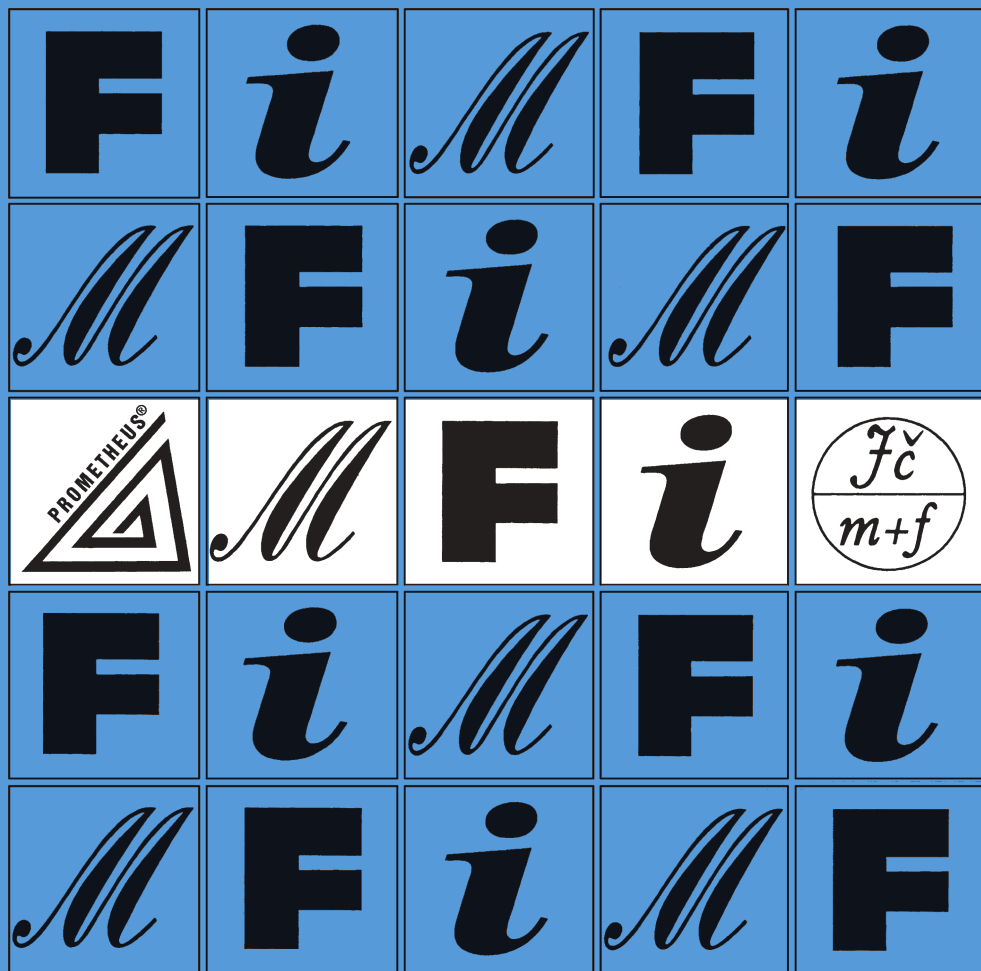


MATEMATIKA 3 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXVII (2017), číslo 3

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Pavel Calábek – vedoucí redaktor a redaktor pro fyziku

Jaroslav Švrček – redaktor pro matematiku

Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Lukáš Richterek – redaktor WWW stránek

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Štěpán Hubálovský, Růžena Kolářová, Miluše Lachmannová, Pavel Leischner, Dana Mandíková, Oldřich Odvárko, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Emanuel Svoboda, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel Töpfer, Bohumil Vybíral

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>V. Zlámal</i> : O důkazech konkurentnosti přímek v rovině	161
<i>J. Vančura</i> : Využití Khan Academy pro zadávání a hodnocení domácích úkolů	169
<i>T. Gavala, S. Lukáč</i> : Diagnostika žiackych miskoncepcí v pravdepodobnosti	180
Zajímavé matematické úlohy	192

FYZIKA

<i>O. Lepil</i> : Elektromagnetická indukce v obvodu s cívkou	197
<i>P. Adámek, P. Varnuška</i> : Jednoduché elektronické obvody s možným univerzálním použitím	206
<i>L. Brízová, M. Křížová, J. Šlégr</i> : Demonstrační mikrovlnný radiometr pro školní použití	216

INFORMATIKA

<i>Z. Tkáčová</i> : Projektové vyučovanie v informatike	223
<i>M. Tomáš</i> : Kontroverzní popularita simulační hypotézy	231

ZPRÁVY

Ústřední kolo 67. ročníku MO (kategorie A)	238
--	-----

MATEMATIKA

O důkazech konkurentnosti přímek v rovině

Vojtěch Zlámal

Střední lesnická škola, Hranice

Žáci na středních a základních školách se při řešení úloh matematických soutěží (např. MO) mnohdy setkávají s úkolem dokázat, že tři nebo více přímek v rovině se protíná v jednom společném bodě (jsou konkurentní). Jelikož tato problematika není v současných středoškolských učebnicích planimetrie obsažena v potřebné míře, klade si tento článek za cíl seznámit čtenáře se základními syntetickými metodami (postupy) řešení úloh uvedeného typu. Volně tak navazuje na dříve uveřejněný článek v MFI s názvem *Čtyři body na kružnici* (viz [7]).

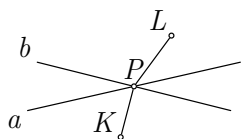
Je zřejmé, že úlohy, ve kterých se dokazuje konkurentnost čtyř nebo více přímek, zpravidla převádíme na úlohy o konkurentnosti právě tří přímek, a to následující úvahou: Chceme-li dokázat, že např. čtyři dané přímky a , b , c , d (po dvou různoběžné) se protínají v jednom bodě, dokážeme např. nejprve konkurentnost trojice přímek a , b , c a následně konkurentnost trojice přímek b , c , d . Odtud plyne, že všechny čtyři přímky a , b , c , d se protínají v jednom společném bodě, neboť průsečík P přímek b , c je společným průsečíkem obou zvolených trojic přímek, tudíž je společným průsečíkem čtveřice daných přímek a , b , c , d . (Analogicky lze postupovat i v úlohách o konkurentnosti více přímek.)

Čtyři níže uvedené metody se budou zabývat pouze problematikou konkurentnosti tří přímek v rovině, přičemž každá z metod je doplněna názornou ukázkou jejího využití.

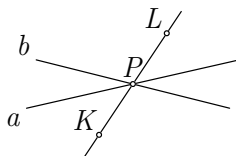
1. metoda (přímý úhel)

Mějme různoběžky a , b , jejichž průsečík označme P , a body K , L , které na daných přímkách a , b neleží (obr. 1a). Dokážeme-li, že lomená čára KPL je ve skutečnosti úsečkou s vnitřním bodem P (např. ověřením

skutečnosti, že úhel KPL je přímý, tj. $|\sphericalangle KPL| = 180^\circ$), pak bod P leží na přímce KL . Tím dokážeme, že přímky a , b a KL jsou konkurentní.



Obr. 1a

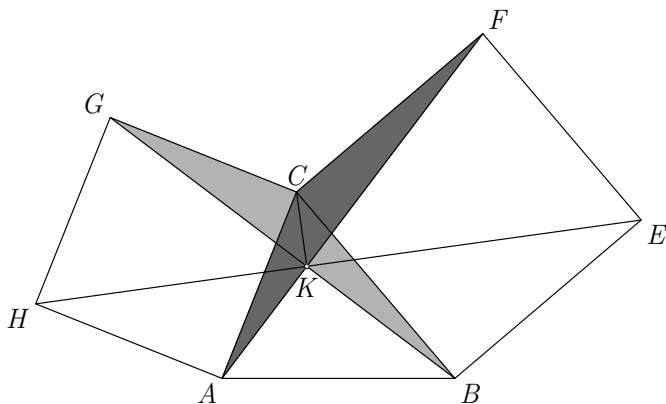


Obr. 1b

Příklad 1

Stranám BC a CA daného trojúhelníku ABC jsou vně připsány čtverce $CBEF$ a $ACGH$. Dokažte, že přímky AF , BG a HE se protínají v jednom společném bodě.

Řešení. Necht K je průsečíkem přímek AF a BG (obr. 2). Uvažujme úsečky EK a HK . Dokažeme-li, že úhel EKH je přímý, leží bod K na přímce HE a přímky AF , BG a HE jsou konkurentní.



Obr. 2

Jelikož trojúhelníky AFC a GBC jsou shodné (dle věty *sus*), jsou úhly KAC a KGC shodné. Body A , K , C , G tedy leží na jedné kružnici. Tato kružnice je jednoznačně určena body A , C , G , jde tedy o kružnici opsanou čtverci $ACGH$ neboli o Thaletovu kružnici o průměru HC . Odtud vyplývá, že $|\sphericalangle CKH| = 90^\circ$. Analogicky dokážeme, že $|\sphericalangle EKC| = 90^\circ$.

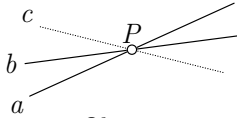
Z rovnosti

$$|\sphericalangle EKH| = |\sphericalangle EKC| + |\sphericalangle CKH| = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

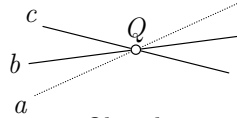
pak plyne, že bod K leží na přímce HE , tedy přímky AF , BG a HE jsou konkurentní, což jsme chtěli dokázat.

2. metoda (průsečíky dvojic přímek)

Uvažujme přímky a , b , c , které jsou po dvou různoběžné. Označme P průsečík přímek a , b a Q průsečík přímek b , c . Dokážeme-li, že body P a Q jsou totožné, pak přímky a , b , c jsou konkurentní.



Obr. 3a



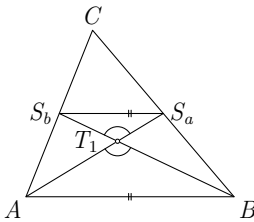
Obr. 3b

Vhodnou ukázkou této metody je důkaz konkurentnosti těžnic v libovolném trojúhelníku (viz [5]).

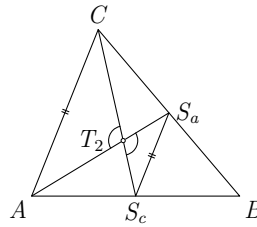
Příklad 2

Dokažte, že těžnice v libovolném trojúhelníku se protínají v jednom bodě (těžišti).

Řešení. Uvažujme střední příčky $S_a S_b$, $S_a S_c$ trojúhelníku ABC (obr. 4a, 4b) a těžnice AS_a , BS_b a CS_c . Označme T_1 průsečík těžnic AS_a a BS_b , T_2 průsečík těžnic AS_a a CS_c .



Obr. 4a



Obr. 4b

Z vlastností střední příčky $S_a S_b$ trojúhelníku ABC plyne

$$\frac{|S_a S_b|}{|AB|} = \frac{|T_1 S_a|}{|AT_1|} = \frac{1}{2} \quad (\text{obr. 4a})$$

a podobně i

$$\frac{|S_a S_c|}{|AC|} = \frac{|T_2 S_a|}{|AT_2|} = \frac{1}{2} \quad (\text{obr. 4b}).$$

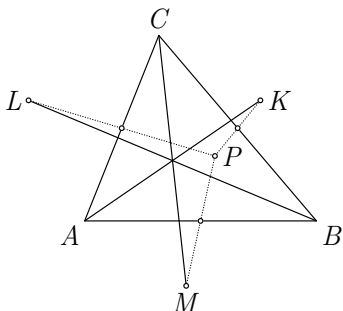
Vzhledem k tomu, že oba průsečíky T_1 i T_2 jsou vnitřní body úsečky AS_a a platí dále

$$\frac{|T_1 S_a|}{|AT_1|} = \frac{|T_2 S_a|}{|AT_2|},$$

jsou body T_1, T_2 totožné. Všechny tři těžnice tak procházejí týmž bodem.

Příklad 3 (1. česko-polsko-slovenská JMO, 2012)

Nechť P je bod ležící uvnitř trojúhelníku ABC a nechť K, L, M jsou body souměrně sdružené s bodem P po řadě podle středů stran BC, CA, AB . Dokažte, že přímky AK, BL, CM se protínají v jediném bodě.



Obr. 5

Řešení. Označme D, E, F po řadě středy stran BC, CA, AB . Vzhledem k tomu, že body P a K jsou souměrně sdružené podle středu D , jsou trojúhelníky BKD a CPD shodné. Odtud plyne

$$|BK| = |PC| \quad \text{a} \quad BK \parallel PC.$$

Obdobně pro body P a L platí

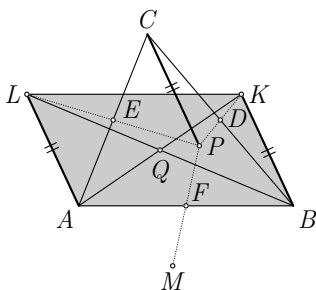
$$|AL| = |PC| \quad \text{a} \quad AL \parallel PC.$$

Body A, B, K, L tak tvoří rovnoběžník (viz obr. 6a). Označíme-li průsečík jeho úhlopříček Q , z vlastností rovnoběžníku vyplývá, že

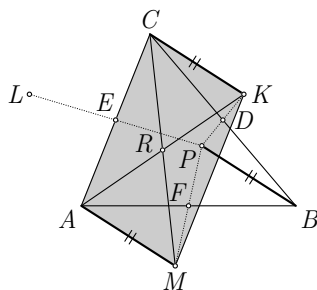
$$|AQ| = |QK|.$$

Analogicky $AMKC$ je rovnoběžník (obr. 6b) a pro průsečík R jeho úhlopříček platí

$$|AR| = |RK|.$$



Obr. 6a



Obr. 6b

Jelikož oba body Q, R leží na úsečce AK , plyne z výše uvedených rovností, že jsou totožné. Přímký AK, BL, CM se tak protínají v jednom společném bodě. Tím je důkaz uzavřen.

3. metoda (využití speciálních polohových vlastností)

K důkazu konkurentnosti přímek je také možné použít známých polohových vlastností v geometrii trojúhelníků. Řešení úlohy pak spočívá v transformaci zadaných prvků na vhodné prvky trojúhelníku tak, že z jejich polohových vlastností vyplyne konkurentnost daných přímek. Metody založené na uvedené transformaci pak mohou využívat například vlastností středu kružnice opsané, vepsané či připsané trojúhelníku, těžnic a těžiště trojúhelníku, výšek a ortocentra trojúhelníku.

V následující ukážce je využito vlastností os vnitřních úhlů trojúhelníku a středu kružnice vepsané.

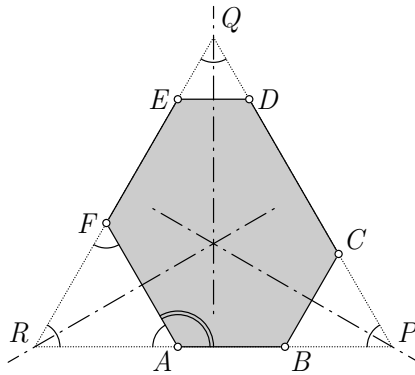
Příklad 4 (viz [4], str. 94)

V rovině je dán šestiúhelník $ABCDEF$ se shodnými vnitřními úhly. Dokažte, že osy jeho stran BC, DE a FA se protínají v jednom společném bodě.

Řešení. Označme P průsečík přímek AB a CD , Q přímek CD a EF , R přímek EF a AB (viz obr. 7). Vzhledem k tomu, že všechny vnitřní úhly šestiúhelníku $ABCDEF$ jsou shodné (jejich velikost je 120°), jsou trojúhelníky BPC, DQE, FRA a PQR rovnostranné.

Osa strany FA šestiúhelníku je tak osou úhlu ARF trojúhelníku FRA , neboli osou úhlu PRQ . Obdobně osy stran BC a DE jsou po řadě osami úhlů QPR a RQP . Ze známého faktu, že osy úhlů v trojúhelníku se protínají v jednom bodě (středu kružnice vepsané), vyplývá, že také osy stran

BC , DE a FA daného šestiúhelníku se protínají v jednom společném bodě, což jsme chtěli dokázat.



Obr. 7

Poznámka 1. Analogicky lze dokázat, že také osy stran AB , CD , EF se protínají v jednom společném bodě.

4. metoda (využití Cèvovy věty)

Poslední prezentované řešení se opírá o tzv. *Cèvovu větu*. Vzhledem k tomu, že tato věta není zmiňována ve středoškolských učebnicích planimetrie, uvádíme její znění.

Věta (Cèvova)

Nechť X , Y , Z jsou po řadě vnitřní body stran BC , CA , AB daného trojúhelníku ABC . Přímky AX , BY , CZ procházejí jedním bodem, právě když platí

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = 1.$$

Poznámka 2. Uvedená věta je významná (a pozoruhodná) tím, že poukazuje na ekvivalenci jisté polohové vlastnosti a metrické identity v trojúhelníku.

Příklad 5

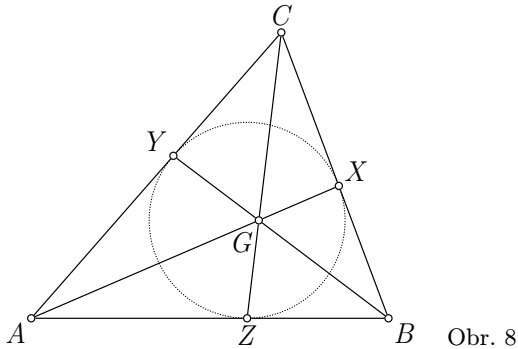
Je dán trojúhelník ABC . Označme X , Y , Z po řadě body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC se stranami a , b , c (při obvyklém značení). Dokažte, že přímky AX , BY , CZ se protínají v jednom společném bodě.

Řešení. Jelikož přímky AC , AB jsou tečnami vedenými (vnějším) bodem A ke kružnici vepsané trojúhelníku ABC s dotykovými body Y , Z

(viz obr. 8), platí $|AY| = |AZ|$, a analogicky $|BZ| = |BX|$, $|CX| = |CY|$. Z uvedených tří rovností plyne

$$\frac{|AZ|}{|BZ|} \cdot \frac{|BX|}{|CX|} \cdot \frac{|CY|}{|AY|} = 1,$$

což na základě Cèvyovy věty dokazuje, že přímky AX , BY , CZ se protínají v jednom společném bodě.



Poznámka 3. Průsečík přímek AX , BY , CZ z příkladu 5 se nazývá Gergonův bod a značíme ho G . Obdobně lze formulovat úlohu o konkurentnosti tří přímek procházejících vždy vrcholem trojúhelníku a bodem dotyku příslušné kružnice vně připsané s protější stranou k uvažovanému vrcholu. Průsečík uvedených přímek se pak nazývá Nagelův bod a značíme ho N .

Pro zájemce o zkoumanou problematiku uvádíme závěrem několik úloh k procvičení.

Příklad 6

Dokažte, že výšky trojúhelníku se protínají v jednom bodě.

Příklad 7 (viz [4], str. 94)

V rovině je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ se shodnými vnitřními úhly. Dokažte, že osy jeho stran BC , EA a osa úhlu CDE se protínají v jednom společném bodě.

Příklad 8 (66. MO, A–III–4)

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškou AD . Osy úhlů BAD , CAD protínají stranu BC po řadě v bodech E , F . Kružnice opsaná trojúhelníku AEF protíná strany AB , AC po řadě v bodech G , H . Dokažte, že přímky EH , FG , AD se protínají v jednom bodě.

Příklad 9 (viz [1], str. 67)

Nechť $ABCD$ je daný čtyřúhelník, v němž $|BC| = |CD|$, přičemž jeho strany AB , CD nejsou rovnoběžné. Označme M , N po řadě středy stran BC a AD . Dokažte, že osy úseček AB , MN a CD se protínají v jednom společném bodě.

Příklad 10 (viz [2], str. 62)

Nechť jsou A_1 , B_1 a C_1 po řadě středy kružnicových oblouků BC , CA , AB kružnice opsané trojúhelníku ABC (neobsahujících po řadě body A , B , C) a nechtě jsou A_2 , B_2 a C_2 body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC po řadě se stranami BC , CA , AB . Dokažte, že přímky A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 se protínají v jednom bodě.

Příklad 11

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC se stranami a , b , c dle obvyklého značení. Označme X patu výšky na stranu a . Nechtě K , L jsou po řadě body stran b , c takové, že výška AX pólí úhel KXL . Pomocí Cëvovy věty dokažte, že přímky AX , BK a CL se protínají v jednom bodě.

Literatura

- [1] *Andreescu, T., Rolínek, M., Tkadlec, M.*: 106 Geometry Problems From the AwesomeMath Summer Program. XYZ Press, Plano, USA, 2013.
- [2] *Andreescu, T., Rolínek, M., Tkadlec, M.*: 107 Geometry Problems From the AwesomeMath Year-Round Program. XYZ Press, Plano, USA, 2013.
- [3] *Court, N. A.*: Reflections on Pure Geometry. Mathematics Magazine, roč. 37 (1964), č. 5, s. 337–339.
- [4] *Švrček, J.*: Gradované řetězce úloh v práci s matematickými talenty. VUP, Olomouc, 2014.
- [5] *Švrček, J.*: Jak provádět důkazy v planimetrii? Dva dny s didaktikou matematiky 2012 (sborník příspěvků). Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Praha 2012.
- [6] *Švrček, J. – Vanžura, J.*: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha, 1988.
- [7] *Zlámal, V.*: Čtyři body na kružnici. MFI, roč. 24 (2015), č. 5, s. 334–343.
- [8] I Czesko-Polsko-Słowackie Zawody Matematyczne Juniorów. 2012. Dostupné z: <http://omj.edu.pl/uploads/attachments/cps-ind.pdf>

Využití Khan Academy pro zadávání a hodnocení domácích úkolů

JIŘÍ VANČURA

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

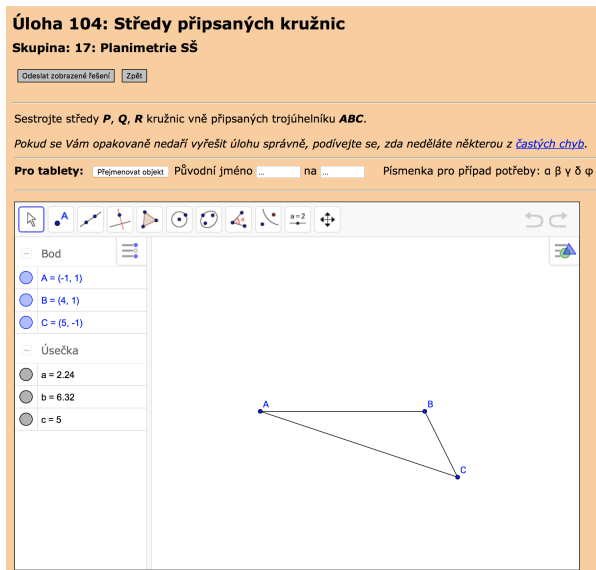
Domácí úkoly jsou běžnou složkou výuky matematiky na střední škole. Bohužel, učitel často nemá čas věnovat domácím úkolům tolik pozornosti, kolik by si zasloužily. Naštěstí Internet dnes nabízí řadu nástrojů, které mohou učiteli s organizací domácích úkolů pomoci. Kromě Khan Academy (dále jen KA), které se budeme věnovat ve druhé polovině článku, zmiňme ještě čtyři další nástroje.

GeoTest (<http://geotest.geometry.cz>) je pomůcka pro zadávání a řešení geometrických konstrukčních úloh (obr. 1). Základ programu tvoří GeoGebra, díky které jsou úlohy automaticky vyhodnocovány. Na základě žádosti je možné získat učitelský účet, který umožňuje zadávat žákům úlohy a kontrolovat jejich splnění. GeoTest je český projekt, který nabízí veškerý obsah zdarma. Pokud si chcete GeoTest vyzkoušet z pohledu žáka, můžete se přihlásit loginem *guest* bez hesla.

Techambition (<https://techambition.com>) je český projekt, který se zaměřuje především na podporu kooperativní výuky ve třídě. Projekt nabízí řadu krátkých lekcí zaměřených vždy na jeden matematický koncept (např. inverzní funkce nebo korelace). Každá lekce obsahuje několik úloh a interaktivních vizualizací (obr. 2), které mají žákům pomoci lépe pochopit danou látku. Techambition také nabízí automatické vyhodnocení a pro učitele přehled úspěšnosti jeho žáků. Nevýhodou oproti KA je menší množství lekcí a úloh. Na rozdíl od ostatních zde zmíněných nástrojů je Techambition zpoplatněný. Za každého žáka zaplatí škola 190 Kč ročně.

