, kde sa musíte postaviť, aby ste videli svetlo zo žiarovky.*

Počas aktivity „Tiene – známe, neznáme“ sme zisťovali žiacke prekoncepty na otvorenú otázku: *kde sa musíte postaviť, aby ste videli svetlo zo žiarovky* (obr. 2). Žiaci zakresľovali svoju odpoveď do obrázka, pričom až 75 % opýtaných neuviedlo slovné vysvetlenie svojej odpovede.

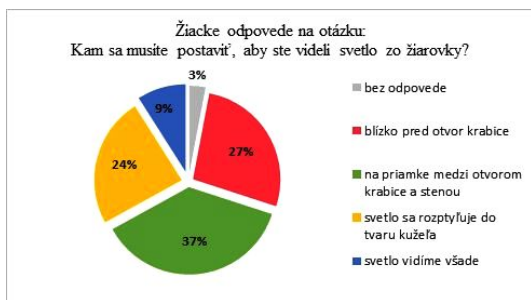
1. Žiarovku umiestnime do krabice s malým otvorom, ako je zobrazené na obrázku.



Zakreslite do obrázka, kde sa musíte postaviť, aby ste videli svetlo zo žiarovky.
Bude to len jediné miesto? Vysvetlite.

Obr. 2 Úvodná otázka k aktivite „Tiene – známe, neznáme“

Porovnali sme odpovede žiakov, ktorí ešte tematický celok optika v škole nepreberali (žiaci 6. a 7. ročníka ZŠ) a žiakov vyšších ročníkov (8., 9. ročník ZŠ a stredoškolských študentov). Porovnateľný počet žiakov na otázku neodpovedal správne: 92 % žiakov, ktorí daný tematický celok nepreberali, 93 % žiakov základných škôl, ktorí majú školské poznatky z optiky a 87 % študentov stredných škôl.

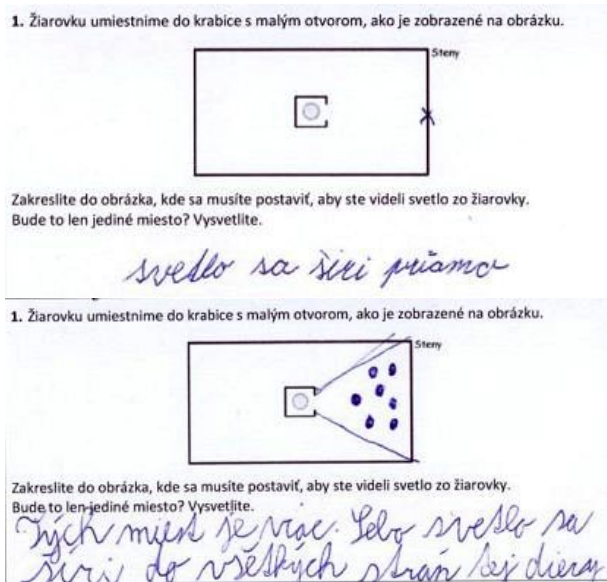


Obr. 3 Žiacke odpovede na prvú úvodnú otázku k aktivite

Medzi najpočetnejšie chybné odpovede (obr. 3) patrilo zakreslenie panáčka na priamke medzi otvorom krabice a stenou (37 % všetkých opýtaných, obr. 4). Ako argumentáciu žiaci uviedli, že „*svetlo sa šíri priamočiaro*“. Druhou najčastejšou odpoveďou (27 % opýtaných) bol panáčik

v tesnej blízkosti otvoru krabice s vysvetlením: „žiarovku uvidíme, len ak sa postavíme pred otvor krabice“, „tesne pred otvorom krabice je svetlo zo žiarovky najsilnejšie“. 24 % žiakov zakresliło „svetelný kužeľ“ k otvoru krabice (obr. 4). Kdekoľvek sa v tomto kuželi postavíme, svetlo zo žiarovky uvidíme. Niektorí žiaci pridali aj poznámku: „svetlo je rozbiehavé, šíri sa do prostredia“.

Len 9 % z päťstopäťdesiat opýtaných respondentov odpovedalo na otázku správne, t.j. svetlo vidíme všade. Mnohí sa nad otázkou logicky nezamysleli. Odpovedali podľa naučených formulácií: *svetlo sa šíri priamočiaro, svetelné lúče sú rozbiehavé*. Mylnú predstavu podporuje aj stotožňovanie svetla s jeho zdrojom (napr. žiarovkou) (Mandíková, 2011). Z čoho pramení väčšina odpovedí: *svetlo uvidím vtedy, ak zároveň vidím aj žiarovku* (88 % opýtaných).

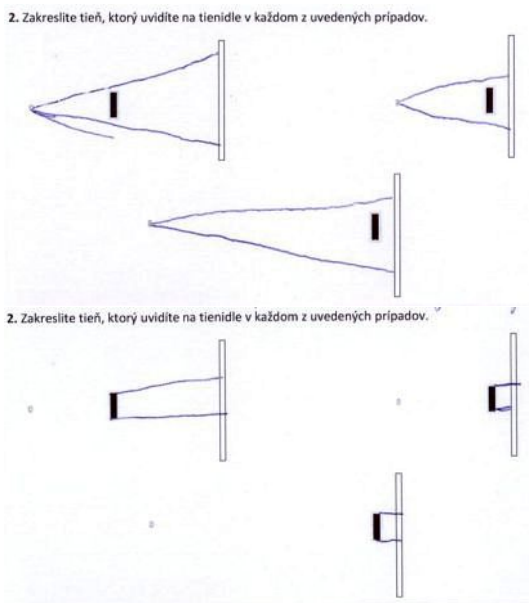


Obr. 4 Najčastejšie odpovede žiakov na prvú úvodnú otázku k aktivite

- *Druhá úloha v koncept teste: Zakreslite tieň, ktorý uvidíte na tienidle v každom z uvedených prípadov.*

Keďže koncept test svojou formou pripomína školskú písomku, väčšina účastníkov odpovedala naučenou poučkou bez zamyslenia sa. Musíme sa

preto u návštevníkov BPL zamerať aj na precvičovanie zručnosti *čítať s porozumením* a motivovať ich k logickému uvažovaniu. Do úvahy prichádza aj zmena spôsobu vyplňania koncept testu, aby sa účastníci v prvej chvíli necítili „ako v škole na písomke“. Vhodnou alternatívou je spoločné zaznamenávanie odpovedí na úvodné otázky v menších (troj, štvorčlenných) skupinách. Podporíme pritom žiacku diskusiu a premýšľanie nad otázkami. Upravený spôsob zaznačovania žiackych prekonceptov plánujeme zaradiť v rámci najbližšej výmeny aktivít. Pevne veríme, že zároveň zvýšime počet slovných vyjadrení žiakov. Všimli sme si, že jednotlivec často nedokáže sformulovať svoje myšlienky do ucelenej vety. Jednoduchšie je preňho len naznačenie svojej odpovede do obrázka. Konkrétne na prvú otázku: *kde sa musíte postaviť, aby ste videli svetlo zo žiarovky*, zakreslilo priamo do obrázka svoju odpoveď 97 % opýtaných. Avšak len 25 % uviedlo aj slovné vysvetlenie.



Obr. 5 Odpovede účastníkov na druhú otázku v koncept teste

Pri ďalšej otázke účastníci zakresľovali tieň do obrázka v troch rôznych prípadoch umiestnenia svetelného zdroja a prekážky od tienidla (obr. 5). Tu sa prejavila väčšia predstavivosť stredoškolských študentov, keďže 62 %

opýtaných zakreslilo všetky tri prípady správne. V opačnom pomere odpovedali žiaci základných škôl. Nesprávne zakreslené tieňe (veľmi veľké tieňe, tieňe vo veľkosti prekážky alebo tieňe za prekážkou sa zužujúce, obr. 5) malo 64 % žiakov 6., 7. ročníka a 62 % žiakov 8., 9. ročníka.

Respondenti základnej školy pred výučbou tematického celku optika, ale aj po jeho absolvovaní odpovedali na zadanú otázku v porovnateľnom počte správne (36 % až 38 %). Žiaci ZŠ, ktorí už optiku v škole preberali, pravdepodobne ešte nemajú získané vedomosti vžité a prepojené so situáciami z bežného života. Nevedia ich použiť v nových problémových úlohách. Na druhej strane vedomosti žiakov stredných škôl už stihli dozrieť. Spoločne so svojou predstavivosťou ich dokázali aplikovať pri odhade veľkosti tieňa v závislosti od umiestnenia svetelného zdroja a prekážky. Opäť sa nám potvrdil záver týkajúci sa podpory logického myslenia žiakov. Mladých ľudí musíme nabádať k premýšľaniu, ponúkať im príklady prepojené s reálnym životom, aby vnímali zmysel učeníh vedomostí a zručností a dokázali ich využívať v nových situáciách.

- *Tretia úloha v koncept teste: Pri sledovaní futbalového zápasu môžeme niekedy sledovať zaujímavé tieňe futbalistov. Stručne odôvodnite, ako si vznik takýchto tieňov vysvetľujete.*

V rámci poslednej otázky mali žiaci *stručne odôvodniť zaujímavé tieňe futbalistov na štadióne* (obr. 6). Väčšina opýtaných (72 %) odpovedala správne. Mnohí ako vysvetlenie uvádzali štyri svetelné reflektory v rohoch štadióna, čo vyplýva z ich vlastnej skúsenosti. V poslednej otázke sa neprejavil štatisticky významný rozdiel medzi odpoveďami žiakov ZŠ pred, po výučbe tematického celku optika a žiakov SŠ.

