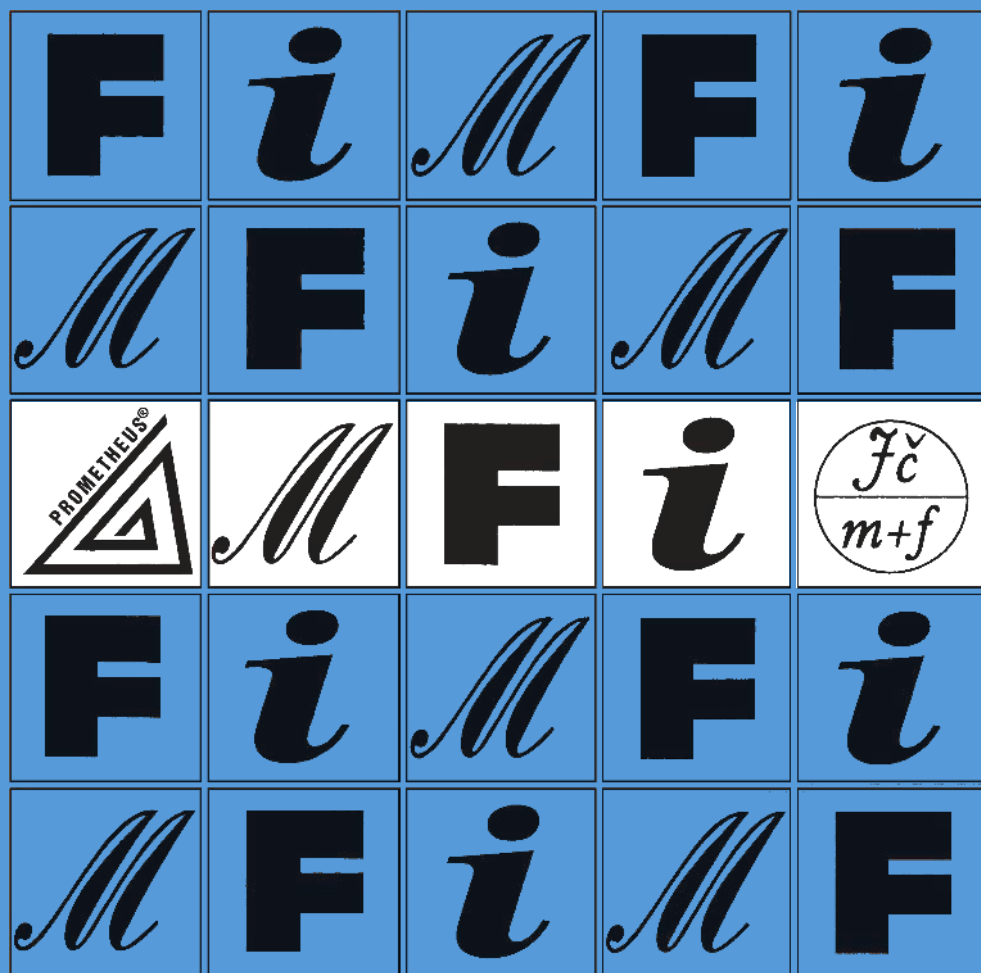


MATEMATIKA 4 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXVII (2018), číslo 4

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Oldřich Lepil – vedoucí redaktor a redaktor pro fyziku

Jaroslav Švrček – redaktor pro matematiku

Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Lukáš Richterek – redaktor WWW stránek

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Štěpán Hubálovský, Růžena Kolářová, Miluše Lachmannová, Pavel Leischner, Dana Mandíková, Oldřich Odvárko, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Emanuel Svoboda, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel Töpfer, Bohumil Vybíral

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>P. Leischner: Thébauldův problém 3887</i>	241
<i>P. Tlustý, I. Krech: O jedné úloze z AIME</i>	251
<i>T. Hanusová, M. Štěpánová: Leonardův dráp a Leonardovo zrcadlo</i>	256
<i>Zajímavé matematické úlohy</i>	268

FYZIKA

<i>O. Lepil: Nové vydání učebnice Mechanické kmitání a vlnění</i>	267
<i>V. Štefl: Keplerovy zákony ve výuce fyziky na gymnáziu</i>	278
<i>Č. Kodejška, J. Říha: Obecné řešení Buquoyovy úlohy</i>	288

INFORMATIKA

<i>L. Benediktová: iBooks Author ve výuce na základní škole</i>	291
<i>J. Frank, V. Vrbík: Jedno méně obvyklé užití programu GeoGebra</i>	300

ZPRÁVY

<i>P. Töpfer: Ústřední kolo 67. ročníku MO (kategorie P)</i>	306
<i>M. Rolínek, J. Tkadlec: Dvě stříbra a dva bronz z IMO 2018</i>	308
<i>J. Švrček, J. Zhouf: EGMO 2018 v Itálii</i>	312

LITERATURA

<i>Recenze knihy Martiny Bečvářové a kol.: Matematika ve středověké Evropě</i>	318
--	-----

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Obr. 1 Ilustrace k problému 3887

Problém 3887 (*Upravený překlad z časopisu Monthly.*)

Uvnitř strany BC trojúhelníku ABC je zvolen bod M . Kružnice $h_1(O_1; r_1)$ a $h_2(O_2; r_2)$ vepsané do úhlů AMB a AMC mají vnitřní dotyk s kružnicí trojúhelníku opsanou (obr. 1). Je-li φ velikost úhlu AMC a

$v(I; \rho)$ kružnice trojúhelníku vepsaná, pak přímka O_1O_2 prochází bodem I ,

$$\frac{|O_2I|}{|O_1I|} = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \quad (1)$$

a

$$r_1 + r_2 = \rho^2 \sec^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (2)$$

Poznamenejme, že vztah (2) je zřejmě nepravdivý (nevyhovuje ani rozměrově). Řešitelé problému jej později nahradili správným vztahem

$$r_1 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + r_2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \rho. \quad (3)$$

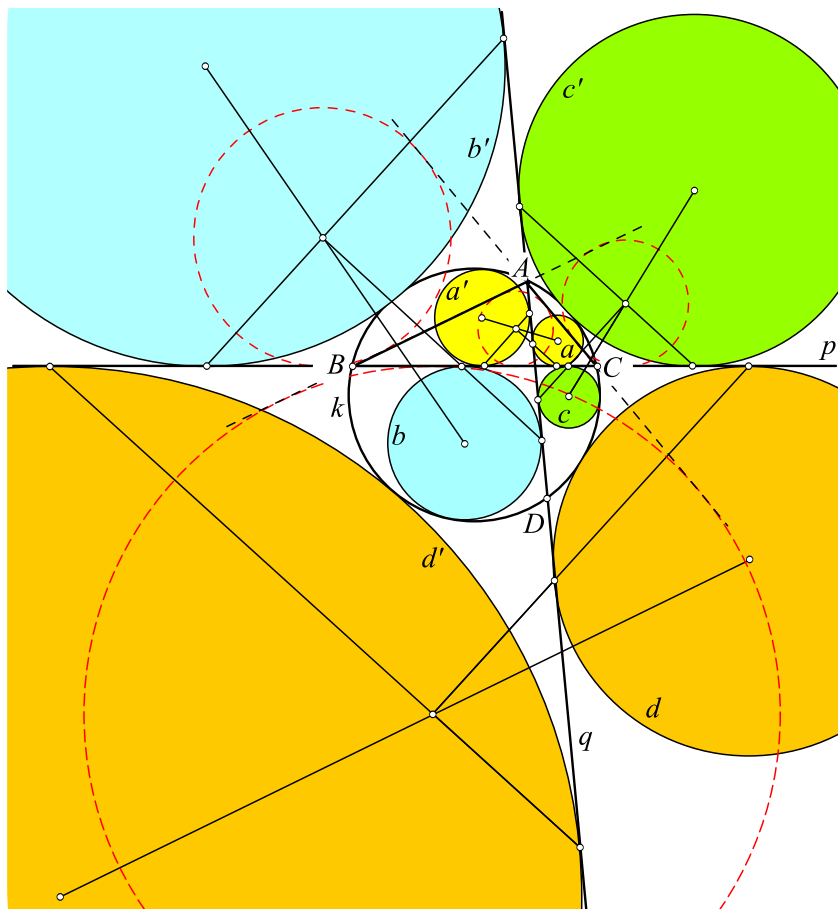
Je zarážející, že Thébaultovo tvrzení o kolineárnosti bodů O_1 , O_2 a I tvoří část obecnější věty kterou v témže časopise dokázal japonec Y. Sawayama [3] o 33 let dříve. Třístránkový článek nějakého instruktora Ústřední vojenské školy v Tokiu čtenáře pravděpodobně nezaujal a brzy se na něj zapomnělo.

Sawayama se zabýval množinou osmi kružnic, které se dotýkají dané kružnice k a jejích sečen p a q s průsečíkem uvnitř kružnice (obr. 2). Dokázal, že pro libovolný ze čtyř možných trojúhelníků, jejichž vrcholy leží v průsečících kružnice se sečnami, lze kružnice množiny rozdělit do čtyř dvojic tak, že v každé dvojici se středná a přímky procházející body dotyku přímek p , q s každou z obou kružnic protínají ve středu kružnice buď vepsané, nebo připsané zvolenému trojúhelníku.

Na obr. 2 vidíme jednu z možných situací. Zvolen je trojúhelník ABC , příslušné kruhy mají v každé dvojici stejnou barvu. Žluté kruhy odpovídají situaci z Thébaultova problému.

Co se týká reakce matematiků na Thébaultův problém, není známo žádné řešení z období let 1938 až 1972. V roce 1962 připomněl Thébaultův problém C. S. Ogilvy v publikaci *Matematika zítřka, nevyřešené problémy pro amatéry*. Zmínil zde, že úloha je mimořádně obtížná, avšak zřejmě řešitelná elementárními metodami. Teprve po překladu knihy do němčiny (1969) a jejím druhém vydání v angličtině (1972) se začínají objevovat první publikované příspěvky k problému.

Holandští matematici, H. Streefkerk, B. C. Dijkstra-Kluyver a G. R. Veldkamp uvedli v letech 1973 a 1974 několik různých řešení v časopise *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*. Jejich práce nepronikly za hranice Holandska.



Obr. 2 Sawayamovy kružnice

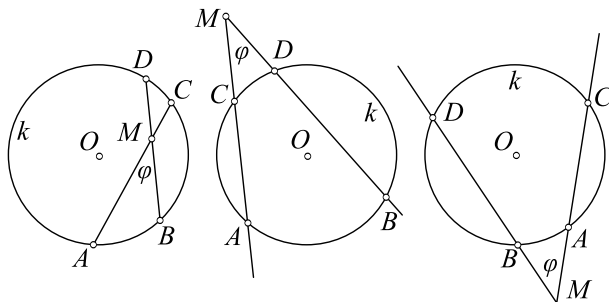
Jako první poslal své řešení do Monthly B. J. English v roce 1975. To se však někde v redakci ztratilo a bylo otištěno až v roce 2003. Vešlo se na dvě stránky.

První řešení zmíněné v Monthly [4] je z roku 1983 a pochází od K. V. Taylora. Údajně má rozsah 24 stránek. Původní příspěvek však editor časopisu s omluvou autorovi zredukoval na půl stránky, takže se z toho čtenář moc nedozví. Pověst o obtížnosti důkazu nyní již *Thébaultovy věty* vzrostla a následovala řada dalších příspěvků.

Na existenci Sawayamova článku [3] upozornil roku 2003 Jean-Luis Ayme [1] po zpřístupnění prvních ročníků Monthly na JSTOR. Od té doby se prosazuje název *Sawayamova–Thébaultova věta*.

Tvrzení o kolinearitě bodů O_1 , O_2 a I můžeme pokládat za důsledek několika geometrických vět, s nimiž se nyní seznámíme. První tři z nich připomínají základní poznatky. Protože budeme pracovat s úhly v kružnici, upřesníme nejprve některé pojmy.

Body A , B kružnice k určují dva oblouky. V zájmu jednoznačnosti budeme rozlišovat oblouk AB od oblouku BA . První z nich je určen pohybem po kružnici od A k B druhý pohybem od B k A . Přitom oba pohyby jsou proti směru pohybu hodinových ručiček. Velikost orientovaného středového úhlu AOB budeme nazývat *úhlová velikost oblouku AB* a značit ω_{AB} .



Obr. 3 Věta o úhlu sečen

Věta 1 (o úhlu sečen)

Nechť AC a BD jsou sečny z bodu M ke kružnici k a $\varphi = |\angle AMB|$. Pak pro každou ze situací znázorněných na obr. 3 platí

$$2\varphi = |\omega_{AB} + \omega_{CD}|. \quad (4)$$

Důkaz. Středem O kružnice k vedme tětiny $VY \parallel AC$ a $XZ \parallel BD$ (obr. 4).

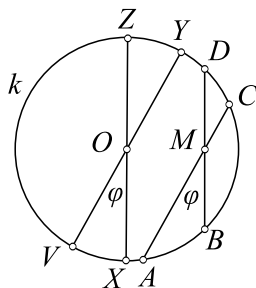
Platí $\omega_{VX} = \omega_{YZ} = \varphi$, $\omega_{DZ} = \omega_{XB}$ a $\omega_{VA} = \omega_{CY}$, neboť oblouky ohraničené rovnoběžnými sečnami jsou shodné. Odtud

$$\omega_{DY} + \omega_{YZ} = \omega_{XA} + \omega_{AB} \quad \text{a} \quad \omega_{VX} + \omega_{XA} = \omega_{CD} + \omega_{DY}.$$

Sečtením obou rovností obdržíme $\omega_{YZ} + \omega_{VX} = \omega_{AB} + \omega_{CD}$ a odtud (3).

Poznámka. Umístěním sečen tak, aby platilo $C = D = M \in k$, dostaneme větu o obvodových úhlech:

$$2\varphi = |\omega_{AB}|. \quad (5)$$

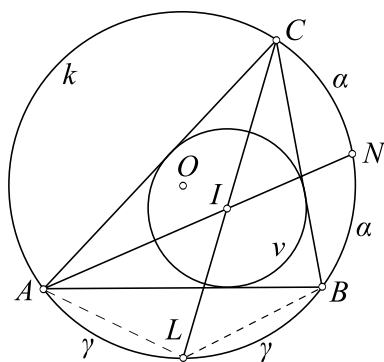


Obr. 4 K důkazu věty o úhlu sečen

Věta 2 (Euler)

Je-li L průsečík osy vnitřního úhlu ACB libovolného trojúhelníku ABC s opsanou kružnicí a I střed vepsané kružnice, pak

$$|AL| = |BL| = |IL|. \quad (6)$$



Obr. 5 K důkazu věty 2

Důkaz. Nechť osa úhlu BAC protíná opsanou kružnici v bodě N (obr. 5). Pomocí (5) snadno zjistíme $\omega_{AL} = \omega_{LB} = \gamma$ a $\omega_{BN} = \omega_{NC} = \alpha$. Ze shodnosti oblouků AL a LB plyne první z dokazovaných rovností.

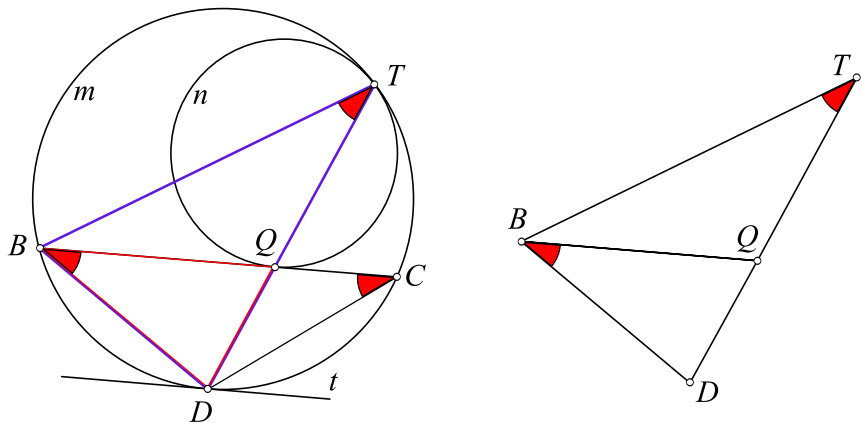
K důkazu druhé stačí ukázat, že $|\sphericalangle LAI| = |\sphericalangle AIL|$. To však plyne z aplikace vztahu (4) na dvojice tětiv LA , NA a AN , LC :

$$2|\sphericalangle LAI| = 2|\sphericalangle LAN| = |\omega_{LB} + \omega_{BN}| = \gamma + \alpha = |\omega_{AL} + \omega_{NC}| = 2|\sphericalangle AIL|.$$

Věta 3 (zobecnění Eukleidovy věty o odvěsně)

Nechť má kružnice n vnitřní dotyk s kružnicí m v bodě T a tětiva BC kružnice m se dotýká kružnice n v bodě Q (obr. 6). Je-li $D \neq T$ průsečík kružnice m s přímkou TQ , pak platí

$$|DB|^2 = |DT| \cdot |DQ|. \quad (7)$$



Obr. 6 K důkazu věty 3

Důkaz. Stejnolehlost se středem T , jež převádí kružnici n na kružnici m , zobrazí tečnu BC kružnice n na tečnu t kružnice m , přičemž $t \parallel BC$. Bod D je obrazem bodu Q . Je tedy bodem dotyku kružnice m s přímkou t a proto i středem oblouku BC . Shodným obloukům DC a BD odpovídají shodné tětivy i shodné obvodové úhly DBC , BCD a BTQ (obr. 6). Trojúhelníky BDQ a TDB mají navíc společný úhel při vrcholu D . Z jejich podobnosti podle věty *uu* plyne $\frac{|DB|}{|DT|} = \frac{|DQ|}{|DB|}$ a odtud (7).

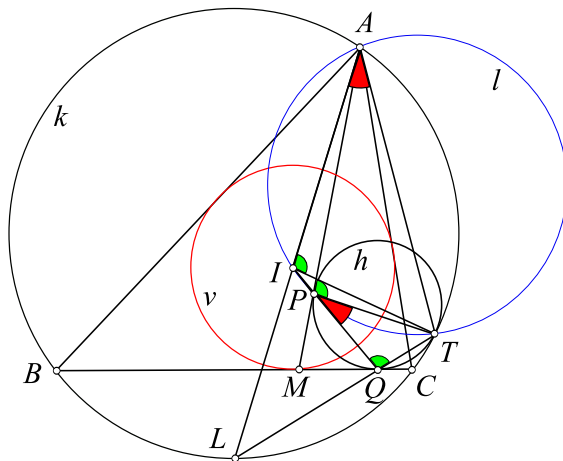
Poznámka. Za předpokladu $|\sphericalangle DBQ| = |\sphericalangle BTD|$ platí vztah (7) pro každý trojúhelník BDT s bodem Q uvnitř strany DT (obr. 7 vpravo). Má-li tento trojúhelník pravý úhel při vrcholu B , je bod Q patou jeho výšky a vztah vyjadřuje Eukleidovu větu o odvěsně.

Věta 4

Uvnitř strany BC libovolného trojúhelníku ABC je zvolen bod M a do úhlu AMC vepsána kružnice h tak, že má vnitřní dotyk T s kružnicí k opsanou trojúhelníku ABC . Střed kružnice trojúhelníku vepsané

označme I . Kružnice h se dotýká úsečky MB v bodě Q a protíná úsečku QI v bodě P . Pak platí:

- Čtyřúhelník $ATPI$ je tětiový,
- P je bodem dotyku kružnice h s přímkou AM .



Obr. 7 K důkazu věty 4

Důkaz

a) Stejnolehlost se středem T , jež převádí kružnici h na kružnici k , zobrazí oblouk TQ na oblouk TL (obr. 6). Obvodové úhly QPT a LAT jsou proto shodné a platí $|\sphericalangle IAT| + |\sphericalangle TPI| = |\sphericalangle QPT| + |\sphericalangle TPI| = 180^\circ$. Čtyřúhelník $ATPI$ je tětiový.

b) Užitím (7) a (6) zjistíme $|LI|^2 = |LQ| \cdot |LT|$, neboli

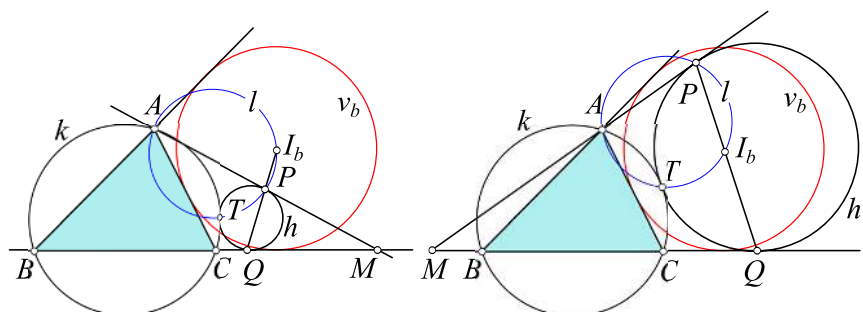
$$\frac{|LI|}{|LT|} = \frac{|LQ|}{|LI|}.$$

Trojúhelníky LQI a LIT jsou podle věty *sus* podobné (shodují se v úhlu při vrcholu L a poměru přilehlých stran). Mají tedy shodné vnější úhly TQI a TIA . I obvodové úhly TIA a TPA jsou shodné.

Z rovností $|\sphericalangle TQP| = |\sphericalangle TQI| = |\sphericalangle TPA|$ pak plyne, že AM je tečna ke kružnici h .

Větu 4 lze analogicky vyslovit a dokázat i pro vnější dotyk kružnic h, k . Střed kružnice vepsané je ovšem nutno nahradit středem některé z při-

psaných kružnic. Dokonce ji lze zformulovat a dokázat pro situace, kdy bod M leží vně trojúhelníku na prodloužené straně BC . (Některé z nich znázorňuje obr. 8.)



Obr. 8 Sawayamovo lemma, vnější situace

Sawayama vyšetřil všechny tyto situace metodami podobnými našemu postupu. Výsledek lze shrnout do věty 5, kterou uvádíme jako ekvivalenci. (Platnost obrácené implikace je důsledkem faktu, z faktu, že všechny kružnice vepsané do daného úhlu mají tětiny s krajními body v bodech dotyku kružnice s rameny úhlu navzájem rovnoběžné.)

Věta 5 (*Sawayamovo lemma*).

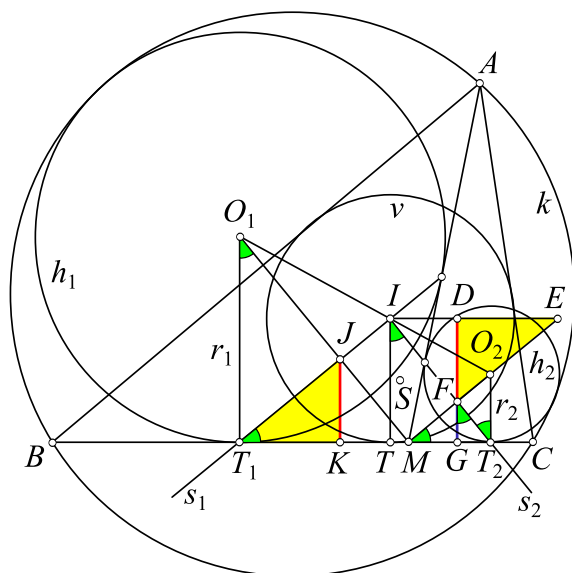
Nechť je dán trojúhelník ABC s bodem M na přímce BC různým od vrcholů B a C . Kružnice, která se dotýká přímek AM a BC v bodech P a Q , má dotyk s kružnicí opsanou trojúhelníku ABC , právě když přímka PQ prochází středem kružnice trojúhelníku buď vepsané, nebo připsané.

Věta 6

Mají-li kružnice $h_1(O_1; r_1)$ a $h_2(O_2; r_2)$ společnou vnitřní tečnu p s body dotyku A_1 a A_2 a vnější tečnu q s body dotyku B_1 a B_2 , pak se přímky A_1B_1 , A_2B_2 , a O_1O_2 , protínají v jediném bodě.

