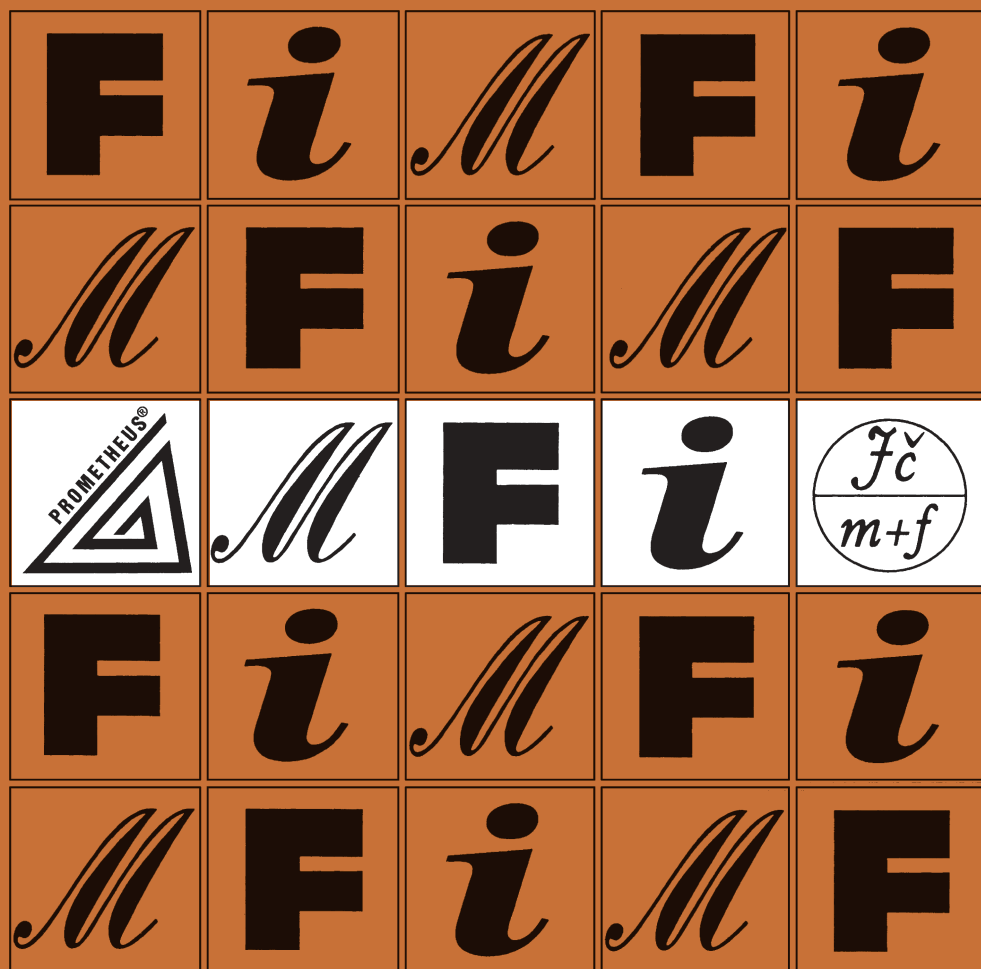


MATEMATIKA 3 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXVIII (2019), číslo 3

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Oldřich Lepil – vedoucí redaktor a redaktor pro fyziku

Jaroslav Švrček – redaktor pro matematiku

Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Lukáš Richterek – redaktor WWW stránek

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Štěpán Hubálovský, Růžena Kolářová, Miluše Lachmannová, Pavel Leischner, Dana Mandíková, Oldřich Odvárko, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Emanuel Svoboda, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel Töpfer, Bohumil Vybíral

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>P. Surynková:</i> Geometrie pohybu I: Trajektorie bodů	161
<i>J. Blažek, P. Leischner:</i> Kuželosečky a Apolloniovy kružnice	175
Zajímavé matematické úlohy	186

FYZIKA

<i>E. Svoboda:</i> Nové definice základních jednotek SI	190
<i>Č. Kodejška:</i> Náhrada Ruhmkorffova induktoru zdroji vysokého napětí	201
<i>M. Klátil, D. Jezbera:</i> Rentgenové záření ve škole i mimo školu 2	207

INFORMATIKA

<i>L. Spíchal:</i> Rozklad zlomků na zlomky kmenné pomocí Geogebry a softwaru SAS/STAT	215
<i>P. Töpfer:</i> Navlákání korálků (Úlohy z MO kategorie P, 38. část)	229

ZPRÁVY

<i>J. Švrček:</i> 8. Evropská dívčí MO (EGMO)	236
---	-----

Geometrie pohybu I: Trajektorie bodů

PETRA SURYNKOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Mé vlastní dlouholeté zkušenosti z výuky na Matematicko-fyzikální fakultě UK a všeobecně celková situace studia matematiky a geometrie na VŠ ukazují na vážné mezery studentů v porozumění elementární geometrii a v dokazování platností geometrických tvrzení již na SŠ [6, 10]. Tento nedostatek je třeba řešit už na středoškolské úrovni. Psal o tom ve svém článku také prof. Kuřina, [4], již v roce 1987. Studium geometrii je potřeba se významně věnovat už na základní a střední škole, a to platí i v dnešní době.

Zaměříme se na specifickou oblast geometrie, na které si ukážeme, jak lze toto studium obohatit o jiný pohled. Cílem příspěvku je na konkrétních příkladech ukázat, že k definici křivek, můžeme přistupovat z pohledu kinematické geometrie. Při vyšetřování různých typů křivek můžeme s úspěchem realizovat experimenty s jednoduchými pomůckami a využívat moderního široce rozšířeného softwaru GeoGebra. Z těchto experimentů můžeme vycházet při dokazování platnosti zkoumaných geometrických jevů. Na základě experimentů lze vytvářet hypotézy, které následně ověřujeme již klasickými matematickými prostředky, tj. geometrická tvrzení dokazujeme synteticky nebo s užitím analytické geometrie.

Na střední škole se pravděpodobně s pojmem kinematické geometrie explicitně nesetkáme, ale intuitivně je nám tento pojem jistě zřejmý. Bude nás zajímat pohyb. Křivku tedy budeme chápat jako *dráhu* (*trajektorii*) nějakého plynule se pohybujícího bodu, což je přístup k vytvoření křivky

velmi názorný a přirozený. Zanedbáme přitom některé fyzikální aspekty. Nebude nás zajímat rychlost a zrychlení pohybujících se rovinných útvarů. Středoškolští studenti takové zavedení křivky budou chápat určitě lépe než abstraktní pojetí, že křivka je spojitým obrazem nějakého intervalu reálných čísel. Řekneme-li, že je křivka dráhou nějakého pohybujícího se bodu a že se pohyb uskutečnil v konečném časovém úseku $\langle a, b \rangle$, můžeme o křivce začít velmi intuitivně hovořit jako o spojitém zobrazení, které každému okamžiku $t \in \langle a, b \rangle$ přiřadí bod v rovině či v prostoru. Kdybychom hledali korektní a přesto velmi intuitivní a matematicky správné definování křivek, můžeme nahlédnout do celé řady skript. Jmenujme například [1] a [2]. Zde jsou popisovány křivky s využitím už pokročilého aparátu. Pokud hledáme zdroj, který se věnuje středoškolskému pojetí definování křivek, doporučuji k nahlédnutí například [3], kde jsou zpracovány kuželosečky. Z dalších knižních zdrojů jmenujme klasické učebnice a sbírky úloh jako např. [7, 8]

Při studiu křivek se zcela nevyhneme užití formálního matematického popisu, ale doplníme jej právě o kinematickou interpretaci. Matematický aparát budeme potřebovat k tomu, abychom ukázali, které křivky jsme kinematickým určením získali. K tomu, abychom křivky zaváděli kinematicky, nám výborně poslouží software GeoGebra, jehož užívání se v posledních letech na základních a středních školách těší velké oblibě jak mezi učiteli tak mezi žáky a studenty.

Ze střední školy známe hned celou řadu křivek. Na úplném začátku studia geometrie jsme se setkali s přímkou. Pojem je to velmi abstraktní a vystačil by nám na celý článek, protože odpověď na otázku *Co je to přímka?* není snadná. Setkali jsme se rovněž s kuželosečkami – s elipsou (ano, sem patří i kružnice), s hyperbolou, s parabolou. Tyto křivky jsme definovali nejčastěji jako řezy válcovou a kuželovou plochou, tedy dalším možným způsobem, jak je možné na křivky nahlížet. Možná jsme se setkali, například v matematickém semináři nebo dokonce ve fyzice, i s jinými křivkami. Studovali jsme například trajektorie vodorovného a šikmého vrhu. Na vysoké škole jsme studium prohloubili o další typy křivek a zaváděli jsme je různými způsoby. Zůstaňme ale na škole střední.

Geometrické pojmy jako bod, přímka a obecně křivka vznikaly v matematice abstrakcí nějakých reálných objektů. V celém vývoji matematiky docházelo k postupnému zpřesňování pojmu křivka. Naším záměrem není vyčerpát možné definice křivek, ale přistoupit k problematice z praktického hlediska. Zvolme proto opačný přístup a abstraktním křivkám připojme

jejich geometrické obrazy a modely z praxe. Zkusme poukázat na to, že modely křivek se používají v mnoha odvětvích a setkáváme se s nimi v každodenním životě.

Připomeneme si známé i méně známé konstrukce některých speciálních křivek a ukážeme si příklady využití křivek, respektive jejich modelů, v praxi. Zůstaneme přitom ve sférách středoškolské geometrie.

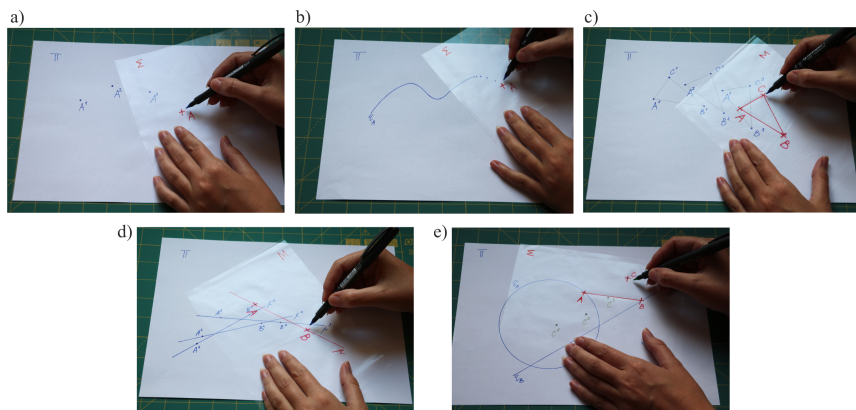
Lehký úvod do kinematické geometrie v rovině

Chceme-li hovořit o kinematické geometrii v rovině, musíme si vysvětlit několik základních pojmů. Jak jsme již uvedli, *dráha* nebo také *trajektorie* bodu je křivka, kterou bod při pohybu opisuje. Vylučujeme případ, kdy by trajektorií bodu byl bod. Přidejme ještě další možné kinematické vytvoření křivky, neboť se nemusíme omezovat pouze na pohybující se body. Obálka křivky, je křivka (může mít více větví nebo se dokonce redukovat na bod), kterou vytváří pohybující se křivka. Existuje-li křivka, která se dotýká všech poloh pohybující se křivky a každý její bod je dotykovým bodem pohybující se křivky, nazýváme tuto křivku obálkou. Platí tedy, že v každé poloze se pohybující křivka dotýká své obálky, tj. křivka v dané poloze a její obálka mají v bodě dotyku společnou tečnu. Trajektorii bodu A budeme značit τ_A , obálku křivky a budeme značit (a) .

Přijmeme následující úmluvu. Rovinu, ve které leží trajektorie bodů a obálky křivek, označme Π . Tato rovina se nepohybuje, zůstává na místě, tedy i vše, co v ní leží, je neměnné. Pohybující se body, či křivky, leží v rovině, kterou označíme Σ . Rovina Σ se jako celek pohybuje po rovině Π , přičemž jsme stále v dvourozměrném prostoru. Body a křivky roviny Σ opisují v rovině Π trajektorie a obálky.

Pohyb roviny Σ po rovině Π lze velmi jednoduše simulovat v praxi. Bod, který se pohybuje, si nakreslíme na průsvitnou fólii, tedy rovinu Σ . Můžeme do fólie vytvořit díрку, přes kterou budeme moci zakreslovat polohu bodu v rovině Π . S fólií hýbeme („kloužeme“) po rovině Π , to může být tabule, list papíru, či školní sešit. V několika polohách zakreslíme v rovině Π bod skrz díрку ve fólii, tedy body trajektorie, viz v obr. 1a) polohy A^1 , A^2 , A^3 bodu A . Když se nám podaří vykreslovat polohy bodů spojitě, dostaneme empirický model trajektorie, viz obr. 1b). Můžeme také zakreslovat najednou více trajektorií, tedy na fólii zvolíme více bodů. Všimněme si velmi důležitého faktu. Jakmile vyznačíme body na fólii, tyto body už vůči sobě nemění polohu, tj. vzdálenosti mezi nimi jsou neměnné, podívejme se na obr. 1c). Říkáme, že objekty v rovině Σ tvoří tzv. *neproměnnou*

rovinnou soustavu, která se jako celek pohybuje po *neproměnné rovině soustavě* Π , viz například [11]. Uvědomme si také, že fólii nikdy neotočíme, neustále se pohybuje pouze ve dvoudimenzionálním prostoru. Všechny polohy objektů jsou tedy přímo shodné, jak je patrné rovněž z obr. 1c). Fólii lze využít i k simulaci pohybu křivek. Tj. na fólii si zakreslíme křivku nebo křivky, jejichž obálky nás zajímají a fólii opět hýbeme po rovině Π . Záleží, jaké jsme zvolili typy křivek, bude nyní složitější přes fólii zakreslovat jejich polohy, ale řekněme, že máme pro jednoduchost přímky. Stačí tedy v každé poloze zakreslit přes fólii umístění dvou bodů těchto přímek a dostaneme tak jednoznačně určenou jejich polohu, viz obr. 1d). Podaří-li se nám potom v rovině Π zakreslit křivku, která se všech takto získaných poloh přímek dotýká, dostaneme hledanou obálku. Pro složitější křivky využijeme možností programu GeoGebra.



Obr. 1 Pohyb roviny Σ po rovině Π realizovaný pomocí průsvitné fólie

Samozřejmě nás nyní napadne, jak budeme definovat pohyb s fólií. Nezadáme-li žádné omezující podmínky, nemůžeme určit, jaké typy trajektorií a obálek ve výsledku dostaneme. Řekneme, že pohyb je dán jednoznačně, jestliže je jednoznačně dána každá poloha pohybující se roviny Σ , tj. fólie. Stačí se trochu zamyslet a hned nám bude jasné, co nám tato věta říká. Protože jsou jednotlivé polohy pohybujících se objektů přímo shodné, stačí nám znát přemístěné polohy dvou různých bodů, tj. nějaké úsečky roviny Σ . Jelikož musíme k jednoznačnému určení pohybu znát každou polohu takové pohybující se úsečky, znamená to, že je nutné znát každou

polohu krajních bodů této úsečky, tj. trajektorie těchto krajních bodů. Pro určenost pohybu tedy platí následující:

Pohyb roviny Σ je jednoznačně určený, známe-li trajektorie dvou různých bodů roviny Σ .

Na obr. 1e) můžeme vidět trajektorie τ_A a τ_B dvou různých bodů A a B . Trajektorie τ_A je kružnice, trajektorie τ_B je přímka. Na fólii jsme určili dva různé body A a B , tedy je jednoznačně dána jejich vzdálenost. Nyní už je pohyb jednoznačně určený, tj. bod A se pohybuje po své trajektorii τ_A a bod B po své trajektorii τ_B . Můžeme určit trajektorii nějakého dalšího bodu C , na obr. 1e) jsou zakresleny tři polohy C^1, C^2, C^3 bodu C . V kinematické geometrii obvykle navíc zadáváme výchozí polohu pohybující se roviny Σ . Může se totiž stát, že některé části zadaných trajektorií jsou nedostupné a body se ve skutečnosti pohybují jen po jejich částech, viz například [11].

Lze odvodit také jiná určení pohybu, ale vždy je možné převést tato určení na zadání pomocí dvou trajektorií. Zatím se tedy věnujme pouze tomuto a podívejme se na některé konkrétní příklady. V našich úvahách přitom vyloučíme pohyby, jejichž všechny trajektorie jsou buď soustředné kružnice, nebo navzájem rovnoběžné přímky. V prvním případě se jedná o rotaci ve druhém případě o posunutí.

Příklady kinematicky vytvořených křivek

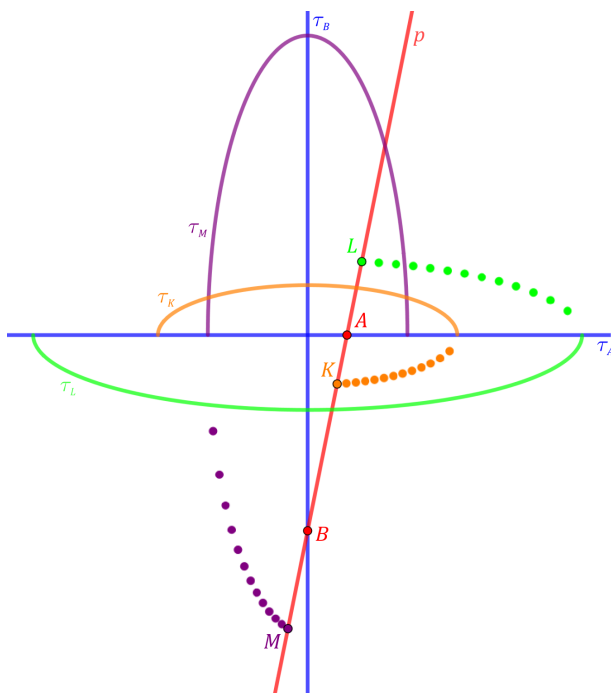
Úloha

Mějme dány dvě různoběžné přímky τ_A a τ_B . Sestrojte trajektorie různých bodů K, L, M přímky $p = AB$, jestliže se bod A pohybuje po přímce τ_A a bod B po přímce τ_B . Bod K je vnitřním bodem úsečky AB , bod L leží na polopřímce BA za bodem A a bod M leží na polopřímce AB za bodem B .

Řešení. a) Začneme jednodušším případem, kdy jsou trajektorie τ_A a τ_B navzájem kolmé přímky, sledujme obr. 2. Situaci jsme zakreslili v programu GeoGebra a vykreslili jsme část trajektorií a dále několik izolovaných poloh pohybujících se bodů. To samé můžeme zrealizovat opět pomocí papíru a průsvitné fólie, tj. na papír zakreslíme kolmé trajektorie τ_A a τ_B , na fólii jednotlivé body A, B, K, L, M . Je zřejmé, že vzdálenosti bodů jsou konstantní.

Abychom mohli v GeoGebře pohyb definovat, museli jsme zakreslit dané trajektorie τ_A a τ_B a výchozí polohu objektů. V našem případě jsme

nejdříve definovali bod A tak, že se může pohybovat pouze po trajektorii τ_A (v GeoGebre tzv. částečně vázaný objekt). Dále jsme si zvolili délky úseček MB , BK , KA a AL . Pro danou polohu bodu A jsme tím pádem dostali polohu přímky AB , neboť víme, že bod B se pohybuje po své trajektorii τ_B . V tomto případě takto dostaneme pro danou polohu bodu A dvě polohy bodu B (bude patrné také z výpočtu), tj. dvě polohy pohybující se soustavy Σ , do obrázku jsme zakreslili polohu jednu. Tento přístup uijeme i pro analytické odvození typů křivek. Nyní můžeme pohybovat bodem A po trajektorii τ_A a sledovat, co se děje s ostatními body. Příklad zpracovaný v GeoGebre lze otevřít ve webovém prohlížeči, viz [9].



Obr. 2 Pohyb zadaný dvěma navzájem kolmými přímými trajektoriemi

Podle obr. 2 a experimentů s fólií či v GeoGebre, které zvládne samostatně i student ve škole či při domácí přípravě, se můžeme domnívat, že výslednými trajektoriemi jsou různé ovály, zřejmě elipsy. Přesvědčme se o tom prostředky analytické geometrie.