3. Pri sledovaní futbalového zápasu môžeme niekedy sledovať zaujímavé tieňe futbalistov.

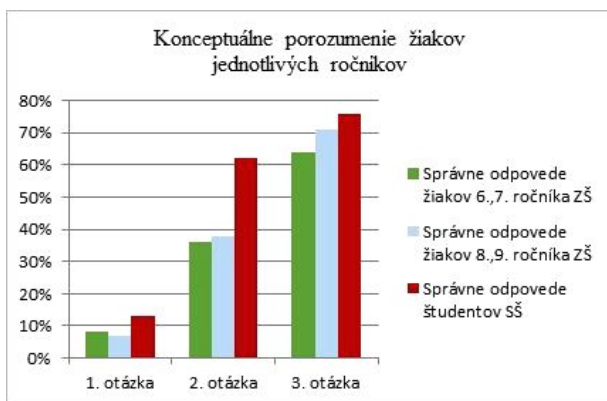
Stručne odôvodnite, ako si vznik takýchto tieňov vysvetľujete.



je tam viac svetel
a každé svetlo
vytvára 1 tieň

Obr. 6 Úvodná otázka k aktivite „Tiene – známe, neznáme“

Porovnaním odpovedí respondentov základných a stredných škôl na jednotlivé otázky sme došli k záveru, že nie je relevantný rozdiel medzi ich konceptuálnym porozumením danej témy. Zhruba rovnaký počet žiakov pred výučbou daného tematického celku (žiaci 6., 7. ročníka ZŠ), po jeho výučbe (žiaci 8., 9. ročníka ZŠ) a stredoškolských študentov odpovedali na jednotlivé otázky správne, čo znázorňuje aj nasledujúci graf (obr. 7). Ukazuje sa, že žiaci so svojimi vedomosťami nenapredujú. Získané znalosti vnímajú izolovane od bežného života. Často aj po prebratí daného učiva v nich pretrvávajú miskoncepce, ktorými si mylne vysvetľujú okolité javy.



Obr. 7 Správne odpovede žiakov na jednotlivé otázky vo vstupnom koncept teste

Riadené bádanie s podporou pracovných listov

Úvodná motivácia k danej téme v podobe koncept testu a zhodnotenie správnych odpovedí priamo nadväzuje na aktivity v pracovnom liste. Žiaci postupujú podľa návodu s jasne vymedzenými krokmi. Získavajú pritom zručnosti vedeckej práce počas pozorovania, hodnotenia, merania, zberu a vyhodnotenia údajov (Wenning, 2007). V pracovnom liste majú vymedzený priestor na zaznačovanie svojich predikcií, plánovanie experimentu, argumentáciu a vyslovenie záveru (Berg, 2013). Zhodnotením pracovných listov, ale aj pozorovaním práce žiakov počas samotných aktivít vidíme značné rezervy žiakov v nasledovných zručnostiach vedeckej práce:

- zaznamenávať svoje predikcie, komentáre a poznámky; naformulovať vlastnú myšlienku bez pomoci učiteľa/lektora,

- čítať s porozumením,
- problém s argumentáciou, obhájením si vlastného názoru,
- s plánovaním experimentu,
- problém spolupracovať v tíme, diskutovať, rozdeliť si úlohy v tíme.

Preto sa úlohami v pracovných listoch snažíme precvičovať tieto nedostatky žiakov a rozvíjať vybrané zručnosti vedeckej práce. Konkrétne počas aktivity „Tiene – známe, neznáme“ sme sa zamerali na precvičenie zručnosti predpovedať výsledok a zaznačiť ho, pozorovať a manipulovať s pomôckami v tíme, zaznamenať výsledky, naformulovať vysvetlenie na základe získaných výsledkov, diskutovať v tíme aj v celej skupine, aplikovať experimentálnu techniku na nové skúmanie a opätovná predikcia jeho výsledku. Účastníci diskutovali o princípe zobrazovania rovinným zrkadlom a jeho využití v praxi. Rozprávali sa o tieňoch a podmienkach ich vzniku. Vytvárali dvojitý tieň prostredníctvom jedného svetelného zdroja a objektu umiestneného na zrkadle (Čepic, 2006). Kreslili predikciu svetelných lúčov, ktoré takýto tieň vytvárajú. Postupne skúmali princíp tajomstva dvojitého tieňa a zaznamenávali svoje pozorovania. V závere na základe predošlých zistení kreslili a v tímoch vysvetľovali vznik dvojitého tieňa. Získané vedomosti a zručnosti aplikovali pri navrhovaní nových objektov, symetrických i nesymetrických a zakresľovaní ich dvojitých tieňov.

Vzhľadom k zisteným miskoncepciám a chybným prekonceptom prostredníctvom úvodného konceptu testu, musíme do pracovného listu zaradiť úlohy zamerané aj na základné poznatky z tematického celku optika. Žiaci majú problém s chápaním princípu šírenia svetla, so zakresľovaním svetelných lúčov, s naznačovaním jednoduchých tieňov a vysvetľovaním ich vzniku. V rámci najbližšieho zaradenia aktivity „Tiene – známe, neznáme“ v BPL sa v úvode pracovného listu zameriame na precvičenie základných pojmov danej témy a plynule prejdeme k skúmaniu princípu dvojitého tieňa vytváraného od jedného svetelného zdroja.

Spätná väzba a sebahodnotenie žiakov

V závere aktivity žiaci kriticky hodnotia úroveň svojich zručností, ktoré boli počas aktivity rozvíjané, formou sebahodnotiaceho hádku (v trojbo-
dovej škále: danú zručnosť zvládnem s výdatnou pomocou, s pomocou, samostatne, tab. 2). Zároveň sa zamýšľajú nad tým, čo sa naučili, čo bolo pre nich najviac zaujímavé, čomu stále nerozumejú, t.j. hodnotia výsledok

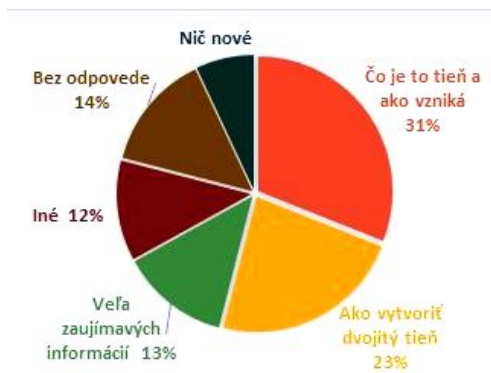
svojej práce prostredníctvom zadanej spätnej väzby. Sebahodnotením sa zameriavame na formatívne hodnotenie práce žiaka (Wenning, 2007).

Pri manuálne orientovaných činnostiach je dosiahnutá uspokojivá miera hodnotenia rozvoja zručností (tab. 2). Smerom k intelektuálne náročnejším činnostiam postupne klesá žiacka istota zvládnuť danú zručnosť samostatne. Zakresliť odraz lúčov dokáže samostatne okolo 60 % žiakov. Avšak opísať vznik dvojitého tieňa len vyše polovica opýtaných. Zaradením nových úloh do pracovného listu zameraných na precvičenie základných pojmov témy optika očakávame percentuálny nárast hodnotenia žiakov zvládnuť danú zručnosť samostatne.

Tabuľka 2 Kritické hodnotenie úrovne svojich zručností žiakmi v závere aktivity

Vybrané zručnosti	S výdatnou pomocou	S pomocou	Samostatne
Po tejto aktivite už viem...	%	%	%
Zakresliť odraz lúčov od rovinného zrkadla.	6	32	62
Zakresliť odraz lúčov od rovinného zrkadla na konci ktorého je prekážka.	8	31	61
Zakresliť odraz lúčov od rovinného zrkadla na začiatku ktorého je prekážka.	8	30	62
Zakresliť odraz lúčov od rovinného zrkadla v strede ktorého je umiestnená prekážka.	7	34	59
Opísať vznik dvojitého tieňa.	11	38	51

Na otázku, čo sa pri dnešnej aktivite „Tiene – známe, neznáme“ žiaci naučili (obr. 8), odpovedalo 31 % zúčastnených, že získali informácie o tom, ako vzniká tieň, čo je to tieň, ako pozorovať tieň, aké typy tienov poznáme. 23 % žiakov sa naučilo vytvárať dvojité tieň (s použitím jedného zdroja svetla). 13 % sa dozvedelo veľa zaujímavých informácií. 12 % opýtaných získalo rôzne vedomosti (o zakresľovaní svetelných lúčov, odraze a lome svetla, o zrkadle a pod.). 14 % žiakov na otázku neodpovedalo a 7 % sa nedozvedelo nič nové, resp. si zopakovali už známe poznatky.



Obr. 8 Žiacke odpovede na otázku, čo sa pri dnešnej aktivite „Tiene – známe, neznáme“ naučili

Záver

Pozitívna spätná väzba od učiteľov a žiakov i návštevnosť Bádateľského prírodovedného laboratória SteelPark v Košiciach nás motivuje pokračovať v príprave a realizácii ďalších aktivít podporujúcich tvorivé a aktívne poznávanie. Veríme, že v tomto neformálnom prostredí podporujeme školské fyzikálne vzdelávanie, rozvíjame vedeckú gramotnosť žiakov a inšpirujeme mladých ľudí k prírodovednému vzdelávaniu.