Důkaz. Přímky VO_1 a VO_2 jsou navzájem kolmé, neboť to jsou osy různoběžek p , q . Snadno nahlédneme, že $A_1B_1 \perp VO_1$ a $A_2B_2 \perp VO_2$. Přímky A_1B_1 a A_2B_2 tedy svírají pravý úhel a jejich průsečík K leží v průniku Thaletových kružnic m a n s průměry A_1A_2 a B_1B_2 .

Nechť L je druhý průsečík kružnic m a n . Přímka KL je jejich chordála. Střed O_2 kružnice h_2 na ní leží, protože má stejnou mocnost r_2^2 od obou kružnic. Analogicky zdůvodníme, že i bod O_1 leží na přímce KL .



Obr. 10 K důkazu problému 3887

Souměrnost podle středu S pravoúhelníku $IJMF$ zobrazuje bod J na bod F a úsečku MT_1 na úsečku $IE \parallel BC$. Trojúhelník KJT_1 zobrazuje na trojúhelník DFE . Platí tedy

$$\rho = |IT| = |DG| = |DF| + |FG| = |JK| + |FG| = r_1 \sin^2 \frac{\varphi}{2} + r_2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Závěr

Příspěvek vznikl z autorovy přednášky na Soustředění nejlepších řešitelů 65. ročníku MO (Janské Lázně, 2016). Lze jej využít pro práci s matematickými talenty na střední škole.

Tak zvaná Sawayamova–Thébaultova věta tvoří jen část toho, co uvedl Sawayama. Přidané trigonometrické vztahy lze považovat za pouhý doplněk k zásadnímu poznatku, kolinearitě bodů O_1 , O_2 a I .

Sawayamův výsledek je obecnější, týká se i kružnic s vnějšími dotyky a neváže se na jediný trojúhelník. Měl by se formulovat samostatně jako *Sawayamova věta*, jejímž důsledkem je například Feuerbachova věta. K této problematice se vrátíme v některém z příštích čísel časopisu.

Literatura

- [1] *Ayme, J.-L.*: Sawayama and Thébault's theorem, *Forum Geometricorum*, roč. 3 (2003), s. 225–229. Dostupné na:
<http://forumgeom.fau.edu/FG2003volume3/FG200325index.html>
- [2] *Ogilvy, C. S.*: Tomorrow's math, unsolved problems for amateur, Oxford University Press, 1972, s. 82–83.
- [3] *Sawayama, Y.*: A new geometrical proposition, *The American Mathematical Monthly*, roč. 12 (1905), č. 12, s. 222–224. Dostupné na:
<http://www.jstor.org/action/showAdvancedSearch>
- [4] *Taylor, K. B.*: Solution of Problem 3887, *The American Mathematical Monthly*, roč. 90 (1983), č. 7, s. 486–487.

O jedné úloze z AIME

PAVEL TLUSTÝ – IRENEUSZ KRECH

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice – Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków

Ve Spojených státech amerických existuje nepřeberné množství nej-různějších matematických soutěží. K nejprestižnějším patří samozřejmě USAMO (matematická olympiáda Spojných států), jejíž nejúspěšnější řešitelé reprezentují USA na mezinárodní matematické olympiádě. USAMO je organizována v několika kvalifikačních kolech s rostoucí obtížností (např. v roce 2013 se z počátečních 350 000 řešitelů kvalifikovalo do finálové části jen 264 nejlepších). Ve druhém kole (označovaném jako AIME – American Invitational Mathematics Examination) řeší studenti 15 úloh během tří hodin z nej-různějších témat středoškolské matematiky. Řešení problémů v tomto kole již vyžaduje nejenom „kreativní“ užití matematických znalostí, ale i značnou obratnost, neboť studenti mají na řešení jedné úlohy v průměru 12 minut. Pravidelně se objevují i úlohy z počtu pravděpodobnosti, které vždy patří k těm obtížnějším a časově náročnějším. Na druhé straně se u nich v největší míře uplatňuje kreativita řešitelů, tj. obvykle se najde několik zcela různých řešení, jak si ukážeme na 15. úloze z roku 1995.

AIME 1995 – 15. úloha

Označme p pravděpodobnost, že při opakovaném hodu (symetrickou) mincí se objeví posloupnost pěti po sobě jdoucích rubů dříve než posloupnost dvou po sobě jdoucích líců. Hledané p zapíšeme ve tvaru $\frac{m}{n}$, kde m a n jsou nesoudělná přirozená čísla. Kolik je $m + n$?

Nejdříve si ukážeme originální řešení uvedené v [4].

1. řešení

Spočítáme pravděpodobnost doplňkového jevu, tj. určíme s jakou pravděpodobností se objeví dříve posloupnost ll než posloupnost $rrrrr$. Označme r_i pravděpodobnost, že posloupnost ll nastane dříve než posloupnost $rrrrr$, pokud v i posledních hodech padl rub (jde tedy o podmíněnou pravděpodobnost). Podobně označíme l_i pravděpodobnost, že posloupnost ll nastane dříve než posloupnost $rrrrr$, pokud v i posledních hodech padl líc. Pak platí, že $r_5 = 0$ a $l_2 = 1$. Pokud budeme znát r_1 a l_1 , je hledaná pravděpodobnost rovna

$$\frac{1}{2}(r_1 + l_1),$$

neboť v prvním hodu nám se stejnou pravděpodobností $\frac{1}{2}$ padne rub, nebo líc. Pro l_1 platí, že

$$l_1 = \frac{1}{2}l_2 + \frac{1}{2}r_1,$$

protože pokud v posledním hodu padl líc, tak v následujícím hodu padne líc s pravděpodobností $\frac{1}{2}$ a jsme ve stavu l_2 nebo se stejnou pravděpodobností padne rub a dostaneme se do stavu r_1 . Podobně platí:

$$r_1 = \frac{1}{2}r_2 + \frac{1}{2}l_1,$$

$$r_2 = \frac{1}{2}r_3 + \frac{1}{2}l_1,$$

$$r_3 = \frac{1}{2}r_4 + \frac{1}{2}l_1,$$

$$r_4 = \frac{1}{2}r_5 + \frac{1}{2}l_1.$$

Vzhledem k tomu, že $r_5 = 0$, dostaneme z poslední rovnice, že $r_4 = \frac{1}{2}l_1$. Dále postupně dostaneme

$$r_3 = \frac{1}{2}r_4 + \frac{1}{2}l_1 = \frac{3}{4}l_1, \quad r_2 = \frac{1}{2}r_3 + \frac{1}{2}l_1 = \frac{7}{8}l_1, \quad r_1 = \frac{1}{2}r_2 + \frac{1}{2}l_1 = \frac{15}{16}.$$

Protože

$$l_1 = \frac{1}{2}l_2 + \frac{1}{2}r_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{16}l_1, \text{ tak } l_1 = \frac{16}{17} \text{ a } r_1 = \frac{15}{16} \cdot \frac{16}{17} = \frac{15}{17}.$$

Víme tedy, že posloupnost ll nastane dříve než posloupnost $rrrrr$, s pravděpodobností $\frac{1}{2}(r_1 + l_1) = \frac{31}{34}$. Opačný jev nastane s pravděpodobností $p = \frac{3}{34}$ a tedy $m = 3$ a $n = 34$. Součet $m + n$ je roven 37.

V publikaci [1] najdeme jiné řešení, které uvádíme v originálním znění. Tento přístup se zdá rychlejší, ale to může být způsobeno tím, že jsou vynechány některé úvahy nebo výpočty (např. vyřešení soustavy rovnic).

2. řešení

Posloupnost rubů a líců nazveme *úspěšnou*, pokud se v této posloupnosti řetězec $rrrrr$ objeví dříve než řetězec ll . Úspěšné posloupnosti jsou trojího druhu:

- (i) První písmeno je l , pak následuje úspěšná posloupnost s prvním písmenem r .
- (ii) Na počáteční znak/y r , rr , rrr , nebo $rrrr$ navazuje úspěšná posloupnost začínající znakem l .
- (iii) Posloupnost $rrrrr$.

Označme P_r pravděpodobnost, že získáme úspěšnou posloupnost začínající znakem r a P_l pravděpodobnost, že získáme úspěšnou posloupnost začínající znakem l . Pak

$$P_l = \frac{1}{2}P_r$$
$$P_r = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) P_l + \frac{1}{32}$$

Po vyřešení této soustavy rovnic dostaneme

$$P_r = \frac{1}{17} \text{ a } P_l = \frac{1}{34}.$$

Pak

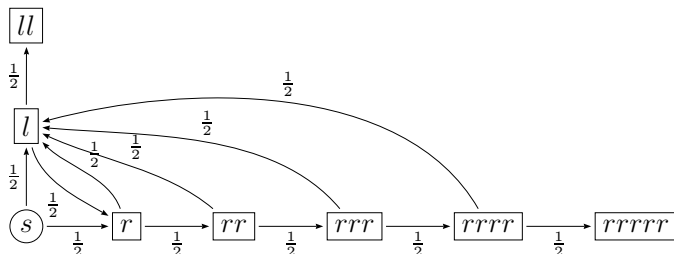
$$p = \frac{1}{17} + \frac{1}{34} = \frac{3}{34}$$

a tedy $m = 3$ a $n = 34$. Součet $m + n$ je roven 37.

Je zřejmé, že obě uvedená řešení vyžadují podstatně více času než jen 12 minut. Autorům tohoto příspěvku se podařilo najít ještě tři jiná řešení. Dvě z nich jsou časově přibližně stejně náročná jako 1. a 2. řešení. Nejjednodušší a časově nejrychlejší řešení využívající vlastností stochastického grafu si nyní ukážeme i s podrobným vysvětlením.

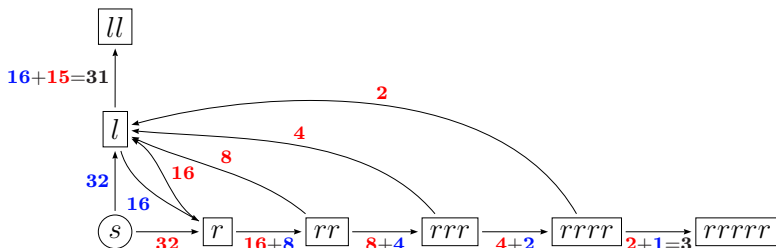
3. řešení

Posloupnost rubů a líců a její stav v každém okamžiku si můžeme znázornit jako hru, v níž se figurka pohybuje po hracím plátnu na obr. 1. Na začátku hry stojí figurka na políčku $\textcircled{s}$ a podle výsledků jednotlivých hodů se přesouvá po hracím plátně tak dlouho, až dorazí buď do bodu $\boxed{ll}$, nebo do bodu $\boxed{ll}$.



Obr. 1 Stochastický graf jako hrací plátno hry

Představme si, že na počátku hry stojí 64 figurek v bodě $\textcircled{s}$ a jednotlivé pravděpodobnosti na obr. 1 interpretujeme jako poměr, ve kterém se figurky v daném bodě rozdělí k dalšímu putování ve směru šipek. Zajímá nás, kolik figurek dojde (**bez vracení**) do bodu $\boxed{ll}$ a kolik do bodu $\boxed{rrrrrr}$. Z bodu $\textcircled{s}$ vyjde 64 figurek a polovina z nich, tj. 32 dorazí do bodu $\boxed{r}$. Druhá polovina (32 figurek) dojde do bodu $\boxed{l}$, viz obr. 2.



Obr. 2 Figurky na grafu hry

Sledujme nejprve „modré“ figurky. Z bodu $\boxed{l}$ polovina figurek (tj. 16) dojde do cíle v bodě $\boxed{ll}$. Druhá polovina (16 figurek) dojde do bodu $\boxed{r}$. Osm z nich dorazí do bodu $\boxed{rr}$ a do každého z následujících bodů dojde vždy polovina figurek, z bodu předešlého. Do cíle v bodě $\boxed{rrrrr}$ dorazí tak jediná figurka.

Podobně postupujeme i v případě „červených“ figurek. Z 32 figurek v bodě $\boxed{r}$ dorazí do cíle v bodě $\boxed{rrrrr}$ dvě figurky. Do bodu $\boxed{l}$ přejde postupně celkem $16 + 8 + 4 + 2 = 30$ figurek a polovina z nich, tj. 15 figurek dorazí do cíle v bodě $\boxed{ll}$.

Do bodu $\boxed{rrrrr}$ dorazily celkem 3 figurky, do bodu $\boxed{ll}$ dorazilo celkem 31 figurek. Pak

$$p = \frac{3}{31 + 3} = \frac{3}{34}$$

a tedy $m = 3$ a $n = 34$. Součet $m + n$ je roven 37.

Na mnoha případech jsme si ověřili, že k vytvoření stochastického grafu a určení počtu „putujících figurek“ stačilo studentům 5–7 minut. Uvedenou metodu navíc úspěšně zvládlo široké spektrum studentů, nejenom zájemců o matematiku.

Literatura

- [1] *Andreescu, T., Gelca, R.*: Putnam and Beyond. Springer, 2007.
- [2] *Thlusty, P., Krech, I.*: Stochastické grafy jako nástroj řešení matematických úloh. MFI, roč. 19, (2010), č. 5, s. 257–260.
- [3] *Krech, I., Thlusty, P.*: Stochastické grafy a jejich aplikace. Jihočeská univerzita, České Budějovice 2012.
- [4] https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=1995_AIME [cit. 25. 3. 2018].

Leonardův dráp a Leonardovo zrcadlo

TEREZA HANUSOVÁ – MARTINA ŠTĚPÁNOVÁ

ZŠ Burešova, Praha – Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Leonardo da Vinci (1452–1519), rodným jménem Leonardo di ser Piero, je znám především jako výtečný italský malíř (speciálně autor obrazu *Mona Lisa*, zřejmě nejslavnějšího portrétu všech dob). Méně proslulý je jako vynálezce, konstruktér, sochař či hudebník. Byl však rovněž geometrem. Během svého studia kvadratury kruhu, kterou se mu samozřejmě nikdy nepodařilo přesně sestrojít, se zabýval rovinnými obrazci, které jsou ohraničeny křivkami (jeho pozornost upoutaly např. Hippokratovy měsíčky). Výsledky bádání lze objevit v jeho rukopisech [1] a [2]. Pro zajímavost uvedme, že psal levou rukou zprava doleva.

V článku jsou představeny dva rovinné útvary, které zavedl a jsou po něm pojmenovány, a to tzv. *Leonardův dráp* a *Leonardovo zrcadlo*. Uvedeny jsou také věty o kvadratuře Leonardova drápu, resp. poloviny Leonardova zrcadla.

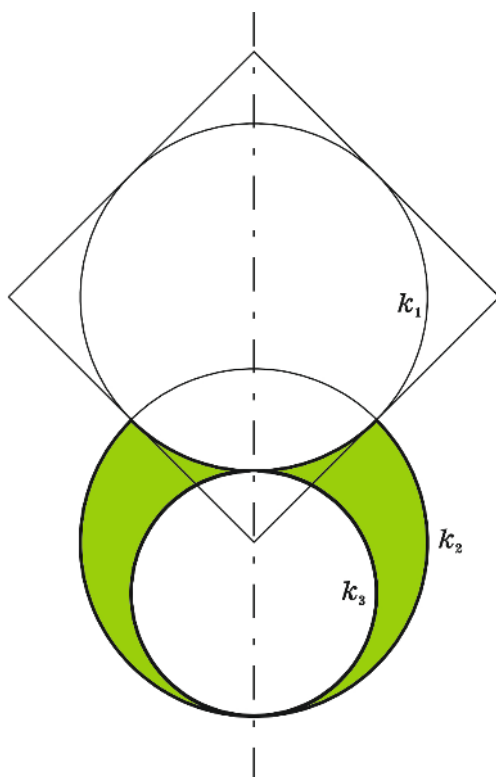
Leonardův dráp

Definice 1

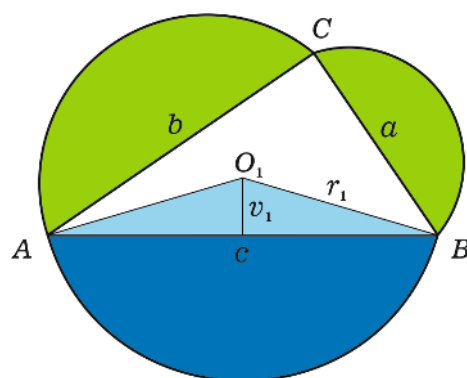
Uvažujme čtverec, kružnici k_1 tomuto čtverci vepsanou, kružnici k_2 se středem v jednom z vrcholů čtverce a poloměrem totožným s poloměrem kružnice k_1 a kružnici k_3 , která má vnější dotyk s kružnicí k_1 , resp. vnitřní dotyk s kružnicí k_2 , přičemž středy všech třech uvedených kružnic leží v jedné přímce (obr. 1). Označíme-li kruhy ohraničené kružnicemi k_1, k_2 a k_3 po řadě K_1, K_2 a K_3 , potom útvar $\mathcal{D} = K_2 \setminus (K_1 \cup K_3)$ nazýváme *Leonardův dráp*.

Označení $k_1, k_2, k_3, K_1, K_2, K_3$ z definice Leonardova drápu budeme pro příslušné kružnice a kruhy používat i v dalších částech textu, aniž bychom symboliku znovu zaváděli.

Odvoďme nyní vztah mezi obsahy jistých kruhových úsečí, který použijeme k důkazu níže uvedené věty o obsahu Leonardova drápu.



Obr. 1 Leonardův dráp



Obr. 2 Obsahy úsečí

Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou c a odvěsnami a , b a dále kruhové úseče, které jsou sestrojené nad jeho stranami a které jsou navzájem podobné (obr. 2). Označme O_1 střed, resp. r_1 poloměr, kružnicového oblouku, který ohraničuje úseč sestrojenou nad přeponou c , a v_1 vzdálenost bodu O_1 od této přepony. Obdobně nechť O_2 , r_2 , v_2 značí analogické pojmy příslušející úseči sestrojené nad odvěsnou a a konečně O_3 , r_3 , v_3 analogické pojmy příslušející úseči sestrojené nad odvěsnou b .

Jelikož víme, že jsou úseče podobné, je

$$\frac{a}{c} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{v_2}{v_1} = k, \quad \frac{b}{c} = \frac{r_3}{r_1} = \frac{v_3}{v_1} = m, \quad (1)$$

kde k a m jsou kladná reálná čísla. Protože $c^2 = a^2 + b^2$, plyne ze vztahů (1) rovnost $c^2 = c^2 k^2 + c^2 m^2$, a tedy

$$1 = k^2 + m^2. \quad (2)$$

Obsah S_{U_1} úseče sestrojené nad přeponou c je roven rozdílu obsahu S_{V_1} příslušné výseče a obsahu S_{T_1} trojúhelníku ABO_1 , tj.

$$S_{U_1} = S_{V_1} - S_{T_1} = \frac{\pi r_1^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{cv_1}{2},$$

kde α je velikost středového úhlu uvažovaného kružnicového oblouku.

Označíme-li obdobně S_{U_2} , S_{V_2} , S_{T_2} , resp. S_{U_3} , S_{V_3} , S_{T_3} , obsahy úseče, výseče a trojúhelníku příslušejících odvěsně a , resp. b , platí

$$S_{U_2} + S_{U_3} = S_{V_2} - S_{T_2} + S_{V_3} - S_{T_3} = \frac{\pi r_2^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{av_2}{2} + \frac{\pi r_3^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{bv_3}{2}.$$

Využitím vztahů (1) a (2) dostaneme

$$\begin{aligned} S_{U_2} + S_{U_3} &= \frac{\pi k^2 r_1^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{kckv_1}{2} + \frac{\pi m^2 r_1^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{mcmv_1}{2} = \\ &= \frac{\pi r_1^2 \alpha}{360^\circ} (k^2 + m^2) - \frac{cv_1}{2} (k^2 + m^2) = \frac{\pi r_1^2 \alpha}{360^\circ} - \frac{cv_1}{2} = S_{U_1}. \end{aligned}$$

Tím jsme odvodili následující tvrzení.¹⁾

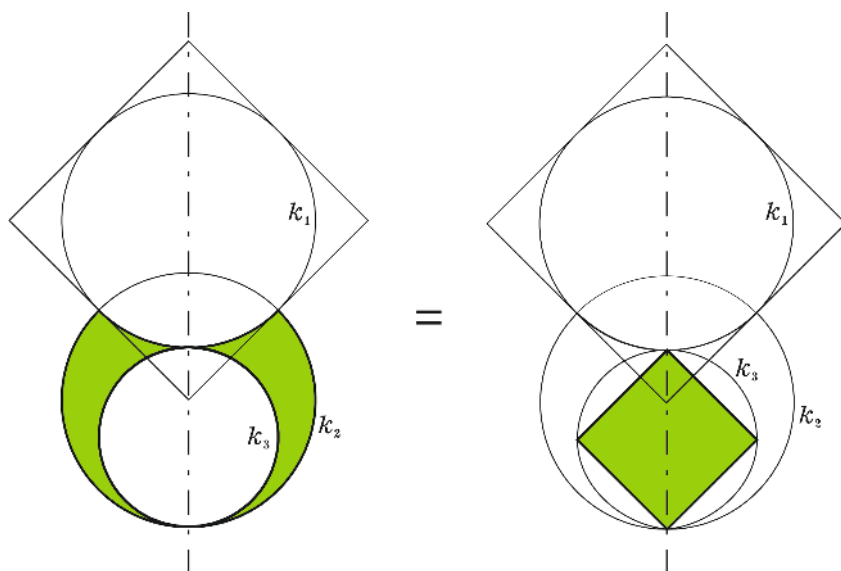
Lemma 1

Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník. Sestrojíme-li nad jeho stranami navzájem podobné kruhové úseče, je obsah úseče sestrojené nad přeponou roven součtu obsahů úsečí sestrojených nad odvěsnami.

Nyní můžeme dokázat větu o obsahu Leonardova drápu:

Věta 1

Obsah Leonardova drápu je roven obsahu čtverce, který je vepsán kružnici k_3 (obr. 3).

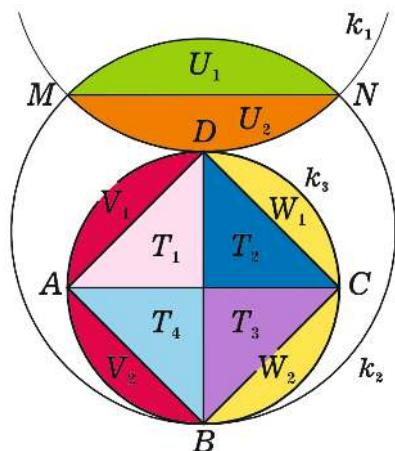


Obr. 3 Obsah Leonardova drápu a čtverce

Důkaz: Do kružnice k_3 vepíšme čtverec $ABCD$ tak, aby bod D ležel na kružnici k_1 , a tento čtverec rozdělme jeho úhlopříčkami na čtyři části.

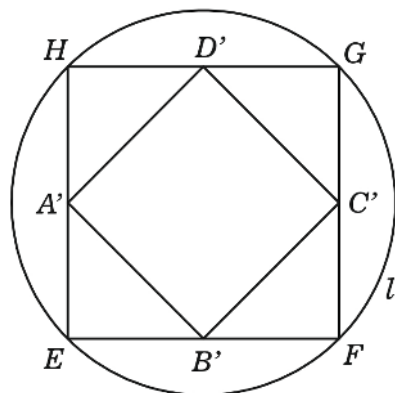
¹⁾Raději výslovně upozorníme, že lemma pojednává o kruhových úsečích, nikoliv pouze o polokruzích. Platí dokonce i obecnější tvrzení, které se nejčastěji nazývá Zobecněná Pythagorova věta: *Nechť je dán pravoúhlý trojúhelník. Sestrojíme-li nad jeho stranami navzájem podobné útvary tak, aby si po dvou odpovídaly v podobnostech, v nichž si odpovídají strany trojúhelníku (koeficienty podobnosti jsou rovny poměrům délek příslušných dvojic stran trojúhelníku), je obsah útvaru sestrojeného nad přeponou roven součtu obsahů útvarů sestrojených nad odvěsnami.*

Průsečíky kružnic k_1 a k_2 označme M , N a kruhové úseče a trojúhelníky ležící v kruhu K_2 popišme V_1 , V_2 , W_1 , W_2 , U_1 , U_2 , T_1 , T_2 , T_3 , T_4 podle obr. 4.