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic, trajektorie τ_A a τ_B nechť splývají s osami x , y . Libovolný bod $X = [x, y]$ přímky $p = AB$ opisuje při daném pohybu trajektorii τ_X . Vzdálenost bodů $A = [a, 0]$ a $B = [0, b]$ označme d a zvolme ji pevně, $d > 0$. Souřadnice bodu B tedy lze zapsat v závislosti na této délce, tj. $B = [0, \pm\sqrt{d^2 - a^2}]$. Libovolný bod X přímky p můžeme vyjádřit $X = A + (B - A)t$, $t \in \mathbb{R}$, tj. zapsáno v souřadnicích

$$\begin{aligned}x &= a - at \\y &= bt\end{aligned}\tag{1}$$

Označíme-li vzdálenost bodu X od bodu A jako v , platí $v = |td|$ a $|t| = v/d$. Dále víme, že platí

$$a^2 + b^2 = d^2.\tag{2}$$

Vyjádříme-li a a b z (1) a dosadíme do (2), po úpravě dostáváme

$$\frac{x^2}{d^2(1-t)^2} + \frac{y^2}{d^2t^2} = 1.\tag{3}$$

Pro $t > 0$ a $t \neq 1$, tj. leží-li bod X na úsečce AB (a je různý od bodů A , B) nebo na polopřímce AB za bodem B (příkladem jsou body K a M), dostáváme jako trajektorii bodu X elipsu se středem v počátku soustavy souřadnic, poloosami o velikostech $d - v$ a v nebo $v - d$ a v na souřadnicových osách a rovnicí

$$\frac{x^2}{(d-v)^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1.\tag{4}$$

Pro $t < 0$, tj. leží-li bod X na polopřímce BA za bodem A (příkladem je bod L), dostáváme jako trajektorii bodu X elipsu se středem v počátku soustavy souřadnic, poloosami o velikostech $d + v$ a v na souřadnicových osách a rovnicí

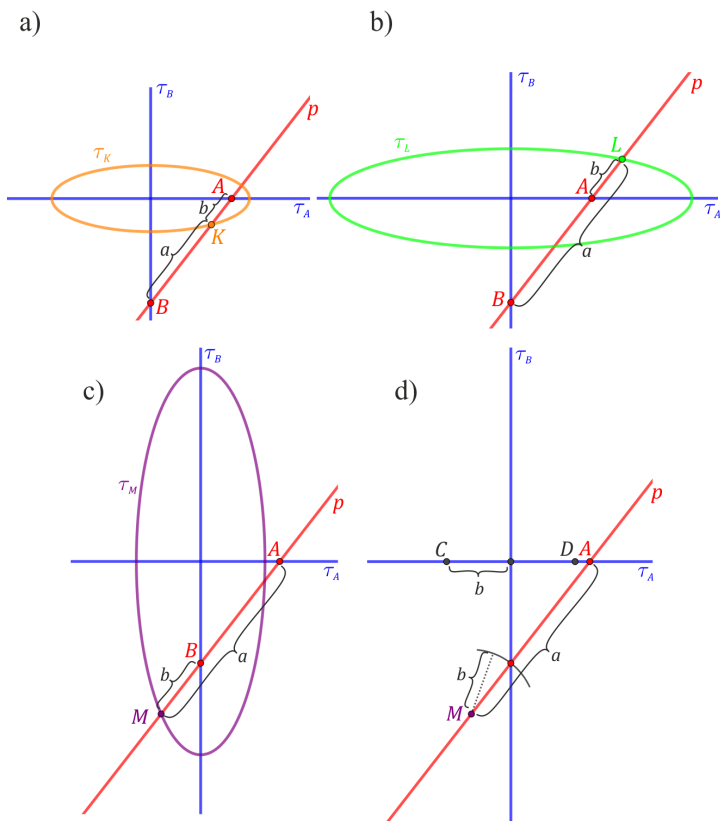
$$\frac{x^2}{(d+v)^2} + \frac{y^2}{v^2} = 1.\tag{5}$$

Parametrický popis elipsy pro libovolné $t_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ můžeme zapsat ve tvaru

$$[d(1 - t_0) \cdot \cos u, dt_0 \sin u], \quad u \in (0, 2\pi).\tag{6}$$

Z našich úvah rovněž vyplývají známé konstrukce elipsy tzv. *rozdílová a součtová proužková konstrukce*. Pro danou hlavní nebo vedlejší osu elipsy

(zde míněno jak poloha, tak délka) a libovolnou polohu bodu elipsy, tj. jednu polohu bodů K , L , nebo M , podle předchozího určíme velikost chybějící osy, viz obr. 3.



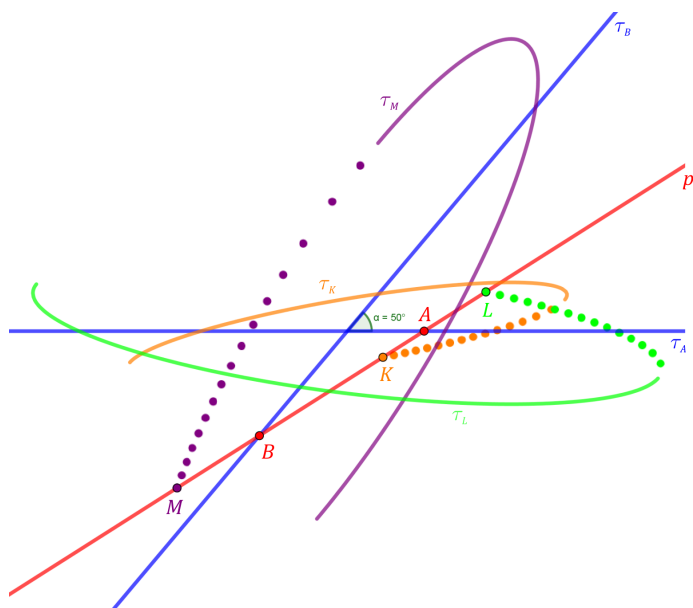
Obr. 3 Součtová a rozdílová konstrukce elipsy

V části a) můžeme vidět platnost součtové proužkové konstrukce a v částech b) a c) platnost rozdílové proužkové konstrukce. V části d) na obr. 3 je potom demonstrováno, jak pro danou vedlejší osu CD elipsy a bod M lze rozdílovou proužkovou konstrukcí dohledat velikost hlavní poloosy elipsy. Součtová proužková konstrukce by se dala použít obdobně.

Zamysleme se ještě nad tím, pro jaké hodnoty bude trajektorie bodu X speciálně kružnicí. Hledáme pro jaké t ve vyjádření (3), jsou poloosy elipsy

stejně dlouhé. Je zřejmé, že pro $t = 1/2$ dostáváme kružnici s poloměrem v , tedy je-li bod X středem úsečky AB . Jiný případ rovnosti poloos nenaštane.

b) Přejdeme k obecnému případu, kdy trajektorie τ_A a τ_B svírají jiný než pravý úhel, sledujme obr. 4.



Obr. 4 Pohyb zadaný dvěma různoběžnými přímými trajektoriemi svírajícími obecný úhel

Vymodelování pohybu v GeoGebře či s pomocí fólie zůstává stejné, pouze se změní úhel mezi trajektoriemi. V programu GeoGebra jsme opět vykreslili části trajektorií a několik izolovaných poloh pohybujících se bodů. Příklad zpracovaný v GeoGebře lze také otevřít ve webovém prohlížeči, viz [9]. Opět se můžeme domnívat, že výslednými trajektoriemi jsou podle experimentů elipsy. Nyní se však jedná o komplikovanější problém. Na první pohled je z našich experimentů patrné, že eliptické trajektorie nemají osy v základní poloze, tj. nesplývají se souřadnicovými osami. S kuželosečkami v obecné poloze se na střední škole pravděpodobně nesetkáváme, přesto si řešení rozeberme s využitím pouze středoškolských poznatků analytické geometrie.

Zvolme kartézskou soustavu souřadnic, trajektorie τ_A nechť splývá s osou x , průsečík trajektorií τ_A a τ_B je počátek soustavy souřadnic, úhel, který trajektorie τ_A a τ_B svírají, označme α . Libovolný bod $X = [x, y]$ přímky $p = AB$ opisuje při daném pohybu trajektorii τ_X . Vzdálenost bodů $A = [a, 0]$ a $B = [b_x, b_y]$ označme d a zvolme ji pevně. Libovolný bod X přímky p můžeme vyjádřit $X = A + (B - A)t$, $t \in \mathbb{R}$, tj. zapsáno v souřadnicích

$$\begin{aligned}x &= a - (b_x - a)t \\y &= b_y t\end{aligned}\tag{7}$$

Označíme-li vzdálenost bodu X od bodu A jako v , platí $v = |td|$ a $|t| = v/d$. Dále víme, že platí

$$(b_x - a)^2 + b_y^2 = d^2,\tag{8}$$

neboť $\|AB\| = d$.

Trajektorie τ_B bodu B svírá s osou x úhel α , tedy platí

$$b_y = kb_x,\tag{9}$$

kde $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Vyjádříme-li a , b_x a b_y z (7) a (9) a dosadíme do (8), po úpravě dostáváme

$$t^2 k^2 x^2 + (1 + k^2(1 - t)^2)y^2 - 2tkxy - d^2 t^2 k^2(1 - t)^2 = 0.\tag{10}$$

Opět bychom mohli rozlišit případ pro $t > 0$ a $t \neq 1$, tj. leží-li bod X na úsečce AB (a je různý od bodů A , B) nebo na polopřímce AB za bodem B (příkladem jsou body K a M) a dosadit do předpisu (10) $t = v/d$. Nebo dále můžeme uvažovat případ pro $t < 0$, tj. leží-li bod X na polopřímce BA za bodem A (příkladem je bod L), a dosadit do předpisu (10) $t = -v/d$. Rovnice (10) popisuje elipsu v obecné poloze (oproti případu s kolmými trajektoriemi se v rovnici trajektorie τ_X objevuje smíšený kvadratický člen xy), osy elipsy nejsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. Že se skutečně jedná o rovnici elipsy, lze ukázat například tak, že determinant matice kuželosečky, tzv. diskriminant kuželosečky, je nenulový a determinant matice kvadratických členů, tzv. diskriminant kvadratických členů, je větší než nula, viz [5]. Tato problematika je už nad rámec osnov střední školy, ale ukažme si rovnici této elipsy pro konkrétní hodnoty t , d , k . Nechť $t = -1$ (bod X leží na polopřímce BA za bodem A ve vzdálenosti d od bodu A), $d = 2$ a $k = \sqrt{3}/3$, tedy trajektorie τ_A a τ_B svírají

úhel $\alpha = \pi/6$. Po dosazení do rovnice (10) dostáváme předpis

$$x^2 + 7y^2 + 2\sqrt{3}xy - 16 = 0. \quad (11)$$

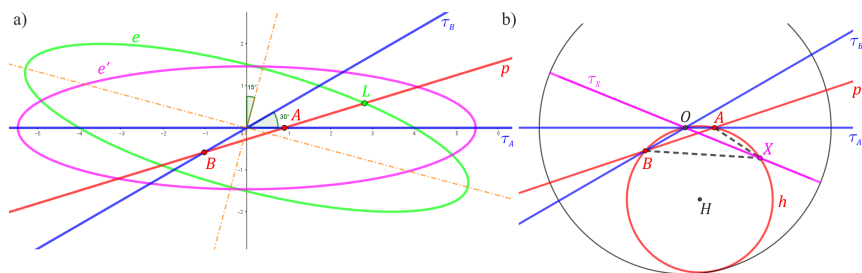
Lze ukázat, že (11) je rovnice elipsy e , která vznikla otočením elipsy e' v základní poloze s rovnici

$$\frac{x'^2}{8} + \frac{y'^2}{2+\sqrt{3}} = 1 \quad (12)$$

o orientovaný úhel $\varphi = -\pi/12$. Pro výpočet jsme použili transformační rovnice

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi, \end{aligned} \quad (13)$$

tj. do rovnice (11) jsme za x a y dosadili transformační rovnice (13) a výraz u smíšeného kvadratického členu $x'y'$ jsme položili roven nule. Tím jsme určili orientovaný úhel otočení φ . Dosazením transformačních rovnic s tímto úhlem do předpisu (11) jsme získali rovnici (12). Příklad zadání pohybu s těmito konkrétními vstupními hodnotami je ilustrován na obr. 5a). Náznačeno je rovněž otočení elipsy e' v základní poloze o orientovaný úhel φ do polohy e .



Obr. 5 Elipsa e jako trajektorie bodu L při pohybu zadaném dvěma různoběžnými přímkami svírajícími úhel 30° a odpovídající elipsa e' v základní poloze a trajektorie bodu X kružnice h

V úloze jsme tímto popsali tzv. *eliptický pohyb* a odvodili jsme trajektorie speciálně zvolených bodů. Vyslovme následující definici.

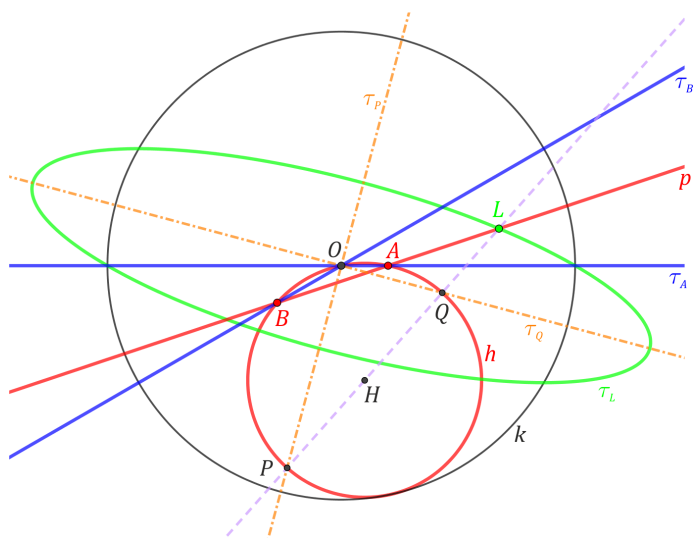
Definice

Pohyb roviny Σ , jejíž dva různé body opisují přímé různoběžné trajektorie, se nazývá *eliptický pohyb*.

Mohlo by se nyní zdát, že trajektorie všech bodů roviny Σ při eliptickém pohybu jsou elipsy. My jsme spočítali, že tomu tak je pro všechny body přímky $p = AB$, které jsou různé od bodů A, B . Zkusme zvolit jiný bod roviny Σ a podívejme se, jakou bude vykreslovat trajektorii. Sestrojme v libovolné poloze pohybu kružnici h procházející body A, B a O , kde O je průsečík trajektorií τ_A a τ_B . Uvědomme si velmi hezkou vlastnost. Kdybychom totiž sestrojili kružnici h i v jiných polohách pohybu, tj. stále by byla určena třemi body A, B a O , vždy bychom dostali stejný poloměr. Pokud navíc uvažujeme, že jsou trajektorie τ_A a τ_B navzájem kolmé, střed této kružnice h leží ve středu úsečky AB . Kružnici h můžeme proto také „rozpohybovat“, nechť tedy leží v pohybující se rovině Σ (rýsuje ji na fólii). Při pohybu, se kružnice h pohybuje společně s body A, B a stále prochází bodem O . Bod X , jehož trajektorie τ_X nás bude nyní zajímat, zvolme libovolně na této kružnici, viz obr. 5b). Tj. v libovolné poloze kružnice h jsme určili její libovolný bod X (bod X jsme nakreslili na fólii). Při experimentech s fólií a s GeoGebrou vidíme, že tentokrát elipsu nezískáme. Jen pozor na správné určení bodu X a jeho trajektorie především v GeoGebře. Protože bod X zakresluje na fólii, do pohybující se roviny Σ , nemůže tento bod při pohybu měnit polohu vůči bodům A a B , to znamená, že všechny polohy trojúhelníku ABX jsou přímo shodné. V GeoGebře je tedy nutné volit pevné vzdálenosti bodu X od bodů A a B . Trajektorie τ_X bodu X je v tomto případě úsečka. Důkaz provedme tentokrát syntetický. Jak jsme poznamenali, velikosti úseček AX a BX se při pohybu nemění. Všechny tři body leží v každé poloze pohybu na kružnici h opět v příslušné poloze, tedy délky oblouků AX a BX kružnice h jsou při pohybu konstantní. Úhel $\sphericalangle AOX$ a stejně tak úhel $\sphericalangle BOX$ tedy zůstávají při pohybu také konstantní, neboť vždy jedno rameno těchto úhlů, τ_A nebo τ_B , je pevné, druhé rameno úhlu OX musí být proto také pevné. Trajektorie τ_X je proto úsečka ležící na přímce OX . Už snadno se nahlédne, že délka této úsečky je dvojnásobek průměru kružnice h a že střed úsečky splývá s bodem O .

Využijme tuto vlastnost pro další konstrukci. Vraťme se v úloze, k případu, kdy trajektorie τ_A a τ_B svírají jiný než pravý úhel, sledujme obr. 6. Pro elipsu v obecné poloze, kterou jsme získali jako trajektorii τ_L bodu L , určíme osy a hlavní a vedlejší vrcholy. Pro určení os elipsy využijeme vlast-

nosti, kterou jsme odvodili výše a to, že body speciálně zvolené kružnice h opsali při pohybu jako své trajektorie úsečky. Hledáme tedy takové přímé trajektorie dvou bodů kružnice h , které jsou navzájem kolmé. V dané poloze pohybu sestrojíme kružnici h (prochází body A , B a O), střed této kružnice označme H . Dále sestrojíme přímku HL (spojnici středu kružnice h a bodu L , který vykresluje trajektorii τ_L) a určíme průsečíky kružnice h s přímkou HL , označme tyto průsečíky jako P , Q . Podle předchozího už víme, že trajektorie τ_P a τ_Q bodů P a Q jsou průměry kružnice k se středem v bodě O a poloměrem rovným dvojnásobku poloměru kružnice h . Přímkou OP , OQ jsou osy elipsy τ_L , neboť tato konstrukce odpovídá proužkové konstrukci vysvětlené v úloze, viz obr. 6.



Obr. 6 Konstrukce os elipsy v obecné poloze, která vzniká jako trajektorie bodu v eliptickém pohybu

Pro úplnost již bez důkazu doplňme, že trajektorie každého jiného bodu eliptického pohybu, tj. bodu, který v dané poloze neleží na příslušné poloze kružnice h a navíc je různý od bodů A a B , jsou elipsy.

Poznámka

Kružnice h se nazývá *hybná polodie* a lze pomocí ní také určit pohyb rovinné soustavy tzv. *odvalováním*. O této problematice se plánujeme zmínit v dalších pojednáních o kinematicky vytvořených křivkách.

Závěr

V příspěvku jsme ukázali výpočty kinematicky vytvořených křivek, speciálně elips, s využitím jednoduchých fyzických modelů a s podporou dynamického softwaru GeoGebra. Některé obrázky z GeoGebry jsou dostupné rovněž online [9]. Zde si lze vyzkoušet dynamičnost úloh a zkoumat další zadání, případně typy křivek.

Možnosti zadávání pohybu jsme ani zdaleka nevyčerpali. V příštím pojednání se zaměříme na křivky zadávané také obálkami a odvalováním hybné polodie po pevné polodii a ukážeme si, kde všude se s kinematicky vytvořenými křivkami lze setkat v běžném životě.

Poděkování

Tato publikace byla podpořena programem Univerzitní výzkumná centra UK č. UNCE/HUM/024 a projektem PROGRES Q17 Příprava učitele a učitelská profese v kontextu vědy a výzkumu.

Literatura

- [1] *Boček, L., Kubát, V.*: Diferenciální geometrie křivek a ploch. SPN, Praha, 1983.
- [2] *Hamhalter, J., Tišer, J.*: Integrální počet funkcí více proměnných. Skripta ČVUT, Praha, 2005.
- [3] *Kočandrla, M., Boček, L.*: Analytická geometrie, Matematika pro gymnázia, 1995.
- [4] *Kuřina, F.*: Začarovaný kruh školské geometrie. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 32 (1987), č. 5, s. 290–295.
- [5] *Lávička, M.*: Geometrie 2. Pomocný učební text, Západočeská univerzita, Plzeň, 2006.
- [6] *Leischner, P.*: O některých nedostacích výuky školské geometrie. Sborník příspěvků konference Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, Vydavatelský servis, Plzeň, 2012, s. 101–105.
- [7] *Petáková, J.*: Matematika – Příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na VŠ. Prometheus, Praha, 1998.
- [8] *Polák, J.*: Přehled středoškolské matematiky. Prometheus, Praha, 2008.
- [9] *Surynková, P.*: GeoGebra kniha – Geometrie pohybu. Dostupné na: <https://ggbm.at/pkba7egj>
- [10] *Trávníček, S.*: Porozumění matematice. Matematika, fyzika, informatika, roč. 24 (2015), č. 1, s. 6–17.
- [11] *Urban, A.*: Deskriptivní geometrie II. SNTL – Nakladatelství technické literatury, Praha a Vydavatelstvo technickej literatúry, Bratislava, 1967.

Kuželosečky a Apolloniovy kružnice

JIŘÍ BLAŽEK – PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

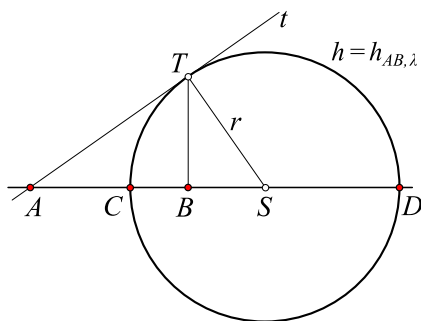
Pappova *Sbírka* (*Synagoge*, 3.–4. století n. l.) zmiňuje dva starší poznatky starověkých matematiků. Shrnujeme je do vět 1 a 2.

V nedávno otištěném příspěvku [1] jsme využili příbuznost obou tvrzení k důkazu ekvivalence různých definic elipsy. Postup, jenž tam byl uveden, lze aplikovat i na hyperbolu. Ponecháme na čtenáři, zda si to ověří, a poznatky rozšíříme z poněkud pozměněného pohledu.

Věta 1 (*Apolloniova kružnice*)

Nechť jsou v rovině dány dva různé body A, B a kladné číslo $\lambda \neq 1$. Množinou všech bodů X dané roviny, pro něž platí $|AX| : |BX| = \lambda$, je kružnice $h_{AB,\lambda}$ sestrojená nad průměrem CD , kde C a D jsou body přímky AB splňující vztah

$$|AC| : |BC| = |AD| : |BD| = \lambda. \quad (1)$$



Obr. 1 Apolloniova kružnice

Důkaz věty 1 nalezne čtenář v článku [2]. Čtveřici bodů (A, B, C, D) , které splňují vztah (1), budeme nazývat *harmonická čtveřice bodů*. Kruž-

nice $h_{AB,\lambda}$ se nazývá *Apolloniova kružnice*. K dané dvojici (A, B) a číslu λ nalezneme zbývající body C a D jako obrazy bodu B ve stejnoolehlostech se středem A a s koeficienty $\frac{\lambda}{\lambda \pm 1}$. Zřejmě se vždy jeden z bodů C, D nachází uvnitř úsečky AB a druhý vně. Vztah (1) je invariantní vůči záměně bodů C a D .

