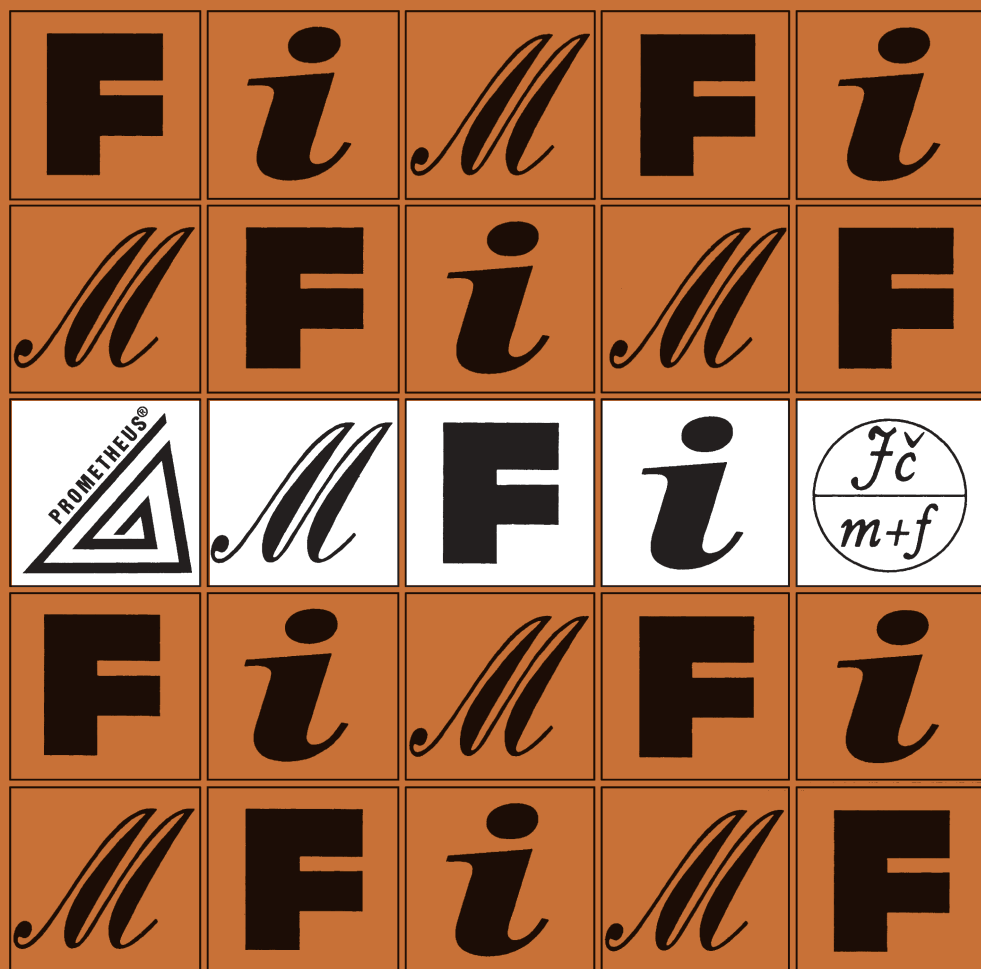


MATEMATIKA 2 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXVIII (2019), číslo 2

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Oldřich Lepil – vedoucí redaktor a redaktor pro fyziku

Jaroslav Švrček – redaktor pro matematiku

Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Lukáš Richterek – redaktor WWW stránek

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Štěpán Hubálovský, Růžena Kolářová, Miluše Lachmannová, Pavel Leischner, Dana Mandíková, Oldřich Odvárko, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Emanuel Svoboda, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel Töpfer, Bohumil Vybíral

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>J. Blažek, P. Leischner:</i> Jak souvisí Apolloniovy kružnice s elipsou?	81
<i>L. Juklová, J. Švrček:</i> Důkazy a důkazové úlohy v planimetrii	92
Zajímavé matematické úlohy	102

FYZIKA

<i>A. Kuřová, Č. Kodejška:</i> Videoexperimenty jako motivační prvek ve výuce fyziky	105
<i>M. Klátil, D. Jezbera:</i> Rentgenové záření ve škole i mimo školu 1	115

INFORMATIKA

<i>R. Bělohávek:</i> Fuzzy logika	127
---	-----

ZPRÁVY

<i>J. Švrček:</i> Ústřední kolo 68. ročníku Matematické olympiády kategorie A	150
<i>P. Töpfer:</i> Ústřední kolo 68. ročníku Matematické olympiády kategorie P . . .	154
<i>L. Richterek:</i> Celostátní kolo Fyzikální olympiády 2019	157

MATEMATIKA

Jak souvisí Apolloniovy kružnice s elipsou?

JIRÍ BLAŽEK – PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Žáci mohou poznat elipsu nejprve názorně, jako řez kuželové plochy rovinou určitého sklonu. Tato představa o křivce mnoho nevypovídá, tak je vhodnější definovat ji jako množinu bodů daných vlastností. Většinou se můžeme setkat s některou ze tří níže uvedených definic¹⁾. Ekvivalence prvních dvou se názorně dokazuje užitím stereometrie, vlastnost z třetí definice lze odvodit například metodou souřadnic.

Stereometrické úvahy vyžadují prostorovou představivost. Nedala by se ekvivalence všech tří definic dokázat jen pomocí planimetrie? Odpověď na otázku je kladná a její hledání vede k zajímavým poznatkům.

Definice 1 (*Apollonius z Pergy, Kuželosečky, III.52*)

Elipsa je množina $\mathcal{A}$ všech bodů P v rovině, které mají součet vzdáleností od daných dvou bodů F_1 a F_2 roven číslu $2a > |F_1F_2| = 2e$. Body F_1 a F_2 se nazývají *ohniska elipsy*, střed S úsečky F_1F_2 je *středem elipsy*.

Body P takto definované elipsy lze snadno sestrojovat pomocí *řídící kružnice* $k(F_2; 2a)$. Ke zvolenému bodu N na kružnici je P průsečíkem osy o úsečky F_1N s úsečkou F_2N (obr. 1).

Definice 2 (*Pappos z Alexandrie, Sbírka, Kniha VII*)

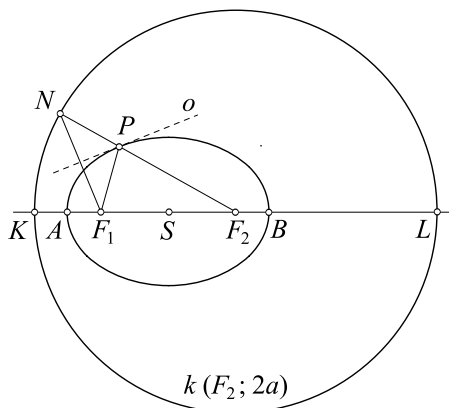
Elipsa je množina $\mathcal{B}$ všech bodů P v rovině, které mají od daného bodu

¹⁾V závorce za názvem definice je vždy odkaz na první známé dílo, v němž je daná vlastnost uvedena.

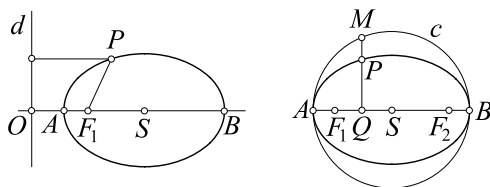
F_1 a dané přímky d , jež neobsahuje bod F_1 , konstantní poměr vzdáleností

$$\varepsilon = \frac{|PF_1|}{|Pd|} < 1. \quad (1)$$

Přímka d se nazývá *řídící přímka elipsy*, bod F_1 je její ohnisko.



Obr. 1 Elipsa a její řídící kružnice



Obr. 2 K definicím 2 a 3

Definice 3 (*Archimédes, O konoidech a sféroidech*)

Nechť je dána kružnice $c(S; a)$ s průměrem AB . K bodu $M \in c - \{A, B\}$ sestrojme jeho kolmý průmět Q na úsečku AB a na polopřímce QM bod P tak, aby platilo

$$\frac{|PQ|}{|MQ|} = \frac{b}{a} = \nu, \quad (2)$$

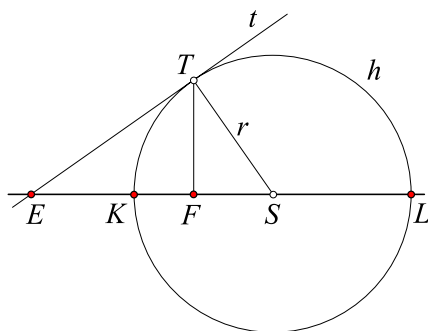
kde b je dané kladné číslo, menší než a . Množina $\mathcal{C}$ všech takových bodů P doplněná o body A a B se nazývá *elipsa*. Čísla a a b nazýváme (v daném pořadí) *hlavní a vedlejší poloosa elipsy* a c je *vrcholová kružnice elipsy*.

Harmonická čtveřice bodů a Apolloniova kružnice

Čtveřice (F, E, K, L) kolineárních bodů se nazývá *harmonická čtveřice bodů*, právě když platí

$$\frac{|FK|}{|EK|} = \frac{|FL|}{|EL|} = \lambda \neq 1. \quad (3)$$

Trojici (E, K, L) (resp. (F, K, L)) snadno doplníme na harmonickou čtveřici (F, E, K, L) konstrukcí znázorněnou na obr. 3, kde $FT \perp KL$ a T je bod dotyku tečny t z bodu E ke kružnici h s průměrem KL . (Důkaz konstrukce, stejně jako důkaz následujícího tvrzení, neuvádíme. Je dostupný v článku [1].)



Obr. 3 Harmonická čtveřice bodů a Apolloniova kružnice

Harmonická čtveřice (F, E, K, L) jednoznačně určuje poměr λ daný vztahem (3) a tzv. *Apolloniovu kružnici* h s průměrem KL , jež je množinou všech bodů X dané roviny s vlastností

$$\frac{|FX|}{|EX|} = \lambda. \quad (4)$$

Apolloniovu kružnici h určenou čtveřicí (F, E, K, L) , resp. dvojicí (F, E) a poměrem λ , budeme značit h_{FEKL} , resp. $h_{FE,\lambda}$.

Eukleidovu větu o odvěsně lze pro trojúhelník EST zapsat ve tvaru

$$r^2 = |FS| \cdot |ES|, \quad (5)$$

který upozorňuje na souvislost s kruhovou inverzí.

Základní objekty a vztahy společné množinám $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$

Zavedením vztahu

$$a^2 = b^2 + e^2 \quad (6)$$

ozřejmíme souvislost definic 1 a 3 (obr. 4). U množiny $\mathcal{C}$ nám tento vztah umožňuje dodefinovat *excentricitu* e a ohniska F_1, F_2 jako body úsečky AB vzdálené od jejího středu S o délku e . U množiny $\mathcal{A}$ pomůže analogicky zavést vedlejší poloosu b a *vedlejší vrcholy* C, D elipsy. Není těžké pomocí definice 1 ověřit, že i pro množinu $\mathcal{A}$ platí $|AS| = |BS| = a$. Body A, B nazýváme *hlavní vrcholy* elipsy.

Doplňme dále trojici bodů (F_1, K, L) , kde K a L jsou průsečíky kružnice $k(F_2; 2a)$ s přímkou AB , na harmonickou čtveřici (F_1, E, K, L) . Střed úsečky EF_1 označme O a její osu d . Ukážeme, že d je řídící přímka z definice 2.

Vztah (5) lze pro naši situaci zapsat ve tvaru

$$(2a)^2 = |F_1F_2| \cdot |EF_2|, \quad (7)$$

z něž pomocí obr. 4 určíme

$$|EF_2| = \frac{2a^2}{e}, \quad |OS| = \frac{|EF_2|}{2} = \frac{a^2}{e}$$

a

$$|OE| = |OF_1| = |OS| - e = \frac{b^2}{e}.$$

Dále zjistíme, že

$$\frac{|AF_1|}{|Ad|} = \frac{|AF_1|}{|AO|} = \frac{a - e}{|OF_1| - (a - e)} = \frac{e}{a},$$

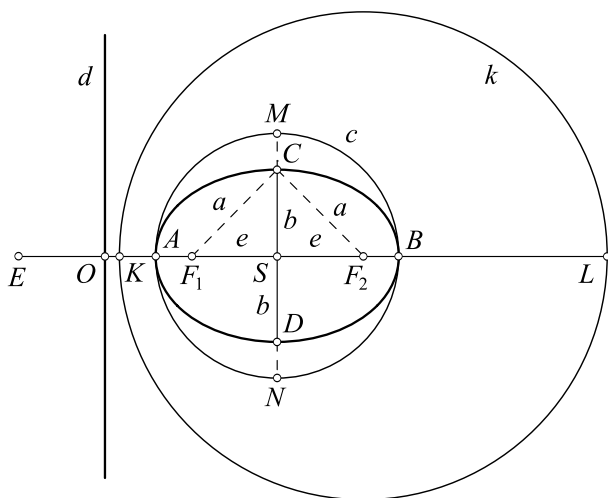
$$\frac{|BF_1|}{|Bd|} = \frac{|BF_1|}{|BO|} = \frac{e + a}{a + |OS|} = \frac{e}{a}$$

a

$$\frac{|DF_1|}{|Dd|} = \frac{|CF_1|}{|Cd|} = \frac{|CF_1|}{|OS|} = a \cdot \frac{e}{a^2} = \frac{e}{a}.$$

Analogicky lze ověřit, že též

$$\frac{|KF_1|}{|KE|} = \frac{|LF_1|}{|LE|} = \frac{e}{a}.$$



Obr. 4 Prvky společné množinám $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$

Uvedené výsledky vedou k předpokladu, že v konfiguraci na obr. 4 je množina $\mathcal{B}$ dána ohniskem F_1 , řídicí přímkou d a konstantou

$$\varepsilon = \frac{e}{a}, \quad (8)$$

jež se nazývá *relativní excentricita*.

Vidíme, že množiny $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ mají na obr. 4 společné body A , B , C a D , stejně tak i veličiny a , b , e a ε . Všem třem množinám jsou přiřazeny tatáž ohniska F_1 a F_2 , bod S i kružnice k a c , rovněž tak i body E , O a přímka d . Čtenář se jistě snadno přesvědčí, že kterákoliv z trojic (F_1, F_2, a) , (F_1, d, ε) , (A, B, ν) jednoznačně určuje všechny vyjmenované prvky.

Navíc platí následující tvrzení.

Věta 1

Vrcholová kružnice elipsy je Apolloniovou kružnicí $c = c_{F_1 O, \varepsilon} = c_{F_1 O A B}$.

Řídicí kružnice elipsy je Apolloniovou kružnicí $k = k_{F_1 E, \varepsilon} = k_{F_1 E K L}$.

Věta 2

Množiny $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou souměrné podle přímek AB a CD , které v daném pořadí nazýváme *hlavní a vedlejší osa elipsy* a značíme o_1 a o_2 . Jsou tedy souměrné i podle jejich průsečíku S , tzv. *středu elipsy*.

Označme P libovolný bod množiny $\mathcal{B}$ různý od bodů A a B . Bod H je pata jeho kolmice na řídící přímkou d (obr. 5). Apolloniova kružnice $h = h_{F_1H,\varepsilon}$ prochází bodem P a protíná polopřímku HF_1 v bodech X a Y . Z rovností

$$\varepsilon = \frac{|F_1X|}{|HX|} = \frac{|F_1A|}{|OA|} = \frac{|F_1Y|}{|HY|} = \frac{|F_1B|}{|OB|}$$

Osa pásu ohraničeného rovnoběžkami AX a BY je kolmá na AB a prochází středem každé jeho příčky. Prochází tedy středem S_{XY} průměru XY kružnice h i středem S úsečky AB . Je to přímka o_2 , vedlejší osa elipsy.

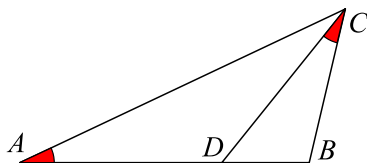
Pokud je přímka HP sečnou kružnice h , pak její průsečík $P' \neq P$ s kružnicí patří také do množiny $\mathcal{B}$ a je souměrný s bodem P podle osy o_2 , protože tětíva PP' je kolmá na osu o_2 kružnice h . Je-li HP tečnou kružnice h , pak je bod P v souměrnosti podle o_2 samodružný.

Důkaz ekvivalence definic 1, 2 a 3

Věta 3

Pro každý trojúhelník ABC s vnitřním bodem D strany AB platí

$$|BC|^2 = |BD| \cdot |BA|, \text{ právě když } |\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle CAB|.$$



Obr. 6 Ilustrace k větě 3

Důkaz. Z přepisu vztahu $|BC|^2 = |BD| \cdot |BA|$ na tvar

$$\frac{|BC|}{|BA|} = \frac{|BD|}{|BC|}$$

plyne, že trojúhelníky ABC a CBD jsou podobné podle věty *sus*. Shodují se totiž v poměru stran přilehlých společnému úhlu při vrcholu B . Z podobnosti plyne $|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle CAB|$.

Obráceně, platí-li $|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle CAB|$, pak jsou trojúhelníky ABC a CBD podobné podle věty *uu*. Z podobnosti plyne $|BC|^2 = |BD| \cdot |BA|$.

Poznámka 1

Čtenář si patrně uvědomil souvislost věty 3 s Eukleidovou větou o odvěsně. Snadno lze též nahlédnout, že je přímka BC tečnou ke kružnici opsané trojúhelníku ADC a body A, D jsou vzor a obraz v kruhové inverzi se základní kružnicí $z(B; |BC|)$.

Věta 4

Definice 1 a 2 jsou ekvivalentní.

Důkaz. Máme dokázat $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Víme již, že

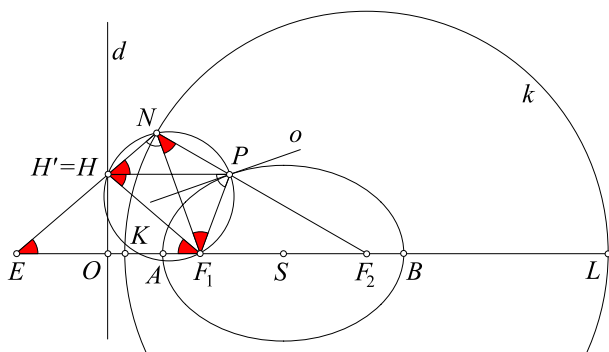
$$o_1 \cap \mathcal{A} = \{A, B\} = o_1 \cap \mathcal{B}.$$

Nechť $P \notin o_1$ je libovolný bod množiny $\mathcal{A}$. Označme N jeho určující bod na řídicí kružnici k a H' průsečík úsečky EN s přímkou d (obr. 7).

Uplatněním vztahu (5) a věty 3 na trojúhelník EF_2N s bodem F_1 uvnitř jeho strany EF_2 zjistíme, že $|\sphericalangle F_1NF_2| = |\sphericalangle F_2EN|$. Rovnoramenné trojúhelníky EF_1H' a NF_1P tedy mají při svých základnách shodné úhly, jejichž velikost označíme φ .

Čtyřúhelník $H'F_1PN$ je vepsán do kružnice, neboť $|\sphericalangle F_1H'N| = 2\varphi$ (vnější úhel trojúhelníku EF_1H') a $|\sphericalangle NPF_1| = 180^\circ - 2\varphi$ (viz trojúhelník NF_1P). Z vlastností obvodových úhlů nahlédneme, že

$$|\sphericalangle F_1H'P| = \varphi = |\sphericalangle PH'N|.$$



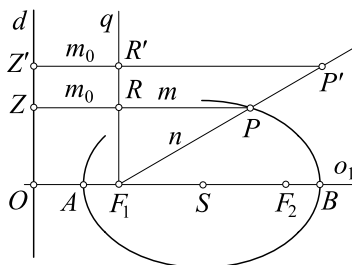
Obr. 7 K první části důkazu věty 4

Přímky PH' a d jsou osy úhlů různoběžek EN a F_1H' . Jsou tedy na sebe kolmé a pata H kolmice z bodu P elipsy na přímku d je totožná s bodem H' . (Kdyby tomu tak nebylo, dojdeme ke sporu se součtem úhlů v trojúhelníku $HH'P$.)

Z rovností $|\sphericalangle NEF_1| = |\sphericalangle PHF_1|$ a $|\sphericalangle ENF_1| = |\sphericalangle HPF_1|$ (obvodové úhly) plyne podobnost trojúhelníků NEF_1 a PHF_1 (obr. 7). Z ní a z Apoloniovy kružnice k obdržíme vztah (1):

$$\frac{|PF_1|}{|Pd|} = \frac{|F_1P|}{|HP|} = \frac{|F_1N|}{|EN|} = \frac{|F_1K|}{|EK|} = \varepsilon.$$

Dokázali jsme, že každý bod množiny $\mathcal{A}$ patří do množiny $\mathcal{B}$. Ukážeme ještě, že žádné další body množina $\mathcal{B}$ neobsahuje.



Obr. 8 K druhé části důkazu věty 4

Body přímky o_1 již nemusíme uvažovat. Zvolme tedy bod $P' \notin o_1$ a označme P průsečík množiny $\mathcal{A}$ s polopřímkou F_1P' (obr. 8, existenci

průsečíku zaručuje poloha bodu F_1). Užitím označení z obr. 8, kde $q \perp o_1$, a stejnolehlosti trojúhelníků F_1PR a $F_1P'R'$ dostáváme

$$\varepsilon = \frac{|F_1P|}{|PZ|} = \frac{n}{|m + m_0|} \quad (9)$$

a

$$\varepsilon' = \frac{|F_1P'|}{|P'Z'|} = \frac{kn}{|km + m_0|} = \frac{n}{|m + \frac{m_0}{k}|}, \quad (10)$$

kde $k \in (0, \infty)$, pokud ovšem přijmeme dohodu, že délce m přiřadíme záporné znaménko, právě když body P a P' leží uvnitř poloroviny qO .

Ze vztahů (9) a (10) plyne, že $\varepsilon' = \varepsilon$, právě když $k = 1$ (tzn. $P' = P$).