Obr. 4 Jednotlivé části kruhu K_2

Sestrojme kruh L s hraniční kružnicí l , který je shodný s kruhem K_2 , a čtverec $EFGH$, který je vepsán kružnici l (obr. 5).

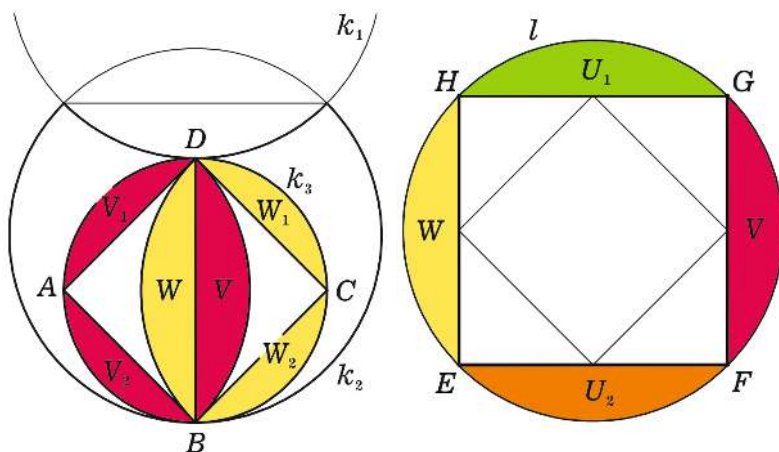


Obr. 5 Kruh L shodný s kruhem K_2

Délka strany tohoto čtverce je totožná s délkou úsečky MN (dvě strany čtverce z definice Leonardova drápu totiž prochází středem kružnice k_2 ,

a proto jsou jejich části ležící uvnitř kruhu K_2 současně polovinami úhlopříček čtverce vepsaného kružnici k_2). Sestrojíme další čtverec $A'B'C'D'$ tak, aby jeho vrcholy byly středy stran čtverce $EFGH$. Délka úhlopříčky tohoto čtverce je totožná nejen s délkou strany čtverce $EFGH$, ale i s délkou úsečky MN . Jelikož $|MN| = |HG| = |EF|$, jsou kruhové úseče U_1 a U_2 shodné s úsečemi vytknutými stranami čtverce $EFGH$ z kruhu L . Proto platí také $|BD| = |B'D'|$, z čehož plyne, že čtverce $ABCD$ a $A'B'C'D'$ jsou shodné.

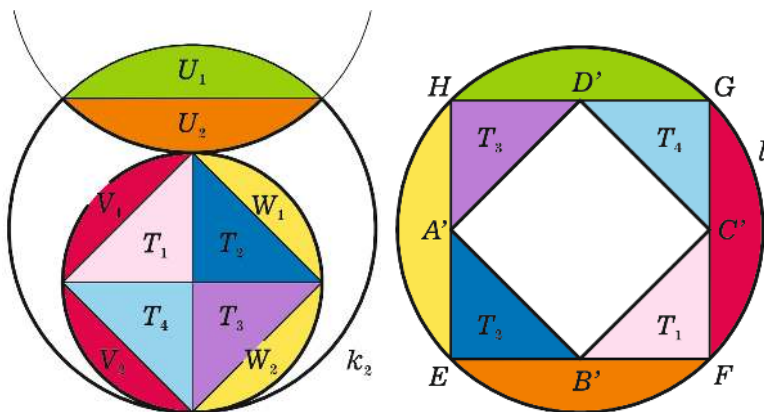
Součet obsahů úsečí V_1 a V_2 , které přináležejí odvěsnám pravoúhlého trojúhelníku ABD , je podle lemmatu 1 totožný s obsahem jim podobné úseče V sestrojené nad přeponou uvažovaného trojúhelníku (obr. 6 vlevo). Uvedený součet je však roven také obsahu úseče vytknuté stranou GF v kruhu L (obr. 6 vpravo), neboť tato úseč je s úsečí V shodná. Obdobně lze odůvodnit, že součet obsahů úsečí W_1, W_2 roven obsahu úseče W , která je současně úsečí kruhu L (obr. 6).



Obr. 6 Shodnost obsahů úsečí

Z výše uvedeného je zřejmé, že trojúhelníky T_1, T_2, T_3, T_4 a $FC'B', EB'A', HA'D', GD'C'$ jsou shodné (obr. 7).

Shodné kruhy K_2 a L mají stejný obsah. Protože také části shodných kruhů K_2 a L , které jsou na obr. 7 obarvené, mají stejný obsah, musí mít stejný obsah rovněž části neobarvené. Těmito útvary jsou však Leonardův dráp, resp. čtverec $A'B'C'D'$. Odtud a ze shodnosti čtverců $A'B'C'D', ABCD$ plyne platnost věty.



Obr. 7 Přemístění trojúhelníků T_1, T_2, T_3, T_4

Leonardovo zrcadlo

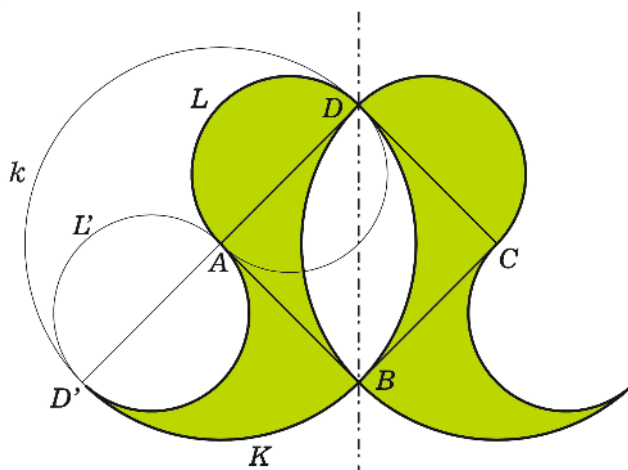
Definice 2

Uvažujme čtverec $ABCD$ a kružnici k o středu A a poloměru $|AB|$. Sestrojíme obraz D' vrcholu D ve středové souměrnosti se středem v bodě A , nad průměrem AD , resp. AD' , sestrojíme kruh L , resp. L' , a nad průměrem DD' sestrojíme půlkruh K obsahující bod B . Jestliže $M = (K \cup L) \setminus L'$ a M' je obraz útvaru M v osové souměrnosti s osou DB , potom se útvar $Z_{ABCD} = (M \cup M') \setminus (M \cap M')$ nazývá *Leonardovo zrcadlo* (obr. 8).

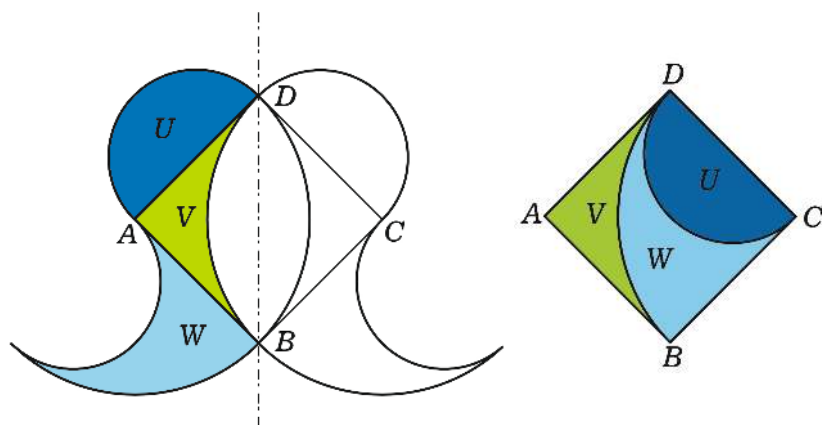
Věta 2

Obsah Leonardova zrcadla Z_{ABCD} je roven dvojnásobku obsahu čtverce $ABCD$.

Důkaz: Leonardo zrcadlo Z_{ABCD} rozdělíme podél jeho jediné osy souměrnosti na dvě poloviny a jednu z těchto polovin rozdělíme dále podél stran čtverce $ABCD$ na tři části U, V, W (obr. 9). Půlkruh U zobrazme v rotaci se středem D a úhlem otočení 90° (obrazem jeho průměru AD je strana CD čtverce $ABCD$). Obdobně část W zobrazme v rotaci se středem B a úhlem otočení 270° (obrazem úsečky AB je strana CB čtverce $ABCD$). Je zřejmé, že sjednocením útvaru V a obrazů útvarů U a W ve zmíněných rotacích je čtverec $ABCD$. Jeho obsah je tedy roven polovině obsahu Leonardova zrcadla, neboli obsah Leonardova zrcadla Z_{ABCD} je roven dvojnásobku obsahu čtverce $ABCD$.



Obr. 8 Leonardovo zrcadlo



Obr. 9 Obsah Leonardovo zrcadla a čtverce

Literatura

- [1] *Leonardo da Vinci*: Codex Atlanticus, rukopis, 1478–1519.
- [2] *Leonardo da Vinci*: Codex Madrid I, II, rukopisy, 1490–1505.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 245 a 246 můžete zaslat nejpozději do 20. 11. 2018 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz.

Úloha 247

Kolik tupouhlých trojúhelníků má všechny své vrcholy ve vrcholech daného pravidelného 26úhelníku.

Jacek Uryga

Úloha 248

Sestrojte trojúhelník ABC , je-li (při obvyklém označení délek jeho stran a velikostí vnitřních úhlů) dáno: α , $a + b$, $a + c$.

Jaroslav Švrček

Dále uvádíme řešení úloh 243 a 244, jejichž zadání najdete ve druhém čísle tohoto (26.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 243

Petr chce na kalkulačce, která umí jen sčítat, odčítat, násobit a dělit, vypočítat $\log_{50} 140$. Jak má postupovat, když zná čísla $a = \log_{20} 40$ a $b = \log_8 35$?

Stanislav Trávníček

Řešení. Z vlastností logaritmické funkce platí

$$a = \log_{20} 40 = \frac{\log_2 40}{\log_2 20} = \frac{\log_2 2^3 + \log_2 5}{\log_2 2^2 + \log_2 5} = \frac{3 + \log_2 5}{2 + \log_2 5}.$$

Jelikož zřejmě $a \neq 1$, plyne odtud

$$\log_2 5 = \frac{3 - 2a}{a - 1}.$$

Podobně z vyjádření

$$b = \log_8 35 = \frac{\log_2 5 + \log_2 7}{3}$$

získáme užitím předcházejícího vztahu

$$\log_2 7 = 3b - \log_2 5 = 3b - \frac{3 - 2a}{a - 1}.$$

Pro hledanou hodnotu výrazu

$$\log_{50} 140 = \frac{2 + \log_2 5 + \log_2 7}{1 + 2 \log_2 5}$$

dostaneme užitím odvozených vztahů pro $\log_2 5$ a $\log_2 7$

$$\log_{50} 140 = \frac{2 + \frac{3 - 2a}{a - 1} + 3b - \frac{3 - 2a}{a - 1}}{1 + 2 \frac{3 - 2a}{a - 1}} = \frac{(a - 1)(2 + 3b)}{5 - 3a}.$$

Hodnotu tohoto výrazu již může Petr vypočítat užitím své kalkulačky.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z ETH Zürich a *Alexy Walczak*, LO Tarnowskie Góry.

Úloha 244

Najdete všechny uspořádané dvojice přirozených čísel, jejichž nejmenší společný násobek je o 2018 větší než jejich největší společný dělitel.

Aleš Kobza

Řešení. Označme d největší společný dělitel hledaných přirozených čísel A a B . Potom existují nesoudělná přirozená čísla a, b tak, že platí $A = da$ a $B = db$. Podle známého vztahu mezi dvěma přirozenými čísly, jejich největším společným dělitelem a nejmenším společným násobkem n je tento roven

$$n = \frac{AB}{d} = dab.$$

Dle zadání platí $dab = n = 2018 + d$, tedy

$$d(ab - 1) = 2018 = 2 \cdot 1009.$$

Na předcházejícím řádku je rozklad čísla 2018 na součin prvočísel, proto je jeho (přirozený) dělitel d z množiny $\{1, 2, 1009, 2018\}$. Všechny čtyři možnosti rozebereme samostatně.

a) Pro $d = 1$ platí $ab = 2019$. Rozkladem na součin prvočísel dostaneme $2019 = 3 \cdot 673$, existují tak čtyři dvojice nesoudělných čísel

$$(a, b) \in \{(1; 2019), (3; 673), (673; 3), (2019; 1)\}$$

vyhovující dané rovnosti. Jim odpovídají čtyři dvojice

$$(A, B) \in \{(1; 2019), (3; 673), (673; 3), (2019; 1)\}. \quad (1)$$

b) V případě $d = 2$ dostaneme $ab = 1010 = 2 \cdot 5 \cdot 101$. V tomto případě existuje 8 dvojic nesoudělných čísel

$$(a, b) \in \{(1; 1010), (2; 505), (5; 202), (10; 101), \\ (101; 10), (202; 5), (505; 2), (1010; 1)\}.$$

Proto

$$(A, B) \in \{(2; 2020), (4; 1010), (10; 404), (20; 202), (202; 20), \\ (404; 10), (1010; 4), (2020; 2)\}. \quad (2)$$

c) Pokud $d = 1009$ platí $ab = 3$. V tomto případě existují dvě vyhovující dvojice nesoudělných čísel

$$(a, b) \in \{(1; 3), (3; 1)\}.$$

Odtud dostáváme

$$(A, B) \in \{(1009; 3027), (3027; 1009)\}. \quad (3)$$

d) Konečně pro $d = 2018$ platí $ab = 2$, tedy

$$(a, b) \in \{(1; 2), (2; 1)\}$$

a pro hledané dvojice tak v tomto případě platí

$$(A, B) \in \{(2018; 4036), (4036; 2018)\}. \quad (4)$$

Celkem existuje 16 dvojic hledaných čísel, jsou jimi dvojice ze vztahů (1), (2), (3), (4).

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich a *Alexy Walczak*, LO Tarnowskie Góry.

Neúplné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan a *František Jáchim* z Volyně.

Pavel Calábek

Nové vydání učebnice Mechanické kmitání a vlnění

OLDŘICH LEPIL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Učebnice *Fyzika pro gymnázia – Mechanické kmitání a vlnění* je součástí osmidílného souboru monotematických učebnic. Vydalo ji nakladatelství Prometheus, které vzniklo před 25 lety v září 1993 a gymnaziální učebnice patří k jeho prvním nakladatelským počínům. Uplynulých 25 let prověřilo kvalitu těchto učebnic, které byly průběžně inovovány a patří k základnímu fondu učebnic pro střední školy. Učebnice Mechanické kmitání a vlnění vyšla v prvním vydání v roce 1994 a navazuje na tzv. „federální“ učebnice, které byly vytvořeny v průběhu 80. let minulého století v gesci Výskumného ústavu pedagogického v Bratislavě (podrobněji viz [1]). Původní učební text byl výrazněji inovován v roce 2001, kdy vyšlo třetí, upravené vydání učebnice.

Nové, páté přepracované vydání završuje současnou inovaci učebnic fyziky pro gymnázium, kterou nakladatelství Prometheus realizuje od roku 2013. V přepracovaném vydání vyšlo celkem pět z celkového souboru osmi monotematických učebnic pro gymnázia (viz katalog nakladatelství Prometheus: <http://www.prometheus-nakl.cz>). Inovované učebnice představují netradiční komplexní učební pomůcku, jejíž standardní knižní podobu doplňují další elektronické učební materiály na přiloženém CD. I za poměrně krátkou dobu, po kterou inovované učebnice vycházejí, však došlo k výraznému posunu ve vývoji prostředků pro prezentaci elektronických materiálů, jako jsou nové typy notebooků bez mechaniky CD, tablety a čtečky e-knih. To by mohlo ztěžovat praktické využití přiloženého CD. Proto nakladatelství připravilo pro uživatele učebnic možnost, jak získat

elektronickou část učebnice přímo z úložiště nakladatelství. Můžete si ji ke konkrétní učebnici stáhnout z adresy <http://www.prometheus-data.cz/>. Příslušný postup je zde u každé učebnice uveden. Je ovšem možné také přepírovat CD z počítače vybaveného mechanikou CD na flash disk, popř. přímo do tabletu nebo čtečky.



Výběr a zpracování učiva v knižní části učebnice odpovídá poznatkům, které uvádí Rámcový vzdělávací program pro gymnázia (RVPG; viz [2, s. 28]). Ten však vymezuje vzdělávací obsah tematického celku Mechanické kmitání a vlnění tak stručně, že je pro zpracování školního vzdělávacího programu (ŠVP) učitelem prakticky bezcenný. Proto lze považovat za výchozí učební materiál pro tvorbu osnov v ŠVP spíše obsah a pojetí učiva, jak ho prezentuje knižní část učebnice.

Mechanické kmitání a vlnění patří k nejstarším tématům ve vývoji obsahu školské fyziky, s poznatky sahajícími až do starého Řecka. Je možné diskutovat o tom, co ještě dnes patří do učiva na střední škole s všeobecným zaměřením, a co už je spíše jen seznámení s historií vývoje fyziky, s poznatky z části již bez valného přínosu k potřebám technologicky rozvinuté společnosti. Typickým příkladem takového historizujícího učiva jsou poznatky o kyvadle, které snad jediné ve vztahu k této učebnici vyvolalo určité diskuse (viz [3]). Ty se ani tak netýkaly standardního metodického postupu, kterým se dospěje ke vztahu pro periodu kyvadla, v současnosti už s problematičtým praktickým významem, ale v podstatě jen obrázku zobrazujícího síly, které na kyvadlo působí.

Je na učiteli, zda kyvadlo vůbec do výuky zařadí, poněvadž RVPG to explicitně nepožaduje. Nicméně kyvadlo je jednoduchý fyzikální objekt spjatý s osobností Galilea Galileiho, s historií měření času apod. Z didaktického hlediska je cenná možnost realizovat ve školních podmínkách jednoduché experimentální měření tíhového zrychlení. To je také důvod, proč učivo o kyvadle i v novém vydání učebnice přetrvává v podobě modelu, o který se opírá vytváření pojmů *mechanický oscilátor* a *harmonické kmitání*. V učebnici je také nově zpracováno laboratorní cvičení s kyvadlem s použitím měřicího systému Vernier (viz dále).

Harmonické kmitání kyvadla předpokládá, že počáteční výchylka kyvadla je malá. Při demonstracích však učitelé většinou volí výchylku větší, při níž už pohyb kyvadla přesně neodpovídá teorii uvedené v textu učebnice a jeho perioda se prodlužuje. Se zřetelem k tomu je Cvičení 2 na CD nově rozšířeno o řešení příklad 5 (viz dále).

Celkově lze učivo o mechanickém kmitání a vlnění chápat hlavně jako propedeutiku k učivu, které je pro současnost podstatně významnější, a je jím učivo o elektromagnetickém kmitání a vlnění. Takovou koncepci mělo zpracování tohoto učiva ve zmíněných „federálních“ učebnicích, kde bylo mechanické kmitání součástí integrované poznatkové soustavy o periodických dějích. RVPG však tuto koncepci vrátil zpět až do 19. století, když ho řadí do úvodního tematického celku středoškolské fyziky, čili do mechaniky.

Pro nové vydání učebnice je charakteristický podstatně zmenšený rozsah knižní části, odpovídající přibližně 2/3 rozsahu 3. vydání učebnice. Samotná struktura učiva se nezměnila a zahrnuje opět tři základní tematické celky: 1. Kmitání mechanického oscilátoru, 2. Mechanické vlnění, 3. Zvukové vlnění. Do knižní části nejsou zahrnuta Teoretická cvičení a Laboratorní cvičení, která byla přesunuta mezi doplňující elektronické materiály na CD (obr. 1).



Obr. 1

Rozšiřující učivo

Klíčovou součástí učebních materiálů na CD je *Rozšiřující učivo*, obsahující poznatky, které nejsou do RVPG zahrnuty. Učitelé je tak dána možnost využít tyto materiály při výuce podle individuálně koncipovaných ŠVP. Z učiva o mechanickém kmitání oscilátoru jsou zde zpracovány zejména poznatky o složeném kmitání a podrobněji jsou vyloženy poznatky o tlumeném kmitání a rezonanci mechanického oscilátoru. Výklad mechanického vlnění je rozšířen o chvění mechanických soustav, odraz, lom a ohyb vlnění, což jsou významné pojmy pro pozdější výklad vlnové optiky.

Zcela nově jsou zpracovány tři články učiva akustiky: 1. Hudební akustika, 2. Zdroje zvuku v hudební akustice a 3. Fyziologická akustika. Na základě historických souvislostí jsou objasněny základní pojmy hudební akustiky – *hudební interval* a *tónová stupnice*. Konsonance a disonance tónů je ilustrována časovými diagramy hudebních intervalů vytvořenými programem MS Excel. V dalším článku jsou vyloženy fyzikální principy vybraných hudebních nástrojů. Vedle klasických strunných a dechových nástrojů jsou popsány také typy elektroakustických hudebních nástrojů. Ve třetím článku jsou poznatky o sluchovém orgánu doplněny výkladem pojmů *binaurální slyšení* a *stereofonie*. Rozšiřující učivo uzavírá výklad *Dopplerova jevu*, obsažený již v předchozích vydáních učebnice.

Teoretická cvičení

Změny ve výběru řešených příkladů a úloh teoretických cvičení jsou minimální. Je využita možnost použít u obrázků více barev, takže některé časové diagramy jsou pro lepší přehlednost nově vygenerovány pomocí programu MS Excel. V Cvičení 1 (úloha 6) jsou nově uvedeny zvětšené obrazové předlohy časových diagramů harmonických kmitání s poměrem frekvencí 1 : 2, 1 : 3 a 2 : 3. Předlohu si žáci mohou vytisknout a s využitím sítě souřadnic vyhledat body grafu, který odpovídá superpozici obou kmitání.

Do Cvičení 2 je nově zařazen příklad 5, který řeší pohyb jednoduchého kyvadla při větší počáteční výchylce, než odpovídá požadavku na vznik harmonického kmitání. Příklad uvádíme v plném znění.

Příklad 5

V učivu o kyvadle jsme se zabývali jen pohybem kyvadla s malou počáteční výchylkou. Uvažujte nyní jednoduché kyvadlo o délce 1 m, jehož počáteční úhlová výchylka je 60° . Těleso kyvadla má hmotnost 0,1 kg. Určete velikost a směr výsledné síly, která na těleso kyvadla působí při okamžité výchylce 30° ($g \doteq 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

Řešení

$l = 1 \text{ m}$, $m = 0,1 \text{ kg}$, $\alpha_m = 60^\circ$, $\alpha = 30^\circ$; $F = ?$, $\beta = ?$

Při velké počáteční výchylce kyvadla se těleso kyvadla pohybuje zrychleným pohybem po kružnicové trajektorii o poloměru odpovídajícím délce l kyvadla. V počátečním okamžiku je těleso kyvadla v klidu a působí na něj jen tíhová síla $\mathbf{F}_G$, kterou rozložíme na radiální složku $\mathbf{F}_r$ ve směru vlákna a tečnou složku $\mathbf{F}_t$ ve směru tečny k trajektorii. Radiální složka napíná vlákno kyvadla a její pohybový účinek se ruší tahovou silou $\mathbf{T}$ vlákna (obr. C2-3). Když se těleso kyvadla začne pohybovat, zvětšuje se jeho rychlost a na těleso působí kromě uvedených sil ještě síla dostředivá $\mathbf{F}_d$, která má v každém okamžiku stejný směr jako tahová síla. Pro velikost tahové síly platí

$$T = F_d + F_r = \frac{mv^2}{l} + mg \cos \alpha.$$

Velikost tahové síly se tedy s rostoucí rychlostí kyvadla postupně zvětšuje a při průchodu kyvadla rovnovážnou polohou je největší, zatím co tečná síla je v tomto okamžiku nulová.