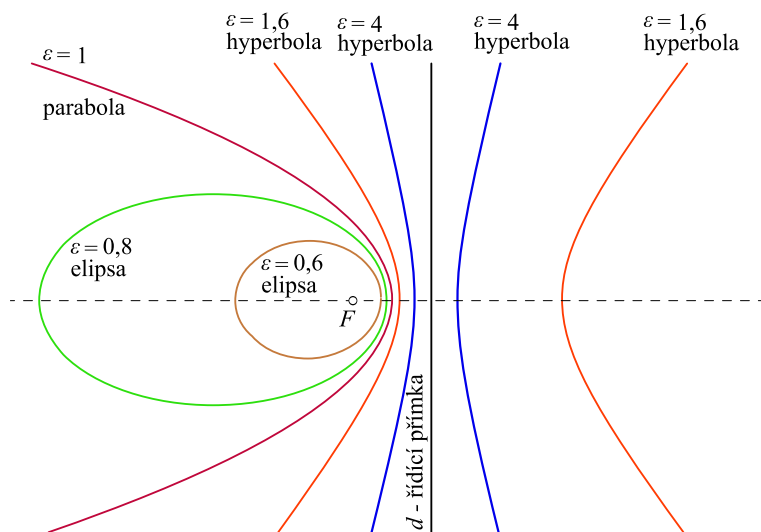
Při označení podle obr. 1 můžeme první z rovností (1) přepsat na tvar

$$(|AS| - r) : (r - |BS|) = (|AS| + r) : (r + |BS|),$$

kde S je střed kružnice h a r její poloměr. Po úpravě odtud dostaneme vztah

$$|AS| \cdot |BS| = r^2, \quad (2)$$

který umožňuje využít Eukleidovu větu o odvěsně k doplnění trojice (B, C, D) (nebo (A, C, D)) na harmonickou čtveřici (A, B, C, D) , viz obr. 1.



Obr. 2 Kuželosečky jako množiny bodů X s vlastností $\frac{|XF|}{|Xd|} = \varepsilon$

Věta 2 (Kuželosečky)

Nechť je dáno kladné číslo ε a rovina, v níž je umístěna přímka d a bod $F \notin d$. Množinou všech bodů X , pro něž v dané rovině platí

$$\frac{|XF|}{|Xd|} = \varepsilon, \quad (3)$$

je a) elipsa, právě když $\varepsilon < 1$, b) parabola, právě když $\varepsilon = 1$, c) hyperbola, právě když $\varepsilon > 1$.

Tvrzení b) z věty 2 je vlastně ohnisková definice paraboly. Ekvivalenci tvrzení a) s ohniskovou definicí elipsy jsme dokázali v [1]. Pro hyperbolu je důkaz ekvivalence s ohniskovou definicí analogický. Než se seznámíme s názornějším důkazem, připomeneme si základní poznatky o hyperbole.

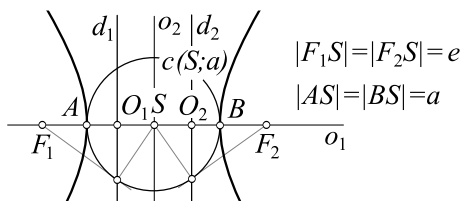
Ohnisková definice a základní vlastnosti hyperboly

Jsou-li F_1 a F_2 body dané roviny, pak množina všech bodů X v rovině, pro něž platí

$$||F_1X| - |F_2X|| = 2a, \quad \text{kde } 0 < 2a < 2e = |F_1F_2|. \quad (4)$$

se nazývá *hyperbola*. Body F_1 a F_2 nazýváme *ohniska hyperboly*, čísla a , e jsou (v daném pořadí) *hlavní poloosa* a *výstřednost (excentricita)* hyperboly. *Relativní excentricita (poměrná výstřednost)* hyperboly je číslo $\varepsilon = \frac{e}{a}$.

Z definice plyne, že hyperbola je souměrná podle přímky F_1F_2 , která se nazývá *hlavní osa hyperboly* a značí se o_1 . Je souměrná i podle své *vedlejší osy* o_2 , což je osa úsečky F_1F_2 . Je též středově souměrná podle průsečíku obou os, *středu* S *hyperboly*. Kružnice $c(S; a)$ se nazývá *vrcholová kružnice hyperboly*. Pomocí obr. 3 snadno ověříme, že její průsečíky A a B s osou o_1 splňují vztah (4). Jsou to *vrcholy hyperboly*.



Obr. 3 Hyperbola, její vrcholová kružnice c a řídicí přímky d_1 , d_2

Sestrojíme dále přímky d_i ($i \in \{1, 2\}$) jako kolmice na hlavní osu v jejích bodech O_i , které získáme doplněním trojic (F_i, A, B) na harmonické čtveřice (F_i, O_i, A, B) . Přímku d_i budeme nazývat *řídicí přímka hyperboly příslušná ohnisku* F_i .

Rovnost (2) má pro danou situaci tvar $|F_i S| \cdot |O_i S| = a^2$, z něž plyne

$$|O_i S| = \frac{a^2}{e}. \quad (5)$$

S využitím obr. 3 dále zjistíme, že platí

$$\begin{aligned} |O_1 A| &= |AS| - |O_1 S| = \frac{a(e-a)}{e} = |O_2 B|, \\ |O_1 B| &= \frac{a(e+a)}{e} = |O_2 A|. \end{aligned}$$

Pomocí těchto vztahů a obrázku lze ověřit, že

$$\frac{|F_i A|}{|O_i A|} = \frac{|F_i B|}{|O_i B|} = \frac{e}{a} = \varepsilon = \frac{|F_i A|}{|d_i A|} = \frac{|F_i B|}{|d_i B|}. \quad (6)$$

Platí tedy následující věta.

Věta 3

Apolloniovy kružnice $u_{F_1 O_1, \varepsilon}$ a $u_{F_2 O_2, \varepsilon}$ jsou totožné s vrcholovou kružnicí c hyperboly.

Kuželosečky jako obálky soustavy Apolloniových kružnic

Do dalších úvah přidáme množinu $\mathcal{M}$ všech přímek $p \parallel o_1$, položíme $\{H_i\} = p \cap d_i$ a přímky $F_i H_i$ označíme q_i . Jejich průsečík U leží na ose o_2 . Průměty bodů A a B na přímky q_i ve směru rovnoběžném s osou o_2 označíme po řadě A_i a B_i (obr. 4).

Kružnice $u = (U; |UA_1|)$ má průměry $A_i B_i$ a je totožná s Apolloniovými kružnicemi $u_{F_i H_i, \varepsilon}$, neboť rovnoběžné promítání zachovává poměry na přímkách. Pomocí jejích vlastností a obr. 4 snadno ověříme, že (bez ohledu na to, zda ve vztazích zvolíme $i = 1$, nebo $i = 2$) pro její průsečíky P_1 a P_2 s přímkou p platí

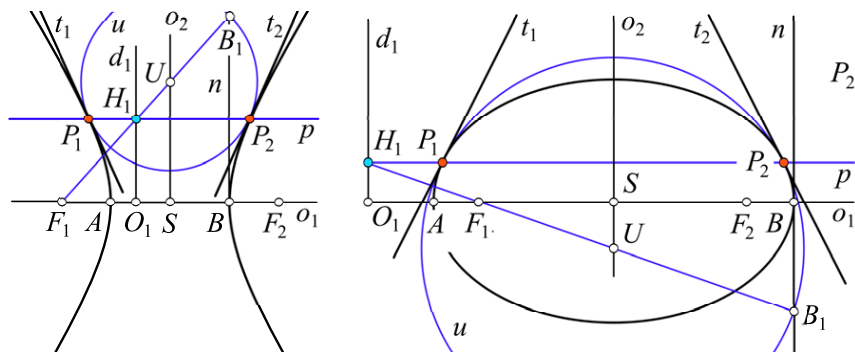
$$\frac{|P_1 F_i|}{|P_1 d_i|} = \frac{|P_1 F_i|}{|P_1 H_i|} = \varepsilon = \frac{|P_2 F_i|}{|P_2 H_i|} = \frac{|P_2 F_i|}{|P_2 d_i|}. \quad (7)$$

Zjistili jsme, že množina $\mathcal{P}$ všech bodů P_i , kde $i \in \{1, 2\}$ a $p \in \mathcal{M}$ je rovna množině z věty 2 pro $\varepsilon > 1$, ať již zvolíme $F = F_1$ a $d = d_1$, nebo $F = F_2$ a $d = d_2$. Přímky p totiž pokrývají celou rovinu a vztah (3) na nich splňují jen průsečíky P_i přímky p s kružnicí u .

Využití Apolloniových kružnic ke konstrukci kuželoseček

Uvedené poznatky umožňují jednoduchou konstrukci bodů P kuželosečky ve zvolené vzdálenosti od její hlavní osy.

Je-li kuželosečka dána například vrcholy A, B a ohniskem F_1 umístěnými na ose o_1 , doplníme nejprve do zadání přímku o_2 , d_1 a kolmici n na osu o_1 v bodě B (obr. 7).



Obr. 7 Konstrukce bodů a tečen hyperboly a elipsy

Konstrukci bodů pak provádíme takto: Ve zvolené vzdálenosti vedeme rovnoběžku p s osou o_1 a její průsečík s přímkou d_1 označíme H_1 . Body U a B_1 nalezneme jako průsečíky přímky F_1H_1 s přímkami o_2 a n . Nakonec sestrojíme kružnici $u(U; |UB_1|)$ a body $P_i \in p \cap u$. Tečny t_1, t_2 kružnice u v těchto bodech jsou tečnami kuželosečky.

Jinou konstrukci jsme uvedli pro elipsu v poznámce 3 v článku [1]. Využívala poznatek, který zobecníme do věty 5.

Pro další úvahy zavedeme *řídící kružnici* $k(F_2; 2a)$ kuželosečky jako obraz vrcholové kružnice c ve stejnolehlosti $\mathcal{H}_{F_1, 2}$. Z ohniskové definice plyne, že pro každý bod $N \in k$ je průsečík P přímky F_2N s osou o úsečky F_1N bodem hyperboly.

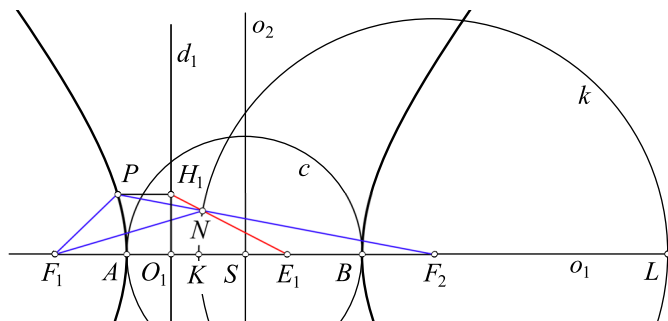
Věta 5

Jestliže je bod P kuželosečky určen bodem N na řídící kružnici k a H_1 je kolmý průmět bodu P na řídící přímkou d_1 , pak přímka H_1N prochází obrazem E_1 ohniska F_1 v osově symetrii podle přímkou d_1 .

Důkaz provedeme pro hyperbolu. Pro elipsu je analogický. Bod P hyperboly znázorněný na obr. 8 je zřejmě i obrazem bodu F_2 ve stejnolehlosti

$\mathcal{H}_{N,\kappa}$, kde

$$|\kappa| = \frac{|NP|}{|NF_2|} = \frac{|F_1P|}{2a} \quad (8)$$



Obr. 8 K důkazu věty 5

Stejnolehlost $\mathcal{H}_{F_1,2}$ zobrazuje úsečku O_1S na úsečku E_1F_2 . Odtud a z (5) plyne

$$|E_1F_2| = 2\frac{a^2}{e}. \quad (9)$$

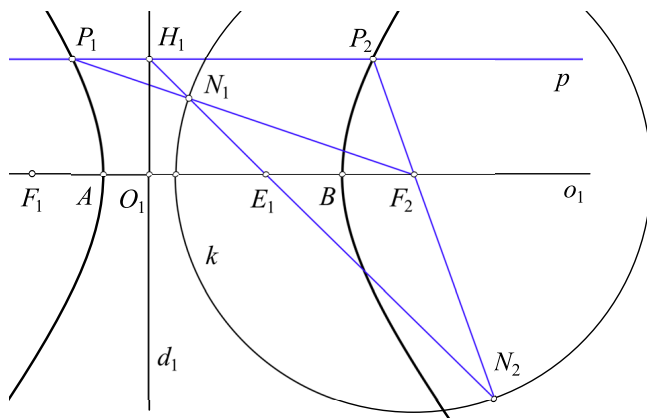
Z věty 2 a vztahů (8) a (9) dále zjistíme

$$|PH_1| = \frac{|F_1P|}{\varepsilon} = \frac{|\kappa| \cdot 2a}{\varepsilon} = |\kappa| \cdot \frac{2a^2}{e} = |\kappa| \cdot |E_1F_2|.$$

Stejnolehlost $\mathcal{H}_{N,\kappa}$ tedy zobrazuje úsečku F_2E_1 na úsečku PH_1 a bod E_1 do bodu H_1 . Přímka E_1H_1 prochází středem N stejnoolehlosti.

Ověření, že postup důkazu lze úspěšně použít i pro bod druhé větve hyperboly, přenecháme čtenáři. Jiný důkaz věty 5 lze provést zobecněním části důkazu věty 4 z článku [1].

Konstrukci bodů hyperboly s pomocí věty 5 znázorňuje obr. 9: Ve zvolené vzdálenosti od osy o_1 zvolíme bod $H_1 \in d_1$ a sestrojíme body N_i jako průsečíky přímky E_1H_1 s řídicí kružnicí k . Hledané body P_i jsou průsečíky přímek F_2N_i s přímkou $p \parallel o_1$ vedenou bodem H_1 . Analogickou konstrukci pro elipsu jsme uvedli v [1].

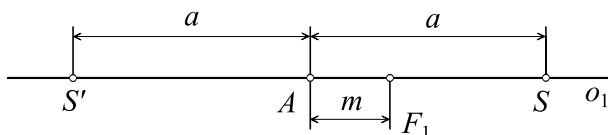


Obr. 9 Využití věty 5 ke konstrukci bodů hyperboly

Řešená úloha místo závěru

Věta 2 nabízí otázku jak se liší elipsa od hyperboly, když jsou jejich relativní excentricity blízké číslu 1. Řešení níže uvedené úlohy pomocí dynamické geometrie umožní žákům vytvořit si o tom názornou představu.

Úloha. Pomocí dynamické geometrie sestrojte všechny kuželosečky, které mají v dané rovině pevně zvolen vrchol A a ohnisko F_1 , jestliže navíc platí $a = k \cdot |AF_1|$, kde $k > 1$. Zkoumejte jejich tvar pro různé hodnoty a .



Obr. 10 Ke konstrukci středu kuželosečky

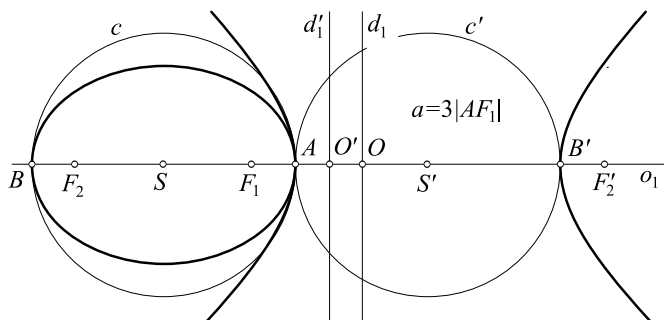
Řešení. Kružnice $l(A; a)$ protne osu o_1 v bodech S a S' . Při označení podle obr. 10 je S' středem hyperboly a S středem elipsy. Platí

$$\varepsilon', \varepsilon = \frac{a \pm m}{a} = 1 \pm \frac{m}{a} = 1 \pm \frac{1}{k}$$

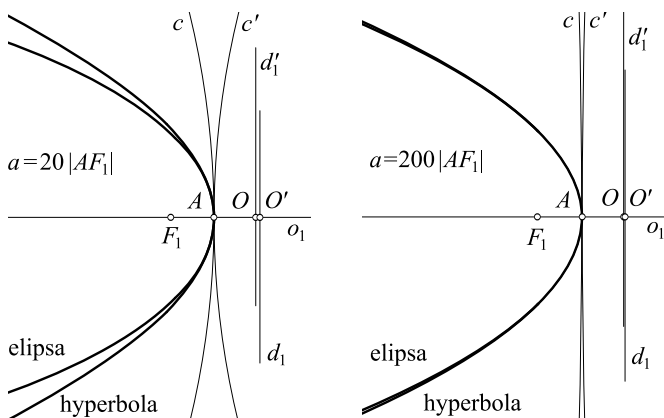
a odtud

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon' = \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon = 1.$$

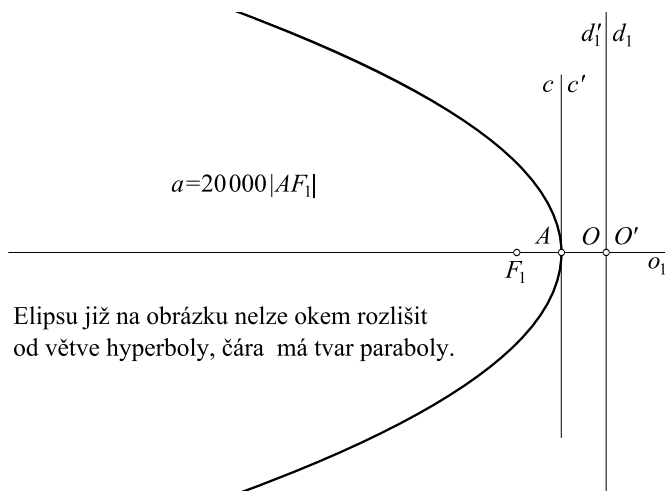
Obrázky 11 až 13 ilustrují vyřešení úlohy v *Cabri*. Body A a F_1 byly zvoleny pevně a číslo k jako volitelný parametr. Ke zvolené hodnotě k program vždy určí $a = k \cdot |AF_1|$ a zobrazí středy S , S' (pokud nejsou příliš daleko), řídicí přímky d , d' a vrcholové kružnice c , c' . Konstrukci kuželo-sečky provádí z jejích pěti bodů sestrojených jedním z výše uvedených postupů. Pomocné čáry jsou skryty.



Obr. 11 Elipsa a hyperbola pro $a = 3|AF_1|$



Obr. 12 Elipsa a hyperbola pro $a = 20|AF_1|$ a pro $a = 200|AF_1|$



Obr. 13 Elipsa a hyperbola pro $a = 20\,000|AF_1|$

Literatura

- [1] *Blažek, J., Leischner, P.*: Jak souvisí Apolloniovy kružnice s elipsou? MFI, roč. 28 (2019), č. 2, s. 81–91.
- [2] *Leischner, P.*: Polibky kružnic – Intermezzo. MFI, roč. 24 (2015), č. 3, s. 177–184.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 255 a 256 můžete zaslat nejpozději do 15. 12. 2019 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, případně v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 255

Nechť CD je výška tupoúhlého trojúhelníku ABC s tupým úhlem při vrcholu B . Kružnice s průměrem CD protíná stranu AC v bodě E a úsečku BE v bodě F . Dokažte, že platí

$$|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle ECD| + |\sphericalangle FCD|.$$

Jacek Uryga

Úloha 256

Určete, kolika různými způsoby lze obarvit stěny pravidelného osmismětu osmi různými barvami tak, aby každá stěna byla obarvena jednou barvou a různé stěny byly obarveny různými barvami. Obarvení čtyřstěnu považujeme za stejná, pokud se shodují v některém jeho otočení.

Pavel Calábek

Dále uvádíme řešení úloh 251 a 252, jejichž zadání jsme zveřejnili v prvním čísle nového (28.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 251

Je dán čtyřúhelník $ABCD$. Označme P , Q po řadě paty kolmic z vrcholů C , D ke straně AB . Předpokládejme, že body P , Q leží na úsečce AB a platí $|PQ| = \frac{1}{2}|AB|$. Dokažte, že $|DA| + |AB| + |BC| > |AC| + |BD|$.

Josef Tkadlec

Řešení. Označme R takový bod úsečky PQ , pro který platí $|AQ| = |QR|$. Jeho existence plyne z nerovnosti

$$|AQ| \leq |AB| - |PQ| = \frac{1}{2}|AB|.$$

$$\frac{1}{2}|AB| = |PQ| = |PR| + |RQ|$$
$$|RP| = |PB|,$$
$$|AC| < |AR| + |RC| = |AR| + |BC|$$
$$|BD| < |DR| + |RB| = |DA| + |RB|.$$
$$|AC| + |BD| < |DA| + |AR| + |RB| + |BC| = |DA| + |AB| + |BC|,$$

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Amálie Dostálková* *Darian Poljak* *Vít Ulehla*, všichni z GJŠ v Přerově, *Jakub Michna* a *Štěpán Postava*, oba z GMK v Bílovci.

187

Úloha 252

Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro něž mají rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0,$$

$$x^3 + bx^2 + ax + 1 = 0,$$

právě jeden společný kořen.