Poznámka 2

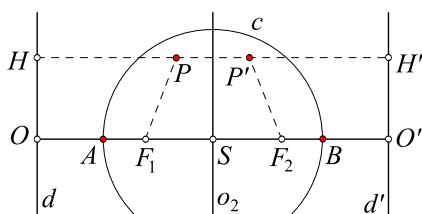
Tvrzení $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ plyne také ze symetrie množiny $\mathcal{B}$ podle osy o_2 :

Jsou-li O' , F_2 a d' obrazy bodů O , F_1 a řídicí přímky d v souměrnosti podle osy o_2 (obr. 9), pak pro libovolný bod P množiny $\mathcal{B}$ a jeho obraz P' v téže souměrnosti platí

$$\varepsilon = \frac{|F_1P|}{|HP|} = \frac{|F_2P'|}{|H'P'|} = \frac{|F_2P|}{|H'P|} \implies \frac{|F_1P| + |F_2P|}{|HP| + |H'P|} = \frac{\varepsilon|HP| + \varepsilon|H'P|}{|HP| + |H'P|} = \varepsilon.$$

Odtud a z obr. 9 obdržíme

$$|F_1P| + |F_2P| = |HH'| \cdot \varepsilon = 2|OS| \cdot \varepsilon = 2 \frac{a^2}{e} \cdot \frac{e}{a} = 2a.$$

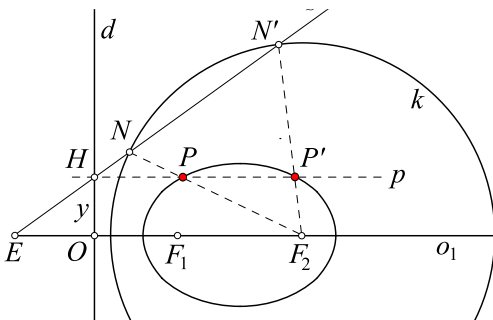


Obr. 9 K důkazu $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ užitím symetrie

Poznámka 3

Důkaz věty 4 odhalil poznatek, že kolmý průmět H bodu P elipsy na řídicí přímku leží na přímce EN . Tento fakt umožňuje jednoduchou konstrukci těch bodů elipsy, jež mají od hlavní osy o_1 vzdálenost y :

obr. 10 jsou sestrojeny dva z možných čtyř takových bodů.

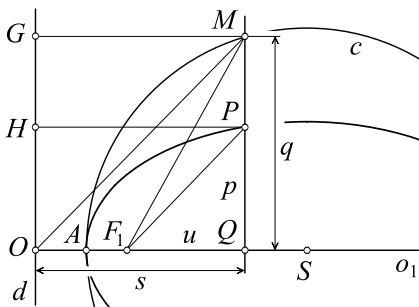


Obr. 10 Konstrukce bodů elipsy, které mají od hlavní osy vzdálenost y

Věta 5

Definice 2 a 3 jsou ekvivalentní.

Důkaz. Máme dokázat $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. Víme, že $o_1 \cap \mathcal{C} = \{A, B\} = o_1 \cap \mathcal{B}$. Nechť $M \notin o_1$ je bod vrcholové kružnice $c = c_{F_1 O, \varepsilon}$, Q je jeho kolmý průmět na osu o_1 a P je ten bod množiny $\mathcal{B}$, který leží na polopřímce QM .



Obr. 11 K důkazu věty 5

Při označení podle obr. 11 platí

$$|PF_1| = \varepsilon s < \varepsilon \cdot |MO| = |MF_1|.$$

Proto leží bod P uvnitř úsečky QM . Navíc je jen jeden, neboť délka $|XF_1|$ roste se vzdáleností $|XQ|$ bodu X polopřímky QM .

Z podmínky (1) pro bod P a faktu $M \in c$ dostáváme

$$\frac{|PF_1|^2}{|Pd|^2} = \varepsilon^2 \quad \text{a} \quad \frac{|MF_1|^2}{|MO|^2} = \varepsilon^2.$$

Levé strany obou vztahů vyjádříme pomocí symbolů p, q, s, u vyznačených na obr. 11 a po úpravě dostaneme

$$u^2 + p^2 = \varepsilon^2 s^2 \quad \text{a} \quad u^2 + q^2 = \varepsilon^2 s^2 + \varepsilon^2 q^2.$$

Odečtením obou rovností získáme

$$p^2 = q^2(1 - \varepsilon^2) = q^2 \nu^2$$

(neboť z (6) plyne $1 - \varepsilon^2 = \nu^2$) a odtud po odmocnění vztah (2).

Dokázali jsme $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. Přepokládejme obráceně, že $P \in \mathcal{C}$ a $P \notin o_1$. Analogickým postupem sestrojíme polopřímku QP s bodem M v jejím průsečíku s kružnicí c a pomocí obr. 11 zjistíme

$$p^2 = \nu^2 q^2 \quad \text{a} \quad u^2 = |F_1M|^2 - q^2 = \varepsilon^2(s^2 + q^2) - q^2 = \varepsilon^2 s^2 - \nu^2 q^2.$$

Odtud $p^2 + u^2 = \varepsilon^2 s^2$, neboli $|PF_1| = \varepsilon \cdot |Pd|$.

Závěr

Cílem článku bylo seznámit čtenáře s netradičním pohledem na elipsu. Průzkum jejích vlastností s využitím Apolloniových kružnic odhalil konstrukci bodů elipsy, s kterou jsme se v literatuře nesetkali. Postup lze aplikovat i na hyperbolu. Článek je však vzhledem k rozsahu a původnímu zaměření omezen jen na elipsu. Souvislosti s ostatními kuželosečkami zveřejníme v dalším příspěvku.

Literatura

- [1] *Leischner, P.*: Polibky kružnic – Intermezzo. MFI, roč. 24 (2015), č. 3, s. 177–184. Dostupné na: <http://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/issue/view/16>

Důkazy a důkazové úlohy v planimetrii

LENKA JUKLOVÁ – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Problematika různých typů a metod použitých důkazů v planimetrii je určena především matematicky zdatnějším středoškolákům a jejich učitelům. Cílem tohoto příspěvku je prezentace základních důkazových metod (viz např. [4]) při řešení (několika) vybraných úloh z oblasti elementární geometrie.

Připomeňme ještě, že mezi základní typy důkazů metrických a polohových vlastností v planimetrii řadíme důkazy shodnosti dvojice úseček, shodnosti dvojice úhlů, rovnoběžnosti dvojice přímek, kolmosti dvojice přímek, kolinearitu tří a více bodů v rovině (tři a více bodů leží na téže přímce), konkurentnosti tří a více přímek v rovině (tři a více přímek prochází společným bodem), koncykličnosti čtyř a více bodů v rovině (čtyři a více bodů leží na téže kružnici) [5, 6, 7].

Při řešení základních typů důkazových úloh lze využít rozmanitých technik, které jsou však obecněji zařazeny mezi čtyři známé (a to nejen v geometrii používané) metody důkazů, viz [4]. Jedná se především o *důkaz přímý*, dále o *důkaz nepřímý*, kdy dokazujeme větu ve tvaru implikace výroků (výrokových forem) za použití obměněné (kontraponované) věty. Pro důkaz obměněné věty pak použijeme jinou důkazovou metodu. Kromě těchto dvou základních metod se při důkazech v planimetrii nezdá se setkáváme také s důkazy *sporem* a s důkazy využívající *princip matematické indukce*. Zvláštní postavení při řešení důkazových úloh zaujímá tzv. *úplná indukce*, která využívá rozkladu nekonečné množiny zkoumaných objektů na třídy, jichž je *konečně mnoho*. Důkaz pak stačí provést vždy pro jednoho reprezentanta uvažované třídy rozkladu.

V další části příspěvku budou prezentována řešení některých vybraných důkazových úloh, a to za použití konkrétních výše uvedených důkazových metod.

Přímý důkaz

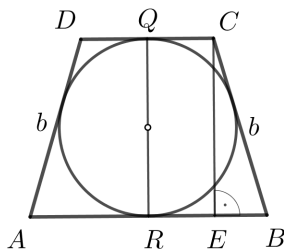
V následujícím (prvním) příkladu bude prezentován přímý důkaz jednoduché výrokové formy, ve druhém příkladu je pak uvedena ukázka přímého důkazu složené výrokové formy ve tvaru logické ekvivalence.

Příklad 1

Nechť $ABCD$ je rovnoramenný lichoběžník ($AB \parallel CD$), jemuž lze vepsat kružnici. Dokažte, že její průměr je geometrickým průměrem délek obou základů.

Řešení. Uvažujme tečnový rovnoramenný lichoběžník $ABCD$ se základnami AB , CD . Nechť k je kružnice jemu vepsaná a r její poloměr. Označme dále délky jeho stran $|AB| = a$, $|CD| = c$ ($a > c$) a $|BC| = |DA| = b$. Protože lichoběžník $ABCD$ je tečnový, platí

$$a + c = 2b. \quad (1)$$



Obr. 1

Body dotyku kružnice k se základnami AB , CD označme po řadě R , Q . Vzhledem k tomu, že lichoběžník je rovnoramenný, jsou body R a Q středy jeho základů. Zřejmě také $|QR| = 2r = d$, kde d je průměr kružnice k . Označme dále E patu kolmice z vrcholu C k základně AB . Pak platí $|QR| = |CE|$, a $QREC$ je tudíž pravoúhelník o stranách délek $\frac{1}{2}c$, d . Trojúhelník BCE je pravoúhlý, kde $|EB| = \frac{1}{2}(a - c)$. Z Pythagorovy věty konečně plyne (viz obr. 1)

$$d^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2} - \frac{c}{2}\right)^2.$$

Po dosazení za $b = \frac{1}{2}(a + c)$ z (1) dostáváme po snadné úpravě $d^2 = ac$, tj. $d = \sqrt{ac}$, což jsme chtěli dokázat.

Komentář: V důkazu jsme vycházeli ze známých skutečností a faktů. Vytvořením postupného řetězce několika platných, na sebe navazujících implikací, jsme došli k dokazovanému tvrzení, viz např. [4]. Podobně postupujeme i v následující úloze.

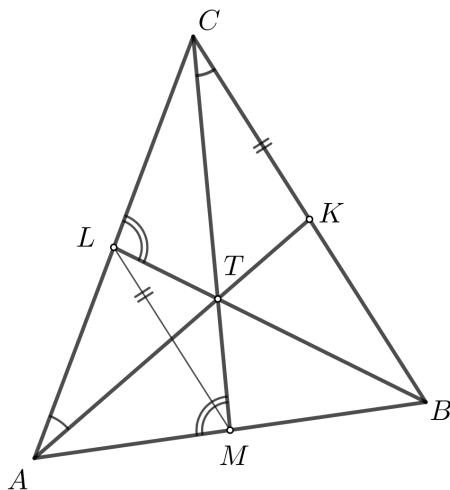
Příklad 2

Nechť K, L, M jsou po řadě středy stran BC, CA, AB trojúhelníku ABC . Dokažte, že rovnost $|\sphericalangle MCB| = |\sphericalangle CAK|$ platí, právě když $|\sphericalangle CLB| = |\sphericalangle AMC|$.

Řešení.

- (i) Předpokládejme nejprve, že $|\sphericalangle MCB| = |\sphericalangle CAK|$. Označme T těžiště trojúhelníku ABC . Úsečka ML je střední příčkou v trojúhelníku ABC , a je tedy rovnoběžná se stranou BC . Přímka CM protíná rovnoběžky BC a ML v bodech C a M , takže z vlastností střídavých úhlů a uvedeného předpokladu plyne

$$|\sphericalangle MCB| = |\sphericalangle CML| = |\sphericalangle LMT| = |\sphericalangle LAT| = |\sphericalangle CAK|.$$



Obr. 2

Odtud plyne, že $AMTL$ je tětiový čtyřúhelník, neboť velikost vnitřního úhlu AMT je rovna velikosti vnějšího úhlu u protějšího vrcholu L .

Platí tedy

$$|\sphericalangle AMT| = |\sphericalangle AMC| = |\sphericalangle CLB| = |\sphericalangle CLT|,$$

a tudíž $|\sphericalangle CLB| = |\sphericalangle AMC|$. Tím je důkaz části (i) uzavřen.

- (ii) Nechť naopak platí $|\sphericalangle CLB| = |\sphericalangle AMC|$. Obrácenou implikaci snadno dokážeme provedením opačného postupu. Vyjdeme přitom ze skutečnosti, že čtyřúhelník $AMTL$ je tětiový.

Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Následující úloha je určena pro čtenáře k procvičení metody přímého důkazu, k jejímu řešení lze využít například vhodně zvoleného otočení.

Příklad 3 Jsou dány dva různé čtverce $ABCD$ a $DKLM$ se společným vrcholem D (vrcholy jsou popsány ve stejném smyslu). Označme E střed úsečky AM a F patu kolmice z bodu D k přímkce CK . Dokažte, že body D, E, F leží na téže přímkce (jsou kolineární).

Nepřímý důkaz a důkaz sporem

Při řešení následující úlohy bude prezentována metoda *nepřímého důkazu* a současně i metoda *důkazu sporem* (v důkazu obměněné věty).

Příklad 4

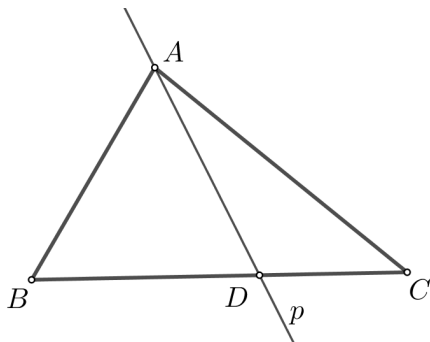
Nechť trojúhelník ABC nemá žádné dvě strany shodné, pak jej nelze rozdělit žádnou příčkou na dva shodné nepřekrývající se trojúhelníky. Dokažte.

Řešení. Úlohu dokážeme nepřímo. Uveďme nejprve obměněnou větu k větě dané: Pokud trojúhelník ABC lze rozdělit některou příčkou na dva shodné nepřekrývající se trojúhelníky, pak aspoň dvě jeho strany jsou shodné. Důkaz tohoto tvrzení (ve tvaru implikace) provedeme sporem.

Předpokládejme, že trojúhelník ABC lze rozdělit na dva shodné nepřekrývající se trojúhelníky a přitom žádné dvě jeho strany nejsou shodné. To lze učinit pouze pomocí příčky trojúhelníku, která prochází jedním vrcholem a protíná jeho protější stranu. Bez újmy na obecnosti veďme vrcholem A přímkou p tak, aby proťala stranu BC v bodě D . Přímkou p rozdělí trojúhelník ABC na dva nepřekrývající se trojúhelníky ADC a ADB (obr. 3) se společnou stranou AD . Předpokládáme dále, že tyto trojúhelníky jsou shodné, tj. platí buď $|CD| = |BD|$ a současně $|AC| = |BC|$,

nebo $|CD| = |AB|$ a současně $|BD| = |AC|$. Dokážeme, že ani jedna z výše uvedených možností nenastane.

Pokud $|CD| = |BD|$ a současně $|AC| = |BC|$, je trojúhelník ABC rovnoramenný, a tudíž aspoň dvě jeho strany jsou shodné, což je spor s předpokladem.



Obr. 3

Je-li $|CD| = |AB|$ a současně $|BD| = |AC|$, mají shodné trojúhelníky ADC a DAB shodné odpovídající si úhly při vrcholech A a D , tj. $|\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle ADB|$, $|\sphericalangle ACD| = |\sphericalangle DBA|$ a $|\sphericalangle CDA| = |\sphericalangle BAD|$. Body B, C, D leží na téže přímce, tudíž úhel BDC je přímý. Zřejmě pak

$$|\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle CDA| = 180^\circ$$

a body A, B, C jsou kolineární, což je opět spor, neboť A, B, C jsou vrcholy trojúhelníku.

Přímka procházející vrcholem trojúhelníku ABC a protínající protější stranu tedy nemůže rozdělit trojúhelník ABC na dva nepřekrývající se shodné trojúhelníky, pro něž platí $|AC| = |BD|$. Tím je důkaz uzavřen.

Následující úloha poslouží k procvičení techniky důkazu sporem.

Příklad 5 (40. Turnaj měst, 2018/2019)

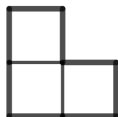
Nechť vnitřní úhel při vrcholu A rovnoběžníku $ABCD$ je ostrý. Na straně AB je zvolen bod N tak, že $|CN| = |AB|$. Předpokládejme, že kružnice opsaná trojúhelníku CBN se dotýká přímky AD . Dokažte, že jejím dotykovým bodem je vrchol D .

Užití principu matematické indukce

V řadě důkazových úloh z oblasti tzv. kombinatorické geometrie, v nichž se jedná o vyplnění pravoúhlých tabulek danými polyminy, se často využívá principu matematické indukce. Následující úloha je toho dokladem.

Příklad 6

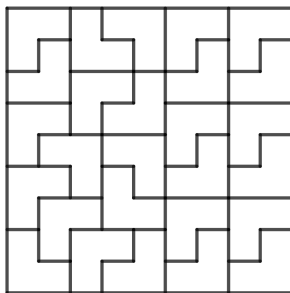
Dokažte, že pro všechna $n = 6k + 3$, kde k je přirozené číslo, lze čtvercovou tabulku $n \times n$ vyplnit L -triminy, tj. triminy ve tvaru písmene L (obr. 4).



Obr. 4

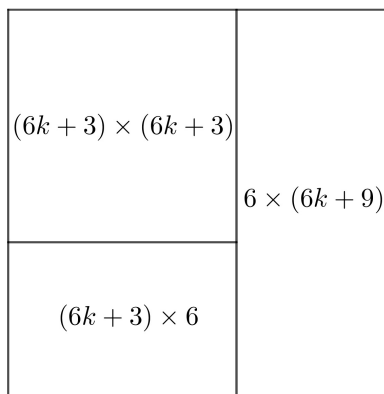
Řešení. Ukážeme, že pro každé $k \geq 1$, tj. pro $n = \{9, 15, 21, \dots\}$, lze tabulku $(6k+3) \times (6k+3)$ vyplnit požadovaným způsobem. Důkaz provedeme užitím principu matematické indukce vzhledem ke k .

- (i) Pro $k = 1$ (tj. pro čtvercovou tabulku 9×9) je jedno z možných vyplnění tabulky uvedeno na obr. 5.



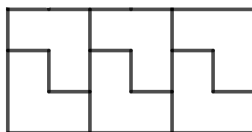
Obr. 5

- (ii) Předpokládejme dále, že tabulku $(6k+3) \times (6k+3)$ pro určité $k \geq 1$ lze L -triminy vyplnit požadovaným způsobem. Ukážeme, že pomocí L -trimin lze vyplnit také čtvercovou tabulku pro $k+1$, tj. tabulku $(6k+9) \times (6k+9)$.



Obr. 6

Část takové čtvercové tabulky o rozměrech $(6k+3) \times (6k+3)$, vlevo nahoře na obr. 6 doplníme o blok $(6k+3) \times 6$ (obr. 6, vlevo dole) a o blok $6 \times (6k+9)$ vpravo tak, abychom dostali čtvercovou tabulku $(6k+9) \times (6k+9)$. Oba bloky jsou typu $6 \times 3\ell$, kde ℓ je přirozené číslo, přičemž každý blok typu 6×3 lze snadno vyplnit požadovaným způsobem, viz např. obr. 7.



Obr. 7

Tím je dokázáno tvrzení také pro $k+1$.

Spojením obou kroků (i) a (ii) je tak dokázáno, že dané tvrzení platí pro všechny čtvercové tabulky typu $(6k+3) \times (6k+3)$, kde $k \geq 1$.

Příklad 7 (53. MO – C–I–1)

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n , které je větší než 3 a není dělitelné třemi, platí: Šachovnici $n \times n$ lze rozřezat na jeden čtverec 1×1 a obdélníky 3×1 .

Příklad 8 (5. Srbská MO, 1998)

Dokažte, že pravoúhelníkovou tabulku $6m \times 2n$, kde m, n jsou přirozená čísla ($n > 1$), lze vyplnit (bez překrývání) L -triminy z příkladu 5, přičemž žádný obdélník typu 3×2 není vyplněn dvěma L -triminy.

Úplná indukce

Na závěr uvedeme ukázkou důkazu klasického tvrzení z oblasti výpočetní geometrie, který využívá *úplnou indukci*.

Příklad 9 (kosinová věta)

V libovolném trojúhelníku ABC se stranami $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|CA| = b$ a vnitřními úhly α, β, γ (při obvyklém označení), platí

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Dokažte.

Řešení. Každý trojúhelník je buď ostroúhlý, nebo pravoúhlý, nebo tupouhlý (náleží tedy právě do jedné třídy rozkladu množiny všech trojúhelníků). Tvrzení nyní dokážeme pro libovolného reprezentanta každé třídy.

- (i) Ostroúhlý trojúhelník ABC ($\alpha < 90^\circ$). Uvažujme výšku v_c ke straně AB , její patu označme V_c . Nechť $|AV_c| = x$; zřejmě $c > x$. Pravoúhlé trojúhelníky AV_cC a CV_cB mají shodnou odvěsnu CV_c . Pro trojúhelník AV_cC z Pythagorovy věty plyne $v_c^2 = b^2 - x^2$ a dále $x = b \cos \alpha$. V pravoúhlém trojúhelníku BV_cC platí $v_c^2 = a^2 - (c-x)^2$, viz obr. 8(i). Odtud plyne

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2$$

a po úpravě a dosazení za x obdržíme přímo kýžený vztah

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cx = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

- (ii) Pravoúhlý trojúhelník ABC ($\alpha = 90^\circ$). V tomto pravoúhlém trojúhelníku s přeponou a platí Pythagorova věta

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 90^\circ.$$

Tím je důkaz pro $\alpha = 90^\circ$ proveden.

- (iii) Tupoúhlý trojúhelník ABC ($\alpha > 90^\circ$). Uvažujme výšku v_c ke straně AB , její patu označme V_c . Nechť $|AV_c| = x$, zřejmě $|V_cB| = x + c$ (obr. 8). V pravouhlém trojúhelníku AV_cC má úhel při vrcholu A velikost $180^\circ - \alpha$, a tedy

$$x = b \cos(180^\circ - \alpha).$$

Dále užitím Pythagorovy věty v trojúhelníku AV_cC obdržíme rovnost

$$v_c^2 = b^2 - x^2$$

a v trojúhelníku BV_cC pak rovnost

$$v_c^2 = a^2 - (c + x)^2.$$

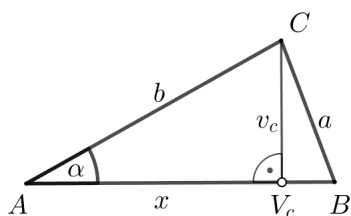
Porovnáním pravých stran obou posledních rovností a po snadné úpravě máme

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx = b^2 + c^2 + 2bc \cos(180^\circ - \alpha).$$

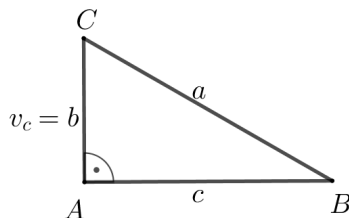
Využitím rovnosti $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ konečně dostáváme

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

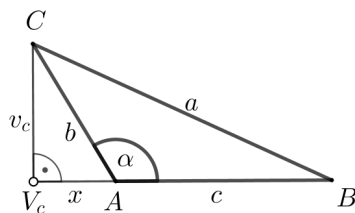
což jsme měli dokázat.



ad (i)



ad (ii)



ad (iii)

Obr. 8

Užitím principu úplné indukce jsme tak dokázali platnost kosinové věty pro možné velikosti úhlu α a tím je dokázána první ze tří uvedených rovností. Užitím principu cyklické záměny je pak dokázáme i zbylé dvě rovnosti.

Závěrečnou úlohu, která je převzata z Britské MO (BMO), lze řešit opět užitím principu úplné indukce. Je třeba rozlišit tři případy pro velikosti vnitřního úhlu při vrcholu B (ostrý, pravý a tupý úhel).

