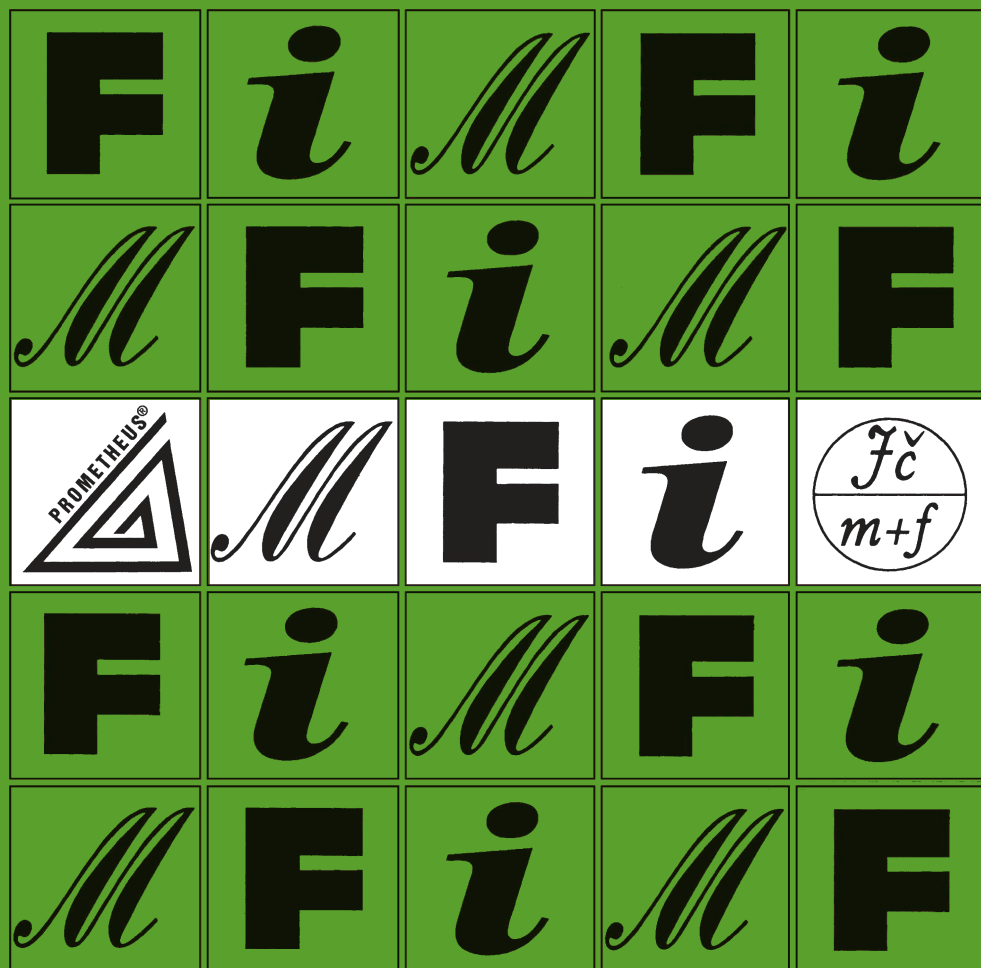


MATEMATIKA 1 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXIX (2020), číslo 1

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku

Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška, Michaela Křížová, Miluše Lachmannová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil (předseda redakční rady), Dana Mandíková, Oldřich Odvárko, Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Emanuel Svoboda, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel Töpfer

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>T. Riemel, J. Švrček:</i> Polynomicko-exponenciální diofantovské rovnice	1
<i>J. Staněk:</i> Úlohy diskrétní pravděpodobnosti	7
<i>Č. Kodejška:</i> Přibližná trisekce úhlu užitím geometrické posloupnosti	18
Zajímavé matematické úlohy	21

FYZIKA

<i>E. Svoboda, O. Lepil, B. Rothanzl:</i> Přehled PLUS: Elektronický doplněk k Přehledu středoškolské fyziky	25
<i>B. Vybíral:</i> Ohlédnutí za obdobím heuristického poznávání ve fyzice	32
<i>J. Válek:</i> VPython/GlowScript Trinket ve výuce fyziky	44

INFORMATIKA

<i>L. Spíchal:</i> Superelipsa a superformule	54
<i>P. Töpfer:</i> Nejlevnější vaření (Úlohy z MO kategorie P, 39. část)	69

ZPRÁVY

<i>J. Švrček:</i> 13. střeoevropská matematická olympiáda	78
---	----

Polynomicko-exponenciální diofantovské rovnice

TOMÁŠ RIEMEL – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Polynomicko-exponenciálními diofantovskými rovnicemi rozumíme takové diofantovské rovnice, v nichž celočíselné neznámé mají zpravidla charakter proměnných daného polynomu s celočíselnými koeficienty a exponentů dané exponenciální funkce se základem a , kterým je přirozené číslo větší než 1. V tomto příspěvku se zaměříme zejména na *metodu faktorizace* (daného polynomu), která se s výhodou používá při řešení nejjednodušších rovnic uvedeného typu, tj. rovnic s celočíselnými neznámými x, y ve tvaru

$$P(x) = a^y,$$

kde $P(x)$ je daný polynom s celočíselnými koeficienty a a je přirozené číslo větší než 1.

Příklad 1

Určete všechny dvojice (x, y) celých čísel, které vyhovují rovnici

$$x^2 = 2^y.$$

Řešení: Ze zadání je patrné, že pokud určitá dvojice (x, y) celých čísel je řešením dané rovnice, pak i dvojice $(-x, y)$ je řešením této rovnice. Dále si uvědomme, že y je celé nezáporné číslo, neboť výraz na levé straně rovnice nabývá výhradně nezáporných celočíselných hodnot. Snadno se konečně vidí, že $x = 2^k$, kde k je *vhodné* celé nezáporné číslo. Platí tudíž

$$x^2 = (2^k)^2 = 2^{2k} = 2^y,$$

a tedy $y = 2k$. Zkouškou se snadno přesvědčíme, že všechny dvojice $(x, y) = (2^k, 2k)$, kde k je *libovolné* celé nezáporné číslo (jedná se o tzv. jednoparametrický systém řešení), vyhovují dané rovnici.

Závěr. Řešením dané úlohy jsou všechny dvojice celých čísel ve tvaru

$$(x, y) = (\pm 2^k, 2k),$$

kde k je libovolné celé nezáporné číslo.

Příklad 2

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$3x^2 = 2^{y+4} - 2^{y+2}.$$

Řešení: Ze zadání je patrné (podobně jako v příkladu 1), že pokud určitá dvojice (x, y) celých čísel je řešením dané rovnice, pak také dvojice $(-x, y)$ je řešením této rovnice. Vytknutím 2^{y+2} na pravé straně rovnice a následnou úpravou dostaneme bezprostředně

$$x^2 = 2^{y+2}.$$

Zavedením substituce $z = y + 2$ dostáváme analogickou rovnici jako v předešlé úloze. S ohledem na její řešení a vzhledem k použité substituci ($y = z - 2$) jsou řešením dané rovnice všechny dvojice $(x, y) = (\pm 2^k, 2k - 2)$, kde k je celé nezáporné číslo. Po záměně parametru k za $k + 1$ dojdeme k následujícímu závěru: $(x, y) = (\pm 2^{k+1}, 2k)$, kde k je libovolné celé číslo větší nebo rovno -1 .

Závěr. Řešením dané úlohy jsou všechny dvojice

$$(x, y) = (\pm 2^{k+1}, 2k),$$

kde k je libovolné celé číslo větší nebo rovno -1 .

Při řešení následujících úloh bude uplatněna metoda faktorizace daného polynomu $P(x)$ s celočíselnými koeficienty, která byla zmíněna v úvodním odstavci článku.

Příklad 3

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$1 + x + x^2 + x^3 = 2^y.$$

Řešení: Podobně jako v první úloze vidíme, že x a y jsou celá nezáporná čísla, neboť výraz na levé straně rovnice musí nabývat nezáporných celočíselných hodnot. Levou stranu rovnice lze přepsat do součinného (faktorizovaného) tvaru $(1+x)(1+x^2)$. Danou rovnici přepíšeme ve tvaru

$$(1+x)(1+x^2) = 2^y = 2^m \cdot 2^n,$$

kde m, n jsou celá nezáporná čísla, $m+n=y$, $m \leq n$. Zřejmě platí

$$0 < 1+x \leq 1+x^2,$$

tudíž $1+x = 2^m$, $1+x^2 = 2^n$, a proto hodnota $1+x$ musí dělit hodnotu $1+x^2$. Přitom platí

$$\frac{x^2+1}{x+1} = \frac{(x^2-1)+2}{x+1} = x-1 + \frac{2}{x+1}.$$

Odtud plyne, že zlomek $2/(x+1)$ musí nutně nabývat celočíselné hodnoty. Přípustnými hodnotami x jsou pak čísla z množiny $\{-3, -2, 0, 1\}$. Postupným dosazením za x do rovnic $1+x = 2^m$, $1+x^2 = 2^n$ získáme dvě řešení $(m, n) = (0, 0)$ pro $x = 0$ a $(m, n) = (1, 1)$ pro $x = 1$.

Závěr. Daná úloha má právě dvě řešení, a to $(x, y) \in \{(0, 0), (1, 2)\}$.

Podobně lze řešit i následující úlohu.

Příklad 4

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7=2^y.$$

Řešení: Danou rovnici postupně upravíme do tvaru

$$\begin{aligned} (1+x+x^2+x^3) + (x^4+x^5+x^6+x^7) &= (1+x+x^2+x^3)(1+x^4) = \\ &= (1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 2^y. \end{aligned}$$

Uvědomme si, že y je celé nezáporné číslo, neboť výraz na levé straně je celé číslo. Platí tedy $0 < 1+x \leq 1+x^2 \leq 1+x^4$ a daná rovnice přejde do tvaru

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 2^y = 2^p \cdot 2^q \cdot 2^r.$$

Odtud $1+x = 2^p$, $1+x^2 = 2^q$ a $1+x^4 = 2^r$, kde p, q, r jsou celá nezáporná čísla, $p \leq q \leq r$ a $p+q+r=y$. Proto číslo $1+x^2$ musí být

dělitelné číslem $1 + x$ (dále číslo $1 + x^4$ musí být dělitelné číslem $1 + x$ a rovněž číslem $1 + x^2$). Tedy, opět jako v předchozím příkladě, uvažujeme podíl $(x^2 + 1) : (x + 1)$, který nabývá celočíselných hodnot x pouze pro čísla z množiny $\{-3, -2, 0, 1\}$. Postupným dosazením těchto hodnot x do rovnic $1 + x = 2^p$, $1 + x^2 = 2^q$, $1 + x^4 = 2^r$ získáme dvě řešení $(p, q, r) = (0, 0, 0)$ pro $x = 0$ a $(p, q, r) = (1, 1, 1)$ pro $x = 1$.

Závěr. Daná úloha má právě dvě řešení, a to $(x, y) \in \{(0, 0), (1, 3)\}$.

Příklad 5 (XVIII. Matematický duel, 2010)

Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel splňující rovnici

$$9^a = b^2 + 17.$$

Řešení: Danou rovnici postupně přepíšeme do tvaru

$$9^a - b^2 = 3^{2a} - b^2 = (3^a)^2 - b^2 = (3^a - b)(3^a + b) = 17.$$

Protože $3^a + b > 0$, musí být i $3^a - b > 0$. S ohledem na nerovnost $3^a - b < 3^a + b$ platí

$$3^a - b = 1, \tag{1}$$

$$3^a + b = 17. \tag{2}$$

Odečtením (1) od (2) dostáváme bezprostředně $b = 8$ a následně $a = 2$.