Literatúra

- [1] Mandíková, D., Trna, J.: Žákovské prekoncepce ve výuce fyziky. MLOK, Brno, 2011.
- [2] Čepic, M.: Does a virtual image cast a shadow? Physics Education, roč. 41 (2006), č. 4, s. 295–297.
- [3] The SAILS project. <http://sails-project.eu>
- [4] The Establish project. <http://www.establish-fp7.eu>
- [5] Van den Berg, E.: The PCK of Laboratory Teaching: Turning Manipulation of Equipment into Manipulation of Ideas. Scientia in educatione, roč. 4 (2013), č. 2, s. 74–92, <http://www.scied.cz/index.php/scied/article/viewFile/86/72>
- [6] Wenning, C.: Assessing inquiry skills as a component of scientific literacy. Journal of Physics Teacher Education Online, roč. 4 (2007), č. 2, s. 21–24, Scientific Inquiry Literacy Test (ScInqLiT) http://www2.phy.ilstu.edu/pte/publications/assessing_ScInq.pdf

Experimentální realizace Buquoyovy úlohy

ČENĚK KODEJŠKA – JAN ŘÍHA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Úvod

Práce experimentálně ověřuje teoretické řešení úlohy o kmitavém pohybu jednorozměrného otevřeného systému s proměnnou hmotností. Tato úloha je známa z historie pod názvem Buquoyova úloha, protože hrabě J. F. A. Buquoy (1781–1851) se jako první zabýval řešením úloh na pohyb soustav s proměnnou hmotností už v roce 1814. Teoretické řešení Buquoyovy úlohy je v [1].

Teorie byla ověřována experimentálně pomocí soustavy balónku naplněného heliem, který je zatížen zavěšeným ohebným vláknem s proměnnou hmotností (obr. 1). Vztlková síla působící na balónek je tažnou silou soustavy, pro jejíž výpočet se předpokládá, že balónek má přibližně kulový tvar. Při pohybu balónku se mění hmotnost zavěšeného vlákna a tedy i tíhová síla, kterou vlákno působí na balónek. Výsledná síla pak vyvolá tlumené kmitání celé soustavy.



Obr. 1 Balónek naplněný heliem zavěšený na řetízku

Z teoretického hlediska je pohyb soustavy popsán diferenciální rovnicí (viz [1]), přičemž stacionární řešení diferenciální rovnice je dáno vzta-
hem (1)

$$y_c = \frac{F}{\eta g}, \quad (1)$$

kde y_c je výška konce vlákna nad zvolenou nulovou potenciální hladinou ve stavu, kdy se vlákno nepohybuje a výsledná síla je nulová, F je svisle vzhůru působící konstantní síla, η je lineární hustota vlákna a g je tíhové zrychlení.

Při návrhu experimentálního provedení bylo tedy třeba nejprve určit lineární hustotu vlákna. Protože jsme chtěli dosáhnout toho, aby bylo možné experiment demonstrovat ve třídě, jejíž maximální výška bývá přibližně 330 cm, při odhadu lineární hustoty jsme volili $y_c = 2$ m a maximální výšku $y_M \doteq \frac{3}{2}y_c \doteq 3$ m.

Průměrná hodnota průměru balónku byla určena z jeho obvodu jako $d = (30 \pm 2)$ cm, jeho poloměr je tedy $r = (15 \pm 1)$ cm. Uvažujeme-li přibližně kulový tvar, je objem balónku $V \doteq 14,1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$.

Na balónek naplněný heliem podle Archimédova zákona působí ve vzduchu vztlaková síla $F_{vz} = V\rho g$, která je současně tažnou silou soustavy. Lineární hustotu pak můžeme vyjádřit jako

$$\eta = \frac{V\rho}{y_c}, \quad (2)$$

kde V je objem balónku a ρ je hustota vzduchu. Po dosazení konkrétních hodnot získáme přibližný odhad lineární hustoty vlákna $\eta = 9,11 \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$.

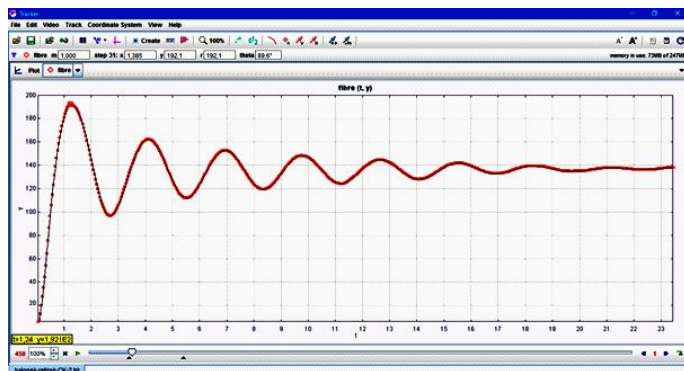
Aby se hmotnost vlákna se stoupající výškou balónku zvyšovala lineárně, musí být vlákno vyrobeno z jednotlivých malých částí, které jsou vzájemně propojeny. Jako optimální se nakonec ukázal řetězek tvořený malými kuličkami používaný většinou v koupelně u umyvadla nebo vany. Protože i zde výrobci dodávají různě velké kuličky, zvolili jsme nakonec řetězek s nejmenšími kuličkami, jehož lineární hustota byla změřena digitální váhou jako $\eta = (10,4 \pm 0,01) \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$.

2. Realizace experimentu

Systém Buquoyova oscilátoru v rovnovážné poloze je uveden na obr. 1. Jeho pohyb byl zaznamenán digitální kamerou a obrazový záznam byl analyzován metodou videoanalýzy s použitím programu Tracker. Na obr. 2

je výsledný graf závislosti y -ové souřadnice konce vlákna (řetízku) na čase. Z grafu plyne, že stacionární poloha je přibližně $y_m = 1,38$ m, výpočtem určená hodnota podle vztahu (1) dává při tahové síle $F = 0,136$ N výsledek $y_c = 1,33$ m, který je o 4 % menší než experimentálně naměřená hodnota.

Maximální výška výstupu určená experimentálně z grafu na obr. 2 je $y_M = 1,92$ m. Použijeme-li přibližný vztah pro výpočet y_M uvedený výše, získáme hodnotu $y_M = 2,07$ m, která je přibližně o 8 % větší.



Obr. 2 Oscillogram získaný videoanalýzou pohybu řetízku

Pro přesný výpočet můžeme použít vztah (3), viz [1]:

$$y_M = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}(y_c - y_m) \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}(y_c - y_m)^2 - 4y_m^2}, \quad (3)$$

kde y_m je počáteční výška balónku (konce řetízku) při pohybu vzhůru s nulovou počáteční rychlostí. Tento vztah můžeme za předpokladu, že $y_m = 0$, zjednodušit na vztah (4):

$$y_M = \frac{3}{4} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{3}} \right) y_c \doteq 1,36y_c \quad (4)$$

Po dosazení do vztahu (4) za $y_c = 1,38$ m získáváme hodnotu $y_M = 1,88$ m, která je pro změnu o 2 % menší než hodnota určená experimentálně. Uvážíme-li nejistotu měření přibližně 2 cm, která vznikne nastavením souřadných os a délky kalibrační tyče v programu Tracker, na jednom metru délky získáme stejnou relativní nejistotu, tj. 2 %. Z experimentu tedy plyne v rámci 2% nejistoty měření velice dobrá shoda teorie s experimentálně naměřenými daty pro maximální výšku výstupu.

Všechna měření byla realizována s nulovou počáteční rychlostí. Z obr. 2 je také patrný charakter kmitů vlákna, které koná tlumené kvaziperiodické kmity s periodou blízkou periodě T_S , pro kterou platí podle [1] rovnice (5):

$$T_S = \frac{2\pi}{g} \sqrt{\frac{F}{\eta}} \quad (5)$$

Námi změřená tahová síla balónku pomocí siloměru Vernier byla $F = (0,136 \pm 0,006)$ N a hodnota periody vypočítaná podle vztahu (5) je $T_S = 2,31$ s. Experimentálně zjištěná průměrná hodnota periody podle grafu na obr. 2 je $T_{\text{exp}} = (2,85 \pm 0,02)$ s. Rozdíl mezi teoreticky vypočítanou hodnotou a experimentálně naměřenou, která je větší, lze vysvětlit tím, že pohyb balónku i vlákna nebyl po celou dobu pohybu kolmý k podložce. Balónek se pohyboval chvílemi i v horizontálním směru, takže došlo k prověšení vlákna a vlečení jeho části po podložce.

Simulace pohybu řetízku upevněného k balónku je založena podle [1] na pohybové rovnici (6):

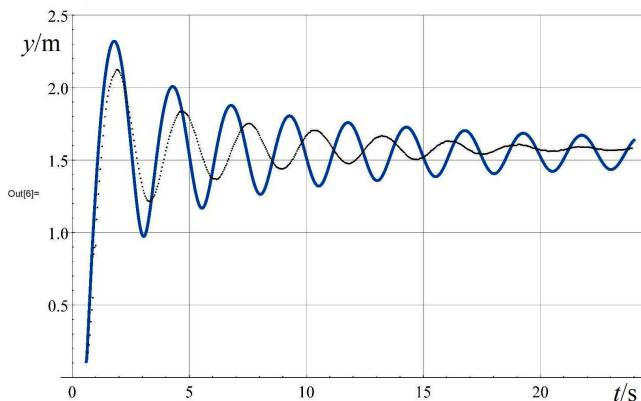
$$\ddot{y} = g \left(\frac{y_c}{y} - 1 \right) - \frac{1}{2} (1 + \text{sgn } \dot{y}) \frac{\dot{y}^2}{y} \quad (6)$$

Tato diferenciální rovnice speciálním způsobem závisí na rychlosti. V programu Wolfram Mathematica jsme rovnici řešili numericky při využití parametrů daných experimentem (obr. 3):

```
In[6]:= Module[{sol =
  NDSolve[{y'[t] == g*(1.55/y[t] - 1) - 0.5*(1 + Sign[y'[t]])*y'[t]^2/y[t],
    y[0.6] == 0.11, y'[0.6] == 0}, y, {t, 0.6, 24}]},
  Show[Plot[Evaluate[y[t] /. sol], {t, 0.6, 24}, PlotRange -> {Automatic, {0, 2.5}},
    BaseStyle -> {FontFamily -> "Times", FontSize -> 14}, AxesLabel -> {"t/s", "y/m"},
    GridLines -> Automatic, PlotStyle -> {Thickness[0.005]}],
  ListPlot[oscilace, PlotStyle -> {Black, PointSize[0.002]}]]]
```

Obr. 3

Obr. 4 ukazuje grafický výstup řešení pohybové rovnice (6) v programu Mathematica (modrá křivka) a experimentálně získaná data (černá křivka). Na první pohled je viditelný rozdíl mezi oběma křivkami, který je patrně způsoben odporem vzduchu. Černá křivka vykazuje výraznější tlumení i větší kvazi-periodu mezi jednotlivými průchody rovnovážnou polohou a její průběh je identický s funkcí získanou videoanalýzou v programu Tracker na obr. 2.