Velikost dostředivé síly určíme ze zákona zachování mechanické energie. V počátečním okamžiku je těleso kyvadla ve výšce h_0 nad rovnovážnou polohou a jeho potenciální energie vzhledem k rovnovážné poloze

$$E_{p0} = mgh_0 = mg(l - l \cos \alpha_m) = mgl(1 - \cos \alpha_m). \quad (1)$$

Jakmile se těleso kyvadla začne pohybovat, zmenšuje se jeho potenciální energie, která se mění na energii kinetickou. Pro celkovou energii kyvadla pak platí

$$E_{p0} = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos \alpha). \quad (2)$$

Úpravou rovnic (1) a (2) dostaneme pro velikost dostředivé síly vztah

$$F_d = \frac{mv^2}{l} = 2mg(\cos \alpha - \cos \alpha_m)$$

a po dosazení

$$F_d = 2 \cdot 0,1 \cdot 10 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) \text{ N} \doteq 0,73 \text{ N}.$$

Tečná složka tíhové síly má v tomto okamžiku velikost

$$F_t = mg \sin \alpha = 0,50 \text{ N}.$$

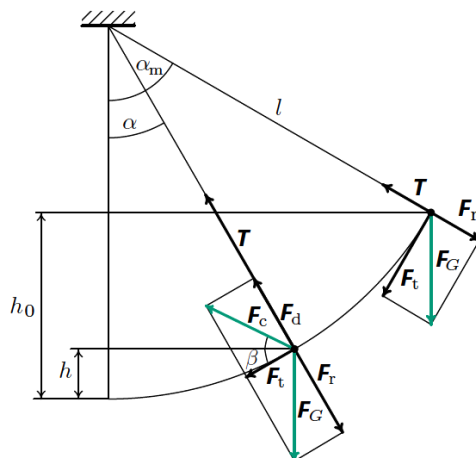
Část tahové síly je kompenzována radiální složkou tíhové síly, takže velikost celkové síly $\mathbf{F}_c$ působící na těleso kyvadla

$$F_c = \sqrt{F_d^2 + F_t^2} = \sqrt{0,73^2 + 0,50^2} \text{ N} \doteq 0,88 \text{ N}.$$

Celková síla svírá se směrem tečny k trajektorii úhel β , pro který platí

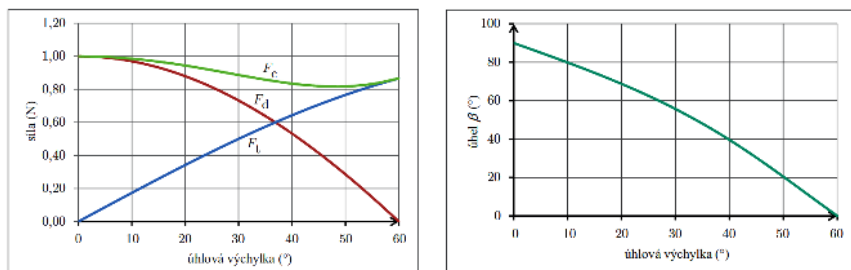
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{F_d}{F_t} = \frac{0,73}{0,50} \doteq 1,46 \Rightarrow \beta \doteq 56^\circ.$$

Při okamžité úhlové výchylce 30° působí na těleso kyvadla celková síla $0,88 \text{ N}$, která se směrem tečny k trajektorii svírá úhel přibližně 56° .



Obr. C2-3

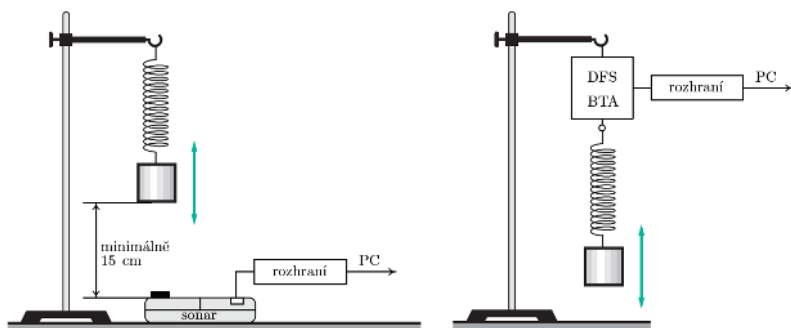
Poznámka: Graf změny velikosti tečné síly F_t , dostředivé síly F_d , celkové síly F_c a úhlu β v průběhu čtvrtiny periody kyvadla je na obr. C2-4. Graf byl vytvořen pomocí modelu M3.6 (viz Modely kmitání oscilátorů).



Obr. C2-4

Laboratorní cvičení

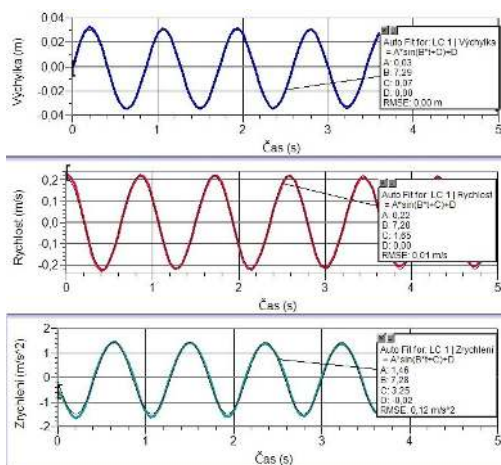
Laboratorní cvičení k učivu o mechanickém kmitání a vlnění patří k oblíbeným a léty prověřeným úlohám. V novém vydání učebnice jsou tyto úlohy rozšířeny o experimenty podporované počítačovým měřicím systémem Vernier. Nově je zařazeno Cvičení 1 *Kmitání pružinového oscilátoru*, jehož cílem je praktické seznámení se systémem Vernier a jeho senzory. Úloha je navržena ve dvou variantách, s použitím senzoru polohy a pohybu a s použitím siloměru DFS-BTA (obr. L1-1).



Obr. L1-1

Získaný záznam kmitání žáci vyhodnotí programem Logger Pro a fitováním získají rovnice pro jednotlivé kinematické veličiny kmitání pružinového oscilátoru (obr. L1-3). Ze získaných konstant je nejzajímavější konstanta C , která určuje počáteční fázi jednotlivých veličin v radiánech. Výpočtem žáci určí fázový rozdíl mezi veličinami v násobcích π ($\Delta\varphi = k\pi$). S využitím dat na obr. L1-3 např. vychází pro fázový rozdíl výchylky a rychlosti oscilátoru

$$k = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\pi} = \frac{1,65 - 0,07}{\pi} \doteq 0,50.$$

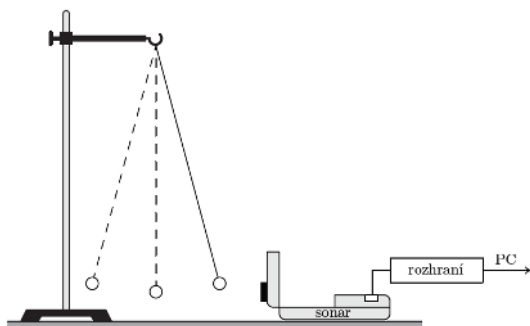


Obr. L1-3

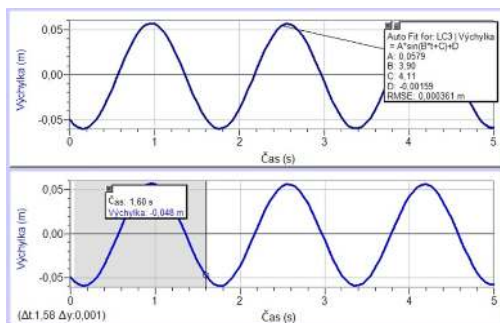
Obdobným způsobem je v úloze 3 *Ověření vztahu pro periodu kyvadla* určeno tíhové zrychlení. Záznamem pohybu kyvadla podle obr. L3-1 se získá časový diagram kmitání (měření bylo provedeno s kyvadlem o délce závěsu $l = 0,65 \text{ m}$) a fitováním se určí příslušná rovnice kmitání (obr. L3-3). Z ní je patrné, že konstanta B určuje úhlovou frekvenci ω kmitání kyvadla. Při známé délce l kyvadla je tíhové zrychlení určeno výpočtem:

$$g = \omega^2 l = 3,90^2 \cdot 0,65 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \doteq 9,89 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Výsledek se liší od hodnoty tíhového zrychlení v naší zeměpisné šířce přibližně o 1 %.



Obr. L3-1

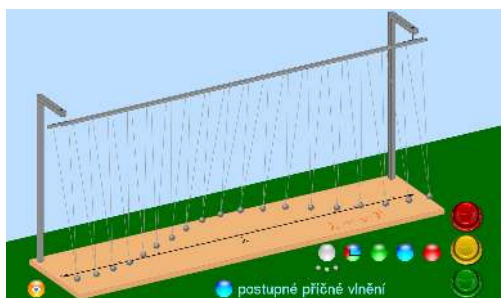


Obr. L3-3

Na přípravě laboratorních cvičení podporovaných měřicím systémem Vernier se podíleli náměty, konzultacemi i ověřováním navržených experimentů *RNDr. Čeněk Kodejška, Ph.D.* a *Mgr. Václav Pazdera*. Autor oběma děkuje za spolupráci.

Animace

Významnou podporou názorné výuky učiva o mechanickém kmitání a vlnění jsou animace, které znázorňují většinu klíčových fyzikálních dějů tohoto učiva. Autorem velmi kvalitních animací je učitel Střední průmyslové školy ve Zlíně *RNDr. Vladimír Vaščák*, který na svých webových stránkách (<https://www.vascak.cz/>) prezentuje velké množství dalších, volně dostupných výukových materiálů. Po dohodě s autorem byl proveden výběr vhodných animací k učebnici a některé animace byly vytvořeny nově, popř. byly upraveny tak, aby byly v souladu s textem učebnice. Příkladem může být zdařilá animace pro výklad postupného podélného i příčného vlnění (obr. 2).



Obr. 2

Na CD je celkem 21 animací, z nichž 14 se týká mechanického kmitání a 7 mechanického vlnění. Animace jsou připraveny ke spuštění v operačních systémech Windows jako spustitelné EXE-soubory. Některé prohlížeče nedovolují z bezpečnostních důvodů přímo spouštět soubory z prohlížeče, v takovém případě je vždy možné soubor spustit přímo ve složce Animace na CD.

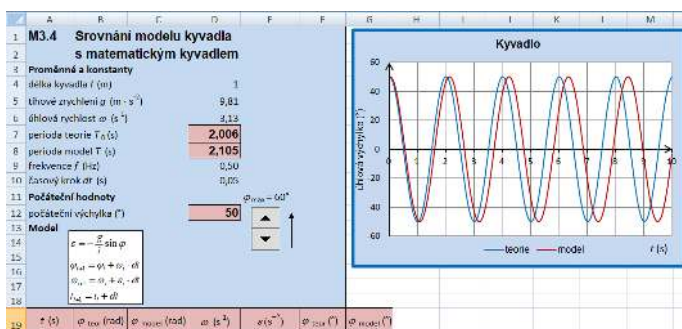
Modely kmitání oscilátorů

Všechny předcházející inovované učebnice s CD obsahují také videoexperimenty speciálně vytvořené pro jednotlivé učebnice. V případě učebnice *Mechanické kmitání a vlnění* bylo od zařazení videoexperimentů upuštěno, poněvadž na webu je k dispozici velké množství videozáznamů k tomuto učivu, i když je třeba k mnohým přistupovat kriticky. Nově místo toho byly zařazeny interaktivní modely, které si učitel i žáci mohou modifikovat, popř. i sami vytvářet.

Počítačové modely k tomuto učivu byly již v minulosti součástí 1. vydání učebnice z r. 1994. Bylo to vlastně u nás poprvé, co přímo do učebnice byly takové interaktivní počítačové modely zařazeny. Modely v 1. vydání učebnice byly vytvořeny programem FAMULUS, který ovšem v současnosti již použít nelze a jeho vhodná náhrada není k dispozici. Proto byly pro tvorbu modelů metodou *dynamického modelování* [4] použity standardní tabulkové kalkulátory, které jsou aplikacemi tzv. kancelářských balíků s univerzálním použitím. V praxi nejrozšířenější je tabulkový kalkulátor MS Excel, který však není volně šířitelným programem. Proto jsou modely souběžně připraveny také pro tabulkové kalkulátory kancelářského balíku LibreOffice Calc, popř. OpenOffice Calc.

Soubor modelů tvoří čtyři sešity, které lze otevírat z menu CD, popř. hypertextovým odkazem v úvodním textu k modelům nebo přímo z podadresářů na CD, odpovídajících použitému tabulkovému kalkulátoru. Sešity obsahují následující témata: M1 *Harmonický pohyb* (2 modely), M2 *Složené kmitání* (6 modelů), M3 *Vlastní kmitání oscilátoru* (6 modelů), M4 *Nucené kmitání oscilátoru* (3 modely).

Všechny modely mají jednotné zpracování, využívající prvních 19 řádků k přehledu veličin, z nichž některé lze měnit pomocí posuvníků. Uveden je také model v obecné podobě. Výstupem modelů jsou grafy, které se zobrazují na stejném listu sešitu jako model. Odtud lze graf překopírovat a využít např. k přípravě prezentace do výuky apod. Výhodou tabulkového kalkulátoru také je, že jakákoliv změna veličiny modelu se okamžitě projeví ve výstupním grafu. Pro ilustraci je uvedena kopie obrazovky modelu M3.4 (obr. 3). Z grafu je patrná odchylka časových diagramů kmitání matematického kyvadla (teorie) a kyvadla s počáteční výchylkou 50° (model).



Obr. 3

Textovými částmi obsahu CD jsou ještě *Historické poznámky* a *Slovníček fyzikálních pojmů*. Historické poznámky zpracovala RNDr. Radmila Hýblová a obsahují životopisné medailonky 11 významných osobností historie fyziky a krátké historické přehledy vývoje měření času od použití kyvadla až po atomové hodiny, měření rychlosti zvuku a vývoje přístrojů pro záznam zvuku. Slovníček fyzikálních pojmů je výběrem veličin a jevů daného učiva, které však nejsou řazeny abecedně, ale jsou uspořádány podle posloupnosti poznatků v učebnici. Kapitoly Slovníčku korespondují s kapitolami v učebnici a výběr příslušného pojmu usnadňuje interaktivní rejstřík v úvodu. U každého hesla je uveden jeho anglický ekvivalent a některá hesla rozšiřují poznatky nad rámec učiva v učebnici.

Po technické stránce CD připravil Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D. a obrazy nakreslil programem METAPOST PaedDr. Přemysl Šedivý. I když v přepracovaném vydání učebnice převážně nejde o zcela nový text, byl rukopis znovu posouzen lektory, kterými byli doc. RNDr. Josef Hubeňák, CSc. a RNDr. Čeněk Kodejška, Ph.D. Pro tisk učebnici velmi pečlivě připravili redaktoři nakladatelství Prometheus Mgr. Milena Osobová a PaedDr. Bohuslav Rothanzl.

Autor děkuje všem spolupracovníkům, lektorům i redaktorům za dobře odvedenou práci. Věřím, že se nové zpracování učebnice stane pro učitele i žáky gymnázií užitečnou učební pomůckou. Všichni spolupracovníci také rádi přijmou připomínky, které by mohly přispět k dalšímu zlepšení knihy i doplňujících materiálů na CD.

Literatura

- [1] Lepil, O.: K vývoji učebnic fyziky pro střední školy gymnaziálního typu. MFI, roč. 22 (2013), Příloha č. 4, s. P16.
- [2] Rámcový vzdělávací program pro gymnázia, VÚP, Praha, 2007. Dostupné na: <http://www.msmt.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/skolskareforma/ramcove-vzdelavaci-programy>
- [3] Lepil, O.: Poznámka k silám působícím na kyvadlo. MFI, roč. 25 (2016), č. 4, s. 276.
- [4] Lepil, O., Richterek, L.: Dynamické modelování, Repronis, Ostrava, 2007. Dostupné na: http://ufm.sgo.cz/ke_stazeni/Dynamicke_modelovani.pdf

Keplerovy zákony ve výuce fyziky na gymnáziu

VLADIMÍR ŠTEFL

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

V druhé polovině 16. století shromáždil dánský astronom *Tycho Brahe* (1546–1601) rozsáhlé pozorovací údaje planet, zejména Marsu. Německý astronom *Johann Kepler* (1571–1630) si v době svého pobytu v Praze (1600–1612) vytkl za cíl, stanovit z nich dráhu planety, vyjádřit hledanou křivku matematicky a odhalit příčinné zákonitosti pohybu. Výsledky svého bádání shrnul do pětidílného spisu *Astronomia nova* česky *Nová astronomie* [1, 2], které vyšlo v Heidelbergu roku 1609. Plným názvem byl spis nazván *Astronomia nova seu Physica cælestis, tradita commentariis De motibus stellæ Martis, ex observationibus G. V. Tychonis Brahe...* česky *Nová astronomie, aneb nebeská fyzika, podávaná v komentářích o pohybu hvězdy [planety] Marsu, kterou na základě pozorování urozeného pana Tychona Brahe...*



Obr. 1 Johann Kepler (1571–1630)

Při zpracování výše zmiňovaných pozorování musel Kepler především vyložit nerovnoměrný pohyb Marsu, rozdíllost délek opsaných oblouků ve stejných časových intervalech. Autor se neomezoval na pouhé fitování

pozorovacích údajů planety a vytvoření odpovídajícího matematického vyjádření její dráhy. Proklamovaný nový přístup spatřoval Kepler ve výkladu nebeských jevů prostřednictvím fyzikálních úvah. Zkoumal příčinu změn rychlosti planety, našel její změnu v závislosti na vzdálenosti od Slunce. Z toho usoudil, že hybná síla pohybující planetami musí z něj vycházet. Proto začal vztahovat pohyb Marsu ke skutečnému fyzickému Slunci, nikoliv ke střednímu jako Tycho Brahe.

Ve spisu [1] nalezneme historicky původní formulace obou prvních Keplerových zákonů. Byly odlišné od těch, které známe ze současných středoškolských či vysokoškolských učebnic. Pravidla pro pohyb planet, autor pojem zákony neužíval, byla vyslovována v úryvcích textu různých kapitol. Výraznější podpoření geometrickými úvahami a odvození se vyskytovalo především v závěrečných kapitolách spisu [1].

K pochopení přínosu Keplerovy teorie pohybu planet je účelné připomenout astronomicko-historické okolnosti. Při svém postupu autor nejprve analyzoval dosud existující modely planetárních pohybů, antický geocentrický pocházející od *Klaudia Ptolemaia* (90–165), novější heliocentrický od *Mikuláše Koperníka* (1473–1543) a poslední geoheliocentrický Tychona Brahe. Všechny umožňovaly předpovídat polohy planet. Nebyly však v úplném souladu s novými přesnými pozorováními. Ukázané rozpory tak vyžadovaly novou interpretaci pozorování a tvorbu odpovídající teorie. Proto Kepler zkoumal různé tvary drah – kruhové, vejcovité, oválovité, eliptické. Jejich ověřování bylo doprovázeno značným množstvím matematických výpočtů, velmi pracných, neboť v době vzniku [1] ještě nepoužíval logaritmy. Závěrečné eliptické řešení doplnil fyzikálními hypotézami, zdůvodňujícími libraci průvodiče Slunce–Mars, tzv. *rádiusu*. Pohyb planety vysvětloval jako součet dvou pohybů, rovnoměrného po kruhové dráze kolem Slunce a libračního podél *rádiusu*.

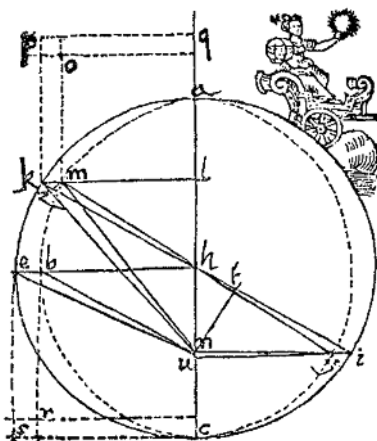
Jaký byl chronologický postup Keplerových myšlenek? Protože pohyb Marsu byl pozorován z pohybující se Země, musel proto nejprve upřesnit její dráhu. Koncem roku 1601 důvtipnou triangulační metodou, s využitím opozic Marsu našel, že je téměř shodná s kružnicí, přičemž Slunce je posunuto mimo střed. Tehdejší přesnost astronomických pozorování nedovolovala odhalit nekruhový tvar. Eliptičnost se však projevila v uvedeném posunu polohy Slunce a v nerovnoměrnosti pohybu. Právě ta byla zásadní, neboť v Koperníkově přístupu vycházejícím z epicyklů a deferentů se Země měla pohybovat rovnoměrně. Kepler však prokázal, že pohyb planet je nerovnoměrný. Příkladně u Marsu výpočty zjistil, že v perihéliu při větši

rychlosti opsal za dva časové měsíce úhel 37° , zatímco při menší v aféliu pouze $25,8^\circ$. Zobecněním takových úvah dospěl k pravidlu ploch, později nazvaném *II. Keplerův zákon*. V prosinci 1601 [3] psal svému učiteli *M. Mästlinovi* (1550–1631) „... úseky, které planeta urazí na své dráze, jsou nepřímě úměrné vzdálenosti od Slunce, v níž právě planeta je...“. Do [1] později zařadil dvě různé formulace tohoto zákona. První: „Rychlost planety je nepřímě úměrná vzdálenosti od Slunce,“ což však platí pouze v blízkosti afélie či perihélie planety. Vyjádření v současné gymnaziální učebnici [4] je bližší znění druhé: „Rychlost planety se mění tak, že úsečka spojující Slunce a planetu opisuje za stejný čas stejné plochy.“

Po upřesnění geometrického tvaru dráhy Země přistoupil Kepler k obtížnějšímu problému – řešení téhož u Marsu. Zvolil si jej promyšleně, neboť byl vhodný k častějšímu pozorování a měl, s výjimkou obtížněji sledovatelného Merkuru, největší výstřednost. Vytvořil soupis časových okamžiků, délek a šířek pro opozice Marsu v letech 1580–1600 (1580, 1582, 1585, 1587, 1589, 1591, 1593, 1595, 1597, 1600), tedy původně celkem 10 poloh [1]. V matematické interpretaci údajů se zpočátku snažil použít Koperníkův heliocentrický model. Dosáhl souladu výpočtů s pozorováními do $8'$. Kepler však byl přesvědčen, že Tycho Brahe se nedopustil tak velkých nepřesností svých pozorování (pozdější analýza prokázala jejich přesnost na úrovni zhruba $2'$). Dospěl k závěru, že volba není správná, protože neodpovídala pozorovacím údajům. Propočítal polohu Marsu v různých časových datech a matematickou analýzou odhalil, že proložená křivka není kružnice, nýbrž je protažena podél přímky spojující afélium a perihélium. Jak jsme již konstatovali, z počátku Kepler prověřoval tvary vejcovité a později oválovité. Ještě v roce 1604 [5] psal frískému astronomovi Davidu Fabriciovi (1564–1617): „Kdyby dráha Marsu měla být dokonalou elipsou, již dávno by tuto úlohu vysvětlil Archimédes a Apollónios.“ Na jaře roku 1605 však dospěl k závěru, že dráha Marsu je eliptická. Téhož roku na podzim v dopise Fabriciovi [5] uvedl: „Nejpravděpodobnější dráhou planet je elipsa.“ Tento poznatek, později doplněný o umístění Slunce v ohnisku, se dnes nazývá *I. Keplerův zákon*. Na obr. 2 je elipsa z [1].