Desmos (<https://teacher.desmos.com>) je americký portál s podobným zaměřením jako Techambition. Desmos nabízí řadu interaktivních cvičení a her, které podávají matematické koncepty ve srozumitelném a zajímavém kontextu. Za zmínku stojí například aktivita Polygraph (obr. 3), kde si žáci procvičují popis matematických objektů formou hry ve dvo-

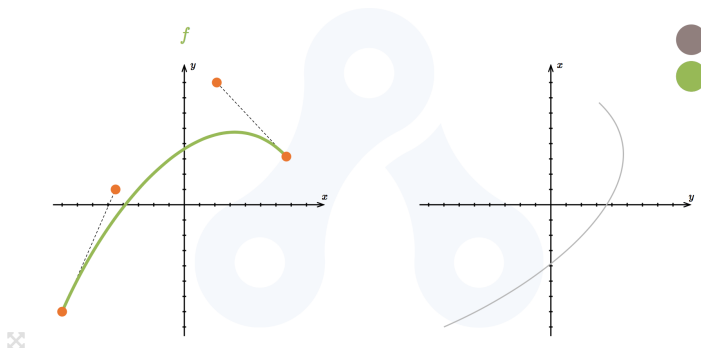
jičích. Výhodou portálu Desmos je oproti Techambitionu je bezplatnost, naopak nevýhodou může být angličtina.



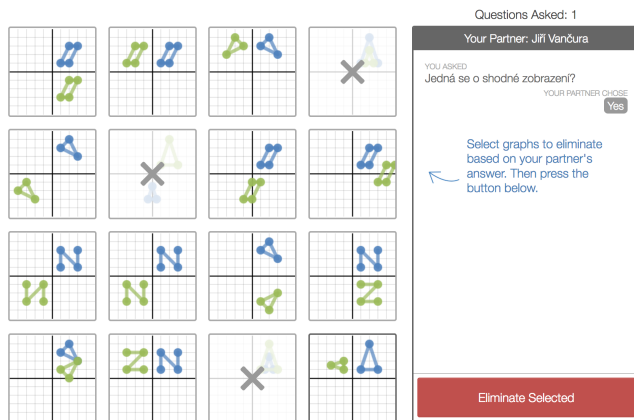
Obr. 1 Snímek obrazovky cvičení nástroje GeoTest

Prohození os si vykreslíme i pro graf obecné nelineární funkce. Dvě inverzní funkce samozřejmě nemusí být jen lineární.

Ve vizualizaci nastavte funkci nalevo tak, aby graf, který vznikne po prohození os, nebyl grafem funkce.

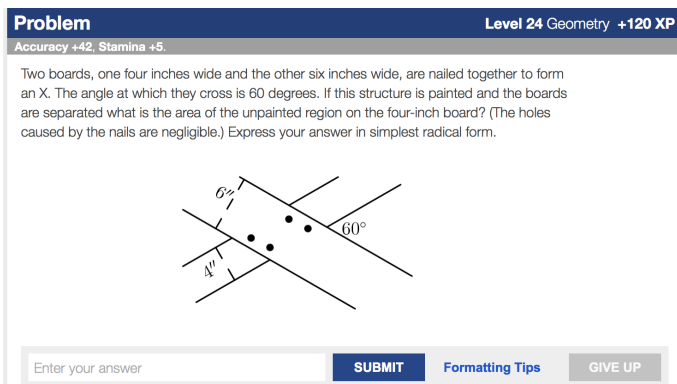


Obr. 2 Snímek obrazovky úlohy z lekce o inverzních funkcích nástroje Techambition



Obr. 3 Snímek obrazovky aktivity Polygraph nástroje Desmos

Čtvrtým nástrojem stojícím za zmínku je americký webový portál *Art of Problem Solving* a nástroj *Alcumus* (<https://artofproblemsolving.com/alcumus>) zaměřený na rozvoj dovedností nadaných žáků. Po krátké registraci může žák řešit netradiční matematické úlohy (obr. 4). Žák si také může nastavit zaměření úloh – všeobecné zaměření, zaměření na geometrii, nebo i specifické zaměření na čtyřúhelníky. Portál zaznamenává výsledky žáků, kteří pak mohou postupovat po jednotlivých úrovních v různých oblastech. Žáci také mohou navazovat přátelství podobně jako na sociálních sítích a soutěžit mezi sebou. Nástroj Alcumus je zdarma, portál Art of Problem Solving dále nabízí placené online kurzy a knihy.



Obr. 4 Snímek obrazovky úlohy nástroje Alcumus

Výzkumy z oblasti domácích úkolů a procvičování

Z řady studií vyplývá, že žáci úkolům věnují více úsilí, pokud je jejich práce podrobně kontrolována [7]. Pokud naopak učitel domácí úkoly nehodnotí a bez větší pozornosti je přechází, mají žáci pocit, že při plnění úkolu mrhali svým časem [7, 10]. Je přínosné, pokud jsou žáci přesvědčeni, že úkoly jsou smysluplné a že jejich úsilí je oceňováno [3]. S touto problematikou také souvisí celkové hodnocení žáků v matematice. Poměrně známá studie [5] ukázala, že pokud oceňujeme inteligenci žáků, můžeme tím snížit jejich motivaci, výkon i sebevědomí. Naopak, oceňujeme-li úsilí žáků, můžeme jejich motivaci i výkon zvýšit. Pokud dokážeme objektivně měřit úsilí, které žáci vynaložili při plnění domácích úkolů, dává nám to jako učitelům velmi účinný a motivační nástroj pro hodnocení žáků. Pár studií naznačuje, že prostředí, které žákům umožňuje cvičení opakovat a poskytuje nápovědy, může vést k lepším výsledkům než prostředí, které žákům odhalí správnou odpověď bez možnosti opravy [2, 4].

Interaktivní cvičení z matematiky, které KA zdarma nabízí, jsou v souladu s výše uvedenými poznatky.

Khan Academy

Khan Academy (KA) je nezisková organizace, která provozuje rozsáhlý vzdělávací portál www.khanacademy.org. Veškerý obsah je na KA k dispozici zdarma v anglickém jazyce. Nejvíce pozornosti je v médiích věnováno výukovým videím, která ale nemají, podle našeho názoru, vysokou kvalitu především z didaktického hlediska. Naopak o dalších nástrojích, jako jsou interaktivní cvičení z matematiky či programování, se již tak často nehovoří. Právě tato interaktivní cvičení považujeme za nejpřínosnější část KA a budeme se jim v článku věnovat. Cvičení z matematiky na KA pokrývají látku základní školy, většinu středoškolského učiva a několik oblastí z vyšší matematiky. Oproti českému kurikulu je věnována velká pozornost pravděpodobnosti a statistice, naopak v oblasti kombinatoriky a syntetické geometrie nenabízí KA příliš rozsáhlou sbírku úloh.

Nejprve představíme interaktivní sbírku úloh z pohledu žáka. Zprvu je vhodné se na KA zaregistrovat. Sbíрку sice je možné využívat i bez registrace, ale přicházíme tak o některé funkcionality. Díky registraci bude KA žákův postup učivem ukládat a učitel bude moci sledovat jeho výsledky.

Sbíрку úloh najdeme po rozkliknutí panelu Subjects v levém horním rohu obrazovky (obr. 5, [1]). Sbíрка je rozdělena do 14 kapitol dle témat a 11 kapitol dle ročníku. Každá kapitola (např. Algebra 2) se dále dělí

na několik sekcí a každá sekce (např. Conic sections) obsahuje několik interaktivních cvičení, např. Write standard equation of a circle. Cvičení lze také vyhledávat pomocí pole Search [2] na horní liště. Každé z celkem 1 420 cvičení obsahuje řadu úloh zaměřených na jednu danou dovednost.

Math by subject	Math by grade	Science & engineering	Computing	Economics & finance
Early math 92%	Kindergarten 93%	Physics	Computer programming	Microeconomics
Arithmetic 92%	1st 85%	AP Physics 1	Computer science	Macroeconomics
Pre-algebra 76%	2nd 94%	AP Physics 2	Hour of Code	Finance & capital markets
Algebra 1 54%	3rd 59%	Cosmology & astronomy	Computer animation	Entrepreneurship
Geometry 92%	4th 55%	Chemistry		
Algebra 2 59%	5th 42%	AP Chemistry	Arts & humanities	Test prep
Trigonometry 75%	6th 57%	Organic chemistry	World history	SAT
Precalculus 50%	7th 55%	Biology	US history	MCAT
Statistics & probability	8th 58%	AP Biology	AP US History	GMAT
AP Calculus AB 8%	Eureka Math/EngageNY	Health & medicine	Art history	IIT JEE
AP Calculus BC 8%	High school	Electrical engineering	Grammar	NCLEX-RN
Multivariable calculus				College Admissions
Differential equations				
Linear algebra				

Obr. 5 Sbíрка úloh Khan Academy

Podívejme se nyní podrobněji na průběh cvičení. Jako ilustrační příklad použijeme již zmíněné cvičení Write standard equation of a circle (obr. 6).

Write standard equation of a circle

You might need: Calculator

Write the equation of the circle graphed below.

$(x - 2)^2$

Calculator interface showing a coordinate plane with a circle centered at (2, -4) with radius 2.

Stuck? Watch a video or use a hint.

Report a problem

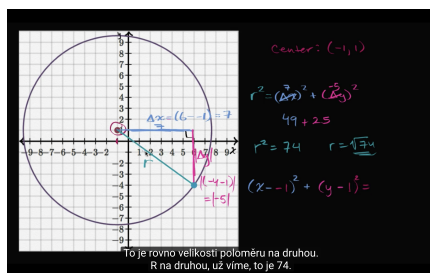
Progress indicator: ● ● ● ●

Check

Obr. 6 Snímek obrazovky cvičení na Khan Academy

Naším úkolem je zapsat středovou rovnici kružnice nakreslené na obr. 6 (obr. 6, [4]). Rovnici je třeba napsat do textového pole (obr. 6, [3]), které je uzpůsobené k zadávání matematických vzorců. Odpověď žák potvrdí stiskem tlačítka Check (obr. 6, [7]). V případě že žák odpoví chybně, musí chybu napravit a zapsat rovnici správně, poté může pokračovat k další úloze, ale tato úloha již nebude započítána jako splněná. Pokud žák nedokáže chybu opravit nebo si s řešením vůbec neví rady, má dvě možnosti nápovědy, které zobrazí kliknutím na odkaz (obr. 6, [5]).

První možností je výukové video, které podrobně popisuje řešení podobného příkladu (obr. 7). Video je doprovázeno anglickým výkladem a některá videa obsahují české titulky.



Obr. 7 Snímek obrazovky výukového videa na Khan Academy

Druhou možností je zobrazení podrobného vzorového postupu řešení dané úlohy (obr. 8), v tom případě ale úloha opět nebude započítána jako splněná. Na konci vzorového postupu žák najde správnou odpověď, přesto je třeba ji zadat do textového pole (obr. 6, [3]). Tečky ve spodní části obrazovky (obr. 6, [6]) znázorňují žákovu úspěšnost. Úlohy, které vyřeší napoprvé a bez nápovědy správně, jsou započítány jako splněné a znázorněny zelenou tečkou, ostatní úlohy jsou pak znázorněny šedou tečkou. Po dokončení všech úloh ve cvičení se žákovi zobrazí shrnutí, které mimo jiné ukazuje jeho procentuální úspěšnost. Cvičení je započítáno jako splněné, pokud žák správně, napoprvé a bez nápovědy vyřešil alespoň 70 % úloh, v opačném případě musí cvičení opakovat s novými úlohami. Počet úloh ve cvičení se pohybuje zpravidla mezi čtyřmi a sedmi.

Nyní se zaměříme na možnosti učitelského profilu. Po rozkliknutí odkazu s naším jménem vpravo na horní liště (obr. 9, [8]) se zobrazí základní navigace. V nastavení profilu (obr. 9, [9]) v sekci Roles můžeme běžný žákovský účet přepnout na učitelský (Teacher/Coach). Poté můžeme na stránce Coach dashboard (obr. 9, [10]) zakládat virtuální třídy, do kterých

se žáci zapíší pomocí odkazu nebo unikátního kódu. Po zapsání žáka do naší virtuální třídy získáme kompletní přehled o jeho činnosti na KA. Uvidíme, kdy žák na KA pracuje, která videa sleduje, jaká cvičení řeší a jak je v nich úspěšný. KA nabízí také souhrnné statistiky za celou třídu, kde si můžeme zobrazit aktivitu jednotlivých žáků nebo je rozřídít podle úspěšnosti v jednotlivých cvičeních. Můžeme také jednotlivým žákům nebo celým třídám zadávat cvičení, která mají splnit ve zvoleném termínu.

1 / 4 The strategy

The equation of a circle with center (h, k) and radius r is given below.

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

From the graph, we can see that the circle is centered at $(2, -5)$.

We can also see that the circle passes through the point $(0, -4)$. Therefore, we can find the radius by calculating the distance between these points.

2 / 4 Finding the radius

Using the distance formula, we can calculate the distance, D , between $(2, -5)$ and $(0, -4)$ as follows.

$$D = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-5 - (-4))^2} = \sqrt{5}$$

3 / 4 Writing the equation of the circle

We are given that the center of this circle is $C = (2, -5)$ and we have found that its radius is $\sqrt{5}$. Therefore, the standard equation of this circle can be written as follows.

$$(x - 2)^2 + (y - (-5))^2 = (\sqrt{5})^2$$

We can simplify this equation by removing double negative signs and evaluating the expression on the right hand side of the equation.

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 5$$

[Got it, thanks!]

Unless otherwise specified, the equation of a circle can be written in any form. For example, we can rewrite $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ in the following equivalent forms.

- $x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 - r^2 = 0$
- $\frac{(x - h)^2}{r^2} + \frac{(y - k)^2}{r^2} = 1$

We can also choose any other form, but the standard form is the easiest form to work with in most cases.

4 / 4 Summary

The equation of the graphed circle is given below.

$$(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 5$$

Obr. 8 Snímek obrazovky vzorového řešení úlohy z obr. 6

Subjects ▾ Search KHANACADEMY [8] → Jiří Vančura

Settings Account

Basics

Real name

Username

Gender

Birthdate

Primary language

Notifications · 0

Profile

Learning home

Coach dashboard ← [10]

Add children

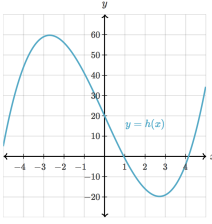
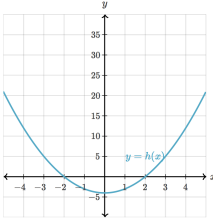
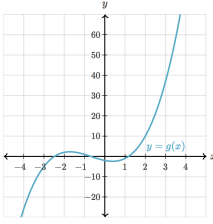
Settings ← [9]

Help

Log out

Obr. 9 Nastavení profilu

Dále je možné zobrazit přehled úloh, které žáci řešili a jaké průměrné úspěšnosti dosáhli u každé úlohy (obr. 10). Tento přehled nám může pomoci identifikovat problematické úlohy, kterým se pak můžeme více věnovat při hodině.

<p>10 Correct: 60%</p> <p>Select all the intervals where $h(x) < 0$ and $h'(x) < 0$.</p> <p>Choose all answers that apply:</p> <p><input type="radio"/> A $-4.5 < x < -3$</p> <p><input type="radio"/> B $-2 < x < 0$</p> <p><input type="radio"/> C $3 < x < 4$</p> <p><input type="radio"/> D None of the above</p> 	<p>11 Correct: 67%</p> <p>Select all the intervals where $h(x) < 0$ and $h'(x) > 0$.</p> <p>Choose all answers that apply:</p> <p><input type="radio"/> A $-4 < x < -3$</p> <p><input type="radio"/> B $-3 < x < -2$</p> <p><input type="radio"/> C $3 < x < 4$</p> <p><input type="radio"/> D None of the above</p> 	<p>12 Correct: 71%</p> <p>Select all the intervals where $g(x) > 0$ and $g'(x) > 0$.</p> <p>Choose all answers that apply:</p> <p><input type="radio"/> A $-4 < x < -3$</p> <p><input type="radio"/> B $-0.5 < x < 0.5$</p> <p><input type="radio"/> C $2 < x < 3$</p> <p><input type="radio"/> D None of the above</p> 
<p>13 Correct: 75%</p>	<p>14 Correct: 75%</p>	<p>15 Correct: 75%</p>

Obr. 10 Přehled úloh, které žáci řešili včetně jejich úspěšnosti

Díky podrobným výstupům z KA lze, v souladu s výše uvedenými výsledky výzkumů, objektivně hodnotit domácí práci žáků.

Využití Khan Academy pro zadávání a hodnocení domácích úkolů

Na Gymnáziu Přípotoční v Praze 10 používáme KA pravidelně k zadávání domácích úkolů. V souladu s poznatky, které jsme uvedli výše, plnění úkolů známkuje s ohledem na splnění zadaných cvičení a s ohledem na čas a počet úloh, které žák řešil. Tento systém nám tak umožňuje objektivněji hodnotit úsilí žáků, které matematice věnují, což by bez využití technologií nebylo možné především z časových důvodů. Samozřejmě je zde riziko, že žák vyřeší cvičení místo svého spolužáka, který tak unikne povinnosti domácího úkolu. Oproti běžnému úkolu ale na KA dostává každý žák jiné úlohy, a tedy žák, který by řešil úkoly za ostatní, bude muset vyřešit mnohem více úloh než v případě běžného domácího úkolu, který bývá často pro celou třídu stejný. Podobný model využívají i zahraniční školy a my jsme tak mohli vycházet z jejich zkušeností. Doposud největší publikovaná studie o využití KA, ve které výzkumníci provedli rozsáhlé šetření na 20 školách mezi přibližně 4 000 žáky a jejich učiteli, pochází z USA [6]. Ve studii pouze 45 % žáků uvedlo, že je schopno se pomocí KA naučit nové dovednosti. S přihlédnutím k této skutečnosti nepoužíváme KA pro výklad nové látky, ale jen k procvičení získaných dovedností.

Mezi žáky dvou pražských gymnázií jsme provedli podobné dotazníkové šetření jako kolegové v USA [9] a došli k velmi podobným výsledkům. Celkem 141 žákům, kteří s KA pracovali nejpozději od září 2015, jsme dvakrát zadali téměř identický dotazník zaměřený na postoje ke KA, na preference ohledně formy domácích úkolů i na jazykovou bariéru při práci s KA. První dotazník byl zadán na přelomu listopadu a prosince 2015, druhý pak s odstupem šesti měsíců na začátku června 2016.

V prvním dotazníku pouze menšina (46 %) žáků uvádí, že je schopna se na KA naučit nové dovednosti. Většina žáků (65 %) preferuje procvičování na KA před běžnou sbírkou úloh, 26 % žáků nezastává jednoznačný názor a pouze 9 % žáků preferuje běžnou sbírku. Stejně tak ve druhém dotazníku preferuje většina žáků (57 %) úkoly ve formě KA. Jako hlavní výhodu žáci uváděli možnost prohlížení vzorových řešení a výukových videí, které jim umožňují doplnit mezery v jejich poznatcích ze školy. Za přínosnou považujeme také nutnost řešit úlohy dokud žák nevyřeší 70 % úloh správně a bez nápovědy. Žák tak nepřestane procvičovat ve chvíli, kdy si myslí, že látce rozumí, ale až když je skutečně schopen úlohy úspěšně řešit. Toto připouští i velká část (60 %) žáků v naší studii.

Jedním z faktorů ovlivňujících postoje žáků ke KA je jazyková bariéra [8], kdy 82 % žáků s malou či žádnou jazykovou bariérou preferuje KA před

běžnou sbírkou. Žáci s malou či žádnou jazykovou bariérou dále považují KA za přínosnější pro jejich učení a rovněž uvádějí větší schopnost učit se na KA samostatně novým dovednostem bez výkladu či pomoci učitele. Tito žáci často uvádějí anglický jazyk jako jednu z výhod KA, naopak žáci s horšími jazykovými schopnostmi obvykle uvádějí angličtinu jako hlavní nevýhodu KA. Doporučujeme proto při zavádění KA přihlédnout k jazykovým schopnostem žáků.

Za přínosnou také považujeme možnost individualizace domácího úkolu. Žáci mají přístup k velkému množství příkladů a mohou se zaměřit právě na ty úlohy, které jim nejdou. Učitel může navíc zadávat různým žákům různě obtížné úkoly, aniž by mu to přidělovalo mnoho práce. Nevýhodou z pohledu učitele může být uspořádání učiva, které na KA kopíruje americké *Core curriculum* (<http://www.corestandards.org/Math/>) a neodpovídá tak běžným českým vzdělávacím plánům. Jak jsme již zmínili výše, českým učitelům budou na KA chybět především cvičení z kombinatoriky a syntetické geometrie.

Závěr

Ve srovnání s ostatními zmíněnými zdroji nabízí KA velmi rozsáhlou sbírku interaktivních úloh, které v souladu s výsledky empirických výzkumů žákům poskytují okamžitou zpětnou vazbu, nápovědu, je-li to třeba, a nutí žáky opakovat cvičení, dokud nejsou skutečně schopni úlohy řešit správně a bez nápověd. Největší překážkou využití KA je pravděpodobně angličtina, která může činit některým žákům potíže. Další nevýhodou je nedostatečné obsahové pokrytí některých oblastí české, školské matematiky. Jedná se především o konstrukční a obecně syntetickou geometrii. Konstrukční geometrii může částečně pokrýt český nástroj GeoTest a se syntetickou geometrií může pomoci další český nástroj Techambition. Druhou, téměř chybějící oblastí je kombinatorika, která je na KA pokryta jen čtyřmi základními cvičeními v kapitole Statistics and Probability. Naopak statistika a diferenciální a integrální počet je pokryt velmi podrobně a na vysoké úrovni v kapitolách Statistics and Probability a AP Calculus. KA obsahuje například cvičení zaměřené na testování hypotéz či řadu cvičení z oblasti diferenciálních rovnic.

Na rozdíl od ostatních nástrojů zmíněných v úvodu jsou cvičení na KA většinou poměrně mechanická, kdy žáci řeší analogické úlohy s prakticky identickým postupem stále dokola. Na základě našich zkušeností tak považujeme KA za vhodný nástroj pro drilování potřebných postupů, nikoliv

nástroj vhodný k výkladu nové látky či k rozvoji vyšší kognitivních dovedností Bloomovy taxonomie [1]. V těchto oblastech mohou více pomoci nástroje *Techambition* či *Desmos* podporující aktivizaci žáků ve třídě a *Alcumus*, který je vhodný pro další rozvoj talentovaných žáků.

Literatura

- [1] *Anderson, L. V., et al.*: A Taxonomy for Learning, Teaching, and Assessing: A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives. Pearson Education, New York, 2000.
- [2] *Attali, Y.*: Effects of multiple-try feedback and question type during mathematics problem solving on performance in similar problems. *Computers & Education*, roč. 86 (2015), s. 260–267.
- [3] *Bempechat, J., Li, J., Neier, S. M., Gillis, C. A., Holloway S. D.*: The homework experience: Perceptions of low-income youth. *Journal of Advanced Academics*, roč. 22 (2011), č. 2, s. 250–278.
- [4] *Clarina, R., Koul, R.*: Multiple-try feedback and higher-order learning outcomes. *International Journal of Instructional Media*, roč. 32 (2003), č. 3, s. 239–245.
- [5] *Mueller, C. M., Dweck, C. S.*: Praise for intelligence can undermine children's motivation and performance, 1998. Dostupné z: <http://www.uky.edu/~eushe2/mrg/MuellerDweck1998.pdf>
- [6] *Murphy, R., Gallagher, L., Krumm, A., Mislevy, J., Hafter, A.*: Research on the Use of Khan Academy in Schools. SRI Education, Menlo Park, CA, 2014. Dostupné z <https://www.sri.com/work/projects/research-use-khan-academy-schools>
- [7] *Strandberg, M.*: Homework – is there a connection with classroom assessment? A review from Sweden. *Educational Research*, roč. 55 (2013), č. 4, s. 325–346.
- [8] *Vančura, J.*: Research on the language barriers of students who use Khan Academy as a mathematics homework platform. CERME 10, Dublin, 2017. Dostupné z: https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0195.pdf
- [9] *Vančura, J.*: Využití Khan Academy pro výuku matematiky na střední škole. Dva dny s didaktikou matematiky, Praha, 2016. Dostupné z: <http://www.suma.jcmf.cz/materialy-pro-ucitele/sborniky-z-konferenci/dva-dny-s-didaktikou-matematiky/>
- [10] *Wilson, J., Rhodes, J.*: Student perspectives on homework. *Education*, roč. 131 (2010), č. 2, s. 351–358.