Závěr. Úloha má tedy jediné řešení $(a, b) = (2, 8)$.

Příklad 6 (VI. Matematický duel, 1998)

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$x^3 + 14x^2 - 51x = 10^y.$$

Řešení: Rovnici nejprve upravíme do tvaru

$$x(x + 17)(x - 3) = 2^y \cdot 5^y.$$

Stejně jako v příkladu 3 snadno vidíme, že x a y jsou celá nezáporná čísla. Hodnota $(x + 17)(x - 3)$ má jinou paritu než x . Musí tudíž nastat právě jedna z možností:

- (i) $x = 5^m$, kde m je celé číslo, $m \leq y$
- (ii) $(x + 17)(x - 3) = 5^n$, kde n je celé číslo, $n \leq y$

ad (i) Pokud $x = 5^m$, pak čísla $x + 17 = 5^m + 17$ a $x - 3 = 5^m - 3$ nejsou dělitelná 5. Musí tedy platit $(x + 17)(x - 3) = 2^y$ a současně $x = 5^y$. Pro každé celé číslo x navíc platí $x + 17 > x - 3$, nutně tedy musí být číslo $x + 17$ dělitelné číslem $x - 3$. Platí tak

$$\frac{x + 17}{x - 3} = \frac{(x - 3) + 20}{x - 3} = 1 + \frac{20}{x - 3}.$$

Číslo x může proto nabývat celočíselných hodnot pouze pro čísla z množiny $\{-17, -7, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 13, 23\}$. Současně musí být x mocninou čísla 5. Vyhovují tedy pouze čísla 1 a 5. Dosazením $x = 1$ a $x = 5$ do vztahu $(x + 17)(x - 3) = 2^y$ však nedostaneme žádné vyhovující celé číslo y .

ad (ii) Podobně jako v případě (i) zjistíme, že x může nabývat pouze hodnot z množiny $\{-17, -7, -2, -1, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 13, 23\}$. Jelikož 5 je prvočíslo, výrazy $x + 17$ a $x - 3$ musí být mocninami čísla 5. Uvedeným podmínkám vyhovuje pouze jedno číslo x , tj. $x = 8$ a jemu odpovídá $y = 3$. (Zkouška byla provedena, podobně jako v předešlých příkladech, postupným dosazováním.)

Závěr. Jediným řešením dané úlohy je dvojice $(x, y) = (8, 3)$.

Na závěr uvádíme ryze exponenciální diofantovskou rovnici, v níž figurují celočíselné neznámé výhradně v exponentech dvou mocnin o různých základech.

Příklad 7

V oboru celých čísel řešte rovnici

$$3^n = 2^m + 5.$$

Řešení: Ze zadání je patrné, že exponenty m, n v dané rovnici jsou celá nezáporná čísla. Dále rovnici přepíšeme do tvaru

$$3^n - 1 = 2^m + 4. \quad (3)$$

Odtud vidíme, že $3^n > 5$, tj. $n \geq 2$. Platí tudíž

$$2^m + 4 = 3^n - 1 \geq 3^2 - 1 = 8,$$

tedy $2^m \geq 4$, tj. $m \geq 2$.

Protože $3^n - 1 = (3 - 1)(3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 3 + 1)$, rovnici (3) následně upravíme do tvaru

$$2(3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 3 + 1) = 2^m + 4 = 2^2(2^{m-2} + 1),$$

tudíž $2 \mid (3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 3 + 1)$ a n musí tedy být sudé číslo ($n = 2k$, kde k je přirozené číslo). Rovnici (3) nyní přepíšeme do tvaru

$$3^{2k} - 1 = 2^m + 4 = 2^2(2^{m-2} + 1)$$

a upravíme

$$3^{2k} - 1 = (3^2 - 1)((3^2)^{k-1} + (3^2)^{k-2} + \dots + 3^2 + 1) = 4(2^{m-2} + 1).$$

Po snadné úpravě získáme rovnici

$$2((3^2)^{k-1} + (3^2)^{k-2} + \dots + 3^2 + 1) = 2^{m-2} + 1, \quad (4)$$

z níž plyne, že levá strana rovnice (4) je dělitelná dvěma. Totéž musí splňovat i pravá strana. To však nastane, právě když $m = 2$, a tedy $n = 2$. *Závěr.* Úloha má jediné řešení, a to $(m, n) = (2, 2)$.

K procvičení této problematiky uvádíme trojici neřešených úloh, které navazují na řešení předcházejících úloh; lze je řešit užitím metody faktori-zace.

Příklad 8

V oboru celých čísel řešte rovnici $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 2^y$.

[*Řešení:* $(x, y) = (0, 0)$.]

Příklad 9

Řešte rovnici $n^3 + 8 = 2^m$, kde $m, n \in \mathbb{Z}$.

Návod: Danou rovnici přepíšeme do tvaru $(n + 2)(n^2 - 2n + 4) = 2^m$ a dále ji lze řešit podobně jako příklad 4.

[*Řešení:* $(m, n) \in \{(3, 0), (4, 2)\}$.]

Příklad 10 [KöMaL, Vol 69/5, 2019, C. 1546]

Řešte rovnici $x^2 - 18x + 80 = 2^y$, kde $x, y \in \mathbb{Z}$.

Návod: Rovnici lze přepsat do tvaru $(x - 8)(x - 10) = 2^y$ a dále řešit podobně jako příklad 3.

[*Řešení:* $(x, y) \in \{(6, 3), (12, 3)\}$.]

Úlohy diskrétní pravděpodobnosti

JAKUB STANĚK

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Pravděpodobnost bývá často žáky i učiteli považována za nejobtížnější látku středoškolské matematiky a jako taková bývá i nejméně oblíbená. Důvodů k tomuto hodnocení může být více. Jedna z příčin obtížnosti této látky je fakt, že úlohy jsou většinou zadávány slovně, lze tedy snadno udělat chybu v interpretaci úlohy a proto mohou tyto úlohy potrápit jak nadané žáky, tak i učitele. O tom, že pravděpodobnost nadělala problémy i slavným matematikům, se můžeme dočíst třeba v knize [1, s. 12], kde je uvedena snadná úloha o házení mincí: Jaká je pravděpodobnost, že ve dvou hodech mincí padne alespoň jednou rub? Tu chybně vyřešil jak *G. W. Leibniz* (1646–1716), tak *d'Alembert* (1717–1783). Přitom o něco složitější verze této úlohy je použita v učebnici [2, s. 81] jako první úloha v kapitole věnované pravděpodobnosti. Proto je asi vhodnější přistupovat k pravděpodobnostním úlohám s vědomím, že chybovat při jejich řešení je přirozené, a tuto zkušenost předat i studentům.

S problémem správné interpretace úlohy, či představy o ní, souvisí i problém s nalezením a vysvětlením chyby v nesprávném řešení pravděpodobnostních úloh. To může být někdy velmi obtížné, a je tak snadné sklouznout k tomu, že ukážeme pouze správné řešení a všechna ostatní řešení označíme za špatná, protože vedou k jinému výsledku, aniž by bylo vysvětleno, v čem přesně jsou uvedená řešení chybná. Tuto argumentaci lze najít např. v [2] na straně 122 v příkladu 2. Zde je uvedena nejdříve chybná úvaha, a pak je řečeno: „Tato úvaha je chybná, jak nám ukáže následující správné řešení.“ Je však otázka, zda tento argument hloubavého studenta uspokojí. Neřekne si třeba, že by mohlo být uvedené řešení chybné, jak mu ukazuje původní úvaha? Proto by učitelé neměli rezignovat na snahu vysvětlit studentům, kde chyba v nesprávném řešení úloh přesně je.

Ve snaze zabránit nejasnostem v interpretaci zadání úlohy či ve snaze sjednotit způsob řešení úlohy jsou také někdy v zadání uváděna nadby-

tečná fakta, např. rozlišitelnost či nerozlišitelnost mincí či kostek u úloh, kdy tento fakt nehraje žádnou roli. To může vést k situacím, kdy student později nad zadáním jiné úlohy dlouze přemýšlí, zda jde v dané situaci o rozlišitelné či nerozlišitelné předměty, nemůže se rozhodnout a je zmaten. Přitom je problém způsoben tím, že to v zadání úlohy není podstatné a student si toho není vědom.

Jednou z možností, jak studentům pomoci hlouběji proniknout do tajů pravděpodobnosti, je ukazování více řešení jedné úlohy, srovnávání těchto řešení, porovnávání více úloh a zapojení grafických řešení pravděpodobnostních úloh. Zvláště grafická řešení některým studentům pomáhají v porozumění dané úlohy nejvíc. Je tedy škoda, že se v našich učebnicích grafická řešení prakticky nevyskytují, zatímco v zahraničních učebnicích se objevují, viz např. [6].

V následující části článku se zaměříme na tři konkrétní úlohy, ukážeme si více způsobů jejich řešení a provedeme i stručná porovnání těchto řešení. Rovněž si ukážeme podobnost mezi první a druhou úlohou, která není na první pohled zřejmá. U těchto úloh uvedeme i možné chybné úvahy při jejich řešení a ukážeme si, proč jsou tyto úvahy chybné. Poslední úloha je koncipovaná tak, aby vedla k odvození Bayesova vzorce, tj. aby ji bylo možné vyřešit, i když Bayesův vzorec není v hodině probírán. Podobné hrátky s úlohami totiž mohou vést k větší oblibě pravděpodobnosti u studentů a v důsledku toho i k lepšímu pochopení této oblasti matematiky.

Příklady

První příklad, kterým se budeme zabývat, se proslavil jako tzv. *problém Montyho Halla*, jeho zadání bylo publikováno v [5, s. 67], a lze se s ním setkat v různých modifikacích poměrně často.

Příklad 1

V televizní soutěži jsou tři zavřené trezory. V jednom z nich je skryta výhra a zbylé dva jsou prázdné. Moderátor vyzve soutěžícího, aby si vybral jeden trezor, o němž si myslí, že je v něm ukryta výhra. Po volbě trezoru je jeden ze zbývajících trezorů otevřen, přičemž je ale vždy otevřen pouze takový trezor, ve kterém výhra není (o čemž je soutěžící předem informován). Poté je soutěžící tázán, zda chce změnit svou volbu a vybrat si druhý neotevřený trezor. V případě, že soutěžící vybere trezor s výhrou, tuto výhru získá. Je pro soutěžícího změna výběru trezoru výhodná?

Řešení: Nejdříve si ukažme dvě úvahy, které se při řešení této úlohy často objevují a které vedou k různým výsledkům.

- (i) První úvaha vychází z faktu, že na počátku byla pravděpodobnost, že je výhra v konkrétním trezoru, stejná pro všechny trezory. Jelikož jsme výhru nemohli přesunout, tak by měla být pravděpodobnost stejná pro oba zavřené trezory i po otevření prázdného trezoru. Proto by pravděpodobnost, že výhra je v původně zvoleném trezoru, měla být $\frac{1}{2}$, nemá tedy smysl měnit svoji volbu.
- (ii) Druhá úvaha vychází z faktu, že na počátku máme tři zavřené trezory a v každém může být výhra se stejnou pravděpodobností, tudíž pravděpodobnost, že výhra je v námi zvoleném trezoru, je $\frac{1}{3}$. Po volbě trezoru s výhrou se výhra nemůže přesunout, a tak by se ani tato pravděpodobnost neměla změnit. Takže po otevření prázdného trezoru by měla být pravděpodobnost, že výhra je v námi zvoleném trezoru, stále $\frac{1}{3}$. Tudíž pravděpodobnost, že výhra bude ve zbývajícím trezoru, by měla být $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. A proto je výhodné změnit původní volbu trezoru.