Jaroslav Švrček

Řešení. Společný kořen obou rovnic je také kořenem rovnice

$$0 = (x^3 + ax^2 + bx + 1) - (x^3 + bx^2 + ax + 1) = (a - b)x(x - 1). \quad (1)$$

a) V případě $a = b \in \mathbb{R}$ jsou obě rovnice shodné a mají tvar

$$0 = x^3 + ax^2 + ax + 1 = (x + 1)[x^2 + (a - 1)x + 1].$$

Číslo -1 je tak kořenem obou zadaných rovnic a bude jediným reálným kořenem buď

(i) v případě, že kvadratická rovnice

$$x^2 + (a - 1)x + 1 = 0$$

nemá reálné kořeny, což znamená, že její diskriminant

$$(a - 1)^2 - 4 = (a - 3)(a + 1)$$

je záporný, tedy právě když $a \in (-1; 3)$,

(ii) nebo v případě, že číslo -1 je jediným kořenem kvadratické rovnice

$$x^2 + (a - 1)x + 1 = 0.$$

Pak ale -1 je jejím dvojnásobným kořenem a platí

$$0 = x^2 + (a - 1)x + 1 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1,$$

což nastane pro $a = 3$.

b) V případě $a \neq b$ snadno vidíme, že číslo 0 nemůže být kořenem ani jedné ze zadaných rovnic, proto tyto rovnice mohou mít společný pouze kořen 1 , musí tak platit

$$a + b + 2 = 0,$$

tedy $b = -(a + 2)$. Z podmínky $a \neq b$ dostáváme $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. V tomto případě obě rovnice nemohou jiné společné kořeny, protože ty by byly opět kořeny rovnice 1.

- Obě zadané rovnice tak mají v případě $(a, b) = (a, a)$, kde $a \in (-1; 3)$, jediný společný kořen -1 .
- Obě zadané rovnice dále mají jediný společný kořen 1 v případě $(a, b) = (a, -2 - a)$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Poznámka 1

Redakce bohužel neobdržela žádné správné řešení, řešitelé vždy nějakou drobnou chybičkou byli blízko správné hodnoty 101. Někteří řešitelé uvažovali kořeny obou rovnic v oboru komplexních čísel. Pokud by uvedli, že obě rovnice mají jediný společný kořen v případech $a = b = 3$ a $b = -2 - a$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, bylo by jejich řešení také uznáno za správné. Všichni řešitelé, kteří mají částečně vyřešenou úlohu, správně přišli na podmínku $b = -2 - a$. Zde však nezkoumali, zda některá z rovnic nemá 1 jako násobný kořen, což by se dalo po (nesprávném) konstatování, že pro $a = b$ mají rovnice tři společné kořeny, považovat za konzistentní přístup.

Poznámka 2

V případě $a = b = -1$ mají obě rovnice tvar

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$

a dva společné kořeny -1 a 1 .

Správné řešení zaslala *Michaela Svatošová* z GMK v Bílovci.

Neúplné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Amálie Dostalíková*, *Darian Poljak*, *Vít Ulehla*, *Jakub Zdráhal*, *Adam Zemánek*, všichni z GJŠ v Přerově a *Marek Šíkula* z GMK v Bílovci.

Pavel Calábek

Nové definice základních jednotek SI

EMANUEL SVOBODA

MÚ ČVUT, Praha

Generální konference pro váhy a míry (CGPM) schválila na svém 26. zasedání ve Versailles 16. listopadu 2018 změnu základních definic jednotek soustavy SI (redefinice). Změna vstoupila v platnost na Světový den metrologie 20. května 2019 ([1, 2, 3]).

Sada sedmi základních jednotek jako taková zůstala zachována, tj. *sekunda*, *metr*, *kilogram*, *kelvin*, *ampér*, *mol* a *kandela*, ale principiálně byly změněny definice kilogramu, ampéru, kelvinu a molu. Stávající definice sekundy, metru a kandely se osvědčily, takže jsou nadále považovány za dostatečně vyhovující. Předpokládá se ale, že nové znění definice sekundy bude vzhledem k pokrokům v metrologii změněno kolem r. 2026 na základě frekvence hyperjemného přechodu ^{133}Cs , jejíž jednotkou je reciproká sekunda.

Podstatou redefinic je to, že všechny základní jednotky jsou nyní pevně vázány na sedm vybraných fyzikálních konstant, jejichž hodnoty jsou dohodou fixovány (považují se za pevně stanovené). Jinak řečeno, nové definice vycházejí z předpokladu, že všechny základní jednotky jsou vyjádřeny s použitím tzv. „tvaru s explicitní konstantou“, ve kterém je základní jednotka definována nepřímým stanovením přesné hodnoty všeobecně uznávaných fundamentálních fyzikálních konstant daných strukturou hmoty v celém vesmíru. Toto východisko pro redefinice základních jednotek SI bylo definitivně vybráno poté, když se potvrdilo světovými metrologi-

kými institucemi, že je možné s mimořádnou přesností stanovit číselné hodnoty uvažovaných konstant (např. Planckovy konstanty h) a pomocí nich definovat základní jednotky soustavy SI.

Byl vybrán soubor následujících sedmi definujících konstant s přesně definovanými hodnotami [1]:

- frekvence záření, které vzniká při přechodu atomu cesia ^{133}Cs mezi dvěma hladinami velmi jemné struktury základního stavu

$$\Delta\nu_{\text{Cs}} = 9\,192\,631\,770 \text{ Hz}$$

- rychlost světla ve vakuu

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

- Planckova konstanta

$$h = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

- elementární náboj

$$e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

- Boltzmannova konstanta

$$k = 1,380\,649 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

- Avogadrova konstanta

$$N_{\text{A}} = 6,022\,140\,76 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

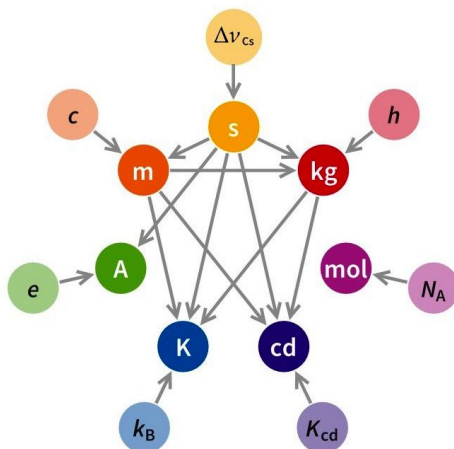
- světelná účinnost monochromatického záření frekvence 540 THz je

$$K_{\text{cd}} = 683 \text{ lm} \cdot \text{W}^{-1}$$

V tom spočívá nejdůležitější a největší změna SI. Systém již není zaveden pomocí sedmi základních jednotek, jak tomu bylo dosud, nýbrž pomocí sedmi základních veličin a jim příslušejících konstantních (fixovaných) hodnot. Relativní nejistota určení sedmi vybraných konstant je podle definice automaticky nulová. Tím se samozřejmě částečně změnily i hodnoty veličin, kterých se konstanty týkají, např. molární plynová konstanta R , Faradova konstanta F a další.

Poznámka. Mezi výše uvedené konstanty nebyla záměrně zařazena gravitační konstanta G , jejíž aktuální hodnota $(6,674\,30 \pm 0,000\,15) \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ (viz CODATA 2018) je známa jako hodnota s velkou nejistotou měření ve srovnání např. s měřením Planckovy konstanty h [4].

Změna v dokumentech CGPM a v různých dosud vyšlých člancích pojednávajících o redefinici jednotek SI se vyjadřuje graficky, jak je znázorněno na obr. 1. Logo nové SI, Le Système International d'Unités, je na obr. 2.



Obr. 1 Vztah mezi vybranými veličinami pro definice základních jednotek SI (převzato z https://cs.wikipedia.org/wiki/Nov%C3%A9_definice_SI)



Obr. 2 Logo nové SI (převzato BIPM.CC BY-ND 4.0)

Důvody ke změnám čtyř definic základních jednotek

Jak je všeobecně známo, základní jednotka hmotnosti *kilogram* byla jako poslední základní jednotkou SI odvozovanou od svého prototypu (mezinárodního fyzického etalonu, artefaktu vytvořeného jako váleček ze slitiny platiny a iridia) uchovávaného v Mezinárodním úřadu pro míry a váhy ve Francii (obr. 3). Každá členská země organizace Metrická konvence měla kopii mezinárodního prototypu, kterou pravidelně přivážela do Mezinárodního úřadu pro míry a váhy (označován zkratkou BIPM), aby se zjistil případný rozdíl mezi originálem a národním etalonem. Uvádí se (viz např. [4]), že při těchto kontrolách a také při různých čistících procedurách (otěry) ztratil mezinárodní etalon za posledních více než 100 let na hmotnosti asi $50\text{ }\mu\text{g}$. Tato hmotnost sice odpovídá přibližně hmotnosti zrnka písku či o něco méně, než je hmotnost lidského vlasu, ale když byl kilogram definován jako aktuální hmotnost prototypu, docházelo vlastně ke změnám této hmotnosti.



Obr. 3 Mezinárodní prototyp kilogramu (zdroj: BIPM)

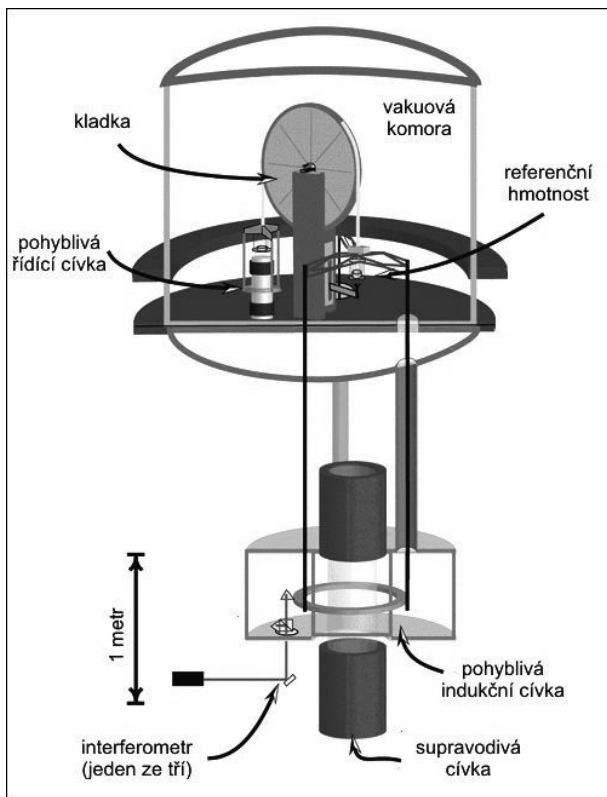
Hodnota jednoho kilogramu neodpovídala stále stejnému počtu částic v etalonu. To se ukazovalo čím dál tím více jako neuspokojivé pro metrologii po vědecké stránce (jako nepřesný způsob měření kilogramu). Navíc vědci po delší dobu přicházeli s námitkami, že etalony se mohou teoreticky ztratit nebo mohou být poničeny. Proto vědci vyžadovali, aby byla přijata „elegantnější“ definice založená na něčem univerzálním, zafixovaném na základních konstantách přírody. Problém s dosavadní definicí kilogramu byl také při měření malých hmotností (řádově mikrogramy a méně), např. při dávkování léků.

Uvedené problémy znamenaly, že nové definici jednotky kilogram vědci věnovali mnoho let značné úsilí. Postupně se ukázalo, že nejvhodnější realizace kilogramu je přes *Planckovu konstantu* h [5]. V roce 2018 bylo získáno metrologickými instituty dostatek přesných měření této konstanty (nejistota měření lepší než $2 \cdot 10^{-8}$). Jako nejpresnější metody odvození kilogramu pomocí h se ukázala jednak metoda využívající tzv. *Kibblovy váhy* (využita čtyři měření [5, 6]), jednak metoda křemíková koule (také využita čtyři měření).

Základní schéma měření pomocí Kibblových vah, navržených v r. 1975 B. P. Kibblem z anglické Národní fyzikální laboratoře (NPL), je na obr. 4. Experiment s těmito vahami se nazývá *Watt Ballance* (výkonové váhy) a jeho základní princip je jednoduchý. Tíha referenčního tělesa (s referenční hmotností) je kompenzována přes kladku protizávažím. Na rameno tělesa s testovací hmotností také působí magnetická síla vyvolaná interakcí cívky s permanentním magnetem. Proud cívkou je ovládán rezistorem, který je kalibrován kvantovým standardem (využito tzv. *Josephsonova jevu*). K měření napětí je využito kvantového Hallova jevu. Měřením proudu a napětí lze stanovit výkon kompenzujícího tělesa. Proto se experiment označuje jako výkonové váhy. Výsledkem měření při známé hmotnosti tělesa je hodnota Planckovy konstanty a naopak – při fixované hodnotě Planckovy konstanty a elementárního náboje je výsledkem měření *hmotnost referenčního tělesa*. Měření se provádí jednak ve statickém režimu (rovnováha mezi tíhovou silou a magnetickou silou), jednak v dynamickém režimu (cívka se nechá rovnoměrně pohybovat, měří se v ní vzniklé indukované napětí). Podrobněji viz např. [6, 8].

Druhým experimentem k odvození Planckovy konstanty a její použití pro definici kilogramu je mezinárodní *projekt Avogadro* [7], který probíhá již od r. 1990 a byl původně nasměrován k určení Avogadrovy konstanty. V rámci tohoto projektu byly vytvořeny co nejdokonalejší koule z izoto-

picky velmi čistého křemíku. K přesnému měření tvaru je využíváno interferometru. Drsnost jejich povrchů je menší než 0,3 nm, jejich křivost se neliší o víc než 60 nm až 70 nm. U koulí je také minimalizována povrchová oxidace a znečištění. Změřením mřížkové konstanty lze určit počet atomů ^{28}Si v kouli a při znalosti hmotnosti jednoho atomu Si (tu lze určit velmi přesně hmotnostním spektrometrem) lze vypočítat hmotnost každé koule. Podrobněji viz např. [8].



Obr. 4 Schéma experimentu Watt Ballance. Upraveno P. Kulhánkem podle R. Steinera / NIST

Dosavadní definice *ampéru* založená na měření velikosti magnetické síly, kterou na sebe působí ve vakuu dva nekonečně dlouhé vodiče (zanedbatelného průřezu) s proudem, také narážela na praktickou realizaci. Vyrobit

takové vodiče je samozřejmě nemožné, takže již samotná definice narážela na nejistoty měření (řádově 10^{-6}). Navíc odvozená veličina síla v sobě zahrnuje veličinu hmotnost. Ukázalo se, že realizace ampéru pomocí kvantových etalonů vede k výsledkům přesnějším až o tři řády. Tento fakt také umožňuje kvalitní realizaci jednotek *volt* a *ohm*.

Definice *kelvinu* jako jednotky termodynamické teploty byla vázána na teplotu trojného bodu vody. Ale přesně stanovená teplota (273,16 K) tohoto rovnovážného stavu soustavy led–voda–sytá vodní pára je až příliš závislá na chemické čistotě vody a také na jejím izotopovém složení. Navíc se ukázalo, že je dosti obtížné tuto definici používat při teplotách blízkých 0 K. Nová definice kelvinu umožňuje převést měření termodynamické teploty na měření energie částic.

Ve stávajícím systému SI používaném do května 2019 závisela jednotka látkového množství *mol* na definici kilogramu, protože svazovala veličinu látkové množství s hmotností (12 g nuklidu uhlíku ^{12}C).

Výše uvedené důvody vedly ke změně definic základních jednotek *kilogram*, *ampér*, *kelvin* a *mol*. Definice jednotek *sekunda*, *metr* a *kandela* byly jen přeformulovány, aby měly stejný formát jako nové definice kilogramu, ampéru, kelvinu a molu.

Přehled nových definic

Jak bylo uvedeno v úvodu tohoto článku, nově jsou všechny základní jednotky pevně navázány na vybrané fyzikální konstanty, jejichž číselné hodnoty jsou fixovány přijatou dohodou CGPM.

Přehled základních jednotek a jejich nové definice (viz např. [9]) jsou uváděny v takovém pořadí, aby každá základní jednotka závisela pouze na definici základní jednotky uvedené výše v pořadí (viz následující tabulku), neboli aby se nejednalo o definici kruhem. Poprvé je koncepce jednotek SI vnitřně konzistentní a není již pouhým slepencem postupně přijímaných, ale nesourodých definic.

Navržené fixní hodnoty nevznikly zaokrouhlováním, ale volbou nejvhodnější hodnoty z věrohodně naměřených hodnot, daných intervalem směrodatné odchylky (nejistoty měření).

Důležitým požadavkem na nové definice byl také požadavek zpětné kompatibility, tedy aby nové základní jednotky SI byly stejně velké jako stávající s maximální dostupnou přesností.

V následující tabulce jsou uvedeny nové definice sedmi základních jednotek SI platných od 20. května 2019:

Základní jednotka	Nová definice
sekunda	Sekunda, symbol s, je SI-jednotka času. Je definována fixováním číselné hodnoty cesiové frekvence $\Delta\nu_{\text{Cs}}$, přechodové frekvence atomu cesia 133 v klidovém stavu při přechodu mezi dvěma hladinami velmi jemné struktury základního stavu, rovné 9 192 631 770, je-li vyjádřena v jednotce Hz, jež je rovna s^{-1} .
metr	Metr, symbol m, je SI-jednotka délky. Je definována fixováním číselné hodnoty rychlosti světla ve vakuu c rovné 299 792 458, je-li vyjádřena v jednotkách $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, kde sekunda je definována ve smyslu $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.
kilogram	Kilogram, symbol kg, je SI-jednotka hmotnosti. Je definována fixováním číselné hodnoty Planckovy konstanty h rovné $h = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$, je-li vyjádřena v jednotkách $\text{J} \cdot \text{s}$, což se rovná $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, kde metr a sekunda jsou definovány ve smyslu c a $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.
ampér	Ampér, symbol A, je SI-jednotka elektrického proudu. Je definována fixováním číselné hodnoty elementárního náboje e rovné $e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$, je-li vyjádřena v jednotce C, což se rovná $\text{A} \cdot \text{s}$, kde sekunda je definována ve smyslu $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.
kelvin	Kelvin, symbol K, je SI-jednotka termodynamické teploty. Je definována fixováním číselné hodnoty Boltzmannovy konstanty k rovné $1,380\,649 \cdot 10^{-23}$, je-li vyjádřena v jednotkách $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$, což se rovná $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, kde kilogram, metr a sekunda jsou definovány ve smyslu h , c a $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.
mol	Mol, symbol mol, je SI-jednotka látkového množství. Jeden mol obsahuje přesně $6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ elementárních entit. Toto číslo je fixovaná číselná hodnota Avogadrovy konstanty, N_{A} , je-li vyjádřena v jednotce mol^{-1} a je nazývána Avogadrovo číslo. Látkové množství, symbol n , systému je mírou počtu specifikovaných elementárních entit. Elementární entitou může být atom, molekula, iont, elektron nebo jakákoliv jiná částice či specifikovaná skupina částic.
kandela	Kandela, symbol cd, je SI-jednotka svítivosti v daném směru. Je definována fixováním číselné hodnoty světelné účinnosti monochromatického záření o frekvenci $540 \cdot 10^{12}$ Hz, K_{cd} , rovné 683, je-li vyjádřena v jednotkách $\text{lm} \cdot \text{W}^{-1}$, což se rovná $\text{cd} \cdot \text{sr} \cdot \text{W}^{-1}$ nebo $\text{cd} \cdot \text{sr} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^3$, kde kilogram, metr a sekunda jsou definovány ve smyslu h , c a $\Delta\nu_{\text{Cs}}$.

Odvozené jednotky SI bude možné definovat nejenom jako dosud pomocí jednotek základních, ale i přímo pomocí výše uvedených definičních konstant.

Metodické problémy

Pro běžný život a běžné technologie jsou zavedené změny v definicích základních jednotek SI zanedbatelné, na běžného člověka nebudou mít vliv. Vědci ale budou schopni ve vědeckých aplikacích a experimentech přesně měřit veličiny v různých místech, časech a měřítkách. Byla získána stabilní základna, na níž lze rozvíjet vědecké poznávání, nové technologie, obchod a řešit současné i budoucí úkoly společnosti. Každá země si realizaci etalonu příslušné jednotky udělá sama vhodným experimentem, ve kterém vystupují ty konstanty, které jsou dohodou fixovány.

Potřeba dobrých vědeckých definic základních jednotek SI převážila nad ztrátou srozumitelnosti pro ty, kteří se na takovém vytváření nepodíleli a nebudou podílet, např. žáci základních a středních škol. V nových definicích těchto jednotek se bohužel ztratila názornost. Jak bylo dříve snadné vysvětlit žákům, co je jednotkou délky či hmotnosti, protože příslušné artefakty byly velmi názorné. Teď je a nadále bude metodicky obtížné vysvětlit smysl a princip přijatých definic základních jednotek SI. Už samotná vazba „je definována fixací číselné hodnoty...“ tomu nasvědčuje.

Bylo a zatím je nepsaným pravidlem, že v našich učebnicích fyziky [10, 11] začínáme před učivem z mechaniky Úvodem, ve kterém kromě jiného je pojednání o soustavě fyzikálních veličin a jim odpovídající soustava jednotek SI (základní, odvozené, násobné a dílčí). To může v podstatě zůstat – jen v učebnici [10] už neplatí věta, že definice sedmi základních veličin nalezneme v MFChT (platí ale, že také se dají vyhledat na internetu). Spíše je podstatné, že tyto definice jsou „rozprostřeny“ v odpovídajícím učivu v jednotlivých ročnících a učitel fyziky by měl na tuto skutečnost podle aktuálnosti učiva reagovat ve svém výkladu. V dosavadním vydání publikace [12, s. 15] jsou ale definice základních jednotek uvedeny v čl. 1.3 Fyzikální veličiny a jejich jednotky. Pokud nebude vydáno přepracované vydání této učebnice, musí učitel žáky na změny definic upozornit.