Online nástroje

Alcumus – <https://artofproblemsolving.com/alcumus>

Desmos – <https://teacher.desmos.com>

GeoTest – <http://geotest.geometry.cz>

Khan Academy – <https://www.khanacademy.org>

Techambition – <https://techambition.com>

Diagnostika žiackych miskoncepcií v pravdepodobnosti

TADEÁŠ GAVALA – STANISLAV LUKÁČ

Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice, Slovensko

V oficiálnych dokumentoch vzdelávacích inštitúcií aj Európskej komisie sa pre matematické vzdelávanie zdôrazňuje dôležitosť presadzovania vyučovacích metód podporujúcich aktívne žiacke bádanie, modelovanie a vytváranie prepojení medzi rôznymi reprezentáciami, konceptuálne porozumenie a riešenie problémov. V prírodovednom, ale aj v matematickom vzdelávaní sa v súčasnosti prejavujú snahy o implementovanie bádateľských prístupov k výučbe. Bádanie vo vyučovaní je podobne ako vedecké bádanie nasmerované k pozorovaniu javov, ku kladeniu otázok, k hľadaniu odpovedí, k využívaniu vhodných argumentov na vysvetlenie a zdôvodnenie objavených zistení. Implementácia nových vyučovacích metód do vzdelávania nie je jednoduchý a priamočiary proces. Dôvody vyplývajú aj zo skutočnosti, že vyučovacie stratégie nemožno jednoducho kopírovať medzi rôznymi vyučovacími predmetmi. Aj pri aplikovaní bádateľských prístupov k vyučovaniu majú odlišné postavenie experimenty s fyzickými pomôckami a matematické modelovanie. Taktiež je kladený rôzny dôraz na rozvíjanie jednotlivých bádateľských spôsobilostí vo vyučovaní matematiky a prírodovedných predmetov.

Rozmanité činnosti a interakcie v triede vyžadujú aj využívanie rozmanitých spôsobov hodnotenia žiakov a postupov vyhodnocovania výsledkov

vzdelávania. V súčasnosti prevláda v školskej praxi sumatívne hodnotenie, ktoré je základom pre klasifikáciu žiakov. Učitelia využívajú v značnej miere ústne skúšanie, ktoré je často orientované na pamäťovú stránku učenia a písomné práce zamerané na preverovanie miery osvojenia štandardných postupov riešenia úloh. Súčasťou inovatívnych vyučovacích stratégií sú aj nové formy dialógu a interakcií medzi učiteľom a žiakom. Pri vedení diskusie učiteľ analyzuje odpovede žiakov a snaží sa zohľadňovať pri kladení otázok typické chyby žiakov. Na základe odhalených nedostatkov a miskoncepcií poskytuje žiakom vhodné príklady aj proti-príklady podporujúce argumentáciu a rozvíjanie kritického myslenia. Poskytovanie rýchlej a účinnej spätnej väzby je kľúčovým faktorom formatívneho hodnotenia. Vhodná aplikácia formatívneho hodnotenia umožňuje realizovať učebné postupy v triede podporujúce aktívne učenie a zvyšovať efektívnosť procesu učenia. Na dôležitosť formatívneho hodnotenia poukazuje aj správa OECD, v ktorej sa zdôrazňuje, že formatívne hodnotenie musí byť súčasťou plánovania výučby a má sa stať neoddeliteľnou súčasťou triednej praxe.

Aplikovanie rôznych foriem formatívneho hodnotenia poskytuje potenciál pre skvalitnenie výsledkov vyučovacieho procesu. Vhodne aplikované formatívne hodnotenie by malo umožniť žiakom lepšie zvládnutie vzdelávacích štandardov a zlepšenie konceptuálneho porozumenia. Na obr. 1 je zobrazený model formatívneho hodnotenia vyjadrujúci opakujúci sa cyklus, v ktorom na hodnotenie nadväzuje analýza žiackych výkonov a reakcia učiteľa.



Obr. 1 Cyklus formatívneho hodnotenia

V článku sa zameriavame na analýzu žiackych výkonov, pričom sa budeme snažiť rozlišovať medzi miskoncepciami a bežnými chybami v pravdepodobnosti. Pod termínom miskoncepcia chápeme nesprávne vytvorené pojmy či koncepty, nesprávne použité metódy riešenia, formálne či chybné predstavy alebo nesprávne poznatky žiaka založené na intuíciiach, ktoré sú

kritickým aspektom procesu učenia, resp. procesu nadobúdania vedomostí. Napríklad: nesprávnu voľbu konfigurácie pre zápis výsledkov hry považujeme za miskoncepciu. Avšak zabudnutie nejakej možnosti pri vhodne vytvorenom systéme výpisu výsledkov či chyby v realizácii číselných operácií považujeme za chyby z nepozornosti.

Analýzou miskoncepcií v pravdepodobnosti sa zaoberali viacerí autori. Fischbein a Schnarch [1] skúmali viacero miskoncepcií z pravdepodobnosti na väčšej vzorke žiakov a študentov a opísali nasledovné miskoncepcie: reprezentatívnosť, negatívny efekt novosti, zložené a jednoduché javy, klamné spojenie, efekt veľkosti vzorky, dostupnosť a efekt časovej osi (tzv. Falk fenomén). Tversky, Khaneman [6] a Shaughnessy [5] sa nazdávajú, že väčšina miskoncepcií z pravdepodobnosti vychádza z miskoncepcie reprezentatívnosti. Na základe prác venovaných výučbe kombinatoriky a pravdepodobnosti a nášho výskumu sme vymedzili ďalšie miskoncepcie objavujúce sa v žiackych riešeniach úloh z pravdepodobnosti: voľba konfigurácie reprezentujúcej zápis výsledkov náhodnej udalosti, nesprávna organizácia výpisu možností, zovšeobecnenie na základe jedného znaku.

V našich ukázkach hodnotiacich hárkov na diagnostikovanie žiackych miskoncepcií v pravdepodobnosti sa budeme podrobnejšie venovať nasledujúcim miskoncepciám:

- miskoncepcii reprezentatívnosti: žiaci majú tendenciu odhadovať pravdepodobnosť udalosti s prihliadnutím na to, ako dobre táto udalosť koreluje s ich životnými skúsenosťami (pozri [1]);
- miskoncepcii nesprávnej voľby konfigurácie reprezentujúcej zápis výsledkov náhodnej udalosti: pri vytvorení spoločnej predlohy (vzoru) pre výpis jednotlivých možností žiaci nezohľadňujú podmienky špecifikované v úlohe alebo nesprávne interpretujú vzťahy medzi jednotlivými objektmi;
- miskoncepcii nesprávnej organizácie výpisu možností: žiaci nevedia organizovať vypisované možnosti zavedením vhodného systému výpisu alebo využitím vhodnej schémy;
- miskoncepcii zovšeobecnenia na základe jedného znaku: žiaci nepristupujú k riešeniu úlohy komplexne, sústredia sa na jeden znak, na ktorom založia riešenie úlohy.

Úlohy zamerané na miskoncepciu reprezentatívnosti

Úlohy v prvej ukážke hodnotiaceho hárka vyžadujú od žiakov vysporiadanie sa s miskoncepciou reprezentatívnosti. Hodnotiaci hárkok odpor-

účame zadať žiakom v priebehu tematického celku, kedy žiaci už majú osvojenú Laplaceovu schému na výpočet pravdepodobnosti a ich postup pri riešení úloh je založený na kombinatorickom prístupe. Hodnotiaci hárok pozostáva z dvoch úloh, pričom prvá úloha má aj funkciu prípravnej úlohy navádzajúcej žiakov na riešenie druhej úlohy. Správna odpoveď pri oboch zadaných úlohách je c). Od žiakov je vyžadované aj zdôvodnenie odpovede, ktoré umožňuje odhaliť miskoncepciu reprezentatívnosti. Pri výbere úloh sme sa inšpirovali publikáciami, ktorých autormi sú Kustos a Zelkowski [3] a Fischbein a Schnarch [1].

1. úloha: Hody mincou

Rudo hodil šesť krát mincou a to, čo mu padlo, si zapísal. Ak mu padla hlava, zaznačil ju ako H. Ak mu padol vzor, zaznačil ho ako V. Čo je pravdepodobnejšie?

- Padla mu postupnosť HVHVHV.
- Padla mu postupnosť HHHVVV.
- Obe postupnosti sú rovnako pravdepodobné.

Zakrúžkujte správnu odpoveď a zdôvodnite svoje rozhodnutie.

Metodický komentár. Žiaci sa často domnievajú, že postupnosť „na striedačku“ je pravdepodobnejšia ako postupnosť „tri hlavy a potom tri vzory“, pretože postupnosť „na striedačku“ sa javí ako náhodnejšia, a teda aj častejšie sa vyskytujúca. Postupnosť „tri hlavy a potom tri vzory“ sa zdá byť menej pravdepodobná. Je kľúčové priviesť žiakov k zisteniu, že jednotlivé hody mincou sú nezávislé náhodné pokusy. Preto pri každom ďalšom hode je padnutie hlavy rovnako pravdepodobné ako padnutie vzoru. Každá postupnosť hláv a vzorov je teda rovnako pravdepodobná.

2. úloha: Lotéria

V číselnej lotérii „LOTO 5 z 35“ sa tipuje päť čísel od 1 po 35, pričom za výhru sa považuje uhádnutie všetkých vylosovaných čísel. Kamil podal tiket s číslami 21, 22, 23, 24, 25 a Lenka podala tiket s číslami 9, 10, 19, 25, 33. Kto má väčšiu šancu na výhru?

- Kamil má väčšiu šancu na výhru.
- Lenka má väčšiu šancu na výhru.
- Obaja hráči majú rovnakú šancu na výhru.

Zakrúžkujte správnu odpoveď a zdôvodnite svoje rozhodnutie.

Metodický komentár. Niektorí žiaci sa domnievajú, že Kamilov tiket s číslami idúcimi za sebou nemôže vyhrať. Predpokladajú, že Lenka má

väčšiu šancu na výhru, lebo si tipla čísla „náhodne“, resp. vybrala si prirodzené čísla, ktoré nenasledujú za sebou. Táto nesprávna úvaha zrejme pramení zo skúsenosti, že v lotérii vyhrávajú tikety s číslami, medzi ktorými nie je žiaden vzťah (napr. čísla nejdu za sebou, netvoríä členy aritmetickej postupnosti, netvoríä členy geometrickej postupnosti a pod.). Učiteľ má žiakov priviesť k zisteniu, že ide o päťicu čísel a nie o to, aké sú to čísla. Každá päťica čísel má preto rovnakú šancu byť vylosovaná.

Analýza žiackych riešení

Hodnotiaci hárok obsahujúci obe vyššie uvedené úlohy sme zadali 49 žiakom z dvoch tried v treťom ročníku gymnázia. Charakter prvej úlohy navádza žiakov na zistenie, že každý pokus je nezávislý, čo je kľúčové pri riešení druhej úlohy o lotérii. Riešenia žiakov sme kategorizovali podľa vybranej odpovede nasledovne:

- obe úlohy správne – 32 žiakov (65 %);
- prvá úloha správne, druhá úloha nesprávne – 16 žiakov (33 %);
- obe úlohy nesprávne – 1 žiak (2 %).

Z uvedených výsledkov usudzujeme, že žiakom z prvej skupiny pomohlo riešenie prvej úlohy porozumieť nezávislosť výsledkov za sebou idúcich hodov mincou a nedopustili sa miskoncepcie pri riešení druhej úlohy. Niektorí žiaci však poukázali na náhodnosť a nezávislosť jednotlivých pokusov len v prvej úlohe a v druhej úlohe odpovedali nesprávne. Týmto žiakom by mal pri eliminácii miskoncepcie pomôcť učiteľ.

Pri riešení prvej úlohy sa žiaci dopúšťali najmä týchto chýb:

- logická chyba: postupnosti hodov sú rovnako pravdepodobné, pretože v nich padol rovnaký počet hláv a vzorov (obr. 2);
- logická chyba: striedanie hláv a vzorov pri hádzaní mincou je pravdepodobnejšie ako niekoľko padnutí rovnakých výsledkov za sebou (obr. 3).

Pri riešení druhej úlohy sa prejavili hlavne tieto nedostatky:

- miskoncepčia reprezentatívnosti sa prejavuje v rôznych podobách. Uvádzame najčastejšie žiacke zdôvodnenia a riešenia:
 - v reálnom živote je málo pravdepodobné, že počítač vylosuje päť čísel idúcich za sebou, výherné čísla sú väčšinou náhodne rozmiestnené;

- Lenka má väčšiu šancu na výhru, pretože jej spektrum čísel je širšie;
- žiaci správne vypočítajú pravdepodobnosti vylosovania oboch päťíc čísel (sú rovnaké), avšak životná skúsenosť (vylosované čísla nejdú za sebou) ich motivuje k nesprávnej odpovedi (obr. 4);
- zdôvodnenia typu: „tiket s číslami idúcimi za sebou ešte nikdy nevyhrál“;
- traja žiaci, ktorí vybrali ako správnu odpoveď a), zdôvodňovali svoju odpoveď tým, že šanca uhádnuť aspoň jedno z čísel idúcich za sebou je väčšia, ako v prípade, že by čísla boli tipované náhodne – to však na výhru nepostačuje;
- logická chyba: obaja tipujúci majú rovnakú šancu na výhru práve preto, lebo ani jeden v skutočnosti nevyhrá, obaja tipujúci majú takmer nulovú šancu na výhru.

Zdôvodni svoju odpoveď: V oboch postupnostiach by padla hlava aj naci 3-krát so 6-tich hodov. Postupnosť v tomto prípade má je podobná, a pravdepodobnosť je rovnaká, keďže v oboch postupnostiach by rovnako padli aj hlava aj naci.

Obr. 2 Ukážka žiackeho riešenia úlohy o hodoch mincou

Zdôvodni svoju odpoveď: Nie je veľká šanca že mi padne 3x po sebe to isté. ale je rovnako pravdepodobné že sa budú stále meniť.

Obr. 3 Ukážka žiackeho riešenia úlohy o hodoch mincou

Miesto na tvoje riešenie:
 A matematického elabóratu majú rovnakú šancu. Ale v živote pravádom má väčšiu šancu vyhrať, lebo je malá šanca, že postup 5 siveho rovné čísla

Obr. 4 Ukážka žiackeho riešenia úlohy o lotérii

Odporúčania pre formatívne hodnotenie

Miskoncepciu reprezentatívnosti je možné eliminovať využitím vhodných appletov, pričom odporúčame viesť žiakov k uvedomeniu si skutočnosti, že všetky postupnosti prvkov (hodov či čísel) sú rovnako pravdepodobné. V *applete* môžeme skúmať postupnosti hláv a vzorov pri hode mincou (http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_305_g_3_t_5.html?from=category_g_3_t_5.html). Na základe simulácie alebo aj experimentovania s mincami môže učiteľ naviesť žiakov k tomu, že „minca si nepamätá, ako padla v predošlom hode“. Lotériu môžeme simulovať pomocou

generátora náhodných čísel (<https://www.itnetwork.cz/javascript-online-generator-nahodnych-random-cisel-se-zvolitelnym-rozsahem>, MIN: 1, MAX: 35, RANGE: 5) a pomocou neho naviesť žiakov k zisteniu, že každá päťica čísel má rovnakú šancu byť vylosovaná.

Ďalším spôsobom eliminácie tejto miskoncepce je isté „zjednodušenie“ zadania úlohy. Logické chyby uvedené v prípravnej úlohe by bolo možné eliminovať analýzou ďalších postupností hodov, pričom by počet hláv a vzorov nebol rovnaký. V prípade úlohy o lotérii môžeme uvažovať lotériu s piatimi číslami, pričom tipujúci podávajú tikety s dvoma číslami.

Úlohy o hrách

Úlohy zaradené do druhej ukážky hodnotiaceho hárka vyžadujú od žiakov vytvorenie správnych konfigurácií prvkov výberového priestoru a analyzovanie všetkých možností. Hodnotiaci hárok odporúčame zadať žiakom v úvode tematického celku, kedy žiaci ešte chápu pojem pravdepodobnosť na intuitívnej úrovni a pri aplikácii vzťahu na výpočet pravdepodobnosti využívajú kombinatorický prístup k zisťovaniu počtu výsledkov náhodného pokusu. Hodnotiaci hárok pozostáva z dvoch úloh, pričom prvá úloha má aj funkciu prípravnej úlohy navádzajúcej žiakov na riešenie druhej úlohy. Správna odpoveď pri oboch zadovaných úlohách je „ÁNO“, lebo v uvedených hrách majú obaja hráči rovnakú šancu na výhru. Od žiakov bolo vyžadované aj zdôvodnenie odpovede, pri ktorom sme očakávali analýzu všetkých možných priebehov daných hier. Pri výbere úloh sme sa inšpirovali publikáciami, ktorých autormi sú Płocki [4] a Kolková [2].

1. úloha: Hra s mincami

Paľo a Lucia sa pripravujú na hru s mincami. Paľo bude hádzať naraz dvoma mincami, Lucia bude hádzať jednou mincou.

- Paľo vyhráva, ak mu padne viac znakov ako Lucii.
- V opačnom prípade vyhráva Lucia.

Majú obaja hráči rovnakú šancu na výhru? Áno Nie
Zakrúžkujte správnu odpoveď a zdôvodnite svoje rozhodnutie.

Metodický komentár. Žiakom sa môže zdať, že Paľo má väčšiu šancu na výhru, pretože hádže naraz dvoma mincami. Pri riešení úlohy odporúčame viesť žiakov k vizualizácii skúmanej situácie pomocou tabuľky (obr. 5) alebo pomocou stromového diagramu. V tabuľke sú zaznačené všetky možné výsledky (č = číslo, z = znak) hodu jednou mincou (Lucia) a hodu dvoma

mincami (Paľo). Je zjavné, že Paľo vyhráva v štyroch prípadoch (sivé oblasti) a Lucia taktiež v štyroch prípadoch (biele oblasti). Hra je spravodlivá, pretože pre oboch hráčov existuje rovnaký počet možností na výhru.

Paľo	zz		
	čz		
	zč		
	čč		
		č	z
		Lucia	

Obr. 5 Riešenie úlohy o hre s mincami využitím tabuľky

2. úloha: Hra Väčšie číslo

Andrej a Barbora hrajú hru s dvoma vreckami, do ktorých nevidieť. Vieme však, že:

- vo vrecku A sú dve guľôčky označené číslom 2 a jedna guľôčka označená číslom 6,
- vo vrecku B sú tri guľôčky označené číslom 5 a jedna guľôčka označená číslom 1.

Hra prebieha nasledovne: Andrej vylosuje z vrečka A jednu guľôčku a z vrečka B vylosuje jednu guľôčku Barbora. Ten, kto vylosuje guľôčku s väčším číslom, vyhráva.

Majú obaja hráči rovnakú šancu na výhru? Áno Nie
Zakrúžkujte správnu odpoveď a zdôvodnite svoje rozhodnutie.

Metodický komentár. Žiaci môžu riešiť úlohu viacerými spôsobmi. Aj v tomto prípade je vhodné, aby žiaci pri riešení úlohy zostavili rozpis všetkých možných priebehov hry. Žiaci by si mali uvedomiť, že pri vypisovaní možností je potrebné rozlišovať guľôčky s rovnakou nominálnou hodnotou (obr. 6).

Andrejove guľôčky	2	2	6
Barborine guľôčky			
5	52	52	56
5	52	52	56
5	52	52	56
1	12	12	16

Obr. 6 Riešenie úlohy o hre s guľôčkami využitím tabuľky

Z tabuľky vidno, že v šiestich prípadoch vyhráva Andrej (biele oblasti) a v šiestich prípadoch vyhráva Barbora (sivé oblasti). Hra je preto spravodlivá. Úlohu Hra Väčšie číslo sme najprv zadali samostatne bez prípravnej úlohy žiakom dvoch tried v druhom ročníku na gymnáziu. Priemerná úspešnosť žiakov bola pomerne nízka – približne 43 %. Aj z tohto dôvodu sme sa rozhodli zadať túto úlohu v kombinácii s jednoduchšou prípravou úlohou. Zisťovali sme, či sa priemerná úspešnosť žiakov pri riešení tejto úlohy zvýši.

Analýza žiackych riešení

Hodnotiaci hárok obsahujúci obe vyššie uvedené úlohy sme zadali 40 žiakom dvoch tried v treťom ročníku na gymnáziu. Charakter prvej úlohy navádza žiakov na riešenie pomocou výpisu možností. Táto stratégia riešenia môže byť vhodne využitá aj pri riešení druhej úlohy. Riešenia žiakov sme kategorizovali podľa vybranej odpovede nasledovne:

- obe úlohy správne – 19 žiakov (48 %);
- iba prvá úloha správne – 6 žiakov (15 %);
- iba druhá úloha správne – 5 žiakov (12 %);
- obe úlohy nesprávne – 10 žiakov (25 %).

V oboch testovaných skupinách využívala väčšina žiakov metódu vypisovania možností. Niektorí žiaci si pri riešení vytvorili aj tabuľku so všetkými možnosťami (obr. 7).

	Z	H
HH	L	L
HZ	L	P
HZ	L	P
ZZ	P	P

	5	5	5	1
2	B	B	B	A
2	B	B	B	A
6	A	A	A	A

Obr. 7 Žiacke riešenia prvej a druhej úlohy o hrách využitím tabuľky

V žiackych riešeniach sa prejavili hlavne tieto miskoncepce a chyby:

- miskoncepcia nesprávnej voľby konfigurácie: žiaci pri zápise možností nerozlišili možnosti hlava-znak a znak-hlava, v dôsledku čoho nebol počet možností na víťazstvo pre oboch hráčov rovnaký (obr. 8);
- miskoncepcia nesprávnej organizácie výpisu možností: pozorovali sme, že žiaci pri riešení prvej úlohy neuviedli niektoré možnosti v dôsledku

nevyužitia prehľadného systému pri porovnávaní výsledkov hodov oboch hráčov, resp. pri riešení druhej úlohy sa zamerali len na situácie, kde jeden z hráčov určite vyhrá, resp. sa zamerali na niektoré možné priebehy hry;

- miskoncepčia zovšeobecnenia na základe jedného znaku: žiaci pri riešení prvej úlohy porovnávali len pravdepodobnosti padnutia znaku, resp. znakov. Nazdávali sa, že Paľo má väčšiu šancu na výhru, pretože má viac mincí (obr. 9), resp. pri riešení druhej úlohy sa nazdávali, že Barbora má väčšiu šancu na výhru, pretože má viac guľôčok s väčším číslom (obr. 10), resp. Andrej má väčšiu šancu na výhru, pretože má „neporaziteľnú“ guľôčku s číslom 6 (obr. 11);
- chyby z nepozornosti: žiaci pri riešení prvej úlohy pri systematickom výpise možností „zabudli“ len na jednu, dve možnosti, resp. pri riešení druhej úlohy nesprávne spočítali počet víťazstiev jednotlivých hráčov. Pri chybách z nepozornosti odporúčame naviesť žiakov pomocou kontrolných otázok k odhaleniu chýbajúcej možnosti či nevedenia niektorého výsledku hry.

Miesto na tvoje riešenie:

$$L: H/2$$

$$P: HH, HZ, ZH, ZZ$$

Zdôvodni svoju odpoveď:
Pretože Lucia má 50% šancu, že padne znak a Paľo má len ~~33%~~ 33% šancu, že padne 2 znaky.

Obr. 8 Ukážka žiackeho riešenia úlohy o hre s mincami

Zdôvodni svoju odpoveď:
pri Paľovi je väčšia pravdepodobnosť, že mu padne znak 2-krát, keďže má 2 mince. Hra určite nie je spravodlivá.

Obr. 9 Ukážka žiackeho riešenia úlohy o hre s mincami

Zdôvodni svoju odpoveď:

Niekoľko šancu má Barbora, pretože má 3 g. s vyšším číslom, namiesto Andrej má iba 1 takú g.

Obr. 10 Ukážka žiackeho riešenia úlohy o hre s guľôčkami

Zdôvodni svoju odpoveď:
Je väčšia pravdep., že vyhrá Andrej pretože aj keď si Barbora vyloží 5 a Andrej 6 stále vyhrať on.

Obr. 11 Ukážka žiackeho riešenia úlohy o hre s guľôčkami

Prvú úlohu vyriešilo správne 25 žiakov (63 %) a druhú úlohu 24 žiakov (60 %). Úspešnosť žiakov pri riešení druhej úlohy sa v porovnaní s naším predošlým testovaním zvýšila. Nazdávame sa, že prípravná úloha pomohla žiakom pri riešení druhej úlohy. Pri analýze žiackych riešení sme si všimli, že žiaci, ktorí v prvej úlohe dospeli k správne riešeniu systematickým výpisom možností, mali vyššiu úspešnosť pri riešení druhej úlohy.