Ukažme si nejdříve matematické řešení tohoto příkladu, a pak se teprve vrátíme k oběma předchozím úvahám.

Označme A_i , $i = 1, 2, 3$, jev, že v i -tém trezoru je ukryta výhra, pak $P(A_i) = \frac{1}{3}$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že jsme na začátku zvolili trezor číslo 1, a označme B_j ($j = 2, 3$) jev, že byl po naší volbě otevřen j -tý trezor (který je prázdný). Rozeberme nyní všechny možnosti:

1. Je-li výhra v prvním trezoru (nastal jev A_1), může být otevřen libovolný ze zbývajících dvou trezorů. Jelikož zde není žádná preference otevření trezoru č. 2 ani 3, tak pravděpodobnost otevření obou trezorů je stejná, tedy $P(B_j|A_1) = \frac{1}{2}$ pro $j = 2, 3$.
2. Je-li výhra v druhém trezoru (nastal jev A_2), může být otevřen pouze třetí trezor, tedy $P(B_2|A_2) = 0$ a $P(B_3|A_2) = 1$. Obdobně dostaneme $P(B_3|A_3) = 0$ a $P(B_2|A_3) = 1$.

Ze vzorce

$$P(B_j|A_i) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(A_i)}$$

dostaneme $P(A_i \cap B_j) = P(B_j|A_i)P(A_i)$, tedy

$$P(A_1 \cap B_j) = P(B_j|A_1)P(A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \quad \text{pro } j = 2, 3,$$

$$P(A_i \cap B_j) = P(B_j|A_i)P(A_i) = 0 \cdot \frac{1}{3} = 0, \quad \text{pro } i = j = 2, 3,$$

$$P(A_i \cap B_j) = P(B_j|A_i)P(A_i) = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}, \quad \text{pro } i, j = 2, 3, \quad i \neq j.$$

Jelikož jsou jevy A_1, A_2 a A_3 disjunktní a dohromady pokrývají celý pravděpodobnostní prostor (jsou v nich obsaženy všechny možné výsledky pokusu), tak

$$P(B_j) = \sum_{i=1}^3 P(A_i \cap B_j) = \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}, \quad j = 2, 3.$$

Proto

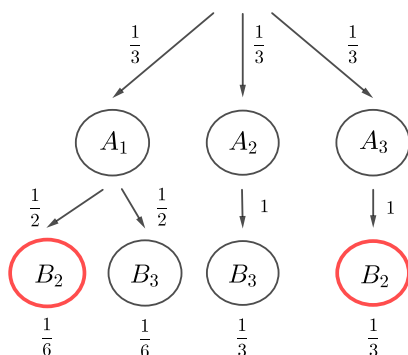
$$P(A_1|B_j) = \frac{P(A_1 \cap B_j)}{P(B_j)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}, \quad \text{pro } j = 2, 3,$$

$$P(A_i|B_j) = \frac{P(A_i \cap B_j)}{P(B_j)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}, \quad \text{pro } i, j = 2, 3, \quad i \neq j.$$

Tedy po otevření prázdného trezoru zůstane pravděpodobnost, že se výhra nachází v prvním trezoru, stejná, zatímco pro zbývající trezor je dvojnásobná. Proto je výhodné změnit svoji volbu.

Nyní se zaměříme na to, co bylo špatně v první úvaze, která nevedla ke správnému výsledku. V ní vycházíme ze stejné pravděpodobnosti uložení výhry pro všechny trezory, která by se neměla otevřením jednoho trezoru měnit. Proč je tedy po otevření např. druhého trezoru šance, že je výhra ve třetím trezoru, větší než v námi zvoleném prvním trezoru? Uvědomme si, že námi vybraný trezor být otevřen nemohl bez ohledu na to, zda v něm výhra je, či není. Zatímco třetí trezor být otevřen mohl, ale pouze v případě, že v něm výhra není. Proto když otevřen nebyl, tak je pro nás tato informace vzhledem k uložení výhry relevantní. V jistém smyslu třetí trezor po otevření druhého trezoru reprezentuje oba tyto trezory. Lze si to představit i tak, že druhý a třetí trezor tvoří jeden dvojtrezor se dvěma dveřmi, kde jedny z nich vždy otevřeme, a když otevřeme ty druhé, tak se můžeme dostat ke společné výhře.

Podívejme se na grafický způsob řešení této úlohy (obr. 1), který je pro některé studenty názornější. Zde používáme stejné značení jako v předchozím řešení. Na obr. 1 je znázorněna nejdříve pravděpodobnost uložení výhry do jednotlivých trezorů (horní řada šipek) a po volbě prvního trezoru dále pravděpodobnost otevření druhého či třetího trezoru (spodní řada šipek). Byl-li otevřen např. druhý trezor, nastal jeden z jevů $A_1 \cap B_2$ a $A_3 \cap B_2$ (na obr. 1 jsou tyto jevy zvýrazněny červeně). Jelikož pravděpodobnost jevu $A_1 \cap B_2$ je $P(A_1 \cap B_2) = \frac{1}{6}$, zatímco pravděpodobnost jevu $A_3 \cap B_2$ je $P(A_3 \cap B_2) = \frac{1}{3}$, je dvakrát větší šance, že bude výhra ve třetím trezoru, a proto je výhodné změnit naši volbu na třetí trezor. Obdobně postupujeme, je-li otevřen třetí trezor.



Obr. 1 Grafické řešení prvního příkladu

Nyní se podíváme na druhou úlohu, uvedenou v [2, s. 122, př. 2].

Příklad 2

Skříňka má 3 zásuvky. V první jsou 2 zlaté mince, ve druhé jedna zlatá a jedna stříbrná a ve třetí 2 stříbrné mince. Zvolíme náhodně jednu zásuvku, z ní vytáhneme naslepo jednu minci. Jaká je pravděpodobnost, že v této zásuvce zůstane zlatá mince, jestliže vytažená mince byla stříbrná?

Řešení: I při řešení této úlohy můžeme často narazit na následující dvě úvahy, které vedou k různým výsledkům.

1. *úvaha:* Jelikož jsme vytáhli stříbrnou minci, museli jsme tahat z druhé nebo ze třetí přihrádky. Ve druhé zůstala zlatá mince, ve třetí stříbrná, a proto by měla být hledaná pravděpodobnost $\frac{1}{2}$.

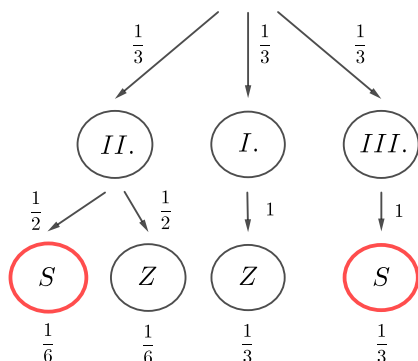
2. *úvaha*: Jelikož jsme vytáhli stříbrnou minci, tak jsme museli tahat z druhé nebo ze třetí přihrádky. V těchto dvou přihrádkách byly tři stříbrné a jedna zlatá mince. Po vytažení stříbrné mince nám zůstaly dvě stříbrné a jedna zlatá, proto je hledaná pravděpodobnost $\frac{1}{3}$.

Nejdříve si ukážeme řešení, které je uvedeno v [2, s. 122, př. 2]. Pro řešení příkladu si zavedeme následující značení: (I, z_1) je jev, že z první zásuvky vytáhneme první zlatou minci, podobně označíme další elementární jevy (I, z_2) , (II, z) , (II, s) , (III, s_1) a (III, s_2) , kde první číslo vždy značí, ze které zásuvky bylo taženo, a s , resp. z , značí tažení stříbrné, resp. zlaté mince. Označíme-li jev „byla tažena stříbrná mince“ písmenem S a jev „v zásuvce zbyla zlatá mince“ římskou číslicí II (neboť zlatá mince zbude jen v případě, že jsme zvolili druhou zásuvku), pak

$$P(II|S) = \frac{P(S \cap II)}{P(S)} = \frac{P(\{(II, s)\})}{P(\{(II, s), (III, s_1), (III, s_2)\})} = \frac{1}{3}.$$

Chyba v první úvaze, která vedla ke špatnému řešení, byla opomenutí skutečnosti, že pravděpodobnost, že vytáhneme stříbrnou minci z druhé zásuvky, je dvakrát menší než pravděpodobnost, že ji vytáhneme z poslední zásuvky. Víme-li tedy, že jsme vytáhli stříbrnou minci, je dvakrát větší pravděpodobnost, že jsme ji tahali ze třetí zásuvky než ze zásuvky druhé.

Ukažme si grafické řešení této úlohy (obr. 2):



Obr. 2 Grafické řešení druhého příkladu

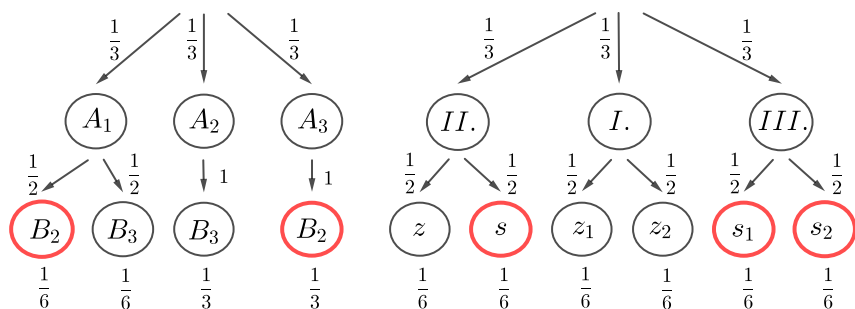
Zde označíme I , II , resp. III jevy, že byla zvolena první, druhá, resp. třetí zásuvka, S jev „byla tažena stříbrná mince“ a Z jev „byla tažena

zlatá mince“. První řádek šipek představuje volbu zásuvky a druhý znázorňuje, jakou minci jsme vytáhli. Červeně je zvýrazněn jev, že byla tažena stříbrná mince. Jelikož je pravděpodobnost jevu $II \cap S$ rovna $\frac{1}{6}$, zatímco pravděpodobnost jevu $III \cap S$ je $P(III \cap S) = \frac{1}{3}$, je dvakrát pravděpodobnější, že jsme zvolili třetí zásuvku. V ní je ale stříbrná mince, proto je pravděpodobnost, že v zásuvce zbude zlatá mince, rovna

$$\frac{P(II \cap S)}{P(S)} = \frac{P(II \cap S)}{P(II \cap S) + P(III \cap S)} = \frac{1}{3}.$$

Porovnání příkladu 1 a příkladu 2

Podíváme-li se pozorně na obrázky 1 a 2, vidíme, že jsou si velmi podobné. Přesněji liší se pouze v označení jevů. Jevy A_1 , A_2 a A_3 postupně odpovídají jevům II , I a III a jevy B_2 a B_3 odpovídají jevům S a Z . Lze tedy říci, že z jistého úhlu pohledu jde o dvě verze stejné úlohy. Přesto se často stává, že student vyřeší jeden z těchto příkladů dobře a druhý špatně. Lze tedy řešit první příklad stejně jako příklad druhý a naopak? Zatímco početní způsob řešení prvního příkladu lze aplikovat i na druhý příklad (stačí jen prohodit značení jevů tak, jak již bylo uvedeno), tak uvedené početní řešení druhého příkladu na první příklad aplikovat tak snadno nelze. Důvodem je, že při početním řešení jsme ještě rozlišovali, zda vytáhneme z první zásuvky první či druhou zlatou minci a podobně jsme pracovali i se třetí zásuvkou, v rámci tohoto řešení jsme tedy mince v zásuvkách rozlišovali. Těžko bychom však hledali podobnou interpretaci v první úloze. Tyto rozdíly jsou graficky znázorněny na obr. 3.