Obr. 4 Řešení pohybové rovnice (modrá křivka) a reálný průběh pohybu (černá křivka)

Závěr

Při realizaci experimentálního ověření Buquoyovy úlohy jsme v první fázi řešili realizaci parametrů tohoto oscilátoru, kterými jsou tažná konstantní síla a lineární hustota vlákna. Za zdroj síly jsme nakonec zvolili balónek o průměru $d = (30 \pm 2)$ cm naplněný heliem, ke kterému jsme připevnili koupelnový řetízek složený z jednotlivých malých kuliček. Jeho lineární hustota byla experimentálně určena jako $\eta = (10,4 \pm 0,01) \text{ g} \cdot \text{m}^{-1}$.

Pohyb řetízku jsme analyzovali nejprve pomocí videoanalýzy v programu Tracker a potom jsme takto získaná data fitovali teoretickou křivkou v programu Wolfram Mathematica. V rámci 2% nejistoty měření jsou v dobré shodě experimentálně naměřené hodnoty maximální výšky výstupu a stacionární polohy s teoreticky vypočítanými. Reálný průběh pohybu se však od teoretického modelu liší jak v hodnotách amplitud, tak v hodnotách period pro pohyb vzhůru i dolů.

Závěrem lze konstatovat, že námi analyzovaný pohyb Buquoyova vlákna pouze částečně odpovídá teoretickým závěrům, které učinili autoři v [1]. Rozdíl je zřejmě způsoben odporem vzduchu při pohybu balónku, který autoři v [1] do modelu nezahrnuli.

Literatura

- [1] Šíma, V., Podolský, J.: Buquoyova úloha. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 51 (2006), č. 3, s. 177.
Dostupné na: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/141315>

Vzpomínka na Stanislava Trávníčka



V červnu letošního roku se matematická veřejnost naposledy rozloučila s dlouholetým redaktorem informatické části časopisu Matematika–fyzika–informatika, skvělým učitelem a kolegou – panem doc. RNDr. Stanislavem Trávníčkem, CSc.

Stanislav Trávníček se narodil 31. 3. 1935 ve Skašticích na Kroměřížsku. Po ukončení studia učitelství oborů matematika a deskriptivní geometrie na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci nastoupil jako učitel na gymnázium ve Strážnici, avšak po roce se vrátil do Olomouce, kde se stal asistentem na Katedře matematické analýzy PřF UP. Ihned po nástupu na fakultu se zapojil do vědeckého výzkumu v oblasti obyčejných diferenciálních rovnic ve skupině akademika O. Borůvky na brněnské univerzitě. Zde získal také první vědecké ostruhy v uvedené oblasti výzkumu.

Jeho učitelská kariéra byla však načas přerušena po roce 1968, kdy Stanislav Trávníček působil nejprve krátce v Laboratoři výpočetní techniky UP, poté v Chronotechně Šternberk a od roku 1979 na Generálním ředitelství AŽD, kde stal vedoucím oddělení ASŘ. Po celou tuto dobu se však aktivně podílel na práci s mladými talentovanými matematiky, zejména pak na seminářích pro řešitele MO pořádaných krajským výborem MO v Olomouci.

Na Přírodovědeckou fakultu UP se vrátil v roce 1990, kde se stal vedoucím oddělení didaktiky matematiky a elementární matematiky na Katedře algebry a geometrie PřF UP. V letech 1992–1997 vykonával funkci prorektora UP pro organizaci a rozvoj. Jeho práce byla olomouckou univerzitou oceněna zlatou medailí UP a mnoha dalšími vyznamenáními. Po celý

život se zabýval středoškolským matematickým vzděláváním. V této oblasti publikoval více než 200 článků a na konci života mu byly vydány dvě na sebe navazující knižní monografie.

Stanislav Trávníček zesnul 2. 6. 2017. Pro každého z nás zůstane vzorem po stránce odborné a pedagogické, zejména však ale po stránce lidské. Čest jeho památce!

Redakce časopisu Matematika–fyzika–informatika

Kroneckerův algoritmus

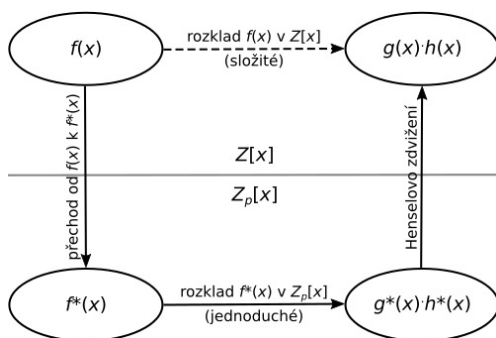
LUKÁŠ HONZÍK

Fakulta pedagogická ZČU v Plzni

V současné době si již většina matematiků a učitelů matematiky neumí představit život bez využívání systémů počítačové algebry. Poměrně známý je v tomto směru například program Wolfram Mathematica, který zvládá řešit široké spektrum nejen matematických problémů. Mimo jiné dovede celkem rychle provádět i faktorizaci polynomů v $\mathbb{Z}[x]$, kterou je na základních a hlavně středních a vysokých školách často nutné zvládnout. Do programu stačí zadat příslušný příkaz a mnohočlen, který chceme rozložit, řekněme kupříkladu $x^{95} - 5x^{70} - 12x^{65} - 4x^{53} + x^{50} + 3x^{45} + 60x^{40} + 20x^{28} - 5x^{25} - 36x^{15} - 12x^3 + 3$, a během okamžiku je proveden rozklad a na obrazovku se vypíše výsledek $(x^{45} - 12x^{15} - 4x^3 + 1) \cdot (x^{50} - 5x^{25} + 3)$. Rychlost a efektivnost zmíněného procesu je zajištěna skutečností, že program disponuje sofistikovanými algoritmy pro výpočet faktorů – například algoritmy pro faktorizaci polynomů v končených tělesech prostřednictvím Petrovy–Berlekampovy matice (připomeňme, že za poznatky v této oblasti stojí nemalý příspěvek československých matematiků Karla Petra a Štefana Schwarze) a Henselovým zdvižením. Schéma takto pojaté faktorizace je znázorněno na obr. 1.

Počátky systému Mathematica a jemu podobných programů však byly o poznání skromnější. Zároveň je také nutné připomenout, že i některé v dnešní době relativně často používané programy – například známý program Derive, případně různé volně šiřitelné aplikace pro tablety a chytré telefony – si stále musí vystačit s jednoduššími metodami. Ty je sice ome-

zují při zpracovávání složitějších úloh, avšak pro běžnou práci jsou stále dobře použitelné. Zároveň takto jde ukázat lidskou vynalézavost a důvtip, které dovolily tyto matematické problémy řešit dávno před tím, než se vůbec objevily první počítače, na nichž by takovéto postupy mohly být aplikovány v podobě nám dnes známé jako počítačové algoritmy. Jedním z takových starších postupů v případě faktorizace polynomů s celočíselnými koeficienty je tzv. *Kroneckerův algoritmus*.



Obr. 1

Leopold Kronecker a historie

Kroneckerův algoritmus nese jméno významného pruského matematika Leopolda Kroneckera (1823 až 1891). Základy jeho matematického vzdělání položili soukromí učitelé najímání Kroneckerovými rodiči a dále byly prohloubeny na gymnáziu, kde jej vyučoval matematik Ernst Eduard Kummer. Ten také rozpoznal Kroneckerův talent a všemožně jej podporoval. Při studiích na Berlínské univerzitě se sice Kronecker nevěnoval jen studiu matematiky, zajímaly jej také chemie, astronomie či meteorologie, jeho doktorská práce pak již ale byla zaměřena matematicky a týkala se algebraické teorie čísel. Po skončení studií se roce 1861 stal členem Berlínské akademie věd, byl editorem v Crellově matematickém časopise a v roce 1884 byl jmenován členem Královské společnosti v Londýně.

Zajímavostí pro čtenáře budiž skutečnost, že přestože algoritmus nese Kroneckerovo jméno, nebyl tím, kdo jej vymyslel. Tato zásluha patří Hermannu Schubertovi, dalšímu německému matematikovi, který ideu algoritmu pro faktorizaci polynomů popsal již v poslední dekádě 18. století. Kronecker pak po více než půlstoletí Schubertův algoritmus znovuobjevil a upravil pro širší použití.