Odporúčania pre formatívne hodnotenie

Miskoncepciu nesprávnej voľby konfigurácie je vhodné eliminovať reálnymi pokusmi hádzania dvoch mincí a vyhodnotením výsledkov. Väčší počet realizovaných pokusov a prehľadné vyhodnotenie výsledkov ponúkajú *applety* dostupné na internete (napríklad <http://syzygy.virtualave.net/multicointoss.htm>). Na základe analýzy výsledkov by mal učiteľ od žiakov vyžadovať odpoveď na otázku, či pri hode dvoma mincami padajú častejšie dve rovnaké alebo dve rôzne strany. Učiteľ by mal priviesť žiakov k poznaniu, že aj keby mali mince rovnakú nominálnu hodnotu, rovnaký rok výroby, a pod., vždy sú to dva rôzne objekty.

Podobné nedostatky v žiackych riešeniach sa môžu prejavíť aj pri výbere guľôčok z vrečka. Aj v tomto prípade predstavujú tri guľôčky označené číslom 5 tri rôzne objekty a vo výpise možností je potrebné ich rozlišovať. Pri objavení sa chybných riešení spojených s uvedeným typom chyby by učiteľ mohol zadať žiakom úlohu: Vo vrečku sú tri biele a jedna modrá guľôčka. Náhodne vyberieme z vrečka dve guľôčky. Čo je pravdepodobnejšie, že vyberieme z vrečka guľôčky rovnakej alebo rôznej farby? Z vlastnej skúsenosti vieme, že niektorí žiaci rozlíšia len dve možnosti: buď sú obidve guľôčky biele, alebo majú guľôčky rôznu farbu. Preto sú obidva výsledky rovnako pravdepodobné. V uvedenej úlohe je to náhodou správny výsledok. Ale, ak by sme pridávali biele guľôčky do vrečka, stále by bol výber dvoch bielych guľôčok rovnako pravdepodobný, ako výber dvoch guľôčok rôznej farby? Odpoveď by mala žiakov priviesť k rozlišovaniu bielych guľôčok.

Pri eliminácii miskoncepce nesprávnej organizácie výpisu možností je vhodné trénovať so žiakmi systematický výpis všetkých možností pri riešení jednoduchších úloh. Učiteľ by mal žiakov viesť k prehľadnému usporiadaniu možností vo forme tabuľky alebo stromového diagramu. Žiaci by mali vedieť využívať ukotvenie jedného prvku a popis analogických vetiev v stromovom diagrame, aby vedeli využívať tento postup aj pri riešení úloh s väčším počtom prvkov.

Pri eliminácii miskoncepce zovšeobecnenia na základe jedného znaku odporúčame viesť žiakov k tomu, aby sa nespoliehali len na intuíciu, ale aby sa snažili podložiť svoje riešenie matematickými argumentmi.

Záver

Učiteľ pri výučbe pozoruje prácu žiakov, kladie im otázky a analyzuje ich odpovede. Pre efektívne aplikovanie formatívneho hodnotenia je dôležité, aby učiteľ poznal typické chyby žiakov a miskoncepce, ktorých príčinou je neporozumenie základných pojmov a vzťahov. Poznanie zdrojov miskoncepcií umožňuje učiteľovi zadávať žiakom otázky, podnecovať diskusiu medzi žiakmi a poskytovať žiakom cieleňú spätnú väzbu, ktorá im umožní porozumieť, v čom sú ich predstavy mylné a prečo sú ich úvahy využité pri riešení úloh chybné. Vhodné aplikovanie formatívneho hodnotenia môže pomôcť odhaľovať a eliminovať miskoncepce už v priebehu výučby a prispieť k zlepšeniu učebných výsledkov.

Podakovanie

Príspevok vznikol s podporou projektu VEGA 1/0265/17 „Formatívne hodnotenie vo výučbe prírodných vied, matematiky a informatiky“.

Literatúra

- [1] *Fischbein, E., Schnarch, D.*: The Evolution with Age of Probabilistic: Intuitively Based Misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, roč. 28 (1997), č. 1, s. 96–105.
- [2] *Kolková, M.*: Matematické vzdelávanie a rozvoj kľúčových kompetencií na úrovni reflexie (Dizertačná práca). Univerzita P. J. Šafárika, Košice, 2011.
- [3] *Kustos, P., Zelkowski, J.*: Grade-continuum trajectories of four known probabilistic misconceptions: What are students' perceptions of self-efficacy in completing probability tasks? *The Journal of Mathematical Behaviour*, roč. 32 (2013), č. 3, s. 508–526.
- [4] *Plocki, A.*: Pravdepodobnosť okolo nás: stochastika v úlohách a problémoch. Katolícka univerzita v Ružomberku, Ružomberok, 2007.
- [5] *Shaughnessy, J. M.*: Misconceptions of probability: From systematic errors to systematic experiments and decisions. In: A. P. Schulte (Ed.), *Teaching statistics and probability*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA, 1981, s. 90–100.
- [6] *Tversky, A., Kahneman, D.*: Judgement under uncertainty: Heuristics and biases. In: Kahneman, D., Slovic, P., Tversky, A. (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982, s. 3–22.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 245 a 246 můžete zaslat nejpozději do 20. 9. 2018 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v \TeX ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 245

Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, které pro všechna reálná čísla x vyhovují rovnici

$$f(2x) + f(-2x) = x(f(3x) + x^3).$$

Józef Kalinowski (Kalety)

Úloha 246

Kruhový terč s průměrem 12 zasáhlo 10 šípů. Rozhodněte, zda vzdálenost mezi každou dvojicí šípů může být aspoň 5.

Pavel Calábek

Dále uvádíme řešení úloh 241 a 242, jejichž zadání najdete v prvním čísle tohoto (26.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 241

Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y, z platí nerovnost

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 \geq \frac{2}{3}(xy + yz + zx + x + y + z).$$

Kdy nastane rovnost?

Jaroslav Švrček

Řešení. Nerovnost ekvivalentně upravíme do tvaru

$$(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2) + \\ + (x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (z^2 - 2z + 1) \geq 0$$

neboli

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 \geq 0.$$

Poslední nerovnost evidentně platí, jelikož druhá mocnina reálného čísla je číslo nezáporné. Rovnost v ní nastane, právě když všechny sčítance na levé straně budou rovny nule, tedy právě když $x = y = z = 1$.

Jiné řešení. Podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem platí pro libovolná reálná čísla x a y

$$\frac{1}{3}(x^2 + y^2) \geq \frac{2}{3}\sqrt{x^2y^2} = \frac{2}{3}|xy| \geq \frac{2}{3}xy.$$

Rovnost nastane, právě když nastane rovnost v obou postupných nerovnostech, tedy právě když $x = y$. Podobně platí

$$\frac{1}{3}(y^2 + z^2) \geq \frac{2}{3}yz, \quad \frac{1}{3}(z^2 + x^2) \geq \frac{2}{3}xz,$$

přičemž rovnosti nastávají, právě když $y = z$ a $z = x$. Pokud v první z právě dokázaných nerovností položíme $y = 1$, ve druhé $z = 1$ a ve třetí $x = 1$, dostaneme nerovnosti

$$\frac{1}{3}(x^2 + 1) \geq \frac{2}{3}x, \quad \frac{1}{3}(y^2 + 1) \geq \frac{2}{3}y, \quad \frac{1}{3}(z^2 + 1) \geq \frac{2}{3}z,$$

ve kterých nastává rovnost pro $x = 1$, $y = 1$ a $z = 1$.

Sečtením všech šesti výše uvedených nerovností pak dostaneme požadovanou nerovnost, ve které rovnost nastává, právě když $x = y = z = 1$.

Jiné řešení (Alexy Watczak). Čtveřice $(x, y, z, 1)$ a $(x, y, z, 1)$ jsou „soudržné“ uspořádané, proto podle permutační nerovnosti současně platí

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1^2 \geq x \cdot y + y \cdot z + z \cdot 1 + 1 \cdot x,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1^2 \geq x \cdot z + y \cdot 1 + z \cdot x + 1 \cdot y,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1^2 \geq x \cdot 1 + y \cdot x + z \cdot y + 1 \cdot z.$$

Sečtením těchto nerovností a vydělením 3 dostaneme požadovanou nerovnost.

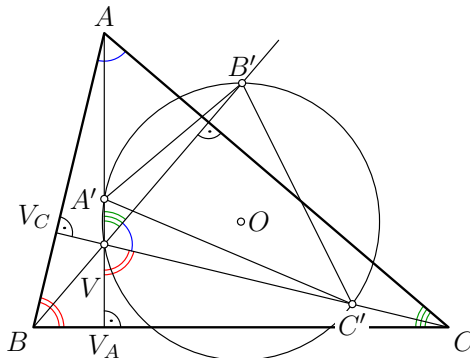
Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z ETH Zürich a *Alexy Watczak*, LO Tarnowskie Góry.

Úloha 242

Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a V průsečík jeho výšek (ortocentrum). Předpokládejme, že kružnice $k(O, |OV|)$ protíná jeho výšky (jako přímky) z vrcholů A, B, C kromě bodu V po řadě v bodech $A' \neq V, B' \neq V, C' \neq V$. Dokažte, že trojúhelník $A'B'C'$ je podobný trojúhelníku ABC . *Šárka Gergelitsová*

Řešení. Pokud je trojúhelník pravoúhlý, jeho průsečíkem výšek je vrchol, u kterého svírají stany pravý úhel, bez újmy na obecnosti jej označme C a O je střed přepony AB . Potom platí $A' = A, B' = B$ a bod C' je souměrně sdružený s bodem C podle přímky AB . Snadno nahlédneme, že v tomto případě tvrzení úlohy platí, protože trojúhelník $A'B'C'$ je souměrně sdružený s trojúhelníkem ABC podle přímky AB .

Nyní předpokládejme, že trojúhelník ABC je ostroúhlý. Označme V_A, V_C patu výšek z vrcholů A resp. C (obr. 1). Pravoúhlé trojúhelníky CBV_C a CVV_A se mimo pravého úhlu shodují také ve vnitřním úhlu při vrcholu C , jsou proto podobné. Shodují se tak i ve třetím vnitřním úhlu, proto má úhel V_AVC stejnou velikost jako vnitřní úhel trojúhelníku ABC při vrcholu B . Tedy je to úhel, který svírají výšky trojúhelníku ABC z vrcholů A a C . Podobně zjistíme, že výšky z vrcholů B a A svírají úhel jehož velikost je rovna velikosti vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu C , resp. že výšky z vrcholů C a B svírají úhel, jehož velikost je rovna velikosti vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu A .



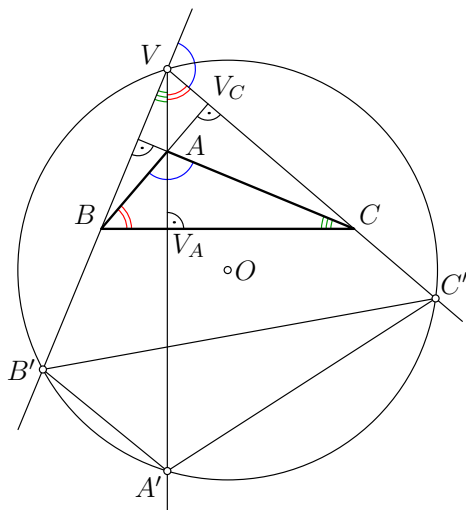
Obr. 1

Body A', B', C' a V leží na jedné kružnici. Uvažujme oblouky $A'B'C'$, $B'C'A'$ a $C'A'B'$ této kružnice. Pokud je bod V vnitřním bodem těchto

oblouků (jako u oblouků $B'C'A'$ a $C'A'B'$ na obr. 1), je vidět podle věty o obvodovém úhlu v našem případě tětiva $A'B'$ pod stejným úhlem z vrcholů C' a V , tedy velikost vnitřního úhlu při vrcholu C' trojúhelníku $A'B'C'$ je stejná jako velikost vnitřního úhlu při vrcholu C trojúhelníku ABC . Stejně dokážeme, že velikost vnitřního úhlu při vrcholu A' trojúhelníku $A'B'C'$ je stejná jako velikost vnitřního úhlu při vrcholu A trojúhelníku ABC .

Pokud není V vnitřním bodem těchto oblouků (jako u oblouku $A'B'C'$ na obr. 1) potom součet velikostí vnitřních úhlů v našem případě při vrcholech B' a V tětivového čtyřúhelníku $A'B'C'V$ je rovna 180° , tedy velikost vnějšího úhlu při vrcholu V je rovna velikosti vnitřního úhlu při vrcholu B' a trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ se tak shodují i ve velikosti vnitřních úhlů při vrcholech B a B' . Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou proto podobné, jak jsme měli dokázat.

Zbývá dokázat tvrzení úlohy pro trojúhelník tupoúhlý. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že tupý úhel je při vrcholu A (obr. 2).



Obr. 2

Stejně jako v předcházejícím případě můžeme dokázat, že výšky z vrcholů A a B svírají úhel o velikosti vnitřního úhlu při vrcholu C trojúhelníku ABC a podobně výšky z vrcholů A a C svírají úhel o velikosti vnitřního úhlu při vrcholu B . Jelikož vnitřní úhel při vrcholu A je tupý,

svírají výšky z vrcholů B a C úhel o velikosti vnějšího úhlu při vrcholu A trojúhelníku ABC .

Stejně jako v předcházejícím případě pak dokážeme, že velikost vnitřních úhlů při vrcholech B' a C' trojúhelníku $A'B'C'$ je stejná jako velikost vnitřních úhlů při vrcholech B a C trojúhelníku ABC , což postačuje k jejich podobnosti.

Poznámka. Jelikož (podle předpokladů) čtyři různé body A' , B' , C' a V leží na téže kružnici, je bod V vnitřním bodem právě dvou z výše zmíněných oblouků a vnějším bodem třetího. Dále si můžeme všimnout, že uvedené tvrzení platí nejen pro kružnici se středem v bodě O , ale pro libovolnou kružnici, která prochází bodem V a protíná výšky trojúhelníku ABC ve třech různých bodech.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

Po uzávěrce minulého čísla ještě redakce obdržela správná řešení úloh 239 a 240 *Alexyho Walczaka*, LO Tarnowskie Góry.

Pavel Calábek

Elektromagnetická indukce v obvodu s cívkou

OLDŘICH LEPIL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V roce 2017 vydalo nakladatelství Prometheus sedmé přepracované vydání učebnice *Fyzika pro gymnázia. Elektřina a magnetismus* [1], jejíž první vydání vyšlo již v roce 1992. Učebnice vznikla v návaznosti na tzv. federální učebnice vydávané v 80. letech (viz [2]). Zpracování učiva v této učebnici v podstatě odpovídá standardu, jak se fyzika tradičně vyučuje na středních školách v mnoha zemích. Průběžně byla opravována občasná nedopatření v textu učebnice a byly prováděny menší změny v obsahu a pojetí učiva, které si vyžádal zejména vývoj technických aplikací učiva elektromagnetismu. Autoři v průběhu let nezaznamenali ze strany učitelů středních škol nějaké závažnější výtky. Nedávno však došel na adresu autora mail, jehož pisateli se náhodně dostala učebnice do ruky, a projevil s jejím obsahem nesouhlas, patrný z krátké pasáže vyjmuté z obsáhlého mailu:

...zatemnění v duších (rozuměj studentů) působí rozpory ve výkladu magneto-elektrické indukce a vágně definovaného indukovaného napětí v cívce. Kupodivu to svědčí o zmatku v hlavách fyziků, na čemž mají zásluhu i vysokoškolské učebnice (Fuka a Havelka, Horák a Krupka, Klimeš a Kracík a Ženíšek), při vši úctě k jejich autorům. Naproti tomu elektrotechnici v tom mají jasno, neboť v technice neplatí, že „papír všechno snese“. Tam je nutno konkrétně vědět, jak příslušné napětí změřím a spočítám v konkrétním uzlu obvodu. Váš výklad se bohužel přimyká k oněm rozporným „papírovým tygrům“...

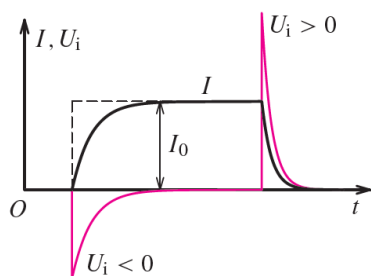
V čem tedy je problém, vzbuzující tak zásadní nesouhlas pisatele. Jde v podstatě o znaménko minus ve vyjádření vztahu pro indukované napětí v cívce, kterou prochází časově proměnný proud. Tradice tohoto učiva se opírá o Faradayův zákon elektromagnetické indukce (pisatel pro tento děj používá označení magneto-elektrická indukce) a indukované elektromotorické napětí v cívce je vyjádřeno v učebnici vztahem (viz [1, s. 134])

$$U_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

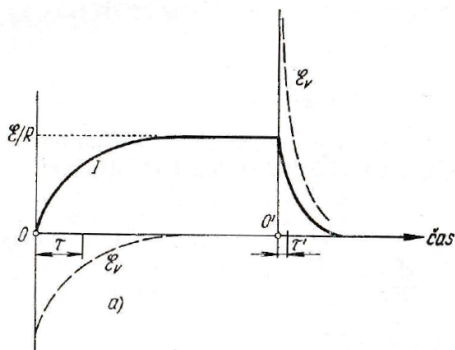
Jaký postoj k tomuto údajnému problému zaujmout, naznačíme podrobnějším rozbořem přechodného děje v obvodu tvořeném sériovým spojením rezistoru a cívky (obvod RL), který je v učebnici součástí rozšiřujícího učiva na příloženém CD (viz článek R6.3).

Přechodný děj v sériovém obvodu RL

Při přechodném ději, tzn. připojení obvodu RL ke zdroji napětí, popř. jeho odpojení od zdroje dochází v cívce ke vzniku indukovaného napětí, jehož časový průběh a polarita je patrná z obr. 1 ([1, obr. R6-7]). Tato časová závislost napětí a proudu se vyskytuje v naprosté většině učebnic, nejen středoškolských, ale i vysokoškolských, jak dokládá obrázek z jedné z nejkvalitnějších českých vysokoškolských učebnic, kterou je stále nepřekonaná učebnice *Z. Horáka a F. Krupky* [3] (obr. 2).

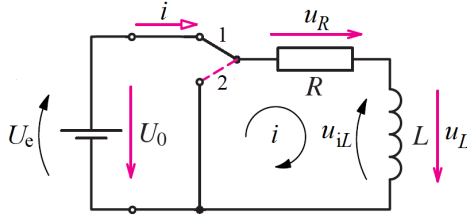


Obr. 1



Obr. 2

Podívejme se na přechodný děj v obvodu RL detailněji s použitím upraveného obrázku z učebnice (obr. 3; [1, obr. R6-6]).



Obr. 3

Zdroj budeme považovat za ideální ($R_i = 0$) a děj, kterým ve zdroji dochází k přenosu energie, je vyznačen orientovaným obloučkem. Tomu ději odpovídá elektromotorické napětí U_e a na svorkách zdroje je svorkové napětí U_0 . V našem případě ideálního zdroje je $U_e = U_0$. Přepnutím spínače do polohy 1 je ke zdroji připojen obvod RL a proběhne přechodný děj. Po jeho odeznění nastane ustálený stav s konečnou hodnotou proudu a napětí na obvodových prvcích. V průběhu přechodného děje se mění hodnoty proudu i v obvodu a napětí u_R na rezistoru.

Mění se ovšem také napětí na cívce. Můžeme ho interpretovat dvojím způsobem: buď jako indukované elektromotorické napětí u_{iL} (na obr. 3 je vyznačeno orientovaným obloučkem), nebo jako napětí na svorkách cívky u_L . Napětí u_{iL} charakterizuje fyzikální děj, který je spojen s přeměnou elektrické energie na energii magnetického pole cívky a jeho polarita odpovídá Lenzovu zákonu. Svorkové napětí u_L nevyplývá z fyzikální podstaty děje a je, podobně jako svorkové napětí U_0 , měřitelné připojením voltmetru. Jeho polaritu určuje postupný pokles elektrického potenciálu v uzavřené smyčce tvořené obvodem. Takto chápané svorkové napětí je upřednostňováno v teorii elektrických obvodů, což vyhovuje potřebám elektrotechniků při měření obvodových veličin.

Přechodný děj popíšeme rovnicemi vyjadřujícími 2. Kirchhoffův zákon pro daný obvod. Podle tohoto zákona je součet napětí na obvodových prvcích roven součtu elektromotorických napětí v uzavřené smyčce. Platí tedy:

a) pro indukované napětí u_{iL}

$$u_R = U_e + u_{iL} \implies Ri = U_e - L \frac{di}{dt},$$

b) pro svorkové napětí u_L

$$u_R + u_L = U_0 \implies Ri + L \frac{di}{dt} = U_0.$$

Za předpokladu, že $U_e = U_0$, vedou oba popisy přechodného děje ke stejnému výsledku, kterým je diferenciální rovnice

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{U_0}{L}. \quad (1)$$

Přepojením spínače do polohy 2 je obvod RL zkratován, indukované napětí na cívce je zdrojem proudu v obvodu a přechodný děj popisuje diferenciální rovnice

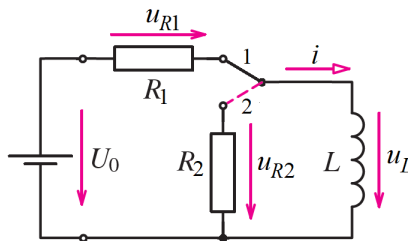
$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0. \quad (2)$$

Řešení těchto rovnic, kterému odpovídá exponenciální závislost jednotlivých veličin na čase, se však vymyká možnostem běžné středoškolské výuky. Obsahují ho vysokoškolské učební texty, např. také učebnice [3]. Pro zájemce lze doporučit studijní text pro řešitele Fyzikální olympiády dostupný na webu [4]. Ve stručné podobě je obsaženo i ve Slovníčku fyzikálních pojmů, který je na CD přiloženém k učebnici.

Na středoškolské úrovni však jednoduše a velmi názorně ukážeme průběh přechodného děje pomocí počítačového modelu, který si mohou snadno vytvořit sami žáci.

Model přechodného děje

Počítačový model je vlastně numerickým řešením rovnice (1), popř. (2) postupem, označovaným také jako *dynamické modelování* (podrobněji viz např. [5]). Postup je takový, že z rovnice (1) určíme přírůstek di proudu v obvodu za časový interval dt , který označíme jako *časový krok*. Model pak tvoří posloupnost rovnic, jejichž výpočet se opakuje, až je dosaženo doby, kterou je možné považovat za odeznění přechodného děje (di v modelu nepředstavuje diferenciál proudu di , ale diferenci hodnot proudu mezi jednotlivými kroky výpočtu). Obvod, v němž probíhá modelovaný přechodný děj, je na obr. 4.



Obr. 4

Model přechodného děje v sériovém obvodu RL :

$$\begin{aligned} di &= \frac{U_0 - R_1 i_i}{L} dt \\ i_{i+1} &= i_i + di \\ u_R &= R_1 i_{i+1} \\ u_L &= L \frac{di}{dt} \\ t_{i+1} &= t_i + dt \end{aligned}$$

Obdobně vytvoříme model pro případ, že se spínač nachází v poloze 2. Model se nezmění, jen pro přírůstek proudu najdeme z rovnice (2) vztah

$$di = -\frac{R_2 i_i}{L} dt.$$

Model můžeme vytvořit různými postupy. V nejjednodušším případě použijeme tabulkový kalkulátor MS Excel. Tento postup je poměrně pracný a čtenáři ho usnadníme tím, že hotové modely přechodných dějů jsou přiloženy k tomuto příspěvku (do sešitu MS Excel přejdeme kliknutím [ZDE](#)).

Velmi snadno můžeme modely vytvořit použitím speciálního softwaru pro modelování fyzikálních dějů. Následující ukázka je vytvořena programem Modellus 4.01. Představuje přechodný děj v sériovém obvodu RL s parametry $L = 1$ H, $R_1 = 2$ Ω , $R_2 = 2,8$ Ω . Počátečními podmínkami jsou napětí zdroje $U_0 = 10$ V a počáteční proud $i = 0$. Výpis programu a časový diagram všech veličin přechodného děje je na obr. 5.

Model potvrzuje teoretický výsledek týkající se *časové konstanty* τ přechodného děje, která je u obvodu RL určena vztahem $\tau = L/R$. V našem případě $\tau = 0,5$ s (zvolené hodnoty příliš neodpovídají realitě, ale v modelu je dána přednost jednoduchosti před hodnotami odpovídajícími reálným obvodovým prvkům).