Obr. 3 Grafické porovnání řešení první a druhé úlohy

Poslední úloha, kterou si uvedeme, je klasická úloha na použití Bayesovy věty, viz např. [1, s. 29]. Ačkoliv se Bayesova věta na mnohých středních školách neučí, dokonce ani v některých učebnicích není uvedena, viz např. [2], jde jen o přímé aplikování podmíněné pravděpodobnosti, která už do klasické látky středních škol patří, např. v učebnicích [3, s. 51] a [4, s. 137] Bayesova věta zmíněna je. Proto je zvoleno zadání následující úlohy tak, aby postupně k Bayesově větě vedlo.

Příklad 3

Uvažujme nemoc, kterou trpí jedno procento populace, a lékařský test, který v 99 % případů odhalí nemoc u nemocného jedince, ale v 5 % případů označí za nemocného i zdravého jedince.

- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný testovaný jedinec je nemocný a zároveň je označen testem jako nemocný?
- Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný jedinec má pozitivní test (je testem označen za nemocného)?
- Má-li jedinec pozitivní test, jaká je pravděpodobnost, že je skutečně nemocný?

Pozn.: Velmi často je však v úloze tohoto typu položena pouze poslední otázka c).

Řešení: Zavedeme si následující značení:

- Z ... jedinec je zdravý,
- Z^c ... jedinec je nemocný,
- N ... test vyšel negativní (jedinec je testem označen jako zdravý),
- N^c ... test vyšel pozitivní (jedinec je testem označen jako nemocný).

Ze zadání známe následující pravděpodobnosti:

- $P(Z) = 0,99$,
- $P(Z^c) = 1 - P(Z) = 0,01$,
- $P(N^c|Z^c) = 0,99$,
- $P(N^c|Z) = 0,05$.

- Ze vzorce pro podmíněnou pravděpodobnost

$$P(N^c|Z^c) = \frac{P(N^c \cap Z^c)}{P(Z^c)}$$

dostaneme

$$P(N^c \cap Z^c) = P(N^c|Z^c)P(Z^c) = 0,99 \cdot 0,01 = 0,0099.$$

- b) Rozdělíme si jev N^c na dva disjunktní podjevy $N^c \cap Z^c$ a $N^c \cap Z$. Pravděpodobnost prvního jevu máme již vypočítanou v předchozím bodu, pravděpodobnost druhého lze vypočítat obdobným způsobem, tedy

$$P(N^c \cap Z) = P(N^c|Z)P(Z) = 0,05 \cdot 0,99 = 0,0495.$$

Pravděpodobnost, že náhodně vybraný jedinec má pozitivní test, je

$$P(N^c) = P(N^c \cap Z^c) + P(N^c \cap Z) = 0,0099 + 0,0495 = 0,0594.$$

- c) Má-li jedinec pozitivní test, pak pravděpodobnost, že je skutečně nemocný, je

$$P(Z^c|N^c) = \frac{P(N^c \cap Z^c)}{P(N^c)} = \frac{0,0099}{0,0594} = \frac{1}{6}.$$

Poznamenejme, že při dosazení výrazů z bodů a) a b) do výrazu v bodě c) dostaneme Bayesův vzorec

$$P(Z^c|N^c) = \frac{P(N^c|Z^c)P(Z^c)}{P(N^c|Z^c)P(Z^c) + P(N^c|Z)P(Z)}.$$

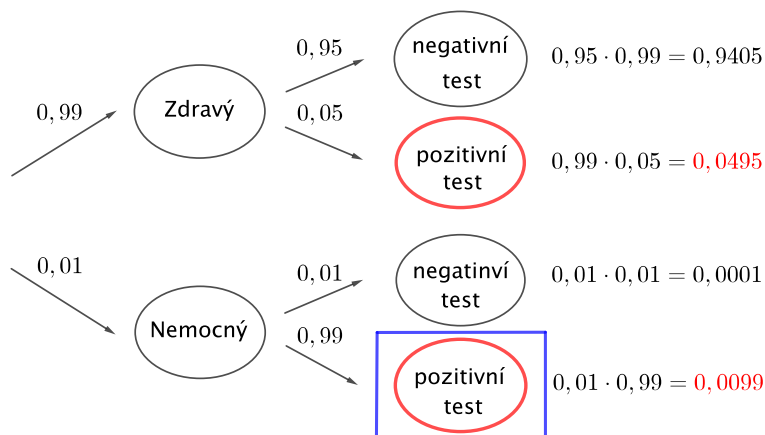
Podobně jako předchozí úlohy se i tato dá řešit graficky a toto řešení je mnohdy pro studenty názornější.

- a) Odpověď na první otázku vyčteme přímo z obr. 4 (poslední řádek, jev vyznačený modrým obdélníkem), tedy hledaná pravděpodobnost je 0,0099.
- b) Pravděpodobnost, že je jedinec označen testem jako nemocný, dostaneme součtem pravděpodobností jevů, které jsou na obrázku zvýrazněny červeně. Tedy

$$P(N^c) = 0,0099 + 0,0495 = 0,0594.$$

- c) Je-li jedinec označený jako nemocný, nastal jev, který je v obrázku zvýrazněn červeně. Podjev, kdy je jedinec navíc skutečně nemocný, je označen modrým obdélníkem. Hledaná pravděpodobnost je tedy podílem pravděpodobnosti modře vyznačeného jevu a pravděpodobnosti červeně vyznačeného jevu, tedy

$$\frac{P(N^c \cap Z^c)}{P(N^c)} = \frac{0,0099}{0,0594} = \frac{1}{6}.$$

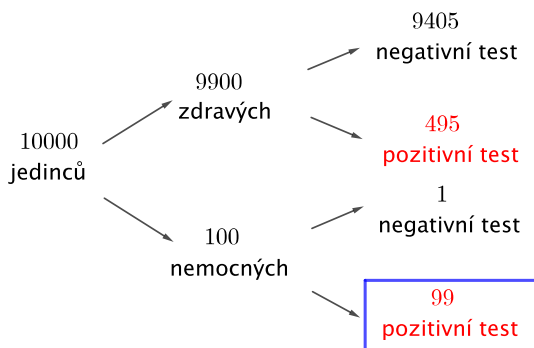


Obr. 4 Grafické řešení příkladu 3

Poznamenejme, že pokud řešíme všechny otázky a), b) i c), pak odpověď na poslední otázku je již jednoduchá a grafické i početní řešení se moc neliší. Pokud ale dostaneme pouze otázku c) (což je častý případ), pak je grafické řešení rychlejší a přehlednější. Navíc nám umožňuje rychle odpovídat i na další případné otázky, zatímco u početního řešení tomu tak být nemusí. např. chceme-li znát pravděpodobnost, že jedinec označený testem jako zdravý je skutečně zdravý, tak z obr. 4 lehce vyčteme výsledek $0,9405 : (0,9405 + 0,0001) = 0,9998937$.

Ukažme si ještě jedno grafické znázornění tohoto příkladu (obr. 5), které je sice velmi podobné obr. 4, ale pracuje s počty jedinců, a ne s pravděpodobnostmi, proto je pro některé studenty ještě názornější. Budeme uvažovat dostatečný počet jedinců (v našem případě 10 000), které budeme postupně rozdělovat do podskupin tak, aby toto rozdělení odpovídalo procentům uvedeným v zadání úlohy. Máme-li tedy 10 000 jedinců, z nichž 1 %

je nemocných, máme 100 nemocných jedinců z celkového počtu 10 000. Je-li také nemocných jedinců s pozitivním testem je 99 z celkového počtu 10 000 jedinců, pak hledaná pravděpodobnost z bodu a) je $99 : 10\,000 = 0,0099$. Obdobně dostaneme odpověď na otázky b) a c). U otázky c) si je však třeba uvědomit, že hledáme podmíněnou pravděpodobnost, takže nebudeme počet 99 nemocných jedinců s pozitivním testem dělit celkovým počtem jedinců, ale pouze počtem všech jedinců, kteří měli pozitivní test, tedy číslem $99 + 495 = 594$, takže hledaná pravděpodobnost je $99 : 594$.



Obr. 5 Grafické řešení příkladu 3 s počty jedinců (barevné označení odpovídá obr. 4)

Literatura

- [1] Anděl, J.: Matematika náhody. Matfyzpress, Praha, 2007.
- [2] Calda, E., Dupač, V.: Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika. Prometheus, Praha, 2013.
- [3] Horenský R., Janů, I., Květoňová, M., Lukšová, H., Vémolová, R.: Matematika pro střední školy – 8. díl: Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika – Učebnice. Didaktis, Brno, 2015.
- [4] Robová, J., Hála, M., Calda, E.: Matematika pro střední školy – Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika. Prometheus, Praha, 2013.
- [5] Selvin, S. et al.: Letter to the Editor. The American Statistician, roč. 29 (1975), č. 1, s. 67–71.
- [6] Strid, V., Tobin, P.: Mathematical Studies, Standard level. 3rd Edition, 2nd Imprint, Australia, 2005.

Přibližná trisekce úhlu užitím geometrické posloupnosti

ČENĚK KODEJŠKA

Gymnázium, SOŠ a VOŠ, Nový Bydžov

Trisekce úhlu společně s duplikací (zdvojením) krychle a kvadraturou kruhu patří mezi tři úlohy starověku zformulované už v 5. století př. n. l., známé jako tři klasické problémy antické matematiky. Tento článek se zabývá přibližnou konstrukcí trisekce úhlu, jejíž nepřesnost činí přibližně 0,1 %. Jednoduchá konstrukce používá pouze pravítka a kružítko, a je proveditelná v malém počtu kroků. Metoda současně využívá vlastnosti konečného součtu nekonečné geometrické řady.

Že trisekci úhlu nelze provést pouze za použití pravítka a kružítko, dokázal francouzský matematik *Évariste Galois* (1811–1832) až v roce 1830 [1]. Jednoduchý algebraický důkaz nemožnosti rozdělit úhel na třetiny založený na řešení kubické rovnice je uveden např. v [2].

Přibližných metod, jak rozdělit úhel na třetiny, je nespočet. Z těch zajímavějších připomeňme např. trisekci úhlu s využitím origami [3], konstrukci s tětivy nebo Kochaňského konstrukci rektifikace kružnice [4]. Několik dalších metod je uvedeno v [5].

Pravidla konstrukcí pomocí pravítka a kružítko

Jak uvádí [2], jsou formulována čtyři základní pravidla pro eukleidovské konstrukce. Za první, pravítko bez jakýchkoliv značek slouží ke konstrukci přímky procházející dvěma již zkonstruovanými body. Za druhé, kružítkem lze sestavit pouze oblouk kružnice se středem v již zkonstruovaném bodě a poloměrem, který je roven vzdálenosti dvou známých bodů. Za třetí, konstrukce musí být provedena konečným počtem kroků. Za čtvrté, konstrukce musí být přesná.

Součet nekonečné geometrické řady

Pro součet nekonečné geometrické řady platí známý vztah

$$s = \frac{a_1}{1 - q}, \quad (1)$$

kde a_1 je první člen a q je kvocient geometrické posloupnosti, pro který platí $|q| < 1$.