Uveďme si nyní stručně přehled možností, v kterých částech středoškolského učiva *gymnaziální fyziky* je to aktuální:

Definice *sekundy* je fixována na přechodovou frekvenci atomu cesia při přechodu mezi dvěma hladinami velmi jemné struktury základního stavu. Této situaci odpovídá rozšiřující učivo o kvantování energie, viz [13, s. 61].

Definice *metru* se v podstatě nezměnila, jen byl přidán dodatek, v jakém smyslu je definována sekunda (podobně je tento doplněk uveden i u dalších základních jednotek postupným přidáváním odkazu na předchozí jednotky). Současná učebnice [14, s. 13] na definici metru upozorňuje.

Definice *kilogramu* je fixována na Planckovu konstantu. Učebnice [13, s. 44] ji zavádí v čl. 2.1 Kvantová hypotéza vztahem pro energii kvanta záření.

Definice *ampéru* je fixována na hodnotu elementárního náboje. V současné učebnici [15, s. 116] je definice uvedena v souvislosti se vztahem pro velikost magnetické síly, která působí mezi dvěma velmi dlouhými vodiči. Protože redefinice ampéru se již neopírá o tento vztah, bude možné se o současně platné definici zmínit buď v elektrostatičce při probírání pojmu elementární elektrický náboj [15, s. 17], ale vhodnější se mi jeví téma o elektrickém proudu po definici proudu jako fyzikální veličiny [15, s. 42].

Jednotka *kelvin* pro termodynamickou teplotu je nyní fixována na Boltzmannovu konstantu. Tu zavádí učebnice [16, s. 69] v čl. 3.4 pojednávajícím o střední kinetické energii jedné molekuly ideálního plynu ($E_0 = \frac{3}{2}kT$), rozšiřující učivo uvedené na CD k dané učebnici pak v R9 Typy stavové rovnice pro ideální plyn ($pV = NkT$). V souvislosti s prvním vztahem je možno charakterizovat konstantu k jako veličinu, která nám umožňuje z měření termodynamické teploty ideálního plynu zjistit zároveň také střední kinetickou energii N jeho molekul (v důsledku jejich neuspořádaného posuvného pohybu).

Jednotka *mol* jako jednotka látkového množství je fixována na číselnou hodnotu Avogadrovy konstanty N_A . V učivu molekulové fyziky podle [16] je veličina látkové množství zavedena v teoretickém cvičení 1 nazvaném „Relativní atomová a molekulová hmotnost. Látkové množství. Molární veličiny“. Cvičení je umístěno na CD. Dokud nebude učitelům a žákům k dispozici upravené vydání, měl by učitel při probírání uvedených pojmů použít např. tento upravený text:

Poněvadž látka má částicovou strukturu, byla ve fyzice, chemii a technice zavedena veličina látkové množství n chemicky stejnorodé látky. Tato veličina je mírou počtu specifikovaných částic (tzv. elementárních entit) ve zkoumané látce (obecně systému). Částicí (entitou) může být atom, molekula, iont, ale také elektron nebo jakákoliv jiná částice nebo specifikovaná skupina částic.

Jednotkou látkového množství je mol (značka mol). Je to jedna ze sedmi základních jednotek soustavy SI. Mol je takové látkové množství dané látky,

jestliže tato látka obsahuje přesně $6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ elementárních entit.

Číslo $6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ je fixovaná (ustálená) číselná hodnota tzv. Avogadrovy konstanty N_A , je-li tato konstanta vyjádřena v jednotce mol^{-1} . Tedy

$$N_A = 6,022\,140\,76 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} \text{ (přesně)}.$$

Číselná hodnota Avogadrovy konstanty $\{N_A\}$ se nazývá Avogadrovo číslo. Udává počet částic v homogenním tělese o látkovém množství 1 mol.

Při výpočtech s Avogadrovou konstantou budeme používat přibližnou hodnotu

$$N_A \doteq 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

Jednotku *kandela* zavádí učebnice [14] na přiloženém CD v rámci rozšiřujícího učiva R4.1 Základní pojmy fotometrie. Je pouze konstatováno, že je to jednotka pro svítivost, definice není ale uvedena vzhledem k poměrně složité formulaci a také proto, že se v dalším učivu nevyužívají základní pojmy fotometrie.

Literatura

- [1] Resolution 1 of the 26th CGPM (2018). Dostupné online: <https://www.bipm.org/en/CGPM/db/26/1/>
- [2] BIPM: Information for users about the redefinition of the SI. Updated May 20, 2019. Dostupné online: <https://www.bipm.org/utils/common/pdf/SI-statement.pdf>
- [3] NIST: SI redefinition. Dostupné online: <https://www.nist.gov/si-redefinition>
- [4] Kulhánek, P.: Už není kilo to, co dříve bylo. In: Aldebaran Bulletin, č. 43 (2018). Dostupné online: https://www.aldebaran.cz/bulletin/2018_43_kil.php
- [5] Horký, M.: Nový kilogram konečně na obzoru. In: Aldebaran Bulletin, roč. 14 (2016), č. 30, Štefánikova hvězdárna v Praze. Dostupné online: www.aldebaran.cz/bulletin/2016_30_rum.php
- [6] Commisariat, T.: NIST-4 watt ballance weighs in on Planck's constant. Physik World, 29 (2016). Dostupné online: <https://physicsworld.com/a/nist-4-watt-balance-weighs-in-on-plancks-constant/>
- [7] Kilogram: Silicon Spheres and the International Avogadro Project. Dostupné online: <https://www.nist.gov/si-redefinition/kilogram-silicon-spheres-and-international-avogadro-project>

- [8] Šíra, M.: Metrologie a revize SI (od artefaktů ke kvantovým etalonům). Dostupné online: http://www.physics.muni.cz/kof/kavarna/redefinice_SI.pdf
- [9] Český metrologický institut: Nová definice základních jednotek SI. ČMI, Brno, 2018. Dostupné online: https://www.cmi.cz/redefinice_SI
- [10] Svoboda, E. a kol.: Fyzika pro gymnázia. Mechanika. 5. přepracované vydání, Prometheus, Praha, 2013.
- [11] Lepil, O. a kol.: Fyzika pro střední školy I. Prometheus, Praha, 2012.
- [12] Svoboda, E. a kol.: Přehled středoškolské fyziky. Dotisk 5. vydání, Prometheus, Praha, 2018.
- [13] Štoll, I.: Fyzika pro gymnázia. Fyzika mikrosvěta. Prometheus, Praha, 2002.
- [14] Lepil, O.: Fyzika pro gymnázia. Optika. 5. přepracované vydání, Prometheus, Praha, 2015.
- [15] Lepil, O., Šedivý, P.: Fyzika pro gymnázia. Elektřina a magnetismus. 7. přepracované vydání, Prometheus, Praha, 2017.
- [16] Svoboda, E., Bartuška, K.: Fyzika pro gymnázia. Molekulová fyzika a termika. 6. přepracované vydání, Prometheus, Praha, 2016.

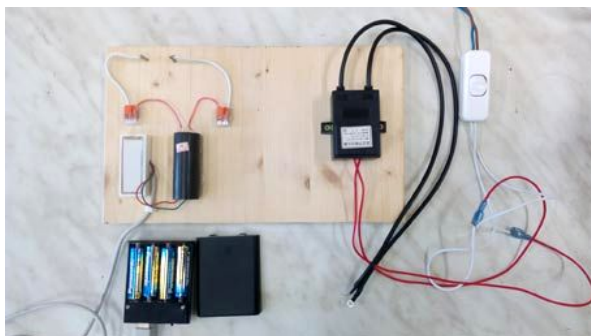
Náhrada Ruhmkorffova induktoru zdroji vysokého napětí

ČENĚK KODEJŠKA

Gymnázium, SOŠ a VOŠ, Komenského 77, Nový Bydžov

Tento článek se zabývá realizací experimentů, které pro své provedení používají Ruhmkorffův induktor. Za všechny jmenujme např. výboje v plynu, jiskrový výboj, nebo elektrostatické kyvadlo. Vzhledem k tomu, že Ruhmkorffův transformátor patří už mezi historické pomůcky, které ve fyzikálním kabinetě spíše dosluhují, oprava většinou není možná, a cena nového induktoru se pohybuje od 7 000 Kč do 12 000 Kč [1–3], zabývali jsme se možností náhrady této pomůcky levnými zdroji vysokého napětí,

které lze získat za několik málo dolarů či eur v mezinárodních e-shopech jako je Amazon nebo AliExpress.



Obr. 1 Zdroje vysoké napětí 400 kV a 15 kV

V následujících experimentech byly použity jako zdroje vysokého napětí DC 3V-6V to 400kV Boost Step up Power Module High Voltage Generator [4] a AC 220V High Voltage Generator Boost Step-up Power Module Continuous Igniter 15kV 1A-2A [5]. Pro jednoduchost je budeme označovat jako DC 400 kV a AC 15 kV.

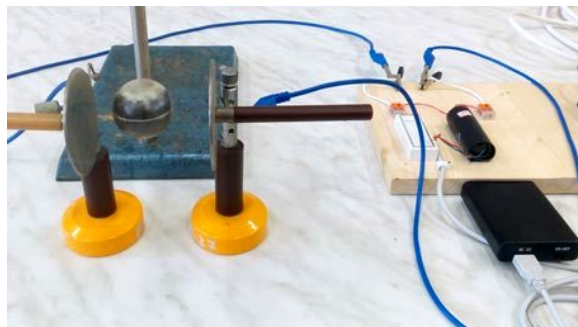
Náhradou Ruhmkorffova induktoru se zabývali různí autoři, např. v [6] je uveden popis výroby jednoduchých zdrojů vysokého napětí určených pro školní praxi. Učitel ale musí být obeznámený s konstrukcí plošných spojů a s technikou pájení. Naším cílem bylo vyzkoušet funkčnost zdrojů vysokého napětí přímo od výrobce, bez dalších úprav nebo konstrukce dodatečných elektronických obvodů. Na obr. 1 jsou oba zdroje napětí umístěné na jedné dřevěné desce, vlevo je DC 400 kV, vpravo AC 15 kV.

Experimenty s vysokonapěťovým transformátorem 3 V–6 V/400 kV

Zdroj DC 400 kV je napájen vstupním stejnosměrným napětím 3 V až 6 V (červený a zelený vodič), vstupní proud je dle výrobce 2 A–5 A, jak ale bylo ověřeno, lze bez problému použít čtyři tužkové alkalické baterie o jmenovitém napětí jednoho článku 1,5 V. My jsme je umístili do speciálního pouzdra s USB výstupem, ze kterého jsme pomocí upraveného USB kabelu (ponecháním pouze černého a červeného napájecího kabelu) napájeli induktor.

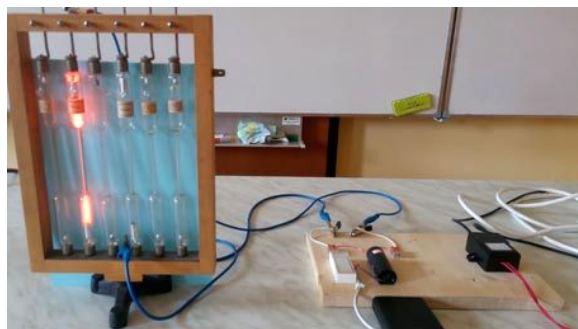
Výstupní napětí 400 kV (dvojice světle červených vodičů) má pulzní charakter a dle výrobce nesmí být zdroj sepnutý déle než 60 s. K tomu účelu byl obvod doplněn zvonkovým tlačítkem. Jiskrový výboj mezi výstupními kontakty přeskočí při maximální vzdálenosti hrotů 10 mm–20 mm.

Tento zdroj napětí můžeme použít např. pro demonstraci práce, kterou konají elektrické síly v homogenním elektrickém poli mezi dvěma rovnoběžnými deskami. Známý experiment s elektrostatickým kyvadlem je na obr. 2.

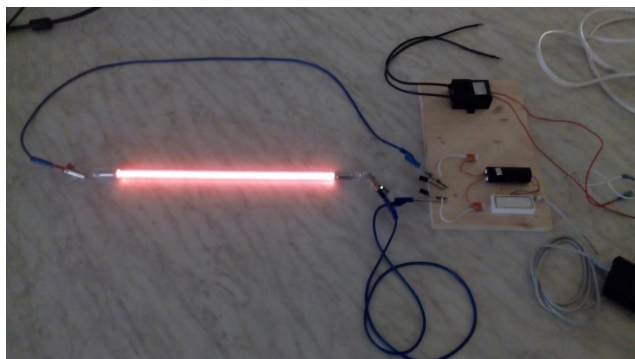


Obr. 2 Elektrostatické kyvadlo se zdrojem DC 400 kV

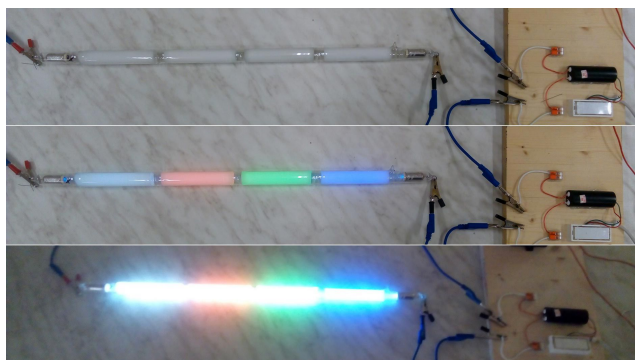
Plně dostačující je tento zdroj také pro experimenty s výboji v různých plynech (obr. 3), k pokusu s neonovou reklamní zářivkou (obr. 4), nebo při ukázce různých luminoforů pokrývajících vnitřek trubice (obr. 5). V horní třetině obr. 5 je trubice bez napětí, fotografie uprostřed zobrazuje trubici připojenou ke zdroji DC 400 kV v běžném osvětlení, dolní část fotografie je pořízena při sníženém osvětlení, kdy více vyniknou barvy.



Obr. 3 Výboje v různých plynech se zdrojem DC 400 kV



Obr. 4 Neonová zářivka se zdrojem DC 400 kV

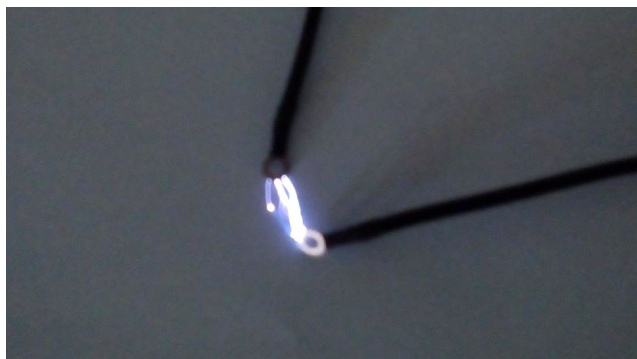


Obr. 5 Trubice s různými luminofory napájená zdrojem DC 400 kV

Experimenty s vysokonapěťovým generátorem AC 220 V/15 kV

K některým experimentům byl výkon zdroje DC 400 kV nedostatečný, a proto jsme vyzkoušeli i zdroj AC 15 kV, který je napájen střídavým napětím 240 V. Vstupní proud výrobce udává 1 A–2 A, délka napájecích červených vodičů je cca 20 cm, výstupní černé vysokonapěťové vodiče mají délku přibližně 30 cm, přičemž napětí je polarizováno, lze tedy stanovit kladný a záporný pól. Tuto vlastnost jsme ale netestovali, protože v následujících dvou experimentech ji nebylo nutné použít.

Prvním experimentem je ukázka jiskrového výboje o délce 1,5 cm–2 cm, který je na obr. 6.



Obr. 6 Jiskrový výboj se zdrojem AC 15 kV

Druhým experimentem je výboj v plynu za sníženého tlaku, který nelze z důvodu malého výkonu realizovat s předešlým zdrojem DC 400 kV. Výbojové trubice s různým tlakem plynu poskytovaly podobný obraz, jako s využitím Ruhmkorffova induktoru (obr. 7).



Obr. 7 Výboje za sníženého tlaku se zdrojem AC 15 kV

Bohužel, ani s jedním z výše uvedených zdrojů nelze realizovat takové klasické experimenty, jako je demonstrace elektrického pole kolem nabitě koule, která se provádí pomocí třásní umístěných v jednom bodě na povrchu izolované kovové kuličky, nebo demonstrace Coulombova zákona, kdy pozorujeme přitahování či odpuzování nabitých ping-pongových míčků. V těchto případech musíme použít osvědčený Wimshurstův třecí induktor nebo Van de Graaffův generátor.

Závěr

V této práci jsme se zabývali náhradou Ruhmkorffova induktoru v některých pokusech z elektrostatiky, nebo demonstračních experimentech s výboji v plynech.

Použité zdroje vysokého napětí DC 3V-6V to 400kV Boost Step up Power Module High Voltage Generator a AC 220V High Voltage Generator Boost Step-up Power Module Continuous Igniter 15kV 1A-2A se osvědčily zejména u výbojů, některé klasické experimenty s těmito zdroji ale realizovat nelze. Důvodem je pravděpodobně malý výkon zdrojů a malá intenzita elektrického pole obou zdrojů.

Výhodou použitých vysokonapěťových zdrojů je zejména jejich nízká cena nepřevyšující 200 Kč, rychlost zapojení a absence pohyblivých částí, které v případě kladívka Ruhmkorffova transformátoru způsobují občas problémy s funkčností induktoru.

Literatura

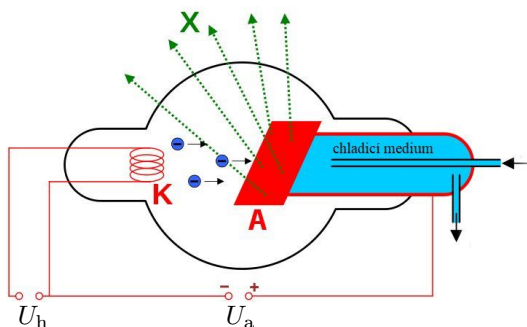
- [1] Ruhmkorffova indukční cívka, [online], dostupné z <https://www.helago-cz.cz/eshop-5207-ruhmkorffova-indukcni-civka-148020.html>
- [2] Induktor Ruhmkorffa, [online], dostupné z: <https://www.sklep.fpnnysa.com.pl/induktor-ruhmkorffa-induction-coil-Funkeninduktor>
- [3] Ruhmkorffův induktor, [online], dostupné z <https://www.skolni-pomucky.eu/hlavni-oddeleni/vsechny-kategorie/ucebni-pomucky/fyzika/elektrina-a-mag/ostatni/ruhmkorffuv-induktor-%2803-053-1-442%29.html>
- [4] Yosoo High Voltage Transformer DC 3v-6v to 400kV Boost Step-up Power Module High-voltage Generator, [online], dostupné z <https://www.amazon.com/Yosoo-Voltage-Transformer-High-voltage-Generator/dp/B01C2IVE6Q/>
- [5] AC 220V High Voltage Generator Boost Step-up Power Module Module Continuous Igniter 15kV 1A-2A, [online], dostupné z <https://www.amazon.com/Voltage-Generator-Step-up-Continuous-Igniter/dp/B07FXFRQXJ/>
- [6] Šlégr, J.: Jednoduché zdroje vysokého napětí pro školní praxi. VNUF 18, Hradec Králové, 2013.

Rentgenové záření ve škole i mimo školu 2

MICHAL KLÁTIL – DANIEL JEZBERA

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

Rentgenové záření je elektromagnetické vlnění krátké vlnové délky v rozsahu 10 nm až 1 pm. Přírodním zdrojem tohoto záření jsou například hvězdy, uměle se získává jako záření rentgenky, nebo pomocí kruhového urychlovače částic – betatronu.



Obr. 1 Schéma vodou chlazené rentgenky s pevnou anodou U_h je žhavicí napětí katody, U_a anodové napětí, K katoda, A anoda, X rentgenové záření (upraveno z [2])

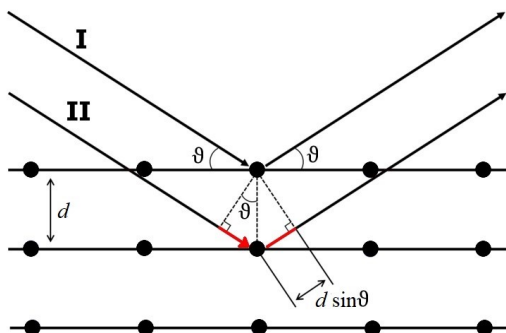
Rentgenka je skleněná vakuová trubice se dvěma elektrodami – anodou a katodou (obr. 1). Katoda je průchodem elektrického proudu žhavena na teplotu přibližně 2000 °C. Tím dochází k emisi volných elektronů z katody. Vysoké napětí anody řádově 10 kV až 100 kV vyvolá velký potenciálový rozdíl mezi anodou a katodou. Katodou emitované elektrony jsou tak urychlovány a získávají značnou kinetickou energii. Urychlené elektrony dopadají velkou rychlostí na anodu, kde prudkým zbrzděním vznikají dva druhy záření:

1. *brzdné záření*, které vzniká přeměnou kinetické energie zbrzděných elektronů na energii fotonů a má spojité energetické spektrum,
2. *charakteristické záření*, které má svůj původ ve vnitřních přechodech elektronů v atomu, a jeho spektrum je čárové (graf 1).