Základní myšlenka algoritmu

Samotný algoritmus sloužící k nalezení rozkladu polynomu $f(x)$ v $Z[x]$ v součin dvou polynomů $g(x)$ a $h(x)$ nižších stupňů je vcelku jednoduchou záležitostí a skládá se z 5 kroků:

- 1) Hledáme jistý mnohočlen $g(x)$ s celočíselnými koeficienty stupně $\text{st}(g) \geq 1$, který dělí zadaný mnohočlen $f(x)$ v $Z[x]$, jehož stupeň je $\text{st}(f) = n$. Omezíme se pouze na ty polynomy, jejichž stupeň je rovný hodnotě $s = \lfloor n/2 \rfloor$ (celá část zlomku), anebo menší než tato hodnota. Jedná se tedy o horní odhad stupně hledaného polynomu $g(x)$ vycházející z faktu, že pro tři polynomy $f(x)$, $g(x)$ a $h(x)$, kde $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, platí rovnost $\text{st}(f) = \text{st}(g) + \text{st}(h)$. Bez újmy na obecnosti jde tedy předpokládat, že $\text{st}(g) \leq \text{st}(h)$; pokud by tomu tak nebylo, provedli bychom přeznačení obou polynomů. Mezní případ nastane při rovnosti $\text{st}(g) = \text{st}(h)$, kdy lze psát $\text{st}(f) = 2\text{st}(g)$. Proto je nutné hledat stupeň polynomu $g(x)$ v intervalu $1 \leq \text{st}(g) \leq s$, kde $\text{st}(g) \in Z$.
- 2) Dosazením $s + 1$ hodnot, například $x = 0, 1, \dots, s$, do předpisu $f(x)$ dostaneme $s + 1$ celočíselných funkčních hodnot.
- 3) Dělí-li hledaný mnohočlen $g(x)$ zadaný polynom $f(x)$, musí nutně i jeho funkční hodnoty v bodech $x = 0, 1, \dots, s$ dělit příslušné funkční hodnoty polynomu $f(x)$. Tedy platí $g(0)|f(0), g(1)|f(1), \dots, g(s)|f(s)$, a proto zavedeme množiny $D_{f(0)}, D_{f(1)}, \dots, D_{f(s)}$ dělitelů čísel $f(0), f(1), \dots, f(s)$. Pokud by pro některou z hodnot $f(i)$, $i = 0, 1, \dots, s$, platilo $f(i) = 0$, znamená to, že jsme pouhým dosazením zjistili jeden kořen mnohočlenu $f(x)$. Polynom $g(x)$ bychom pak mohli psát jako $g(x) = x - i$ a pro rozklad polynomu $f(x)$ by platila rovnost $f(x) = (x - i) \cdot h(x)$, přičemž $h(x) \in Z[x]$ a $\text{st}(h) = \text{st}(f) - 1$. Pokud naopak pro žádnou hodnotu $f(i)$, $i = 0, 1, \dots, s$, neplatí $f(i) = 0$, jsou všechny množiny $D_{f(0)}, D_{f(1)}, \dots, D_{f(s)}$ konečné.
- 4) Za pomoci vybraných $s + 1$ hodnot $g(0) \in D_{f(0)}, g(1) \in D_{f(1)}, \dots, g(s) \in D_{f(s)}$ vypočteme polynom $g(x)$, který v bodě $x = 0$ nabývá hodnoty $g(0)$, v bodě $x = 1$ hodnoty $g(1)$ atd.

Určení tohoto polynomu provedeme užitím postupu pro nalezení Newtonova interpolačního polynomu při znalosti výše vybraných $s + 1$ funkčních hodnot. Jeho zápis je ve tvaru

$$g(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x - x_0) + \lambda_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \lambda_s(x - x_0) \cdots (x - x_{s-1}),$$

přičemž dopočtení koeficientů $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s$ lze zjednodušit zápisem do tzv. „schématu rozdílů“

$$\begin{array}{ccccccc}
 g(x_0) & & & & & & \\
 & \Delta g(x_0) & & & & & \\
 g(x_1) & & \Delta^2 g(x_0) & & & & \\
 & \Delta g(x_1) & & \Delta^3 g(x_0) & & & \\
 g(x_2) & & \Delta^2 g(x_1) & & \dots & & \\
 & \Delta g(x_2) & & & \dots & & \\
 g(x_3) & & \dots & & & & \\
 & \dots & & & & & \\
 \dots & & & & & &
 \end{array} ,$$

kde $\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i)$, $\Delta^2 g(x_i) = \Delta g(x_{i+1}) - \Delta g(x_i)$, atd., a následným dosazením zjištěných hodnot do vzorce

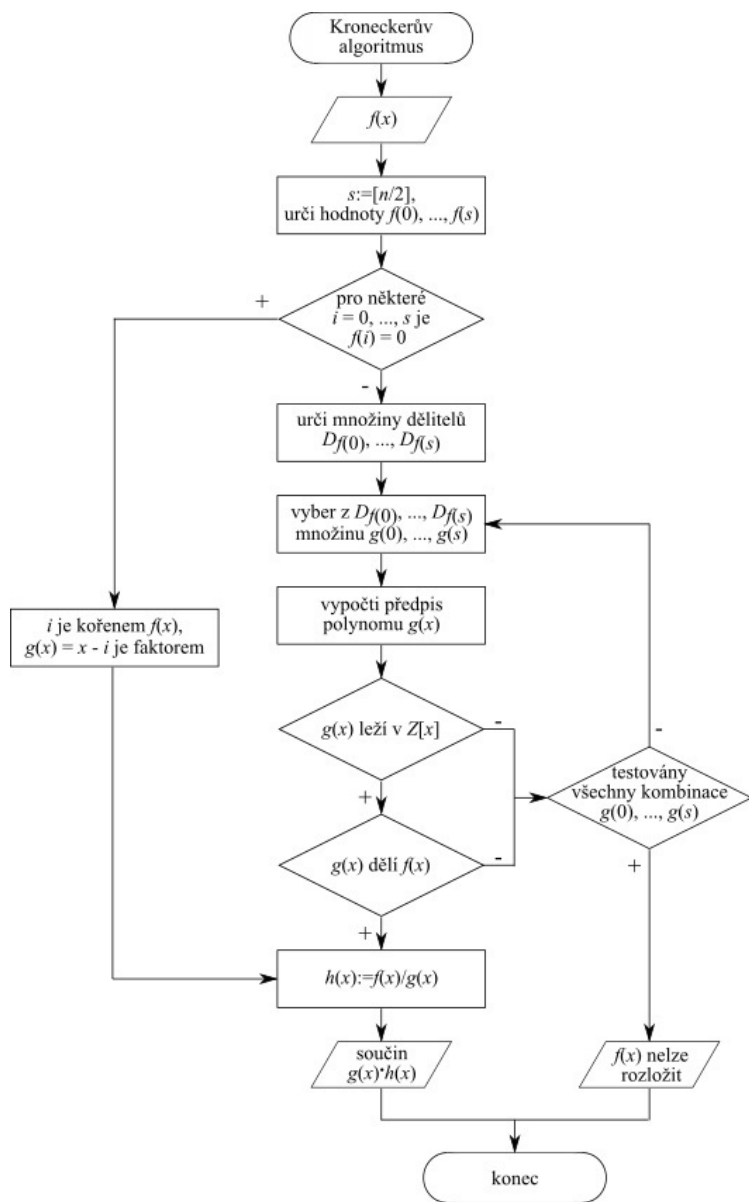
$$\lambda_k = \frac{\Delta^k g(x_i)}{k!}.$$

- 5) Takto získaný polynom $g(x)$ nemusí nutně být mnohočlenem s celočíselnými koeficienty, v takovém případě je třeba se vrátit ke kroku 4) a vybrat jinou množinu $s + 1$ hodnot $g(0), g(1), \dots, g(s)$.

Patří-li naopak $g(x)$ mezi polynomy s celočíselnými koeficienty, musíme otestovat, zda je faktorem mnohočlenu $f(x)$, čili zda v $Z[x]$ dělí tento mnohočlen. Pokud platí $g(x) | f(x)$, našli jsme faktor polynomu $f(x)$ a můžeme psát $f(x) = g(x) \cdot h(x)$, kde $g(x), h(x) \in Z[x]$, $\text{st}(g) > 0$, $\text{st}(h) > 0$. Pokud naopak $g(x)$ nedělí $f(x)$, je třeba vrátit se ke kroku 4) a vybrat jinou množinu $s + 1$ hodnot $g(0), g(1), \dots, g(s)$.

Vyzkoušíme-li touto cestou všechny možné kombinace $s + 1$ hodnot z množin $D_{f(0)}, D_{f(1)}, \dots, D_{f(s)}$ a přesto nenalezneme žádný odpovídající faktor $g(x)$, je zřejmé, že polynom $f(x)$ je nerozložitelný.

Celý algoritmus pak můžeme jednodušeji znázornit pomocí vývojového diagramu (obr. 2). Pro úplnost ještě předvedme praktické použití na několika vybraných úlohách.



Obr. 2

Ilustrační příklady

Úloha 1

Nalezněte v $Z[x]$ rozklad polynomu $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

Řešení. Stupeň polynomu $f(x)$ je $\text{st}(f) = 3$, hledaný mnohočlen $g(x)$ tedy musí být maximálně prvního stupně, neboť $s = [3/2] = 1$, a pro výpočet tak potřebujeme dvě funkční hodnoty $f(x)$. Volme $x \in \{0, 1\}$, čímž získáváme $f(0) = 1$ a $f(1) = 4$. Žádná z funkčních hodnot není nulová, a tak vytvoříme množiny dělitelů $D_{f(0)} = \{\pm 1\}$, $D_{f(1)} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. V nejhorším případě by tedy bylo nutné otestovat 12 různých kombinací. Pro první pokus vyberme například kombinaci hodnot $g(0) = 1$ a $g(1) = 1$, schéma rozdílů pak vypadá následovně:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}$$

Poté dostáváme koeficienty $\lambda_0 = \frac{1}{0!} = 1$ a $\lambda_1 = \frac{0}{1!} = 0$, takže polynom $g(x)$ by měl být ve tvaru $g(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x - 0) = 1 + 0(x - 0) = 1$. Je zřejmé, že nalezený polynom $g(x) = 1$ je sice ze $Z[x]$, ale zároveň je konstantní, přičemž z libovolného polynomu jde vždy vytknout hodnotu 1, která nás v tuto chvíli nezajímá. Je tedy nutné zvolit jinou kombinaci prvků z množin dělitelů.