Jak uvádí Švecová [5, s. 45], uvažujeme-li řadu danou vztahem

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots \quad (2)$$

její součet je roven $1/3$. Tato řada však konverguje velmi pomalu, a pro konstrukční účely za pomoci pravítka a kružítko je vzhledem k měnícímu se znaménku nevhodná.

Uvažujme nyní geometrickou posloupnost, jejíž první člen $a_1 = 1/4$ a kvocient $q = 1/4$. Součet nekonečné geometrické řady této posloupnosti je

$$s = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3},$$

přičemž platí vztah

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{1}{3} \quad (3)$$

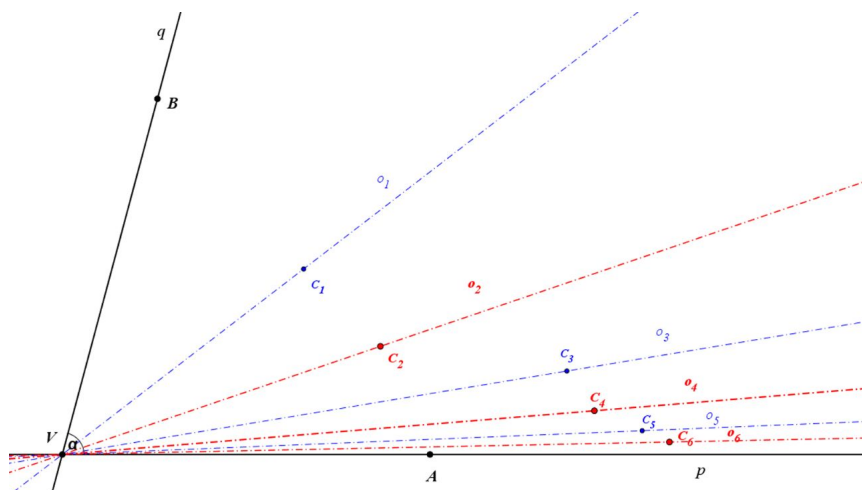
Přibližná konstrukce s využitím geometrické posloupnosti

Konstrukce provedená pomocí programu GeoGebra spočívá v opakovaném půlení zadaného úhlu α (obr. 1). Úhel $\alpha = |\sphericalangle AVB| = 75^\circ$ byl zvolen naprosto libovolně, přičemž $A \in p$, $B \in q$, $V \in p \cap q$. Pomocí kružítko byla sestrojena osa o_1 tohoto úhlu a na ní vyznačen bod C_1 . V dalším kroku byla zkonstruována osa o_2 úhlu AVC_1 a vyznačen bod C_2 . Uvedený postup opakujeme tak dlouho, až získáme úhly $\beta = \alpha/4 = |\sphericalangle AVC_2|$, $\gamma = \alpha/16 = |\sphericalangle AVC_4|$, $\delta = \alpha/64 = |\sphericalangle AVC_6|$, $\varepsilon = \alpha/256 = |\sphericalangle AVC_8|$ a $\varphi = \alpha/1024 = |\sphericalangle AVC_{10}|$. Body C_8 a C_{10} nejsou z důvodu přehlednosti na obr. 1 zobrazeny.

Grafickým součtem úhlů β , γ , δ , ε a φ byl získán úhel σ o velikosti $\sigma = 24,98^\circ$. Nepřesnost konstrukce vzhledem k přesné hodnotě 25° tedy činí 0,08 %.

Na rozdíl od jiných geometrických konstrukcí je nepřesnost konstrukce nezávislá na velikosti počátečního úhlu a její velikost je dána pouze počtem iterací. Pro součet prvních pěti členů geometrické posloupnosti činí její velikost 0,1 %. Tato konstrukce však porušuje třetí pravidlo, protože absolutní přesnosti nelze dosáhnout konečným počtem kroků.

Uvedenou konstrukci lze použít v hodinách matematiky na středních školách jako zajímavé využití geometrické posloupnosti, resp. konečného součtu nekonečné geometrické řady.



Obr. 1 Přibližná konstrukce trisekce úhlu v programu GeoGebra

Literatura

- [1] Trisekce úhlu. [online], dostupné z https://cs.wikipedia.org/wiki/Trisekce_%C3%BAhlu.
- [2] Rokyta, M.: Trisekce úhlu, kvadratura kruhu a podobné „nemožné úlohy“. 2011, [online], dostupné z: <http://olympiada.karlin.mff.cuni.cz/prednasky/rokyta.pdf>.
- [3] Solovský, J.: Origami a trisekce úhlu. 2014, [online], dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=gWbMRiEf6h4>.
- [4] Králová, M.: Eukleidovské neřešitelné úlohy. [online], dostupné z: <https://edu.techmania.cz/cs/encyklopedie/matematika/geometrie/eukleidovsky-neresitelne-ulohy>.
- [5] Švecová, M.: Klasické úlohy řecké matematiky. Diplomová práce, MFF UK, Praha, 2009, dostupné z: <https://is.cuni.cz/webapps/zzp/download/120017829>.

Zajímavé matematické úlohy

Od 22. ročníku přešel náš časopis na vydávání elektronickou formou, které se promítlo i do fungování naší rubriky a byla zrušena dlouhodobá soutěž. Po uplynutí několik ročníků a několika změnách nastal čas rekapitulace. Rubrika Zajímavé matematické úlohy doprovází náš časopis již od jeho čtvrtého ročníku, letos jsme tím završili 25 let existence. V ročnících 22—28 časopisu bylo publikováno 68 zajímavých úloh od 22 autorů. Kromě členů redakční rady časopisu Matematika–Fyzika–Informatika *Stanislava Trávníčka* (†2017), *Jaroslava Švrčka* a *Pavla Calábka* (všichni po 8 úlohách) byli nejpilnějším autory úloh *Robert Geretschläger*, *Jozef Mészáros* a *Jacek Uryga* (všichni po 6 úlohách). A teď to nejpodstatnější, rubrika je určena pro naše čtenáře, více než stovka různých řešitelů nám poslala celkem 506 správných a 78 částečných řešení. Našimi nejvěrnějšími řešiteli jsou *Karol Gajdoš* z Trnavy (52 úplných a 7 částečných řešení), *Anton Hnáth* z Moravan (47+7), *Jozef Mészáros* z Jelky (45+4), *Martin Raszyk* z ETH Zürich (48+0) a *František Jáchim* z Volyně (25+10).

I v následujícím ročníku pokračujeme v naší rubrice Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 259 a 260 můžete zaslat nejpozději do 20. 5. 2020 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz.

Úloha 259

Určete předposlední číslici desítkového zápisu čísla 11^{2020} .

Vladimír Vaněk

Úloha 260

Krychle $ABCD A' B' C' D'$ je složena z osmi jednotkových krychlí. Kolika způsoby ji můžeme rozdělit na dvě souvislé části, které jsou také složeny z jednotkových krychlí (jednotkové krychle v souvislých částech sousedí aspoň jednou celou stěnou, na pořadí částí nezáleží)? (Pokud jednotkové krychle označíme podle vrcholů, které obsahují, pak příkladem dvou různých dělení jsou $\{A, A'\}$, $\{B, C; D, B', C', D'\}$ a $\{B, B'\}$, $\{A, C, D, A', C', D'\}$.)

Šárka Gergelitsová

Dále uvádíme řešení úloh 255 a 256, jejichž zadání jsme zveřejnili v třetím čísle loňského (28.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 255

Nechť CD je výška tupoúhlého trojúhelníku ABC s tupým úhlem při vrcholu B . Kružnice s průměrem CD protíná stranu AC v bodě E a úsečku BE v bodě F . Dokažte, že platí

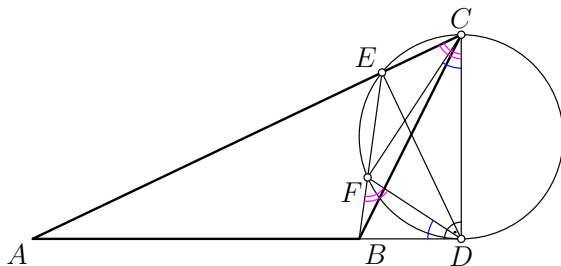
$$|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle ECD| + |\sphericalangle FCD|.$$

Jacek Uryga

Řešení. Výška CD trojúhelníku ABC je kolmá na přímkou AB , tedy tato přímka je tečnou kružnice s průměrem CD . Podle věty o úsekovém úhlu jsou shodné úhly FCD a FDB . Úhel ABC je tupý, body E a F tak leží v téže polorovině s hraniční přímkou CD a čtyřúhelník $CDFE$ je tětiový. Součet velikostí jeho vnitřních úhlů u vrcholů C a F je 180° , úhly FCD a BFD jsou tedy shodné. Součet vnitřních úhlů trojúhelníku BDF u vrcholů D a F je roven velikosti jeho vnějšího úhlu u vrcholu B , proto

$$|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle BFD| + |\sphericalangle FDB| = |\sphericalangle ECD| + |\sphericalangle FCD|,$$

což jsme měli dokázat.

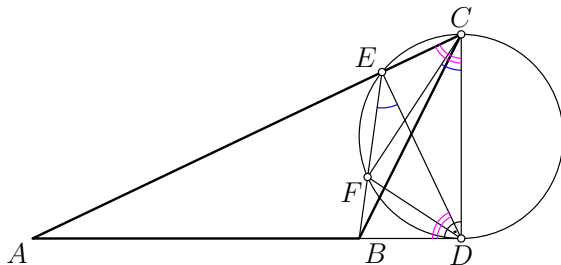


Obr. 1

Jiné řešení. V předchozím řešení jsme určili úhly v trojúhelníku BDF . Podobně můžeme určit úhly v trojúhelníku BDE . Kružnice s průměrem CD je tečnou k přímce AB , podle věty o úsekovém úhlu jsou úhly ECD a EDB shodné. Jelikož body C a E leží v téže polorovině s hraniční přímkou FD (což plyne z tupého úhlu u vrcholu B), podle věty o obvodovém úhlu jsou shodné úhly FED (tedy BED) a FCD . A stejně jako v předcházejícím řešení je součet velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku BDE u vrcholů

$$|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle EDB| + |\sphericalangle BED| = |\sphericalangle ECD| + |\sphericalangle FCD|,$$

což jsme měli dokázat.



Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Daniel Czinege* a *Michaela Svatošová*, oba z GMK v Bílovci, *Amálie Dostálková*, *Vendula Onderková*, *Darian Poljak* a *Adam Zemánek*, všichni z GJŠ v Přerově a *Karel Chwistek* z MG v Opavě, *Richard Vojtěch Krejsa* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Tobiáš Krupa* z G v Rožnově pod Radhoštěm, *Huu Quy Nguyen* z G v Rumburce, *Kateřina Panešová* z G v Teplicích a *Karel Stehlík*, *Adéla Karolína Žáčková*, oba z GChD Praze 5, Zborovská.

Určete, kolika různými způsoby lze obarvit stěny pravidelného osmistěnu osmi různými barvami tak, aby každá stěna byla obarvena jednou barvou a různé stěny byly obarveny různými barvami. Obarvení čtyřstěnu považujeme za stejná, pokud se shodují v některém jeho otočení.

Řešení. Barvy očísľujeme od 1 do 8. Nechť stěna barvy 1 sousedí se stěnami barev p , q a r , kde $p < q < r$, odtud $p \leq 6$. Položíme osmistěn stěnou barvy 1 na podložku a barvou p dopředu. Osmistěn je tak fixován a nyní můžeme určit počet obarvení.