Samotný proces přeměny elektrické energie na energii fotonů je poměrně nevhodný, jelikož pouze 1 % elektrické energie se přemění v energii záření. Zbylých 99 % se přeměňuje na teplo [5]. Proto musí být anoda řádně chlazená. V příspěvku uveřejněném v minulém čísle MFI (roč. 28/2019, č. 2, s. 115) jsme se zabývali ověřením vlastností rentgenového záření pomocí experimentů s aparaturou LD DIDACTIC od firmy Leybold. Tématem tohoto příspěvku jsou principy rentgenové strukturní analýzy.

Braggova difrakce

V následujících experimentech je využito nastavení rentgenové aparatury do tzv. Braggovy konfigurace, kdy svazek kolimovaných paprsků rentgenového záření dopadá na krystal pod úhlem ϑ . Detektor následně zachycuje difraktované paprsky rovněž s úhlem rozptylu ϑ (obr. 2).

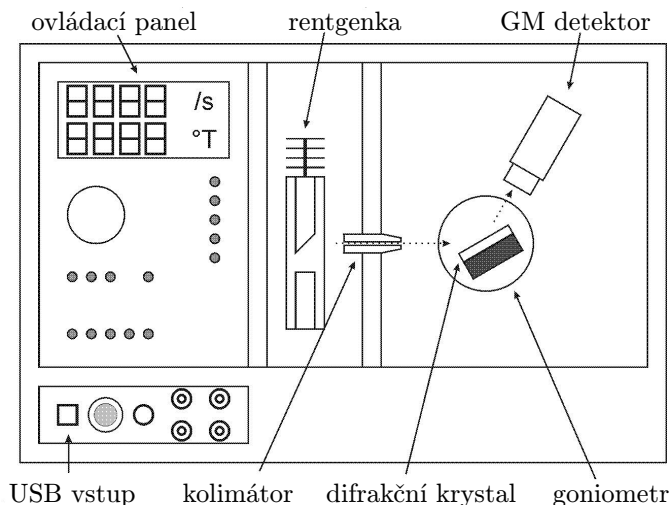


Obr. 2 Schéma Braggovy difrakce

První experiment tohoto článku by měl potvrdit Braggův zákon (1) difrakce rentgenových paprsků na monokrystalu LiF. Z úvodní části víme, že rentgenové záření je složeno z brzdového záření a několika ostrých maxim odpovídajících charakteristickému záření anody. Právě ono charakteristické záření je nejvhodnější k ověření platnosti Braggova zákona:

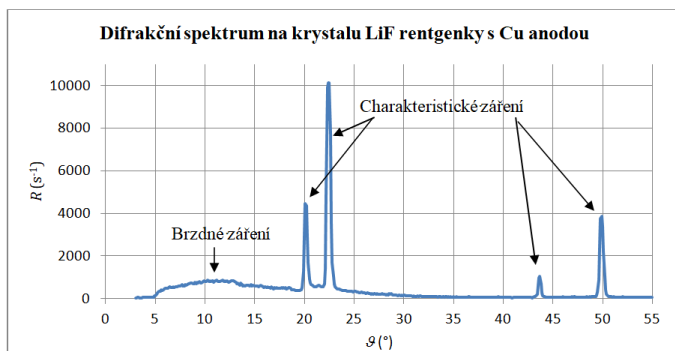
$$2d \sin \vartheta = n\lambda, \quad (1)$$

kde d je mezirovinná vzdálenost krystalu, λ je vlnová délka záření a $n = 1, 2, 3, \dots$ udává řád difraktovaného svazku ([2, 3]).



Obr. 3 Schéma měření Braggovy difrakce

Podle obr. 3 svazek kolimovaných paprsků dopadá na krystal (v našem případě LiF), kde dochází k Braggově difrakci. Difraktované paprsky o intenzitě R následně zachycuje GM detektor a hodnoty jsou zaznamenávány v připojeném PC. Výsledkem tohoto měření je difrakční spektrum (graf 1).



Graf 1 Rentgenové difrakční spektrum na monokrystalu LiF do druhého řádu difrakce při $U = 35 \text{ kV}$, $I = 1 \text{ mA}$, R je intenzita záření

Přímo v měřicím programu výrobce „X-RAY apparatus“ odečteme z grafu 1 hodnoty jednotlivých maxim. V tab. 1 je vidět srovnání námi odečtených maxim (červeně) s předpokládanými (vypočtenými z výrazu (1))

úhly ϑ (zeleně) charakteristického záření rentgenky s měděnou anodou při difrakci na krystalu LiF do druhého řádu. Předpokládané vlnové délky λ jsou označeny modře, z měření podle rovnice (1) dopočítané vlnové délky jsou na konci tabulky označeny žlutě.

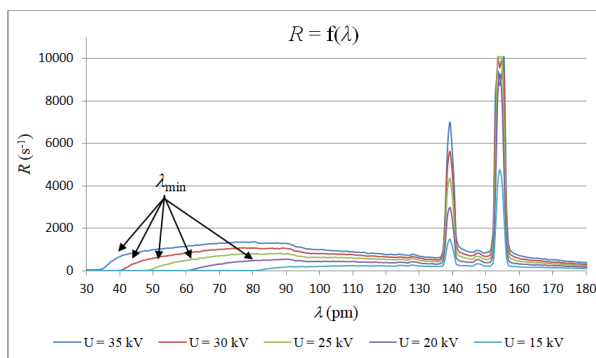
Tabulka 1: Srovnání naměřených výsledků s tabulkovými hodnotami

n	$\vartheta(K_{\alpha})$ (°)	$\vartheta(K_{\beta})$ (°)	$\vartheta(K_{\alpha})$ (°)	$\vartheta(K_{\beta})$ (°)	$\lambda(K_{\alpha})$ (pm)	$\lambda(K_{\beta})$ (pm)	$\lambda(K_{\alpha})$ (pm)	$\lambda(K_{\beta})$ [pm]
1	22,53	20,23	22,53	20,28	154,2	139,2	154,0	139,3
2	50,09	43,84	50,09	43,81	154,2	139,2	154,2	139,2

Z výsledků měření vidíme, že experimentálně zjištěná vlnová délka odpovídá předpokládaným hodnotám, čímž jsme potvrdili platnost Braggovy rovnice (1). Zároveň tento experiment potvrzuje vlnovou povahu rentgenového záření.

Energetické spektrum

Nastavení do Braggovy konfigurace využijeme i při vyšetřování energetického spektra rentgenky s měděnou anodou v závislosti na použitém napětí a emisním proudu rentgenky. Použité napětí ovlivňuje urychlení elektronů mezi katodou a anodou. Emisní proud je proud tekoucí mezi katodou a anodou a může být řízen žhavicím napětím katody. Získané grafy z časově náročného měření jsou zobrazeny níže.

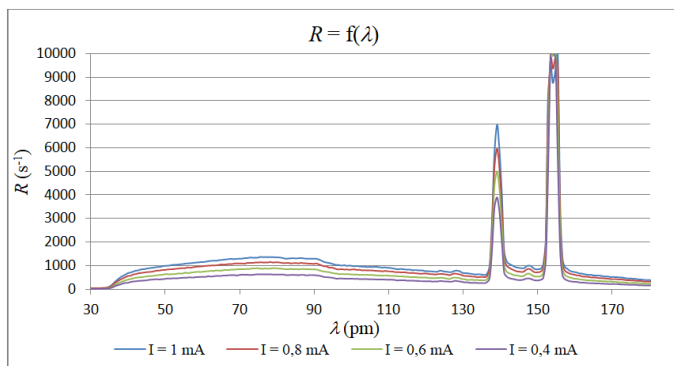


Graf 2 Spektrum rentgenky s měděnou anodou pro $U = 15$ kV, 20 kV, 25 kV, 30 kV, 35 kV a $I = 1$ mA

Z grafu 2 jsme nyní schopni určit vlnové délky charakteristického záření rentgenky s měděnou anodou. Průměrná hodnota vlnové délky pro

$\lambda(K_\alpha) = 154,2 \text{ pm}$ a pro $\lambda(K_\beta) = 139,0 \text{ pm}$. Srovnáme-li získané výsledky s hodnotami tabulkovými (označeny modře v tab. 1) zjistíme, že naše měření bylo velice přesné.

Průběh energetického spektra při změně proudu pak zobrazuje graf 3.



Graf 3 Energetické spektrum rentgenky s měděnou anodou pro $I = 0,4 \text{ mA}$; $0,6 \text{ mA}$; $0,8 \text{ mA}$ a 1 mA

S vyobrazenými daty v grafu 3 provedeme analogické vyhodnocení, jako v předchozím případě. Průměrná hodnota vychází pro $\lambda(K_\alpha) = 154,2 \text{ pm}$ a pro $\lambda(K_\beta) = 139,1 \text{ pm}$, tedy opět můžeme měření vyhodnotit jako velice přesné.

Z grafu 2 vidíme, jak se mění kontinuum brzdného záření se zvyšujícím se napětím, s nímž roste i energie elektronů. Dále můžeme pozorovat, že změna napětí rentgenky nemá vliv na pozici charakteristických maxim, co se vlnové délky týče. V neposlední řadě si lze povšimnout, že tzv. mezní vlnová délka $\lambda_{\min}$, jejíž detailní měření bude součástí dalšího experimentu, se se vzrůstajícím napětím přesouvá do nižších hodnot vlnových délek.

Ze spektra (viz graf 3) pak vidíme, že ani emisní proud umístění charakteristických maxim neovlivňuje. Naopak se změnou emisního proudu nedochází k posunu mezní vlnové délky.

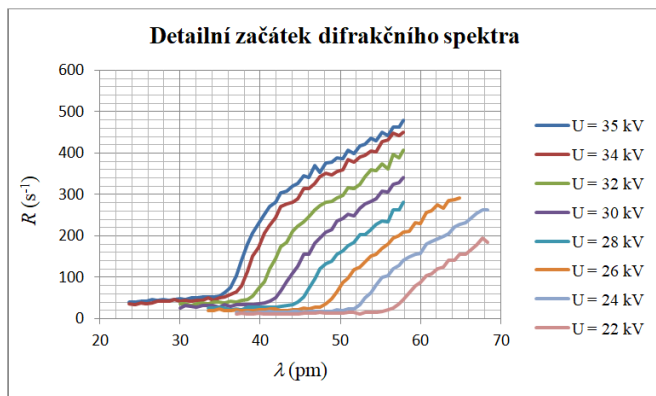
Nezodpovězenou otázkou z grafu 2 zůstává, proč fotony rentgenového záření nižších vlnových délek nejsou při daném napětí detekovány? Vysvětlení nám přináší snadno odvoditelný Duanův–Huntův zákon vztah (2), podle kterého je nejkratší vlnové délky dosaženo, právě tehdy když se veškerá kinetická energie z anody emitovaných elektronů přemění na kinetickou energii fotonů. Tento vztah si v rámci posledního experimentu

tohoto článku ověříme:

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU_a} = \frac{1,24 \cdot 10^{-6} \text{ V} \cdot \text{m}}{U_a}, \quad (2)$$

kde h je Planckova konstanta, c rychlost světla, U_a anodové napětí a e elementární náboj elektronu ([4, 5]).

K tomuto měření je dobré detailně proměřit začátek difrakčního spektra rentgenky s měděnou anodou (graf 4).



Graf 4 Počáteční část difrakčního spektra rentgenky s měděnou anodou při různých napětích

V následující tab. 2 jsou vyhodnoceny naměřené mezní vlnové délky z grafu 4 ve srovnání s teoreticky vypočtenými z rovnice (2).

Tímto měřením jsme tak ověřili platnost Duanova–Huntova vztahu a vysvětlili si důvod posouvání mezní vlnové délky při změně anodového napětí.

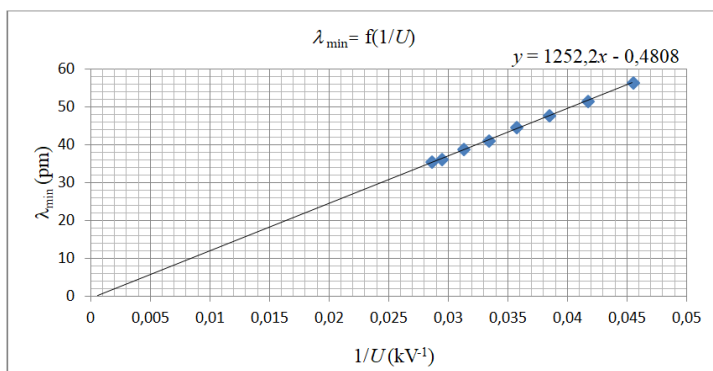
Nyní si ještě pro zajímavost můžeme na základě Duanova–Huntova vztahu a našeho měření ověřit přesnou hodnotu Planckovy konstanty, například následujícím způsobem. Úpravou rovnice (2) získáme

$$U \lambda_{\min} = \frac{hc}{e}.$$

Levou stranu, tedy součin napětí rentgenky U a mezní vlnové délky $\lambda_{\min}$, označíme A . Nyní sestojíme graf závislosti získaných hodnot $\lambda_{\min}$ na převrácené hodnotě napětí U . Body grafu proložíme lineární spojnici trendu a zobrazíme sklon A vzniklé přímky.

Tabulka 2: Srovnání teoreticky vypočtených a naměřených hodnot minimální vlnové délky

	Naměřené hodnoty	Dopočítané hodnoty
U (kV)	$\lambda_{\min}$ (pm)	$\lambda_{\min}$ (pm)
22	56,4	56,4
24	51,6	51,7
26	47,8	47,7
28	44,5	44,3
30	41,0	41,3
32	38,7	38,8
34	36,2	36,7
35	35,4	35,4



Graf 5 $\lambda_{\min} = f(1/U)$

Sklon přímky vychází $A = 1\,252,2 \text{ pm} \cdot \text{kV}$. Nyní dosadíme hodnotu do předchozího vztahu a vypočítáme hodnotu Planckovy konstanty:

$$A = \frac{hc}{e} \Rightarrow h = \frac{Ae}{c}$$

$$h = \frac{Ae}{c} = \frac{1,2522 \cdot 10^{-6} \text{ V} \cdot \text{m} \cdot 1,60210^{19} \text{ C}}{299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}} = 6,691 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

Porovnáme-li tuto hodnotu s tabulkovou hodnotu $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$, zjistíme, že námi z měření vypočítaná hodnota se téměř neliší.

Závěr

Potvrzení Braggova zákona a vyšetřování energetického spektra rentgenky s měděnou anodou byla měření velmi přesná, avšak časově náročná. Význam těchto měření je však obrovský. Nejenom, že na nich lze velice dobře vysvětlit vznik rentgenového záření, ale též z nich lze vydedukovat některé důležité vlastnosti rentgenového záření, např. pronikavost.

V posledním měření je popsáno ověření platnosti Duanova–Huntova vztahu. Výsledky měření jsou prezentovány shrnující tab. 2, která zobrazuje srovnání teoreticky vypočtených a naměřených hodnot minimální vlnové délky. Na základě tohoto měření je ze vztahu (2) na závěr dopočítána i hodnota Planckovy konstanty, která vyšla $h = 6,691 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$, což je velmi přesný výsledek v porovnání s tabulkovou hodnotou $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$.

Tato měření je určitě vhodné provést osobně, což laboratoř experimentů z moderní fyziky na Univerzitě v Hradci Králové umožňuje. Se studenty v rámci např. fyzikálního semináře může učitel využít možnost návštěvy této laboratoře. Určitě to bude stát za to!

Literatura

- [1] *Beiser, A.*: Úvod do moderní fyziky. 2. vyd. překl. Praha: Academia, 1978, 628 s.
- [2] HMILCH. X-ray tube (scheme). In: commons.wikimedia.org [online]. 2008 [cit. 2019-01-03]. Dostupné z: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Roentgen-Roehre.svg>
- [3] LD DIDACTIC GMBH. X-RAY Apparatus: Bragg reflection: diffraction of X-rays at a monocrystal: P6.3.3.1 [online]. Federal Republic of Germany, nedatováno [cit. 2018-11-19]. Dostupné z: <https://www.leybold-shop.com/vp6-3-3-1.html>
- [4] LD DIDACTIC GMBH. X-RAY Apparatus: Duane-Hunt relation and determination of Planck's constant: P6.3.3.3 [online]. Federal Republic of Germany, nedatováno [cit. 2018-11-19]. Dostupné z: <https://www.leybold-shop.com/vp6-3-3-3.html>
- [5] *Ullmann, V.*: Jaderná a radiační fyzika: Ionizující záření [online]. Klin. nukleární medicíny FNŠP, nedatováno [cit. 2018-11-19]. Dostupné z: <http://astronuklfyzika.cz/JadRadFyzika6.htm>

Rozklad zlomků na zlomky kmenné pomocí Geogebry a softwaru SAS/STAT

LUDEK SPÍCHAL

Ústav matematiky a statistiky, Masarykova univerzita v Brně

Někdy stačí k vyvolání pozornosti zajímavá situace či jednoduchý problém. Může jím být úloha jak rozdělit 5 celých pizz mezi 8 lidí. Jistě není problém si uvědomit, že každý má při spravedlivém dělení obdržet $5/8$. Je však opravdu nutné každou pizzu dělit na osm dílů nebo nalezneme jednodušší způsob dělení? Jaký je nejmenší počet přímých řezů, kterými rozdělíme 5 pizz spravedlivě mezi 8 osob?¹⁾

Podobnou, i když složitější variantou předešlého problému, je úloha požadující rozklad zlomku

$$\frac{4}{21} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

na součet tří různých zlomků s čitatelem rovným číslu 1.

Výše zmíněné úlohy nám při bližším pohledu nabízí prostřednictvím kmenných zlomků pohled jak do historie počítání a matematiky obecně, tak do současnosti umožňující použitím výpočetní techniky rychlé řešení rutinních výpočtů.

¹⁾Řekněme, že nejprve rozdělíme mezi 8 lidí čtyři pizzy, kdy každý obdrží $1/2$. Je zřejmé, že na osminy pak stačí rozdělit jen poslední kus. Každý z účastníků dělení tedy obdrží $5/8 = 1/2 + 1/8$. Při dělení musíme provést alespoň osm přímých řezů.

Cílem článku není podrobný popis vlastností kmenných zlomků, tento lze nalézt např. v [1], [3], [4], nýbrž možnost využití vybraného matematického softwaru k nalezení rozkladu zlomků.

Co je kmený zlomek?

Kmenné (jednotkové) zlomky jsou zlomky ve tvaru $1/n$, kde $n \geq 2$. Existuje řada dokladů (např. Rhindův papyrus) svědčících o jejich používání ve starověkém Egyptě.²⁾ Egyptané (a nejen oni), zlomky zapisovali jako součet různých zlomků kmenných.³⁾ Za zmínku jistě stojí i fakt, že pro zlomky $1/2$ a $1/4$ používali Egyptané jiný způsob zápisu než pro ostatní kmenné zlomky. Důvodem byl patrně starší původ těchto zlomků, vycházejících z jednoduchého mechanismu půlení, který byl i v pozdějších obdobích považován za zvláštní početní úkon [1].

Kmenné zlomky zmiňuje také Leonardo Pisánský (Fibonacci) v knize *Liber Abaci* z počátku 13. století. Fibonacci, kterému Evropa vděčí za zavedení poziční desítkové soustavy, popisuje početní operace použitím kmenných zlomků. Nahrazení římských zlomků zlomky kmennými však nepřineslo podstatné zjednodušení početních operací se zlomky, při praktických výpočtech se tedy kmenné zlomky neuplatnily. Fibonacci v knize současně popsal také jednodušší systém desetinných zlomků [2].

Hledání rozkladu čísla na kmenné zlomky

Existuje řada algoritmů umožňujících nalezení některého z možných rozkladů zlomku na součet zlomků kmenných (přičemž žádné dva se nesmí opakovat), zmiňme Fibonacciův–Sylvesterův algoritmus, binární algoritmy, Golombův či Erdősův algoritmus. Podrobný popis zmíněných algoritmů lze nalézt např. v [3], pro potřeby článku zmíníme způsob použití Fibonacciova–Sylvesterova algoritmu.⁴⁾

²⁾ Rhindův papyrus byl zakoupen r. 1858 skotským antikvářem Alexandrem Rhindem v Luxoru (Egypt). Nález pochází z nelegálních vykopávek a představuje nejucelenější ukázkou matematických znalostí starověkého Egypta v období kolem r. 1650 př. n. l. Současným vlastníkem převážné části papýru je Britské muzeum v Londýně.

V anglicky psané literatuře jsou kmenné zlomky obvykle označovány jako egyptské zlomky.

³⁾ Kmenné zlomky Egyptané doplňovali navíc zlomkem $2/3$.

⁴⁾ L. Pisánský zvaný Fibonacci (1180–1250) byl italský matematik. J. J. Sylvester (1814–1897) byl anglický matematik zabývající se zejména teorií čísel, lineární algebrou a kombinatorikou. S. W. Golomb (1932–2016) byl americký elektroinženýr a matematik známý svými pracemi v oblasti teorie her, je autorem hry pentomino. P. Erdős (1913–

Fibonacciův–Sylvesterův algoritmus

Při rozkladu vždy hledáme největší kmenný zlomek, který se ještě vejde do daného zlomku. Pro libovolné racionální číslo $p/q < 1$ (není kmenným zlomkem) musí existovat číslo $n \in \mathbb{N}$, pro které platí

$$\frac{1}{n+1} < \frac{p}{q} < \frac{1}{n}, \quad (1)$$

kde levý a pravý zlomek reprezentuje dva členy harmonické posloupnosti.⁵⁾

Úpravou nerovnosti (1) zjišťujeme, že

$$n+1 > \frac{q}{p} > n. \quad (2)$$

Využitím nerovnosti (2) zvolíme jmenovatel prvního kmenného zlomku $n+1$ a určíme hodnotu zbytkového zlomku. Postup opakuje do okamžiku, kdy je hodnota čitatele zbytkového zlomku rovna jedné.