S pojmem dráha je těsně spojena problematika interpretace latinských termínů *orbes* a *orbita* používaných v Keplerových spisech. Jejich význam se u autora v průběhu života vyvíjel *orbes* → *orbita*, od sfér (materiálních objektů), přes sféry chápané geometricky, až po myšlenou křivku (geometrický pojem), dávanou do kontextu s fyzikálním pozadím, jak lze sledovat v časové posloupnosti vydání spisů *Mysterium cosmographicum*

(česky Tajemství vesmíru) [6] → *Astronomia nova* (Nová astronomie) [1] → *Epitome astronomiæ Copernicanæ* (Souhrn koperníkovské astronomie) [7].



Obr. 2 Keplerova elipsa ve spisu *Astronomia nova*

Keplerův úspěšný postup byl podmíněn matematickými metodami přibližných výpočtů [1], jejichž pomocí se mu podařilo efektivně vyřešit problém zpracování rozsáhlého pozorovacího materiálu. Příkladně zkoumal problematiku délky oblouku eliptické dráhy, včetně celé elipsy. K tomu v [1] uvedl: „Délka celé elipsy je velmi blízká k aritmetickému průměru délky kružnice o poloměru rovném velikosti velké poloosy elipsy a kružnice o poloměru rovném malé ose elipsy.“ Pravidlo využil k nalezení délek eliptických planetárních drah.

Pro obvod elipsy Kepler používal vztah $o = \pi(a + b)$ podle myšlenkové analogie, že její plocha πab je vytvářena z plochy kruhu πa^2 . Dosadíme číselné hodnoty Marsu $a_M = 2,279\,37 \cdot 10^{11}$ m a $b_M = 2,269\,40 \cdot 10^{11}$ m do vztahu

$$o = \pi(a_M + b_M) = 1,428\,996 \cdot 10^{12} \text{ m.}$$

V nyní používané aproximaci [8] je

$$o = \pi \left[1,5(a_M + b_M) - \sqrt{a_M b_M} \right] = 1,428\,998 \cdot 10^{12} \text{ m.}$$

Výpočet délky eliptické dráhy Marsu podle Keplera má relativní chybu 0,000 1 %, vztah je plně vhodný.

Jak bylo připomínáno, nezbytnou součástí autorových úvah byly fyzikální hypotézy, které měly potvrzovat správnost zvoleného eliptického tvaru. Kepler vycházel z myšlenek W. Gilberta (1544–1603) [9], předpokládajících magnetickou interakci Slunce a planety. Magnetické přitahování a odpuzování podle autora vyvolávalo dříve uvedenou libraci planety podél radiusu. Samotný pojem librace převzal Kepler z mechaniky, kde byl používán u vyvažování páky – libro. V souladu s tehdejšími představami se předpokládalo, že přirozené příčiny lze zachytit jako předměty na páce, řídící se zákonem rovnováhy na ní.

I v dalším období po roce 1609 se Kepler nepřestal zabývat problematikou pohybu planet, hledal vztah mezi vzdálenostmi planet od Slunce a dobami jejich oběhů. Výpočty zjistil, že s rostoucí vzdáleností se oběžné doby planet zvětšují rychleji než poloměry drah, tedy se zmenšuje rychlost jejich pohybu. V roce 1618 objevil tzv. *harmonický*, dnes nazývaný *III. Keplerův zákon*, vyjadřující závislost mezi velikostmi velkých poloos a oběžnými dobami planet. Objev zákona komentoval Kepler v [10] takto:

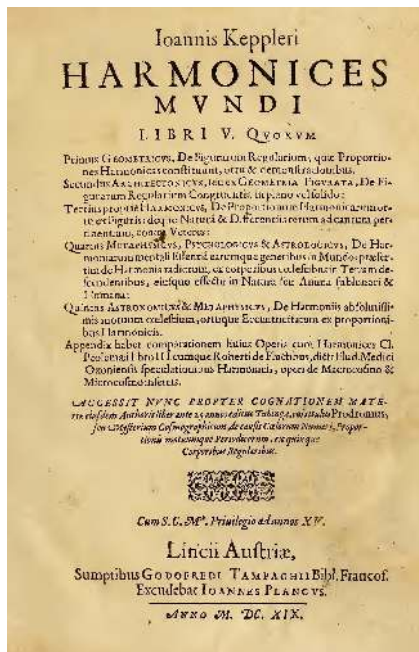
8. března tohoto roku 1618, přejeli-li si někdo přesný údaj času, se tento poměr vynořil v mé mysli. Neměl jsem však štěstí, když jsem jej ověřoval výpočtem, takže jsem jej zavrhl jako chybný. Konečně se však dne 15. května opět vrátil a v novém náporu přemohl temnoty mého ducha. Vyplnul přitom tak dokonalý souhlas mezi mou sedmnáctiletou prací nad Brahovými pozorováními a mou současnou úvahou, že jsem se zprvu domníval, že jsem snil a že jsem hledaný vztah vložil do výchozích předpokladů. Ale je to věc zcela jasná a zcela přesná – poměr, který je mezi oběžnými dobami kterýchkoliv dvou planet, je přesně půl druhá násobkem poměru středních vzdáleností, tedy samotných drah; ovšem je přitom třeba dbát na to, že aritmetický průměr obou diametrů eliptické dráhy je poněkud menší než diameter...

Půl druhá násobkem poměru v latinské matematické mluvě 17. století znamená, že první veličiny, tj. oběžné doby, bylo třeba brát v druhé mocnině a další veličiny – střední vzdálenosti v mocnině třetí.

III. Keplerův zákon byl uveřejněn v díle *Harmonices mundi libri V.*, česky *Harmonie světa pět knih*, které vyšlo v Linci roku 1619–1621 [10] (na obr. 3 je titulní list).

Doplnění a zobecnění zákonů pro ostatní tehdy známé planety provedl autor až v letech 1618–1621 v [7]. Po větším časovém odstupu vytvořil mnohem propracovanější a systematictější výklad, včetně řady doplnění: umístění Slunce do ohniska elipsy, rozšíření platnosti prvních dvou Keple-

rových zákonů na všechny známé planety, matematicky vhodnější řešení Keplerovy rovnice atd. Obsah [7] je veden formou otázek a odpovědí. Jde o první ucelenou učebnici nové astronomie vycházející z heliocentrické teorie.



Obr. 3 Titulní list Harmonie světa

Objev Keplerových zákonů představoval důležitý krok v poznávání sluneční soustavy. Teprve až znalost zákona všeobecné gravitace formulovaného ve spisu *Isaaca Newtona* (1643–1727) *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* česky *Matematické principy přírodní filozofie* [11] umožnila hlubší studium fyzikální podstaty pohybu planet kolem Slunce a zodpovězení otázky způsobu jejich pohybu. Planety tvoří společně s centrálním tělesem Sluncem gravitačně vázanou soustavu, která je možná pouze při záporné velikosti vazebné energie, tj. záporné sumě kinetické a potenciální energie. Typ tvaru dráhy, po které se těleso pohybuje v poli centrálních sil, je určován jeho kinetickou energií. II. Keplerův zákon ploch je vyjádření obecnějšího zákona zachování momentu hybnosti. Z něj výklad Keplerových zákonů je zachycen příkladně v [12].

Newtonovo zobecnění Keplerových zákonů v *Principiích* [11] se stalo impulsem pro rozvoj astronomie. Byly upřesněny vzdálenosti ve sluneční soustavě a zejména III. Keplerův zákon v přesném tvaru otevřel novou metodu pozorováním ze Země určovat hmotnosti nebeských těles, planet, Slunce, hvězd či později černých děr v dvojhvězdách či v jádrech galaxií. Astronomická pozorování stanovují relativně přesně úhlové a lineární veličiny, velikosti velkých poloos drah a , což společně s velmi přesně stanoveným časem, velikostí oběžné doby T , dává možnost využít vztah

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2} (M_1 + M_2)$$

pro zjištění hmotnosti, základní charakteristiky kosmických těles, jak bylo demonstrováno v [13].

Jedním z posledních témat, která ještě ve výuce fyziky na gymnáziích z astronomie zůstala, jsou Keplerovy zákony. Mají nejen historický obsah ale i vzdělávací potenciál, jehož využití bylo diskutováno v [14]. Otázky, které si počátkem 17. století položil Kepler, napadají i dnes přemýšlivé žáky: Pohybují se všechny planety stejnou rychlostí? Po jakých drahách? Existuje vztah mezi vzdáleností planet od Slunce a dobou jejich oběhu? Hledání odpovědí na ně je pro žáky zajímavé. Matematické řešení problematiky se opírá o prostorovou představivost a znalosti z geometrie. Stejně jako Kepler se i žáci při tom mohou naučit pracovat s vlastnostmi elipsy. Například převést známou středovou rovnici elipsy do tvaru polárního ohniskového, tj. s počátkem v ohnisku. V pravoúhlé soustavě souřadnic je středový tvar rovnice elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

kde a je délka hlavní poloosy a b je délka vedlejší poloosy, ohnisková vzdálenost $e = \sqrt{a^2 - b^2}$. Pro popis pohybu planet však v historii astronomové používali rovnici elipsy vyjádřenou v polárních souřadnicích (r, φ) , kde střed soustavy souřadnic Slunce klademe do hlavního ohniska elipsy a polární úhel φ se počítá od bližšího vrcholu; $x = e + r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Polární ohnisková rovnice má tvar

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}, \quad (2)$$

kde r je délka radiusu,

$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - \varepsilon^2), \quad \varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Číselná (numerická) výstřednost elipsy je ε . Pomocí vztahu $a^2 = a^2\varepsilon^2 + b^2$ obdržíme další z používaných tvarů

$$r = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (3)$$

který je zpravidla používán až ve vysokoškolské matematice. Ekvivalentnost tvarů (1) a (2) dokážeme dosazením za x , y , a , b do (1), kdy po algebraických úpravách obdržíme identitu.

Pro procvičení znalostí spojených s Keplerovými zákony lze využít následující úlohy:

Úloha 1

Určete velikost plošné rychlosti Země a Marsu.

$a_Z = 1,495\,98 \cdot 10^{11}$ m, $a_M = 2,279\,37 \cdot 10^{11}$ m, $\varepsilon_Z = 0,016\,71$, $\varepsilon_M = 0,093\,41$, $T_Z = 1$ rok $= 3,155\,692\,6 \cdot 10^7$ s, $T_M = 1,880\,711$ roku.

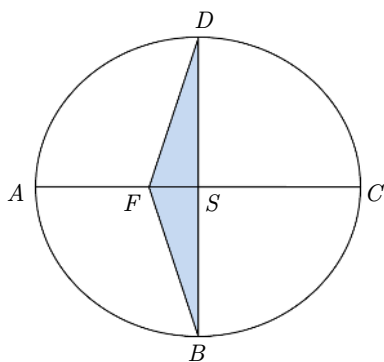
Řešení. Dosadíme do vztahu

$$b = \sqrt{a^2(1 - \varepsilon^2)},$$

obdržíme $b_Z = 1,495\,77 \cdot 10^{11}$ m, $b_M = 2,269\,40 \cdot 10^{11}$ m; $v_{pIZ} = \frac{\pi a_Z b_Z}{T_Z} = 2,23 \cdot 10^{15} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $v_{pIM} = \frac{\pi a_M b_M}{T_M} = 2,73 \cdot 10^{15} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Úloha 2

Najděte poměr časů, které Mars potřebuje pro přechod úseku eliptické dráhy ohraničené malou poloosou elipsy o výstřednosti $\varepsilon_M = 0,093\,41$ (obr. 4).



Obr. 4 Eliptická dráha Marsu

Řešení. Nechť t_1 je doba průchodu planety po úseku eliptické dráhy DAB s perihéliem v A , t_2 po úseku BCD s aféliem v C . Podle II. Keplerova zákona platí

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{S_2}{S_1},$$

kde

$$S_1 = \frac{\pi ab}{2} - S_{\triangle FBD}, \quad S_2 = \frac{\pi ab}{2} + S_{\triangle FBD}, \quad \frac{1}{2}|BD| \cdot |FO| = abe.$$

Dosazením získáme

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{\frac{1}{2}ad(\pi + 2\varepsilon)}{\frac{1}{2}ad(\pi - 2\varepsilon)} = \frac{\pi + 2\varepsilon}{\pi - 2\varepsilon} = 1,126\,44,$$

tedy $t_2 > t_1$. V úseku s aféliem se Mars pohybuje delší dobu.

Úloha 3

Určete procentuální změnu vzdálenosti Marsu od Slunce v perihéliu a aféliu, za jednotku vzdálenosti zvolme astronomickou jednotku au, při $a = 1,523\,7$ au, $\varepsilon = 0,093\,41$.

Řešení. Použijeme vztah (3) pro rádius r . V periheliu při $\varphi = 0^\circ$ je

$$r_p = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 + \varepsilon} = 1,381\,4 \text{ au},$$

v aféliu při $\varphi = 180^\circ$ je

$$r_a = \frac{a(1 - \varepsilon^2)}{1 - \varepsilon} = 1,666\,0 \text{ au},$$

Výpočet procent budeme vztahovat k hodnotě velké poloosy, tudíž

$$\frac{0,284\,6}{0,015\,226\,7} \% = 19 \, \%.$$

Úloha 4

Odhadněte hmotnost černé díry v jádře Galaxie, jestliže oběžná doba hvězdy S0-2 obíhající ve vzdálenosti $r = 965,8$ au od jádra Galaxie činí $T = 15,2$ roků, viz [15].

Řešení. Hmotnost černé díry určíme z upraveného tvaru III. Keplerova zákona

$$M \doteq \frac{r^3}{G} \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \doteq 3,9 \cdot 10^6 M_{\text{S}}.$$

Volbou počátku souřadnicové soustavy do skutečného fyzického Slunce, ke kterému propočítával pozorovací údaje Marsu, dokončil Kepler heliocentrický Koperníkův model. Potvrdil jeho správnost a podstatně ho zjednodušil. Nahradil dřívější složitá schémata založená na kombinaci rovnoměrných kruhových pohybů po deferentech a epicyklech. Při eliptických oběžných drahách a heliocentrickém uspořádání autor vyložil všechny zákonitosti v pozorovaném pohybu planet podél ekliptiky. Nalezené zákony završily kinematický obraz pohybu planet. Jejich objevitel má své nezastupitelné místo v posloupnosti výjimečných historických osobností Koperník – Kepler – Newton.

Literatura

- [1] *Kepler, J.*: Astronomia Nova AITIOΛΟΓΗΤΟΣ seu physica coelestis, tradita commentariis de motibus stellae Martis ex observationibus G. V. Tychoonis Brahe. Heidelberg, 1609.
- [2] *Kepler, J.*: Gesammelte Werke. Band III. Astronomia Nova. C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München, 1951.
- [3] *Kepler, J.*: Gesammelte Werke. Band XIV Briefe 1599–1603. C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München, 1951.
- [4] *Svoboda, E., Bednařík, M., Šíroká, M.*: Fyzika pro gymnázia – Mechanika. Prometheus, Praha, 2012.
- [5] *Kepler, J.*: Gesammelte Werke. Band XV Briefe 1604–1607. C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München, 1951.
- [6] *Kepler, J.*: Mysterium cosmographicum. Georgius Gruppenbachius, Tübingen, 1596.
- [7] *Kepler, J.*: Epitome astronomiae Copernicanae Lentijis ad Danubium, excudebat Johannes Plancus 1618–1621.
- [8] *Rektorys, K. a kol.*: Přehled užití matematiky. Prometheus, Praha, 2007.
- [9] *Gilbert, W.*: De magnete magneticisque corporibus et de magno magnete Tellure physiologia nova. Book III, kap. 7. Petrus Short, Londini 1600.
- [10] *Kepler, J.*: Harmonice mundi. Libri V. Sumptibus Godofredi Tampachii Bibl. Francof. Excudebat Ioannes Plancus, Lincii Austriae 1619.

- [11] *Newton, I.*: Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica. Londini 1687.
- [12] *Noll, E. D.*: Teaching Kepler's law as more than empirical statements. Physics Education, roč. 37 (2002), č. 3, s. 245–250.
- [13] *Štefl, V.*: Třetí Keplerův zákon. Matematika a fyzika ve škole, roč. 7 (1977), č. 6, s. 450–453.
- [14] *Štefl, V., Domański, J.*: Prawa Keplera w nauczaniu fizyki. Fizyka w Szkole, roč. 55 (2009), č. 3, s. 37–40.
- [15] *Ghez, A. M., et al.*: Full Three Dimensional Orbits For Multiple Stars on Close Approaches to the Central Supermassive Black Hole. Astronomische Nachrichten, roč. 324 (2003), Supplement 1, s. 527–533.

Obecné řešení Buquoyovy úlohy

ČENĚK KODEJŠKA – JAN ŘÍHA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Úvod

Tato práce navazuje na předchozí experimentální ověření teoretického řešení úlohy o kmitavém pohybu jednorozměrného otevřeného systému s proměnnou hmotností [1]. Teoretické řešení Buquoyovy úlohy pro případ nehmotné tažné síly je v [2].

Původní teorie byla rozšířena o další dva parametry, které ovlivňují pohyb balónku naplněného heliem se zavěšeným ohebným vláknem s proměnnou hmotností (viz [1, obr. 1]).

Obecné řešení

Pro nalezení shody mezi teoretickým modelem a experimentálně naměřenými hodnotami musíme vzít v úvahu další dva faktory. Zaprvé odpor prostředí, který zpomaluje pohyb balónku, a za druhé hmotnost tělesa, které táhne vlákno. V našem případě se jedná tedy o hmotnost balónku m_b . Teoretický model, který je uveden v [2], uvažuje pouze nehmotnou tahovou sílu, ale v reálném experimentu musíme pak do teoretického modelu zahrnout i výše uvedené dva faktory.

Výchozí pohybová rovnice (1) pro odvození rovnice (2) je tedy v obecném tvaru dána jako:

$$(\eta y \dot{y} + m_b \dot{y})' = F - \eta y g - \gamma \dot{y}, \quad (1)$$

kde γ je koeficient odporu prostředí a η je lineární hustota vlákna.

Rovnici (1) můžeme po úpravách zformulovat do obecnějšího tvaru (2):

$$\ddot{y} = \frac{1}{y + \alpha} \left[g(y_c - y) - \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} \dot{y}) \dot{y}^2 - \beta \dot{y} \right], \quad (2)$$

kde $\alpha = m_b/\eta$ je faktor související s hmotností reálného tělesa, které táhne řetízek, $\beta = \gamma/\eta$ je člen, který zahrnuje odpor prostředí.

Rovnice (2) pro $\alpha = 0$ m a $\gamma = 0 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ přechází na rovnici (3) uvedenou v [2]:

$$\ddot{y} = g \left(\frac{y_c}{y} - 1 \right) - \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn} \dot{y}) \frac{\dot{y}^2}{y}. \quad (3)$$

K fitování jsme použili program Wolfram Mathematica verze 11.2.0.0. a jeho funkci NonlinearModelFit, která vrací symbolický objekt FittedModel. Tento nelineární model je definován numerickými operacemi, tj. umožňuje numerické řešení diferenciální rovnice (2). Obr. 1 ilustruje porovnání nafitovaného modelu (červená křivka), daného rovnicí (2), s experimentálně naměřenými daty získanými videoanalýzou pohybu řetízku v programu Tracker (černá křivka).

Jak můžeme vidět na grafu na obr. 1, obě křivky se velice dobře shodují. Teoretický model v programu Wolfram Mathematica vypočítal hodnotu koeficientu $\alpha \doteq 0,303$ m. Hmotnost balónku v reálném experimentu byla změřena jako $m_b = (3,2 \pm 0,1)$ g a koeficient α má tedy v reálném provedení hodnotu

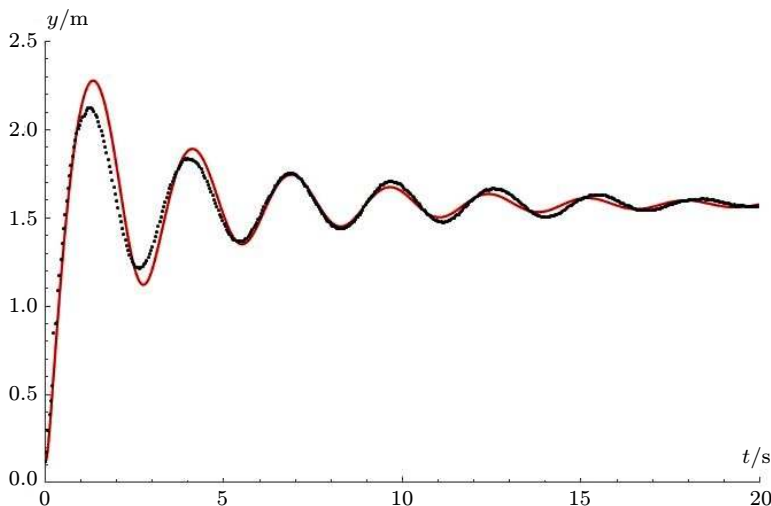
$$\alpha = \frac{3,2}{10,4} \text{ m} \doteq 0,308 \text{ m}.$$

Reálná hodnota je tedy v dobré shodě s teoreticky vypočítanou.

Hodnota koeficientu zahrnující odpor prostředí byla teoretickým modelem obdobně určena jako $\beta = 0,57 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a hodnota $y_c = 1,578$ m (experimentální výsledek $y_c = 1,564$ m je od hodnoty predikované programem Wolfram Mathematica přibližně o 1 % menší).

Na závěr jsme provedli statistickou analýzu párovým t-testem s rovností rozptylů, kterým jsme testovali nulovou hypotézu, že teoretické hodnoty a

experimentálně naměřené, se na hladině statistické významnosti $\alpha = 0,05$ významně statisticky neliší. Tato hypotéza byla potvrzena.



Obr. 1 Teoretický model (červená křivka) a reálný průběh pohybu (černá křivka)

Závěr

Reálný průběh pohybu se od teoretického modelu při zahrnutí hmotnosti tažného tělesa a odporu prostředí téměř neliší. Statistickou analýzou pomocí párového t-testu s rovností rozptylů byla potvrzena nulová hypotéza, tedy že hodnoty predikované teoretickým modelem a experimentálně naměřené se na hladině statistické významnosti $\alpha = 0,05$ vzájemně neliší.

Závěrem lze konstatovat, že námi analyzovaný pohyb Buquoyova vlákna pouze částečně odpovídá teoretickým závěrům, které učinili autoři v [2]. Zobecněný model, který byl navržen autory tohoto článku, již velice dobře popisuje reálný experiment.

Literatura

- [1] Kodejška, Č., Říha, J.: Experimentální realizace Buquoyovy úlohy. MFI, roč. 26 (2017), č. 5, s. 380–384.
- [2] Šíma, V., Podolský, J.: Buquoyova úloha. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 51 (2006), č. 3, s. 177, [online], dostupné na: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/141315>

iBooks Author ve výuce na základní škole

LENKA BENEDIKTOVÁ

FPE ZČU v Plzni

V dnešní době se s moderními technologiemi setkáváme na každém kroku a školní prostředí není výjimkou. Pro učitele a jejich žáky jsou k dispozici počítače, interaktivní tabule, tablety či např. smartphony. Počet žáků a studentů, kteří při své výuce používají např. mobilní zařízení (smartphony, tablety a notebooky), za posledních 10 let rapidně vzrostl [1].

Zatímco v roce 2012 byla pouze 2 % studentů starších 16 let, kteří používali tablet, v roce 2015 jich bylo již 25, 2 % a v roce 2017 dokonce 40,1 % (u smartphonů šlo dokonce o 99,8 %). Je tedy zřejmé, že mobilní zařízení se mezi mladými lidmi těší stále větší oblibě [2]. Podíváme-li se čistě na vybavení škol, zjistíme, že zde stále převažují stolní PC nebo notebooky. Z tematické zprávy ČŠI (2017) vyplývá, že pokud školy disponují ICT prostředky pro aktivní využití žáka 1 : 1, čímž se myslí, že každý žák má pro sebe svůj PC nebo tablet, mají tyto školy z 96,2 % PC a notebooky a pouze ze 17,6 % tablety. 5,9 % zkoumaných potom spoléhá na systém BYOD (Bring Your Own Device), kdy žák pracuje na zařízení, které si přinesl z domova. Přestože tedy v posledních letech vybavenost škol mobilními zařízeními stoupá, mimo jiné díky ESF projektům, není zdaleka dostačující. Alarmující je ostatně také fakt, že ve školním roce 2016/2017 pouze 27,6 % větších ZŠ (nad 150 žáků) uvedlo, že disponují třídami, kde je umožněna výuka s digitálními technologiemi 1 : 1. Realita totiž bývá často taková, že dostatek ICT vybavení má pouze specializovaná PC učebna (60,9 % větších ZŠ), která je však vytížena hodinami informatiky a při jiných předmětech se do ní žáci dostanou jen výjimečně.