Příklad 10 (BMO 2018/2019)

Je dán trojúhelník ABC . Nechť ℓ je kolmice k přímce AB , která prochází vrcholem B . Kolmice k BC , která prochází vrcholem A , protíná přímku ℓ v bodě D a osa hrany BC protíná přímku ℓ v bodě P . Patu kolmice z bodu D k přímce AC označme E . Dokažte, že trojúhelník BPE je rovnoramenný.

Literatura

- [1] *Geretschläger, R. – Kalinowski, J. – Švrček, J.*: A Central European Olympiad (The Mathematical Duel). World Scientific Publ., 2018.
- [2] *Lakomá, L.*: Úlohy z planimetrie na SŠ. Diplomová práce, PřF UP, Olomouc, 1995.
- [3] *Monk, D.*: New Problems in Euclidean Geometry. The UK Mathematics Trust, 2009.
- [4] *Odvárko, O a kol.*: Metody řešení matematických úloh. SPN Praha, 1990,
- [5] *Švrček, J.*: Jak provádět důkazy v planimetrii? In: Sborník „Dva dny s didaktikou matematiky 2012“, vydavatelství PedF UK Praha, Praha, 2012, s. 58–62.
- [6] *Švrček, J. – Zlámal, V.*: Čtyři body na kružnici. MFI, roč. 24 (2015), č. 5, s. 334–343.
- [7] *Zlámal, V.*: O důkazech konkurentnosti přímk v rovině. MFI, roč. 27 (2018), č. 3, s. 161–168.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 253 a 254 můžete zaslat nejpozději do 20. 9. 2019 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, případně v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 253

Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ platí

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 + xf(x). \quad \text{Pavel Calábek}$$

Úloha 254

Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel vyhovující rovnici

$$x^2 + xy + y^2 = x + y + 5. \quad \text{Jacek Uryga}$$

Dále uvádíme řešení úloh 249 a 250, jejichž zadání jsme zveřejnili v pátém čísle loňského (27.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 249

V rámci městského tanečního festivalu vstoupilo i pět dívčích tanečních kroužků: hanácký, valašský, romský, slovenský a ukrajinský. Vystoupení se velmi líbila, ale nešlo o soutěž. Jitka s Bětkou si však řekly, že si stanoví výsledné pořadí alespoň pro sebe. Začaly tím, že hanácký kroužek dají výš než valašský, a rovněž že romský dají výš než ukrajinský.

Stanovte, kolik je možných různých výsledných pořadí za těchto dvou zadaných podmínek, jestliže navíc uvážíme, že na některých místech může být i více než jeden kroužek.

Stanislav Trávníček

Řešení. Označme H, V, R, S, U po řadě kroužek hanácký, valašský, romský, slovenský a ukrajinský. Zápisem $A > B$ budeme mýnit, že kroužek A bude zařazen před kroužek B , podobně $A = B$ že jsou na stejném místě. Podle zadání platí $H > V$, $R > U$. Máme určit počet pořadí kroužků, které splňují uvedené dva předpoklady, přičemž kroužky se mohou o dané pořadí

dělit. Označme s počet různých pořadí, které zaujímají kroužky H, V, R, U . Zřejmě $s \in \{2, 3, 4\}$. Diskusí podle s dostaneme:

- Pokud $s = 2$, potom jediné možné umístění čtyř výše uvedených souborů je $H = R > V = U$. Slovenský kroužek může být před $H = R$, na stejném místě jako $H = R$, mezi $H = R$ a $V = U$, na stejném místě jako $V = U$ a konečně za $V = U$, celkem tedy pro něj máme $2s + 1 = 5$ možností. Proto podmínce $s = 2$ vyhovuje 5 možných pořadí souborů.
- Pro $s = 3$ jsou možná následující rozmístění výše uvedených čtyř souborů

$$\begin{aligned} H = R > V > U, \quad H = R > U > V, \\ H > R = V > U, \quad H > R > V = U, \\ R > H = U > V, \quad R > H > V = U. \end{aligned}$$

Stejně jako v předcházejícím, slovenský kroužek můžeme umístit v každém pořadí na $2s + 1 = 7$ míst. Podmínce $s = 3$ tak vyhovuje $6 \cdot 7 = 42$ různých pořadí souborů.

- Pokud $s = 4$, žádný z kroužků H, V, R, U nemůže být na stejném pořadí. Pro tyto kroužky tak máme následující možnosti

$$\begin{aligned} H > R > V > U, \quad H > R > U > V, \quad H > V > R > U \\ R > H > U > V, \quad R > H > V > U, \quad R > U > H > V \end{aligned}$$

Slovenský kroužek můžeme u každého z těchto pořadí umístit na $2s + 1 = 9$ míst, celkem nám tak vychází $6 \cdot 9 = 54$ různých umístění daných souborů.

Podle zadaných pravidel tak můžeme pět kroužků umístit celkem

$$5 + 42 + 54 = 101$$

možnými způsoby.

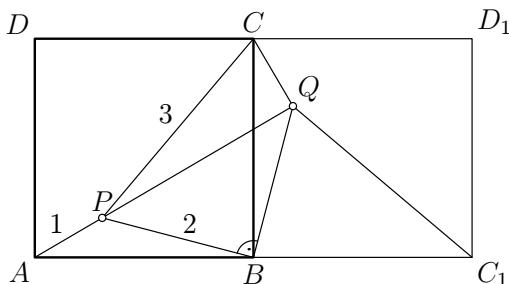
Poznámka. Redakce bohužel neobdržela žádné správné řešení, řešitelé vždy nějakou drobnou chybičkou byli blízko správné hodnoty 101.

Neúplné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan a *Jozef Mészáros* z Jelky.

Úloha 250

Uvnitř čtverce $ABCD$ leží bod P , pro který platí $|AP| = 1$, $|BP| = 2$ a $|CP| = 3$. Dokažte, že bod P' souměrně sdružený s bodem P podle přímky AB leží na kružnici opsané čtverci $ABCD$. Jozef Mészáros

Řešení. Uvažujme otočení se středem B a úhlem otočení -90° , které zobrazí vrchol A na vrchol C (viz obr. 1).



Obr. 1

Označme Q obraz bodu P v tomto otočení, tudíž PBQ je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu B , kde $|\sphericalangle BQP| = 45^\circ$. Z Pythagorovy věty v trojúhelníku PBQ plyne $|PQ| = 2\sqrt{2}$. Trojúhelník CPQ má délky stran $|PQ| = 2\sqrt{2}$, $|CQ| = |AP| = 1$, $|CP| = 3$. Podle věty obrácené k větě Pythagorově je tedy trojúhelník CPQ pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu Q . Máme tak

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CP_1B| = |\sphericalangle BP_1P| + |\sphericalangle PP_1C| = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ.$$

Tato skutečnost je již nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby bod souměrně sdružený s bodem P podle přímky AB ležel na kružnici opsané čtverci $ABCD$, což jsme měli dokázat.

Poznámka. Podle kosinové věty lze dopočítat délku strany čtverce

$$|AB| = \sqrt{|AP|^2 + |BP|^2 - 2 \cdot |AP| \cdot |BP| \cdot \cos 135^\circ} = \sqrt{1 + 4 + 2\sqrt{2}}.$$

Úlohu s podobnou tematikou můžete najít např. v knize E. Caldý *Matematika pod mikroskopem*.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Anton Hnáth* z Moravan. Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

Pavel Calábek

Videoexperimenty jako motivační prvek ve výuce fyziky

ANNA KUFOVÁ – ČENĚK KODEJŠKA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Motivační prvky ve výuce fyziky

Za motivační prvky při výuce fyziky můžeme považovat všechny procesy, které u žáka vzbudí zájem o dané téma. V obecné rovině lze motivační faktory rozdělit na pozitivní i negativní s vazbou na různé role motivace žáků ve fyzice, motivaci nadaných žáků nebo motivační výukové techniky učitelů fyziky [1].

V dalším se omezíme výhradně na pozitivní aspekty motivačních prvků. Zejména mezi učiteli z praxe lze nalézt příklady takových činností, které podněcují žákovu zvědavost, chuť přijít něčemu na kloub, vyřešit problémovou otázku apod. Za všechny můžeme zmínit např. zábavné didaktické písničky [2], využití komiksů při výuce fyziky [3], astronomii jako aplikační obor různých částí fyziky [4], arkádové počítačové hry [5] nebo klasické činnosti podporované školami jako jsou osvědčené soutěže, exkurze, počítačové programy či motivující klasifikace [6]. V neposlední řadě musíme zmínit i jeden z nejmodernějších trendů, a to virtuální 3D modely využívající augmentované, tedy rozšířené, reality. Průkopníkem v této oblasti na mezinárodní úrovni je česká firma Corinth, s. r. o. a její produkt *Corinth classroom* [7]. V České republice v rámci OP VVV budou v letošním roce 2019 virtuální učebnou s 3D fyzikálními, chemickými, biologickými a dalšími modely vybaveny desítky až stovky základních, středních i vysokých škol.

Motivační videoexperimenty

Motivační videoexperimenty, které byly vytvořeny v rámci bakalářské práce autorkou tohoto článku, lze považovat za další příklad motivační činnosti učitele fyziky, který může takové jednoduché experimenty natáčet se svými žáky ať již v rámci tvorby studijních materiálů nebo třeba za účelem účasti v různých odborných soutěžích typu SOČ, apod.

Všechny níže popsané experimenty najdete na www.youtube.com nebo celkový přehled na www.matfyz.eu/videoexperimenty.php.

Na Katedře experimentální fyziky Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci vzniklo v průběhu let 2017–2018 devět motivačních šotů, které byly z větší části natočeny v Laboratoři školních pokusů, a některé záběry pak byly dotočeny v exteriéru.

Každý experiment měl předem zpracovaný scénář, videa byla natáčena digitální kamerou Panasonic HC-V130 ve full HD rozlišení, střih byl proveden v programech Windows Movie Maker a OpenShot. Vzhledem k tomu, že zvukový záznam originálních scén obsahoval různé šумы, byla všechna videa předabována za pomoci aplikace Hlasový záznam v systému Windows, další úpravy byly provedeny v programu Audacity. Do jednotlivých videí byly dále implementovány různé problémové otázky, mající u žáků opět vzbudit zájem o jejich řešení, a následně teoretické vysvětlení experimentu a praktické využití v běžném životě. Vznikla tak série téměř profesionálně zpracovaných výukových filmů, které svojí průměrnou délkou 7 až 12 minut dávají učitelé fyziky možnost využít tato videa přímo jako motivační prvek na začátku vyučovací hodiny, nebo se tyto šoty mohou stát pro učitele návodem k vlastní činnosti se žáky.

Vzhledem k velké časové náročnosti na natočení jednotlivých sekvencí i následného zpracování, jsme se zaměřili pouze na některé oblasti mechaniky a akustiky.

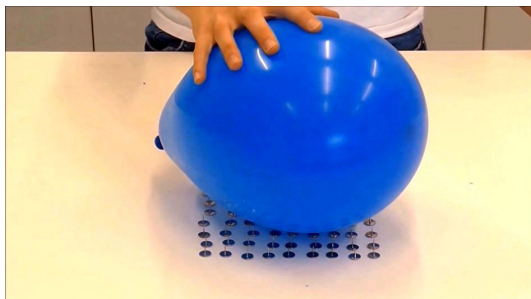
V dalším textu stručně popíšeme jednotlivé experimenty, uvedeme některé problémy při jejich realizaci a na závěr se zmíníme o jejich využití v praxi. Teoretická zdůvodnění jsou uvedena v jednotlivých šotech a zde se jimi nebudeme zabývat.

Fakírovo lože aneb rozložení tlaku

Adresa: <https://www.youtube.com/watch?v=ZB595NU5hBM>

Experiment se zabývá rozložením tlaku na různých plochách. K provedení jsme využili připínáčky a nafouknutý balónek (obr. 1). Pokud ex-

periment provedeme s jedním nebo dvěma připínáčky, balónek v důsledku malé plochy hrotů (a tedy vysokému tlaku) praskne i při malé působící síle téměř okamžitě. Při velkém množství připínáčků (cca 100 ks) se působící síla rozloží na velkou plochu a k prasknutí balónku nedojde nebo jen za působení značné tlakové síly na balónek.



Obr. 1 Fakírovo lože – rozložení tlaku na velkém počtu hrotů

Problémy s realizací: Při prasknutí balónku dojde k rozmetání připínáčků po okolí, doporučujeme ohradit plochu experimentu nějakým rámem.

Využití v praxi: Pásová vozidla (bagry, tanky apod.), sněžnice, lyže.

Využití v hodině: Video lze zařadit do výuky při probírání tlaku a tlakové síly, zejména pak pro lepší pochopení závislosti tlaku na velikosti působící síly a obsahu plochy, na niž je síla vyvíjena. Experiment je vhodný jak pro žáky základních, tak i středních škol.

Polystyrenová koule v akci: tlak vzduchu a Bernoulliho rovnice

Adresa: <https://www.youtube.com/watch?v=bVrBdYD0ZYM>

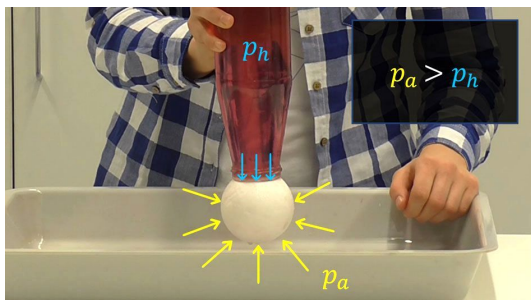
Experiment se zabývá demonstrací tlaku vzduchu. Místo obvyklé čtvrtky papíru byl použit polystyrenový balónek (obr. 2). Na obrázku jsou současně zobrazeny působící hydrostatický tlak a atmosférický tlak.

Druhá část experimentu je zaměřená na Bernoulliho rovnici, kterou lze demonstrovat za pomoci polystyrenové koule a fénu na vlasy.

Problémy s realizací: Pouštění koule je třeba nacvičit, aby nedošlo k jejímu předčasnému odtržení od hrdla lahve. Celý experiment je vhodné provádět ve fotomisce, která zabrání případnému rozlití vody. V případě druhé části je nutné použít fén s dostatečným výkonem proudu vzduchu.

Využití v praxi: Tlakové lahve, meteorologie a předpověď počasí, pití brčkem, vysavače a kompresory.

Využití v hodině: První část experimentu s lahví je vhodná pro žáky základních i střední škol. Provedení lze zařadit na začátek výuky, vysvětlení mohou zkusit formulovat sami žáci po probrání tématu hydrostatického a atmosférického tlaku. Druhá část experimentu je určena pro žáky středních škol, kteří již byli seznámeni se zněním a důsledky Bernoulliovy rovnice.



Obr. 2 Demonstrace účinků atmosférického tlaku

Co dokáže třecí síla

Adresa: <https://www.youtube.com/watch?v=e2Gnh3mrHLk>

V tomto experimentu demonstrujeme neočekávané velikosti třecích sil. K provedení potřebujeme dvě knížky, které list po listu dáme vzájemně do sebe. K odtržení obou knížek nestačí ani několik žáků táhnoucích za knížky z opačných stran. V druhé části experimentu demonstrujeme účinky třecích sil mezi tužkou a zrnky rýže v lahvi (obr. 3).



Obr. 3 Třecí síly mezi tužkou a zrnky rýže ve sklenici

Problémy s realizací: V případě odtržení knih je nutné dbát na bezpečnost žáků, aby nedošlo k jejich zranění. V druhém experimentu je potřeba v jedné lahvi rýži pořádně upěchovat, aby třecí síly byly co největší.

Využití v praxi: Pohodlná chůze, sypaní náledí štěrkem nebo pískem, vzorované podrážky bot a zimní pneumatiky, brzdové systémy, kuličková ložiska, tření ve sportu (horolezectví, vzpírání, lyžování, hokej, curling).

Využití v hodině: Experiment s knížkami může být příjemným zpestřením hodin fyziky, pokud žáky přímo zapojíme. Posléze se nabízí možnost krátké diskuze vedené učitelem o příčině nezdaru při oddělování knih. Vysvětlení lze podat právě formou videa. Pokus s rýží a tužkami může realizovat přímo učitel. Video je vhodné jak pro žáky základních, tak i středních škol.

Těžiště a stabilita tuhého tělesa

Adresa: https://www.youtube.com/watch?v=C5rB0_eMhQQ

K provedení experimentu budeme potřebovat vidličku, lžíci, párátka, zápalky a sklenici. Po uspořádání experimentu podle obr. 4 zapálíme párátka z vnitřní strany. Po dohoření párátka k okraji sklenice nedojde k porušení rovnováhy, protože těžiště soustavy se nachází stále na hraně sklenice. V druhé části experimentu naplníme plechovku od limonády malým množstvím vody tak, aby po jejím naklonění zůstala v labilní poloze.



Obr. 4 Soustava ve stabilní poloze

Problémy s realizací: Je nutné nacvičit vyvážení soustavy lžíce-vidlička na sklenici. Podobně je třeba natrénovat i postavení plechovky na hranu.

Využití v praxi: Tankery a trajekty, závodní automobily, letadla, stabilita lidského těla a jeho těžiště, provazochodci a akrobaté, stavebnictví.

Využití v hodině: Vzhledem k větší celkové délce videa je ve výuce vhodné použít pouze vybranou část. Experiment s plechovkou může být zajímavou problémovou úlohou, kdy žáci mají k dispozici plechovku a vodu. Na základě nabytých znalostí o těžišti a stabilitě těles z videa mají do plechovky nalít vhodné množství vody tak, aby ji vyvážili v labilní poloze.

Vodní raketa – zákon akce a reakce

Adresa: <https://www.youtube.com/watch?v=DdfIN5zcDeE&t=51s>

Video je v podstatě podrobným návodem, jak vyrobit jednoduchou vodní raketu z plastové lahve, pevných kartónových desek, korku a dalších běžně dostupných pomůcek. K odpálení rakety využíváme přetlaku v lahvi vytvořeného pomocí nožní pumpy. Tímto experimentem demonstrujeme platnost zákona akce a reakce.



Obr. 5 Vypouštění vodní rakety

Problémy s realizací: Při vyřezávání křídel rakety a jejich lepení je nutné dbát na bezpečnost žáků, aby nedošlo k jejich zranění. Raketu lze vypouštět jedinečně v exteriéru, např. na školním hřišti. Pokud byl korek nevhodně použit (špatně těsní apod.), mohou nastat komplikace a raketa se předčasně uvolní nebo naopak vůbec nevzlétne.

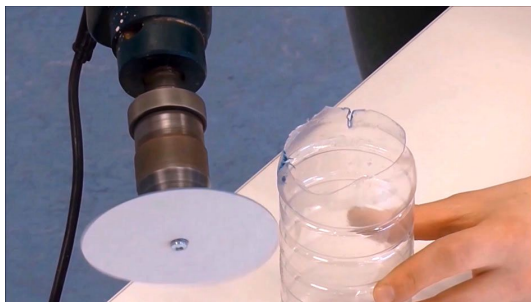
Využití v praxi: Reaktivní motory (proudový a raketový), zpětný ráz pušky.

Využití v hodině: Video lze zařadit do výuky při probírání Newtonových pohybových zákonů. Cílovou skupinou jsou žáci základních i středních škol. Samotná konstrukce vodní rakety může být zajímavou náplní projektových dní s mezioborovým přesahem: spojení fyziky, výtvarné výchovy (vytvoření vlastního designu rakety) a informatiky (natáčení raket a střih videa).

Jak řezat papírem – energie rotačního pohybu

Adresa: https://www.youtube.com/watch?v=wX_SDMw7b70&t=9s

Experiment demonstruje, jak velká může být energie rotačního pohybu. K jeho provedení potřebujeme vrtačku, do níž pomocí šroubu upevníme papírový kotouč (obr. 6). Po zapnutí vrtačky lze rychle se otáčejícím kotoučem řezat do kartónu či plastu. Ve videu je dále vysvětleno, na jakých veličinách kinetická energie rotačního pohybu závisí a jak jí lze vypočítat.



Obr. 6 Řezání papírovým kotoučem upevněným ve vrtačce do plastu

Problémy s realizací: Papírové kotouče se při řezání rychle opotřebovávají, proto je vhodné si jich před realizací experimentu připravit více. Při manipulaci s vrtačkou doporučujeme používat ochranné brýle. Pro větší bezpečnost lze řezaný předmět upevnit např. do svěráku, aby při jeho přidržování rukou nedošlo ke zranění.

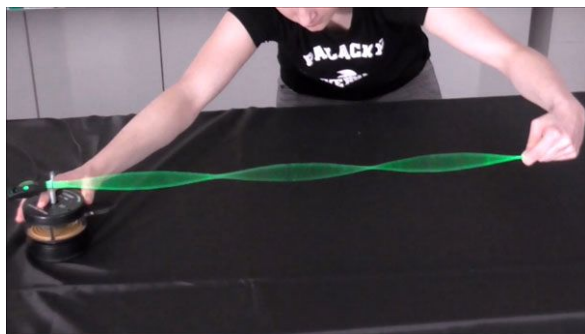
Využití v praxi: Kotoučová pila na dřevo, uhlová bruska, mixéry a šlehače.

Využití v hodině: Krátké a na poznatky docela nenáročné video může být zajímavým motivačním prvkem na začátku vyučování před probíráním momentu setrvačnosti a energie rotačního pohybu. Je vhodné pro žáky středních škol.

Stojaté vlnění a Chladního obrazce

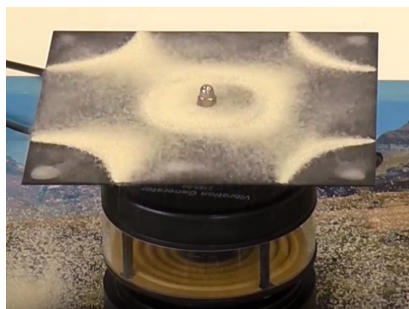
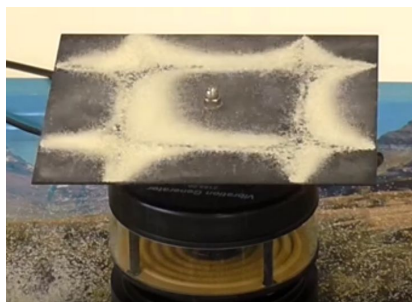
Adresa: <https://www.youtube.com/watch?v=VoYPSqZ0c-Q&t=9s>

V první části videa vytvoříme stojaté vlnění na vlákně. Vibrační reproduktor, na němž je vlákno uchyceno, připojíme přes zesilovač k notebooku jakožto zdroji sinusového signálu. Pro demonstraci volíme frekvenci okolo 100 Hz. Druhý konec vlákna přidržujeme rukou. Experiment realizujeme i netradičně pomocí svítícího vlákna (obr. 7).



Obr. 7 Stojaté vlnění na svítícím vlákně

V druhé části videa máme stejnou pracovní sestavu s tím rozdílem, že místo vlákna na vibrační reproduktor umístíme tenkou kovovou desku, kterou jemně posypeme krupicí. Volíme frekvence v rozsahu 400–1000 Hz. Na kovové desce lze posléze pozorovat Chladniho obrazce různých tvarů (obr. 8).