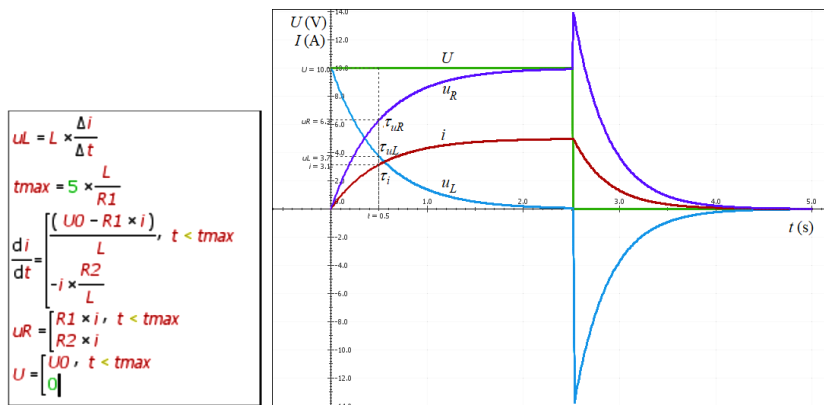
Za dobu časové konstanty vzroste napětí u_R na hodnotu

$$u_R(\tau) = (1 - e^{-1})U_0 = 0,63U_0$$

a napětí u_L se zmenší na hodnotu

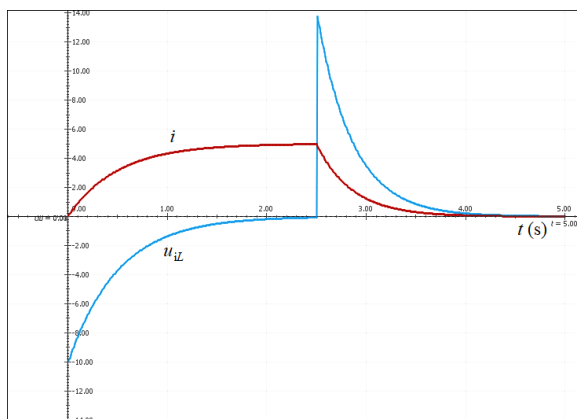
$$u_L(\tau) = e^{-1}U_0 = 0,37U_0,$$

kde e je Eulerovo číslo (podrobněji viz [4]). Přechodný děj teoreticky odeznívá nekonečně dlouho, avšak na modelu se můžeme přesvědčit, že za dobu $t = 5\tau$ již napětí na rezistoru dosahuje hodnoty $u_R = 0,99U_0$. Podle toho je v modelu také nastavena doba, za kterou přechodný děj přejde do druhé fáze děje, tzn. přepnutí spínače do polohy 2.



Obr. 5

Pokud bychom chtěli zobrazit graf časové závislosti indukovaného napětí na cívce, pozměníme znaménko ve výpočtu indukovaného napětí a získáme časový diagram shodný s učebnicí (obr. 6).



Obr. 6

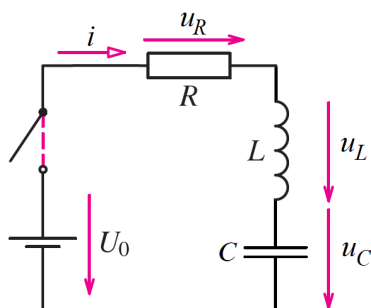
Přechodný děj v sériovém obvodu RL se týká tzv. *obvodu prvního řádu*, kdy obvod obsahuje jen jeden obvodový prvek schopný akumulovat energii, tzn. buď cívku, nebo kondenzátor. Zajímavý je průběh přechodného děje v *obvodu druhého řádu*, který obsahuje cívku i kondenzátor. Ukážeme to na přechodném ději v obvodu s RLC v sérii.

Uvažujeme obvod s RLC v sérii, který je připojen ke zdroji stejnosměrného napětí U_0 (obr. 7). Rovnice vyjadřující 2. Kirchhoffův zákon má tvar

$$u_R + u_L + u_C = U_0 \implies Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = U_0.$$

a pro přírůstek proudu di platí

$$di = \frac{U_0 - Ri - \frac{q}{C}}{L} dt.$$



Obr. 7

Poněvadž obvod má jak indukčnost, tak kapacitu, jsou splněny podmínky pro vznik oscilací a obvod je vlastně elektromagnetickým tlumeným oscilátorem. Odpor obvodu určuje tlumení kmitů. Po připojení obvodu ke zdroji napětí se přechodný děj projeví vznikem elektrických kmitů s úhlovou frekvencí

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}},$$

kde $\omega = 1/\sqrt{LC}$ je úhlová frekvence vlastního kmitání netlumeného elektromagnetického oscilátoru a $\delta = R^2/4L^2$ je součinitel tlumení. Kritické tlumení nastane, když $\omega_0 = \delta$, a z této podmínky vyplývá hodnota odporu,

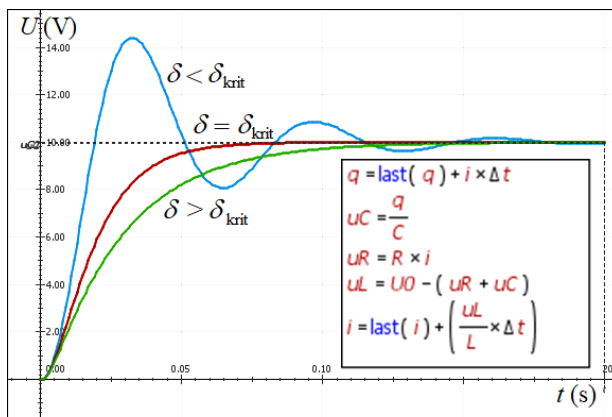
při němž se kmitání obvodu v nejkratší době utlumí:

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

V našem modelu je při zadaných výchozích parametrech ($L = 1 \text{ H}$ a $C = 100 \text{ } \mu\text{F}$) $R_k = 200 \text{ } \Omega$. Děj je popsán modelem:

$$\begin{aligned} di &= \frac{U_0 - R_1 i_i}{L} dt \\ q_i &= C u_C \\ q_{i+1} &= q_i + i_i \cdot dt \\ u_C &= \frac{q_{i+1}}{C} \\ u_R &= R_1 i_i \\ u_L &= U_0 - u_R - u_C \\ t_{i+1} &= t_i + dt \end{aligned}$$

Grafický výstup modelu vytvořeného programem Modellus je na obr. 8. Model v programu MS Excel je v příloze k příspěvku. Pro úplný přehled základních typů přechodných dějů jsou modely v příloze doplněny také modelem přechodného děje v sériovém obvodu RC .



Obr. 8

Závěr

Příspěvek ukázal, že v úvodu citovaná kritika pisatele mailu je tak trochu „bouře ve sklenici vody“. Je však možné souhlasit, že by žáci měli být s možnými interpretacemi napětí na cívce seznámeni. Pomohlo by jim to také lépe pochopit 2. Kirchhoffův zákon, s nímž se setkávají převážně jen v souvislosti s obvody tvořenými rezistory.

Výklad dějů v elektrických obvodech s parametry R , L a C se ve středoškolské fyzice tradičně omezuje převážně na obvody střídavého proudu, tedy na děje odpovídající harmonickému průběhu obvodových veličin. To je dáno návazností výkladu na využití střídavých proudů v energetice. Pro praxi je však stále významnější uplatnění dějů v obvodech s R , L a C v elektronice, v obvodech zpracovávajících signály různého časového průběhu. Vývoj elektroniky zejména v komunikační technice jednoznačně směřuje ve stále větší míře k digitálním signálům, charakteristickým skokovými změnami elektrického napětí a proudu. Proto by i ve středoškolské výuce fyziky měla být větší pozornost věnována přechodným dějům, kdy elektrický obvod přechází z jednoho stabilního stavu do jiného stabilního stavu, popř. dochází ke skokové změně napětí periodicky.

Literatura

- [1] Lepil, O., Šedivý, P.: Fyzika pro gymnázia. Elekřina a magnetismus. 7. přepracované vydání, Prometheus, Praha, 2017.
- [2] Lepil, O.: K vývoji učebnic fyziky pro střední školu gymnaziálního typu. MFI, roč. 22 (2014), č. 4, s. P16. Dostupné na: <http://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/78/0>
- [3] Horák, Z., Krupka, F.: Fyzika. SNTL/SVTL, Praha, 1966.
- [4] Vybíral, B.: Elektromagnetická indukce. Studijní text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku. Dostupné na: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/indukce.pdf>
- [5] Lepil, O., Richterek, L.: Dynamické modelování, Repronis, Ostrava, 2007. Dostupné na: http://ufm.sgo.cz/ke_stazeni.php

Jednoduché elektronické obvody s možným univerzálním použitím

PETR ADÁMEK – PAVEL VARNUŠKA

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Současný nedostatek budoucích mladých fyziků, techniků, tvůrců je třeba nahradit. Proces výchovy závisí také na jejich motivaci a dlouhodobé přípravě ve fyzice a praktickým seznámením s fyzikálními aplikacemi a technikou už od základní školy. Nedostatek techniků souvisí s jejich odbornou přípravou a samozřejmě s konkrétním zaměřením na vhodné prezentace, animace atd., které jsou stále dokonalejší po všech stránkách výuky, včetně hygienické a ekonomické [1, 2]. Poněkud se vytrácí praktická i tvůrčí výuka, která vede ke kontaktu s reálným prostředím, reálnou konstrukcí zařízení všech druhů zaměření. Praktická výuka tak ztrácí styk s realitou a ochuzuje žáky o základní a zásadní vjemy, informace osobního kontaktu s materiálem, součástkami, nosným materiálem, procesem spojování, zapojování, ožívování i jeho následnými fyzikálními vlastnostmi včetně pevnosti a hmotnosti. Žáci jsou tak ochuzováni o tyto vstupní informace, které bychom jim poměrně obtížně sdělovali a pomocí abstraktních vyjádření tak nahrazovali jejich vlastní smyslové vnímání. Po vykonání tvůrčí činnosti je dalším přínosem zisk i nefyzikálních neexaktních osobních informací o vlastní pečlivosti, přesnosti, trpělivosti aj. Žáci se navíc dovědí něco o sobě z hlediska rozvoje osobnosti. Praktická výuka je někdy pro žáky obtížná, pro učitele náročná na čas, materiál vhodný na výuku i volbu témat vhodných pro praktickou výuku. V současnosti jsou na trhu běžné a široce rozšířené produkty spotřební elektroniky s velmi různorodou možností aplikací, následované rozvojem a distribucí mikroprocesorových stavebnic různé složitosti i úrovně náročnosti. Hlavně stavebnic typu [3, 4], určených začínajícím inženýrům a technikům pro profesionální aplikace, ze kterých je těžké vytipovat elektronické zajímavé konstrukce, vhodné pro elementární výuku elektronických obvodů.

Pro účely výuky byly vytipovány a vybrány elektronické obvody, které se vyznačují relativně jednoduchou konstrukcí, snadnou realizovatelností a v neposlední řadě nízkými náklady. Pro výuku fyziky mohou elektronické

obvody s tranzistory posloužit pro praktické seznámení s elementární elektronikou i reálnými fyzikálními jevy. Pro aplikovanou informatiku ve spojení s elektronikou poslouží vybrané obvody jako funkční periferní zařízení u procesorových stavebnic jako možné hardwarové rozšíření systému i projektu konkrétního programového vybavení pro řízení procesu. Těmito obvody je číslicový zdroj malého a přesného napětí s jednoduchým A/D převodníkem s aktivním napěťovým výstupem a dále převodník proud/napětí, přepínatelný pro různé proudové intenzity. Toto napětí je pak snáze měřitelné analogově – digitálním převodníkem, osazovaným v mikroprocesorech. Všechna vybraná zapojení by měla sloužit pro badatelsky orientovanou výuku [5, 6], „learning by doing“ nebo podobných přístupů ve shodě s RVP [7], na různých stupních škol. Příspěvek předkládá výběr obvodů, jejich technické řešení s popisem jejich vlastností, vysvětlením funkce a funkce jejich jednotlivých částí, které pokrývá prakticky orientovanou výuku fyziky, elektroniky i aplikované informatiky, podle zvolené aplikace.

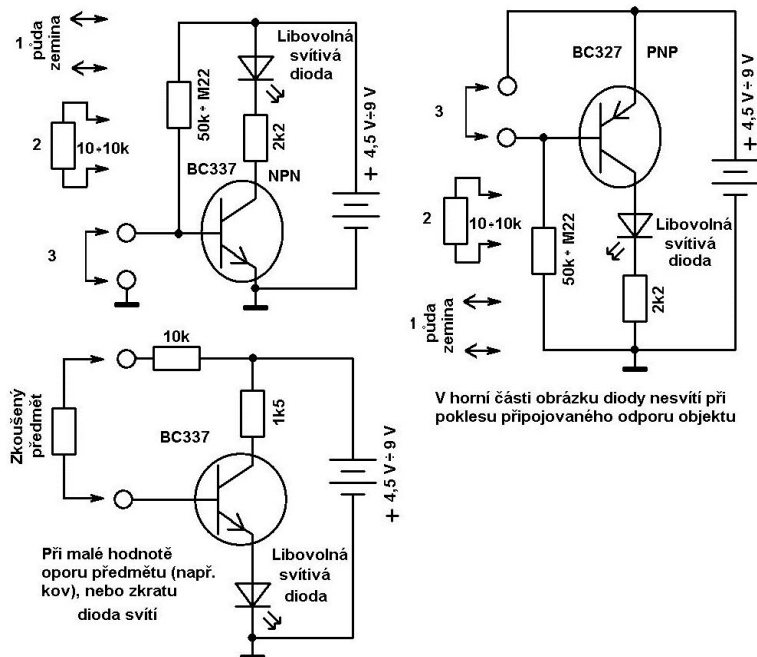
Nejjednodušší tranzistorové aplikace

Nejjednodušší aplikace, obvody s tranzistory, je možné považovat za obvody s nejsložitějším výběrem. Podobná i uvedená zapojení byla publikována v [8, 9] i v učebnicích elektroniky a odpovídají původně vícekrát opakovaně v minulosti publikovaným zapojením, například se žárovkou. Nakonec byly vybrány odkazy s funkčně nejbližšími zapojeními, nejlépe dostupnými na WWW stránkách. Zapojení byla někdy upravena a uzpůsobena požadované aplikaci. Úpravy musely být přiměřeně jednoduché, aby zbytečně nekomplikovaly zapojení a nezvyšovaly náklady na jeho řízení.

Jedno z nejjednodušších zapojení jediného tranzistoru je v poslední době dostupné na [8, 9].

Upravený N-P-N tranzistorový zesilovací spínací stupeň s BC337 [10], v zapojení se společným emitorem, s doplněným rezistorem nebo zátěží (diodou) v emitoru tranzistoru pro zvýšení vstupního odporu, nazývaný původně například dle [8] „kontrola vlhkosti v květináči“, je uveden na obr. 1. Dále je doplněn funkčně podobnému zapojení s tranzistorem BC327 dle [11] s vodivostí typu P-N-P. Využití tohoto upraveného i citovaného zapojení předpokládá zdroj signálu vlhká/suchá půda s relativně malým vnitřním odporem, aby byl omezen průchod dostatečně velkého proudu bázi a tak k rozepnutí tranzistoru a zhasnutí svítivé diody. Když půda zvětší svůj odpor nebo odpojíme přírodní vodiče-elektrody, svítivá di-

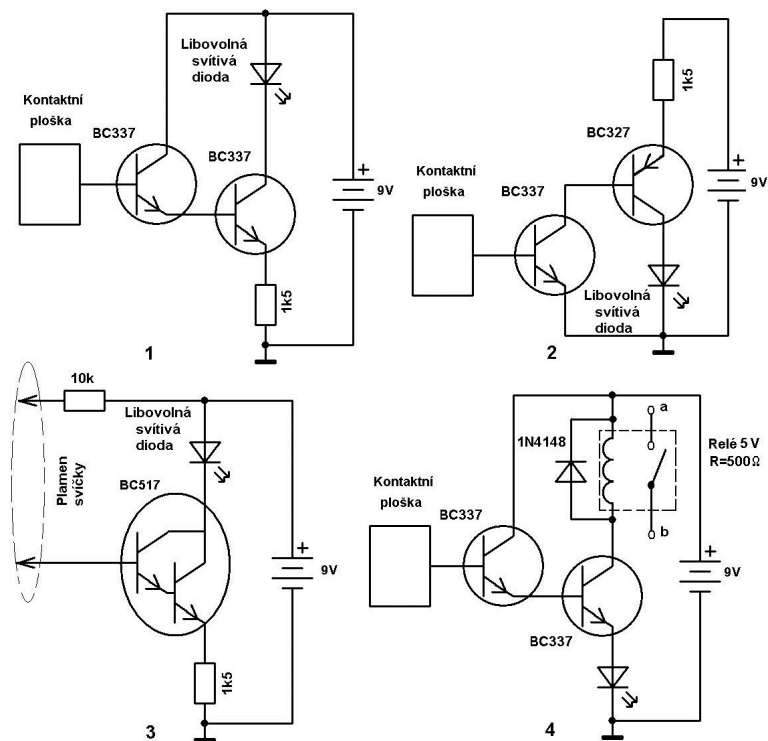
oda se rozsvítí. Využití tohoto zapojení je dostatečně široké, je doplněno v pravé části obr. 1 „zkoušečkou“ uzavřeného/přerušeného obvodu, přes kontrolu přerušené klasické žárovky, tavné pojistky, vinutí elektrických strojů, přerušených diod v usměrňovačích, po citovanou indikaci vlhkosti nebo přítomnost vody v různém materiálu nebo půdě, popř. zjišťování vodivosti/nevodivosti materiálů nebo předmětů.



Obr. 1 Nejjednodušší zapojení zesilovačů s tranzistory N-P-N a P-N-P

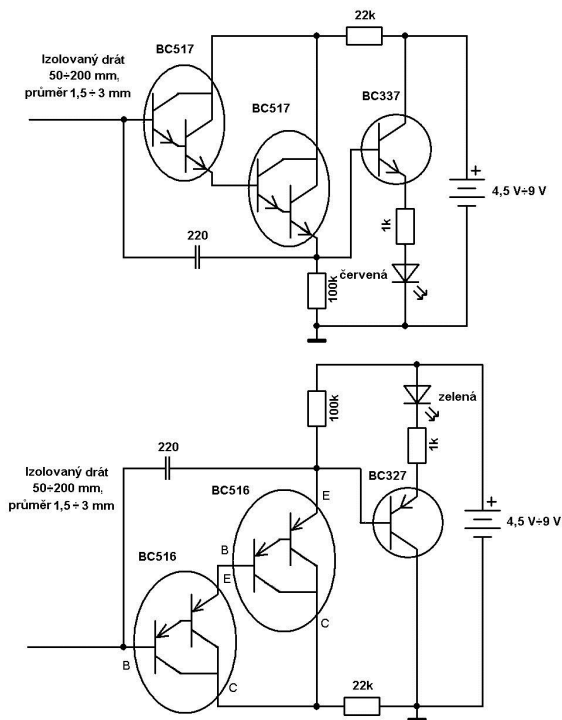
Podobné vlastnosti jednoduchého zesilovače proudu bez komplikování s nastavením pracovního bodu a širokého uplatnění mohou mít schémata na obr. 2, část 1, kde jsou použity dva tranzistory BC337 [10] v Darlingtonově zapojení [12]. Tento spínací zesilovač se vyznačuje větším zesílením, vychází z proudového zesilovacího činitele $\beta = I_c / I_b$ u jediného tranzistoru a u dvou tranzistorů v Darlingtonově zapojení je celkové β rovno přibližně $\beta_1 \cdot \beta_2$. Taktéž vstupní odpor spínacího stupně je přibližně roven $\beta_1 \cdot R_E$ emitorový rezistor, takže je podstatně větší. Umožňuje spínání různé zátěže pouhým prstem, je možné jej použít i jako zesilovací stupeň. Na obr. 2,

část 2 je uveden zesilovací stupeň v Sziklaiově (nepřesně Darlingtonově) NPN+PNP zapojení [13] s velkým proudovým zesílením, avšak podobnou menší hodnotou vstupního odporu jako u jediného tranzistoru. Na obr. 2, části 3 je opět Darlingtonovo zapojení jediné součásti $1 \times BC517$ [14], ve skutečnosti je to opět dvojice tranzistorů v jednom pouzdře. Její použití ukazuje vodivost plamene. Jedná se schopnost získat velké proudové zesílení dvou za sebou zapojených tranzistorů. Je zesílen relativně malý proud do báze, který prochází rezistorem připojeným ke kladnému napětí přes plamen svíčky [15] nebo jiný plamen a sepne tak svítivou diodu. Další část 4 na obr. 2. popisuje připojení induktivní zátěže, relé. Například na napětí 5 V s odporem cívky 500Ω [16]. Spínací tranzistor, jeho přechod kolektor–emitor je nutno ochránit diodou proti přepětí, které se naindukuje na cívce relé i při rozepínání tranzistoru.



Obr. 2 Použití tranzistorů v Darlingtonově zapojení s velkým zesílením a velkým vstupním odporem ke spínání

Zvláštní aplikace je na obr. 3 nahoře s tranzistory NPN a dole s tranzistory PNP.



Obr. 3 Obvody s vysokým ziskem a vstupním odporem s více tranzistory

Původně publikované schéma [17] nazývané „Elektroskop s tranzistory“ je upraveno na použité Darlingtonovy tranzistory pro zjednodušení a snížení počtu součástek. Tato zapojení se vyznačují maximálním dosažitelným vstupním odporem, taktéž s velmi velkým zesílením. Toto zapojení bylo primárně použito jako elektroskop-náhrada klasického elektroskopu. Zapojení s Darlingtonovými tranzistory BC517 N-P-N a jedním tranzistorem BC 337 [10] v horní části obr. 3 slouží jako detektor kladného elektrického pole – je spínána červená dioda a v dolní části obr. 3 s Darlingtonovými tranzistory P-N-P BC516 [18] a jedním tranzistorem BC327 [11] je detekováno elektrické pole se zápornou polaritou, je spínána zelená dioda. Obvody by měly být umístěny do kovové krabičky a vyvedena by měla být pouze drátová elektroda izolovaná od krabičky. Je ho též možné pou-

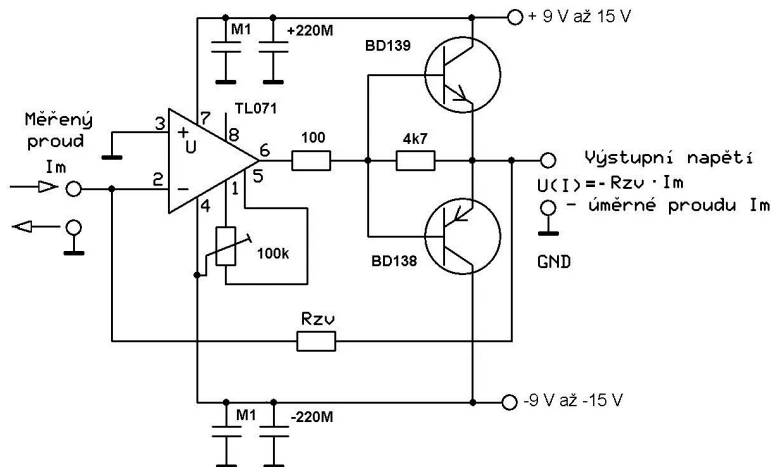
žit jako bezkontaktní detektor síťového („živého vodiče“ – pod napětím) vedení může být i pod omítkou, podobně je uvedeno v [8]. Další aplikace, po doplnění alespoň o alternativní kontaktní plošku, vodivý kovový pásek. Toto zapojení zesilovače s velkým ziskem a velkým vstupním odporem, je uvedeno jako detektor přítomnosti kladných a záporných iontů [19]. Nedá se s jistotou rozlišit, zda se jedná o ionty nebo pole. Pokud s jistotou víme, jaké ionty produkuje například zkoumaný zdroj iontů, můžeme tvrdit, že detekujeme ionty a nikoli elektrické pole.

Další aplikace tranzistorových zesilovačů z obr. 2 a obr. 3 nabízí časopis Praktická elektronika například dle [20], jako velmi citlivý zesilovač k detektorům radioaktivního záření, pro zjednodušení a počáteční nepoužití mikroprocesorové stavebnice, je možno výstup vybavit klasickým panelovým měřidlem, digitálním multimetrem nebo elektromechanickým měřidlem. Jiná možná aplikace tranzistorového zesilovače s velkým ziskem je detektor aktivace mobilního telefonu, který snímá pouze nízkofrekvenční složku mobilním telefonem zpracovaného signálu. Schémata s tranzistory na obr. 3, případně doplněná výše zmíněnými obvody, překračují požadavky na jednoduchost a ekonomičnost řešení, za podmínek relativně malé složitosti a přiměřeně vyšších nákladů je možné vytvořit některé speciální obvody se zajímavými parametry.