Vyberme $g(0) = 1$ a $g(1) = 4$, poté schéma rozdílů vypadá takto:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

a koeficienty mají hodnoty $\lambda_0 = \frac{1}{0!} = 1$ a $\lambda_1 = \frac{3}{1!} = 3$. Po dosazení do vzorce dostáváme $g(x) = 1 + 3(x - 0) = 3x + 1$. Tento polynom je sice ze $Z[x]$ a dokonce prvního stupně, ale pokud bychom se jím pokusili vydělit zadaný mnohočlen $f(x)$, podílem by již nebyl polynom s celočíselnými koeficienty. Proto je nutné otestovat jinou kombinaci z množin dělitelů.

Zvolme $g(0) = 1$ a $g(1) = 2$, potom dostaneme schéma rozdílů ve tvaru:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 2 \end{array}$$

a koeficienty mají hodnoty $\lambda_0 = \frac{1}{0!} = 1$ a $\lambda_1 = \frac{1}{1!} = 1$. Dostáváme polynom $g(x) = 1 + 1(x - 0) = x + 1$, který patří do $Z[x]$ a zároveň dělí polynom

$f(x)$. Podíl je $f(x) : g(x) = x^2 + 1$ a můžeme psát výsledný rozklad

$$f(x) = x^3 + x^2 + x + 1 = (x + 1)(x^2 + 1).$$

Úloha 2

Nalezněte v $Z[x]$ rozklad polynomu $f(x) = x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 1$.

Řešení. Stupeň polynomu $f(x)$ je $\text{st}(f) = 5$, stupeň hledaného polynomu $g(x)$ tedy musí být maximálně $\text{st}(g) = [5/2] = 2$. Pro jeho výpočet budeme potřebovat 3 funkční hodnoty $f(x)$: $f(0) = 1$, $f(1) = 9$ a $f(2) = 105$. Utvoříme množiny dělitelů, kde $D_{f(0)} = \{\pm 1\}$, $D_{f(1)} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$ a $D_{f(2)} = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 15, \pm 21, \pm 35, \pm 105\}$. V nejhorším případě bychom nyní potřebovali vyzkoušet $2 \cdot 6 \cdot 16$ možných kombinací, abychom mohli konstatovat, že polynom $f(x)$ je ireducibilní.

Vyberme následující trojici $g(0) = 1$, $g(1) = 3$ a $g(2) = 7$ a ve schématu rozdílů obdržíme

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & 2 & \\ 3 & & 2 \\ & 4 & \\ 7 & & \end{array}$$

takže koeficienty budou $\lambda_0 = \frac{1}{0!} = 1$, $\lambda_1 = \frac{2}{1!} = 2$, $\lambda_2 = \frac{2}{2!} = 1$. Po dosazení dostaneme $g(x) = 1 + 2(x - 0) + 2(x - 0)(x - 1)$, což se po roznásobení rovná $g(x) = x^2 + x + 1$. Tento mnohočlen v $Z[x]$ beze zbytku dělí polynom $f(x)$, je tedy jeho faktorem a můžeme psát jeho rozklad ve tvaru

$$f(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 + 2x^2 - x + 1).$$

Nakonec řešme ještě jeden ilustrační příklad, na kterém ukážeme, že Kroneckerův algoritmus není právě efektivním prostředkem faktorizace.

Úloha 3

Rozhodněte v $Z[x]$, zda je polynom $f(x) = x^{10} - 2x^9 + 5x^8 - 4x^7 + 4x^6 + x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 4x + 4$ rozložitelný.

Řešení. Zadaný polynom je stupně $\text{st}(f) = 10$, proto hledaný faktor $g(x)$ bude mít stupeň maximálně $\text{st}(g) = 5$. Pro jeho vypočtení potřebujeme 6 funkčních hodnot, což je poměrně velké množství. Algoritmus v tuto chvíli můžeme zefektivnit vhodnou volbou hodnot nezávisle proměnných x takových, že získané funkční hodnoty budou mít „malé“ množství dělitelů. Nejvhodnější se jeví hodnoty $f(-2) = 4160$, $f(-1) = 32$, $f(0) = 4$,

$f(1) = 8$, $f(2) = 1\,040$, $f(3) = 46\,720$, jelikož ostatní funkční hodnoty jsou již příliš velké.

Pokud nyní vytvoříme množiny dělitelů zmíněných funkčních hodnot, zjistíme, že množiny $D_{f(-2)}$, $D_{f(-1)}$, $D_{f(0)}$, $D_{f(1)}$, $D_{f(2)}$ a $D_{f(3)}$ obsahují postupně 56, 12, 6, 8, 40 a dokonce 64 dělitelů. To dohromady činí 82 575 360 možných kombinací eventuálních funkčních hodnot hledaného mnohočlenu $g(x)$. V tuto chvíli je zřejmé, jak časově a paměťově náročný takovýto výpočet rozkladu polynomu může být. Pokud by bylo nutné projít všechny zmíněné kombinace, abychom mohli konstatovat ireducibilitu zadaného polynomu, a věnoval-li by počítač každé z těchto kombinací pouhých 10 milisekund, zabral by celý proces celkem více než 229 hodin, tedy více než 9,5 dne.

Pro pořádek poznamenejme, že zadaný polynom $f(x)$ v $Z[x]$ rozložitelný je, hledání faktorů by tedy nedosahovalo takových velkých časových nároků, a úplný rozklad lze zapsat jako součin $(x^2+1)(x^2-x+2)^2(x^4-x^2+1)$.

Závěr

Jak jsme ukázali v poslední úloze, nemusí být rozkládaný polynom nikterak vysokého stupně a i při nejlepší snaze o optimalizaci může být nakonec celý proces nadmíru výpočetně náročný. Kvůli tomu je Kroneckerův algoritmus i přes poměrně elegantní a jednoduchou základní myšlenku v řadě případů nepoužitelný a v dnešní době jsou v systémech počítačové algebry dostupné sofistikovanější výpočetní postupy, jak bylo zmíněno na začátku textu. I tak se ale jedná o část matematické historie a pěkný důkaz lidské vynalézavosti a důvtipu, který může být výhodně použit například jako dobrá motivace nadaných žáků a studentů k dalšímu a hlubšímu studiu matematiky a výpočetní techniky.

Literatura

- [1] *von Gathen, J. – Gerhard, J.*: Modern Computer Algebra. 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [2] *Hora, J.*: Kroneckerův algoritmus. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 69 (1990), č. 5, s. 199–202.
- [3] MacTutor History of Mathematics [online]. University of St. Andrews, St. Andrews, 2016 [cit. 2017-01-31]. Dostupné z: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>

Volně dostupné grafické editory ve škole

LUKÁŠ RACHŮNEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Při zavádění základních kurzů grafického designu – jako doplňku jiných oborů – se často objevují otázky ohledně nákupu potřebného programového vybavení. Vzhledem k tomu, že v základních kurzech se nedostáváme např. do oblasti spolupráce s grafickými studií a tiskárnami, není příliš důležité, které programy se budou používat, pokud splňují určité požadavky pro práci a výuku. Podle nás je v těchto kurzech důležitější pochopit obecné principy práce s grafickými editory, než naučit se pracovat s konkrétní verzí konkrétního editoru, ovšem samozřejmě je potřeba si vše prakticky procvičit. Proto je výhodné, pokud si studenti mohou vyzkoušet práci s větším počtem programů tohoto typu. Z tohoto důvodu je dobré podívat se, co zajímavého a použitelného nabízí volně šířená oblast, a ze stejného důvodu se zaměřujeme na programy dostupné pro více typů počítačových systémů současně (minimálně Windows, Mac OS X a Linux).

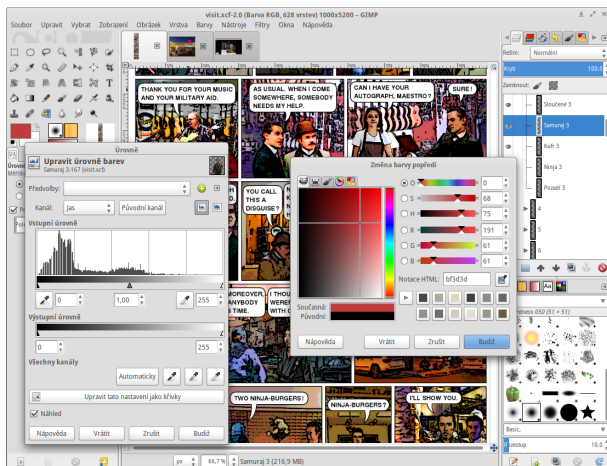
1. Rastrové grafické editory

GIMP

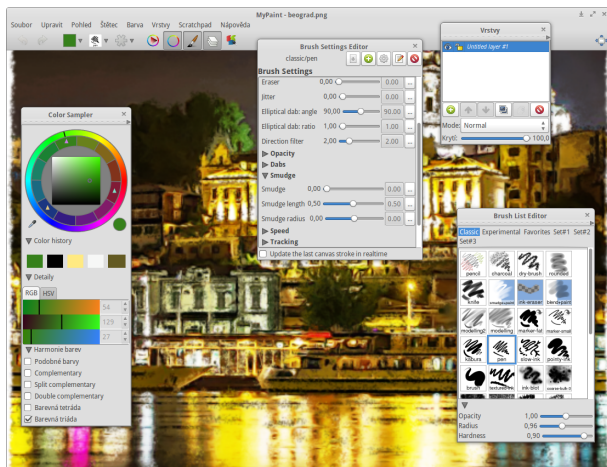
GIMP je typickým představitelem editoru určeného pro zpracování rastrové grafiky. Vzhledem k jeho dlouhodobé dostupnosti pro více operačních systémů ho obvykle při výuce probírám společně s placeným editorem Adobe Photoshop v rámci kurzu rastrových editorů. *GIMP* je často představován jako alternativa právě Photoshopu. V obou programech provádíme podobné grafické úkoly (úpravu hotových obrázků i vytváření nových), přičemž studenti vidí podobnosti i odlišnosti a získávají určitý náhled nad způsobem práce tohoto typu.