- Pokud $p = 2$, mohou být zbývající stěny obarveny $6! = 720$ způsoby.
- Pokud $p = 3$, obarvíme barvou 2 některou ze 4 stěn, které nesousedí se stěnou barvy 1, zbylých 5 stěn obarvíme libovolně. Takových obarvení existuje $4 \cdot 5! = 480$.

- Pokud $p = 4$, obarvíme barvami 2 a 3 některé ze 4 stěn, které nesousedí se stěnou barvy 1, zbylé 4 stěny obarvíme libovolně. Takových obarvení existuje $4 \cdot 3 \cdot 4! = 288$.
- Pokud $p = 5$, obarvíme barvami 2, 3 a 4 některé ze 4 stěn, které nesousedí se stěnou barvy 1, zbylé 3 stěny obarvíme libovolně. Takových obarvení existuje $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3! = 144$.
- Konečně, pokud $p = 6$, obarvíme barvami 2, 3, 4 a 5 některé ze 4 stěn, které nesousedí se stěnou barvy 1, zbylé 2 stěny obarvíme libovolně. Takových obarvení existuje $4! \cdot 2! = 48$.

Celkem tak existuje $720 + 480 + 288 + 144 + 48 = 1680$ různých obarvení osmistěnu.

Jiné řešení. Očíslujme stejně jako v předcházejícím řešení barvy od 1 do 8. Položme opět stěnu barvy 1 na podložku. Existují 3 strany této stěny, které mohou být vepředu, tedy takto umístěný osmistěn můžeme otočit 3 způsoby. Zbývající stěny osmistěnu můžeme obarvit $7!$ způsoby. Vzhledem k počtu otočení tak existuje $7!/3 = 1680$ různých obarvení čtyřstěnu.

Jiné řešení. Osmistěn můžeme na sebe otočit 3 způsoby kolem osy libovolné stěny. Každou stěnu můžeme otočit na zbývajících 7 stěn. Pokud stěny osmistěnu obarvíme libovolně $8!$ způsoby, vždy $3 \cdot 8$ bude stejných, celkem tak existuje $8!/24 = 1680$ různých obarvení čtyřstěnu.

Správné řešení zaslali *Jozef Mészáros* z Jelky, *Daniel Czinege* a *Michaela Svatošová*, oba z GMK v Bílovci, *Amálie Dostalíková*, *Darian Poljak* a *Adam Zemánek*, všichni z GJŠ v Přerově a *Karel Chwistek* z MG v Opavě, *Richard Vojtěch Krejsa* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Tobiáš Krupa* z G v Rožnově pod Radhoštěm, *Huu Quy Nguyen* z G v Rumburce, *Kateřina Panešová* z G v Teplicích a *Karel Stehlík*, *Adéla Karolína Žáčková*, oba z GChD Praze 5, Zborovská.

Neúplné řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy.

Pavel Calábek

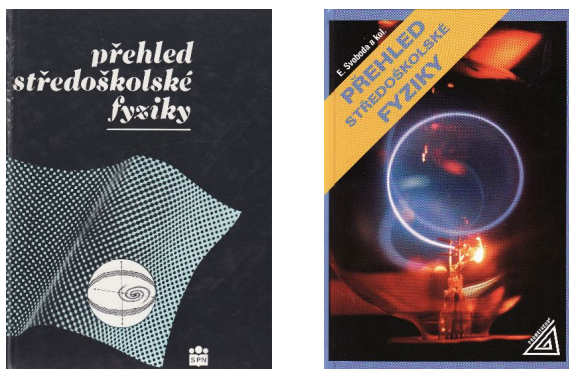
FYZIKA

Přehled PLUS: Elektronický doplněk k Přehledu středoškolské fyziky

EMANUEL SVOBODA – OLDŘICH LEPIL – BOHUSLAV ROTHANZL

Masarykův ústav vyšších studií ČVUT, Praha – Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc
– Prometheus, spol. s r. o.

Knižní vydání Přehledu středoškolské fyziky má dlouhou historii a patří k oblíbeným a vyhledávaným zdrojům fyzikálních poznatků na úrovni středoškolského vzdělání. Kniha původně uzavírala rozsáhlou řadu nových učebnic fyziky pro gymnázium, které vznikaly ve druhé polovině 80. let minulého století (viz [1]), a vyšla v 1. vydání v roce 1991 ve Státním pedagogickém nakladatelství v Praze [2] (obr. 1 vlevo). Když po roce 1990 nově vzniklé nakladatelství Prometheus začalo vydávat soubor tematických učebnic pro gymnázium, došlo v roce 1996 i na nové vydání Přehledu středoškolské fyziky s obměněným autorským kolektivem [3] (obr. 1 vpravo).



Obr. 1

Současné, 6. upravené a doplněné vydání Přehledu středoškolské fyziky vychází v roce 2019 nově s elektronickým doplňkem nazvaným *Přehled PLUS*. Navazuje tak na vydávání elektronických doplňků ve formě CD k pěti učebnicím fyziky pro gymnázia (Mechanika, Molekulová fyzika a termika, Mechanické kmitání a vlnění, Elektřina a magnetismus a Optika) a ke dvěma učebnicím pro střední školy s nižší hodinovou dotací pro výuku fyziky (Fyzika pro střední školy I a II).

Přehled PLUS na CD je obdobně jako u ostatních učebnic přiložen ke knize. Je však dostupný i na webových stránkách nakladatelství Prometheus (www.prometheus-data.cz). Příslušné datové soubory jsou ovšem určeny pouze majitelům aktuálního nového vydání Přehledu středoškolské fyziky. Pro stažení dat z internetu je třeba získat přístupové heslo na základě odpovědi na jednoduchou otázku, kterou uživatel najde v novém vydání publikace (např. heslem je první slovo na začátku konkrétního článku apod.).

Vydat elektronický doplněk Přehled PLUS se ukázalo jako potřebné z několika důvodů: doplnit učivo jednotlivých témat v knize o úlohy jak řešené, tak neřešené, zařadit testy z učiva středoškolské fyziky a uvést některá rozšiřující témata (podobně jako je tomu na CD k středoškolským učebnicím fyziky), doplněná témata zajímavými z hlediska současné vědy a techniky. Pro žáka jsou užitečné také stručné informace o významných osobnostech a objevech historie fyziky, o dostupné literatuře (včetně přehledu vydávaných publikací nakladatelství Prometheus) a o webových stránkách poskytujících další informace k probíraným tématům.

Na rozdíl od většiny elektronických doplňků k dříve vydaným učebnicím fyziky pro střední školu, bylo v Přehledu PLUS upuštěno od zařazení animací fyzikálních dějů (tzv. apletů) a videoexperimentů. Tyto audiovizuální pomůcky jsou totiž v rozmanitém provedení ve stále větším rozsahu dostupné na webu. Tím byl získán dostatečný prostor pro rozšíření textové části elektronické publikace a pro nové interaktivní formy zpracování učiva v podobě počítačových modelů vybraných témat učiva a testových úloh z fyziky.

Rozsah textové části Přehledu PLUS je více než 700 stran, což je větší rozsah textu, než má samotný Přehled středoškolské fyziky. Uživatel tak získává v ceně tištěné knihy ještě další rozsáhlý doplňující studijní materiál v elektronické podobě. Kromě toho jsou do Přehledu PLUS zařazeny dvě samostatné elektronické aplikace. Jsou to tři sešity jednoduchých interaktivních programů, které se spouštějí pomocí tabulkového procesoru

MS Excel. Sešity s označením M (*mechanika*), K (*mechanické kmitání*) a E (*elektrina a magnetismus*) jsou součástí tématu Z2 Modelování fyzikálních dějů (viz Zajímavá fyzikální témata). Samostatně spustitelnou elektronickou aplikací jsou Testové úlohy z fyziky (viz dále).

Obsah elektronického doplňku Přehled PLUS

Přehled PLUS tvoří sedm samostatných částí dostupných buď z úvodní stránky elektronické publikace, nebo přímo z kořenového adresáře CD. Celková struktura Přehledu PLUS je patrná z výřezu úvodní stránky (obr. 2). Uvedeme stručné komentáře k jednotlivým částem této struktury.



Obr. 2

Rozšiřující učivo

Autoři: *prof. RNDr. Emanuel Svoboda, CSc., doc. RNDr. Oldřich Lepil, CSc.*

Rozšiřující učivo zařazené do elektronického doplňku jde nad rámec učiva fyziky a očekávaných výstupů podle RVP pro gymnaziální vzdělávání. Jednotlivé kapitoly jsou označeny shodně jako kapitoly v Přehledu středoškolské fyziky. Podobně jsou značeny i články jednotlivých kapitol. Jestliže se text rozšiřujícího učiva odvolává na poznatky uvedené v nejnovějším vydání Přehledu středoškolské fyziky na určité stránce (např. na s. 275), je v textu odkaz uveden značkou, v tomto případě **P275**. Podobně je vyznačen značkou **H** odkaz na historickou osobnost, o níž se pojednává v rozšiřujícím učivu, je-li uvedena v Historických poznámkách.

Rozšiřující učivo jsme vybrali ke kapitolám 1 až 6 Přehledu středoškolské fyziky, tj. ke kapitolám Úvod, Mechanika, Molekulové fyzika a termika, Mechanické kmitání a vlnění, Elektrina a magnetismus a Optika.

Obsahem *úvodu* je pojednání o dekadických a binárních předponách ve fyzice a výpočetní technice a o zaokrouhlování výpočtů při řešení kvantitativních úloh a strategie jejich řešení.

K učivu *mechaniky* jsou doplněny např. k tematickému celku Dynamika hmotného bodu články Časový účinek síly a impulz síly nebo Pružný a nepružný přímý ráz dvou těles. Rozšířeno je učivo o mechanice kapalin.

Do rozšiřujícího učiva *Molekulové fyziky a termiky* jsou např. zařazeny články Rovnovážný stav soustavy jako stav s největší pravděpodobností výskytu, Vedení tepla stejnorodou deskou či Odvození základní rovnice pro tlak ideálního plynu.

K učivu o *mechanickém kmitání a vlnění* jsou nově zpracovány vybrané poznatky z hudební a fyziologické akustiky.

Poměrně rozsáhlé je rozšiřující učivo ke kapitole *Elektřina a magnetismus*, které se vztahuje ke všem podkapitolám. Např. tematický celek Střídavý proud je rozšířen o články Reálná cívka v obvodu střídavého proudu, Reálný kondenzátor v obvodu střídavého proudu a Větrná elektrárna.

Rozšiřující učivo *optiky* tvoří poznatky o měření rychlosti světla, barvě světla a rozlišovací schopnosti optických přístrojů.

Rozšiřující učivo v Přehledu PLUS obsahuje celkem 46 článků, do kterých bude možné vstupovat pomocí interaktivního rejstříku. Po kliknutí na lištu menu Rozšiřující učivo je možné toto učivo otevřít buď jako jeden souvislý soubor, nebo jsou uvedeny odkazy na jednotlivé okruhy rozšiřujícího učiva (např. R2: Mechanika) a v nich lze volit i jednotlivé články (např. R2.2: Dynamika hmotného bodu).

Úlohy k učivu

Autoři: *prof. RNDr. Emanuel Svoboda, CSc., doc. RNDr. Oldřich Lepil, CSc.*

Úlohy jsou zaměřeny na vybraná témata z učiva zařazeného v 1. až 6. kapitole Přehledu středoškolské fyziky. Soubor obsahuje jednak řešené příklady, jednak neřešené úlohy.