Příklad: Rozložte zlomek $4/21$ na součet kmenových zlomků!

Podle nerovnosti (2) je

$$6 > \frac{21}{4} > 5,$$

tedy

$$\begin{aligned} \frac{4}{21} - \frac{1}{6} &= \frac{1}{42}, \\ \frac{4}{21} &= \frac{1}{6} + \frac{1}{42}. \end{aligned}$$

Algoritmus neříká, jaký je celkový počet možných rozkladů. Jiný než uvedený rozklad získáme změnou hodnoty jmenovatele prvního (případně dalšího) kmenného zlomku, např.

$$\begin{aligned} \frac{4}{21} - \frac{1}{7} &= \frac{1}{21}, \\ \frac{4}{21} &= \frac{1}{7} + \frac{1}{21}. \end{aligned}$$

1996) byl maďarský matematik zabývající se zejména teorií grafů, kombinatorikou, teorií množin a pravděpodobností.

⁵⁾Harmonická posloupnost je v daném případě posloupností převrácených hodnot přirozených čísel $1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots$

případně

$$\begin{aligned}\frac{4}{21} - \frac{1}{8} &= \frac{11}{168}, \\ 16 &> \frac{168}{11} > 15, \\ \frac{11}{168} - \frac{1}{16} &= \frac{1}{336}, \\ \frac{4}{21} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{336}.\end{aligned}$$

Rozklad zlomků pomocí počítače

S rostoucím počtem členů rozkladu roste obvykle na jedné straně počet možných rozkladů, na druhé straně složitost samotného provedení rozkladu. Zvláštní kapitolou pak může být záměr určit celkový počet možných rozkladů pro daný počet kmenných zlomků tvořících rozklad.

Popsaný problém je ideálním modelem pro počítačové řešení, kterým můžeme buď nalézt hledané rozklady, nebo ověřit již dříve nalezená řešení. Ověřit řešení, případně řešit rychle další rozklady (i na více než tři kmenové zlomky) lze sestavením jednoduchého programu v dostupném matematickém softwaru. Pro potřeby článku byl použit software Geogebra 5.0 a SAS/STAT 3.71 (University Edition).

Software SAS/STAT je velmi výkonný software používaný zejména v oblasti statistických výpočtů. Pro studijní a výzkumné potřeby lze využít bezplatnou licenci pokrývající základní oblasti výpočtů.⁶⁾ Software využívá vlastní programovací jazyk, který se strukturou podobá dalším programovacím jazykům.

Geogebra

Geogebra není pouze užitečnou pomůckou pro zobrazování, popř. řešení rozmanitých geometrických problémů. V softwaru jsou rovněž implementované nástroje pro zpracování matematických funkcí a provádění výpočtů

⁶⁾Oficiální stránky společnosti SAS jsou https://www.sas.com/cs_cz/home.html. Software lze pro výzkumné a studijní účely používat bezplatně, ke stažení je na https://www.sas.com/cs_cz/software/university-edition/download-software.html#windows. Na stránkách společnosti je uveden podrobný postup instalace softwaru. Řešení řady problémů softwarem SAS lze nalézt např. na <https://blogs.sas.com/content/iml/>.

např. z oblasti algebry, diskrétní matematiky, kalkulu, pravděpodobností apod.

Pro sestavení programu byly použity matematické funkce z oblasti algebry (největší společný dělitel, nejmenší společný násobek, celočíselný podíl) a logiky. Sestavený program nabízí pro daný zlomek vždy jeden z možných rozkladů.

Popisova Fibonacci-Sylvesterova algoritmu při rozkladu zlomku a/b

Určíme hodnotu celočíselného podílu čísel b, a

$$\text{CelociselnýPodíl}(<\text{Dělenec}>, <\text{Dělitel}>)$$

a podle nerovnosti (2) stanovíme hodnotu jmenovatele prvního kmenného zlomku

$$c = \text{CelociselnýPodíl}(b, a) + 1.$$

Po určení nejmenšího společného násobku čísel b, c

$$\text{NSN}(<\text{Číslo}>, <\text{Číslo}>)$$

$$d = \text{NSN}(b, c)$$

vypočítáme hodnotu čitatele zbytkového zlomku

$$e = \frac{ad}{b} - \frac{d}{c},$$

přičemž získáme rozklad ve tvaru

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{c} + \frac{e}{d}.$$

Zbytkový zlomek zkrátíme nalezením největšího společného dělitele čísel e, d

$$\text{NSD}(<\text{Číslo}>, <\text{Číslo}>)$$

$$f = \text{NSD}(e, d)$$

$$g = \frac{e}{f}, \quad h = \frac{d}{f}.$$

Cyklus opakujeme v případě, že zlomek g/h není kmenný, tj. $g > 1$. Použijeme logickou podmínku

$$\text{Kdyz}(<\text{Podmínka}>, <\text{Pak}>, <\text{Jinak}>)$$

$$j = \text{Kdyz}(g > 1, \text{CelociselnýPodíl}(h, g) + 1, h).$$

V případě, že je $g = 1$, je rozklad ukončen

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{h}.$$

Pro $g > 1$ je číslo j jmenovatelem dalšího kmenného zlomku

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{c} + \frac{1}{j} + \frac{k}{l},$$

kde zlomek k/l je zbytkový zlomek. Postup opakujeme až do úplného rozkladu na kmenné zlomky.⁷⁾

Odkaz na applet rozkládající zlomky na součet kmenných zlomků je uveden v dodatku, algoritmus rozkládá zlomky na nejvýše šest zlomků kmenných.⁸⁾

SAS/STAT

Při vytváření programu (Fibonacciův–Sylvesterův algoritmus) můžeme využít obdobnou strategii jako v případě Geogebry, tj. budeme cyklicky opakovat hledání nejbližšího většího celého čísla k celočíselnému podílu jmenovatele a čitatele. Toto číslo označíme jako jmenovatel kmenného zlomku, stanovíme hodnotu zbytkového zlomku a postup opakujeme. Ukažme na příkladu rozklad zlomku $23/211$ na nejvýše čtyři zlomky, přičemž poslední nemusí být kmenný.⁹⁾

```
data Zlomek;
p = 23;      /* Číselník zlomku */
q = 211;
a = ceil(q/p);
/* Vrátil celočíselný podíl zvětšený o číslo 1 */
if p > 1 and p < q
then
  b = p*a - q;
/* Vrátil hodnotu čitatele zbytkového zlomku */
```

⁷⁾Každé racionální číslo zapsané v základním tvaru $0 < a/b < 1$; $a, b \in \mathbb{N}$ lze pomocí Fibonacciova–Sylvesterova algoritmu vyjádřit maximálně a vzájemně různými kmennými zlomky.

⁸⁾Tento počet kmenných zlomků je dostačující pro zlomky tvaru p/q , kde $p, q \leq 100$. Nejmenší zlomek vyžadující k rozkladu 7 kmenných zlomků je [9] $732/733 = 1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/45 + 1/(7\,330) + 1/(20\,524) + 1/(26\,388)$.

⁹⁾Algoritmus je možné celkem snadno prodloužit pro více než čtyři kmenné zlomky.

```

else
a = q;
if p > 1 and b > 1
then
c = ceil(a*q/b);
if p > 1 and b > 1
then
d = b*c - a*q;
if p > 1 and b > 1 and d > 1
then
e = ceil(a*c*q/d);
if p > 1 and b > 1 and d > 1
then
f = d*e - a*c*q;
if p > 1 and b > 1 and d > 1 and f >= 1
then
g = a*c*e*q;
if p > 1 and b > 1 and d > 1 and f >= 1
/* Zkrátí poslední zlomek */
then
r = int(sqrt(g));
do i = 1 to r by 1;
h = f/i - int(f/i);
j = g/i - int(g/i);
m = h + j;
if m = 0
then
o = i;
k = f/max(o);
l = g/max(o);
end;
run;
proc iml;
use Zlomek; read all var {a c e g f}; close;
Denom = a || c || e || g || f ;
print Denom[c={"Jmenovatel 1" "Jmenovatel 2"
"Jmenovatel 3" "Jmenovatel 4" "Čitatel 4"}
label="Rozklad na kmenné zlomky"];
quit;

```

Výstupem programu je tabulka (záložka RESULTS) s přehledem požadovaných hodnot jmenovatelů, v případě rozkladu na čtyři zlomky je v pátém sloupci uvedena hodnota čitatele posledního (tj. čtvrtého) zlomku.

Rozklad na kmenné zlomky				
Jmenovatel 1	Jmenovatel 2	Jmenovatel 3	Jmenovatel 4	Číselník 4
10	112	13129	1.55132E9	1

Program rozložil zadaný zlomek na čtyři kmenné zlomky (přesná hodnota jmenovatele posledního zlomku určena ze záložky OUTPUT DATA)

$$\frac{23}{211} = \frac{1}{10} + \frac{1}{112} + \frac{1}{13129} + \frac{1}{1551322640}.$$

Sestavením jednoduchého programu lze rovněž hledat všechny rozklady pro daný počet kmenných zlomků. Algoritmus výpočtu cyklicky (funkce DO/END) porovnává (pro zadaný rozsah proměnných) součet hodnot kmenných zlomků s hodnotou rozkládaného zlomku. Nalezená řešení následně vypíše ve formě tabulky. Níže je uveden kód programu, který vypočítá rozklad zlomku 4/21 na součet tří zlomků kmenných pro $2 \leq a, b, c \leq 1000$, kde a, b, c jsou přirozená čísla.

```
data Zlomek;
do a = 2 to 1000 by 1;
  do b = 2 to 1000 by 1;
    do c = 2 to 1000 by 1;
      e = 1/a + 1/b + 1/c;
      if e = 4/21 then
        do;
          output;
        end;
      end;
    end;
  end;
end;
run;
proc iml;
use Zlomek; read all var {a b c}; close;
Denom = a || b || c ;
print Denom[c={"a" "b" "c"}
label="Hodnoty jmenovatelů a, b, c"];
quit;
```

Výstupem výpočtu je tabulka s přehledem hodnot jmenovatelů kmenných zlomků.¹⁰⁾

Hodnoty jmenovatelů a, b, c					
a	b	c	a	b	c
6	44	924	7	22	462
6	45	630	7	24	168
6	46	483	7	28	84
6	48	336	7	30	70
6	49	294	8	16	336
6	51	238	8	21	56
6	54	189	8	24	42
6	56	168	9	14	126
6	60	140	9	18	42
6	63	126	10	12	140
6	70	105	10	15	42
6	78	91	12	14	28

Přidáním dalšího (dalších) členu (členů) do rozkladu počet možných kmenných zlomků rychle roste, může se rovněž výrazně prodloužit čas potřebný k provedení potřebných výpočtů.

Odkaz na program rozkládající zlomky na stanovený počet kmenových zlomků naleznete v dodatku.

Několik souvisejících úloh využitelných ve výuce matematiky

Dědictví (ZŠ, SŠ)

Poměrně známou úlohou je přání otce tří synů, aby si tito rozdělili 19 ovcí tak, že nejstarší má obdržet polovinu stáda, prostřední čtvrtinu a nejmladší pětinu. Otec současně vyjádřil přání, aby žádná z ovcí nepřišla v průběhu dělení k újmě na zdraví. Synové si s otcovým přáním nevěděli příliš rady až do chvíle, kdy jim soused nabídl ještě jednu ovečku. Stádo

¹⁰⁾ V tabulce byly vynechány permutace nalezených trojic jmenovatelů a trojice neobsahující různé jmenovatele.

20 ovcí se už bratrům dělilo snadněji, nejstarší si odvedl polovinu tedy 10 ovcí, prostřední čtvrtinu tedy 5 ovcí a nejmladší pak pětinu tedy 4 ovce. Spokojení bratři nakonec poslední ovečku mohli vrátit sousedovi. V čem spočívá podstata řešení?

Odpovědí je specificky zadaný počet ovcí, které si mají bratři rozdělit. Pokud sečteme kmenné zlomky, které určují jednotlivé podíly, dostaneme

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$$

a nikoliv $20/20$, jmenovatele kmenných zlomků (2, 4 a 5) jsou děliteli čísla 20.¹¹⁾

Rozklad kmenného zlomku (SŠ)

Rozkládat lze rovněž kmenné zlomky, např.

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$$

nebo

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{13} + \frac{1}{156}.$$

Podle uvedených příkladů formulujte a dokažte obecné pravidlo pro rozklad zlomku ve tvaru $1/n$ na součet dvou kmenných zlomků.

Řešení. Pro uvedené kmenné zlomky platí

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

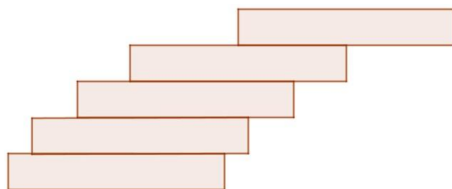
Tvrzení můžeme snadno dokázat sečtením lomených výrazů na pravé straně

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n}.$$

¹¹⁾Řešení lze popsat také jako nalezení vhodného rozkladu čísla 1 na kmenné zlomky: $1 = 1/2 + 1/4 + 1/5 + 1/20$.

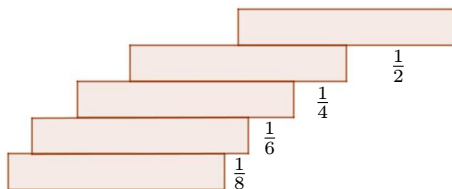
Rovnováha (SŠ)

Předpokládejme, že máme dostatek stejných cihel (nebo knih či kostek domina apod.). Cihly budeme pokládat jednu na druhou tak, jak je naznačeno na obrázku [9].



Může cihla na vrcholu úplně přesahovat cihlu spodní? Jaký je případný maximální převis, kterého můžeme takto dosáhnout?

Řešení. V případě dvou nejvýše položených cihel může horní cihla přesahovat spodní cihlu o $1/2$ délky, těžiště je umístěno ve středu překrývajících se částí cihel, tj. v pořadí druhá cihla může přesahovat další (třetí) cihlu o $1/4$ délky. Vzhledem k poloze těžiště trojice cihel může třetí cihla přesahovat následující (čtvrtou) cihlu o $1/6$ délky atd.



Horní cihla přesáhne cihlu tvořící základnu v případě, že

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} > 1.$$

Požadovaný přesah nastane v případě, že uvedeným způsobem položíme pět cihel

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{25}{24} > 1.$$

Přesah může být i větší, neboť posloupnost

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} + \dots$$

je divergentní. Pokud bychom měli k dispozici cihly s identickými rozměry, pak dvojnásobného přesahu lze docílit poskládáním 32 cihel [9].

Závěr

Kmenné zlomky mohou nalézt místo v matematice základní i střední školy (viz příklady výše uvedených úloh), kde jejich použití může usnadnit řešení některých typů úloh.

Ve středoškolské matematice se kmenné zlomky dále objevují např. v definici harmonického průměru

$$\overline{x_h} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}},$$

který obsahuje součet převrácených hodnot průměrovaných čísel (tj. součet kmenných zlomků).

Ve fyzice se kmenné zlomky uplatňují při výpočtu odporu v případě paralelního zapojení rezistorů, tedy např. pro tři takto zapojené rezistory platí

$$R = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$

Dodejme, že kmenné zlomky vyvolávaly a vyvolávají pozornost u matematiků zabývajících se např. teorií čísel, kombinatorikou opakovaně. Uvedme několik zajímavých výsledků získaných v minulosti:

- P. Erdős (r. 1950) dokázal, že každé racionální číslo $0 < p/q < 1$, kde $p, q \in \mathbb{N}$, lze zapsat nejvýše [3]

$$\frac{8 \ln q}{\ln \ln q}$$

různými kmenovými zlomky se jmenovatelem hodnoty nejvýše

$$\frac{4b^2 \ln q}{\ln \ln q}.$$

- R. Breusch (r. 1954) dokázal, že každý zlomek s lichým jmenovatelem má při rozkladu na kmenné zlomky pouze liché jmenovatele [6].¹²⁾
- H. Zhibin (r. 2014) dokázal, že nejmenší zlomek vyžadující k rozkladu osm kmenných zlomků je [7]

$$\frac{27\,538}{27\,539},$$

¹²⁾R. H. Breusch (1907–1995) byl německo-americký matematik zabývajících se zejména teorií čísel.

současně ukázal příklad takového rozkladu

$$\begin{aligned} \frac{27\,538}{27\,539} = & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \\ & + \frac{1}{1\,933} + \frac{1}{14\,893\,663} + \frac{1}{1\,927\,145\,066\,572\,824} + \\ & + \frac{1}{212\,829\,231\,672\,162\,931\,784}. \end{aligned}$$

Na druhou stranu i v oblasti kmenných zlomků je řada dosud nevyřešených otázek a problémů, jako např. tvrzení, že každý zlomek ve tvaru $4/n$ lze zapsat jako součet tří kmenných zlomků (P. Erdős, E. G. Straus, 1948). Tvrzení bylo ověřeno pro velký počet prvočíselných n , chybí ovšem obecný důkaz pro libovolné n [8].

Rozklady zlomků pomocí Geogebry nebo programu sestaveného v SAS/STAT nejsou jistě jediné možnosti počítačového řešení. Obdobné funkce jako Geogebra jsou součástí MS Excel, výpočetní program je možné sestavit v libovolném dostupném programovacím jazyku. Na internetu lze nalézt řadu stránek obsahujících kalkulátory rozkládající zlomky na součty kmenných zlomků, např.:

- <http://www.calcul.com/show/calculator/egyptian-fraction>
- <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fractions/egyptian.html#section3.3>
- <http://www.robertobigoni.eu/Matematica/Egyptian/Egyptian.html>

Sestavování obdobných programů v Geogebře může být dobrým procvičováním jak početních operací se zlomky, tak práce s jednoduchými logickými operátory. Možnost využití Geogebry jako prostředku k algoritmizaci jednodušších problémů může zajímavým způsobem doplnit a rozšířit výuku matematiky.

Dodatek

Applet rozkládající racionální zlomek užitím Fibonacci–Sylvesterova algoritmu je dostupný z <https://www.geogebra.org/m/huamns3p>. SAS program pro rozklad zlomků je dostupný z <https://www.clatrutnov.cz/index.php/cs/skola/dokumenty/category/78-spichal-ludek-mgr>.

Literatura

- [1] *Vetter, Q.*: Egyptské zlomky. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, roč. 52 (1923), č. 1–2, s. 169–177.
Dostupné z: https://www.dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/123274/CasPestMatFys_052-1923-1_27.pdf
- [2] *Bečvářová, M.*: Středověké početní algoritmy. In: Bečvář, J. (ed.): Matematika ve středověké Evropě. Prometheus, Praha, 2001, s. 230–263. Dostupné z: https://www.dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/401788/DejinyMat_19-2001-1_11.pdf
- [3] *Oščádal, J.*: Egyptské zlomky. Závěrečná práce programu DVPP, TU Liberec, 2013. Dostupné z: <https://www.pslib.cz/jaromir.oscadal/egypt/Egyptsk%C3%A9%20zlomky.pdf>
- [4] *Stachovcová, L.*: Vyjádření racionálního čísla pomocí egyptských zlomků. Učitel matematiky, roč. 9 (2001), č. 4.
- [5] *Graham, R. L.*: Paul Erdős and Egyptian Fractions. In: Lovász, L., Ruzsa, I. Z., Sós, V. T. (ed.): Erdős Centennial, Bolyai Society Mathematical Studies, vol. 5, Springer, Berlin, Heidelberg, 2013, s. 289–309.
- [6] *Breusch, R.*: A special case of Egyptian fractions, solution to advanced problem 4512. The American Mathematical Monthly, roč. 61 (1954), s. 200–201.
- [7] <http://www.mcs.csueastbay.edu/~malek/Class/Egyptian.pdf>
- [8] *Hagedorn, T. R.*: A Proof of a Conjecture on Egyptian Fractions. The American Mathematical Monthly, roč. 107 (2000), s. 62–63.
- [9] <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fractions/egyptian.html#section3.3>

Navlékání korálek

(Úlohy z MO – kategorie P, 38. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V našem seriálu článků o úlohách z Matematické olympiády kategorie P (programování) se tentokrát zastavíme u jedné praktické úlohy z ústředního kola loňského 67. ročníku MO (školní rok 2017/18). Jedná se o zajímavou modifikaci poměrně známé úlohy určit délku maximální rostoucí podposloupnosti vybrané ze zadané posloupnosti čísel. V domácím kole 67. ročníku MO soutěžící řešili právě tuto základní úlohu. V krajském kole na ni navázala o něco těžší varianta, kdy se ve vybrané rostoucí podposloupnosti připouští jeden pokles hodnoty. S uvedenou dvojicí úloh jsme se v Matematické olympiádě kategorie P již v dávné minulosti jednou setkali. Bylo to před dvaceti lety ve 47. ročníku soutěže. Úloze byl věnován také 20. díl našeho seriálu nazvaný Pokleslá podposloupnost [1].

Soutěžní úloha ústředního kola o navlékání korálek přírozeným způsobem navázala na úlohy z nižších kol soutěže. Seznámíme se nejprve s přesným zněním zadání. Úplné znění i původní autorské řešení úlohy můžete nalézt také na webu v archívu MO-P [2].

* * * * *

Ještě nedávno měla Natálka krásný náhrdelník, na kterém bylo n korálek. Korálky měly různé odstíny růžové barvy, postupně přecházely od tmavé do světlé. Náhrdelník se ale přetrhl a korálky se rozkutálely po zemi. Natálka teď drží prázdnou šňůrku a Petr (který se na přetržení náhrdelníku maličko podílel) klečí na zemi, sbírá korálky a jeden po druhém je Natálce podává. Ta může každý korálek buď navléknout na šňůrku (a to z libovolného konce), nebo ho může odložit do krabice s šitím.