Z pohledu uživatele posledních verzí Photoshopu může být zajímavé, že *GIMP* od verze 2.7 umožňuje ukotvení nástrojových panelů v jednom okně (včetně vícesloupcového rozložení). Pro pokročilejší uživatele byly v posledních letech uvedeny např. skupiny vrstev nebo transformace pomocí klece. Současná vývojová verze nabízí 16 a 32 bitů na barevný kanál,

nástroje pro kombinované transformace, pokročilé malířské nástroje, ne-destruktivní otáčení plátna nebo práci s formáty OpenEXR a WebP.



MyPaint

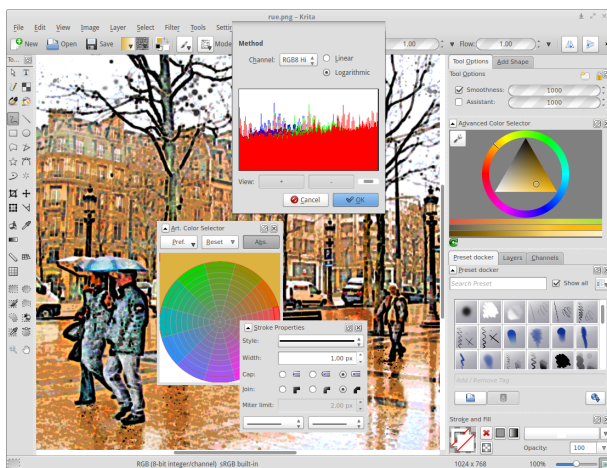


Odlišný přístup zvolili autoři grafického editoru *MyPaint*, který je určen k tzv. digitální malbě. Jde o jednodušší program zaměřený na některé funkce, které často nejsou dostupné v univerzálně orientovaných editorech,

především programovatelné malířské nástroje. Nesnaží se tedy běžně používané editory nahrazovat, ale doplňovat. Příkladem komerční alternativy může být např. ArtRage. Z důvodu jeho tradičně uměleckého zaměření má využití především pomocí grafického tabletu, což může být v běžné počítačové učebně problém. Do výuky ho plánujeme zařadit jako ukázkou jiného typu rastrového editoru než je např. GIMP, a také jako ukázkou spolupráce více programů stejné kategorie, které se navzájem doplňují.

Krita

Krita nabízí zajímavou kombinaci přístupů obou předchozích editorů, přičemž obsahuje některé neobvyklé pomůcky, jako např. nastavitelnou soustavu perspektivních mřížek pro kreslení prostorových scén. Kromě spousty režimů vrstev přidává navíc vektorové vrstvy včetně některých nástrojů z vektorových editorů. Asi nejbližší komerční alternativou je Corel Painter. Ve výuce může sloužit jako příklad editoru kombinujícího více způsobů vytváření a úpravy obrázků, na kterém si studenti vyzkoušejí odlišný způsob práce.



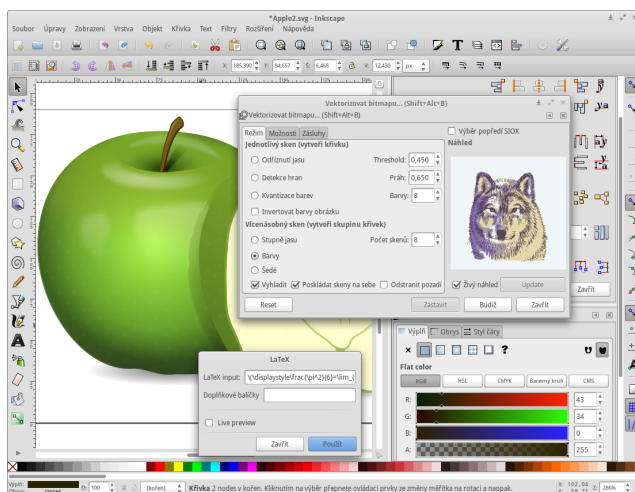
ImageMagick

Pod názvem *ImageMagick* se skrývá sbírka nástrojů určených ke grafickým operacím, které se pomocí myši provádějí obtížněji. Např. hromadné úpravy většího počtu obrázků, převod mezi různými grafickými formáty atd. Při výuce může být užitečná v kurzech, které kombinují grafické editory s dalšími typy programů.

2. Vektorové grafické editory

Inkscape

Inkscape je typickým představitelem editoru určeného pro zpracování vektorové grafiky. Vzhledem k jeho dlouhodobé dostupnosti pro více operačních systémů ho obvykle probíráme v rámci kurzu vektorových editorů společně s placeným editorem Adobe Illustrator. Z důvodu jeho vzhledu je Inkscape také uváděn jako alternativa editoru CorelDRAW. Stejně jako v kurzu rastrových editorů, i v tomto případě provádíme v obou programech podobné grafické úkoly pro srovnání a získávání obecnějších návyků.

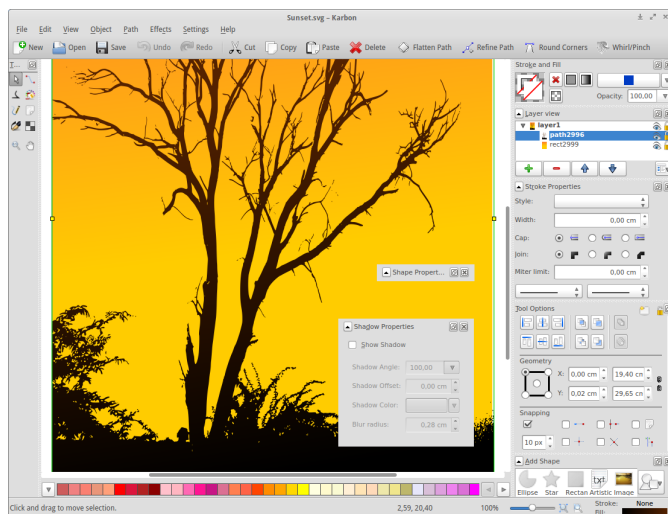


Inkscape používáme nejen při výuce principů vytváření vektorových obrázků, ale také ke kombinování rastrové a vektorové grafiky na ukázkou spolupráce programů různých typů, např. při vytváření plakátů. Inkscape umožňuje také vektorizaci rastrových obrázků, např. fotografií, a samozřejmě také naopak vektorové obrázky převést do rastrového formátu a použít v rastrovém editoru. Matematicky zaměřené uživatele může zaujmout možnost vykreslování grafů funkcí, mnohostěnů nebo vzorců $\text{\TeX}$.

Karbon a LibreOffice Draw

Mezi jednodušší vektorové programy patří *Karbon*, který je součástí kancelářského balíku Calligra Suite. Vzhledem připomíná velmi zjednodušený Adobe Illustrator a mohl by se líbit méně náročným uživatelům rastrového editoru Krita, protože jeho ovládací prvky jsou vytvořeny ve

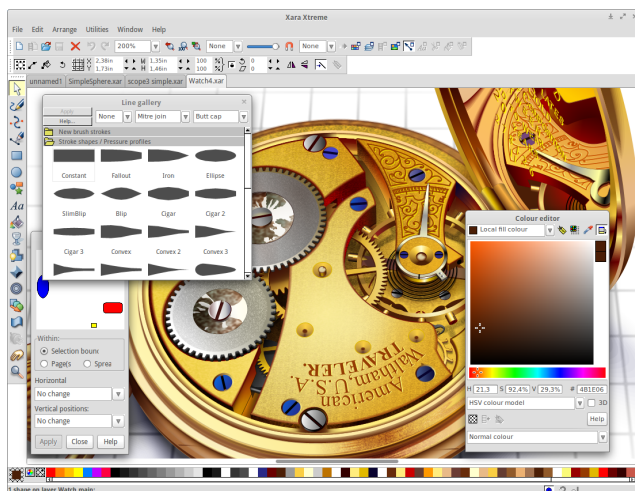
stejném stylu (podobně jako novější verze dvojice Photoshop a Illustrator nebo Photo-Paint a CorelDRAW). Do výuky ho lze přidat jako ukázkou doplňku jiného editoru se stejným způsobem ovládání.



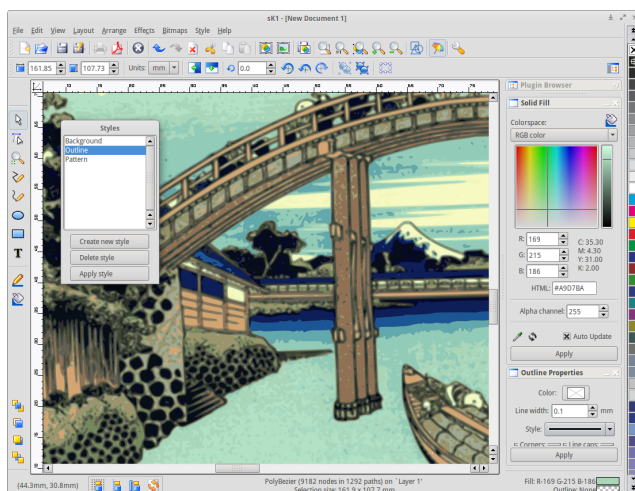
Dalším vektorovým programem s omezenými možnostmi je *LibreOffice Draw*, který je podobně sladěný se stylem kancelářské sestavy LibreOffice. Komerční alternativu mohou představovat grafické nástroje balíku Microsoft Office.