Obr. 8 Chladniho obrazce při frekvencích 440 Hz a 800 Hz

Problémy s realizací: Při práci se svítícím vláknem je důležité natrénovat jeho uchopení tak, aby vznikaly stojaté vlny a nedocházelo k uvolňování konce uchyceného na reproduktoru. V případě Chladniho obrazců je nutné mít k dispozici skutečně hladkou neporušenou kovovou desku.

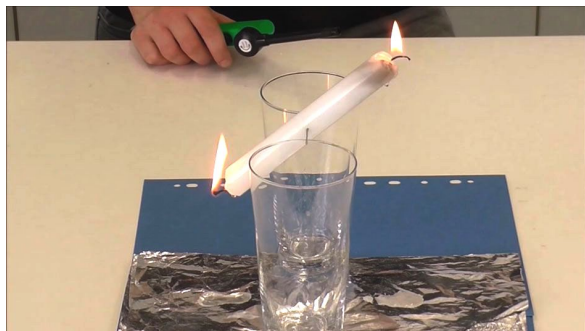
Využití v praxi: Dechové a strunné hudební nástroje, chvění hlasivek, vibrometrie.

Využití v hodině: Video lze zařadit na začátek výuky před probíráním tématu stojaté vlnění a chvění. Je určeno pro žáky středních škol.

Svíčková houpačka – princip páky trochu jinak

Adresa: https://www.youtube.com/watch?v=PT_J0aXUDEI&t=10s

Experiment neobvyklým způsobem demonstruje princip páky pomocí svíčky propíchnuté jehlou, která je položena na okraje sklenic a posléze zapálena (obr. 9). Dochází ke kmitavému pohybu svíčky, který vysvětluje periodickou změnu směru výsledného momentu sil.



Obr. 9 Kmitající zapálená svíčka

Problémy s realizací: Propíchnutí svíčky jehlou je u některých druhů svíček docela náročné. Nahřívání jehly, případně i samotné svíčky je potřeba několikrát zopakovat. Při velké frekvenci kmitů svíčky může dojít k jejímu pádu na zem, proto je vhodné pod sklenice umístit nehořlavý materiál (např. alobal).

Využití v praxi: Houpačka, rovnoramenné váhy, nůžky, kleště.

Využití v hodině: Videoexperiment se svým náročnějším vysvětlením je vhodný spíše pro žáky středních škol v rámci probírání momentu síly a momentové věty. Lze jej však použít i na základní škole s tím, že by video mělo sloužit spíše jako inspirace pro učitele, který provede pokus před třídou a vysvětlí jej jednodušším způsobem pomocí měnicích se tíhovými sil působících na konce svíčky.

Odstředivá síla s vrtačkou

Adresa: <https://www.youtube.com/watch?v=Z-XnVcX0z6g&t=148s>

Experiment demonstruje účinky setrvačné odstředivé síly. Pro jeho provedení potřebujeme vrtačku, plastovou nádobu s upevněným šroubem v jejím dně a nějaké lehké drobné předměty (brčka, balónky, kuličky z alobalu

apod.). Šroub s nádobou uchytkáme do vrtačky a do nádoby klademe předměty. Po zapnutí vrtačky převrátíme nádobu dnem vzhůru. Pozorujeme, že předměty stále setrvávají v nádobě (obr. 10). To vysvětlíme působením setrvačné odstředivé síly a třecí síly.



Obr. 10 Nádobu s míčky převrácená dnem vzhůru

Problémy s realizací: Převrácení vrtačky s nádobou, vyladění a udržování stále frekvence otáčení je nutné nacvičit. V případě náhlé změny frekvence mohou předměty z nádoby vypadnout a zasáhnout široké okolí.

Využití v praxi: Odstředivka, pračka, centrifuga pro výcvik kosmonautů.

Využití v hodině: Video mimo provedení experimentu zahrnuje i teorii týkající se Newtonových pohybových zákonů, inerciálních a neinerciálních vztažných soustav a setrvačných sil. Je tedy vhodné spíše pro žáky středních škol. Video lze zařadit do výuky jako netradiční formu opakování s praktickou ukázkou.

Závěr

V této práci jsme představili devět motivačních videoexperimentů z oblasti mechaniky a akustiky. Popsali jsme problémy, na které jsme v průběhu realizace narazili a uvedli jejich řešení. Dále jsme se zabývali praktickým využitím jednotlivých jevů v běžném životě. Některé experimenty byly již otestovány při výuce fyziky na Gymnáziu, SOŠ a VOŠ v Novém Bydžově, další ověření motivačních účinků na žáky je v přípravě. Závěrem lze konstatovat, že motivační experimenty jsou vhodným nástrojem pro posílení zájmu žáků o fyziku, umožňují vyučujícímu kreativně zapojit žáky do vzdělávacího procesu skrze jejich vlastní činnost a v neposlední řadě jsou i zajímavým námětem prací SOČ.

Literatura

- [1] *Trna, J.*: Jak motivovat žáky ve fyzice se zaměřením na nadané. Paido, Brno, 2012 [on-line], dostupné z: [/https://www.researchgate.net/profile/Josef_Trna/publication/306100549](https://www.researchgate.net/profile/Josef_Trna/publication/306100549)
- [2] *Hromádka, Z.*: Zábava při vyučování fyziky. Metodický portál RVP, 2018, [on-line], dostupné z: <https://clanky.rvp.cz/clanek/r/ZF/21792/ZABAVA-PRI-VYUCOVANI-FYZIKY.html/>
- [3] *Benešová, L.*: Komiks jako motivační prvek ve výuce fyziky. Diplomová práce, Fakulta aplikovaných věd, Západočeská univerzita, Plzeň, 2013.
- [4] *Marková, I.*: Astronomie jako motivační prvek ve výuce fyziky. 2. Československá konference o vzdělávání v astronomii, Hvězdárna Valašské Meziříčí, Valašské Meziříčí, 2010, [on-line], dostupné z: <https://docplayer.cz/3312823-Astronomie-jako-motivacni-prvek-ve-vyuce-fyziky.html>
- [5] *Klopper, E. at al.*: Using the technology of today, in the classroom today. MIT, Massachusetts, 2009, [on-line], dostupné z: https://education.mit.edu/wp-content/uploads/2018/10/GamesSimsSocNets_EdArcade.pdf
- [6] *Burda, M.*: Motivační prvky ve výuce fyziky. Seminář na Oddělení fyzikálního vzdělávání Ústavu teoretické fyziky a astrofyziky PŘF MU v Brně, 2008, [on-line], dostupné z: http://edu.physics.muni.cz/documents/official/prezentace_burda.ppt
- [7] <https://www.ecorinth.com/>

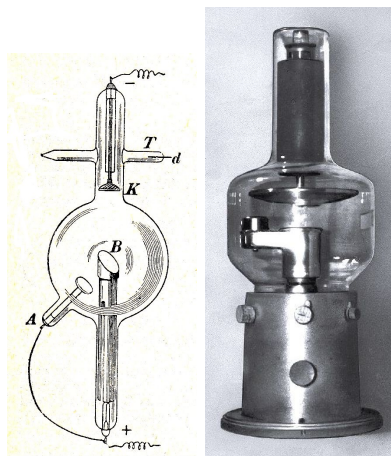
Rentgenové záření ve škole i mimo školu 1

MICHAL KLÁTIL – DANIEL JEZBERA

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

V roce 2020 to bude 125 let, co německý fyzik *Wilhelm Conrad Röntgen* při studiu výbojů v plynech objevil *paprsky X*, v dnešní terminologii rentgenové záření, a v roce 1901 mu byla za tento unikátní objev udělena v historii první Nobelova cena za fyziku. I když si rentgenové záření

hledalo svoje praktické uplatnění postupně, již v osnovách fyziky vyššího gymnázia z roku 1908 se poprvé objevuje heslo *Röntgenovy paprsky* a učivo o *Röntgenově lampě*. V té době byly tyto poznatky pochopitelně součástí tématu Výboje v plynech, kam byla zařazena např. také *elektronová lampa* – trioda. Základem učiva byl výklad funkce klasické rentgenky s hliníkovou studenou katodou a měděnou antikatodou povlečenou vrstvou platiniridia nebo wolframu. Na obr. 1a je vyobrazení rentgenky v učebnici [1], jejíž první vydání vyšlo v roce 1936 a poslední, 7. vydání, v němž je rentgenovému záření věnována přibližně 1 tisková strana, bylo vydáno ještě v roce 1949 jako učebnice pro čtyřleté gymnázium. Pro srovnání je na obr. 1b snímek rentgenky s žhavenou katodou a rotující anodou (antikatodou) ze současné učebnice [2].



Obr. 1 Rentgenky v učebnicích včera a dnes

Další vývoj učiva znamenal přesun tématu Rentgenové záření z učiva elektřiny do optiky, do tematického celku Elektromagnetické záření. To můžeme zaznamenat od roku 1955 v učebnici pro 11. ročník jedenáctileté střední školy [3] a prakticky ve všech dalších souborech středoškolských učebnic až do současnosti. Nahlédneme-li však do nejnovější verze Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázia (RVP G), je jako očekávaný výstup sice uvedeno *elektromagnetické záření a jeho spektrum*, samotné rentgenové záření však není v RVP G vůbec zmíněno. Tím se RVP G liší od RVP pro SOŠ, kde je rentgenové záření přímo zahrnuto do kurikulárního rámce. Budeme-li předpokládat výuku fyziky na střední škole po celé

4 roky, žáci by se o rentgenovém záření mohli dovědět v posledním ročníku před teorií relativity a atomovou fyzikou. Hodinové dotace fyziky na různých středních školách se zmenšují a tak je i možné, že např. na škole, kde se fyzika vyučuje pouze v jednom ročníku, se o tomto záření žáci nemusejí dovědět vůbec.

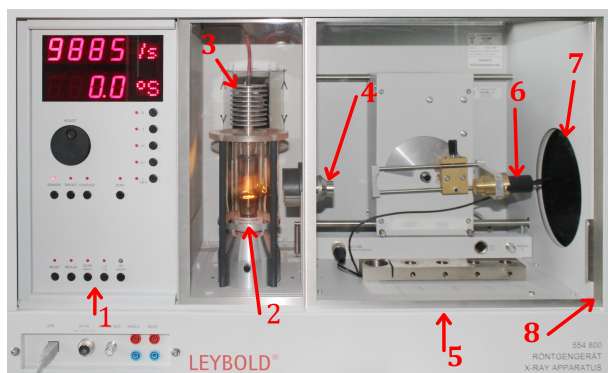
Rozhodující pro tvorbu Školního vzdělávacího programu učitelem je tedy spíše rozsah a pojetí výkladu učiva v učebnici, kterou bude učitel ve výuce používat. Ze současných učebnic je učivo o rentgenovém záření v největším rozsahu zpracováno v 3. přepracovaném vydání učebnice Fyzika pro gymnázia. Optika z roku 2002 [2]. V této učebnici je informacím o rentgenovém záření věnováno celých 9 stran. Obsahem učiva jsou Röntgenovy experimenty a objev záření, konstrukce prvního rentgenu a vysvětlení Laueho experimentu včetně schématu a výsledného vzniklého snímku. Uveden je zde i výčet vlastností záření a rozlišení pojmů brzdného a charakteristického záření. Zbytek učebnice je věnován aplikacím. Podrobně je rozebrána počítačová tomografie, a to včetně vzniklých snímků. Další podrobně popsanou aplikací je rentgenová strukturní analýza, v rámci níž je vysvětlena i Braggova difrakce a následné odvození Braggovy rovnice. V závěru jsou zmíněny i moderní aplikace v astronomii, defektoskopii a archeologii. Vzhledem k požadavkům RVP G však byl rozsah učiva v 5. vydání této učebnice z roku 2015 zkrácen přibližně na polovinu.

Uvedený rozsah učiva o rentgenovém záření neodpovídá jeho současnému uplatnění v mnoha přírodovědných oborech, jako jsou např. astronomie, strukturní analýza, defektoskopie, lékařství, tomografie, archeologie, krystalografie, kriminalistika a mnohé další. O významu nových poznatků z této problematiky svědčí i fakt, že z celkového počtu 110 udělených Nobelových cen za fyziku jich bylo 7 uděleno přímo za výzkum v oblasti rentgenového záření. K udělení dalších desítek Nobelových cen pomohly výzkumy rentgenového záření v oblasti chemie a medicíny [4].

Cenným prostředkem pro pochopení podstaty, vlastností a praktického využití rentgenového záření jsou experimenty. Jejich realizace samozřejmě dnes není možná pomocí klasické rentgenky a Ruhmkorfova induktoru jako zdroje vysokého napětí. K dispozici jsou moderní rentgenové aparatury, které jsou dostupné i pro experimentování ve školách. Ve dvou příspěvcích uvedeme experimenty s aparaturou LD DIDACTIC od firmy Leybold. V prvním příspěvku se budeme zabývat ověřením vlastností rentgenového záření a tématem druhého příspěvku budou principy rentgenové strukturní analýzy.

Rentgenová aparatura LD DIDACTIC

Rentgenová komora (obr. 2), se kterou jsou prováděny experimenty popsané v příspěvku, je navržena pro bezpečné předvádění významných vlastností rentgenového záření. I díky hmotnosti komory, která činí 41 kg, jde o poměrně stabilní zařízení. Rentgenka podle výrobce generuje ionizující záření, které uvnitř komory může překračovat absorbuující dávku 10 Sv/h. Taková dávka by i po krátkém expozičním čase mohla způsobit nevratné poškození tkáně, ba dokonce úmrtí. Proto je u samotné konstrukce kladen velký důraz na bezpečnost. Přesto však vždy trochu záření pronikne do okolí. Výrobce uvádí, že ve vzdálenosti 10 cm od rentgenky jde o dávku menší než 1 $\mu\text{Sv/h}$.



Obr. 2 Rentgenová aparatura LD DIDACTIC: 1 – ovládací panel s obrazovkou, 2 – rentgenka, 3 – chladičský systém, 4 – kolimátor, 5 – prostor pro umístění experimentu, 6 – GM detektor, 7 – fluorescenční obrazovka, 8 – bezpečnostní dvířka z olovnatého skla

Rentgenka s měděnou anodou, která je součástí aparatury, je chlazená vzduchem. Anodové napětí rentgenky lze regulovat v rozmezí 0 až 35 kV a proud v rozmezí 0 až 1 mA. Fluorescenční stínítko má průměr 15 cm. Komora je dále vybavena otočným goniometrem sloužící k uchycení krystalu a Geigerovy–Müllerovy (GM) trubice. Na čtyřmístném dvouřádkovém displeji lze zobrazit hodnotu anodového proudu, napětí, úhel otočení otočného terčíku a GM detektoru, rozsah otáčení, krok otáčení, atd. Otočení terčíku je možné v rozsahu od 0° do 360°. Otočení GM detektoru pak od 10° do 170°. Nejmenší krok otočení lze nastavit na 0,1°. Uvnitř komory jsou vývody kabelů pro GM detektor, 2 sloty stíněného koaxiálního ka-

belu a kanálek pro případné vložení vlastních vodičů. Pro lepší ovládání experimentů a záznam dat lze všechny akce řídit přes počítač v programu výrobce „X-RAY Apparatus“.

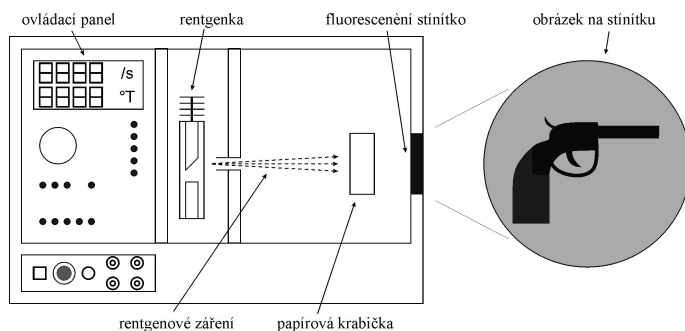
K rentgenové komoře jsou dostupné krystaly LiF a NaCl a již zmiňovaný Geigerův–Müllerův detektor. Do budoucna lze však pořídit více druhů krystalů.

Krystal LiF má rozměry $25\text{ mm} \times 25\text{ mm} \times 4\text{ mm}$. Jeho krystalická struktura je kubická plošně centrovaná a udaná mezirovinná vzdálenost činí 201 pm. U krystalu NaCl jsou parametry stejné, pouze mezirovinná vzdálenost je 282 pm. Tyto vlastnosti krystalů se pak uplatní při experimentech popsaných v následujícím článku Rentgenové záření ve škole i mimo školu 2.

Geigerova–Müllerova trubice je naplněna směsí plynů neonu a argonu s příměsí halogenidu. Pracovní napětí, na které je detektor připojen, je 450 V. Odpor připojeného rezistoru je $10\ \Omega$. Mrtvá doba, po kterou detektor není schopen správně zaznamenávat další kvanta, činí přibližně 90 ms.

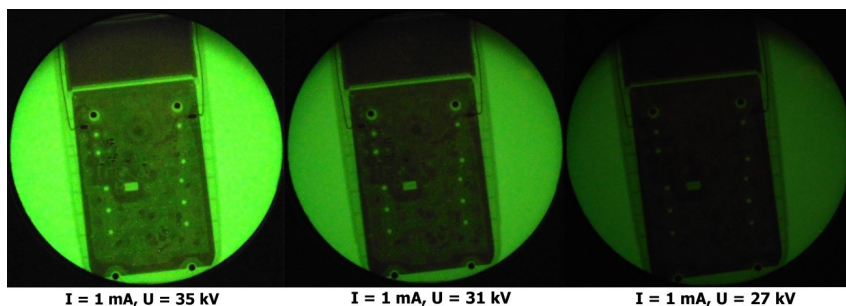
Experimenty s rentgenovou aparaturou a jejich výsledky

S rentgenovou komorou lze provést hned několik zajímavých experimentů ověřujících fyzikální vlastnosti rentgenového záření. Prvním, pro středoškoláky nejlépe představitelným experimentem, je detekce rozložení intenzity rentgenového záření po průchodu nějakým předmětem pomocí luminiscenčního stínítka. Paprsky rentgenového záření dopadající na stínítko excitují atomy luminoforu. Následným návratem atomu do základního stavu dojde k vyzáření fotonu viditelného záření. Uspořádání tohoto experimentu je zobrazeno na obr. 3.



Obr. 3 Uspořádání prvního experimentu

Konkrétně je zde možné pozorovat souvislost mezi hodnotou emisního proudu a světlostí luminiscenčního stínítka, stejně jako souvislost napětí a kontrastu stínítka. Při tomto experimentu je třeba zajistit dostatečnou tmou v místnosti z důvodu slabého kontrastu luminiscenčního stínítka. K tomuto účelu dobře poslouží např. deka, pod kterou lze vzniklé obrazy prosvícených předmětů fotografovat. Následující obrázek zobrazuje snímky vzniklé fotografováním stínítka při konstantním nastaveném proudu 1 mA a při proměnných hodnotách napětí. Analogický experiment lze provést i s konstantně nastavenou hodnotou napětí 35 kV a proměnnou hodnotou proudu.



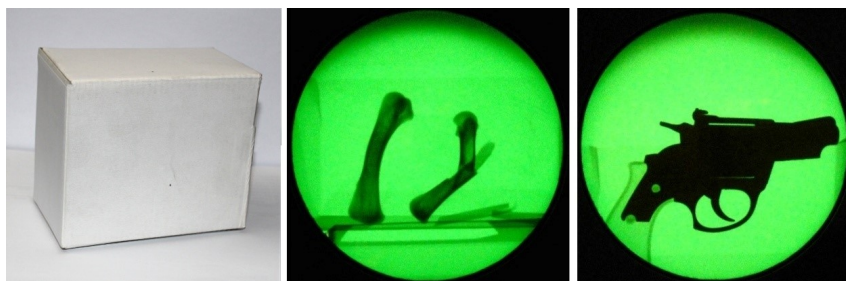
Obr. 4 Prozářený kalkulátor při konstantní hodnotě proudu

Z výsledků prvního experimentu lze pozorovat, že se vzrůstající hodnotou proudu, a tedy se vzrůstající intenzitou záření, světlost obrazovky roste. Se vzrůstajícím napětím při konstantním proudu (obr. 4) je vidět větší kontrast luminiscenčního stínítka, protože roste intenzita záření a paprsky rentgenového záření jsou pronikavější.

Z těchto experimentů si lze povšimnout, že různé materiály mají různou pohltivost záření. Přes kovové šroubky záření takřka neprošlo, kdežto přes plastové pouzdro prošla záření většina. Se vzrůstající intenzitou je lépe vidět i vnitřní struktura prosvěcované kalkulačky, a kdyby rentgenka nebyla omezena svým výkonem, lze předpokládat, že při vyšším napětí by byla struktura plošných spojů ještě zřetelnější.

Takto jednoduchý experiment poukazuje na důležitost významu rentgenového záření při testování vnitřní struktury materiálů a zařízení v technické praxi. Na významnou roli využití poukazuje tento experiment i v medicínské diagnostice a v bezpečnostních složkách na letištích a u celní správy. Na následujících snímcích (obr. 5) jsou zachyceny snímky prosvíc-

cené kuřecí kosti v papírové krabici (simulující lidské tělo) a do krabice ukryté dětské kapslové pistolky.

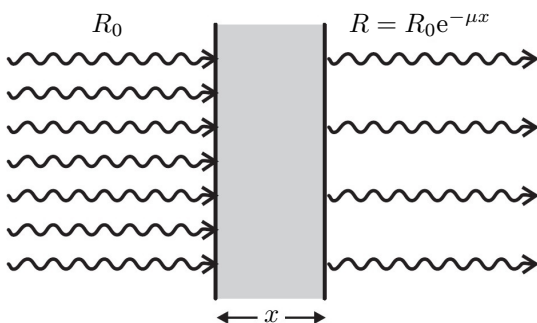


Obr. 5 Vlevo: prozařovaná krabička s ukrytými předměty; uprostřed: celá a zlomená kuřecí kost v papírové krabici; vpravo: model revolveru v papírové krabici

V rámci druhého experimentu se zaměříme na další důležitý jev u rentgenového záření, a sice na absorpci a zjišťování koeficientu útlumu. Rozdílné absorpce záření v závislosti na intenzitě záření, tloušťce a hustotě prozařovaného materiálu se využívá v celé řadě aplikací rentgenového záření, např. při rentgenové diagnostice, defektoskopii, archeologii, atd.