Natálku při sbírání korálek napadla následující úloha: Co kdyby korálky zkusila navlékat tak, aby nakonec byly na šňůrce seřazené od nejtmašího po nejsvětleší? Možná se jí nepodaří takto navléknout všechny korálky, ale určitě bude zábavné zkusit navléknout jich co nejvíce.

Soutěžní úloha

Na vstupu je dána posloupnost $f_1, \dots, f_n$: barvy korálků v tom pořadí, v jakém je Petr podával Natálce. Všechna f_i jsou *navzájem různá* přirozená čísla. Čím větší číslo, tím světlejší korálek představuje. Pro každý korálek si Natálka vybrala jednu ze tří možností: buď ho navlékla na levý konec šňůrky, nebo ho navlékla na pravý konec šňůrky, nebo ho odložila pryč. Víme, že na konci celého procesu měla šňůrku, na níž zleva doprava barva korálků přecházela z tmavé do světlé – tedy jim odpovídající čísla rostla.

Napište program, který určí, kolik korálků mohla mít nakonec Natálka na šňůrce nejvýše.

Formát vstupu a výstupu

Na prvním řádku vstupu je kladné celé číslo n . Na druhém řádku je n různých kladných celých čísel $f_1, \dots, f_n$. Vypište jeden řádek s jedním číslem: maximální počet korálků, které mohly skončit na šňůrce.

Omezení a hodnocení

Je připraveno 10 sad testovacích vstupů, za každou můžete získat 1 bod. Ve všech sadách pro každé i platí $1 \leq f_i \leq 10^9$. Jednotlivé sady mají různou maximální hodnotu n : 6, 12, 20, 60, 100, 5 000, 17 000, 150 000, 250 000 a 500 000.

Příklady.

Vstup:	Výstup:
5	3
30 10 50 20 40	

Jedno optimální řešení: Korálek 30 navleče Natálka na šňůrku (je jedno, z které strany), korálek 10 nepoužije, korálek 50 navleče zprava, korálek 20 navleče zleva a korálek 40 nepoužije.

Vstup:	Výstup:
6	6
10 20 9 21 8 22	

Všechny korálky můžeme navléknout na šňůrku.

Vstup:	Výstup:
7	5
1 7 4 3 5 2 6	

Zde je optimálním řešením nepoužít první dva korálky a z ostatních sestavit na šňůrce posloupnost 2, 3, 4, 5, 6.

* * * * *

Úlohu můžeme řešit hrubou silou, tedy prostým zkoušením všech možností. Podle zadání máme pro každý korálek tři možnosti, co s ním uděláme: buď ho na šňůrku navlékneme zleva, nebo ho navlékneme zprava, nebo ho vynecháme. Snadno nahlédneme, že vzhledem k požadovanému vzestupnému uspořádání korálek v náhrdelníku máme ve skutečnosti vždy nejvýše dvě možnosti: buď korálek navlékneme na šňůrku, nebo ho vynecháme. Dokud není na šňůrce žádný korálek, nemá smysl rozlišovat mezi navléknutím zleva a zprava – výsledek bude v obou případech stejný. Když už je na šňůrce navlečen první korálek a jeho hodnotu označíme P , pak následující korálky s hodnotou menší než P lze navléknout jedině zleva a následující korálky s hodnotou větší než P jedině zprava. Pro n koráleků tak vyzkoušíme až 2^n možností a jako výsledek určíme maximální dosaženou délku náhrdelníku. Časová složitost tohoto řešení je proto $O(2^n)$.

Právě popsané řešení si nyní ukážeme zapsané v programovacím jazyce Pascal:

```
program Koralky1;
{zkoušení všech možností - exponenciální složitost}
const MaxN = 500000; {maximální počet koráleků}
var n: integer;      {počet koráleků}
    max: integer;     {maximální délka náhrdelníku}
    F: array[1..MaxN] of integer; {hodnoty koráleků}
    i: integer;

procedure Koralek(i, n, prvni, posledni, delka: integer;
                  var max: integer);
{pořadové číslo korálku, počet všech koráleků, hodnota
prvního a posledního korálku v náhrdelníku, aktuální
délka náhrdelníku, maximální dosažená délka náhrdelníku}
var fi: integer; {hodnota i-tého korálku}
begin
  if i > n then      {hotovo}
  begin
    if delka > max then max := delka;
                      {nalezeno nové maximum}

    exit
  end;
end;
```

```

fi := F[I];
if delka = 0 then
  {první navlečený korálek}
  Koralek(i+1, n, fi, fi, 1, max)
else if fi < první then
  {navlékneme zleva}
  Koralek(i+1, n, fi, posledni, delka+1, max)
else if fi > posledni then
  {navlékneme zprava}
  Koralek(i+1, n, první, fi, delka+1, max);
{korálek vynecháme}
Koralek(i+1, n, první, posledni, delka, max)
end; {procedura Koralek}

begin
read(n);
for i := 1 to n do read(F[i]);
max := 0;
Koralek(1, n, 0, 0, 0, max);
writeln(max)
end.

```

Popsané řešení jsme implementovali pomocí rekurzivní procedury Koralek. Význam jejích parametrů je uveden přímo v programu v komentářích. Nebudeme zde popisovat možnosti, jak lze zlepšit časovou složitost tohoto algoritmu pomocí techniky kešování (memoizace, ukládání známých výsledků) – zájemci si tato možná vylepšení jistě rozmyslí samostatně nebo si je mohou vyhledat ve [2]. Místo toho se budeme raději podrobněji věnovat efektivnějšímu postupu řešení.

Základem vzorového řešení naší úlohy je efektivní postup, jak v zadané posloupnosti čísel určit délku maximální vybrané rostoucí podposloupnosti. Pro posloupnost délky n dokážeme tuto úlohu vyřešit v čase $O(n \cdot \log n)$. Již v úvodu jsme uvedli, že s tímto algoritmem se soutěžící setkali v domácím kole soutěže, kde ho buď sami vymysleli, nebo se s ním seznámili následně ve vzorovém řešení. Naši čtenáři si mohou algoritmus přečíst v archívu úloh MO-P [2] ve vzorovém řešení úlohy 67-I-2, podrobnější rozbor najdete také v [3].

Ukážeme si zde alespoň hlavní myšlenku tohoto postupu. Budeme postupně procházet zadanou posloupnost čísel $f_1, \dots, f_n$ a pro každý její prvek f_i určíme délku maximální rostoucí podposloupnosti vybrané z počátečního úseku délky i . Jak vzápětí uvidíme, výpočet každé z těchto hod-

not má časovou složitost $O(\log n)$ a protože ho provádíme n -krát, bude celková časová složitost popsaného algoritmu skutečně $O(n \cdot \log n)$.

V průběhu výpočtu si budeme v pomocném poli D udržovat následující informaci: číslo D_j udává, jakou nejmenší hodnotou může končit rostoucí podposloupnost délky j vybraná z úseku posloupnosti $f_1, \dots, f_i$. Sporem snadno dokážeme, že hodnoty v poli D jsou vždy vzestupně uspořádané. V i -tém kroku výpočtu přidáme do uvažované posloupnosti prvek f_i , který sníží jednu vhodnou hodnotu uloženou v poli D – vždy tu, která je nejbližší vyšší než f_i . Díky uspořádání pole D dokážeme tuto hodnotu určit v logaritmickém čase binárním vyhledáváním.

Výsledné řešení dnešní úlohy získáme složením některých myšlenek uvedených výše v našem prvním řešení a algoritmu na určení délky maximální rostoucí vybrané podposloupnosti. Je jasné, že některý korálek navlékneme jako první. Nevíme který, ale můžeme vyzkoušet všech n takových možností. Pro každou volbu prvního navlečeného korálku (jeho hodnotu jsme si označili P) již víme, že následující korálky s hodnotou větší než P lze navlékat jediné zprava, zatímco korálky s hodnotou menší než P jediné zleva. Chceme navléknout co nejvíce korálků, takže mezi těmi většími než P chceme nalézt co nejdelší rostoucí podposloupnost a mezi těmi menšími než P co nejdelší klesající podposloupnost (což představuje prakticky stejný postup). To umíme provést v čase $O(n \cdot \log n)$, takže celkově dostáváme řešení s asymptotickou časovou složitostí $O(n^2 \cdot \log n)$. Stačí postupně vyzkoušet všech n možností volby prvního navlečeného korálku a pro každou z nich dvakrát vykonat algoritmus na určení délky maximální rostoucí (resp. ve druhém případě klesající) podposloupnosti, kterou ke zvolenému prvnímu korálku můžeme připojit.

Zdá se, že jsme s řešením úspěšně u konce, ale není tomu tak. Popsané řešení ještě stále provádí řadu výpočtů zbytečně vícekrát a vhodnou úpravou ho můžeme významně urychlit. Algoritmus z domácího kola můžeme snadno upravit tak, aby zpracovával zadanou posloupnost v opačném směru, tedy od konce. Pro každý prvek posloupnosti f_i , ovšem tentokrát pro i v pořadí od n dolů k 1, budeme určovat délku maximální rostoucí (resp. klesající) podposloupnosti začínající prvkem f_i . Uvedený postup opět zopakujeme dvakrát – zvlášť pro rostoucí a zvlášť pro klesající podposloupnost. Všechny spočítané hodnoty si uložíme do polí A , B pro další využití. Již víme, že celý tento výpočet má časovou složitost $O(n \cdot \log n)$.

Tím máme v polích A , B připraveno všechno potřebné pro vyřešení úlohy. Nyní už jen stačí jednou projít zadanou posloupnost čísel a pro

každý její prvek f_i (tj. první navlečený korálek) získáme v konstantním čase maximální délku náhrdelníku jako součet $A_i + B_i - 1$. Odečtení 1 je zde proto, abychom první navlečený korálek nezapočítali do výsledku dvakrát. Tato závěrečná fáze výpočtu má tedy časovou složitost $O(n)$, celé řešení úlohy proto zvládneme v čase $O(n \cdot \log n)$.

Popsané řešení zapíšeme opět také ve tvaru programu. Zvolili jsme takovou formu zápisu, aby byla jasná a dobře srozumitelná, i když program by bylo možné zapsat i o něco kratším a úspornějším způsobem.

```

program Koralky2;      {dynamické programování}
const MaxN = 500000; {maximální počet korálků}
var n: integer;        {počet korálků}
    max: integer;      {maximální délka náhrdelníku}
    F: array[1..MaxN] of integer; {hodnoty korálků}
    A, B: array[1..MaxN] of integer;
    {A[i] - délka max. rostoucí podposloupnosti
        začínající korálkem "i"}
    {B[i] - délka max. klesající podposloupnosti
        začínající korálkem "i"}
    D: array[1..MaxN] of integer;
    {D[i] - jakou největší hodnotou může začínat
        rostoucí podposloupnost délky "i",
        resp. jakou nejmenší hodnotou může začínat
        klesající podposloupnost délky "i"}
    k: integer; {délka max. rostoucí,
        resp. klesající podposloupnosti}
    i, j: integer;

begin
read(n);
for i := 1 to n do read(F[i]);
{Zpracujeme F[n] - úsek délky 1}
k := 1;
D[1] := F[n]; A[n] := 1; B[n] := 1;
{Rostoucí podposloupnost začínající korálkem číslo "i":}
for i := n-1 downto 1 do
    if F[i] < D[k] then
        begin {lze prodloužit}
            k := k + 1;
            D[k] := F[i]; A[i] := k
        end
    else

```



```

begin
{Mezi D[1], D[2], ..., D[k] vyhledáme největší
 hodnotu D[j] takovou, že D[j] < F[i]. Hodnoty
 v poli D jsou uspořádané sestupně, takže to lze
 provést v logaritmickém čase binárním vyhledáváním.
 My zde pro jednoduchost zápisu použijeme sekvenční
 průchod s lineární časovou složitostí:}
j := 1;
while D[j] > F[i] do j := j + 1; {máme potřebné D[j]}
D[j] := F[i]; A[i] := j
end;
{Klesající podposloupnost začínající
 korálkem číslo "i" - analogicky:}
k := 1;
for i := n-1 downto 1 do
  if F[i] > D[k] then
    begin {lze prodloužit}
      k := k + 1;
      D[k] := F[i]; B[i] := k
    end
  else
    begin
      j := 1;
      while D[j] < F[i] do j := j + 1; {máme potřebné D[j]}
      D[j] := F[i]; B[i] := j
    end;
  {Nejdelší náhrdelník:}
max := 0;
for i := 1 to n do
  if A[i] + B[i] - 1 > max then max:= A[i] + B[i] - 1;
writeln(max)
end.

```

Literatura

- [1] Töpfer, P.: Pokleslá podposloupnost (Úlohy z MO – kategorie P, 20. část). MFI, roč. 17 (2007–2008), č. 9, s. 553–556.
- [2] <http://mo.mff.cuni.cz/p/archiv.html>
- [3] Libicher, I., Töpfer, P.: Od problému k algoritmu a programu. Grada, Praha, 1992.

ZPRÁVY

8. Evropská dívčí MO (EGMO)

Od 7. do 13. dubna letošního roku se v ukrajinském hlavním městě Kyjevě konal již 8. ročník Evropské dívčí matematické olympiády (EGMO). Patronát nad soutěží převzalo Ministerstvo školství a vědy Ukrajiny a Národní univerzita Tarase Ševčenko v Kyjevě. Ubytování všech účastníků, soutěž samotná, koordinace úloh i zasedání mezinárodní jury bylo zajištěno v nadstandardním prostředí hotelu Ramada-Encore v Kyjevě.

Osmého ročníku soutěže se zúčastnil rekordní počet soutěžících – celkově 196 ze 49 zemí všech kontinentů (z toho 35 evropských). Nechyběla mezi nimi silná družstva USA, Kanady, Japonska, Brazílie, Mexika a další.



Obr. 1 Reprezenační družstva České republiky a Slovenské republiky

České reprezentační družstvo středoškolaček se této soutěže zúčastnilo již počtvrté, tentokrát jsme se však museli při nominaci obejít bez dívek, které v letošním školním roce maturují, neboť termín soutěže se překrýval s písemnou maturitní zkouškou. Podobně jako v předešlých třech ročnících bylo nutno (s ohledem na termín ústředního kola MO v kategorii A) vybrat dívky do reprezentačního týmu pro 8. EGMO již na základě jejich výsledků po centrální koordinaci úloh II. (krajského) kola v nejvyšší věkové kategorii, tedy ještě před ústředním kolem v kategorii A. Místa v reprezentaci si tak vybojovala následující čtveřice dívek: *Adéla Heroudková* (5/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše), *Magdaléna Mišinová* (6/8, G J. Keplera, Praha 6), *Michaela Svatošová* (7/8, G M. Koperníka, Bílovec) a *Adéla Karolína Žáčková* (6/8, G Ch. Dopplera, Praha 5). Vedoucím české delegace a zástupcem v mezinárodní jury byl *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.*, pedagogickým vedoucím *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.*, oba z PřF UP v Olomouci.

Naše mladé družstvo si v silné mezinárodní konkurenci soutěži vedlo nad očekávání dobře. *Magdaléna Mišinová* získala v této prestižní mezinárodní soutěži pro Českou republiku historicky první zlatou medaili se ziskem 34 bodů (ze 42 možných), což představovalo v celkovém pořadí 8. místo (mezi Evropankami byla dokonce 7.). Absolutního skóre 42 bodů dosáhla a celkovou vítězkou 8. ročníku EGMO se stala *Jelena Ivančič* ze Srbska.



Obr. 2 Magdaléna Mišinová

Zbýlé tři naše reprezentantky si domů přivezly čestná uznání, která se udělují soutěžícím, které nezískaly medaili, avšak bezchybně vyřešily

aspoň jednu úlohu. Nejblíže bronzové medaili byla nejmladší z nich, *Adéla Heroudková*, které za zisk 15 bodů unikla bronzová medaile o jediný bod. *Michaela Svatošová* získala 12 bodů a *Adéla Žáčková* 11 bodů. V oficiálním pořadí se pak naše družstvo umístilo v lepší polovině – na 22. místě (mezi Evropskými týmy pak na 16. místě), což představuje mírné zlepšení ve srovnání s výsledky našeho týmu v uplynulých dvou letech.

Kyjevští organizátoři zajistili pro účastníky soutěže pestrý doprovodný program. Pro soutěžící návštěvu centra města spojenou s prohlídkou některých historických budov a dále návštěvu nedalekého skanzenu ukrajinské kultury Pyrohovo. Poslední den před večerním závěrečným ceremoniálem pak všichni účastníci absolvovali vyhlídkovou plavbu po Dněpru. Slavnostní vyhlášení výsledků a závěrečný ceremoniál 8. ročníku EGMO se uskutečnil v pátek 12. dubna navečer v centru metropole v kyjevském Paláci kultury za přítomnosti ministryně školství a vědy Ukrajiny *Lilie Hryněvičové* a dalších významných hostů.

Dále uvádíme texty všech soutěžních úloh zadaných na 8. EGMO.

1. soutěžní den (9. 4. 2019)

Úloha 1 Určete všechny trojice (a, b, c) reálných čísel, pro něž platí

$$ab + bc + ca = 1 \quad \text{a současně} \quad a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

(*Nizozemsko*)

Úloha 2 Je dáno kladné celé číslo n . Na čtvercovou tabulku $2n \times 2n$ jsou umístěna domina tak, že každé pole této tabulky je sousední s právě jedním polem pokrytým dominem. Pro každé n určete největší počet domin, která takto můžeme umístit na tuto tabulku.

(*Domínem* rozumíme obdélník 2×1 nebo 1×2 . Domina jsou umísťována na tabulku tak, že každé domino pokrývá právě dvě pole tabulky a jednotlivá domina se nepřekrývají. Dvě pole tabulky jsou *sousední*, právě když jsou různá a mají společnou stranu.)

(*Lucembursko*)

Úloha 3 Je dán trojúhelník ABC , v němž $|\sphericalangle CAB| > |\sphericalangle ABC|$. Označme I střed kružnice jemu vepsané. Nechť D je bod úsečky BC , pro který platí $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ABC|$. Označme ω kružnici, která se dotýká přímky AC v bodě A a prochází bodem I . Nechť X ($X \neq A$) je průsečík kružnice ω a kružnice opsané trojúhelníku ABC . Dokažte, že osy úhlů DAB a CXB se protínají na přímce BC .

(*Polsko*)

2. soutěžní den (10. 4. 2019)

Úloha 4 Nechť I je střed kružnice ω vepsané trojúhelníku ABC . Kružnice procházející bodem B , která sa dotýká AI v bodě I , protíná stranu AB v bodě P ($P \neq B$). Analogicky, kružnice procházející bodem C , která se dotýká AI v bodě I , protíná stranu AC v bodě Q ($Q \neq C$). Dokažte, že přímka PQ je tečnou kružnice ω . (Polsko)

Úloha 5 Nechť $n \geq 2$ je celé číslo a $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou kladná celá čísla. Dokažte, že existují kladná celá čísla $b_1, b_2, \dots, b_n$ splňující následující podmínky:

(A) $a_i \leq b_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n$;

(B) zbytky po dělení čísel $b_1, b_2, \dots, b_n$ číslem n jsou po dvou různé;

(C) $b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje dolní celou část reálného čísla x , což je největší celé číslo nepřevyšující x .) (Nizozemsko)

Úloha 6 Alena nakreslila na kružnici 2019 tětív s navzájem různými krajními body. Bod nazveme *označený*, právě když jde o

(i) jeden z 4038 krajních bodů těchto tětív; nebo

(ii) průsečík aspoň dvou z těchto tětív.

Alena potom každý z označených bodů číselně ohodnotila. Ze všech 4038 krajních bodů splňujících (i) ohodnotila některých 2019 bodů číslem 0 a zbývajících 2019 bodů číslem 1. Následně ohodnotila všechny body splňující (ii) libovolným celým číslem (ne nutně kladným).

Na každé tětívě uvažovala úsečky spojující po sobě jdoucí označené body. (Tětiva s k označenými body obsahuje $k-1$ takových úseček.) Dále ohodnotila každou takovou úsečku dvěma čísly, z nichž jedno je žluté a druhé je modré, přičemž žlutá čísla představují součet číselných ohodnocení koncových bodů na ohodnocované úsečce a modrá čísla absolutní hodnotu jejich rozdílu.

Následně Alena zjistila, že mezi všemi $N+1$ žlutými čísly se každé z čísel $0, 1, \dots, N$ vyskytuje právě jednou. Dokažte, že aspoň jedno modré číslo je násobkem 3. (Velká Británie)

Podrobnější informace o letošním ročníku soutěže můžete najít na oficiálních stránkách EGMO (<https://www.egmo.org>).

Vedení českého týmu si touto cestou dovoluje poděkovat především Nadaci RSJ, která i v letošním roce poskytla finanční prostředky pro cestu českého týmu na 8. EGMO v rámci projektu JČMF, dále pak brněnské firmě NEOGENIA s. r. o. za jejich účinnou sponzorskou pomoc spojenou se zajištěním jednotného reprezentačního oblečení pro celé české družstvo.



Obr. 3 Český tým před hotelem Ramada-Encore. Zleva M. Mišinová, M. Svatošová, A. K. Žáčková, A. Heroudková, M. Povna (ukrajinská průvodkyně českého družstva), J. Švrček (vedoucí týmu), vzadu P. Calábek (pedagogický vedoucí)

Příští 9. ročník této soutěže se uskuteční ve druhé polovině dubna 2020 v nizozemském městě se symbolickým názvem *Egmond aan Zee*.

Jaroslav Švrček