Konstrukce převodníku proud/napětí

Na obr. 4 je uvedeno obvodové schéma zapojení převodníku proud/napětí s nastavitelnými proudovými rozsahy. Proud je přiveden mezi vstupní svorky na invertujícím vstupu operačního zesilovače a nulovým potenciálem. Zesilovací stupeň se chová jako proudová nora, tj. má nulový vstupní i vnitřní odpor. Výstupem je napětí, které je úměrné záporné hodnotě vstupního proudu viz na obrázku uvedený vztah. Převodník proud/napětí se chová jako ideální ampérmetr, který není zatížen systémovou chybou, úbytkem napětí na snímacím rezistoru (není použit). Převodník proud/napětí vychází z jednoduchého zapojení operačního zesilovače [21], popsáném v [22], které je doplněno výkonovými komplementárními tranzistory BD139 [23] a BD138 [24] prepínači proudového rozsahu. Převodník proud/napětí funguje jako téměř ideální ampérmetr – proudová nora a je dáno kvalitou operačního zesilovače. Do vstupu převodníku proud/napětí je přiváděn měřený proud a tento proud je operačním zesilovačem a zpětné vazbě převeden na napětí. Obvod není zatížen systémovou chybou, způsobenou vnitřním odporem obvyklého ampérmetru u multimetrů. To znamená úbytkem

napětí na snímacím rezistoru u běžného digitálního multimetru nebo odporu cívky ampérmetru s elektromechanickým systémem. Tento měřený vstupní proud je převeden na napětí podle vztahu $U_m = R_m \cdot I_m$. Toto napětí na výstupu operačního zesilovače je dobře měřitelné obyčejným voltmetrem, nebo analogově-digitálním převodníkem a je tedy doplňkem měřicího systému, přesnějším ampérmetrem.



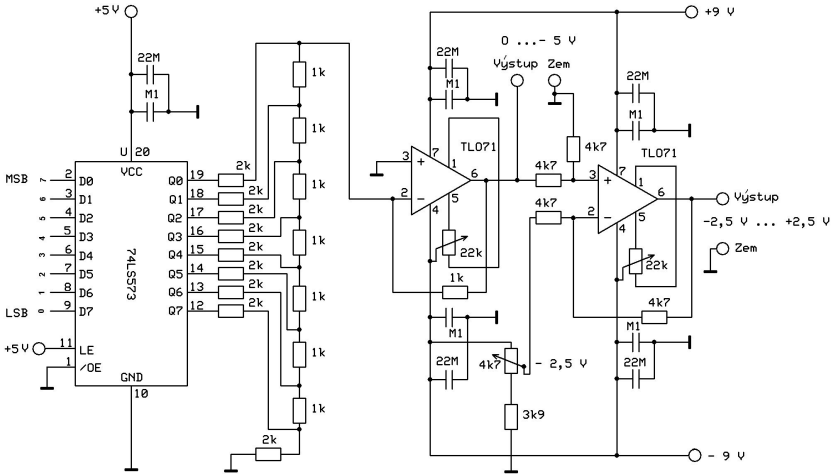
Obr. 4 Upravené schéma převodníku proud/napětí

Konstrukce číslicově řízeného zdroje malých napětí

Číslicově řízený zdroj malých napětí se skládá z účelově zkonstruovaného digitálně-analogového převodníku s nastavitelným aktivním napěťovým výstupem. Převodník je typu proudový násobící [25], tedy s proudovým výstupem a je ho potřebné vybavit převodníkem proud napětí, aby fungoval, jako převodník s aktivním napěťovým výstupem [26].

Uvedené zapojení s výhodou využívá jediný budič sběrnice 74HCT573 [27], Rychlá TTL HCT logika poskytuje při logické nule téměř nulové výstupní napětí (10 mV) a při logické jedničce téměř přesně 5 V, hodnoty se mírně liší v závislosti na sérii dodaných obvodů. To je možné při napájení stabilizovaným zdrojem +5 V. Výstup budiče je možno považovat za dostatečně přesné referenční napětí, včetně nulového napětí. Po připojení a spínání odporové sítě R-2R k poměrně rychlému a přesnému proudovému násobícímu převodníku D/A. Síť je sestavená z devíti rezistorů 2k a ze

sedmi + 1 rezistorů (1 zpětnovazební) 1k (nebo z 18 sériových spojení 1k + 1k). Všechny rezistory jsou nejlépe v provedení SMD.



Obr. 5 Detailní obvodové schéma analogové části zdroje malého napětí

Převodník je typu proudový násobící, tedy s proudovým výstupem a je ho potřebné vybavit převodníkem proud napětí, aby fungoval, jako převodník proudu s aktivním napěťovým výstupem. Použitý operační zesilovač TL071 [21], slouží k převodu proud/napětí a vytváří z D/A převodníku převodník s aktivním napěťovým výstupem. Převodník nepoužívá masivního výstupního filtru jako při stále častějším používání impulsně šířkové modulace PWM. Druhý použitý operační zesilovač je zapojen jako diferenciální stupeň a umožňuje tak upravit výstup D/A převodníku jako bipolární, takže výstup bude v rozsahu $-2,5 \text{ V} \text{ } 0 \text{ V} \text{ } +2,5 \text{ V}$.

Další možná úprava je zvýšení výstupního proudu přidáním komplementárního tranzistorového stupně. Je možné přidáním dalšího budiče 74HCT573 a rozšířením rezistorové sítě o další čtyři bity (čtveřici 2R-R) lze zkonstruovat více bitový až 12 bitový převodník se stejným výstupním napětím avšak s větším rozlišením 2,44 mV na bit. Avšak pouze teoreticky, protože je dosaženo meze přesnosti referenčního napětí, respektive jeho spínačů, které poskytuje budič 74HCT573 a taktéž není optimalizováno zapojení sítě rezistorů pro kompenzaci integrální nelinearity převodníku.

Dosažené parametry

Převodník proud/napětí je navržen, aby na rozsahu 1 A a se zpětno-vazebním rezistorem 10Ω (co nejpřesněji vybrat), dával napětí $\pm 10 \text{ V}$, viz převodní vztah. Rozsah proudu je možné zmenšovat na 0,1 A, 0,01 A postupným zapojováním do zpětné vazby 10Ω , 100Ω , $1\,000 \Omega$ i více. Parametry převodníku proud/napětí jsou dány převážně analogovými součástkami, operačním zesilovačem. Převodník dosahuje od nejmenšího rozsahu 0,01 A, 0,1 A, 1 A výstupního napětí $\pm 10 \text{ V}$ s nelinearitou $\pm 1 \text{ mV}$ a průměrnou dobu ustálení 0,3 ms na nejvyšším rozsahu, nejnižší vstupní proudové hodnotě. Při použití běžně dostupných operačních zesilovačů TL 071, dosahuje jejich linearita $\pm 0,003 \%$, jejich teplotní drift je kolem $\pm 18 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$, rychlost přeběhu $13 \text{ V}/\mu\text{s}$. Je tak možné získat ve spojení s digitálním multimetrem kvalitní ampérmetr pro měření malých proudů. Pozor, můžeme ho používat pouze v obvodech na malé napětí (maximálně $\pm 15 \text{ V}$), napájené zdroji malých napětí, oddělenými od energetické sítě.

Parametry zdroje napětí jsou dány kvalitou budiče převodníku a operačních zesilovačů. Budič 74HCT573 je předimenzován z hlediska rychlosti. Zápis dat je proveden v čase 18 ns. Při osmibitovém rozlišení je výstupní unipolární napětí $0 \div -5 \text{ V}$ s chybou ± 1 nejméně významný bit, který odpovídá $\pm 20 \text{ mV}$ i v bipolárním zapojení $-2,5 \text{ V}$ až $+2,5 \text{ V}$, jmenovitý proud $\pm 0,002 \text{ A}$ bez výstupního proudového zesilovače, teoretická rychlost ustálení lepší než $1 \mu\text{s}$, která je omezena operačním zesilovačem. Rozlišení $0 \div 255$ hodnot na daném rozsahu. Převodník lze dále rozšiřovat až teoreticky na dvanáctibitový, přidáním dalšího budiče a rozšířením sítě R-2R. Výstup převodníku D/A je možné proudově posílit vybavením druhého (diferenčního zesilovače) stejnou dvojicí komplementárních tranzistorů, jako v případě výstupu převodníku proud/napětí až na výstupní proud $\pm 1 \text{ A}$.

Aplikační doporučení

Všechny uvedené obvody jsou určeny ke školským aplikacím, nebo zájmovým kroužkům různé úrovně i zaměření. Zapojení obvodů by měla umožňovat provádění vlastních žákovských experimentů i tvůrčích úprav i kombinací jiných příbuzných zapojení, změnu jejich funkce nebo praktické použití obvodu. Jsou použité standardní běžně dostupné součástky, které jsou i při jakémkoli nezdaru tvůrce-experimentátora snadno nahraditelné.

Závěr

Předložené vybrané jednoduché obvody poskytují společně s částečně redukovaným vysvětlením funkce, dostatek tvůrčího prostoru pro výše uve-

dené výukové postupy. Další využití jednoduchých obvodů tkví ve standardních i nestandardních aplikacích. Ve fyzice, informatice, elektronice i mechatronice.

Literatura

- [1] *Roučová, E.*: Multimedia in Education of Teachers. In: Schola 2001, Trnava, ed. STU Bratislava 2001, s. 104–107.
- [2] *Tesař, J.*: Virtuální měření ve fyzikálním praktiku. Otevřené a distanční vzdělávání na vysokých školách-současný stav a perspektivy. In: Academia film Olomouc 2000, s. 80–83.
- [3] <http://rpishop.cz/raspberry-pi-pocitace/8-raspberry-pi-0766897151323.html>, 23. 11. 2017.
- [4] <http://www.arduino-shop.cz/?gclid=CPHA76XM4MoCFQQUwodD-0CvA>, 23. 11. 2017.
- [5] *Wang, Y. et al.*: Exploration in practical-oriented teaching of mechatronics engineering education. http://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-3-642-27552-4_17#page-1, 23. 11. 2017
- [6] *Průcha, J., Walterová, E., Mareš, J.*: Pedagogický slovník. Portál, Praha, 2001.
- [7] http://www.nuv.cz/uploads/RVP_ZV_2017_verze_cerven.pdf, 22. 11. 2017.
- [8] http://oklike.c-a-v.com/soubory/tranz_zap.htm, 22. 11. 2017.
- [9] *Vobecký, J., Záhlava, V.*: Elektronika – polovodičové součástky a základní zapojení. 3. vydání, GRADA, Praha, 2005.
- [10] <https://www.gme.cz/bipolarni-tranzistor-bc337-40-to92-ammo>, 23. 11. 2017.
- [11] <https://www.gme.cz/bipolarni-tranzistor-bc327-40-to92>, 30. 11. 2017.
- [12] https://en.wikipedia.org/wiki/Darlington_transistor, 30. 11. 2017.
- [13] https://en.wikipedia.org/wiki/Sziklai_pair, 30. 11. 2017.
- [14] <https://www.gme.cz/darlingtonuv-tranzistor-bc517-to92>, 23. 11. 2017.
- [15] Akustický hlídač plynového plamenu, Amatérské radio A, č. 10 (1974), s. 385.
- [16] <https://www.gme.cz/jazyckova-rele-cosmo-reledia-051-000>, 30. 11. 2017.
- [17] Elektroskop s tranzistorem. Amatérské radio B, č. 4 (1986), s. 146.
- [18] <https://www.gme.cz/darlingtonuv-tranzistor-bc516-to92>, 23. 11. 2017.

- [19] <http://www.elektrokoutek.cz/index.php?p=merici-pristroje-a-cidla&page=2>, 30. 10. 2017.
- [20] Detekce a měření radiace, Praktická elektronika, roč. 21 (2016), č. 1.
- [21] <https://www.gme.cz/tl071-dip8-texas-instruments>, 30. 11. 2017.
- [22] *Punčochář, J.*: Operační zesilovače v elektronice. 5. vydání, BEN-technická literatura, Praha, 2017.
- [23] <https://www.gme.cz/bipolarni-tranzistor-bd139-16-to126>, 23. 11. 2017.
- [24] <https://www.gme.cz/bipolarni-tranzistor-bd138-16-to126>, 23. 11. 2017.
- [25] D/A převodník se sítí R-2R. https://www.fd.cvut.cz/personal/janes/zdt/prednasky/3_prevodniky.pdf, 15. 11. 2017.
- [26] *Adámek, P.*: Obvody a části měřicích přístrojů. PF JU, České Budějovice, 2010.
- [27] <https://www.gme.cz/74hct573-dip20-texas-instruments>, 23. 11. 2017.

Demonstrační mikrovlnný radiometr pro školní použití

LEONTÝNA BRÍZOVÁ – MICHAELA KRÍŽOVÁ – JAN ŠLÉGR

Přírodovědecká fakulta UHK, Hradec Králové

Úvod

Objekt o teplotě T a emisivitě e vyzáří do prostoru výkon úměrný čtvrté mocnině teploty T . Část tohoto výkonu je zachycena anténou, která z celého prostoru vytíná prostorový úhel Φ .

Šířka hlavního svazku parabolické antény (kde je anténou přijato maximum energie; na okrajích hlavního svazku je přijatý výkon poloviční než na spojnicí přijímací anténa – zdroj) je určena vztahem

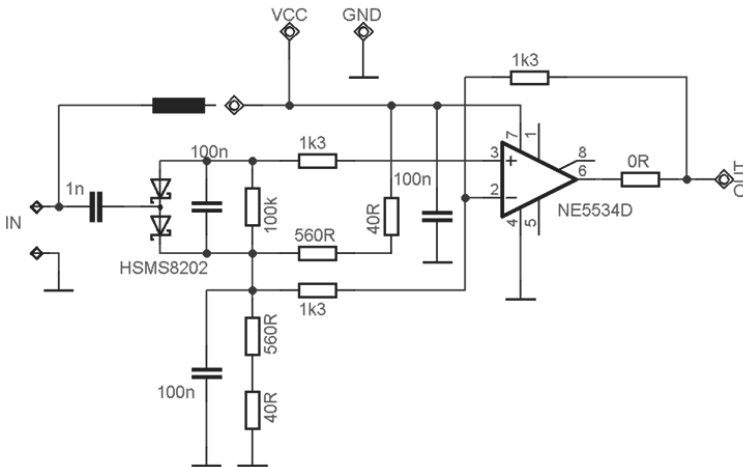
$$\alpha = \frac{70^\circ D}{\lambda} \quad (1)$$

kde λ je vlnová délka záření a D průměr antény. Prostorový úhel hlavního svazku Φ_a je pak určen rotací tohoto rovinného úhlu kolem osy přijímací antény. Do přijímače se dostane šumová teplota

$$T_a = \frac{\Phi_a}{\Phi_z} T_z,$$

kde Φ_z je úhlová velikost zdroje a T_z šumová (přibližně fyzická) teplota zdroje. Přijímač je obvykle označován jako radiometr. K jeho vlastnímu šumu se pak přičítá šum přicházející z antény. Viditelné a infračervené záření lze detekovat pomocí CCD snímačů nebo fotonek, záření tvořené fotony s menší energií vyžaduje jiný detektor, ve zde popsaném případě mikrovlnnou anténu se zesilovačem, za kterým následuje polovodičová dioda, která ze vstupního vysokofrekvenčního signálu vytvoří obálku, čímž je získáno stejnosměrné napětí úměrné teplotě.

Již přibližně třicet let jsou k demonstraci mikrovlnného záření Slunce používány komponenty satelitní televize. Základem je tzv. LNB (*Low Noise Block*), nesprávně česky označovaný jako „satelitní konvertor“. Ve skutečnosti se jedná o nízkošumový zesilovač a transvertor, který mikrovlnný signál převádí z frekvenčního pásma 10–12 GHz do pásma kolem 1 GHz. Výstup je pak veden na vhodný vysokofrekvenční voltmetr (jako v [1]) nebo do počítačového rozhraní (v [2] je vtipně použita televizní karta počítače, jejíž pořizovací cena je však často nad finanční možnosti škol).



Obr. 1 Schéma vysokofrekvenčního voltmetru

Zajímavé je, že oba výše uvedené prameny používají LNB s offsetovou parabolou, což není didakticky příliš vhodné. Proto je v této práci popsáno použití paraboly středové, která má maximum přijatého výkonu ve směru, kterým míří. Navíc byl navržen jednoduchý vysokofrekvenční voltmetr, jehož cena je ve srovnání s [1] nebo [2] velmi nízká. Tento přístroj lze připojit k běžnému školnímu demonstračnímu voltmetru, případně k multimetru se záznamem naměřených hodnot nebo vhodnému AD převodníku (např. ISES nebo karta Arduino).

Konstrukce radiometru

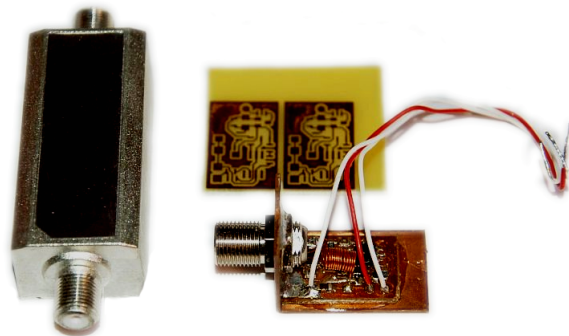
V dnešní době je možné velmi levně (případně zdarma) opatřit hliníkovou parabolickou anténu původně určenou pro bezdrátové WiFi sítě (s přechodem k sektorovým anténám s vestavěnými routery se tyto parabolické antény přestaly používat a mnohé firmy jich mají plné sklady). Tyto antény mají obvykle skalární ozařovač, jehož průměr je stejný jako průměr zúžené části většiny prodávaných LNB. Proto není zapotřebí držák ozařovače nijak upravovat a stačí původní ozařovač nahradit LNB. Je však zapotřebí změnit uchycení paraboly pro použití např. s fotografickým stativem, aby bylo možné anténu jednoduše nasměřovat na Slunce (obr. 2). Zaměření na Slunce lze kontrolovat podle stínu vrženého ozařovačem na parabolu.

Pro použitý průměr antény $D = 60$ cm a frekvenci 12 GHz je šířka hlavního svazku rovna přibližně $3,1^\circ$.



Obr. 2 Demonstrace mikrovlnného záření Slunce

Hned za LNB následuje vysokofrekvenční zesilovač. Stavba zařízení pro mikrovlnné frekvence je poměrně náročná a bez specializované měřicí techniky téměř nemožná, proto je i zde použit tovární výrobek určený pro satelitní televizi. Zesilovač se zesílením 20 dB (obr. 3) lze pořídit za cenu přibližně 200 Kč v obchodech specializovaných na televizní a satelitní techniku.



Obr. 3 Mikrovlny satelitní zesilovač a realizace detektoru

K propojení zesilovače s vysokofrekvenčním voltmetrem není vhodný klasický koaxiální kabel, který je poměrně neohebný. Lze použít slabší a lépe ohebný kabel určený pro WiFi aplikace, který je obvykle osazen konektory SMA. Na obou koncích je však možné osadit redukce SMA na F-konektory, které jsou na výstupu zesilovače a vstupu voltmetru. Použitý kabel má sice větší útlum (a redukce přechodový odpor), ale vzhledem k zařazení 20 dB zesilovače se nejedná o problém. Navíc pokud není tento kabel k dispozici, lze zařízení propojit obyčejným satelitním kabelem s F-konektory, i když práce s ním není příliš pohodlná.

Vysokofrekvenční voltmetr je tvořen diodovým detektorem HSMS8202 a operačním zesilovačem NE5534. Zároveň je přes tento detektor přivedeno na zesilovač a konvertor napájecí napětí 12 V (zesilovače i konvertory se obvykle napájí napětím 17–19 V, ovšem 12 V jim bohatě stačí a navíc se zbytečně nezahřívají).

Na výstupu operačního zesilovače je stejnosměrné napětí přímo úměrné vysokofrekvenčnímu napětí na vstupu. Toto napětí se mění v rozsahu asi od 6,5 V (při namíření antény na oblohu) do 7,5 V (při namíření antény na stěnu budovy). Proto je k měření tohoto napětí použit voltmetr s posunutou nulou. Za Zenerovou diodou s $U_Z = 6,2$ V je napětí v rozsahu 0,3–1,2 V,

které ukazuje ručkový přístroj s rozsahem asi 1,3 V. Ideálním přístrojem je upravený velký demonstrační voltmetr (na obr. 3 je demonstrační voltmetr Metra, jehož dělič je zmenšen na polovinu, takže na rozsahu 3 V má maximální výchylku pro 1,5 V).

Demonstrační experimenty

Při namíření antény na oblohu je výchylka měřicího přístroje malá. Pokud demonstrátor natáhne ruku před anténu, výchylka se zvýší. Podobně pokud je anténa dostatečně nízko a míří na oblohu, lze totéž demonstrovat, když si demonstrátor před anténu stoupne.

Podle zvyšující se výchylky měřicího přístroje lze anténou na obloze najít Slunce. Při namíření antény například na stěnu či zem se výchylka zvětší mnohem více, než při namíření na Slunce. To je způsobeno tím, že stěna je velký plošný zdroj záření, kdežto Slunce se svým úhlovým průměrem kolem $0,5^\circ$ je zdrojem mnohem menším.

Měření ekvivalentní teploty Slunce na frekvenci 12 GHz

Vhodnou kalibrací radiometru lze stanovit funkci $U = f(T)$, kterou lze využít k určení ekvivalentní teploty Slunce na frekvenci 12 GHz podle [1] a [3]. Je zapotřebí vzít v úvahu, že kalibrační křivka je získána z plošně rozlehlých zdrojů (obloha, zeď atd.), kdežto Slunce má mnohem menší úhlový průměr.

Kalibrační křivka se sestaví měřením výstupního napětí radiometru po namíření na různé zdroje, jejichž teplota je známa. Pro zjednodušení jsou použity pouze dvě teploty – oblohy a země nebo stěny. Jako teplotu oblohy lze uvažovat teplotu reliktního mikrovlnného záření 2,7 K. Teplotu země lze změřit infračerveným teploměrem.

S pomocí zjištěných teplot je možné sestavit kalibrační křivku – pro školskou aplikaci je výhodné, že jsou naměřené hodnoty dvě, stačí nakreslit graf a podle napětí naměřeného pro Slunce přiřadit teplotu. Bylo by jistě možné použít více kalibračních bodů, program Microsoft Excel obsahuje funkci „Přidat spojnici trendu“, která prokládá soustavou bodů zvolenou funkci, v tomto případě lineární. Tak je možné použít více bodů, i když žáci neznají metodu nejmenších čtverců.

Odečtením z grafu na obr. 4 nebo dosazením do rovnice regrese získáme pro napětí $U = 1,19$ V naměřené po nasměrování antény radiometru na Slunce hodnotu $T_S = 354$ K. To ovšem není správná teplota fotosféry. Je

nutné si uvědomit, že v obou kalibračních bodech přijímala anténa radiometru záření celým hlavním svazkem, tedy podstavou kužele v vrcholovém úhlu $3,1^\circ$. V případě Slunce však záření vycházelo z plošného zdroje o úhlovém průměru $0,5^\circ$. Poměr plochy primárního svazku a plochy Slunce je

$$p = \frac{\pi \frac{D_1^2}{4}}{\pi \frac{D_2^2}{4}}.$$

Protože průměr podstavy je přímo úměrný vrcholovému úhlu kužele, lze pro tento poměr zapsat

$$p = \frac{\alpha^2}{\Psi_S^2}$$

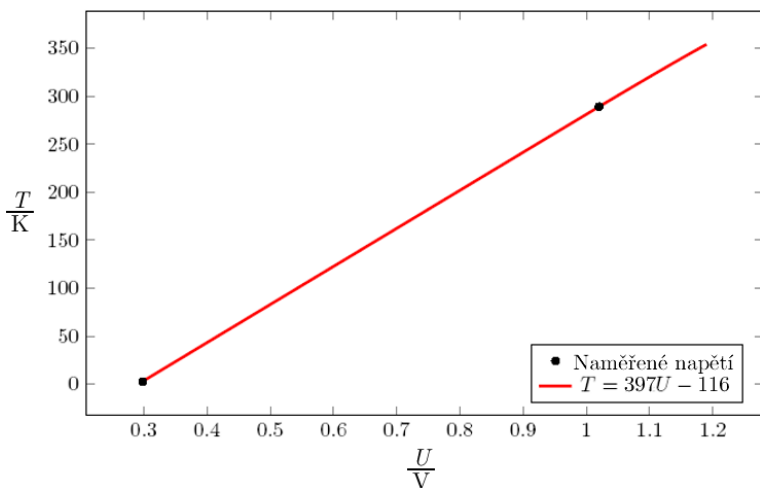
kde α je úhlová šířka hlavního svazku podle (1) a Ψ_S je úhlový průměr Slunce. Pro zadané hodnoty $\alpha = 3,1^\circ$ a $\Psi_S = 0,52^\circ$ dostáváme poměr $p = 35,5$.¹⁾ Tímto faktorem je potřeba vynásobit teplotu získanou z kalibrační křivky, aby byl vzat v úvahu poměr energie absorbovaného záření. Pak platí

$$T_{\text{korig.}} = p \cdot T_S$$

a pro zadané hodnoty dostáváme přibližně $T_{\text{korig.}} = 12\,600$ K (v [3] je jako správná hodnota uváděno 10 000–12 000 K). Je zajímavé, že v [1] je výpočet proveden tak, aby vyšla teplota 5 760 K, což je sice teplota fotosféry, ale jedná se o ekvivalentní teplotu absolutně černého tělesa s maximem vyzářené energie zákona na vlnové délce 550 nm. Na frekvencích řádu jednotek a desítek GHz se však záření Slunce velmi podstatně odchyluje od průběhu popsaného Planckovým rozdělením, a to i během doby, kdy je sluneční aktivita malá. V době slunečních erupcí je tento rozdíl ještě výraznější [5].