Samotné přinesení tabletu do hodiny však nestačí. Moderní technologie sama o sobě výuku nepovznese [4]. Ruku v ruce s těmito zařízeními jde také softwarová vybava, která je pro kvalitní vzdělávání s ICT prostředky nutná [5]. Mimo běžného kancelářského softwaru má dnes učitel k dispozici multimediální učebnice, testovací aplikace či hotová interaktivní cvičení. Přesto si někteří učitelé ze široké nabídky nevyberou a již hotové aplikace jim svazují ruce. Pro tyto pedagogy existuje programové vybavení, které umožňuje tvorbu vlastního obsahu do výuky.

Software, který umožňuje učiteli tvorbu vlastních materiálů do výuky, lze dělit do několika skupin. Nejrozsáhlejším řešením jsou autorské systémy, umožňující tvorbu rozsáhlých didaktických materiálů a výukových kurzů. Tyto kurzy obsahují jak výkladovou část, tak část fixační a testovací. Zpravidla disponují také možností spravovat jednotlivé uživatele, kteří mají ke kurzu přístup, komunikovat s nimi apod. Na druhé straně existují drobné aplikace, které se zaměřují na procvičování učiva různými způsoby, ať už jde o doplnění chybějících slov, spojování pojmů či o jednoduché hry a kvízy (např. aplikace Quizlet, Kahoot! apod.). Jiné aplikace umožňují připravovat pro žáky testy (Socrative) či pracovní listy (Stick Around). Další skupinou aplikací jsou ty, které pedagogovi umožňují vytvářet vlastní elektronické knihy – ebooky. V našem článku se zaměříme právě na aplikaci iBooks Author, která slouží k tvorbě interaktivních ebooků.

Co to je iBooks Author?

Jak napovídá malé „i“ na začátku názvu, jedná se o aplikaci, která je určena pro zařízení firmy Apple. Samotná aplikace je dostupná pro operační systém OS X, tedy pro počítače a notebooky značky Apple. Hotové materiály je možno exportovat ve formátu *.ibooks, takže s nimi lze pracovat v aplikaci iBooks, ve školním prostředí tudíž na iPadu či iPhoneu. Podklady pro výuku lze exportovat také ve formátu *.pdf, takto ale přijdeme o všechny interaktivní funkce a zbude jen statický obsah, text a obrázky. Bavíme-li se o interaktivitě, je nutné uvést, že iBooks Author je nástroj pro tvorbu elektronických knih (ebooků) či výukových materiálů, které mohou obsahovat několik typů interaktivních prvků. Mezi tyto prvky řadíme např. obrázkovou galerii, testy, video či animaci. Program je ke stažení na AppStore, a to zcela zdarma. Aplikace o velikosti 405 MB je k dispozici česky, což může řada učitelů přivítat.

Ovládání a funkce

Jak již bylo řečeno, aplikace je dostupná v češtině, což usnadňuje její ovládání. Pokud je uživatel zvyklý pracovat s kancelářskými programy pro OS X (např. Pages, Keynote) přivítá ho v iBooks Author příjemně známé prostředí. iBooks Author má však poměrně intuitivní ovládání, takže práce v něm by neměla být problémem ani pro méně zkušeného uživatele. Po spuštění aplikace je uživatel (učitel) vyzván k výběru předlohy, do které chce své dílo tvořit. Předlohy jsou uspořádány na výšku i na šířku a je zde samozřejmě také možnost začít na opravdu prázdné stránce bez jakékoliv úpravy, ať už rozložení či barev. Navrhované předlohy jsou však poměrně vydařené a začínající učitel ocení usnadnění práce. Po zvolení předlohy aplikace vygeneruje návrh knihy s titulní stranou a první kapitolou. Zde již dostává učitel volnou ruku a je na něm, aby knihu přizpůsobil svým představám a naplnil ji vlastním obsahem.

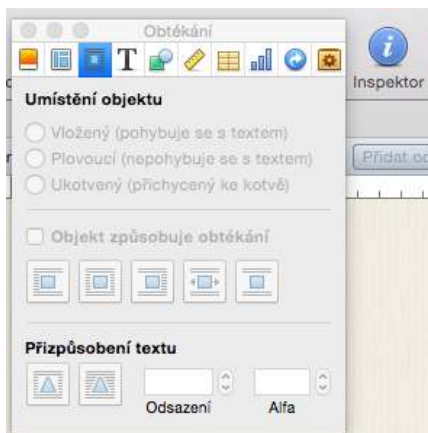
Naplnění knihy statickým obsahem a jeho následná úprava připomíná práci v běžném kancelářském programu. Uživatel má k dispozici mnoho možností formátu a zarovnání textu nebo rozložení objektů na stránce. Nechybí možnost vkládat objekty, jako jsou tabulky a grafy. Pro následnou editaci objektů a nastavení vlastností stránky slouží, mimo tradiční lišty nabídek na horním okraji obrazovky, také čtyři ikony v pravém horním rohu (obr. 1).



Obr. 1

Ikona Písma umožňuje formát textu. Ikona Barvy nabízí 5 záložek pro práci s barvami, které lze následně aplikovat do různých míst ebooku. Ikona Média uživateli velmi prakticky umožňuje přístup do knihovny fotografií, hudby a filmů. Nejvíce funkcí však nalezneme pod ikonou Inspektor (obr. 2). Po kliknutí na tuto ikonu se otevře plovoucí okno, které umožňuje např. upravit vlastnosti dokumentu, uspořádání objektů na stránce a jejich obtékání nebo formátování grafů a tabulek.

Velmi podstatnou vlastností iBook Authoru, kterou se liší od ostatních bezplatných aplikací pro tvorbu ebooků je možnost přidávání multimediálního obsahu pomocí widgetů. Současná verze aplikace nabízí 9 typů widgetů (obr. 3).



Obr. 2



Obr. 3

Prvním z widgetů je *Galerie*, která umožňuje do vyhrazeného pole vložit několik obrázků, mezi nimiž potom čtenář přepíná. Výhodou galerie je fakt, že chce-li učitel žákovi ukázat více fotek, nezabírají každá své místo na stránce. Při zobrazení jednotlivých obrázků se zobrazí také jejich příslušný popis (obr. 4).



Obr. 4

Druhým widgetem je položka *Média*, pomocí které lze do ebooku přidat zvukový klip či video. Po přidání widgetu vybere uživatel jaký multime-

diální soubor se má nahrát (obr. 1, ikona media). Zvuky a videa se potom dají importovat z knihovny iTunes či aplikace iMovie. V hotové knize může zvuk reprezentovat ikonka reproduktoru nebo libovolný obrázek, vložený uživatelem. Zde je však nevýhodou, že takto reprezentovaný zvuk jde následně jen spustit a zastavit. Třetí možností, jak v ebooku interpretovat zvuk je potom klasická lišta, kde lze zvukovou stopu libovolně posouvat. Widget s videoklipem je vybaven nejen tlačítkem na spuštění a pauzu, ale také tlačítkem na ovládání hlasitosti či na zvětšení okna přes celou stránku. Pod videem nechybí lišta na posouvání.

Třetím, a pro učitele jistě velmi zajímavým widgetem v aplikaci iBooks Author, je *Test*. Tento widget umožňuje do knihy vkládat dílčí testy. Uživatel má k dispozici 6 šablon pro otázky. První je klasická testová uzavřená otázka, kde uživatel volí 2 až 6 odpověďmi, přičemž vždy pouze jedna je správná, následují dvě šablony, kde lze do zadání otázky zakomponovat také obrázek. Čtvrtým typem je otázka, kde uživatel vybírá odpověď z obrázků (obr. 5). Stejně jako u ostatních typů otázek, je zde možno vybírat až ze 6 odpovědí. Předposlední typ otázky umožňuje přiřazovat štítky s nápisy na obrázek (toto by bylo využitelné např. u slepé mapy).



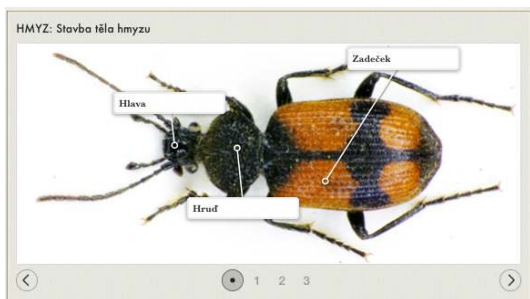
Obr. 5

Poslední typ se velmi podobá předchozímu, jen se místo štítků s nápisy přesouvají štítky s obrázky. Důležitou vlastností tohoto widgetu je poskytnutí zpětné vazby. Žák si může nechat zkontrolovat každou otázku hned po zodpovězení nebo si test nechat vyhodnotit až na konci a jednotlivé otázky

si projít. Ebook prozradí žákovi, zda odpověď zvolil správně či ne. Pokud je odpověď nesprávná, je označena červeným křížkem, ale správné řešení není zobrazeno. V případě potřeby může být test spuštěn opakovaně.

Dalším widgetem je *Keynote*. Přes tento widget je možné importovat do e-knihy prezentaci vytvořenou v softwaru Keynote. Keynote umožňuje vytvářet prezentace v operačním systému OS X. Protože je mezi českými pedagogy nepochybně více rozšířen MS Power Point, jeví se tento widget z počátku jako málo využitelný. Aplikace Keynote však umožňuje import souborů ve formátu *.pptx (popř. *.ppt) a jejich uložení ve formátu *.keynote. Učitel tak může svoji prezentaci do ebooku snadno vložit. Žák si při procházení knihou může jednotlivými snímky prezentace listovat.

Pedagogové jistě ocení také widget *Interaktivní obrázek*. Pomocí tohoto prvku lze do elektronické knihy vložit obrázek, který je doplněn libovolným počtem štítků s popisky. Při přípravě knihy lze také nastavit, zda se má obrázek při kliknutí na některý štítek zvětšit a zdůraznit tak určitou část obrázku, na kterou se má žák zaměřit. Pokud učitel zvětšení nenastaví, po kliknutí na štítek se pouze zobrazí daný popisek a velikost obrázku zůstane stejná (obr. 6).



Obr. 6

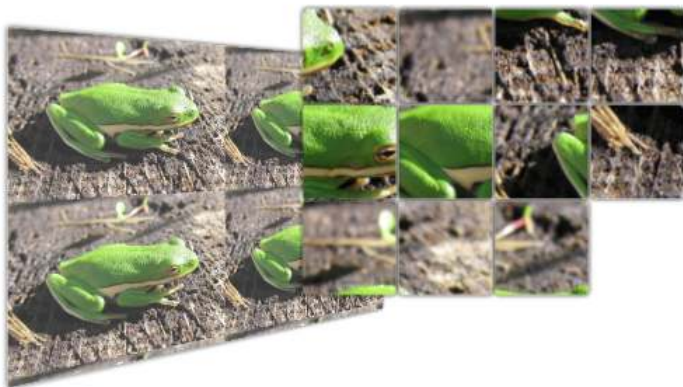
Šestáým widgetem v seznamu je *3D objekt*. Pomocí tohoto modulu lze vkládat 3D obrázky. Těmito objekty lze v knize následně různě otáčet. Otáčení je možné při vytváření materiálu různě omezit, např. aby se objekt otáčel pouze na vodorovné ose. 3D objekty, které aplikace podporuje, musí být ve formátu *.dae.

Widget *Posuvný boční panel* je prostor, do kterého lze psát, vkládat obrázky a tvary a zároveň mu můžeme určit přesnou velikost. Uživatel tedy nastaví widgetu přesné rozměry a umístí ho na libovolné místo na stránce, zpravidla k okraji listu. Do panelu lze potom vložit libovolné množství

obsahu, které lze prohlížet posuvníkem na boku panelu. Takto lze do knihy umístit např. zajímavosti či další doplňující informace k tématu. Panel lze pomocí ikony Inspektor samostatně formátovat, tj. může mít např. jiné pozadí než zbytek stránky, také text může být naformátován nezávisle na zbytku knihy.

Podobně funguje také widget *Vyskakovací překryv*, který umožňuje vložit na stránku obrázek s doplňujícími informacemi. Po kliknutí na obrázek se uživateli zobrazí plovoucí štítek s textem, který může obrázek popisovat či jinak doplňovat hlavní text učebnice. S obrázkem nelze v hotové knize již dále manipulovat, jedná se tedy spíše o miniaturu, která slouží jako tlačítko ke zprostředkování dalších informací.

Posledním widgetem je *HTML*. Pod tímto názvem se ukrývá mnoho dalších možností, které učitelé jistě využijí. Na stránkách s oficiálním návodem pro aplikaci (odkaz) se dočteme, že je třeba vytvořit widget pomocí několika souborů, které se v závěru nahrají do jedné složky a přejmenují dle příslušných pravidel. Tento postup může být pro učitele obtížný a zdlouhavý. Nabízí se tedy využívat iBooks Author bez tohoto doplňku, což by byla velká škoda. V kombinaci s vhodnou webovou stránkou, která umožňuje tvorbu widgetů (např. bookry.com), umožňuje tento modul vložit do ebooku např. osmisměrku, video z Youtube či jiné stránky (zde je samozřejmě nutné připojení k internetu) nebo puzzle (obr. 7). Již zmíněná stránka bookry.com nabízí po bezplatné registraci 43 druhů widgetů. Vytvořené materiály může učitel přehledně uchovávat v záložce My Book Shelf (poličce) a později se k nim vracet a editovat je.



Obr. 7

Poté co jsme knihu naplnili textem, obrázky či widgety, je třeba ji poskytnout žákům. Abychom mohli využívat všechny interaktivní prvky, které jsou v knize vloženy, je nutné ji exportovat ve formátu *.ibooks (jak již bylo uvedeno, export do *.pdf připraví knihu o veškeré pohyblivé a interaktivní prvky). Vygenerovanou knihu lze žákům např. nasdílet na některé cloudové úložiště a poskytnout jim odkaz ke stažení.

Shrnutí

Dnešní doba moderních technologií nabízí učitelům a jejich žákům mnoho nových možností a nástrojů pro výuku. Na trhu je dostupné velké množství vzdělávacího softwaru, včetně multimediálních učebnic. Pro učitele, které si své podklady do výuky chtějí tvořit sami, existují aplikace pro tvorbu vlastních materiálů. Jak vyplývá z tohoto článku, mezi tyto nástroje se řadí i iBooks Author. Aplikace s intuitivním ovládáním umožňuje učiteli vytvořit atraktivní multimediální učebnici, kterou následně snadno poskytne svým žákům, ať už pro práci v hodině či pro domácí opakování. Ondřej Neumajer (2013) ve svém článku upozorňuje na to, že ideální elektronická učebnice není jen ebook plný textu, popř. obrázků. Multimediální učebnice by měla obsahovat nejen část výkladovou, ale také fixační (popř. testovací), měla by umožňovat žákům vkládat poznámky a obsahovat různé druhy multimédií. Ivanová (2016) mimo těchto informací doplňuje, že elektronická učebnice by měla dovolit žákovi pracovat svým vlastním tempem a být nezávislý na kolektivu. Aplikace iBooks Author disponuje funkcemi a vlastnostmi, pomocí kterých může učitel takový materiál vytvořit. Vyhledáme-li na internetu již hotové učebnice, vytvořené v iBooks Authoru, můžeme vidět atraktivní materiály, plné obrázků, videa a jednoduchých testů. Aplikace je zdarma, problémem tedy může být tedy spíše cena samotného hardwaru, na kterém aplikace a následně hotové materiály poběží. Nedostatkem hotových e-booků potom je absence nějakého diskuzního prostředí, kterém by např. mohli žáci sdílet své dotazy mezi sebou či s učitelem. Chybí také zpětná vazba pro učitele, např. nemá přístup k výsledkům žáka v dílčích testech apod.

Závěr

Jedním z trendů pedagogiky v posledních letech je zvýšit zapojení žáka do výuky, tedy změnit jeho roli z pasivního posluchače na aktivního příjemce informací ([6]). Právě zde se mohou uplatnit materiály z aplikace

iBooks Author, které umožňují žákovi pracovat dle svého tempa a okamžitě ověřit získané znalosti v dílčích testech a dalších cvičení. Pro učitele, který běžně pracuje s počítačem, nevyžaduje aplikace žádné speciální znalosti. Firma Apple navíc na svých stránkách poskytuje poměrně podrobný tutoriál [8].

Literatura

- [1] *Fojtík, R.*: Ebooks and Mobile Devices in Education. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*. [online], roč. 182 (2015), 742–745, [cit. 16. 10. 2017]. Dostupné z: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S187704815030992>
- [2] Český statistický úřad: Využívání informačních a komunikačních technologií studenty. 2017. [cit. 20. 7. 2018]. Dostupné z: https://www.czso.cz/csu/czso/vyuzivani_informacnich_techologii_studenty
- [3] Tematická zpráva ČŠI. Využívání digitálních technologií v mateřských, základních, středních a vyšších odborných školách. 2017. [cit. 20. 7. 2018]. Dostupné z: https://www.csicr.cz/Csicr/media/Prilohy/PDF_el._publikace/Tematicke%20zpravy/F_TZ-Vyuzivani-digitalnich-technologii-v-MS,-ZS,-SS-a-VOS_kor.pdf
- [4] *Clark, W., Luckin, R.*: What the research says: iPads in the Classroom. [online] London: Institute of Education, 2013. [cit. 20. 7. 2018]. Dostupné z: <https://cpb-ap-se2.wpmucdn.com/global2.vic.edu.au/dist/5/48534/files/2015/08/ipads-in-the-classroom-report-lkl-v24yz4.pdf>
- [5] *Spanovic, S.*: Pedagogical Aspects of E-Textbooks. *Odgojne znanosti*, roč. 12 (2010), č. 2, 459–470.
- [6] *Ivanova, E., Osmolovskaya, I.*: Electronic textbooks: didactic aspect. *SHS Web of Conferences* 9, 2016 [online] [cit. 16. 10. 2017]. Dostupné z: http://www.shs-conferences.org/fr/articles/shsconf/abs/2016/07/shsconf_eeia2016_01055/shsconf_eeia2016_01055.html
- [7] *Neumajer, O.*: Ondřej. Ideál elektronické učebnice [online]. 2013. EDUin. [cit. 16. 7. 2018], Dostupné z: <http://neumajer-blog.eduin.cz/2013/04/21/ideal-elektronicke-ucebnice/>
- [8] Náповěda pro iBooks Author. [online]. Apple, 2017 [cit. 1. 11. 2017]. Dostupné z: <https://help.apple.com/booksauthor/mac/>

Jedno méně obvyklé užití programu GeoGebra

JAN FRANK, VÁCLAV VRBÍK

Fakulta pedagogická ZČU v Plzni

Sledujeme-li aktuální trendy českého školství, narazíme v současné době jistě na dva požadavky – aktivizaci žáků a nasazení ICT, resp. kognitivních technologií, napříč vyučovanými předměty na základní či střední škole. Nejinak tomu je i v hodinách matematiky, ve kterých je možné vhodně využít matematický software, kdy patrně nejrozšířenějším takovým softwarem na českých školách jsou programy dynamické geometrie, jakým je například GeoGebra. Tyto programy představují nástroj pro velmi rychlé a naprosto přesné konstruování geometrických figur v rovině, případně i v prostoru, a z hlediska výuky na českých základních a středních školách vykazují nejvyšší míru didaktické použitelnosti [5]. Výhoda těchto programů oproti tradičním postupům konstruování tkví v dynamice celé konstrukce, možnosti s výslednou figurou „zahýbat“ a případně se vrátit o krok zpět a opravit chybu v postupu. Uvedený program GeoGebra představuje zástupce s licencí typu open-source a je již řadu let zdokonalován. V současné době je k dispozici verze GeoGebra 6.0, kterou lze v češtině bezplatně stáhnout na internetových stránkách www.geogebra.org.

Vraťme se nyní k prvnímu z požadavků – aktivizaci žáků. Ta je možná různými způsoby, například volbou zadávaných úloh nebo výběrem vhodných výukových metod. Maňák a Švec hovoří v této souvislosti v [2] o tzv. aktivizujících výukových metodách. Podstatou aktivizujících metod je plánovat, organizovat a řídit výuku takovým způsobem, aby k plnění stanovených výchovně-vzdělávacích cílů docházelo hlavně na základě vlastní učební práce žáků, přičemž je kladen důraz na myšlení a řešení problémů [1]. Obecně lze v této souvislosti říci, že problémové úkoly tvoří základ všech aktivizujících výukových metod, kdy rozdíl mezi jednotlivými metodami je v pojetí a způsobu řešení daného problému [3]. Mezi konkrétní aktivizující výukové metody Maňák a Švec [2] řadí metody diskusní, heuristické metody a řešení problémů, metody situační, metody inscenační a didaktické hry. Z povahy učiva přírodovědných/technických předmětů je zřejmé, že není možné například v hodinách matematiky, informatiky či

fyziky aplikovat všechny z výše uvedených metod. Důraz je zde kladen spíše na metody heuristické a řešení problémů, případně na metody situační – řešení problémových úloh vycházejících z reálné události. Můžeme v této souvislosti hovořit též o badatelsky orientované výuce.

Badatelsky orientovaná výuka je poměrně nový přístup, se kterým se v prostředí českých škol setkáváme stále častěji. Základem tohoto přístupu je bádání, kdy se jedná o takové činnosti, při nichž si žák rozvíjí své znalosti a dochází k porozumění vědeckých myšlenek. Zahrnuje například pozorování, pokládání otázek, vyhledávání informací, plánování výzkumu, využívání nástrojů pro sběr, analýzu a interpretaci dat, formulaci odpovědí a sdělování závěrů [4]. V hodinách matematiky se může jednat komplexní úlohy z reálného života s mezipředmětovým přesahem do fyziky, chemie či technické výchovy, při jejichž řešení lze navíc využít počítače a vybraných kognitivních technologií. Což je v souladu i s aktuálním RVP a tematickým okruhem *Nestandardní aplikační úlohy a problémy*.

Kognitivní technologie ve výuce matematiky, například nasazení programů dynamické geometrie, představují ideální prostředek, jak výuku zefektivnit, aplikovat badatelský přístup a žáky aktivizovat. Při řešení zadaného problému se žáci mohou vtělit do role matematika či výzkumníka a přítomnost počítače při řešení navíc umožňuje nahlížet na některé klasické problémy optikou moderních technologií a řešit je inovativním způsobem. Jednomu takovému méně tradičnímu využití programu GeoGebra při řešení komplexní problémové úlohy je věnována následující kapitola.

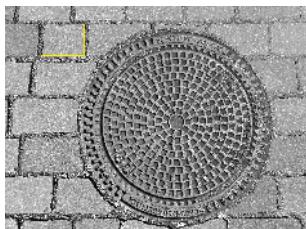
Kolik vlastně váží kanálový poklop

Program GeoGebra se zpravidla využívá v hodinách matematiky při výuce rovinné geometrie. Možnosti tohoto programu ovšem přesahují rámec matematiky a v současné době nalezneme na stránkách www.geogebra.org rozsáhlou sbírku materiálů, obsahující propracované modely od uživatelů, které jsou použitelné například v hodinách zeměpisu, přírodopisu či fyziky. V kontextu tradiční výuky geometrie a badatelsky orientovaného vyučování lze vyzdvihnout již zmíněnou dynamiku konstrukce. Žáci tak mohou po sestrojení figury splňující požadované vlastnosti ze zadání na základě změny vzájemné polohy výchozích prvků sami rozhodnout o počtu, případně existenci, řešení ve specifických případech.