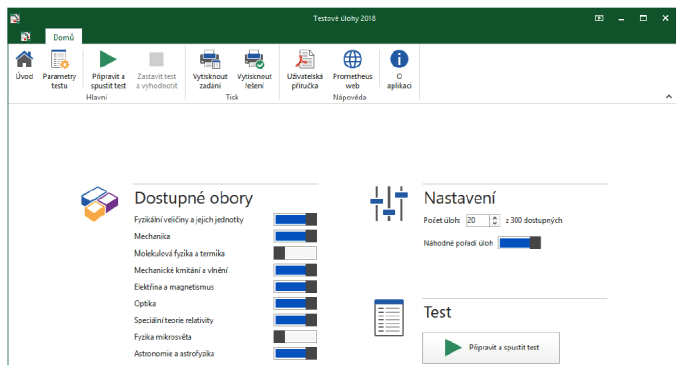
Zařazením úloh do Přehledu se nám podařilo významně obohatit publikaci Přehled středoškolské fyziky. Jejich řešení ve škole nebo v domácí přípravě umožňuje studentům prohloubit si poznatky získané ve výukových hodinách fyziky či řešit konkrétní problémy. Na koncích jednotlivých částí učiva jsou uvedeny výsledky k neřešeným úlohám.

Po kliknutí na lištu menu Úlohy k učivu je možné zobrazit buď všechny úlohy jako jeden souvislý soubor, nebo jsou opět uvedeny odkazy na jednotlivé okruhy učiva (např. C4: Mechanické kmitání a vlnění). Tato část Přehledu PLUS je zpracována obdobně jako cvičení v učebnicích pro gymnázium. Každé cvičení obsahuje několik podrobně vyřešených příkladů a na ně navazující úlohy určené k samostatnému řešení. Výsledky řešení úloh jsou uvedeny na konci každého tematického okruhu úloh.

Testové úlohy z fyziky

Autoři: doc. RNDr. Oldřich Lepil, CSc., doc. RNDr. Miroslava Šíroká, CSc.

Testové úlohy jsou zpracovány jako samostatná počítačová aplikace. Její základ tvoří publikace Sbírka testových úloh k maturitě z fyziky (Prometheus, Praha 2001). Testy obsahují 366 úloh rozdělených do devíti kapitol shodných s Přehledem středoškolské fyziky (obr. 3).



Obr. 3

Velký počet úloh je rozčleněn na dvě úlohy označené jako a) a b), čímž se celkový počet testových úloh ještě podstatně zvětšuje. Výběr testových úloh odpovídá poměrnému zastoupení hlavních témat v Přehledu středoškolské fyziky a shoduje se také s obsahem učebnic fyziky, které vydává nakladatelství Prometheus.

Obtížnost úloh je různá. Zastoupeny jsou jak jednoduché otázky, na které lze odpovědět bez výpočtu, tak úlohy vyžadující algebraické nebo numerické řešení. Často má zadání, popř. řešení, také obrazovou podobu. U každé úlohy jsou nabídnuty čtyři odpovědi, z nichž jen jedna je správná.

Počítačová aplikace, jejímž autorem je Ing. Vladimír Klaus, umožňuje výběr úloh a jejich uspořádání do testového souboru. Při řešení testu tvořeného vybranými úlohami uživatel vyznačí správné odpovědi. Ty jsou pak programem vyhodnoceny a uživateli je sdělen celkový výsledek řešení. Podrobněji je použití Testových úloh z fyziky popsáno v příložené *Uživatelské příručce*.

Zajímavá fyzikální témata

Do této rubriky bylo zařazeno osm témat, která umožňují čtenářům hlubší seznámení se zajímavou problematikou z různých oblastí fyzikální

vědy a jejími aplikacemi v různých oborech lidské činnosti. Jedná se o tato témata (v závorce uveden autor příspěvku):

Z1: Gravitační vlny: Einsteinovo báječné poselství (*prof. RNDr. Jiří Podolský, CSc., DSc.*)

Z2: Modelování fyzikálních dějů (*doc. RNDr. Oldřich Lepil, CSc.*)

Z3: Osvětlovací technika (*doc. RNDr. Josef Hubeňák, CSc.*)

Z4: Komunikační technologie (*doc. RNDr. Josef Hubeňák, CSc.*)

Z5: Obrazovky a displeje (*doc. RNDr. Josef Hubeňák, CSc.*)

Z6: Nanotechnologie (*doc. RNDr. Roman Kubínek, CSc.*)

Z7: Aplikace fyziky v lékařství (*doc. RNDr. Roman Kubínek, CSc.*)

Z8: Standardní model částicové fyziky (*doc. RNDr. Jiří Dolejší, CSc.*)

Podobně jako u předcházejících oddílů Přehledu PLUS, tak i zde je možno zobrazit všechna zajímavá témata najednou v jednom souboru, resp. volit jednotlivé příspěvky (např. Z7: Aplikace fyziky v lékařství).

Historické poznámky

Autoři: *RNDr. Radmila Hýblová, prof. RNDr. Emanuel Svoboda, CSc.*

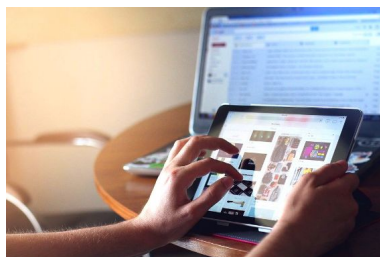
V první části této rubriky jsou uvedeny významné osobnosti fyziky. Interaktivní seznam obsahuje 61 osobností historie fyziky. Do druhé části jsou zařazeny informace o některých významných objevech a vynálezech, např. historie záznamu zvuku, objev tranzistoru, historie měření rychlosti zvuku a další.

Informační zdroje na internetu

Autor: *Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.*

Odkazy na dostupné informační zdroje uvedené na internetu byly rozděleny do těchto skupin:

- Časopisy
- Portály a přehledové stránky
- Soutěže pro žáky ZŠ a SŠ
- Společnosti a instituce
- Výukové materiály
 - Animace a modely
 - Pokusy
 - Veličiny, jednotky, tabulky
 - Soubory videí
 - Astronomie a dění na obloze
 - Různé



Poznámka: Uvedené odkazy na webové stránky byly platné v době vydání Přehledu PLUS.

Literatura

Do této poslední části Přehledu PLUS je vložen seznam učebnic fyziky pro střední školy a dalších publikací vydávaných nakladatelstvím Prometheus, spol. s r. o.

Přehled středoškolské fyziky

Uvedeme ještě několik poznámek k 6. upravenému a doplněnému vydání publikace Přehled středoškolské fyziky.

Publikace byla upravena jednak na základě připomínek čtenářů, jednak bylo nutné reagovat na změnu v definicích sedmi základních jednotek soustavy SI, která vstoupila v platnost na Světový den metrologie 20. května 2019 (viz [4]). Definice těchto jednotek nejsou uvedeny přímo v textu odpovídajícího učiva, ale na zadní předsádce společně s opraveným přehledem vybraných hodnot některých základních fyzikálních konstant (podle CODATA 2018).

Za obsahem na úvodních stránkách knižní publikace je uveden podrobný obsah CD s elektronickým doplňkem Přehled PLUS. Po technické stránce CD připravil *Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.*

Závěrem

Je přáním celého kolektivu autorů současné knižní i elektronické části publikace, aby pomohla všem čtenářům získat a prohloubit si fyzikální vědomosti. Budeme také vděční za sdělení zkušeností s touto knihou a přiloženým elektronickým doplňkem.

Literatura

- [1] *Lepil, O.*: Učebnice fyziky a výuka na střední škole. MFI, roč. 28, č. 4, s. 264–283. Dostupné na: http://mfi.upol.cz/files/28/2804/mfi_2804_264_283.pdf
- [2] *Svoboda, E. a kol.*: Přehled středoškolské fyziky. SPN, Praha, 1991.
- [3] *Svoboda, E. a kol.*: Přehled středoškolské fyziky. Prometheus, Praha, 1996.
- [4] *Svoboda, E.*: Nové definice základních jednotek SI. MFI, roč. 28, č. 3, s. 190–201. Dostupné na: http://mfi.upol.cz/files/28/2803/mfi_2803_190_201.pdf

Ohlédnutí za obdobím heuristického poznávání ve fyzice

BOHUMIL VYBÍRAL

Přírodovědecká fakulta, Univerzita Hradec Králové

Článek pojednává o klíčovém poznávání člověka v letech 1785 až 1905, které v průběhu těchto 120 let znamenalo výrazný pokrok v uvedených oblastech: v propojení a obohacení nauky o elektřině a magnetismu, ve vytvoření teorie elektromagnetického pole, v předpovědi a prokázání existence elektromagnetického vlnění/záření a jejího propojení s naukou o světle, přičemž vše vyústilo ve speciální relativitu, která přinesla výraznou změnu poznatků o prostoru a čase a energii, viz [1]–[6].

Nové poznatky o elektromagnetismu daly již od poloviny 19. století vznik elektrotechnickému průmyslu s výrobou generátorů elektrického proudu, elektromotorů, transformátorů a postupné elektrifikaci celé společnosti [1]. Uvedenému 120letému období předcházelo od počátku 17. století dlouhé období kvalitativních poznatků o elektřině a magnetismu [6].

Po roce 1905 se teoretické poznatky dále prohlubovaly, spojené zejména s objevem kvantování energie a navazující kvantové teorie, nauky o atomu a jeho jádru a obecné relativitě. V oblasti aplikace to byla zejména stavba urychlovačů částic, rozvoj sdělovací techniky, telekomunikací, mikroelektroniky, výpočetní techniky a po roce 1960 laserové techniky aj.

Nauka o elektřině a magnetismu ([3], [6])

V 17. a 18. století byly elektřina a magnetismus zkoumány v podstatě jen kvalitativně a na sobě nezávisle. Roku 1785 francouzský fyzik (původně vojenský technik) *Charles Augustin de Coulomb* (1736–1806), na základě měření torzními váhami vlastní konstrukce, formuloval zákony o elektrostatickém a magnetostatickém silovém působení. Výsledky zobecnil německý matematik a fyzik *Carl Fridrich Gauss* (1777–1855); označují se jako *Gaussovy zákony elektrostatiky a magnetostatiky*:

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \varrho dV, \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (1)$$

První zákon je formulován pro elektrický náboj, který je rozložen s hustotou ϱ v objemu V , ohraničeného plochou S . Druhý zákon je vyjádřením skutečnosti, že neexistují samostatné magnetické náboje. Mezi indukčními $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ a intenzitami $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ platí materiálové vztahy, které v případě vakua mají tvar

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (2)$$

Mezi permitivitou ε_0 a permeabilitou μ_0 vakua platí významný vztah

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}, \quad (3)$$

kde c je univerzální konstanta – rychlost světla ve vakuu.

Významným počinem byl objev elektrochemického potenciálu kovů a navazující vynález zdroje stejnosměrného napětí z let 1799/1800 italským fyzikem *Alessandro Voltou* (1745–1827). To byl nutný předpoklad k uskutečnění jednoduchého kvalitativního experimentu, provedeného roku 1820 dánským fyzikem *Hansem Christianem Ørstedem* (1777–1851): v okolí vodiče protékaného proudem vzniká magnetické pole. Tím byla objevena souvislost elektřiny a magnetismu.