Je dobré rovněž zmínit, že přesnost metody není příliš velká – směrnice kalibrační křivky je dána měřenou teplotou země nebo stěny budovy. Nicméně autor si dovoluje říci, že pro školní použití a seznámení s detekcí radiového záření je tato velice jednoduchá metoda dostačující.

¹⁾Na frekvencích řádu jednotek a desítek GHz je úhlový průměr Slunce téměř totožný s fotosférickým průměrem ve viditelném oboru. Úhlová velikost Slunce se zvětšuje až na kratších vlnových délkách, kde začíná zářit svrchní fotosféra a spodní koróna, viz [4].



Obr. 4 Napětí na výstupu 12 GHz radiometru

Popsaný radiometr jev současné době k demonstračním účelům využívám mimo jiné i na hvězdárnách v Hradci Králové a ve Vyškově. Zájemci o stavbu mohou kontaktovat autory na adrese jan.slegr@uhk.cz.

Poděkování

Tento příspěvek vznikl za podpory specifického výzkumu PřF UHK 2104/2017.

Literatura

- [1] *Flou, B.*: Radioastronomie D'Amateur [online]. 1. 2005 [cit. 2012-12-31]. Le radiotélescope LUCIE. Dostupné z: <http://www.astrosurf.com/radioastro/observation2.html>
- [2] *Doherty, M. Fish, V. L. Needles, M.*: Revealing the Hidden Wave: Using the Very Small Radio Telescope to Teach High School Physics In The Physics Teacher. Vol. 49, December 2011, s. 546–548.
- [3] *Carr, D.*: Discovering the temperature of the sun using a standard 12 GHz satellite receiver. 10. 10. 2005. Dostupné z: <http://www.cs.ru.ac.za/research/g02c0108/files/radio/tempsun.pdf>
- [4] *Swanson, P. N.*: The radio radius of the Sun at millimeter and centimeter wave-lengths. Solar Physics, roč. 32 (1973), s. 77–80.
- [5] *Kraus, J. D.*: Radio Astronomy. 2. vydání, Cygnus-Quasar Books, New Hampshire, 2004.

Projektové vyučovanie v informatike

ZUZANA TKÁČOVÁ

Pedagogická fakulta UKF, Nitra, Slovensko

Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice, Slovensko

Žiacke projekty tvoria stabilnú súčasť vyučovania informatiky, často sú to však rôzne podoby žiackych referátov, grafických, či multimediálnych prác, ktoré sa však mylne zameňajú s projektovým vyučovaním. Projektová výučba má svoje špecifiká, na ktoré by mal učiteľ myslieť už pri jej plánovaní a prispôsobiť im všetky učebné činnosti žiakov na vyučovaní. V tomto článku si predstavíme základné charakteristiky a prvky projektového vyučovania a ukážeme si ich implementáciu v praxi na príklade projektového vyučovania venovaného programovaniu mobilných aplikácií pre prácu so zvukmi.

Základné charakteristiky a prvky projektového vyučovania

Projektové vyučovanie je v odbornej literatúre chápané rôznymi autormi rôzne – niekedy ako metóda výučby (príp. komplexná metóda výučby), inokedy ako organizačná forma vyučovania a stretnúť sa môžeme aj označením ako výchovno-vzdelávacia stratégia [1, 2]. Kľúčovým pojmom je projekt. Predstavuje sofistikovanú úlohu zameranú na praktický produkt s jedinečným riešením, ktoré vyžaduje od žiaka autorský vklad [3].

Charakteristickým znakom projektového vyučovania je prebratie zodpovednosti za riešenie projektu žiakmi, pričom žiaci si majú možnosť sami voliť, ako splnia projektovú úlohu a v rámci skupiny si zvolia, akej konkrétnej činnosti sa budú venovať. Ďalším typickým znakom projektu je

výrazná medzipredmetovosť (projekt využíva poznatky a zručnosti z rôznych predmetov, tematických oblastí alebo odborov) a taktiež prepojenosť s realitou (žiaci riešia konkrétny problém alebo produkt zo života). Projektové vyučovanie tak vytvára priestor pre efektívnu integráciu poznatkov a prepojenie na rozvoj kľúčovým kompetencií žiaka [2].

Súčasťou projektu je potreba samostatného objavovania poznatkov žiakmi počas riešenia. Na základe uvedeného vyplýva, že projektové vyučovanie nie je žiacky referát, pri ktorom žiaci vyhľadávajú na zadanú tému informácie na internete a spracúvajú ich do výslednej prezentácie alebo plagátu (nie je to reálny produkt zo života), ani zadanie samostatnej alebo skupinovej aplikačnej úlohy po predošlom výklade učiteľa (žiaci nemusia objavovať nové poznatky), či inej úlohy, pri ktorej žiaci nemajú možnosť individuálnej voľby činnosti v rámci riešenia (výstup očakáva, že všetci žiaci budú kresliť, písať, programovať a pod.).

Riešenie projektu pozostáva zo štyroch fáz (obr. 1) a spravidla zahŕňa nasledovné prvky [4]:

- brainstorming možných riešení problému,
- identifikáciu tém určených na zber informácií,
- rozdelenie zodpovedností za zber informácií,
- časový manažment,
- vyhľadávanie informácií relevantných k problému alebo danej otázke,
- syntéza získaných dát,
- spoločné rozhodovanie o ďalšom riešení projektu,
- vývoj výsledného produktu,
- prezentácia výsledkov práce žiakov.



Obr. 1 Fázy riešenia projektu [2]

Príklad projektového vyučovania na tému Programovanie mobilných aplikácií pre prácu so zvukmi

Projektové vyučovanie je určené na realizáciu v rámci predmetu Informatika (ISCED 3) na gymnáziu v prvom, druhom alebo treťom ročníku, pričom sa v ňom prierezovo využívajú poznatky z viacerých tematických oblastí:

- Reprezentácie a nástroje – práca s multimédiami,
- Algoritmické riešenie problémov – pomocou postupnosti príkazov,
- Komunikácia a spolupráca – vyhľadávanie na webe,
- Komunikácia a spolupráca – práca s nástrojmi na spoluprácu a zdieľanie informácií,
- Informačná spoločnosť – digitálne technológie v spoločnosti.

Nakoľko projektové vyučovanie prebiehalo na bilingválnom slovensko-anglickom gymnáziu, niektoré ukážkové materiály sú uvedené v anglickom jazyku.

Fáza 1 – Motivácia, mapovanie, triedenie informácií

Projektové vyučovanie začína uvedením do existujúcej (preberanej) problematiky práce so zvukmi formou brainstormingu na tému „Čo môžeme robiť so zvukom v počítači?“ Žiaci sa zamyslia nad rôznymi možnosťami využitia zvukov v počítači (napr. prehrávanie, vytváranie a editovanie, vyhľadávanie na internete, použitie v iných aplikáciách, hlasové ovládanie a pod.) Táto fáza je veľmi dôležitá, nakoľko neskôr pri riešení svojich vlastných projektov budú využívať práve tieto navrhnuté možnosti, preto je vhodné jednotlivé nápady zapisovať aj na tabuľu. Nakoľko sa jedná o projektové vyučovanie realizované formou vývojových softvérových žiackych tímov, preto si žiaci vytvoria svoje tímy (v tomto prípade projektového vyučovania, keďže sa pri realizácii jednalo už o tretiakov, ktorí už mali isté skúsenosti s prácou v tímoch, bola ponechaná voľba tímov na ich vlastnej voľbe). Každý tím má troch členov s presne špecifikovanými funkciami:

- *dizajnéra*, ktorý zodpovedá za prípravu grafických a zvukových materiálov (pozadie, tlačidlá, návrh rozmiestnenia ovládacích prvkov a pokiaľ budú používať hotové zvuky, tak aj za mp3 súbory, ktoré budú prehrávať alebo link na streamovanú rádiostanicu, pokiaľ budú robiť prehrávač rádia) – dizajnér pracuje najmä v čase pred spoločnou projektovou hodinou, na spoločnej hodine má na starosti report, teda pokiaľ ostatní členovia tímu budú pracovať, on musí v krátkosti (2–3 min.) odprezentovať ostatným dizajnérom z ostatných tímov a učiteľovi ich projekt, teda čo bude výstupom ich práce

- *programátora/kódera*, ktorý zodpovedá za vytvorenie aplikácie v AppInventore na základe dodaných podkladov od dizajnéra – ako príprava je potrebné preštudovať si doma niekoľko videotutoriálov na vytvorenie

obdobnej aplikácie a tvorivé využitie týchto nápadov pri programovaní ich vlastnej aplikácie; je to jediný člen tímu, ktorý nič nikde neprezentuje, len je zodpovedný za to, že to celé pobeží

- *testera*, ktorý zodpovedá za aktívnu spoluprácu programátorom pri práci na spoločnej hodine, ktorý musí perfektne zvládnuť ovládanie aplikácie a jej prezentovanie na záver; jeho domáca príprava spočíva vo vyhľadani aspoň dvoch podobných aplikácií na webe (buď sú online alebo sú to stiahnuteľné aplikácie), aby bol na konci svojej prezentácie schopný okrem iného navrhnúť ďalšie možnosti vylepšenia alebo rozšírenia ich aplikácie (nemusia ich robiť, ale mali by vedieť, čím by sa ich produkt dal vylepšiť...)

V prípade, ak v skupine nie je vhodný počet žiakov, je možné vytvoriť aj dvojčlenné tímy, kde má jeden z členov kumulované funkcie, napr. je dizajnér aj tester alebo programátor a tester zároveň.

Následne si každý tím volí tému svojho produktu. Témy by mali byť zhruba rovnako náročné na realizáciu – pre projektové vyučovanie je podstatné, ako žiaci v tímoch popustia uzdu svojej fantázii a koľko nápadov do toho investujú po vizuálnej stránke. Pokiaľ si trúfajú na nejaké vylepšenie alebo rozšírenie, môžu to vyskúšať, ale na spoločnej projektovej hodine budú mať na programovanie len cca. 15–20 minút, teda mali by to v takomto čase aj stihnúť. Ponuka vhodných tém pre projekty môže obsahovať:

1. Prehrávač streamovaného rádia – rádiostanice vysielaajú aj online, takže cieľom je vytvoriť aplikáciu, ktorá dokáže spustiť prehrávanie zvolených 3 staníc, pozastaviť ho, ako aj korektne ukončiť celú aplikáciu. Súčasťou by mal byť aj posuvník na pridávanie/uberanie hlasitosti.
2. Multifunkčný zvukový experimentátor – jedná sa o aplikáciu, ktorá umožní 3 funkcie – prevod textu na reč, rozpoznanie reči a jej prevod na text a napokon ešte aj obyčajný nahrávač/prehrávač zvuku.
3. Multimediálna učebná pomôcka – aplikácia, ktorá bude mať 4–6 tlačidiel s obrázkami 4–6 hudobných nástrojov a po ich stlačení zaznie zvuk daného nástroja.
4. Prehrávač mp3 skladieb – podobná úloha ako v zadaní 1, len nebudú pracovať s rádiostanicami, ale budú prehrávať 4–6 rôznych mp3 nahrávok (ako „špecialitku“ môžu vyrobiť ešte extra funkciu – náhodné prehrávanie extra nahrávky, ktorá po spustení bude náhodne vybrať zo zoznamu pôvodných 4–6 nahrávok...).

5. Virtuálny xylofón – aplikácia pozostáva z 8 tlačidiel, ktoré po stlačení vygenerujú príslušný tón od c1 po c2; tlačidlá by mali mať podobu farebných obdĺžnikov, príp. aj s napísaným konkrétnym tónom na sebe.

Hlavné je potrebné povzbudiť žiakov, aby to celé brali ako ich tímovú výzvu, v ktorej môžu ukázať, akí sú dobrý a kreatívny tím.

Fáza 2 – Riešenie a spracovanie dát

Samotné programovanie mobilných aplikácií budú žiaci robiť online v prostredí MIT App Inventor 2 (<http://ai2.appinventor.mit.edu>). Nakoľko v rámci projektového vyučovania sa nepredpokladajú predošlé skúsenosti žiakov s týmto prostredím, v rámci úvodnej hodiny učiteľ ukáže základnú inštrukciu pre prácu v MIT App Inventore, teda registráciu do prostredia, prostredie dizajnéra pre návrh aplikácie a blokové prostredie pre programovanie, ako aj vytvorenie QR kódu pre výslednú aplikáciu, nainštalovanie aplikácie do mobilného zariadenia a jej otestovanie. Na vytvorenie jednoduchých testovacích aplikácií formou samostatného bádania žiakmi je možné použiť úvodné AppInventorMakerCards, ktoré sú dostupné na <http://appinventor.mit.edu/explore/ai2/maker-cards.html>.

Projektové vyučovanie nepredstavuje prácu na projekte doma – nosná časť sa deje priamo na vyučovacích hodinách, kde má učiteľ možnosť priamo sledovať prácu žiakov vo svojich tímoch. Pred samotnou projektovou hodinou však je potrebná domáca príprava žiakov podľa ich funkcií (tak ako bolo popísané v predchádzajúcej fáze). Pre programátora môžu byť poskytnuté aj niektoré programové konštrukcie, ktoré si môže odskúšať, aby ich vedel na projektovej hodine implementovať do ich projektu (obr.2)

Fáza 3 – Práca na produkte

V rámci samotnej projektovej hodiny sú členovia tímov na začiatku rozdelení – dizajnéri absolvujú spoločný report s učiteľom a programátori s testerami v tom istom čase už pracujú na pridelených počítačoch a mobilných zariadeniach na vývoji svojich aplikácií. Report prebieha najprv formou sedenia v kruhu, kde postupne každý dizajnér predstaví myšlienku ich aplikácie v takej podobe, na ktorej sa s členmi svojich tímov dohodli (táto podoba je spravidla istou „mutáciou“ pôvodnej zvolenej témy, len s konkrétnou špecifikáciou dizajnu a funkcionality; je možné, že tím sa rozhodol v čase domácej prípravy nejakým spôsobom rozšíriť pôvodné zadanie). V druhej časti reportu pracujú dizajnéri na počítačoch, kde svoju

aplikáciu krátko zdokumentujú online formou tzv. Padletu (obr. 3), ktorý im pre skupinu zriadil učiteľ (<http://padlet.com>).

10 užitočných nápadov a trikov do Appinventora

TIP 1:

Na ukončenie aplikácie po stlačení tlačidla použite akciu **CLOSE APPLICATION** (nájdete ju programovaní v built-in knižnici **CONTROL**):

```
when Button1 Click
do close application
```

TIP 2:

Pre krátke zvuky (odporúčam formát .wav, prípadne .mp3) použite **SOUND** (nájdete ho v palete **MEDIA**):



Prehratie zvuku po stlačení tlačidla (poznámka: zvuk sám skončí, nie je potrebné dávať tlačidlo na pauzu):

```
when Button1 Click
do set Sound1 Source to 'path/to/sound'
call Sound1 Play
```

TIP 3:

Pre dlhšie zvuky (odporúčam .mp3) alebo streamované rádio použite **PLAYER** (nájdete ho v palete **MEDIA**):



Spustenie prehrávania zvuku alebo spustenie prehrávania rádia po stlačení tlačidla (pozor, URL zdroj rádia musí byť zakončený .mp3, teda bez koncovky .m3u, ktorú musíte vymazať):

```
when Button1 Click
do set Player1 Source to 'http://www.radio.com'
call Player1 Start

when Button2 Click
do set Player1 Source to 'mp3file'
call Player1 Start
```

Je potrebné použiť aj tlačidlo na zastavenie alebo pauzu:

```
when Button3 Click
do call Player1 Stop
```

TIP 4:

Pre nastavenie náhodného výberu pesničky alebo rádia je potrebné v predšom príklade miesto konkrétnej adresy rádia alebo konkrétneho názvu pesničky využiť náhodný výber zo zoznamu (bloky nájdete v built-in knižnici **LISTS**):

```
when Button1 Click
do set Player1 Source to pick a random item list make a list 'radio1' 'radio2' 'radio3'
call Player1 Start
```

Poznámka: samotný blok **MAKE A LIST** má na začiatku len dve položky, no po kliknutí na malé koliesko v bloku sa zobrazí okno s možnosťou doplnenia ďalšej položky - stačí **ITEM** z ľavej polovice okna presunúť myšou medzi **ITEMS** v pravej polovici okna, čím sa do zoznamu pridá ďalšia položka.

Obr. 2 Ukážka materiálu pre podporu žiackej práce (ukážkový materiál je skrátený)

Project assignments - descriptions (group 10)
 Below here is a grid with some of your app pics a URL and a brief description of the features of your app (i.e. how many sounds, sounds, radio, etc. will be available, the functions of your buttons and other elements included - 2 or 3 sentences should be enough. Then find a similar online web application or downloadable software package and include a link.

- Multi-sound application**
 Our app is equipped to record a speech, transform text to record and of course play recorded speech. It is supposed to recognize a speech too. As a symbol of our app we choose microphone, which we used as background.
 Apps like ours:
<https://www.speakpipe.com/voice-recorder>
https://www.oddcast.com/homele-recorder/05_english.php
<https://dictation.io/>
- Musical Instruments**
 Our application contains musical instruments which helps students and teachers in the schools during Music lessons. We have different musical instruments and when students click on them they make a sound and they can also see how the instruments look like.
 Apps like ours:
<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.bestingtonetools.musicalinstrumentsfree>
<https://itunes.apple.com/app/virtual-piano-free-3423118496601/en-us>
- Radio**
 Our application provides eight radio stations at one place. You don't have to search for your favorite radio station anymore, all you need to do is to download our application. It is easy to operate, fun to listen and offers adding. Just press the button play.
 similar apps:
<https://www.engres.uk/>
<http://www.funradio.uk/>
- My2 Player**
 Our application will play you your favorite songs anytime you like. It will be able to play song, stop song and play random songs.
<https://play.google.com/store/apps/details?id=mp3songs.mp3player.mp3cuter-mp3downloader>
 is a similar application as ours, but ours it way better. :)
- Virtual xylophone**
 Our application is similar to a piano application, where every time you click on a button it plays certain tone. Every button plays a different tone.
<http://www.buttonbaas.com/xylophone.html>
<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.snowyapps.xylophone.android>

Obr. 3 Ukážka Padletu pre dokumentáciu žiackych prác

Po ukončení reportu sa dizajnéri pridajú k zvyšku svojho tímu a spolupracujú pri vývoji a testovaní aplikácie. V tomto učiteľ prechádza učebňou, monitoruje prácu jednotlivých tímov a sleduje zapojenosť všetkých členov tímov.

Fáza 4 – Prezentácia výsledkov, hodnotenie a reflexia

V závere projektového vyučovania majú jednotlivé tímy vyčlenený priestor na krátke (2–3 min.) odprezentovanie svojich aplikácií ostatným tímom, pričom zamerať by sa mali na dizajn a funkcionality svojich produktov, ktorými by ich mohli osloviť ako potenciálnych užívateľov.

Rubric for Group Assessment of Project Assignment "Working with audio"

The application name/theme: _____

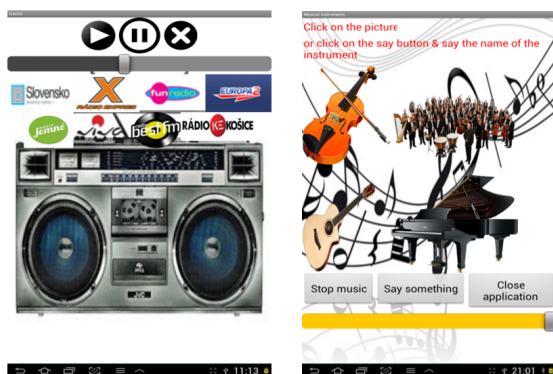
	1 point	2 points	3 points
Design			
Preparation of sound files/online links	1 to 3	4 to 6	more than 6
Preparation of graphic files	1 to 3	4 to 6	more than 6
Project documentation	partial	complete	
All requirements met according to the assignment	partially	completely	
Coding			
Change of the app's name (Screen1)	yes		
Change of the app's background	once	more times	
Use of buttons	1 to 3	4 to 6	more than 6
Change of button's properties	yes		
Use of slider	yes		
Function for closing the app	yes		
Use of sound/mp3/radio player	yes		
Use of text-to-speech block	yes		
Use of speech recognizer block	yes		
Use of sound recorder	yes		
Use of random items/lists	yes		
Use of other tools (which?)	yes		
Testing			
Installing of the app	yes		
Testing of all inputs/outputs	partial	complete	
Correct run of the app	partial	complete	
App's presentation	partial	complete	
Teamwork			
Engagement and work of team members	partially	completely	
Communication and team members involvement	partial	very good	
Total score: _____			

Obr. 4 Ukážka sebahodnotiacej rubriky pre tím

Pri následnej reflexii, evalvácii a hodnotení sa najskôr využíva peer review, teda rovesnícke hodnotenie, kedy si tímy medzi sebou vymenia svoje hotové produkty, aby ich mohli odskúšať a poskytnúť spätnú väzbu, čo sa im na aplikáciách iných tímov páčilo alebo čo by vylepšili, príp. zmenili.

Nasleduje tímová autoevalvácia formou rubriky (obr. 4), v ktorej si tím zbiera body za všetky realizované kroky v rámci projektového vyučovania. Nakoľko sa jedná o divergentné úlohy, neexistuje žiaden bodový strop (maximum, ktoré by tím mohol dosiahnuť), pre tím je podstatné získať stanovený počet bodov potrebný pre získanie tej-ktorej známky (napr. pre získanie hodnotenia 1 – výborný je potrebných min. 30 bodov), preto pre tímy takéto hodnotenie nie je negatívne (v zmysle, že si uberajú body za niečo, čo nemajú urobené, nakoľko nie v každej aplikácii museli mať všetko zakomponované), ale pozitívne (pridávajú si body za vlastnú tvorivú a reálne odvedenú prácu).

V závere hodiny poskytnú svoje komentáre a hodnotenie aj učiteľ a vyžve žiakov, aby sa sami vyjadrili, ako sa im v tímoch pracovalo, ako sú spokojní s vlastným produktom a s vlastnou prácou počas tohto projektového vyučovania.



Obr. 5 Ukážky niektorých hotových prác

Literatúra

- [1] *Dömischová, I.*: Projektová výuka – moderní strategie vzdělávání v České republice a německy mluvících zemích. Vyd. Univerzity Palackého, Olomouc, 2011.
- [2] *Tomková, A., Kašová, J., Dvořáková, M.*: Učíme v projektech. Portál, Praha, 2009.
- [3] *Čapek, R.*: Moderní didaktika - lexikon výukových a hodnotících metod. Grada Publ., Praha, 2015.
- [4] *Bender, W. N.*: Project-Based Learning: Differentiating Instruction for the 21st Century. Corwin, Thousand Oaks, CA, 2012.

Kontroverzní popularita simulační hypotézy

Martin Tomáš

Nové Technologie – výzkumné centrum, Západočeská univerzita v Plzni

Úvod

Během setkání Code Conference 2016 prohlásil známý vizionář Elon Musk, zakladatel společnosti SpaceX a ředitel Tesla Inc., že možnost ztotožnění našeho vesmíru s objektivní realitou je jedna ku miliardám [1]. Domnívá se tedy, že naše realita je pouhou simulací a svoji argumentaci opírá o dechberoucí rozvoj výpočetní techniky v posledních desetiletích. Při zachování současného trendu je podle Muska nevyhnutelné, aby v budoucnu výpočetní výkon dosáhl úrovně umožňující simulovat realitu tak, jak jí známe z našeho každodenního života.

Vzhledem k tomu, že jsem se během své pedagogické praxe setkal s dotazy na pravdivost této hypotézy, dovolil bych si zde prezentovat fyzikální argumentaci, kterou může využít i široká pedagogická veřejnost. S touto hypotézou se totiž nesetkáváme pouze ve vyjádřeních veřejně známých osob Muskova formátu, nýbrž i v mnoha populárních filmech, knihách a komixech na bázi science-fiction. Podrobná argumentace v českém jazyce však zatím chybí.