Xara Xtreme

Starším, ale uznávaným a velmi použitelným editorem je *Xara Xtreme*, jehož historie sahá až do osmdesátých let 20. století k počítačům Acorn Archimedes. Občas je uváděn jako nejrychlejší ze současných vektorových editorů, někdy je vyzdvihována jednoduchost ovládání. Samozřejmě záleží na tom, co komu vyhovuje, ale každopádně jde opět o dobrou ukázkou editoru vektorového typu s určitými odlišnostmi. Je dostupný ve starších verzích zdarma pro Linux a Mac OS X, v novějších placených verzích pro Windows. V tomto případě tedy záleží na tom, jak je program pro výuku důležitý, jaký operační systém je používán a jaká verze tohoto editoru je zapotřebí.



sK1



Další pěkný program s neobvyklým názvem *sK1* je zaměřen především na přípravu grafických dokumentů pro tisk a obsahuje pokročilé funkce z této oblasti, ale současně se jedná o univerzální vektorový editor stejné kategorie jako předchozí ukázky. Často je považován za alternativu CorelDRAW, k čemuž přispívá i velmi dobrá podpora formátu CDR právě

z tohoto editoru. Je k dispozici pro Linux, brzy by se měly objevit i verze pro Mac OS X a Windows. Plánujeme zařadit ho do výuky jako příklad volně šířeného vektorového nástroje pro přípravu pro tisk, který přitom nepatří přímo do oblasti typografie.

Související programy

Pokud jde o související grafické programové vybavení, které nepatří do uvedených kategorií, využíváme ve výuce Adobe InDesign a Rhinoceros (z komerční oblasti) a také přímo pro výuku nebo jako doplňky a ukázky Scribus, T_EX, LibreCAD, Gnuplot, POV-Ray a Blender (z volně šířené oblasti, dostupné pro více operačních systémů). Do výuky dále plánujeme zařadit (rovněž volně šířené a multiplatformní) Wings 3D, MakeHuman a FreeCAD.

Závěr

Cílem tohoto stručného přehledu není doporučení nahradit placené programy volně šířenými, ale ukázat možnosti, které současný výběr nabízí, zvlášť pokud jde o výuku. Kvalitní vybavení dostupné pro nejrozšířenější systémy lze nalézt jak v rastrové (GIMP, MyPaint, Krita, ImageMagick), tak i vektorové oblasti (Inkscape, Karbon, Xara Xtreme, sK1), čímž lze zjednodušit vytváření základních kurzů používajících grafické editory, rozšířit studentům obzory a naučit je získat nadhled nad přístupem k práci tohoto typu.

Literatura

- [1] <http://www.gimp.org/>
- [2] <http://mypaint.org/>
- [3] <http://krita.org/>
- [4] <http://imagemagick.org/>
- [5] <http://inkscape.org/>
- [6] <http://www.calligra.org/karbon/>
- [7] <http://www.libreoffice.org/discover/draw/>
- [8] <http://xaraxtreme.org/>
- [9] <http://sk1project.org/>

MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA
Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXVI (2017)

MATEMATIKA

I. Chajda: Diofantovské n -tice (s. 1) – *P. Leischner:* Polibky kružnic: Jakob Steiner, 1. část (s. 6) – *F. Roubíček:* O jedné cestě z geometrie přes aritmetiku k algebře a zpět (s. 14) – *M. Štěpánová:* Pětúhelník získaný skládáním papíru (s. 81) – *O. Kačenková:* Hra Abaku (s. 90) – *S. Trávníček:* Slovní úlohy a život společnosti (s. 94) – *P. Leischner:* Polibky kružnic: Jakob Steiner, 2. část (s. 161) – *Š. Gergelitsová, T. Holan:* Od rodiny se třemi dětmi ke spolehlivosti testů (s. 166) – *F. Kuřina:* Chyby, omyly a matematika (s. 174) – *P. Thustý, I. Krech:* Užití stochastického grafu ke sčítání aritmeticko-geometrické řady (s. 241) – *Š. Gergelitsová, T. Holan:* O rozhodování (s. 246) – *P. Calábek:* Newtonova a Maclaurinovy nerovnosti (s. 252) – *M. Chodorová, L. Juklová:* Geometrické pojmy na základní škole (s. 261) – *J. Švrček, D. Hrubý:* Využití diskriminantu kvadratické rovnice (s. 321) – *J. Šimša:* O porovnání mocnin a^b a b^a (s. 328) – *J. Hromadová, Z. Halas, V. Moravcová, J. Robová:* Variace na téma lichoběžník a jeho obsah (s. 336) – Zajímavé matematické úlohy (s. 24, 103, 185, 272, 345)

FYZIKA

E. Svoboda: Přepřacované vydání učebnice Molekulová fyzika a termika pro gymnázia (s. 28) – *P. Adámek, V. Barabáš:* Jednoduchý průmyslový manipulátor (s. 35) – *J. Kohout, K. Rauner:* Maximální rychlost podání v tenisu (s. 43) – *F. Jáchim:* Zčásti úspěšný pokus o výrobu závaží (s. 49) – *V. Štefl:* Komety ve výuce fyziky na středních školách (s. 107) – *B. Vybíral:* PRÆMIUM BOHEMIÆ 2016 za medaile na olympiádách (s. 119) – *L. Brázová, M. Křížová, J. Šlégr:* Moderní detektory ionizujícího záření a jejich využití ve výuce (s. 126) – *O. Moc, P. Eisenmann:* Šikmý vrh z rozhledny (s. 129) – *D. Mandíková, R. Blažek:* Výsledky českých žáků v šetření PISA 2015 (s. 188) – *E. Hejnová:* Představy mladších žáků o gravitačním působení (s. 202) – *L. Brázová, M. Křížová, J. Šlégr:* Jednoduché pomůcky pro výuku vlnění (s. 215) – *J. Raganová, T. Pivarčí:* Rozvíjanie fyzikálneho poznania prostredníctvom podujatí neformálneho vzdelávania (s. 219) – *E. Svoboda:* Zaokrouhlování výpočtů při řešení kvantitativních úloh na střední škole (s. 276) – *R. Holubová:* Fyzika kapalin ve spojení s problémy každodenního života (s. 284) – *Č. Kodejška:* Demonstrace hydrostatického paradoxu pomocí plastových lahví a LabQuest Vernier (s. 291) – *P. Ducháček:* Plazmová koule (s. 295) – *E. Hejnová:* Představy mladších žáků o gravitačním

působení (dokončení) (s. 298) – *D. Mandíková, V. Tomášek*: Výsledky českých žáků v šetření TIMSS 2015 (s. 349) – *P. Kacovský*: Měříme teplotu vody. Jednoduché. Nebo ne? (s. 361) – *M. Bilišňanská, M. Kireš*: Rozvíjanie vybraných zručností v Bádateľskom prírodovednom laboratóriu SteelPark Košice (s. 368) – *Č. Kodejška, J. Říha*: Experimentální realizace Buquoyovy úlohy (s. 380)

INFORMATIKA

D. Říhová, L. Viskotová: Wolfram Alpha ve finanční matematice s aplikací geometrických posloupností (s. 52) – *J. Mazurek*: Užití software Wolfram Alpha při výuce matematiky (s. 64) – *M. Trnečka*: Pokročilé optimalizace pro webové vyhledávače (s. 138) – *D. Lessner, J. Vaníček*: Bobřík učí informatiku (6. díl – Kódování) (s. 146) – *P. Töpfer*: Lyžařské středisko (Úlohy z MO kategorie P, 35. část) (s. 227) – *J. Vaníček*: Bobřík učí informatiku 7. díl: Úlohy na digitální gramotnost (s. 305) – *Redakce*: Vzpomínka na Stanislava Trávníčka (s. 385) – *L. Honzík*: Kroneckerův algoritmus (s. 386) – *L. Rachůnek*: Volně dostupné grafické editory ve škole (s. 394)

ZPRÁVY

J. Švrček: 10. ročník Středoevropské matematické olympiády (s. 73) – *L. Richterek*: Celostátní kolo FO 2017 (s. 237) – *J. Švrček*: Ústřední kolo 66. ročníku MO (kategorie A) (s. 314) – *P. Töpfer*: Ústřední kolo 66. ročníku MO (kategorie P) (s. 316) – *J. Švrček*: 6. česko–polsko–slovenská MO juniorů (s. 318)

Z HISTORIE

J. Prokšová: Ilya Prigogine: Velikán nerovnovážné termodynamiky (s. 70) – *B. Tesařík*: Carl David Anderson: objevitel pozitronu (s. 71)

LITERATURA

F. Jáchim: Galileo Galilei: Hvězdný posel – Johannes Kepler: Rozprava s Hvězdným poslem (s. 76) – *J. Švrček*: Stanislav Trávníček: Pojďme na to s počítačem (i když nejsme informatici) (s. 77) – *K. Vašíček*: Keith Devlin: Jazyk matematiky (s. 78) – *B. Tesařík*: Vzájemné pohyby Slunce, Měsíce a Země a jejich důsledky pro náš život (s. 79) – *L. Richterek*: Johannes Kepler: O šestiúhelné sněhové vločce poutavé čtení o „ničem“ (s. 157) – *B. Tesařík*: Nepostradatelné matematické a fyzikální vzorce (s. 158) – *F. Kopecký*: Josef Polák: Didaktika matematiky: Jak učit matematiku zajímavě a užitečně (s. 159) – *D. Hrubý*: George Polya: Jak to řešit? Překvapivé aspekty (nejen) matematických metod (s. 240) – *J. Cachová*: Didaktické krédo Františka Kuřiny (s. 319)