Program GeoGebra obsahuje celou řadu užitečných nástrojů, které lze při experimentování s geometrickými figurami využít – konkrétně lze uvést například nástroje *Stopa* nebo *Animace*. Cílem článku ovšem není čtenáře seznámit se všemi možnostmi tohoto softwaru a odkážeme jej na online

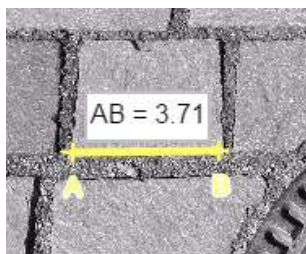
příručku dostupnou na uvedeném odkazu. Posledním nástrojem, o kterém se zmíníme, je možnost umístit na pozadí nákresny obrázek. Ten pak můžeme následně s využitím všech nástrojů programu podrobit detailnějšímu zkoumání – jedná se právě o badatelský přístup, který využijeme při výpočtu hmotnosti kanálového poklopu.

Úloha může být zadána následovně: *Na školním výletě do Plzně se Jindra procházel po náměstí Republiky a čekal na odjezd domů. Čas si krátil počítáním dlažebních kostek až přišel k jednomu z kanálových poklopů. Přemýšlel, jak by mohl určit jeho hmotnost. Již z dřívějšíka věděl, že poklop bývá vyroben z šedé litiny a je tlustý 4 cm. Bohužel u sebe měl pouze krátké pravítko, tak si poklop vyfotil a změřil si dva rozměry jedné z dlažebních kostek s tím, že se pokusí hmotnost vypočítat později doma. Kostka měla při pohledu shora rozměry 180×140 mm a na fotografii jsou vyznačené žlutou barvou. Jaká hmotnost kanálového poklopu Jindrovi vyšla?*



Obr. 1 Zadání úlohy na výpočet hmotnosti kanálového poklopu

Řešení. Při řešení úlohy je nutné postupovat v několika dílčích krocích. Nejprve umístíme fotografii na pozadí nákresny a určíme měřítko fotografie ze znalosti skutečných rozměrů dlažební kostky. K určení měřítka postačuje zvolit jeden z rozměrů dlažební kostky. S využitím nástrojů *Úsečka* a *Vzdálenost* určíme délku hrany kostky na fotografii (obr. 2).



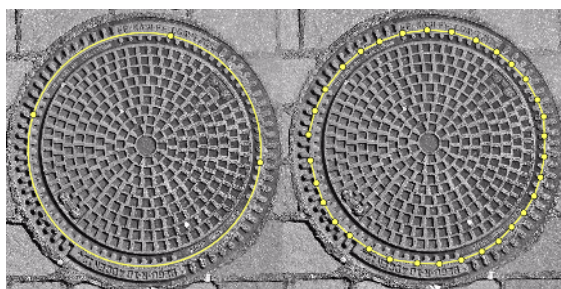
Obr. 2 Určení měřítka fotografie

Délce hrany 180 mm ve skutečnosti tedy odpovídá délka 3,71 na fotografii. Zapišeme-li rozměry ve tvaru poměru 3,71 : 180 mm, pak vydělením získáme měřítko 1 : 48,5 mm. Na tomto místě je nutné podotknout, že různí žáci mohou docházet k odlišným měřítkům. To je způsobené odlišnou velikostí fotografie po umístění na nákresnu – žák nahraje fotografii a následně ji zmenší pro lepší přehlednost namísto oddálení nákresny. Číselně je od tohoto kroku postup odlišný, konečný výsledek by však měl vyjít všem žákům stejný, protože se úměrně zmenší všechny rozměry na fotografii.

Abychom mohli určit výslednou hmotnost daného poklopu, budeme k němu přistupovat jako k válci o výšce $v = 4$ cm (tj. tloušťka poklopu). Žáci znají vzorec pro výpočet objemu válce

$$V = \pi r^2 v.$$

Potřebujeme tedy určit poloměr poklopu – základny válce. Program GeoGebra nám nabízí dvě možnosti řešení. Rychlejší z nich je nástroj *Kružnice dána třemi body*, který nám umožňuje sestavit kružnici na základě tří bodů, které umístíme na nákresnu. V tomto případě se jedná o body umístěné na hranu poklopu (obr. 3 vlevo). Žákům zřejmě bližší postup, ovšem pracnější a časově náročnější, je pomocí nástroje *Lomená čára*, kdy tímto způsobem aproximují hledanou kružnici mnohoúhelníkem (obr. 3 vpravo).



Obr. 3 Aproximace kanálového poklopu kružnicí

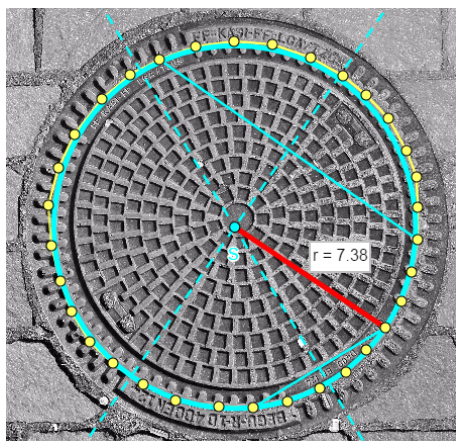
V obou z uvedených postupů nyní potřebujeme najít polohu středu kružnice a určit velikost poloměru. Vyjdeme-li z poznatku, že střed se nachází v průsečíku os tětiv dané kružnice, je nalezení polohy středu snadnou záležitostí. Na obr. 4 je situace zachycena v případě postupu s využitím lomené čáry – modře je sestrojena hledaná kružnice a červeně je vyznačen poloměr, jehož velikost určíme opět pomocí nástroje *Vzdálenost*.

Výpočet je již snadnou záležitostí. Velikost poloměru je v milimetrech $7,38 \cdot 48,5 \doteq 358$, tj. $S = 0,358$ m. Vypočteme obsah podstavy válce:

$$S = \pi \cdot (0,358 \text{ m})^2 \doteq 0,4 \text{ m}^2.$$

Tuto hodnotu vynásobíme velikostí výšky válce v metrech a získáme objem:

$$V = S \cdot v = 0,4 \text{ m}^2 \cdot 0,04 \text{ m} = 0,016 \text{ m}^3.$$



Obr. 4 Poloha středu a hledaný poloměr základny válce

Posledním krokem je určit výslednou hmotnost poklopu. Žáci snadno v tabulkách nebo na internetu naleznou hustotu šedé litiny, která činí $\rho = 7\,250 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ a následně určí výpočtem výslednou hmotnost:

$$m = V \cdot \rho = 0,016 \text{ m}^3 \cdot 7\,250 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} = 116 \text{ kg}.$$

Slovní odpověď by tedy mohla být: *Jindra vypočetl, že hmotnost kanálového poklopu činí 116 kg.*

K výsledné hodnotě je nutné opět podotknout, že se u jednotlivých žáků může mírně lišit. Roli zde hraje pečlivost při nahrazování hrany poklopu kružnicí – určené poloměry pak mohou být mírně odlišné, což se odrazí i v koncové hmotnosti poklopu.

Závěr

Článek poukazuje na skutečnost, že s využitím kognitivních technologií ve výuce matematiky lze žáky aktivizovat a výuku zatraktivnit. Uvedený příklad reprezentuje méně tradiční využití programu dynamické geometrie GeoGebra, při kterém se žáci mohou vtělit do role badatele a s využitím dosavadních poznatků i osvojováním si nových řešit složitější problémový úkol. Obdobných úkolů i dalších méně tradičních úloh s využitím programu GeoGebra by bylo jistě možné vymyslet celou řadu. Učitel tak má možnost zařadit do výuky matematiky otázky lokálního charakteru, případně může zadáním docílit mezipředmětové vazby na další předměty, a to nejen přírodovědného charakteru. U uvedeného příkladu lze například zmínit vazbu na dějepis a letecké snímkování z období Karibské krize a výpočtu velikosti raket na Kubě na základě velikosti známých objektů – vojáci využívali obdobných postupů.

Volbou vhodného zadání úlohy a používaných počítačových technologií může učitel žáky nejen motivovat a budovat u nich kladných vztahů předmětu, ale žáci též mohou vidět praktické použití počítače coby sofistikovaného nástroje při řešení úloh z reálného života a mohou jej začít vnímat jinak než pouze jako zařízení ke hraní her a komunikaci na sociálních sítích.

Literatura

- [1] Jankovcová, M., Koudela, J., Průcha, J.: Aktivizující metody v pedagogické praxi středních škol. SPN, Praha, 1988.
- [2] Maňák, J., Švec, V.: Výukové metody. Paido, Brno, 2003.
- [3] Pecina, P., Zormanová, L.: Metody a formy aktivní práce žáků v teorii a praxi. Masarykova univerzita, Brno, 2009.
- [4] Pech, P., Činčurová L., Günzel, M., et al.: Badatelsky orientovaná výuka matematiky a informatiky s podporou technologií. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, České Budějovice, 2015.
- [5] Vaníček, J.: Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie. Univerzita Karlova, Praha, 2009.

ZPRÁVY

Ústřední kolo 67. ročníku MO (kategorie P)

Ústřední kolo 67. ročníku Matematické olympiády kategorie P se konalo v Přerově ve dnech 21.–23. března 2018. Navázalo jako obvykle na ústřední kolo MO kategorie A. Třináct studentů, kteří letos postoupili do ústředního kola MO v obou těchto kategoriích, tak mohlo absolvovat obě soutěže na jednom místě a v průběhu jednoho týdne. Celé ústřední kolo Matematické olympiády výborně připravili pracovníci Krajské komise MO Olomouckého kraje a Gymnázia Jakuba Škody v Přerově. Slavnostní zahájení a teoretická část soutěže probíhaly v prostorách hotelu FIT, kde byli všichni účastníci ubytováni. V počítačových učebnách gymnázia probíhala praktická část a v aule školy se pak uskutečnilo také slavnostní zakončení ústředního kola.

Součástí zahájení byla i večerní přednáška o problematice kybernetické bezpečnosti, kterou pro účastníky připravili pozvaní zástupci Národního úřadu pro kybernetickou a informační bezpečnost. K doprovodnému programu patřila také exkurze do známé přerovské firmy Meopta – optika, s. r. o.

Na přípravě a zajištění odborné části ústředního kola MO kategorie P se podíleli pracovníci a studenti z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, kteří se postarali o opravování a vyhodnocení odevzdaných řešení a přípravu soutěžního prostředí pro praktickou část soutěže. Opět jsme použili soutěžní systém CMS, který je využíván i při mezinárodních olympiádách v informatice. Soutěžící s tímto systémem komunikují prostřednictvím webového rozhraní. Mohou touto cestou klást dotazy k úlohám, odevzdávat svá vypracovaná řešení soutěžních úloh a zpětně se také dozvídají, jak byla jejich odevzdaná řešení ohodnocena. Soutěžní úlohy pro všechna kola letošního ročníku MO kategorie P připravili pracovníci Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislavě.

Do letošního ústředního kola MO-P bylo pozváno 30 nejlepších řešitelů z krajských kol, z nichž se tři omluvili. Největší zastoupení měly kraje Praha a Jiho-moravský – oba se sedmi účastníky, čtyři kraje neměly v letošním ústředním kole žádného řešitele. Ze škol bylo nejvíce zastoupeno gymnázium na tř. Kpt. Jaroše v Brně s pěti soutěžícími. Více než polovina účastníků soutěže bylo z nematuritních ročníků, konkrétně 15 z 27.

V prvním soutěžním dnu studenti řešili ve vymezeném čase 4,5 hodiny tři teoretické úlohy. Tato část soutěže má podobný charakter jako krajské kolo, zadané soutěžní úlohy jsou zaměřeny na návrh efektivního algoritmu. Jedna z nich již tradičně využívá nějaký neobvyklý výpočetní model, který je zaveden

pro celý ročník soutěže již v domácím kole a každý rok je jiný. Letošní model byl hodně teoretický a spočíval v konstrukci složitějších funkcí na základě funkcí elementárních.

Druhý soutěžní den je praktický a probíhá v počítačových učebnách za obdobných podmínek a podle stejných pravidel, jako jsou organizovány i mezinárodní středoškolské olympiády v informatice. Každý soutěžící pracuje na přiděleném osobním počítači se soutěžním prostředím a v průběhu 4,5 hodiny má za úkol vyřešit tři úlohy. Řešení praktických úloh je třeba dovést až do podoby odladěných, plně funkčních programů. Odevzdané programy jsou již v průběhu soutěže okamžitě testovány pomocí předem připravené sady testovacích vstupních dat. Tím se hodnotí nejen jejich správnost, ale pomocí nastavených časových limitů také rychlost výpočtu. V bodovém hodnocení lze díky tomu odlišit kvalitu různých řešení z hlediska časové složitosti zvoleného algoritmu. Řešitelé se průběžně dozvídají ohodnocení svých řešení a mají možnost řešení opravit a odevzdat ho opakovaně vícekrát.

Za každou úlohu bylo možné získat nejvýše 10 bodů, celkem tedy mohl soutěžící obdržet maximálně 60 bodů. Podle součtu dosažených bodů se stanoví výsledné pořadí, přičemž se ještě podle pomocných pravidel určuje vzájemné pořadí těch soutěžících, kteří získali stejný počet bodů. Podle zásad organizačního řádu Matematické olympiády se úspěšnými řešiteli stali studenti, kteří se umístili na prvních třinácti místech celkového pořadí. Z těchto třinácti úspěšných řešitelů bylo šest nejlepších vyhlášeno vítězi ústředního kola.

Výsledky ústředního kola 67. ročníku Matematické olympiády kategorie P:

Vítězové:

1. *Martin Kurečka*, 8/8, G tř. Kpt. Jaroše, Brno, 50 bodů
2. *Josef Minařík*, 7/8, G tř. Kpt. Jaroše, Brno, 49 bodů
3. *Jakub Suchánek*, 8/8, G Opatov, Praha 4, 45 bodů
4. *Jan Kaifer*, 2/4, G Jana Keplera, Praha 6, 45 bodů
5. *Pavel Hudec*, 8/8, G J. Gutha-Jarkovského, Praha 1, 39 bodů
6. *Michal Jireš*, 7/8, G F. M. Pelcla, Rychnov nad Kněžnou, 39 bodů

Úspěšní řešitelé:

7. *Danil Kozevnikov*, 8/8, G Jana Keplera, Praha 6, 37 bodů
8. *Jakub Pelc*, 8/8, G J. A. Komenského, Uherský Brod, 36 bodů
9. *Lenka Kopfová*, 3/4, Mendelovo gymnázium, Opava, 35 bodů
10. *Jiří Škrobánek*, 8/8, Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, 32 b.
11. *Radek Olšák*, 7/8, Mensa gymnázium, Praha 6, 32 bodů
12. *Jonáš Havelka*, 6/8, G Jírovcova, České Budějovice, 31 bodů
13. *Petr Zahradník*, 7/8, G dr. V. Šmejkal, Ústí nad Labem, 27 bodů

Ostatní účastníci:

Dalibor Kramář, 7/8, G, Brno-Řečkovice, 26 b., Jiří Kalvoda, 1/4, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 25 b., František Kmječ, 6/8, G J. S. Machara, Brandýs nad Labem,

24 b., Martin Raška, 8/8, Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, 24 b., Jakub Šťastný, 7/8, G, Brno-Řečkovice, 22 b., Petr Gebauer, 8/8, G J. Palacha, Mělník, 21 b., Jiří Löffelmann, 8/8, G, Litoměřická, Praha 9, 21 b., Martin Pícek, 7/8, G J. V. Jirsíka, České Budějovice, 18 b., Jan Adámek, 5/8, G Jana Keplera, Praha 6, 16 b., Petr Chotěborský, 5/8, G, Slaný, 16 b., Marek Sedla, 7/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 16 b., Ondřej Buček, 4/4, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 13 b., Petr Šíma, 6/6, G J. Vrchlického, Klatovy, 12 b., Martin Kostrubanič, 4/4, G a SOŠPg, Čáslav, 6 b.

Na základě výsledků dosažených v ústředním kole 67. ročníku Matematické olympiády kategorie P bylo patnáct nejlepších řešitelů pozváno na výběrové soustředění. To se uskutečnilo v Praze na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy dva týdny po skončení ústředního kola. Podle součtu výsledků ústředního kola MO-P a výsledků dosažených na výběrovém soustředění byli vybráni čtyři nejlepší řešitelé, aby reprezentovali Českou republiku na 30. mezinárodní olympiádě v informatice IOI 2018. Soutěž se uskuteční na začátku září 2018 v Japonsku. Další čtyři mladší úspěšní řešitelé, kteří letos ještě nebudou maturovat, se zúčastní 25. středoevropské olympiády v informatice CEOI 2018. Ta se bude tentokrát konat v Polsku ve Varšavě v polovině srpna 2018. O průběhu a výsledcích obou mezinárodních olympiád v informatice vás budeme informovat.

Podrobné informace o celém 67. ročníku MO kategorie P, kompletní výsledková listina, texty soutěžních úloh a jejich vzorová řešení jsou k dispozici na webu na adrese <http://mo.mff.cuni.cz/>. Na stejném místě se můžete seznámit i se staršími ročníky této soutěže a také se všemi aktuálními informacemi týkajícími se kategorie P Matematické olympiády.

Pavel Töpfer

Dvě stříbra a dva bronz z IMO 2018



Mezinárodní matematická olympiáda zavítala letos v červenci již pošesté ve své historii do Rumunska, kde se v roce 1959 konal i její první ročník. Soutěž hostilo studentské město Cluj-Napoca v srdci Transylvánie a zúčastnilo se jí 594 soutěžících ze 107 zemí. Naši studenti dovezli 2 stříbrné a 2 bronzové medaile.

Jako první na místo přijeli vedoucí národních delegací, jejichž hlavním úkolem bylo z 28 připravených návrhů rozdělených do čtyř kategorií (algebra, kombinatorika, geometrie a teorie čísel) vybrat šestici úloh pro ostrou soutěž a shodnout se na bodovacích schématech k jednotlivým úlohám. Zadáni vybraných úloh naleznete na konci této zprávy. Zmiňme jen, že autorem druhé soutěžní úlohy je *Patrik Bak* ze Slovenska.

Soutěžící a pedagogičtí vedoucí přijeli do Rumunska o tři dny později. Ubytování byli po několika různých hotelích v centru města.

Soutěž proběhla 9. a 10. července ve sportovní hale. Soutěžící měli každý den 4,5 hodiny na řešení tří obtížných úloh a za každou z nich mohli získat až 7 bodů. Připomeňme, že zhruba polovina soutěžících si z olympiády dovezla medaili, přičemž počet udělených zlatých (G), stříbrných (S) a bronzových (B) medailí je v přibližném poměru 1 : 2 : 3. Na ně bylo letos nutné získat aspoň 16, 25, resp. 31 bodů (z 42 možných).

Reprezentanty České republiky byly *Matěj Doležálek* z Gymnázia Dr. A. Hrdličky v Humpolci, *Pavel Hudec* z Gymnázia Jiřího Gutha-Jarkovského v Praze, *Lenka Kopfová* z Mendelova Gymnázia v Opavě, *Danil Koževnikov* z Gymnázia Jana Keplera v Praze, *Radek Olšák* z Mensa Gymnázia v Praze a *Martin Raška* z Wichterlova Gymnázia v Ostravě-Porubě. Vedoucím týmu byl *Josef Tkadlec* z IST Austria, pedagogickým vedoucím *Michal Rolínek*, Ph.D., z Institutu Maxe Plancka v Tübingenu.

Přehled výsledků našich soutěžících uvádíme v tabulce:

Umístění	Body za úlohu						Body	Cena
	1	2	3	4	5	6		
87.–110. Danil Koževnikov	7	7	0	7	7	0	28	S
111.–121. Pavel Hudec	7	5	0	7	7	1	27	S
215.–227. Lenka Kopfová	7	3	0	7	1	1	19	B
228.–251. Martin Raška	7	3	0	7	1	0	18	B
320.–337. Matěj Doležálek	7	4	0	0	2	0	13	HM
368.–390. Radek Olšák	1	0	0	7	1	1	10	HM
Celkem	36	22	0	35	19	3	115	

Tým, který se po 10 letech konečně neskládal ze samých chlapců, získal dvě stříbrné medaile (Danil a Pavel), dvě bronzové medaile (Lenka a Martin) a dvě čestná uznání (Matěj a Radek), která se udělují za úplně vyřešení alespoň jedné úlohy. V neoficiálním pořadí států se dělila ČR o 39.–40. místo s Argentinou. Tento jinak nadprůměrný výkon českého družstva zastínili historickými výkony naši sousedé: Slováci poprvé po více než deseti letech získali tři stříbrné medaile a Poláci se poprvé od roku 1981 umístili v první desítce (deváti).

Umístění	Body za úlohu						Body	Cena
	1	2	3	4	5	6		
61.–86. Martin Melicher	7	7	0	7	7	1	29	S
111.–121. Tomáš Sásik	7	7	0	7	6	0	27	S
Ákos Záhorský	7	7	0	7	6	0	27	S
193.–203. Lucia Krajčoviechová	7	2	0	7	5	0	21	B
215.–227. Michal Staník	2	3	0	7	7	0	19	B
250.–272. Samuel Krajčí	7	2	0	7	1	0	17	B
Celkem	37	28	0	42	32	1	140	

Co se týče ostatních států, na čele se umístila tradiční trojice USA, Rusko, Čína, následovaná netradičně Ukrajinou. V první desítku kromě výše zmíněného Polska najdeme již jen východoasijské státy. Kompletní výsledky jsou dostupné na adrese: https://www.imo-official.org/year_country_r.aspx?year=2018

Přestože se českému týmu ve výsledku dařilo, několik žáků zůstalo za očekáváním. Oba maturanti měli zlaté ambice a medaile byly zcela jisté i v silách Radka a Matěje. V jejich případě lze doufat, že své zklamání přetaví ve zvýšené nasazení během následujícího školního roku, za něž pak mohou být odměněni na příští, jubilejní 60. mezinárodní matematické olympiádě, která proběhne v městě Bath ve Velké Británii.