Ačkoliv se myšlenka neexistence objektivní reality – simulační hypotéza – objevuje již v různých verzích ve starém Řecku a moderní filozofii, opravdovou renesanci zažila na přelomu tisíciletí po uvedení filmu *Matrix*. S prvními náznaky takto radikální koncepce se setkáváme v Platónově *Podobenství o jeskyni*, kde je vnímaná realita jen promítaným stínem skutečné reality. Dalším rozvojem prochází tato hypotéza s příchodem solipsismu, který předpokládá existenci vědomí, ale odmítá existenci okolní reality. Že se jedná o velmi působivou myšlenku značí i velká jména mezi badateli na poli solipsismu, příkladem mohou být Sartre či Schopenhauer. Oponentem byl například Bertrand Russell, který argumentaci založil na Occamově břitvě [2].

Po velkém úspěchu filmové trilogie *Matrix* došlo k publikaci známého článku Nicka Bostroma [3], ve kterém tento oxfordský filozof představil

trilema, mylně pokládané za přímý důkaz našeho vesmíru jakožto virtuální reality (VR). S dalšími články o simulační hypotéze se ojedinele setkáváme i v některých odborných časopisech [4]. Impuls pro hypotézu představuje výzkum celulárních automatů, které studuje například Gerard 't Hooft [5], nositel Nobelovy ceny pro rok 1999. Je však třeba zdůraznit, že simulační hypotéza patří mezi zcela okrajový a většinou fyziků odmítaný koncept.

Bostromovo trilema

Nick Bostrom založil svoji argumentaci ve prospěch virtuální reality, opaku objektivní reality, na třech tvrzeních, u kterých předpokládá, že alespoň jedno z nich je téměř určitě pravdivé. Tato pravděpodobnostní tvrzení jsou:

1. Počet lidských civilizací, které dosáhnou technologické vyspělosti takové úrovně, že budou schopny vytvořit VR, je velmi blízký nule.
2. Civilizace schopná vytvořit VR spustí takovou VR neodlišitelnou od naší reality jen v počtu velmi blízkém nule.
3. Podíl lidí žijících ve VR a popisujících realitu stejným způsobem, jako tak činíme my, se blíží 100 %.

Trilema tedy říká, že buď lidská civilizace nedosáhne technologické vyspělosti umožňující spuštění simulace, nebo se rozhodne simulaci nespouštět, přestože k tomu má prostředky, případně takovou simulaci spustí. Protože lze spustit simulaci i uvnitř simulace, počet osob uvnitř jednotlivých simulací brzy překoná počet osob žijících v původní, prvotní objektivní realitě. Tento poznatek trochu složitým způsobem popisuje třetí teze trilema.

Přestože Bostromovo trilema představuje pouze diskutabilní trojici tvrzení s různou mírou pravděpodobnosti, po publikaci se v médiích s jistou periodou začaly objevovat bombastické titulky, které hlásaly, že žijeme ve virtuální realitě a Bostromovo trilema je toho jednoznačným důkazem [6].

Brzy po publikování Bostromovy argumentace se vynořilo množství článků, které jeho závěry ostře odmítají [7, 8, 9]. Mimo jiné lze tvůrce VR snadno obvinít z jakéhokoliv násilí, které ve VR proběhne. Z etických důvodů tedy není pravděpodobné, že by technicky nepředstavitelně vyspělá civilizace umožnila existenci takové VR. Další argumenty proti existenci VR se pojí s uznáním pravdivosti prvního či druhého tvrzení, což vede k odmítnutí třetího tvrzení. Otázkou jsou rovněž limity, které se

vztahují k možnému výpočetnímu výkonu budoucích počítačů. Není také zcela zřejmé, zda dojde k úspěšné konstrukci využitelného kvantového počítače, což by samozřejmě celý problém osvětlilo. Dále je možné, že jsme jedna z prvních generací budoucí civilizace schopné simulační hypotézu uvést v praxi.

Lesk simulační hypotézy

Přestože leží simulační hypotéza na hraně mezi vědou a pseudovědou, najdeme několik oblastí, kde poskytuje vysvětlení problémů dosud odolávajících vyřešení. Příkladem může být konečná rychlost světla, kvantový koncept nelokálnosti či zjevný rozdíl mezi klasickou a kvantovou teorií. Mnoho těchto problémů je řešeno pomocí analogie s počítačovou hrou.

Ve filozofii se můžeme setkat s otázkou, zda padající strom v lese, kde není žádný pozorovatel (posluchač), vydává stejný rámus, jako když pád stromu bezprostředně pozorujeme (slyšíme). Stejný problém řešil Einstein, když Bohrovi položil otázku, zda existuje Měsíc, pokud se na něj nikdo nedívá. Simulační hypotéza kupodivu odpovídá, že strom žádný zvuk nevydává a v případě neexistence pozorovatele neexistuje ani Měsíc. Stejně tak není v počítačové hře neustále modelováno celé prostředí, kde se hráč může vyskytovat. Počítač simuluje jen takové jevy, které může hráč zaznamenat. Díky tomuto omezení klesají velmi výrazně nároky na výpočetní výkon. Bylo by možné tuto myšlenku nějak verifikovat? Proponenti simulační hypotézy poukazují na kvantovou neurčitost, která způsobuje podivný popis Schrödingerovy kočky, kdy stav kočky je mixem stavu „živá kočka“ a „mrtvá kočka“. Až do okamžiku pozorování není finální stav kočky znám, což připomíná počítač nemodelující realitu nedostupnou pozorovateli.

Principiální nemožnost současného přesného určení hodnot dvojice veličin, např. polohy a hybnosti, je z pohledu simulační hypotézy ukázkou úspornosti simulace. Pokud pozorovatel provádí měření na hraně rozlišení simulace, VR neposkytuje kompletní informaci o daném systému. Nekompletní informace se pak projevuje ztrátou determinismu.

Prostor samotný musí být dle simulační hypotézy kvantován, stejně jako čas. Podle simulační hypotézy tedy existuje element časoprostoru a VR modeluje vztahy mezi těmito elementy [4]. Tyto úvahy mírně korespondují se smyčkovou teorií gravitace, která předpokládá kvantování prostoru. V této souvislosti je však třeba poznamenat, že kvantování prostoru by ovlivnilo rychlost šíření elektromagnetického záření v závislosti na vlnové délce, což je důsledek narušení Lorentzovy symetrie. Takový

jev by byl pozorovatelný při detekci záření z velmi vzdálených výbuchů supernov tím způsobem, že by záření různých vlnových délek bylo detekováno v odlišných časech. Experimentálně tento jev nebyl potvrzen. Naopak, sonda Fermi nezaznamenala časový rozdíl v detekci záření z gama záblesku GRB090510 způsobený jinými než známými mechanismy [10].

Jednou z diskutovaných vlastností VR je možnost opravy simulace při nahromadění chyb. Opět se můžeme opřít o analogii z nám známého vývoje software. Každý, kdo pracuje dlouhodobě s nějakým programem, může software v případě výskytu chyby aktualizovat a záplatovat tak jeho nedostatky. Jak by se taková záplata projevila uvnitř VR? John D. Barrow, držitel Diracovy medaile, ztotožňuje samoopravovací schopnost VR s možným časovým vývojem některých konstant [11]. Tato časová změna konstant probíhá ovšem velice pomalu, což ztěžuje přímou detekci. Je však možné pozorovat velmi vzdálené a tudíž velmi staré objekty a analyzovat jejich spektrum. Analýza různě vzdálených objektů pak může ukázat drobné odchylky, které by naznačovaly změnu nám známých konstant [12]. Tento postup byl použit u spektra kvazarů a rozbořením jejich záření byly zjištěny náznaky pomalého nárůstu konstanty jemné struktury. Barrow tento nárůst připodobňuje samoopravovací schopnosti molekuly DNA, která by jinak v důsledku mutací a nahromaděných chyb netvořila příliš stabilní systém.

Oprávněným předpokladem VR je konečný výpočetní výkon, který omezuje náročné a potenciálně příliš zatěžující procesy. Jako příklad takového výpočetně náročného procesu můžeme uvést pohyb vysokou rychlostí nebo velkou koncentrací hmoty v prostoru [13]. Hypotetická simulace následně tyto procesy omezuje, což je realizováno pomalejším plynutím času. Dilatace času způsobená relativistickými rychlostmi či extrémním gravitačním polem tedy představuje v jistém smyslu obranný mechanismus VR proti přetížení, které by mohlo způsobit ztrátu vnitřní konzistentnosti. Rychlost světla jako horní limit rychlosti funguje obdobným způsobem, protože neexistence maximální rychlosti radikálně zvyšuje požadavky na výpočetní výkon nutný k provozu VR.

Dalším zajímavým důsledkem hypotetické simulace je ekvidistantní přístup k jednotlivým bodům v prostoru. Z pohledu zařízení, které simulaci provádí, jsou jednotlivé body v simulovaném prostoru vzdálené shodně. Podobně jako při promítání mapy světa na obrazovku má počítač informaci o všech bodech mapy zároveň a nemusí tak respektovat zobrazované vzdálenosti. Pro počítač tedy neplatí omezení, která by vyplývala ze

zobrazovaných vzdáleností a která by musel respektovat případný pozorovatel uvnitř simulace. Obhájci simulační hypotézy tak vysvětlují kvantový koncept nelokálnosti při popisu kvantově provázaných částic (EPR paradox). Tato nelokálnost byla potvrzena odvozením Bellových nerovností a z hlediska Kodaňské interpretace kvantové teorie se jedná o okamžitý kolaps vlnové funkce v celém prostoru. Mnoho fyziků tento výklad dráždí a mezi nespokojenci vynikal A. Einstein, který celý proces označil za „strašidelné působení na dálku“. Původ kvantové nelokálnosti ale ze simulační hypotézy vyplývá celkem přirozeně.

Bída simulační hypotézy

Odpůrci VR přinášejí argumenty nejen proti simulační hypotéze, ale i proti filosofickým úvahám Bostroma. Jeho trilema lze odmítnout několika způsoby. Základní variantou je faktická nemožnost simulace lidského vědomí. To vede k uznání pravdivosti první teze trilema a následnému konci dalších debat. Faktem je, že lidské vědomí je z hlediska biologie, filosofie natož fyziky neprobádanou půdou. Na současném stupni vývoje techniky jen těžko můžeme uvažovat o možnostech simulace lidského vědomí. Z tohoto důvodu je odmítnutí první teze trilema plauzibilní.

Dalším argumentem proti první tezi je technická proveditelnost VR. Přestože nedokážeme dohlédnout, jak se bude výpočetní technika a především rozhraní mezi uživatelem a počítačem vyvíjet v následujících dekadách či dokonce staletích, je vysoce nepravděpodobné, že bychom byli schopni realizovat VR i jen malého rozsahu ve srovnání se simulací celého vesmíru. Z našeho současného pohledu je tedy cíl funkční VR příliš vzdálený, pokud vůbec existuje. Protože však nejsme schopni vývoj výpočetní techniky predikovat, jedná se o slabší argument.

Každá nová hypotéza by měla stejně úspěšně popsat veškeré problémy řešené stávající teorií. Navíc by nová hypotéza měla být v určitých ohledech přesnější a hlubší. Z hlediska popperovského pojetí vědecké hypotézy by měla poskytovat testovatelné předpovědi, a tak být z principu vyvratitelná. Zásadním problémem mnoha variant simulační hypotézy je jejich nevyvratitelnost. V případě podání důkazu o objektivní realitě, což by vedlo k popření simulační hypotézy, lze vždy navrhnout hypotetickou VR obsahující takový důkaz. Jinými slovy, každý experiment nesouhlasící se simulační hypotézou by byl pro proponenty jen důkazem dokonalosti VR, která je schopna modelovat i důkazy proti své existenci. Je tedy zřejmé, že spekulacemi o VR můžeme snadno sklouznout do oblasti pseudovědy.

Na druhou stranu, pokud toto sklouznutí nedopustíme a zůstaneme pevně ukotveni na půdě vědy, jedná se o zajímavou intelektuální zábavu s často atraktivními závěry.

Základním kamenem simulační hypotézy je existence úplné teorie, která se následně ve VR uplatňuje. Z hlediska úspornosti se předpokládá, že existuje konečný soubor analyticky řešitelných rovnic, které popisují námi vnímanou realitu. Hypotetický počítač pak jednoduše tyto rovnice použije pro simulaci. Existují však situace, které analyticky řešit nelze a příkladem může být dobře známý problém N těles nebo řešení Navierovy–Stokesovy rovnice ve třech dimenzích. Tyto situace obecně nemají analytické řešení a je tedy nutné problém vyšetřit za použití numerických metod. Existence analyticky neřešitelných situací je silným argumentem proti simulační hypotéze.

Závěr

Simulační hypotéza se periodicky objevuje v médiích a její obhájce můžeme nalézt i mezi významnými fyziky. Některé závěry simulační hypotézy mohou podnítit hlubokou diskusi nad tak fundamentálními problémy, jako je kvantový koncept nelokálnosti či EPR paradox. Novodobá popularita této hypotézy spočívá ve filosofickém paradoxu, který je však mnohými badateli z dobrých důvodů odmítán. Stejně tak některé základní myšlenky simulační hypotézy neobstojí při bližším zkoumání – příkladem může být nemožnost analytického řešení problému N těles. Kromě mnoha technických obtíží čelí hypotéza i filosofickému problému spočívajícímu v amorálnosti simulace, ve které může dojít k neetickému jednání a za které by byl hypotetický tvůrce simulace zodpovědný. S naivními představami o virtuální realitě se lze setkat v pedagogické praxi díky rozšíření simulační hypotézy v kultuře a médiích.

Poděkování

Článek vznikl v rámci projektu CENTEM, reg. č. CZ.1.05/2.1.0003.0088, který je spolufinancován z ERDF v rámci programu MŠMT OP VaVpI, a v jeho navazující fázi udržitelnosti je podpořen projektem CENTEM PLUS (LO1402) financovaného v rámci programu MŠMT NPU I. Autor dále děkuje recenzentovi MFI za cenné připomínky.

Literatura

- [1] *Gohd, C.*: Are We Living in a Computer Simulation? Elon Musk Thinks So. *Futurism* [online] 13.4.2017 [cit. 21.2.2018]. Dostupné z: <https://futurism.com/are-we-living-in-a-computer-simulation-elon-musk-thinks-so/>
- [2] *Russel, B.*: The basic writings of Bertrand Russel. (Ed. Egner, R.E., Denon, L.E.) Routledge Classics, New York, 2009.
- [3] *Bostrom, B.*: Are you living in a computer simulation? *Philosophical Quarterly*, roč. 53 (2003), č. 211, s. 243–255.
- [4] *Beane, S. R., Davoudi, Z., Savage, M. J.*: Constraints on the Universe as a Numerical Simulation. *Eur. Phys. J. A*, roč. 50 (2014), s. 148.
- [5] *'t Hooft, G.*: The Cellular Automaton Interpretation of Quantum Mechanics. Springer, Heidelberg, 2016.
- [6] *Martin, S.*: ‘PROOF’ we’re living in a SIMULATION – top astronomers list vital checks to confirm theory. *Express* [online] [cit. 21.2.2018]. Dostupné z: <https://www.express.co.uk/news/science/737006/life-is-a-SIMULATION-neil-degrasse-tyson-brian-greene-elon-musk-simulation-theory>
- [7] *Birch, J.*: On the ‘Simulation Argument’ and Selective Scepticism. *Erkenntnis*, roč. 78 (2013), č. 1, s. 95–107.
- [8] *Lewis, J. P.*: The Doomsday Argument and the Simulation Argument. *Synthese*, roč. 190 (2013), č. 18, s. 4009–4022.
- [9] *Brueckner, A.*: The Simulation Argument Again. *Synthese*, roč. 68 (2008), č. 3, s. 224–226.
- [10] *Fermi GBM/LAT Collaborations*: Testing Einstein’s special relativity with Fermi’s short hand gamma-ray burst GRB090510. *Nature*, roč. 462 (2009), s. 331–334.
- [11] *Barrow, J. D.*: Living in a simulated universe. In: *Universe or Multiverse?* Cambridge: Cambridge University Press, 2007, s. 481–486.
- [12] *Webb, J. K. et al.*: Further Evidence for Cosmological Evolution of the Fine Structure Constant. *Phys. Rev. Lett.*, roč. 87 (2001), s. 091301.
- [13] *Whitworth, B.*: The physical world as a virtual reality: a prima facie case. *Research Letters in the Information and Mathematical Sciences*, roč. 11 (2007), s. 44–60.

ZPRÁVY

Ústřední kolo 67. ročníku MO (kategorie A)

Uspořádání ústředního kola v 67. ročníku Matematické olympiády v kategoriích A a P se ujala na základě pověření Ústřední komisí MO krajská komise MO Olomouckého kraje ve spolupráci s Gymnáziem Jakuba Škody v Přerově a Univerzitou Palackého v Olomouci.

Všichni soutěžící a členové Ústřední komise MO byli ubytováni v přerovském hotelu FIT, v jehož velkém konferenčním sále se také uskutečnila celá soutěž v kategorii A. Slavnostní zahájení soutěže však proběhlo v podvečer v neděli 26. března v aule přerovského Gymnázia Jakuba Škody za přítomnosti představitelů Olomouckého kraje, primátora statutárního města Přerov, zástupce rektora UP, děkana PřF UP v Olomouci a dalších hostů z oblasti společenského života. Jednotu českých matematiků a fyziků zde zastupoval její předseda *RNDr. Josef Kubát*.

Na základě jednotné koordinace úloh krajského (II.) kola v kategorii A a regulí soutěže pozvala Ústřední komise MO k účasti ve III. kole 45 nejlepších úspěšných řešitelů II. kola z celé České republiky, mezi nimi bylo 6 dívek. Z nich se však dva předem omluvili, takže vlastního finále se zúčastnilo 43 soutěžících. Na řešení obou trojic soutěžních úloh měli žáci již tradičně vyhrazeny po oba soutěžní dny, jimiž letos byly 19. a 20. březen, vždy 4,5 hodiny čistého času. Za každou úlohu mohli soutěžící získat nejvýše 7 bodů.

Přerovští organizátoři připravili pro soutěžící a pro členy Ústřední komise MO bohatý doprovodný program. Odpoledne po prvním soutěžním dnu absolvovali soutěžící prohlídku historické části Přerova, která byla ukončena exkurzí do provozu přerovského pivovaru ZUBR. Členové ÚK MO ocenili možnost navštívit po svém dopoledním zasedání největší firmu v Olomouckém kraji, přerovskou MEOPTU, která dlouhodobě patří mezi přední světové výrobce klasických optických výrobků a jejich komponentů. Druhý soutěžní den odpoledne se všichni účastníci přesunuli autobusem do Olomouce, kde nejprve absolvovali prohlídku nejvýznamnějších historických památek města, poté navštívili externí pracoviště PřF UP *Pevnost poznání* a nakonec absolvovali večerní prohlídku rekonstruované zříceniny středověkého hradu Helfštýn poblíž Lipníka nad Bečvou.

Vyhlášení výsledků soutěže a předání cen nejlepším řešitelům III. kola v kategorii A se uskutečnilo ve středu 21. března dopoledne opět v konferenčním sále hotelu FIT. Slavnostního aktu se zúčastnili také zástupci skupiny ČEZ, kteří speciálně ocenili tři nejlepší řešitele ústředního kola soutěže. Předseda ÚK MO *doc. Jaromír Šimša* v závěrečném projevu poděkoval celému týmu organizátorů

III. kola v kategorii A, především pak řediteli GJŠ v Přerově *Mgr. Janu Raškovi* a předsedovi krajské komise MO v Olomouckém kraji *RNDr. Pavlu Calábkovi, Ph.D.*, za kvalitní přípravu a zdařilý průběh celého ústředního kola 67 ročníku MO v kategorii A.

Závěrem uvádíme texty soutěžních úloh ústředního kola v kategorii A a dále přehled vítězů a dalších úspěšných řešitelů 67. ročníku MO v kategorii A.

19. března 2018

1. Ve společnosti lidí jsou některé dvojice spřátelené. Pro přirozené číslo $k \geq 3$ řekneme, že společnost je k -dobrá, pokud lze každou k -tici lidí ze společnosti rozsadit kolem kruhového stolu tak, že se každý dva sousedé přátelí. Dokažte, že je-li společnost 6-dobrá, pak je i 7-dobrá. *Josef Tkadlec*
2. Reálná čísla x, y, z jsou zvolena tak, že čísla

$$\frac{1}{|x^2 + 2yz|}, \quad \frac{1}{|y^2 + 2zx|}, \quad \frac{1}{|z^2 + 2xy|}$$

jsou délkami stran (nedegenerovaného) trojúhelníku. Určete všechny možné hodnoty výrazu $xy + yz + zx$. *Michal Rolínek*

3. Je dán trojúhelník ABC . Osa úhlu při vrcholu A protíná stranu BC v bodě D . Označme E, F středy kružnic opsaných trojúhelníkům ABD, ACD . Jakou velikost může mít úhel BAC , leží-li střed kružnice opsané trojúhelníku AEF na přímkce BC ? *Patrik Bak*

20. března 2018

4. Uvažujme libovolnou trojici celých čísel a, b, c , která jsou délkami stran trojúhelníku, nemají společného dělitele většího než 1 a pro něž jsou hodnoty všech tří zlomků

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{a + b - c}, \quad \frac{b^2 + c^2 - a^2}{b + c - a}, \quad \frac{c^2 + a^2 - b^2}{c + a - b}$$

celočíslné. Dokažte, že součin jmenovatelů těchto tří zlomků nebo jeho dvojnásobek je druhou mocninou celého čísla. *Jaromír Šimša*

5. Je dán rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ s delší základnou AB . Označme I střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC a J střed kružnice připsané straně AD trojúhelníku ACD . Dokažte, že přímky IJ a AB jsou rovnoběžné. *Patrik Bak*

6. Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že pro libovolné obarvení čísel $1, 2, 3, \dots, n$ třemi barvami existují mezi uvedenými čísly dvě čísla téže barvy, jejichž rozdíl je druhá mocnina přirozeného čísla. *V. Bálint, M. Rolínek, J. Tkadlec*

Nejúspěšnější řešitelé ústředního kola 67. ročníku MO v kategorii A:

Vítězové:

1. *Pavel Hudec* (8/8, GJGJ, Praha 1) 41 b., 2. *Danil Koževnikov* (8/8, GJK Praha 6) 40 b., 3. *Matěj Doležálek* (7/8, G Humpolec) 36 b., 4. *Martin Raška* (8/8, WG Ostava-Poruba) 32 b., 5. *Lenka Kopfová* (3/4, Mendelovo G Opava) 30 b., 6. *Josef Minařík* (7/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše) 26 b., 7. *Filip Čermák* (4/4, Mendelovo G Opava) 25 b., 8. *Radek Olšák* (7/8, Menza G, Praha 6) 24 b., 9. *Vít Jelínek* (8/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše) 22 b., 10. *Jonáš Havelka* (6/8, G České Budějovice, Jírovcova) 22 b.

Úspěšní řešitelé:

11. *Filip Svoboda* (3/4, G Brno, Elgartova) 21 b., 12. *Jana Pallová* (7/8, G Jakuba Škody Přerov) 20 b., 13. *Tomáš Perutka* (8/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše) 19 b., 14. *Tomáš Sourada* (7/8, G Žamberk) 18 b., 15. *Dalibor Kramář* (7/8, G Brno-Řeckovice) 17 b., 16. *Václav Steinhauser* (4/4, G Dačice) 17 b., 17. *Hedvika Ranošová* (8/8, G Praha 4, Budějovická) 16 b., 16. *Petr Gebauer* (8/8, G Jana Palacha, Mělník) 16 b., 19. *Vít Pískovský* (8/8, G Olgy Havlové, Ostrava-Poruba) 16 b., 20. *Matěj Konvalinka* (8/8, GaSOŠE Sedlčany) 16 b., 21. *Adam Janich* (4/4, G Praha 9, Špitálská) 16 b.

V případě rovnosti bodů rozhodla o pořadí vítězů a úspěšných řešitelů pravidla uvedená v soutěžním řádu MO. Kompletní výsledkovou listinu můžete najít na oficiálních stránkách MO (www.matematickaolympiada.cz).

Účast na výběrovém soustředění před 59. mezinárodní matematickou olympiádou, které se konalo v posledním dubnovém týdnu v Kostelci nad Černými lesy, si tak vybojoval všech deset vítězův ústředního kola v kategorii A. Z nich pak bylo vybráno šestičlenné české reprezentační družstvo pro aktuální IMO, která se uskuteční v první polovině července v Rumunsku (Cluj-Napoca). Na tomto soustředění bylo vybráno také šestičlenné družstvo (sestavené z dalších úspěšných řešitelů – nematurantů) pro 12. ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO), která se bude konat na konci srpna 2018 v Bielsko-Biale (Polsko). Podrobné zprávy o účasti českých reprezentačních týmů na 59. IMO i na 12. MEMO najdete v této rubrice v následujících číslech našeho časopisu.

Jaroslav Švrček