Mluvíme-li o absorpci, myslíme tím úbytek intenzity prošlého záření nějakou látkou. Známe-li intenzitu záření před průchodem látkou R_0 a po průchodu látkou R , můžeme dopočítat transmitanci (propustnost) materiálu T podle vztahu (1):

$$T = \frac{R}{R_0}. \quad (1)$$



Obr. 6 Schéma absorpce záření při průchodu látkou tloušťky x

Úpravou následujícího vztahu (2) vyjadřujícího intenzitu prošlého záření, která klesá exponenciálně s tloušťkou materiálu, pak pro propustnost získáváme vztah (3), nebo po zlogaritmování vztah (4):

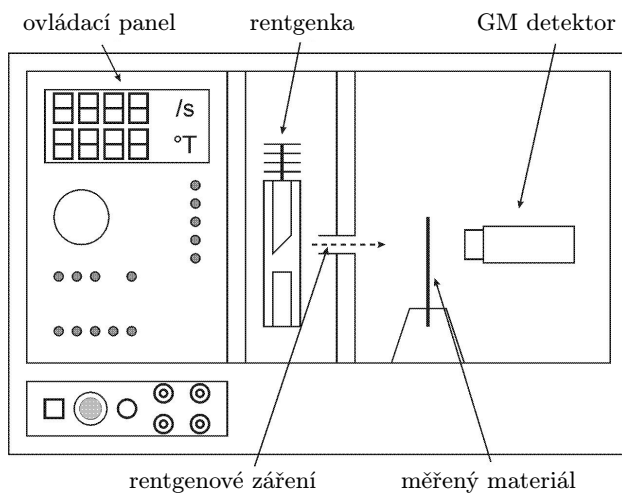
$$R = R_0 \cdot e^{-\mu x}, \quad (2)$$

$$T = e^{-\mu x}, \quad (3)$$

$$\ln T = -\mu x, \quad (4)$$

kde T je transmitance, μ lineární koeficient útlumu a x tloušťka prozařovaného materiálu. Hodnota koeficientu útlumu závisí na hustotě a atomovém čísle prozařovaného materiálu a stejně tak na energii dopadajícího záření. Poslední vztah (4) je znám též pod názvem Lambertův–Beerův zákon [6, 7].

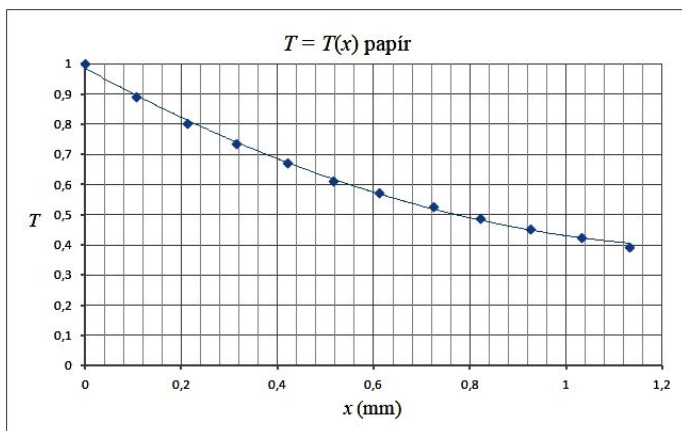
Cílem následujícího měření je nejen potvrdit Lambertův–Beerův zákon, ale i prokázat závislost koeficientu útlumu na atomovém čísle prosvěcovaného materiálu.



Obr. 7 Schéma provedení následujících experimentů

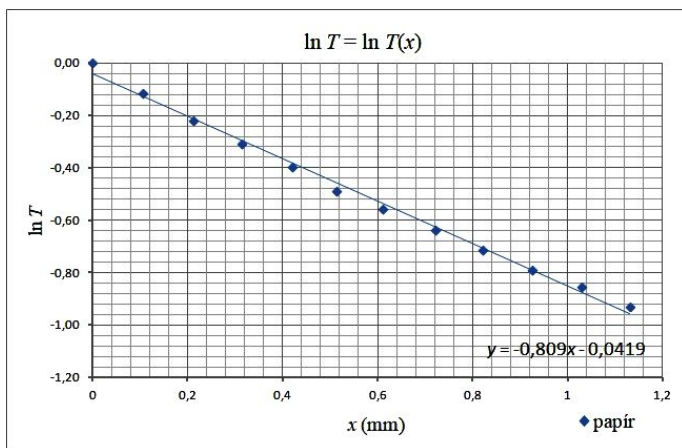
Všechna následující měření jsou provedená při nastavené hodnotě napětí rentgenky na 30 kV a při proudu 1 mA. Paprsky necháme procházet nejprve na volno, následně papírem, po dobu 120 s a výsledné intenzity záření zaznamenáme pomocí GM detektoru. Papír je zvolen díky jeho dobré dostupnosti v různých a pozvolna se zvětšujících tloušťkách.

Z naměřených hodnot vypočítáme podle vztahu (1) transmitanci, kterou vyneseme do grafu v závislosti na tloušťce prozařovaného materiálu (graf 1).



Graf 1 Exponenciální závislost transmitance na tloušťce papíru x

Že jde skutečně o exponenciální závislost podle rovnice (3), lze ověřit zlogaritmováním transmitance a vynesením získaných hodnot do grafu opět v závislosti na tloušťce materiálu. Tím bychom podle předpokladu rovnice (4) měli získat přímkou, což lze již vidět na následujícím grafu 2.



Graf 2 Lineární závislost $\ln T$ na tloušťce papíru x

Naměřená lineární závislost přirozeného logaritmu transmitance na tloušťce materiálu odpovídá očekávané závislosti podle rovnice (4). S vložení lineární spojnice trendu a zobrazením její rovnice lze z rovnice (4) dopočítat, že koeficient útlumu papíru $\mu = 9,2 \text{ cm}^{-1}$. Tímto měřením se tak podařilo experimentálně potvrdit platnost Lambertova–Beerova zákona.

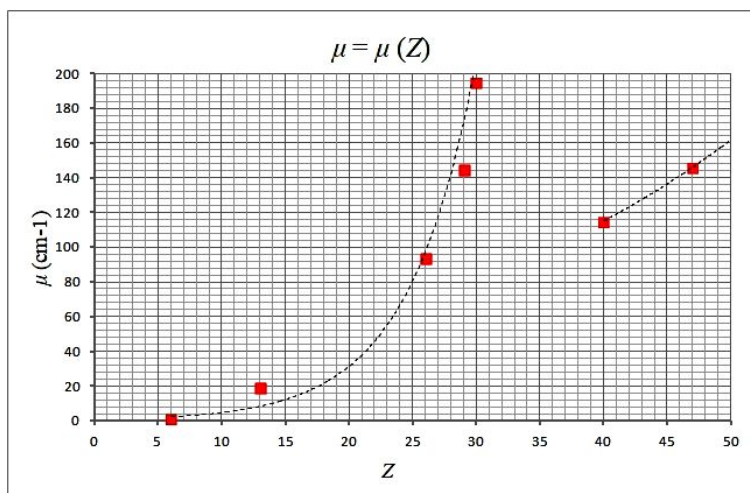
V úvodní části bylo řečeno, že hodnota koeficientu útlumu závisí nejen na energii dopadajícího záření, ale i na hustotě a atomovém čísle prozařovaného materiálu. Absorpce rentgenových paprsků je v podstatě způsobena excitací, nebo ionizací atomů, která uvolní elektron z vnitřní slupky elektronového obalu. V důsledku toho je absorpce silně závislá na excitační nebo vazební energii elektronů, a tedy i na atomovém čísle Z .

V následujícím měření se pokusíme potvrdit závislost koeficientu útlumu μ na atomovém čísle materiálu Z . Schéma měření odpovídá předchozímu experimentu, pouze místo přidávání vrstev papíru, jsou pečlivě proměřeny různé druhy materiálů.

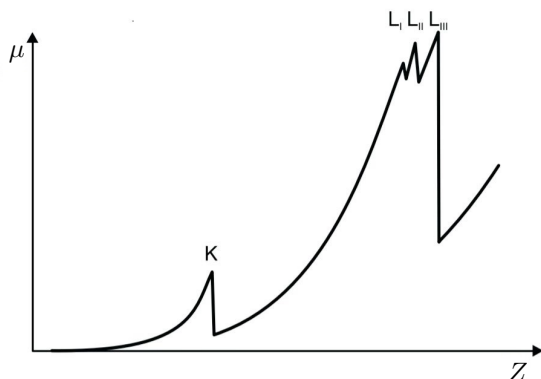
K experimentu se podařilo zajistit následující materiály: uhlík, hliník, železo, měď a zinek. Parametry nastavení rentgenky a doby měření jsou stejné jako v předchozím experimentu. Zprůměrovanou hodnotu intenzity prošlého záření zapíšeme do tabulky, ze které s využitím vzorců (1) a (4) dopočítáme transmitanci a koeficient útlumu jednotlivých prvků. Získané hodnoty vyneseme do grafu závislosti koeficientu útlumu na atomovém čísle. Pro prvky s vyššími atomovými čísly byla využita i měření intenzity prošlého záření za stejných podmínek určených výrobcem aparatury, a to pro materiály zirkonium a stříbro.

Z grafu 3 vidíme, že koeficient útlumu prudce roste se zvyšujícím se atomovým číslem, a to až do hodnoty $Z = 30$. Jelikož prvky mezi atomovým číslem $Z = 30$ a $Z = 40$ nebyly k měření dostupné, můžeme pouze předpokládat, že by tento nárůst pokračoval až do hodnoty $Z = 40$ [6]. Zde lze zaznamenat prudký pokles koeficientu útlumu. To je způsobeno tím, že některé doposud možné excitace nejsou pro prvky s větším atomovým číslem nadále možné, kvůli příliš vysoké vazební energii elektronů. Tento propad se nazývá absorpční hrana. Následně dochází opět k nárůstu koeficientu útlumu a vzniku dalších absorpčních hran (obr. 8). Nárůst koeficientu útlumu mezi absorpčními hranami je přibližně úměrný 4. mocnině atomového čísla.

Zeslabování rentgenového záření při průchodu hmotou má velmi širokou škálu využití. K nejznámějším aplikacím patří medicína, bezpečnostní rentgeny, analýza složení materiálu a další.



Graf 3 Graf závislosti koeficientu útlumu na atomovém čísle prozářeného materiálu



Obr. 8 Průběh závislosti koeficientu útlumu na atomovém čísle Z (upraveno z [6])

Závěr

Tyto experimenty, ověřují základní vlastnosti rentgenového záření. První prováděný experiment ověřuje schopnost fluorescence. Konkrétně lze zjišťovat souvislost emisního proudu a světlosti luminiscenčního stínítka, stejně

tak napětí a jeho kontrastu. Ve druhém měření se podařilo potvrdit Lambertův–Beerův zákon. Naměřená lineární závislost přirozeného logaritmu transmitance na tloušťce materiálu odpovídá očekávané závislosti. Ve třetím experimentu se ve shodě s teoretickými předpoklady podařilo proměřit závislost koeficientu útlumu na atomovém čísle prozařovaného materiálu.

Literatura

- [1] *Mašek, B., Wangler, A.*: Fysika pro vyšší třídy středních škol, díl II, 7. vydání. JČMF, Praha, 1936.
- [2] *Lepil, O.*: Fyzika pro gymnázia. Optika, 3. přepracované vydání. Prometheus, Praha, 2002.
- [3] *Fuka, J. a kol.*: Fysika pro jedenáctý ročník. SPN, Praha, 1955.
- [4] MLA style. *All Nobel Prizes in Physics*. In: Nobelprize.org [online]. Nobel Media AB 2019. [cit. 2019-04-08]. Dostupné z: <https://www.nobelprize.org/prizes/lists/all-nobel-prizes-in-physics>
- [5] *Beiser, A.*: Úvod do moderní fyziky. 2. vyd., Academia, Praha, 1978.
- [6] *LD DIDACTIC GMBH*: X-RAY Apparatus: Investigating the attenuation of X-rays as a function of the absorber material and absorber thickness: P6.3.2.1 [online]. Federal Republic of Germany [cit. 2018-11-19]. Dostupné z: <https://www.leybold-shop.com/vp6-3-2-1.html>
- [7] *Ullmann, V.*: Jaderná a radiační fyzika: Ionizující záření. [online]. Klinika nukleární medicíny FNŠP [cit. 2018-11-19]. Dostupné z: <http://astronuklfyzika.cz/JadRadFyzika6.htm>

Fuzzy logika

RADIM BĚLOHLÁVEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V článku se seznámíme s fuzzy logikou. K vytvoření fuzzy logiky vedly některé zásadní nedostatky klasické logiky, zejména její omezená schopnost pracovat s nepřesnými pojmy, tedy s pojmy, které člověk běžně používá. Fuzzy logika představuje moderní směr. Stala se důležitým pilířem umělé inteligence a nalezla uplatnění v mnoha výrobcích, které běžně používáme.

1. Vznik fuzzy logiky

Jen několikrát se v historii logiky stalo, že vznikla významná alternativa k hlavnímu proudu představovanému klasickou logikou. Jednou z takových alternativ je fuzzy logika. Vznikla zhruba před padesáti lety v pracích amerického inženýra a matematika Lotfiho Askera Zadeha (1921–2017). V roce 1965 zveřejnil časopis *Information and Control* jeho práci „Fuzzy sets“. Zadeh v této práci upozornil na to, že základní pojem klasické matematiky, pojem množiny, je v mnoha situacích nedostačující. Množiny reprezentují to, čemu běžně říkáme soubory nebo seskupení nějakých objektů. Seskupeným objektům se říká prvky dané množiny. Máme například množinu sudých čísel, jejímiž prvky jsou sudá čísla, nebo množinu států Spojených států amerických, která má padesát prvků. Charakteristickým rysem množin je, že libovolný prvek do dané množiny buď patří, nebo nepatří. To je v souladu se základním principem klasické logiky, podle kterého každé tvrzení, tedy i tvrzení „prvek patří do množiny“, je buď pravdivé, nebo nepravdivé. Zadeh upozornil na to, že seskupení, se kterými v běžném životě pracujeme, tento rys postrádají a jsou tedy zásadně jiná.

Tvoří například hodnoty (v torrech), odpovídající pojmu *normální krevní tlak* množinu?¹⁾ Do ní by jistě patřila hodnota 120 a naopak nepatřila

¹⁾Myslíme systolický tlak.

hodnota 60. Musely by ale existovat hraniční hodnoty $t_1 < t_2$ ostře oddělující hodnoty normálního krevního tlaku. Krevní tlak t by tedy byl normální, právě když by byl mezi t_1 a t_2 .²⁾ Pak by ale pro libovolně malou odchylku ε krevní tlak $t_1 - \varepsilon$ nebyl normální, zatímco tlak $t_1 + \varepsilon$ by normální byl. To je ale absurdní (představme si třeba $\varepsilon = 0,1$) – tak přece člověk pojem *normální krevní tlak* nechápe.



Obr. 1 Lotfi Zadeh v roce 2004.

Zadeh si všiml, že klasický pojem množina je v situacích podobných té výše popsané nedostatečný. Ukázal, že z hlediska aplikací je toto pozorování zcela zásadní, že tedy nejde o nějaký okrajový jev, o anomálii, která je zajímavá jen z teoretického hlediska. Výrazy jako „vysoká venkovní teplota“, „nízké otáčky motoru“, „nadváha“ a podobně – tvrdil Zadeh – jsou v našem každodenním uvažování a rozhodování všudypřítomné a nevyhnutelné. Abychom s nimi mohli pracovat, navrhl Zadeh nový pojem – pojem fuzzy množiny – který zmíněné nedostatky nemá. Základní myšlenka fuzzy logiky spočívá v tom, že příslušnost prvku k fuzzy množině je otázkou míry – nemá povahu buď-anebo rozhodování, a není tedy „černobílá“. Po padesáti letech lze konstatovat, že Zadehův nápad byl neobyčejně úspěšný. Jeho práce o fuzzy množinách z roku 1965 patří mezi nejcitovanější práce v historii matematiky, logiky a informatiky a vedla k rozvoji fuzzy logiky jako nové vědní oblasti. Ta má dnes nejen propracované teoretické základy, ale může se pochlubit i obrovským komerčním úspěchem. S trochou nadsázky lze říci, že fuzzy logika je všude kolem nás.

²⁾Pro naši úvahu je nepodstatné, zda to znamená $t_1 < t < t_2$, nebo $t_1 \leq t \leq t_2$.

2. Fuzzy množiny

Nevhodnost pojmu klasická množina, o které jsme hovořili výše, plyne z toho, že výroku „objekt x patří do množiny A “ je klasická matematika v souladu s principy klasické logiky ochotna přiznat pouze dvě možné pravdivostní hodnoty – *pravda* a *nepravda*, někdy označované 1 a 0. Fuzzy logika tento princip, zvaný *princip bivalence*, nepřijímá. Podle fuzzy logiky může být výrok pravdivý i jen do určité míry, tj. pravdivý v určitém stupni, který je mezi 0 a 1, např. 0,8. Stupně pravdivosti představují zobecněné pravdivostní hodnoty, přičemž klasické pravdivostní hodnoty 0 a 1 jsou jejich hraničními případy. Tedy například zatímco výrok „120 torrů je normální krevní tlak“ má v souladu s předchozí úvahou pravdivostní hodnotu 1 a výrok „60 torrů je normální krevní tlak“ hodnotu 0, výroku „100 torrů je normální krevní tlak“ můžeme přiřadit pravdivostní hodnotu 0,5. Tím vyjádříme, že krevní tlak 100 torrů sice není úplně normální, ale do jisté míry ano.

Tak lze hovořit o fuzzy množině A hodnot normálního krevního tlaku. Klasickou množinu A lze chápat jako zobrazení

$$A: U \rightarrow \{0, 1\},$$

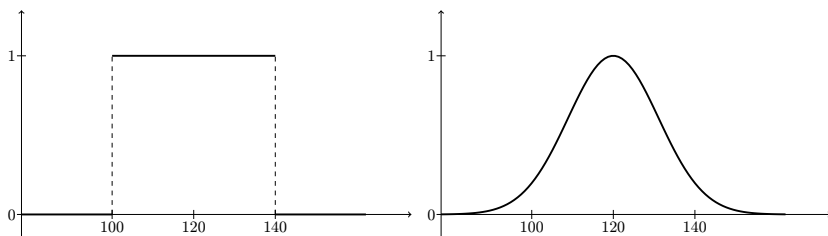
kteřé každému prvku u z daného univerza U uvažovaných prvků přiřadí 1 (tedy $A(u) = 1$), pokud u patří do A , a které mu přiřadí 0, pokud u do A nepatří. Fuzzy množina v univerzu U je pak zobrazení

$$A: U \rightarrow [0, 1], \quad (1)$$

kteřé každému prvku u z U přiřadí stupeň $A(u)$ náležení prvku u do fuzzy množiny A . Čím větší je $A(u)$, tím více prvek u do A patří. Obr. 2 ukazuje klasickou množinu a fuzzy množinu, které popisují pojem *normální krevní tlak*.

Fuzzy množiny, na rozdíl od klasických, nejsou černobílé, nemají ostré hranice – mezi možnostmi „být prvkem“ (1) a „nebýt prvkem“ (0) je celá škála mezilehlých možností, totiž „být prvkem v jistém stupni“ (např. ve stupni 0,8). Tyto stupně nemusí tvořit celý interval $[0, 1]$, jako tomu bylo výše, viz (1). Můžeme uvažovat i konečnou množinu L pravdivostních hodnot, například $L = \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}$. V tomto případě bychom tyto stupně náležení do fuzzy množiny chápali například jako „vůbec ne“, „jen trochu“, „částečně“, „do značné míry“, a „zcela“ a fuzzy množina by byla zobrazením

$$A: U \rightarrow \{0, 1/4, 1/2, 3/4, 1\}. \quad (2)$$

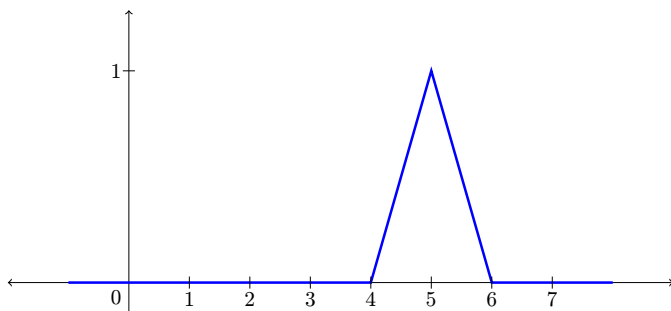


Obr. 2 Normální krevní tlak jako klasická množina (vlevo) a jako fuzzy množina (vpravo)

Příklad 1. Necht $U = \mathbb{R}$ (reálná čísla), $L = [0, 1]$. Uvažujme fuzzy množinu $A: U \rightarrow L$ definovanou takto:

$$A(u) = \begin{cases} 0 & \text{pro } u < 4, \\ x - 4 & \text{pro } 4 \leq u \leq 5, \\ 6 - x & \text{pro } 5 < u \leq 6, \\ 0 & \text{pro } u > 6. \end{cases}$$

Tato fuzzy množina reprezentuje možný význam výrazu „přibližně 5“ a je znázorněna na obr. 3.



Obr. 3 Fuzzy množina reprezentující výraz „přibližně 5“

Příklad 2. Výraz „dobré (formální) vzdělání“ můžeme reprezentovat fuzzy množinou $A: U \rightarrow \{0, 0,1, \dots, 0,9, 1\}$ v univerzu

$$U = \{\text{žádné, základní, střední, Bc., Ing., Mgr., Ph. D.}\},$$

která je definovaná takto:

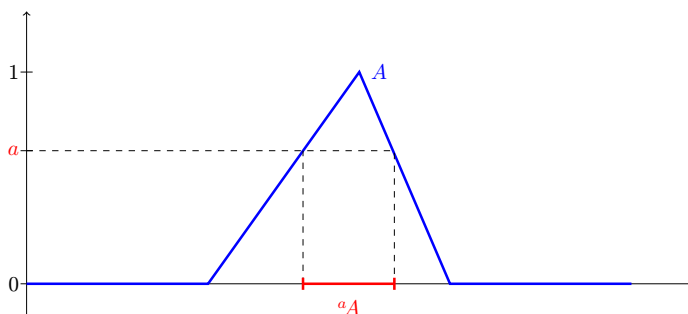
$$A = \{^0/\text{žádné}, ^{0,1}/\text{základní}, ^{0,5}/\text{střední}, ^{0,8}/\text{Bc.}, ^{0,9}/\text{Ing.}, ^{0,9}/\text{Mgr.}, ^1/\text{Ph. D.}\}.$$

Tento zápis znamená, že $A(\text{Bc.}) = 0,8$ atp.

Důležitým pojmem, který propojuje klasické a fuzzy množiny, je pojem řez. Pokud a je pravdivostní hodnota, pak a -řez fuzzy množiny A v univerzu U je klasická podmnožina aA množiny U definovaná předpisem

$${}^aA = \{u \in U \mid A(u) \geq a\}.$$

Řez aA tedy obsahuje ty prvky, které do A patří ve stupni a nebo vyšším. Pojem řezu ilustruje obr. 4.