Celkové pořadí zúčastněných zemí, získané body a medaile:

	G	S	B	body		G	S	B	body
USA	5	1	0	212	Arménie	0	2	4	130
Rusko	5	1	0	201	Francie	1	1	4	129
ČLR	4	2	0	199	Rumunsko	1	1	2	129
Ukrajina	4	2	0	186	Peru	0	2	3	125
Thajsko	3	3	0	183	Mexiko	0	1	4	123
Tchaj-wan	3	1	2	179	Nizozemsko	0	1	4	123
Jižní Korea	3	3	0	177	Filipíny	1	1	2	121
Singapur	2	3	1	175	Argentina	0	1	4	115
<i>Polsko</i>	1	5	0	174	<i>Česká republika</i>	0	2	2	115
Indonésie	1	5	0	171	Bangladéš	1	0	3	114
Austrálie	2	3	1	169	Slovinsko	0	1	1	104
Velká Británie	1	4	0	161	Bosna				
Japonsko	1	3	2	158	a Hercegovina	0	0	4	103
Srbsko	2	2	2	158	Tádžikistán	0	0	5	103
Maďarsko	0	4	2	157	Bělorusko	0	0	4	102
Kanada	0	5	1	156	Nový Zéland	0	1	2	102
Itálie	0	4	2	154	Belgie	0	0	4	92
Kazachstán	0	4	2	151	Malajsie	0	0	2	90
Írán	1	3	1	150	Hongkong	0	0	2	89
Vietnam	1	2	3	148	Moldavsko	0	0	3	86
Bulharsko	1	3	1	146	Estonsko	0	1	0	80
Chorvatsko	0	4	1	145	Litva	0	0	2	77
<i>Slovensko</i>	0	3	3	140	Portugalsko	0	0	2	77
Švédsko	1	2	2	138	Řecko	0	0	2	74
Turecko	1	1	4	138	Španělsko	0	0	2	74
Izrael	0	2	4	136	Norsko	0	0	2	73
Gruzie	0	1	5	133	Rakousko	0	0	3	72
Brazílie	1	0	4	132	Dánsko	0	0	3	71
Indie	0	3	2	132	Finsko	0	0	2	70
Mongolsko	0	1	5	132	Saúdská Arábie	0	1	1	69
Německo	1	2	1	131	Sýrie	0	0	2	69

	G	S	B	body		G	S	B	body
JAR	0	0	1	66	Myanmar	0	0	0	23
Kostarika	0	0	2	65	Kosovo	0	0	0	21
Turkmenistán	0	0	1	65	Panama	0	0	0	21
Makao	0	0	1	61	Uzbekistán	0	0	0	21
Kolumbie	0	0	1	59	Černá Hora	0	0	0	20
Island	0	0	1	56	Salvádor	0	0	0	20
Švýcarsko	0	0	1	52	Chile	0	0	0	19
Ázerbájdžán	0	0	0	50	Alžírsko	0	0	0	18
Tunisko	0	0	0	49	Lucembursko	0	0	0	14
Ekvádor	0	0	0	48	Ghana	0	0	0	13
Srí Lanka	0	0	1	47	Botswana	0	0	0	12
Maroko	0	0	0	46	Paraguay	0	0	0	12
Portoriko	0	0	1	46	Kambodža	0	0	0	11
Kypr	0	0	1	45	Guatemala	0	0	0	11
Irsko	0	0	1	43	Egypt	0	0	0	10
Kyrgyzstán	0	0	0	41	Irák	0	0	0	9
Lotyšsko	0	0	0	40	Uganda	0	0	0	9
Albánie	0	0	0	37	Pobřeží				
Pákistán	0	0	0	35	slonoviny	0	0	0	8
Bolívie	0	0	0	33	Uruguay	0	0	0	7
Makedonie	0	0	0	27	Honduras	0	0	0	6
Nigérie	0	0	0	26	Nepál	0	0	0	5
Trinidad					Venezuela	0	0	0	2
a Tobago	0	0	0	26	Tanzánie	0	0	0	1

Závěrem uvádíme texty soutěžních úloh (v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla).

1. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s opsanou kružnicí Γ . Body D , E leží postupně uvnitř stran AB , AC tak, že $|AD| = |AE|$. Osy úseček BD , CE protínají kratší oblouky AB , AC kružnice Γ postupně v bodech F , G . Dokažte, že přímky DE a FG jsou rovnoběžné (nebo totožné).

(Řecko)

2. Najděte všechna celá čísla $n \geq 3$, pro něž existují reálná čísla $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ taková, že

$$a_{n+1} = a_1, \quad a_{n+2} = a_2 \quad \text{a} \quad a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

pro $i = 1, 2, \dots, n$.

(Slovensko)

3. *Packaliv trojúhelník* je tabulka čísel ve tvaru rovnostranného trojúhelníku taková, že kromě čísel ve spodním řádku je každé číslo rovno absolutní hodnotě rozdílu dvou čísel bezprostředně pod ním. Následující tabulka je příkladem Packalova trojúhelníku o čtyřech řádcích, který obsahuje všechna celá

čísla od 1 po 10:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 4 & & \\ & & & & 2 & 6 & \\ & & & 5 & 7 & 1 & \\ & 8 & 3 & 10 & 9 & & \end{array}$$

Rozhodněte, zda existuje Packalův trojúhelník o 2018 řádcích, který obsahuje všechna celá čísla od 1 po $1 + 2 + \dots + 2018$.

(*Írán*)

4. *Značka* je bod (x, y) v rovině takový, že x a y jsou kladná celá čísla nepřevyšující 20.

Na začátku je všech 400 značek prázdných. Amálka a Budulínek na ně střídavě pokládají kamínky, přičemž Amálka začíná. Amálka ve svém tahu položí nový červený kamínek na prázdnou značku tak, aby vzdálenost každých dvou značek s červenými kamínky byla různá od $\sqrt{5}$. Budulínek ve svém tahu položí nový modrý kamínek na jakoukoli prázdnou značku. (Značka s modrým kamínkem může mít jakékoli vzdálenosti od ostatních značek.) Hra skončí, jakmile jeden z hráčů nemůže táhnout.

Najděte největší K takové, že Amálka může vždy položit alespoň K červených kamínků, ať už hraje Budulínek jakkoli.

(*Arménie*)

5. Necht $a_1, a_2, \dots$ je nekonečná posloupnost kladných celých čísel. Předpokládejme, že existuje celé číslo $N > 1$ takové, že pro všechna $n \geq N$ je číslo

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

celé. Dokažte, že existuje celé číslo M takové, že $a_m = a_{m+1}$ pro všechna $m \geq M$.

(*Mongolsko*)

6. Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ splňuje $|AB| \cdot |CD| = |BC| \cdot |DA|$. Uvnitř něj leží bod X takový, že

$$|\sphericalangle XAB| = |\sphericalangle XCD| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle XBC| = |\sphericalangle XDA|.$$

Dokažte, že $|\sphericalangle BXA| + |\sphericalangle DXC| = 180^\circ$.

(*Polsko*)



Obr. 1 Český tým – zleva Michal Rolínek (deputy leader), Lenka Kopfová, Radek Olšák, Danil Koževnikov, Martin Raška, Matěj Doležálek, Pavel Hudec, Marc Dragoi (guide), Josef Tkadlec (leader)

Michal Rolínek, Josef Tkadlec

EGMO 2018 v Itálii



Evropská matematická olympiáda pro středoškolské dívky (EGMO, European Girls' Mathematical Olympiad) je svým charakterem téměř identická se staršími kolegyněmi, jako je Mezinárodní matematická olympiáda (IMO) a Středoevropská matematická olympiáda (MEMO), obě pro obě pohlaví. Těchto dvou soutěží se účastní nejvýše šest řešitelů, kdežto na

EGMO soutěží maximálně čtyři dívky.

EGMO má ve svém názvu „evropská“, ale už od samého začátku se jí účastní i země mimoevropské. Soutěž EGMO byla poprvé uspořádána v roce 2012 v Anglii v Cambridge za účasti 19 zemí (z toho tři neevropských – Indonésie, Saudská Arábie a USA), poté v roce 2013 v Lucembursku za účasti 22 zemí (mimo Evropu jen USA), v roce 2014 v Turecku za účasti 29 zemí (z toho 7 neevropských),

v roce 2015 v Bělorusku za účasti 30 zemí (z toho 7 neevropských), v roce 2016 v Rumunsku za účasti 39 zemí (z toho 7 neevropských) a v roce 2017 ve Švýcarsku za účasti 44 zemí (z toho 10 neevropských).

Letos proběhl od 9. do 15. dubna 2018 již sedmý ročník soutěže EGMO v toskánském městě Florencii. Pozitivem byla centralizace ubytování i samotné soutěže do stejného hotelu. Zúčastněných zemí bylo již 52, z toho 16 neevropských. Soutěžících dívek bylo 196, z toho 137 z Evropy.

Česká republika se letos zúčastnila této soutěže již potřetí. Můžeme za to vděčit především těmto sponzorům: Nadaci RSJ, Nadaci Karla Janečka, Společnosti Alef Nula a soukromému sponzorovi Pavlu Kocourkovi. Všichni z nich pochopili, jak důležité je chopit se každé příležitosti, jak podpořit vzdělání mladé generace v našich oborech.

Evropské země mají pobyt na soutěži placený z evropských prostředků a prostředků organizátorské země, kdežto neevropské země si platí účast samy, což je důležitým zdrojem příjmů pro celou soutěž. Zde je patrné, že i země, které si musejí svoji účast platit, nelitují prostředků, aby měly dívky příležitost poměřit se se svými soupeřkami z jiných zemí.

Nominace českého družstva na IMO a MEMO probíhá až po uspořádání celostátního kola. Jelikož ale EGMO probíhá tradičně v dubnu, což je v době našeho celostátního kola, není technicky možné čekat na jeho výsledky. Proto nominace dívek na EGMO probíhá již na základě výsledků krajského kola kategorie A.

České družstvo v roce 2018 reprezentovaly tyto dívky: *Lenka Kopfová* z Mendelova gymnázia v Opavě, *Lucie Kundratová* z Gymnázia a Jazykové školy s právem státní jazykové zkoušky ve Zlíně, *Magdaléna Mišinová* z Gymnázia Jana Keplera v Praze 6 a *Jana Pallová* z Gymnázia Jakuba Škody v Přerově. Vedoucím české delegace byl *doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.* z FIT ČVUT v Praze a jeho zástupcem *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.* z PŘF UP v Olomouci (obr. 1).

Dívky řešily ve dvou dnech po třech úlohách, z nichž každá měla hodnotu nejvýše 7 bodů, takže bylo možné získat až 42 bodů. Podle pravidel soutěže EGMO je z evropských dívek zhruba polovina odměněna medailí (na IMO a MEMO to je nejvýše polovina). Letos tedy bylo ze 137 evropských dívek odměněno medailí 78 z nich, z toho 14 získalo zlatou medaili za aspoň 32 bodů, 29 získalo stříbrnou medaili za aspoň 22 bodů a 35 získalo bronzovou medaili za aspoň 15 bodů. Současně s těmito evropskými dívkami jsou medailí odměněny i neevropské dívky, které dosáhnou stejného bodového zisku. Takže v součtu 196 dívek bylo uděleno 17 zlatých, 39 stříbrných a 52 bronzových medailí.

Kromě medailí získávají soutěžící ještě čestná uznání (honourable mentions) za úplné vyřešení aspoň jedné ze šesti úloh (stejně je to na IMO i MEMO). Letos toto uznání získalo dalších 37 dívek z Evropy a dalších 8 neevropských dívek.

Absolutními vítězkami v roce 2018 se stalo 5 dívek se ziskem 42 bodů: Jelena Ivančič ze Srbska, Alina Haluzova z Ukrajiny, Emily Beatty z Velké Británie, Catherine Wu z USA a Wanlin Li z USA.

Z našich dívek získala Lenka Kopfová stříbrnou medaili za 25 bodů a skončila absolutně na 35.–43. místě, Magdaléna Mašinová získala bronzovou medaili za 17 bodů a skončila absolutně na 80.–90. místě, Lucie Kundratová získala čestné uznání za 11 bodů a Jana Pallová získala čestné uznání za 10 bodů. Celkem tedy získalo české družstvo 63 bodů ze 168 možných. Neoficiálně se tak umístilo na 28. místě.



Obr. 1 České družstvo (zleva): Jaroslav Švrček, Jana Pallová, Lenka Kopfová, Magdaléna Mašinová, Lucie Kundratová, Jaroslav Zhouf

Nejúspěšnějšími zeměmi byly: 1. Rusko (4 zlaté medaile, 145 bodů), 2. USA (2 zlaté, jedna stříbrná, jedna bronzová medaile, 129 bodů), 3. Velká Británie (1 zlatá, 2 bronzové, 1 bronzová medaile, 111 bodů), 4. Polsko, 5. Ukrajina, 6. Srbsko, 7.–8. Maďarsko a Mexiko, 9. Rumunsko, 10. Bělorusko.

Následně jsou uvedeny soutěžní úlohy prvního i druhého dne. Zajímavé může být, že průměrná úspěšnost jednotlivých úloh byla: 1. úloha 5,754 bodu, 2. úloha 2,621 bodu, 3. úloha 1,344 bodu, 4. úloha 4,313 bodu, 5. úloha 2,200 bodu, 6. úloha 0,579 bodu.

Pro dívky byl ve volném čase připraven společný program. Např. jeden den navštívily krásná toskánská města Pisa a Lucca.

Celé soutěžní klání se konalo v přátelském duchu a bylo povzbuzením pro zúčastněné dívky ke studiu matematiky a doufejme, že bude povzbuzením i pro další dívky, které budou usilovat o reprezentaci v příštích letech.

Příští rok se soutěž bude konat v ukrajinském hlavním městě Kyjevě.

Více informací lze získat na stránkách: <https://www.egmo.org/egmos/egmo5/>

Soutěžní úlohy prvního dne

Úloha 1. V trojúhelníku ABC je $|CA| = |CB|$ a $\sphericalangle ACB = 120^\circ$ a M je střed strany AB . Nechť P je libovolný bod na kružnici opsané trojúhelníku ABC a Q bod na úsečce CP takový, že $|QP| = 2|QC|$. A nechť přímka procházející bodem P a kolmá na přímkou AB protne přímkou MQ v bodě N .

Dokažte, že existuje určitá kružnice, na které leží všechny body N pro všechny možné polohy bodu P .
(Bulharsko)

Úloha 2. Uvažujme množinu

$$A = \left\{ 1 + \frac{1}{k} : k = 1, 2, 3, \dots \right\}.$$

- (a) Dokažte, že každé přirozené číslo $x \geq 2$ může být napsáno jako součin jednoho nebo více prvků z A , které nemusejí být nutně různé.

Součin jednoho prvku znamená ten prvek sám.

- (b) Pro každé přirozené číslo $x \geq 2$ nechť $f(x)$ značí nejmenší přirozené číslo takové, že x může být napsáno jako součin $f(x)$ prvků množiny A , které nemusejí být nutně různé.

Dokažte, že existuje nekonečně mnoho dvojic (x, y) přirozených čísel $x \geq 2$, $y \geq 2$, pro které platí $f(xy) < f(x) + f(y)$.

(Dvojice (x_1, y_1) a (x_2, y_2) jsou různé, právě když $x_1 \neq x_2$ nebo $y_1 \neq y_2$.)

(Rumunsko)

Úloha 3. Pojmenujme n soutěžících dívek na EGMO jako $C_1, \dots, C_n$. Po soutěži se tyto dívky postaví do fronty před restaurací podle následujících pravidel.

- Jury vytvoří počáteční uspořádání dívek ve frontě.
- Každou minutu Jury zvolí jedno přirozené číslo i , kde $1 \leq i \leq n$.
 - Má-li dívka C_i aspoň i jiných dívek před sebou, zaplatí jedno euro na konto Jury a posune se dopředu v řadě přesně o i míst.
 - Má-li dívka C_i méně než i jiných dívek před sebou, restaurace otevře a proces skončí.

- (a) Dokažte, že proces nemůže pokračovat do nekonečna podle pravidel Jury.
 (b) Určete pro každé n největší počet eur, které Jury může získat pro libovolné počáteční uspořádání fronty i pro libovolnou volbu posloupnosti přemísťování dívek. (Maďarsko)

Soutěžní úlohy druhého dne

Úloha 4. *Domino* je kostka 1×2 nebo 2×1 .

Nechť $n \geq 3$ je přirozené číslo. Kostky domina se umísťují na desku s $n \times n$ políčky takovým způsobem, že každé domino pokrývá přesně dvě políčka na desce a žádná dvě domina se ani částečně nepřekrývají.

Hodnota řady nebo sloupce na desce je počet kostek domina, které pokrývají aspoň jedno políčko této řady nebo tohoto sloupce. Konfigurace kostek domin se nazývá *vybalancovaná*, právě když existuje nějaké přirozené číslo $k \geq 1$ takové, že každá řada a každý sloupec má hodnotu k .

Dokažte, že vybalancovaná konfigurace existuje pro každé $n \geq 3$, a najděte minimální počet kostek domina potřebných pro takovou konfiguraci.

(Holandsko)

Úloha 5. Nechť Γ je kružnice opsaná trojúhelníku ABC . Kružnice Ω se dotýká úsečky AB a kružnice Γ v bodě ležícím ve stejné polorovině ohraničené přímkou AB , jako leží bod C . Osa $\sphericalangle BCA$ protíná kružnici Ω ve dvou různých bodech P a Q .

Dokažte, že

$$|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle QBC|.$$

(Polsko)

Úloha 6.

- (a) Dokažte, že pro každé reálné číslo t , $0 < t < \frac{1}{2}$, existuje kladné celé číslo n s následující vlastností: Pro každou množinu S sestávající z n kladných celých čísel existují dva různé prvky x a y množiny S a nezáporné celé číslo m (tj. $m \geq 0$) takové, že

$$|x - my| \leq ty.$$

- (b) Určete, zda pro každé reálné číslo t , $0 < t < \frac{1}{2}$, existuje nekonečná množina S kladných celých čísel taková, že

$$|x - my| > ty$$

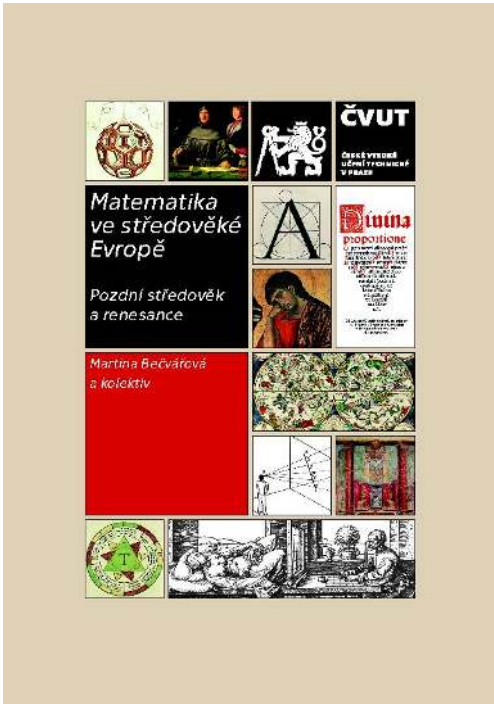
pro každou dvojici různých prvků x a y množiny S a každé kladné celé číslo m (tj. $m > 0$). (Holandsko)

Jaroslav Švrček, Jaroslav Zhouf

LITERATURA

Recenze knihy Martiny Bečvářové a kol. Matematika ve středo-
věké Evropě

Monografie *Matematika ve středověké Evropě* pojednává o vývoji matematického myšlení a vzdělávání ve středověké Evropě v pozdním středověku a renesanci, tj. zhruba od poloviny 13. století do počátku 16. století. Snaží se matematiku té doby popsat v širších souvislostech. Volně navazuje na knihu *Matematika ve středověké Evropě*,¹⁾ která je věnována předchozím devíti stoletím. Byla vydána téměř před dvaceti lety a získala značnou oblibu mezi středškolskými a vysokoškolskými učiteli i studenty. Je však již delší dobu rozebrána.



¹⁾J. Bečvář a kol.: *Matematika ve středověké Evropě*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 19, Prometheus, Praha, 2000, 445 stran.

Nová monografie (spolu s předchozí) se pokouší vyplnit citelnou mezeru v české literatuře. Poslední česky psaná kniha popisující vývoj matematiky ve středověké Evropě vyšla před čtyřiceti lety,²⁾ evropské civilizaci 5. až 15. století věnovala pouze sto stran a dnes je již novými výzkumy v některých oblastech překonaná. Dějinám matematiky byla v nedávné době věnována značná pozornost v zahraničí.³⁾ Nejnovější monografie jsou však u nás dostupné jen v několika exemplářích (pokud vůbec), navíc jsou pro širší čtenářskou obec méně srozumitelné a nepostihují souvislosti světového a českého vývoje.

Naše kniha si neklade nároky na úplnou analýzu vývoje matematiky v pozdním středověku. Snaží se připomenout významné osobnosti té doby a poukázat na nové myšlenky, které připravovaly půdu pro zrod novověké matematiky.

V prvních pěti kapitolách je stručně popsán vývoj církve a církevních institucí, proměny západní a jižní Evropy v pozdním středověku a dopad osmanské expanze na osudy Evropy východní. Zachycen je i vliv zámořských objevů na politické, ekonomické a společenské proměny evropské civilizace a výrazná změna paradigmatu evropského myšlení ve 14. a 15. století, která ovlivnila rozkvět umění v úzkém vztahu k rozvoji vědy a vzdělanosti. Připojena je poměrně podrobná studie o objevu a vývoji knihtisku a jeho obrovskému vlivu na transfer poznatků a veškerého vědění (nejen matematické literatury), a to jak pro vědecké bádání, tak pro výuku a šíření vzdělanosti. Domníváme se, že je velmi užitečné, zejména pro mladou generaci, vnímat vývoj matematiky v širších souvislostech.

Další čtyři kapitoly ukazují pozvolný nárůst evropské matematické vzdělanosti a odborné erudice. Jsou věnovány osobnostem, které tehdy reprezentovaly špičku evropské matematiky a vědy – Jordanus de Nemore, tzv. oxfordští počtáři, Nicolas Oresme a Nicolas Chuquet – a podmiňovaly její další rozvoj, zejména v algebře a v matematizaci rodící se fyziky.

Několik dalších kapitol zdůrazňuje podnětný a plodný vztah geometrie a renesančního umění související se zobrazováním prostoru do roviny, s objevem perspektivy, s využitím matematiky v malířství, architektuře apod. Čtenář se zde setká s životními osudy a díly významných umělců, vědců a vynálezců – Piero della Francesca, Luca Pacioli a Leonardo da Vinci. Dozví se i o nedáv-

²⁾ A. P. Juškevič: *Dějiny matematiky ve středověku*, Academia, Praha, 1977, 446 stran.

³⁾ H. Gericke: *Mathematik in Antike, Orient und Abendland*, 10. Auflage, Marix Verlag, 2014, 644 stran; H.-W. Alten, A. Djafari Naini, B. Eick, M. Folkerts, H. Schloser, K.-H. Schlote, H. Wesemüller-Kock, H. Wußing: *4000 Jahre Algebra. Geschichte, Kulturen, Menschen*, Springer, 2003, 2005, 2008, 2013, 2014, xiv+745 stran; Ch. J. Scriba, P. Schreiber: *5000 Jahre Geometrie. Geschichte, Kulturen, Menschen*, Springer, 2001, 2002, 2003, 2005, 2010, xiii+631 stran (anglický překlad: Birkhäuser, 2015, xii+626 stran); T. Sonar: *3000 Jahre Analysis. Geschichte, Kulturen, Menschen*, Springer, 2011, xxii+711 stran; H. Wussing: *6000 Jahre Mathematik. 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton, 2. Von Euler bis zu Gegenwart*, Springer, 2008, 2009, xiii+529+xvii+675 stran.

ných výzkumech jejich životních osudů, seznámí se s takřka pětisetstránkovou Pacioliho encyklopedií, která se stala odrazovým můstkem pro rozvoj moderní matematiky, s technickými vynálezy Leonarda da Vinci i s podivuhodným příběhem zapomenutého a znovu odhaleného plagiátorství. Geometři snad ocení kapitolu o zajímavých, pro pozdně středověkou a raně renesanční Evropu typických geometrických konstrukcích (např. rektifikace kružnice, konstrukce křivek, pravidelných mnohoúhelníků a grafických tvarů písmen).

Poslední kapitola, která mapuje pravděpodobnostní myšlení středověké Evropy – užití pravděpodobnosti v soudnictví, pojišťovnictví, filozofii, hazardu atd. – mírně vybočuje z konceptu naší monografie. Po delších úvahách byla připojena, neboť pravděpodobnost byla v naší literatuře často přehlížena. Původně jsme též zamýšleli ukázat vliv německých matematiků, zejména Regiomontana, na rozkvět trigonometrie a některých aplikací matematiky (astronomické tabulky, reforma kalendáře apod.). Autor zamýšlené kapitoly však nebyl schopen v dohodnutém termínu text dokončit. Po dlouhých diskusích bylo od této kapitoly upuštěno.

Jednotlivé kapitoly jsou doplněny obrázky, schémata, tabulkami a ukázkami z originálních středověkých zdrojů. Nepředpokládáme, že by čtenáři studovali původní latinské, německé, francouzské nebo italské texty. Domníváme se však, že je užitečné, aby při studiu získali alespoň základní představu o tom, jak středověké matematické texty vypadaly a jak náročné je jejich studium. K jednotlivých kapitolám jsme připojili četné bibliografické odkazy. Uvedli jsme jednak prameny, které byly při přípravě knihy využity, jednak tituly, které mohou čtenáře přivést k dalšímu a hlubšímu studiu.

Rádi bychom, aby byla naše kniha přitažlivá nejen pro matematiky, historiky matematiky, učitele a studenty, ale i pro zájemce o historii vědy a její postavení ve společnosti a ve vzdělávacím systému.