Obr. 4 a -řez fuzzy množiny A

Příklad 3. Uvažujme fuzzy množinu

$$A = \{^{0,2}/u_1, ^{0,6}/u_2, ^{0,1}/u_3, ^{0,8}/u_4, ^1/u_5\}.$$

Její a -řezy pro $a = 0,1$, $a = 0,4$, $a = 0,5$ a $a = 1$ jsou

$$^{0,1}A = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\},$$

$$^{0,4}A = \{u_2, u_4, u_5\},$$

$$^{0,5}A = \{u_2, u_4, u_5\},$$

$$^1A = \{u_5\}.$$

Význam řezů spočívá v tom, že umožňují fuzzy množiny reprezentovat pomocí klasických množin. Pro danou fuzzy množinu $A: U \rightarrow L$ můžeme totiž uvažovat systém všech jejích a -řezů, tedy systém

$$\{{}^aA \mid a \in L\}.$$

To je systém klasických množin. Z tohoto systému lze v případě potřeby původní fuzzy množinu sestavit. To si ukážeme za zjednodušujícího předpokladu, že množina L pravdivostních hodnot je konečná. Jak se snadno přesvědčíme, platí pak

$$A(u) = \max\{a \in L \mid u \in {}^a A\}.$$

Tedy stupeň $A(u)$, ve kterém u patří do A , se rovná největšímu stupni a , který má tu vlastnost, že příslušný řez ${}^a A$ obsahuje prvek u .

3. Fuzzy logika jako logika

Odmítnutí principu bivalence, tj. připuštění možnosti, že existují výroky, které nemusí být (úplně) pravdivé, ani (úplně) nepravdivé, je radikální krok. Tímto krokem totiž opouštíme svět klasické logiky důvěrně známý od doby Aristotela. Opouštíme tím také svět, ve kterém se od antiky rozvíjela veškerá matematika, přírodovědné i humanitní obory, i celá západní filozofie. Nový svět, do kterého vstupujeme, je světem jiné logiky. Zda je tato logika – tedy fuzzy logika – životaschopnou, plnohodnotnou alternativou logiky klasické a zda se může stát, podobně jako se stala logika klasická, základem matematiky – tentokrát však matematiky jiné – a metodickým základem dalších oborů, je zásadní, mnohovrstevná a značně složitá otázka. V této kapitole se pokusíme ukázat některé z principů fuzzy logiky jako formální logiky.

Věnujme se nejprve otázce logických spojek ve fuzzy logice. Jak víme, v klasické logice je logická spojka popsána tabulkou, která popisuje její význam (její tzv. pravdivostní funkci). Například tabulka konjunkce vypadá takto:

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

Stejně jako v klasické logice musí i ve fuzzy logice konjunkce přiřazovat dvěma pravdivostním hodnotám, a a b , výslednou pravdivostní hodnotu $a \wedge b$,³⁾ a to tak, aby $a \wedge b$ byla pravdivostní hodnota konjunkce dvou tvrzení, z nichž jedno má pravdivostní hodnotu a a druhé b . Přirozenou

³⁾Správně bychom měli odlišovat symbol spojky, $\wedge$, od pravdivostní funkce, $\wedge^*$. Pro jednoduchost budeme obojí označovat stejným symbolem, $\wedge$.

možností ve fuzzy logice je definovat

$$a \wedge b = \min(a, b).$$

Pokud je tedy výrok „Je zima.“ pravdivý ve stupni 0,5 (tj. má pravdivostní hodnotu 0,5) a výrok „Je jasno.“ ve stupni 0,8, je výrok „Je zima a je jasno.“ pravdivý ve stupni 0,5, neboť $0,5 = \min(0,5, 0,8)$. Tato konjunkce se nazývá Gödelova, protože jako první použil minimum jako vícehodnotovou konjunci významný logik a brněnský rodák Kurt Gödel.

Existuje však i jiná možnost, která se ve fuzzy logice používá, tzv. Goguenova konjunkce, která je definována předpisem

$$a \wedge b = a \cdot b.$$

Pak by konjunkce výše zmíněných výroků byla pravdivá ve stupni 0,4, neboť $0,4 = 0,5 \cdot 0,8$. Třetí možností je pak tzv. Łukasiewiczova konjunkce, která je definovaná předpisem

$$a \wedge b = \max(0, a + b - 1).$$

Grafy těchto tří uvedených konjunkt vidíme na obr. 5.

Z těchto grafů je zřejmé, že všechny tyto konjunkce mají společné jisté vlastnosti. Všimněme si nejdříve, že všechny rozšiřují (zobecňují) klasickou konjunci, a to v tom smyslu, že jsou-li jejich argumenty a a b hodnoty 0 nebo 1, dávají stejný výsledek jako klasická konjunkce. Všechny také splňují následující podmínky:

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c, \quad (3)$$

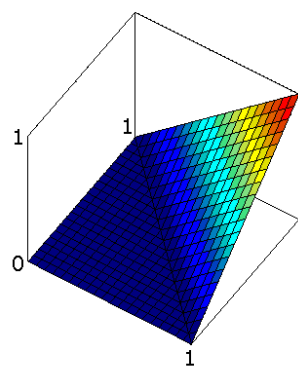
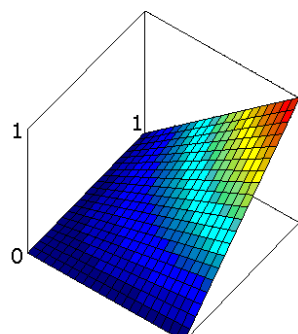
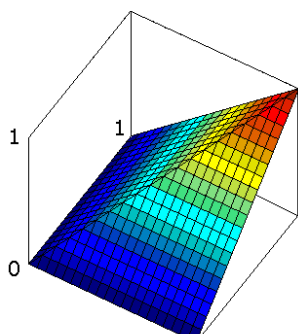
$$a \wedge b = b \wedge a, \quad (4)$$

$$\text{je-li } a \leq b \text{ pak } a \wedge c \leq b \wedge c, \quad (5)$$

$$a \wedge 1 = a. \quad (6)$$

To jsou základní vlastnosti, které konjunkce ve fuzzy logice musí splňovat. Uvedené tři konjunkce jsme nevybrali náhodou. Omezíme-li se na konjunkce, které jsou navíc jako funkce spojitě,⁴⁾ pak lze ukázat, že každou konjunci lze jistou konstrukcí sestavit z Gödelovy, Goguenovy a Łukasiewiczovy konjunkt.

⁴⁾Pokud čtenář nezná pojem spojitosti funkce, může si představit, že graf takové funkce neobsahuje žádné skoky, tj. není nikde přerušovaný.



Obr. 5 Tři základní konjunkce ve fuzzy logice: nahoře Gödelova (minimum), uprostřed Goguenova (součin), dole Łukasiewiczova

Logické spojky jsou v klasické logice základem pro logické odvozování, pro operace s množinami i pro další konstrukce, které mají logickou povahu. Ve zbytku této kapitoly naznačíme, jak je tomu ve fuzzy logice.

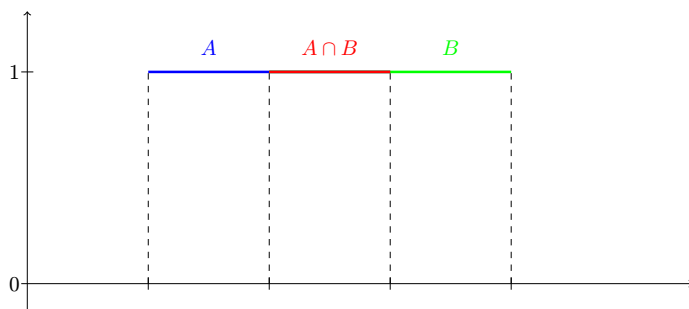
Uvažujme klasické množiny A a B . Jejich průnik, $A \cap B$, je definován předpisem

$$A \cap B = \{u \in U \mid u \in A \text{ a } u \in B\}.$$

Pro naše potřeby teď budeme tyto množiny chápat jako funkce příslušnosti $A: U \rightarrow \{0, 1\}$ a $B: U \rightarrow \{0, 1\}$ v daném univerzu U , tj. $A(u) = 1$ znamená, že u patří do A . Snadno vidíme, že průnik lze popsat takto:

$$(A \cap B)(u) = \min(A(u), B(u)).$$

Výraz $\min(A(u), B(u))$ přitom odpovídá tomu, že aplikujeme klasickou konjunktci (ta je vyjádřena funkcí $\min$) na pravdivostní hodnoty $A(u)$ a $B(u)$. Tento průnik je znázorněn na obr. 6.



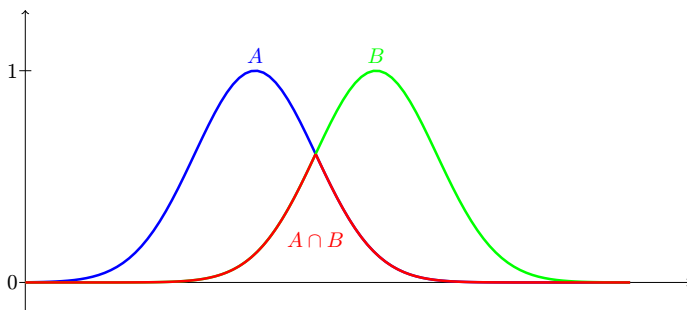
Obr. 6 Průnik klasických množin

Ve fuzzy logice se průnik fuzzy množin $A: U \rightarrow [0, 1]$ a $B: U \rightarrow [0, 1]$ definuje v principu stejně, tedy opět předpisem

$$(A \cap B)(u) = \min(A(u), B(u)).$$

Rozdíl je v tom, že $A(u)$ a $B(u)$ jsou nyní obecné stupně pravdivosti z intervalu $[0, 1]$ a že $\min$ reprezentuje Gödelovu konjunktci. Takový průnik fuzzy množin je znázorněn na obr. 7.

Příklad 4. Určíme průnik fuzzy množin A a B v univerzu $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.



Obr. 7 Průnik fuzzy množin založený na Gödelově konjunkci

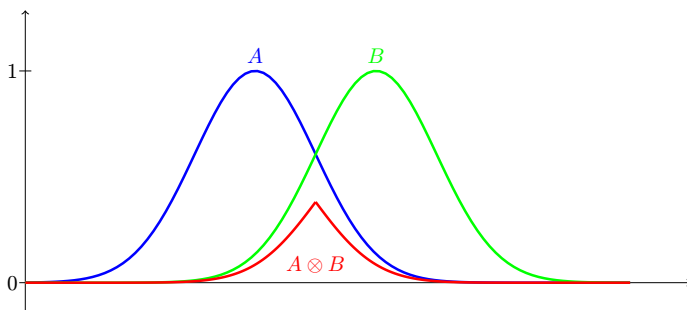
Je-li

$$A = \{1/2, {}^{0,5}/3, {}^{0,8}/5, {}^1/6\} \text{ a}$$

$$B = \{1/1, {}^{0,2}/3, {}^{0,5}/4, {}^{0,8}/5\}, \text{ je}$$

$$A \cap B = \{^{0,2}/3, {}^{0,8}/5\}.$$

Pro jinou konjunkci, řekněme $\otimes$, by ale průnik vypadal jinak. Ukazuje to obr. 8.



Obr. 8 Průnik fuzzy množin založený na obecné konjunkci $\otimes$

Je to proto, že takový průnik je definován předpisem

$$(A \cap B)(u) = A(u) \otimes B(u)$$

a proto, že každá konjunkce $\otimes$, splňující výše uvedené podmínky (3)–(6), splňuje $a \otimes b \leq \min(a, b)$.

Nemůžeme se zde podrobněji věnovat formálním aspektům fuzzy logiky. Uvedeme pouze, že stejně jako klasická logika má solidně propracované základy v podobě výrokové logiky, predikátové logiky a dalších systémů, má dnes i fuzzy logika solidně propracované základy. Zájemce odkazujeme na knihu [1]. Abychom alespoň stručně nastínili, jak ve fuzzy logice probíhá formální logické usuzování, podíváme se na tzv. paradox hromady (nazývaný také sorites).

Je to významný paradox, jehož formulace je připisována Eubúlidovi z Milétu (4. stol. př. n. l.). Je formulován takto:

0 zrněk písku netvoří hromadu.

Když n zrněk netvoří hromadu, pak ani $n + 1$ zrněk netvoří hromadu.

Závěr: Pro žádné číslo n netvoří n zrněk písku hromadu.

Závěr je evidentně nepravdivý, ale odvodili jsme ho všeobecně používanou metodou matematické indukce z předpokladů, které považujeme za pravdivé, což je paradox.

Fuzzy logika nabízí přirozené řešení tohoto paradoxu. To samo o sobě je podstatná skutečnost, protože k rozřešení dlouhotrvajícího paradoxu je obvykle třeba prolomit hluboce zakořeněné, omezující paradigma. Toto paradigma je v našem případě pochopitelně představováno výše zmíněným principem bivalence, ze kterého klasická logika vychází.

Nechť $NH(n)$ označuje tvrzení, že n zrněk netvoří hromadu. Pak paradox hromady lze schematicky znázornit následovně:

$$\frac{NH(0) \\ NH(n) \rightarrow NH(n+1)}{\text{pro každé } n: NH(n)}$$

Z hlediska fuzzy logiky je přirozené přijmout, že $NH(0)$ je pravdivá ve stupni 1. Formulí

$$NH(n) \rightarrow NH(n+1)$$

je však přirozené považovat za pravdivou v nějakém vysokém stupni, řekněme 0,99, ale ne ve stupni 1. Jak ale z takových předpokladů, které jsou pravdivé jen částečně, odvozovat závěry? Fuzzy logika pro tento případ nabízí zobecněnou verzi odvozovacího pravidla *modus ponens*. Tu navrhl v roce 1968 ve své průlomové práci „The logic of inexact concepts“ americký informatik Joseph A. Goguen. Toto zobecněné pravidlo lze znázornit

schématem

$$\frac{a/\varphi, b/\varphi \rightarrow \psi}{a \otimes b / \psi},$$

kteřé znamená, že z formule φ platné ve stupni a a formule $\varphi \rightarrow \psi$ platné ve stupni b můžeme odvodit, že formule ψ je platná ve stupni $a \otimes b$. Přitom $a \otimes b$ je výsledek konjunkce $\otimes$ použité na stupně a a b . Použijme, jak to učinil Goguen ve své práci z roku 1968, za konjunkci $\otimes$ součin, tedy

$$a \otimes b = a \cdot b.$$

V naší situaci můžeme tedy provést následující úsudky. Nejprve odvodíme

$$\frac{1/NH(0), 0,99/NH(0) \rightarrow NH(1)}{0,99/NH(1)}.$$

Stupeň 0,99 u odvozené formule $NH(1)$ jsme totiž získali jako stupeň $a \otimes b$ z výše uvedeného schématu, protože $a \otimes b = 1 \cdot 0,99 = 0,99$. Dále odvodíme

$$\frac{0,99/NH(1), 0,99/NH(1) \rightarrow NH(2)}{0,99^2/NH(2)},$$

protože v tomto případě $a \otimes b = 0,99 \cdot 0,99 = 0,99^2$. Snadno nahlédneme, že tak po n krocích odvodíme

$$\frac{0,99^{n-1}/NH(n-1), 0,99/NH(n-1) \rightarrow NH(n)}{0,99^n/NH(n)}.$$

Tento závěr říká, že tvrzení „ n zrněk písku netvoří hromadu“ je pravdivé ve stupni $0,99^n$. Čím více zrněk, tím méně je tedy toto tvrzení pravdivé, což je v souladu s intuicí. Pro $n = 100$ tak odvodíme stupeň přibližně rovný 0,37.⁵⁾ Paradox byl odstraněn. Pojem hromada je totiž „fuzzy pojem“, tedy pojem, který nemá – na rozdíl od klasických pojmů jako je třeba pojem prvočíslo – ostře vymezené, černobílé hranice. Předpokládat, že tvrzení „ n zrněk písku netvoří hromadu“ může být jen pravdivé, nebo nepravdivé, jak činí formulace paradoxu hromady, je tedy nesprávné. To je důvod zdánlivého paradoxu.

⁵⁾ Hodnotu 0,99 jsme zvolili pro ilustraci. Můžeme zvolit jinou hodnotu, např. 0,999, a získat tak jiné závěry, které se někomu mohou zdát lépe odpovídající tomu, jak chápe pojem *hromada*.

4. Od počátečního odporu k masovému nasazení

Připustit, že existují i jiné pravdivostní hodnoty než pravda a nepravda, je radikální krok. Zadehův pojem fuzzy množiny a obecněji pak fuzzy logika jako alternativa klasické logiky proto představuje – řečeno termínem Thomase Kuhna – nové paradigma.⁶⁾ Od Kuhna víme, že nové paradigma se prosazuje obtížně a je mu kladen odpor. Fuzzy logika v tomto směru nebyla výjimkou. Pro příklad uveďme, co řekl o fuzzy logice ještě v roce 1975 William Kahan, významný vědec a profesor na univerzitě v Berkeley: „Fuzzy logika je chybná, chybná a zničující. ... Co potřebujeme, je více, ne méně logického myšlení. Nebezpečí fuzzy teorie je v tom, že povzbudí právě ten typ nepřesného myšlení, který nám způsobil tolik problémů.“ [1].

Stále více lidí však začalo chápat, že fuzzy logika je životaschopnou alternativou logiky klasické a že – a to především – umožňuje řešit důležité problémy. Poměrně rychle se proto začal rozvíjet výzkum fuzzy logiky, který nakonec vedl k praktickým realizacím i k výrazným komerčním úspěchům.

Komerčně jednoznačně nejúspěšnější aplikací fuzzy logiky jsou tzv. pravidlové fuzzy systémy a na nich založené fuzzy regulátory. Jejich princip stručně vysvětlíme v příští kapitole. Fuzzy regulátory byly poprvé komerčně použity pro řízení cementové pece v dánské společnosti F. L. Smidth & Company v roce 1980. Obrovský rozmach, označovaný jako „fuzzy boom“, však zaznamenaly koncem 80. a začátkem 90. let v Japonsku. Fuzzy regulátory tam byly například nasazeny k řízení metra v městě Sendai. Vlaky se tak – bez zásahů lidského operátora, plně řízené fuzzy logikou – rozjížděly i zastavovaly plynuleji, byly schopné přesně zastavit na určeném místě a dokonce spotřebovávaly o 10 % méně energie. Tento úspěch později vedl k zavedení podobného systému i v Tokiu. Zejména se však fuzzy regulátory prosadily v nejrozmanitějších výrobcích na trhu se spotřební elektronikou. V obchodech se začaly ve velkém prodávat fuzzy logikou řízené fotoaparáty, pračky, vysavače, vařiče rýže a mnohé další výrobky. Podle záznamů japonského ministerstva průmyslu a obchodu činil v roce 1991 obrat japonského trhu s výrobky řízenými fuzzy logikou (70 % z toho byla spotřební elektronika) cca 2 miliardy amerických dolarů, což odpovídá neuvěřitelnému 1 % tehdejšího celosvětového trhu s počítačovými technologiemi.

„Fuzzy boom“ je sice již minulostí, nicméně fuzzy logika je dnes rutinně

⁶⁾Kuhn, T. S. *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago: Univ. of Chicago Press, 1962.

používána v mnoha oblastech. I když o tom možná nevíme, setkáváme se s ní denně i na českém trhu – je například v pračkách nebo v automatických převodovkách koncernu Volkswagen. Japonská firma Omron, jejíž měřiče tlaku jsou běžně k dostání i u nás, v roce 2013 oznámila, že prodala již 120 milionů měřičů fungujících na bázi fuzzy logiky.

5. Pravidlové fuzzy systémy

Pravidlové fuzzy systémy a fuzzy regulátory, které jsme zmínili v předchozí kapitole, vycházejí z faktu, že v mnoha případech je člověk – expert – schopen řídit i systém, který je značně složitý a metodami klasické teorie řízení nevládnutelný. Modely klasické teorie řízení potřebují znát fyzikální model řízeného systému. Expert naproti tomu řídí systém pomocí algoritmu, který je schopen popsat v přirozeném jazyce a který fyzikální model znát nepotřebuje. Expert například ví, že jestliže je teplota v místnosti velmi vysoká a otáčky větráku nízké, pak je třeba otáčky výrazně zvýšit. Zeptáme-li se ho tedy, jak systém řídí – v tomto jednoduchém příkladě tedy řídí větrání místnosti –, řekne nám že používá několik pravidel tvaru „jestliže–pak“. Tato pravidla, jako to právě uvedené, téměř vždy obsahují vágní výrazy („velmi vysoká teplota“ apod.) a expert je na základě nich schopen logicky odvodit správný závěr, akční zásah, například správně nastavit rychlost větráku. To je pro fuzzy logiku příhodná situace. Fuzzy logika umí vágní výrazy matematicky reprezentovat, pracovat s nimi a nakonec provádět logické úsudky, které simulují expertovo uvažování. Výsledný systém, tzv. pravidlový fuzzy systém nebo fuzzy regulátor, tedy v tomto smyslu napodobuje operátorovo rozhodování, aniž by bylo nutné znát fyzikální model řízeného systému.

Pravidlový fuzzy systém sestává z následujících komponent:

- báze pravidel,
- inferenční modul,
- případně modul tzv. defuzzifikace.

Báze pravidel je množina m pravidel následujícího tvaru ($j = 1, \dots, m$):

JESLIŽE x_1 je $\mathcal{A}_{j1}$ a $\dots$ a x_n je $\mathcal{A}_{jn}$, PAK y je $\mathcal{B}_j$,

kde $x_1, \dots, x_n, y$ jsou proměnné s možnými hodnotami v množinách $X_1, \dots, X_n, Y$ a kde $\mathcal{A}_{j1}, \dots, \mathcal{A}_{jn}, \mathcal{B}_j$ jsou jazykové výrazy jako „malá“, „velmi vysoká“ apod. Inferenční modul představuje algoritmus, který umožňuje na základě hodnot vstupních proměnných x_i odvodit hodnotu výstupní

proměnné y . Hodnotou y může být i fuzzy množina v Y , ze které se v případě potřeby metodou defuzzifikace vypočítá konkrétní hodnota v Y .

Celý postup si podrobně ukážeme na jednoduchém příkladu. Budeme uvažovat jeden vstup, tj. $n = 1$. Množinu X_1 vstupních hodnot budeme značit jen X a budeme předpokládat, že $X = Y = \{0, 1, \dots, 10\}$. Dále budeme předpokládat, že báze $\mathcal{R}$ pravidel obsahuje následující tři pravidla:

JESTLIŽE x je přibližně 2, PAK y je zhruba 3,
 JESTLIŽE x je zhruba 4, PAK y je přibližně 7,
 JESTLIŽE x je přibližně 7, PAK y je přibližně 7,

která budeme dále označovat takto:

JESTLIŽE x je $\mathcal{A}_1$, PAK y je $\mathcal{B}_1$,
 JESTLIŽE x je $\mathcal{A}_2$, PAK y je $\mathcal{B}_2$,
 JESTLIŽE x je $\mathcal{A}_3$, PAK y je $\mathcal{B}_3$.

Tedy $\mathcal{A}_1$ je výraz „přibližně 2“ atd. Jaká výstupní hodnota odpovídá podle této báze pravidel vstupní hodnotě $x = 5$?

Ukážeme si, jak tuto otázku řeší tzv. Mamdaniho přístup, který je v praxi nejčastěji používaným. Jazykovým výrazům $\mathcal{A}_j$ a $\mathcal{B}_j$ nejdříve přiřadíme fuzzy množiny A_j a B_j , které přirozeně odpovídají jejich významu. Zvolíme následující:

x/y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$A_1(x)$	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0
$B_1(y)$	0	0,5	0,75	1	1	0,75	0,5	0	0	0	0
$A_2(x)$	0	0	0,25	0,75	1	0,75	0,25	0	0	0	0
$B_2(y)$	0	0	0	0	0	0	0,5	1	0,5	0	0
$A_3(x)$	0	0	0	0	0	0	0,5	1	0,5	0	0
$B_3(y)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0,5	1	0,5

Tedy $A_1(0) = 0$, $A_1(1) = 0,5$, $\dots$, $B_3(10) = 0,5$.

Dále určíme fuzzy relace R_1 , R_2 a R_3 , které naše tři pravidla reprezentují. Fuzzy relace R_j přiřazuje každé dvojici $x \in X$ a $y \in Y$ stupeň $R_j(x, y)$, ve kterém jsou x a y ve vztahu, který R_j reprezentuje. Poznamenejme, že do klasické binární relace daná dvojice buď patří, nebo nepatří. Například dvojice prvků 1 a 3 patří do relace $<$ (být menší). Do fuzzy

relace daná dvojice patří v určitém stupni. Například dvojice bratrů, kteří jsou si značně podobní, může do relace „být podobný“ patřit ve stupni 0,8. Stupeň $R_j(x, y)$ je definován předpisem $R_j(x, y) = A_j(x) \wedge B_j(y)$, tedy např.

$$R_1(1, 2) = A_1(1) \wedge B_1(2) = 0,5 \wedge 0,75 = \min(0,5, 0,75).$$

Naše R_1 , R_2 a R_3 jsou popsány následujícími tabulkami (stupeň $R_j(x, y)$ je v průsečíku sloupce x a řádku y):

10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0,5	0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0,5	0,75	0,5	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0,5	0,75	0,5	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0,5	0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R_1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0	0	0	0
7	0	0	0,25	0,75	1	0,75	0,25	0	0	0	0
6	0	0	0,25	0,5	0,5	0,5	0,25	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R_2	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

10	0	0	0	0	0	0	0,5	0,5	0,5	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0,5	1	0,5	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0,5	0,5	0,5	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R_3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Výsledná fuzzy relace R , která reprezentuje celou bázi pravidel, je sjednocením fuzzy relací R_1 , R_2 a R_3 , tedy $R = R_1 \cup R_2 \cup R_3$, což znamená, že

$$R(x, y) = \max(R_1(x, y), R_2(x, y), R_3(x, y)).$$

Fuzzy relace R je tedy popsána následující tabulkou:

10	0	0	0	0	0	0	0,5	0,5	0,5	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0,5	1	0,5	0	0
8	0	0	0,25	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0	0
7	0	0	0,25	0,75	1	0,75	0,25	0	0	0	0
6	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,25	0	0	0	0
5	0	0,5	0,75	0,5	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0,5	1	0,5	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0,5	0,75	0,5	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0,5	0,5	0,5	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
R	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Předpokládejme, že je dána fuzzy množina A' , která popisuje skutečnou hodnotu vstupu (A' může třeba reprezentovat výraz „asi 5“ nebo „velmi malá“ nebo „přesně 5“). Podle inferenčního mechanismu, který se nazývá

kompoziční pravidlo inference (angl. compositional rule of inference), se ze vstupní fuzzy množiny A' a báze pravidel reprezentované fuzzy relací R odvodí výstupní fuzzy množina $B' = A' \circ R$. Ta je definovaná tak, že pro každou $y \in Y$ je

$$B'(y) = \max_{x \in X} (A'(x) \wedge R(x, y)),$$

přičemž budeme opět uvažovat, že $A'(x) \wedge R(x, y) = \min(A'(x), R(x, y))$. Vstupní fuzzy množina A' se tedy zobrazí na výstupní fuzzy množinu B' .

Tento přístup umožňuje řešit i situace, při kterých je vstupní hodnota konkrétní prvek x' z množiny X (tedy nikoli fuzzy množina A' prvků z X) a jako výstup je požadována konkrétní hodnota y' z Y (tedy nikoli fuzzy množina B' prvků z Y). Je-li $x' \in X$ ona vstupní hodnota, můžeme ji převést na jednoprvkovou fuzzy množinu $\{1/x'\}$, tj. vzít $A' = \{1/x'\}$, a postupovat při inferenci jako výše. Převod x' na $\{1/x'\}$ je speciálním případem *fuzzifikace*. Je-li naopak B' odvozená výstupní fuzzy množina v Y , potřebujeme často pouze jednu konkrétní hodnotu y' z Y . Potřebujeme třeba konkrétní hodnotu akčního zásahu, například hodnotu, na kterou se nastaví rychlost větráku. Hodnotu y' získáme z fuzzy množiny B' metodou *defuzzifikace*. Hodnota y' má vhodně reprezentovat fuzzy množinu B' . Často používanou metodou defuzzifikace je tzv. metoda těžiště. V našem případě by se takto získaná hodnota $y' = D(B')$ vypočítala podle vzorce

$$y' = D(B') = \frac{\sum_{y \in Y} y \cdot B'(y)}{\sum_{y \in Y} B'(y)}.$$

Vraťme se k našemu zadání. Máme zjistit, jaký výstup odpovídá vstupní hodnotě $x' = 5$. Hodnotu $x' = 5$ nejdřív převedeme na fuzzy množinu $A' = \{1/5\}$. Pak dle výše uvedeného postupu odvodíme B' . Například pro $y = 6$ dostaneme

$$\begin{aligned} B'(6) &= \max_{x \in X} \min(A'(x), R(x, 6)) \\ &= \max_{x \in X} \min(\{1/5\}(x), R(x, 6)) \\ &= \min(\{1/5\}(5), R(5, 6)) = \min(1, 0,5) = 0,5. \end{aligned}$$

Tak postupně odvodíme, že výstupem je fuzzy množina

$$B' = A' \circ R = \{0,5/6, 0,75/7, 0,5/8\}.$$

Pokud bychom potřebovali konkrétní hodnotu y' , spočítali bychom ji výše uvedenou metodou těžiště, tj.

$$y' = D(B') = \frac{6 \cdot 0,5 + 7 \cdot 0,75 + 8 \cdot 0,5}{0,5 + 0,75 + 0,5} = \frac{12,25}{1,75} = 7.$$

Následující tabulka ukazuje pro všechny vstupní hodnoty x' jim odpovídající výstupní fuzzy množiny B' ($\emptyset$ označuje prázdnou fuzzy množinu, tj. $\emptyset(y) = 0$):

vstup x'	výstupní fuzzy množina $B' = \{^1/x'\} \circ R$
10	$\emptyset$
9	$\emptyset$
8	$\{^{0,5}/8, ^{0,5}/9, ^{0,5}/10\}$
7	$\{^{0,5}/8, ^1/9, ^{0,5}/10\}$
6	$\{^{0,25}/6, ^{0,25}/7, ^{0,5}/8, ^{0,5}/9, ^{0,5}/10\}$
5	$\{^{0,5}/6, ^{0,75}/7, ^{0,5}/8\}$
4	$\{^{0,5}/6, ^1/7, ^{0,5}/8\}$
3	$\{^{0,5}/1, ^{0,5}/2, ^{0,5}/3, ^{0,5}/4, ^{0,5}/5, ^{0,5}/6, ^{0,75}/7, ^{0,5}/8\}$
2	$\{^{0,5}/1, ^{0,75}/2, ^1/3, ^1/4, ^{0,75}/5, ^{0,5}/6, ^{0,25}/7, ^{0,25}/8\}$
1	$\{^{0,5}/1, ^{0,5}/2, ^{0,5}/3, ^{0,5}/4, ^{0,5}/5, ^{0,5}/6\}$
0	$\emptyset$

Pokud navíc provedeme na takto získané fuzzy množiny B' defuzzifikaci metodou těžiště, dostaneme vstupně-výstupní závislost popsanou následující tabulkou. V ní „ND“ odpovídá případům, ve kterých je výstupní fuzzy množina B' prázdná a ve kterých tedy výstupní hodnotu y' považujeme za nedefinovanou.⁷⁾

x'	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B'	ND	3,5	3,9	4,65	7	7	8,375	9	9	ND	ND

⁷⁾Všimněme si, že defuzzifikací vzniknou i hodnoty, které neleží v množině výstupních hodnot $\{0, 1, \dots, 10\}$, např. hodnota 3,9, která odpovídá vstupní hodnotě 2. To v dané situaci nemusí vadit. Pokud by to vadilo, hodnoty lze zaokrouhlit. Vstupu 2 by pak odpovídal výstup 4.

6. Historie a perspektivy fuzzy logiky

I když za vznik fuzzy logiky je považován rok 1965, ve které byla publikována Zadehova práce „Fuzzy sets“, základní myšlenka, ze které fuzzy logika vychází, se objevila mnohem dříve. Na skutečnost, že princip bivalence není samozřejmý a že některým výročkům – například těm o budoucnosti – je přirozené přiznat i jinou pravdivostní hodnotu než *pravda* a *nepravda*, upozornil jako první ve svých klasických spisech *De interpretatione* a *Categoriae* sám zakladatel klasické logiky, Aristotelés. Až do přelomu 19. a 20. století se však úvahy o logice s více pravdivostními hodnotami objevovaly jen zřídka. Důležitou výjimkou byl významný středověký myslitel William Ockham, který analyzoval Aristotelovy práce a odvodil z nich mimo jiné jistou spojkou implikace se třemi pravdivostními hodnotami. Aristotelovy úvahy o možné třetí pravdivostní hodnotě se staly předmětem vášnivých, deset let trvajících debat na univerzitě v Lovani, které se odehrávaly v letech 1465–1475. Za další mezník lze považovat úvahy o vágnosti výrazů přirozeného jazyka. Za vágní jsou označovány právě ty výrazy, které nemají ostře vymezené hranice, jako např. výše uvedený výraz „normální krevní tlak“. Tyto úvahy se poprvé objevily u významného empiristy Johna Locke, například v jeho základním filozofickém díle *Esej o lidském chápání*. Úvahy o vágních výrazech se poté staly součástí knih o logice – první je významná učebnice *Logick* Isaaca Wattse z roku 1724 – nicméně součástí, které byla zpravidla věnována jen okrajová pozornost.

Na přelomu 19. a 20. století se vícehodnotovými logikami zabývali tři myslitelé: skotský matematik Hugh MacColl, americký filozof a matematik Charles Sanders Peirce, a ruský filozof Nikolaj Vasiljev. Vznik moderní vícehodnotové logiky je však spjat s obdobím kolem roku 1920, kdy své objevy učinili tři význační vědci: polský logik Jan Łukasiewicz, švýcarský matematik Paul Bernays a americký matematik polského původu Emil Post. Łukasiewicz byl motivován Aristotelovými úvahami o pravdivosti výroků o budoucnosti a navrhl logické systémy se třemi i více pravdivostními hodnotami. Ty jsou známy jako Łukasiewiczovy logiky a patří dnes mezi nejdůležitější systémy fuzzy logiky. Bernays, jehož přínos na poli vícehodnotové logiky byl donedávna neznámý, i Post byli motivováni především matematickými úvahami a problémy.

Zejména Łukasiewiczova práce vedla ke značnému rozvoji logik s více pravdivostními hodnotami, a to jak samotné Łukasiewiczovy logiky, tak logik jiných. Ty se liší používanými pravdivostními hodnotami, ale také tím, jak definují logické spojky. Některé práce přitom vycházely z praktických

motivací, jiné se o motivace a případné aplikace nezajímaly a studovaly vícehodnotové logiky jako formální systémy bez ohledu na jejich využití. K těm prvním patří práce Łukasiewicze, který interpretoval třetí pravdivostní hodnotu, $1/2$, jako hodnotu výroku, který je možný (tj. nikoli nutně pravdivý nebo nepravdivý), dále pak práce sovětského logika Dmitrije A. Bochvara, který rozvinul logiku pro analýzu paradoxů, nebo amerického logika Stephena C. Kleeneho, který byl motivován některými otázkami teorie výpočtů. Těch druhých, tj. prací formalistických, které nehleděly na praktické motivace, byla však naprostá většina a jejich podíl rostl. To vedlo k tomu, že se začaly objevovat kritické hlasy – mají vícehodnotové logiky hlubší smysl nebo jsou to jen matematicko-logické hračky?

Na poli filozofie se mezitím, ovšem většinou bez kontaktu s výzkumem ve vícehodnotové logice, začala intenzivně rozvíjet debata o vágnosti. Jedním ze zásadních impulsů byl článek „Vagueness“ prominentního matematika a filozofa Bertranda Russella z roku 1923. Brzy se objevily další, mezi nimi také vlivný článek „Vagueness: an exercise in logical analysis“ amerického filozofa Maxe Blacka z roku 1937, ve kterém byl – téměř 30 let před prvním Zadehovým článkem o fuzzy množinách, byť v mírně jiné podobě a pod názvem „consistency profile“ – pojem fuzzy množiny v podstatě zaveden. Prací o vágnosti poměrně rychle přibývalo, nepřesáhly však pole filozofie a až na několik výjimek, mezi které patří zmíněná Blackova práce, se otázkou, jak vágnost matematicky uchopit, natož pak, jak případné matematické modely vágních výrazů použít, nezabývaly.

Zadehův článek „Fuzzy sets“ zveřejněný v roce 1965 představuje na poli vícehodnotové logiky zásadní milník. Zadeh sice v článku nevytvořil žádnou konkrétní logiku v moderním slova smyslu – ostatně termín „fuzzy logic“ poprvé použil v poněkud technickém smyslu v roce 1966 Marinos a v dnes běžném smyslu až v roce 1968 Goguen. Existujících prací na poli vícehodnotové logiky, ani na poli vágnosti si Zadeh nebyl vědom (na žádnou z nich se v článku neodvolává). Hnacím motorem pro něho byl zmíněný nedostatek klasického pojmu množina – neschopnost reprezentovat význam vágních výrazů, které jsou typické pro přirozený jazyk a zásadní pro naši schopnost popisovat okolní svět, formulovat a sdělovat znalosti, třídit informace a podobně. Pojmem fuzzy množina ukázal, jak tento zásadní nedostatek odstranit. Z hlediska vícehodnotové logiky však také ukázal přirozený způsob, jak interpretovat mezilehlé pravdivostní hodnoty, např. 0,8, totiž jako pravdivostní hodnoty výroků, které obsahují vágní výrazy, tedy výroků jako „Venkovní teplota je *velmi nízká*“, „Tento pacient

má *vysoký* krevní tlak“, „Bude-li inflace *vysoká*, úspory se *značně sníží*“ a podobně. Byť nám dnes připadá, že tato interpretace se přímo nabízí a nelze ji přehlédnout, v literatuře o vícehodnotové logice byla před Zadehovým článkem neznámá. Zadehův objev má atributy významného objevu: řeší problém, který dostupnými metodami řešitelný nebyl; jde o problém základní, tj. problém, který se promítá do celé řady oblastí (matematika, informatika, inženýrské obory, přírodní i společenské vědy); řeší ho konceptně novým, ale jednoduchým pojmem, který je v článku popsán spolu se základními pravidly, jak s ním pracovat.

Jak jsme uvedli výše, fuzzy logika jako alternativa zobecňující logiku klasickou představuje zásadně nové paradigma a musela se zpočátku potýkat s negativními reakcemi. Od 70. let 20. století se však výzkum ve fuzzy logice začal intenzívně rozvíjet. Teoretický výzkum se přitom zabýval zejména teorií fuzzy množin a rozvojem různých oblastí matematiky, například topologie, pravděpodobnosti nebo algebry, z pohledu fuzzy množin. Aplikačně zaměřený výzkum se věnoval zejména použití fuzzy množin v různých oblastech, ve kterých hraje důležitou roli přirozený jazyk – například v rozhodování, řízení, rozpoznávání vzorů nebo klasifikaci a shlukování – a vyvinuté metody byly používány pro řešení různých problémů. Významným podnětem pro rozvoj aplikačně zaměřeného výzkumu se staly první komerčně úspěšné aplikace fuzzy logiky, o kterých jsme se zmínili výše.

Na vývoji fuzzy logiky se významnou měrou podíleli také čeští vědci. Významné výsledky získal nejdříve Jan Pavelka. Na jeho práci pak navázal Vilém Novák, který je také autorem první české knihy o fuzzy logice [2]. V 90. letech 20. století se fuzzy logikou začal intenzívně zabývat Petr Hájek, matematik a logik světového formátu, který se svými spolupracovníky fuzzy logiku významným způsobem rozvinul. V současné době patří výzkumné skupiny v Praze, Ostravě a Olomouci mezi lídry v oboru.

Fuzzy logika je po padesáti letech své existence stále živým oborem. Některé její oblasti mají již kanonickou podobu a jsou dnes standardní náplní učebnic. Jiné, a mezi nimi je mnoho z těch, které přímo či velmi úzce souvisí s informatikou, jsou stále otevřené a volají po řešení důležitých problémů. Dobře to ilustruje skutečnost, že prestižní Gödelova cena byla v roce 2014 udělena Ronaldu Faginovi, Amnonu Lotemovi a Monimu Naorovi právě za práci o optimální agregaci pravdivostních stupňů v jistém obecném databázovém problému.

Lotfi Zadeh popsal v roce 2015 v článku „Fuzzy logic—a personal perspective“ svou představu o budoucnosti fuzzy logiky takto: „Věda je v rozhodujících aspektech založena na klasické, aristotelovské, dvouhodnotové logice. Ve vědě je binarizace pravidlem spíše než výjimkou. V lidském myšlení je tomu naopak. Jedním z hlavních přínosů fuzzy logiky je to, že poskytla základ pro dalekosáhlou změnu – v téměř všech oblastech vědy – od binarismu k pluralismu, od černého a bílého k odstínům šedi. Tento posun se bude v následujících letech nejspíš zrychlovat a vliv fuzzy logiky se nejspíš stane ještě viditelnějším a významnějším. Je pravděpodobné, že ve vědě – stejně jako ve fuzzy logice – vše bude nebo bude moci být otázkou míry. To je to, co vidím ve své křišťálové kouli.“

Podrobné pojednání o historii fuzzy logiky, jejím vývoji a perspektivách přinesla nedávno vydaná kniha [1].

Literatura

- [1] *Bělohlávek, R., Dauben, J. W., Klir, G. J.*: Fuzzy Logic and Mathematics: A Historical Perspective. Oxford University Press, New York, 2017.
- [2] *Novák, V.*: Fuzzy množiny a jejich aplikace. Státní nakladatelství technické literatury, Praha, 1990.

ZPRÁVY

Ústřední kolo 68. ročníku Matematické olympiády kategorie A

Ústřední kola 68. ročníku Matematické olympiády v kategorii A uspořádala v letošním roce krajská komise MO Středočeského kraje v Benešově. Celou soutěž přitom zajišťovali organizátoři především ve spolupráci s Gymnáziem Benešov Všichni soutěžící a členové Ústřední komise MO byli ubytováni v hotelu BENICA, v jehož dvou větších konferenčních sálech se také uskutečnila soutěž v kategorii A. Slavnostní zahájení soutěže však proběhlo večer v neděli 24. března ve starobylé aule benešovského gymnázia za přítomnosti zástupců vedení Středočeského kraje a starosty města Benešov. Matematický ústav AV ČR (a JČMF) na této akci zastupoval jeho ředitel *RNDr. Jiří Rákosník, CSc.*

Na základě jednotné koordinace úloh krajského (II.) kola v kategorii A a regulí soutěže pozvala Ústřední komise MO k účasti ve III. kole 41 nejlepších řešitelů II. kola z celé České republiky, mezi nimi bylo 10 dívek. Na řešení obou trojic soutěžních úloh měli žáci již tradičně vyhrazeny po oba soutěžní dny, jimiž byly 25. a 26. březen, vždy 4,5 hodiny čistého času. Za každou úlohu měli soutěžící možnost získat nejvýše 7 bodů (s celočíselnými bodovými zisky).

Organizátoři závěrečné části MO připravili pro soutěžící a pro členy Ústřední komise MO pestrý doprovodný program. Odpoledne po prvním soutěžním dnu absolvovali soutěžící i členové ústřední komise MO společnou procházku k zámku *Konopiště*, jehož interiér si následně všichni prohlédli. Večer též den pak účastníci III. kola kategorie A navštívili koncert pražské skupiny *Spirituál kvintet*, který se uskutečnil v příjemném prostředí auly benešovského gymnázia. Druhý soutěžní den odpoledne absolvovali všichni účastníci soutěže společný výlet spojený s krátkou procházkou na bájnou horu *Blaník* nedaleko Benešova.

Vyhlášení výsledků soutěže a předání cen nejlepším řešitelům III. kola v kategorii A se uskutečnilo ve středu 27. března dopoledne opět v aule benešovského gymnázia. Slavnostního aktu se zúčastnili také zástupci skupiny ČEZ, kteří speciálně ocenili tři nejlepší řešitele ústředního kola soutěže. Předseda ÚK MO *doc. Jaromír Šimša* v závěrečném projevu poděkoval celému týmu organizátorů, především pak řediteli Gymnázia Benešov *Mgr. Romanu Hronkovi* a předsedkyni krajské komise MO ve Středočeském kraji *RNDr. Šárce Gergelitsové, Ph.D.*, za kvalitní přípravu a mimořádně zdařilý průběh celého ústředního kola v kategorii A.



Obr. 1 Trojice nejúspěšnějších řešitelů – zleva: Matěj Doležálek, Josef Minařík a Karel Chwistek

Závěrem tradičně uvádíme texty soutěžních úloh ústředního kola 68. ročníku MO kategorie A a přehled vítězů a dalších úspěšných řešitelů.

25. března 2019

1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x^2 - yz = |y - z| + 1,$$

$$y^2 - zx = |z - x| + 1,$$

$$z^2 - xy = |x - y| + 1.$$

Tomáš Jurík

2. Je dán pravoúhelník $ABCD$, kde $|AB| = a \geq b = |BC|$. Na přímce BD sestrojte body P a Q tak, aby platilo $|AP| = |PQ| = |QC|$. Proveďte diskusi o počtu řešení vzhledem k délkám a, b .

Jaroslav Švrček

3. Necht a, b, c, n jsou kladná celá čísla taková, že jsou splněny následující podmínky:

(i) čísla $a, b, c, a + b + c$ jsou po dvou nesoudělná;

(ii) číslo

$$(a + b + c)(a + b)(b + c)(c + a)(ab + bc + ca)$$

je n -tou mocninou celého čísla.

Dokažte, že součin abc lze zapsat jako rozdíl dvou n -tých mocnin celých čísel.

Patrik Bak

26. března 2019

4. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Na polopřímce opačné k polopřímce BC leží bod P takový, že $|AB| = |BP|$. Analogicky na polopřímce opačné k polopřímce CB leží bod Q takový, že $|AC| = |CQ|$. Označme J střed kružnice připsané straně BC daného trojúhelníku a D, E po řadě její body dotyku s přímkami AB a AC . Předpokládejme, že polopřímky opačné k polopřímkám DP a EQ se protínají v bodě F různém od J . Dokažte, že $AF \perp FJ$.

Patrik Bak

5. Dokažte, že existuje nekonečně mnoho celých čísel, která nelze vyjádřit ve tvaru

$$2^a + 3^b - 5^c,$$

kde a, b, c jsou nezáporná celá čísla.

Ján Mazák, Tomáš Bárta

6. Pro která přirozená čísla n lze do tabulky $n \times n$ vepsat všechna celá čísla od 1 do n^2 tak, aby aritmetický průměr čísel v každém řádku i sloupci tabulky byl celým číslem?

Laura Vištanová

Výsledky ústředního kola 68. ročníku Matematické olympiády kategorie A

Vítězové

1. *Josef Minařík* (8/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše) 42 b., 2. *Karel Chwistek* (2/4, Mendelovo G, Opava) 38 b., 3. *Matěj Doležálek* (8/8, G Humpolec) 37 b., 4. *Radek Olšák* (8/8, Menza G, Praha 6) 36 b., 5. *Dominik Stejskal* (8/8, G Krnov) 35 b., 6. *Václav Janáček* (6/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše) 34 b., 7. *Lenka Kopfová* (4/4, Mendelovo G, Opava) 34 b., 8. *Magdaléna Mišinová* (6/8, G J. Keplera, Praha 6) 30 b., 9. *Vojtěch David* (6/8, Wichterlovo G, Ostrava-Poruba) 29 b., 10. *Jan Vavřín* (6/8, PORG a GaZŠ o. p. s) 29 b.,

Úspěšní řešitelé

11. *Adéla Heroudková* (5/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše) 28 b., 12. *Viktor Fukala* (6/8, G J. Keplera, Praha 6) 28 b., 13. *Jana Pallová* (8/8, G Jakuba Škody, Přerov) 26 b., 14. *Jindřich Jelínek* (4/4, G Olomouc-Hejčín) 26 b., 15. *Jana Bušová* (5/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše) 23 b., 16. *Richard V. Krejsa* (7/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše) 22 b., 17. *Tomáš Křížák* (8/8, G M. Koperníka, Bílovec) 22 b., 18. *Michaela Svatošová* (7/8, G M. Koperníka, Bílovec) 22 b., 19. *Tomáš Sourada* (7/8, G Žamberk) 21 b., 20. *Martin Zímen* (8/8, G Jihlava, J. Masaryka 1) 21 b.

V případě rovnosti bodů rozhodla o pořadí vítězů a úspěšných řešitelů pravidla uvedená v soutěžním řádu MO. Kompletní výsledkovou listinu najdete na oficiálních stránkách MO (www.matematickaolympiada.cz).

Účast na výběrovém soustředění před 60. Mezinárodní matematickou olympiádou (IMO), které se konalo v předvelikonočním týdnu v Kostelci nad Černými lesy, si vybojoval všech deset vítězů ústředního kola v kategorii A. Z nich pak bylo vybráno šestičlenné české reprezentační družstvo pro aktuální IMO, která se uskuteční od 14. do 22. července 2019 ve Velké Británii (Bath). Na tomto soustředění bylo vybráno také šestičlenné družstvo (doplňené dalšími úspěšnými řešiteli z řad nematurantů) pro 13. ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO), která se bude konat v posledním srpnovém týdnu 2019 v Pardubicích. Podrobné zprávy o účasti českých reprezentačních týmů na 60. IMO, na 13. MEMO a také na 8. EGMO najdete v této rubrice v následujících číslech našeho časopisu.

Jaroslav Švrček

Ústřední kolo 68. ročníku Matematické olympiády kategorie P

Ústřední kolo 68. ročníku Matematické olympiády kategorie P se konalo v Benešově ve dnech 27.–29. 3. 2019. Jako obvykle přímo navazovalo na ústřední kolo MO kategorie A. Devět studentů, kteří letos postoupili do ústředního kola MO v obou nejvyšších kategoriích MO, tak absolvovali obě soutěže na jednom místě a v průběhu jednoho týdne. Celé ústřední kolo Matematické olympiády výborně připravili pracovníci Krajské komise MO Středočeského kraje a Gymnázia v Benešově. Zahájení kategorie P a teoretická část soutěže proběhly v konferenčním sále hotelu Benica, kde byli všichni účastníci ubytováni. V počítačových učebnách gymnázia probíhala praktická část a v prostorách školy se pak uskutečnilo také slavnostní zakončení ústředního kola.

Na přípravě a zajištění odborné části ústředního kola MO kategorie P se podíleli zejména pracovníci a studenti z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, kteří se postarali o přípravu soutěžních úloh, opravování a vyhodnocení odevzdaných řešení a přípravu soutěžního prostředí pro praktickou část soutěže. Spolupracovali také kolegové z Fakulty informatiky Masarykovy univerzity v Brně a z Fakulty informačních technologií ČVUT v Praze. V praktické části jsme použili novou verzi soutěžního systému CMS, který je využíván i při mezinárodních informatických olympiádách. Soutěžící s tímto systémem komunikují prostřednictvím webového rozhraní, mohou klást dotazy k úlohám, odevzdávat svá vypracovaná řešení soutěžních úloh a zpětně se také dozvídají, jak byla jejich odevzdaná řešení ohodnocena.

V letošním ročníku Matematické olympiády kategorie P jsme měli méně řešitelů, než obvykle. Do krajských kol postoupilo pouze 52 soutěžících a podle organizačního řádu MO polovina z nich byla vyhlášena úspěšnými řešiteli. Do ústředního kola MO-P bylo sice pozváno všech 26 úspěšných řešitelů krajských kol, maximální hranice 30 účastníků ústředního kola ale zůstala nenaplněna. Něco podobného se stalo teprve počtvrté za 34 let, co existuje kategorie P.

Největší zastoupení na letošním ústředním kole MO-P měl Jihomoravský kraj s deseti účastníky, z nichž dokonce sedm studuje na stejné škole – na gymnáziu na tř. Kpt. Jaroše v Brně. Druhou nejpočetnější delegaci

vyslala Praha, odkud bylo pět soutěžících. Čtyři kraje neměly v letošním ústředním kole žádného řešitele. Přesně polovina účastníků byla z nematuritních ročníků.

V prvním soutěžním dnu studenti řeší ve vymezeném čase 4,5 hodiny tři teoretické úlohy. Tato část soutěže má podobný charakter jako krajské kolo, zadané soutěžní úlohy jsou zaměřeny na návrh efektivních algoritmů. Jedna z úloh již tradičně využívá nějaký neobvyklý výpočetní model, který je zaveden pro celý ročník soutěže již v domácím kole a každý rok je jiný. Letošní model byl věnován on-line algoritmům.

Druhý soutěžní den je praktický a probíhá v počítačových učebnách za obdobných podmínek a podle stejných pravidel, jako jsou organizovány i mezinárodní středoškolské olympiády v informatice. Každý soutěžící pracuje na přiděleném osobním počítači se soutěžním prostředím a v průběhu 4,5 hodiny má za úkol vyřešit tři úlohy. Řešení praktických úloh je třeba dovést do podoby odladěných, plně funkčních programů. Odevzdané programy jsou již v průběhu soutěže okamžitě testovány pomocí předem připravené sady testovacích vstupních dat. Hodnotí se nejen správnost, ale pomocí nastavených časových limitů také rychlost výpočtu. V bodovém hodnocení lze díky tomu odlišit kvalitu různých řešení z hlediska časové složitosti použitého algoritmu. Řešitelé se průběžně dozvídají ohodnocení svých řešení, mají možnost je opravit a odevzdat opakovaně vícekrát.

Tradiční součástí ústředního kola Matematické olympiády bývá vždy i zajímavý doprovodný program. Organizátoři obvykle připravují jiný výlet pro účastníky kategorie A a jiný pro účastníky kategorie P, aby byl program stále zajímavý i pro ty studenty, kteří soutěží v obou kategoriích. Zatímco soutěžící kategorie A letos nejprve navštívili blízký zámek Konopiště a druhý den jeli na výlet na horu Blaník, pro účastníky kategorie P byla připravena exkurze do Centra sklářského umění Huť František v Sázavě. Zde se všichni mohli seznámit s historií i současností výroby skla u nás a prohlédnout si krásné umělecké předměty vyrobené ze skla. Každý si pak na památku odvezl skleničku, kterou si sám ozdobil zvoleným motivem pomocí techniky pískování.

Celé ústřední kolo 68. ročníku MO bylo zakončeno slavnostním vyhlášením výsledků kategorie P v prostorách benešovského gymnázia. Každá soutěžní úloha byla hodnocena nejvýše 10 body, celkem tedy mohli soutěžící získat maximálně 60 bodů. Zatímco v teoretické části každý z řešitelů nějaké body ztratil, v praktické části čtyři studenti vyřešili úlohy na plný počet 30 bodů. Podle součtu dosažených bodů z obou soutěžních dnů

dohromady se stanoví výsledné pořadí. Pomocná pravidla slouží k určení vzájemného pořadí těch soutěžících, kteří získali stejný počet bodů. V souladu s organizačním řádem Matematické olympiády se úspěšnými řešiteli stali ti studenti, kteří se umístili na prvních třinácti místech celkového pořadí. Šest nejlepších z nich bylo vyhlášeno vítězi ústředního kola.

Výsledky ústředního kola 68. ročníku Matematické olympiády kategorie P

Vítězové

1. Josef Minařík, 8/8, G tř. Kpt. Jaroše, Brno, 58 b., 2. Michal Jireš, 8/8, G F. M. Pelcla, Rychnov nad Kněžnou, 56 b., 3. Jiří Kalvoda, 6/8, G tř. Kpt. Jaroše, Brno, 53 b., 4. Jonáš Havelka, 7/8, G Jírovcova, České Budějovice, 52 b., 5. Radek Olšák, 8/8, Mensa gymnázium, Praha 6, 49 b., 6. Jan Kaifer, 3/4, G Jana Keplera, Praha 6, 48 b.

Úspěšní řešitelé

7. Viktor Fukala, 6/8, G Jana Keplera, Praha 6, 43 b., 8. Václav Janáček, 6/8, G tř. Kpt. Jaroše, Brno, 41 b., 9. Lenka Kopfová, 4/4, Mendelovo gymnázium, Opava, 41 b., 10. Jakub Šťastný, 8/8, G Brno-Řečkovice, 40 b., 11. Ondřej Sladký, 6/8, G Mikulášské nám., Plzeň, 31 b., 12. Matěj Kripner, 8/8, G Kladno, 30 b., 13. Michal Pácal, 7/8, G Jiřího z Poděbrad, Poděbrady, 28 b.

Na základě výsledků dosažených v ústředním kole 68. ročníku Matematické olympiády kategorie P byli všichni úspěšní řešitelé pozváni na krátké výběrové soustředění. To se uskutečnilo v Praze na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy dva týdny po skončení ústředního kola, konkrétně ve dnech 12.–13. 4. 2019. Cílem tohoto soustředění bylo vybrat reprezentanty pro obě mezinárodní olympiády v informatice. Při výběru reprezentantů počítáme body získané v ústředním kole MO-P a výsledky dosažené na soustředění.

Nejlepší čtyři řešitelé byli vybráni, aby reprezentovali Českou republiku na 31. mezinárodní olympiádě v informatice IOI 2019. Tato vrcholná celosvětová soutěž se bude konat ve dnech 4.–11. 8. 2019 v Ázerbájdžánu v hlavním městě Baku. Další čtyři mladší úspěšní řešitelé, kteří letos ještě nebudou maturovat, se zúčastní 26. středoevropské olympiády v informatice CEOI 2019. Středoevropskou olympiádu bude letos hostit Bratislava ve dnech 23.–29. 7. 2019. O průběhu a výsledcích obou mezinárodních olympiád v informatice vás budeme informovat v našem časopise.

Podrobné informace o celém 68. ročníku MO kategorie P, kompletní výsledková listina, texty soutěžních úloh a jejich vzorová řešení jsou k dispozici na adrese <http://mo.mff.cuni.cz/>. Na stejném místě se můžete seznámit i se staršími ročníky této soutěže a také se všemi aktuálními informacemi týkajícími se Matematické olympiády kategorie P.

Pavel Töpfer

Celostátní kolo Fyzikální olympiády 2019

Kulatá výročí bývají v lidském životě spojena s nejrůznějšími přívlastky, vyzrálý věk šedesáti let bývá spojován s jedním z nejtvrďších přírodních minerálů. V letošním školním roce do svého „diamantového“ ročníku dozrála Fyzikální olympiáda (a věřme, že v duchu původního řeckého významu slova *ἀδάμας* – nezničitelný – jich má před sebou ještě hodně). Kulaté, o deset let nižší výročí slaví letos i Mezinárodní fyzikální olympiáda (IPhO, ipho.org).

Celostátní kolo kategorie A 60. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2018/2019 hostil kraj, který je od vzniku samostatné ČR i sídlem ústřední komise FO – kraj Královéhradecký. Pořadatelem byla *Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové* (UHK, www.uhk.cz/prf/) spolu s *Gymnáziem Boženy Němcové* v Hradci Králové (www.gybon.cz) a soutěž proběhla pod záštitou primátora města Hradec Králové *Alexandra Hrabálka*, náměstkyně hejtmana Královéhradeckého kraje *Martiny Berdychové*, rektora UHK *Kamila Kuči* a děkana Přírodovědecké fakulty UHK *Pavla Trojovského*. Na základě výsledků krajských kol soutěže, jež proběhla 23. 1. 2019, přijelo změřit své síly celkem 50 soutěžících (z toho 5 dívek). Hostem slavnostního zahájení v aule UHK byl i pamětník všech celostátních kol *prof. Ing. Bohumil Vybíral, CSc.*, emeritní profesor UHK a místopředseda ústřední komise, který zavzpomínal na některé chvíle a osobnosti z historie soutěže. Atmosféru začátku soutěže podtrhl i slavnostní ohňostroj a následný raut.

Ve středu 27. 2. dopoledne čekaly soutěžící v učebnách budovy Gymnázia Boženy Němcové čtyři teoretické úlohy, s nimiž se museli vypořádat během pěti hodin. Autorem prvních tří byl *RNDr. Jan Thomas* (První české gymnázium Karlovy Vary), autorem čtvrté, která navazovala na studijní

text [1], *RNDr. Vladimír Wagner, CSc.* (Ústav jaderné fyziky AV ČR, Řež). První úloha s názvem *U-trubice* se zabývala rozhraním dvou kapalin v statické i rotující u-trubici. Řešitelé za ni získali v průměru 6,9 bodu z 10 možných, a podle názoru poroty nejoriginálnější řešení vypracoval *Viktor Fukala* (G J. Keplera, Praha). Druhá úloha s názvem *Píst s čočkou* kombinovala práci a změnu vnitřní energie dvou plynů v oddělených částech nádoby se zobrazením vlákna žárovky spojnou čočkou. Pro soutěžící byla zřejmě nejobtížnější, při nejnižším průměrném zisku 3,5 bodu porota ocenila zejména postup *Josefa Minaříka* (G tř. Kpt. Jaroše Brno). Třetí úloha *Dvakrát* obsahovala 4 části, v nichž se dvakrát zvětšila nebo zmenšila hodnota některého z parametrů. Soutěžící dosáhli v průměru 5,0 bodu a nejvíce zaujalo řešení nejlepší dívky v soutěži *Kateřiny Rosické* (G Kutná Hora). Čtvrtá úloha s názvem *Produkce hassia* byla věnována výpočtu rychlosti a energie jader při bombardování olověného terče jádru železa. Soutěžící získali v průměru 4,8 bodu a porota ocenila jako nejzdařilejší opět přístup *Viktora Fukaly* (G J. Keplera, Praha). Závěrečnou redakci zadání i autorského řešení úloh provedl *RNDr. Jan Šlégr, Ph.D.* (PřF UHK).

Ve čtvrtek 28. 2. dopoledne soutěžící ve dvou skupinách řešili praktickou úlohu, jejímž autorem byl *RNDr. Jan Šlégr, Ph.D.* (PřF UHK) a která se týkala studia vlastností permanentního magnetu, určení magnetické susceptibility, relativní permeability i podmínky magnetické levitace nad magnetem. Soutěžící získali v průměru 12,9 bodu a nejlepším experimentátorem porota vyhlásila *Martina Vavříka* (G Šumperk).

K celostátnímu kolu tradičně patří i bohatý navazující program. Ve středu 27. 2. odpoledne byly připraveny zajímavé přednášky v prostorách UHK a večer program v areálu Hvězdárny a planetária v Hradci Králové. Ve čtvrtek 28. 2. proběhly exkurze do laboratoří v nové budově Přírodovědecké fakulty UHK a odpoledne divadelní představení studentů univerzity.

Poslední den, v pátek 1. 3. dopoledne, proběhlo v aule UHK slavnostní vyhlášení výsledků, kterého se zúčastnila i předsedkyně JČMF *doc. RNDr. Alena Šolcová, Ph.D.* Uveďme základní statistické údaje: jedenáct účastníků (včetně dvou dívek) se stalo vítězi, dvacet dva úspěšnými řešiteli a sedmáct účastníky soutěže. Celkové průměrné hodnocení všech úloh bylo 33,2 bodu, tj. 55,3 % z možných 60. Na vítěze kromě zajímavých cen čekala i pozvánka na výběrové soustředění pořádané Katedrou fyziky Přírodovědecké fakulty UHK, z něhož vzejde pětice reprezentantů na rovněž jubilejní 50. mezinárodní fyzikální olympiádě, která proběhne 7.–15. července 2019 v izraelském Tel Avivu (viz www.ipho2019.org.il). Pomyslnou zlatou me-

daili vybojoval *Josef Minařík* (G tř. Kpt. Jaroše Brno), stříbrnou *Michal Jireš* (G F. M. Pecla Rychnov nad Kněžnou) a bronzovou *Jindřich Jelínek* (G Olomouc-Hejčín).

Uspořádání celostátního kola je nemyslitelné bez podpory a pomoci řady organizací a společností v regionu. Věcnými i finančními dary akci podpořili: *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy*, *Královéhradecký kraj*, *město Hradec Králové*, *Univerzita Hradec Králové*, *skupina ČEZ* a *Jednota Českých matematiků a fyziků*. Ubytování všem poskytl Domov mládeže při SPŠ, SOŠ a SOU Hradec Králové, Hradební. Zejména je však třeba poděkovat obětavým organizátorům z pořadající UHK – předsedovi ústřední komise *doc. RNDr. Janu Křížovi, Ph.D.*, *RNDr. Michaele Křížové, Ph.D.*, *RNDr. Filipu Studničkovi, Ph.D.* a předsedovi krajské komise Fyzikální olympiády Královéhradeckého kraje *Václavu Šádovi*, kteří se rozhodující měrou zasloužili o hladký průběh soutěže a příjemnou pracovní i slavnostní atmosféru.

Pro příští školní rok v 61. ročníku FO přebírá organizátorskou štafetu Středočeský kraj, konkrétně Gymnázium Václava Beneše Třebízského ve Slaném. Zájemci a příznivci soutěže najdou všechny potřebné aktuální informace včetně zadání i řešení úloh na čtenářům MFI jistě dobře známých internetových stránkách ÚKFO <http://www.fyzikalniolympiada.cz>.

Literatura

- [1] *Wagner, V. – Vícha, V. – Janout, Z.*: Hranice Mendělejevovy tabulky aneb jak produkovat a zkoumat stále těžší prvky. Knihovnička FO č. 103, Hradec Králové, 2018. Dostupné z: [fyzikalniolympiada.cz/texty/supertezke.pdf](http://www.fyzikalniolympiada.cz/texty/supertezke.pdf).

Výsledková listina celostátního kola

Vítězové

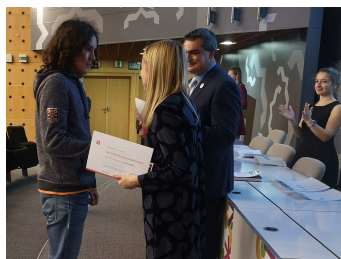
1. Minařík Josef (G tř. Kpt. Jaroše Brno, 54,5 b, 306,4 mb), 2. Jireš Michal (G F. M. Pecla Rychnov nad Kněž., 54,0 b, 302,3 mb), 3. Jelínek Jindřich (G Olomouc-Hejčín, 53,5 b, 301,4 mb), 4. Schmied Martin (G Jihlava, 51,5 b, 286,6 mb), 5. Fukala Viktor (G J. Keplera Praha, 50,0 b, 276,8 mb), 6. Vavřík Martin (G Šumperk, 48,5 b, 268,1 mb), 7. Herman Jaroslav (G tř. Kpt. Jaroše Brno, 46,5 b, 273,5 mb), 8. Zvoníček Václav (G tř. Kpt. Jaroše Brno, 44,5 b, 256,7 mb), 9. Rosická Kateřina (G Kutná Hora, 44,0 b, 248,9 mb), 10. Havelka Jonáš (G Jírovcova Č. Budějovice, 44,0 b, 241,2 mb), 11. Novoveská Miroslava (Masarykovo G Plzeň, 42,0 b, 226,3 mb).

Úspěšní řešitelé

12. Klement David (G Nad Alejí Praha, 40,5 b, 221,8 mb), 13. Blaha Jiří (G Uherské Hradiště, 40,0 b, 229,1 mb), 14. Uher Josef (G J. Keplera Praha, 39,0 b, 219,4 mb), 15. Koňářík Filip (G F. Palackého V. Meziříčí, 37,5 b, 212,8 mb), 16. Veselý Richard (G Budějovická Praha, 37,5 b, 207,8 mb), 17. Balej Karel (G Rokycany, 36,5 b, 203,2 mb), 18. Obořil Jan (G Brno Bystrc, 36,0 b, 198,6 mb), 19. Hořák Jaroslav (G F. X. Šaldy Liberec, 36,0 b, 194,2 mb), 20. Prokop Matěj (G Dašická Pardubice, 35,0 b, 186,3 mb), 21. Kalvoda Jiří (G tř. Kpt. Jaroše Brno, 33,5 b, 172,3 mb), 22. Mendl Adam (G P. de Coubertina Tábor, 33,0 b, 177,7 mb), 23. Křížová Radka (G J. Heyrovského Praha, 32,5 b, 189,7 mb), 24. Židek Andrej (G J. K. Tyla Hradec Králové, 32,5 b, 182,8 mb), 25. Hladil Josef (G Mikulášské nám. Plzeň, 32,0 b, 168,9 mb), 26. Červenák Jakub (První české G Karlovy Vary, 31,5 b, 173,3 mb), 27. Kundratová Lucie (G Zlín, 29,5 b, 176,8 mb), 28. Jůza Michal (G Benešov, 29,5 b, 160,2 mb), 29. Kimmer Michael (G Lovosice, 29,0 b, 169,9 mb), 30. Zahradník Petr (G dr. V. Šmejkalů Ústí n. L., 29,0 b, 154,2 mb), 31. Jakš Pavel (G Česká Česká Budějovice, 28,5 b, 164,6 mb), 32. Nejezchleb Lukáš (G Dašická Pardubice, 28,0 b, 151,3 mb), 33. Vlk Petr (SPŠ Zlín, 27,5 b, 150,2 mb).



Řešení teoretických úloh



Vítěz celostátního kola *Josef Minařík* (G, tř. Kpt. Jaroše, Brno)



Řešení experimentální úlohy

Lukáš Richterek

© Foto: Archiv PřF UHK