Poté následovalo plodné desetiletí rozvoje elektrodynamiky – na základě kvantitativních experimentů byly formulovány její zákony. Roku 1821 formuloval francouzský matematik *Pierre Simon de Laplace* (1749–1827) diferenciální vztah pro element $d\mathbf{H}$ intenzity magnetického pole, vybuzeného elementárním proudovodičem $I d\mathbf{l}$. Využil experimentální výsledky, k nimž dospěli jeho kolegové *Jean-Baptiste Biot* (1774–1862) a *Félix Savart* (1791–1841). Zákon se označuje jako Biotův–Savartův–Laplaceův. Z něj lze odvodit jednoduchý výsledek pro velikost intenzity magnetického pole ve vzdálenosti r od nekonečně dlouhého přímého vodiče, protékaného proudem I , který je důležitý pro další zobecnění: $H = I/2\pi r$, neboť se z něj vychází při formulaci zákona celkového proudu. Prochází-li plochou S ohraničenou křivkou C spojitě rozložený vodivý proud o hustotě $\mathbf{j}$, platí pro magnetomotorické napětí

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}. \quad (4)$$

Na základě důmyslných experimentů formuloval roku 1827 francouzský matematik a fyzik *André Marie Ampère* (1775–1836) zákon o vzájemném silovém působení dvou mimoběžných elementárních proudovodičů, který se uvádí v jednoduché formě pro jeden proudový element, nacházející se

ve vnějším poli $\mathbf{B}$

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \quad (5)$$

Strukturu základních zákonů elektrodynamiky roku 1831 završil anglický samouk fyziky a chemie *Michael Faraday* (1791–1867), když po dlouhodobém experimentování objevil elektromagnetickou indukci proudu v obvodě s časově proměnným magnetickým indukčním tokem Φ . Zákon elektromagnetické indukce má jednoduchý tvar $U_i = -d\Phi/dt$. Uvedeme jej v zobecněné formě pro elektromotorické napětí indukované v proudovém okruhu C , když rovinnou plochou o obsahu S , vymezeném křivkou C , probíhá časová změna magnetického pole o indukci $\mathbf{B}$ (znaménko minus plyne ze zákona zachování energie při procesu indukce):

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (6)$$

K významným výsledkům experimentální éry elektrodynamiky patří i měření vzájemné vazby konstant ve vztahu (3), které roku 1852 provedl německý fyzik a elektroinženýr *Wilhelm Eduard Weber* (1804–1891). Tím potvrdil, že rychlost světla ve vakuu je univerzální konstanta. To je jeden ze základních pilířů speciální relativity, formulované až 53 let poté. Když na počátku druhé poloviny 20. století byla hodnota c změřena s přesností na devět platných číslic, tak roku 1976 Mezinárodní astronomická unie (IAU) rozhodla, že konstanta c bude mít neměnnou hodnotu. Roku 1983 byla využita k definici jednoho metru. Rychlost světla ve vakuu je přesně

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (7)$$

Maxwellova syntéza: teorie elektromagnetického pole ([3], [5], [6])

Geniální skotský fyzik *James Clerk Maxwell* (1831–1879) provedl mezi roky 1855 až 1873 syntézu experimentálních poznatků z elektro-magnetismu (souhrnně publikované ve dvoudílné tisícistránkové monografii *A Treatise on Electricity and Magnetism*, London 1873). Shrnul zde a podrobně rozpracoval a aplikoval experimentální poznatky, jejichž zobecněné formulace jsou v této stati uvedeny jako výrazy (1) až (6).

Intuitivně tehdy doplnil zákon celkového proudu (4) o posuvný (dnes Maxwellův) proud o hustotě $\mathbf{j}_M$, kterému rovněž přisoudil magnetické účinky. Pro určení $\mathbf{j}_M$ vycházel z jednoduché úvahy, že proudové okruhy jsou uzavřené, i když jejich vodivá část je přerušena např. kondenzátorem, mezi jehož deskami je vakuum. Je-li na deskách o ploše S náboj Q , určíme

velikost indukce D užitím Gaussova zákona elektrostatiky (1) vlevo. Vektor elektrické indukce pole mezi deskami má velikost $D = Q/S$. Zkratujeme-li nabitý kondenzátor vodičem, pokračuje vodivý proud ve vodiči také ve vakuu mezi deskami jako Maxwellův proud o velikosti hustoty

$$j_M = \frac{1}{S} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial D}{\partial t}. \quad (8)$$

Maxwellovy rovnice se uvádějí buď v integrálním, nebo v diferenciálním tvaru. Integrální tvar je soustava rovnic (1), (2) a (4) – zde doplněná o hustotu j_M Maxwellova proudu. Důležitější je jejich diferenciální tvar, který uvedeme pomocí operátorů vektorové analýzy (div a rot), jež zavedl až po Maxwellově smrti geniální německý teoretický a experimentální fyzik *Heinrich Rudolf Hertz* (1857–1894). Hlavní Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole mají v soustavě SI diferenciální tvar

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \varrho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (9)$$

První rovnice je vyjádřením zákona celkového proudu (vycházejícího z experimentálního Biotova–Savartova–Laplaceova zákona), doplněná o hustotu Maxwellova proudu. Vyjadřuje, že magnetické pole je vírové a že jeho zdrojem je vodivý proud a proměnné elektrické pole. Druhá rovnice plyne z Coulombova zákona elektrostatiky, vyjadřuje Gaussův zákon elektrostatiky v diferenciálním tvaru a říká, že elektrické pole je zdrojové, přičemž zdrojem jsou nabitě částice. Třetí rovnice je diferenciální tvar Faradayova zákona elektromagnetické indukce a říká, že časově proměnné magnetické pole indukuje vírové elektrické pole. Čtvrtá rovnice je Gaussův zákon magnetostatiky a vyjadřuje skutečnost, že neexistují magnetické monopóly (a že myšlené magnetické indukční čáry tedy jsou uzavřené křivky).

Soustava hlavních rovnic se doplňuje *soustavou vedlejších Maxwellových rovnic*, k nimž patří lokální (diferenciální) tvar *Ohmova zákona*

$$\mathbf{j} = \gamma \mathbf{E},$$

kde γ je měrná vodivost (konduktivita prostředí). Dále sem patří vztahy mezi indukci a intenzitami pro elektrické a magnetické pole; označují se jako *materiálové vztahy* pro izotropní nebo neizotropní prostředí, které pro izotropní homogenní prostředí mají jednoduchý tvar

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}.$$

Další vedlejší rovnicí je vztah pro *Lorentzovu sílu*, působící na částici s nábojem q , pohybující se v elektromagnetickém poli rychlostí $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

a konečně je to vztah pro *hustotu elektromagnetické energie*, který má tvar

$$w = \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{2}.$$

Soustava se ještě doplňuje o *rovnici kontinuity* pro náboj a proud:

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0.$$

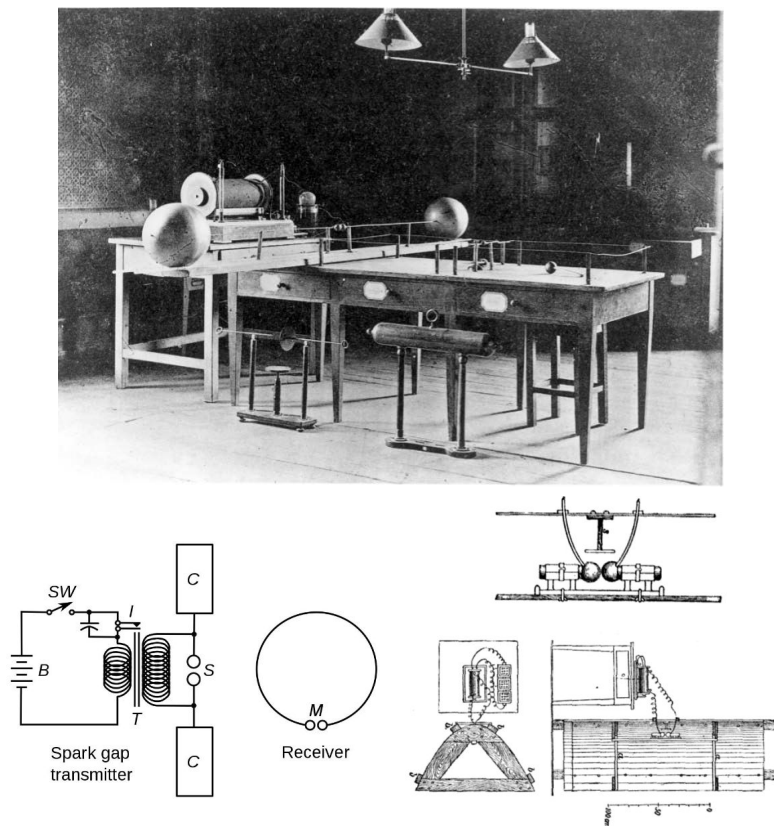
Vztah bezprostředně vyplývá z 1. a 2. rovnice hlavní soustavy. K Maxwellovým diferenciálním rovnicím se připojují *okrajové podmínky* pro hodnoty veličin na rozhraní prostředí.

Geniální intuitivní doplnění zákona celkového proudu o posuvný proud (8) přivedlo Maxwella matematickou cestou k *vlnovým rovnicím*. Pro zjednodušený případ, kdy se ve vyšetřovaném prostoru již nevyskytují náboje a proudy ($\varrho = 0, \mathbf{j} = \mathbf{0}$), mají vlnové rovnice např. pro intenzitu $\mathbf{E}(x, y, z, t)$ v kartézské soustavě tvar

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (10)$$

Vlnová rovnice byla ve fyzice známa již koncem 18. století pro mechanické (akustické) vlnění a na začátku 19. století i pro světelné vlnění. Bylo známo, že konstanta u členu s druhou derivací podle času má význam převrácené hodnoty druhé mocniny rychlosti šíření vlnění. Maxwell tedy dospěl k poznatku, že elektromagnetické pole se šíří formou elektromagnetických vln a že, vzhledem k výrazu (3) má stejnou rychlost jako světlo. Matematickou analýzou zjistil, že tyto vlny jsou příčné (jako u světla, na rozdíl od akustických vln, které jsou podélné). Zjistil, že vektory veličin $\mathbf{B}$ a $\mathbf{E}$ jsou k sobě kolmé. Analyzoval rovněž chování elektromagnetických vln na rozhraní dvou prostředí s rozdílnými rychlostmi šíření. Využitím okrajové podmínky o rovnosti tečné složky intenzity $\mathbf{E}$ na obou stranách rozhraní zjistil, že se elektromagnetické vlnění odráží a láme tak, že rovina odrazu a lomu je totožná s rovinou dopadu a že úhel odrazu je roven úhlu dopadu a že úhel lomu splňuje Snelliův zákon, známý z optiky. Usoudil, že světlo je druh elektromagnetického vlnění.

Verifikačního experimentu se již nedožil. Provedl jej roku 1887 H. R. Hertz (8 roků po Maxwellově smrti). Elektromagnetické vlnění o délce asi 4 m generoval jednoduchým vysílačem a přijímačem – oscilátorem s jiskřištěm (obr. 1).



Obr. 1 Hertzovy experimenty z roku 1887 s elektromagnetickými vlnami o vlnové délce asi 4 m. Fotografie stolu se sestavou experimentu, který prokázal existenci vlnění a platnost zákona odrazu (foto: H. Hertz). Schéma a náčrt ukazují vysílač a přijímač, mající formu jednoduchého oscilátoru s jiskřištěm jako emitorem a detektorem vlnění.

Prokázal jejich odraz, lom (použil rozměrný parafinový hranol) a polarizaci. K tomu je třeba poznamenat, že za krátký život 36 let toho dokázal hodně, také objevil vnější fotoelektrický jev a teoretické oblasti dal Ma-

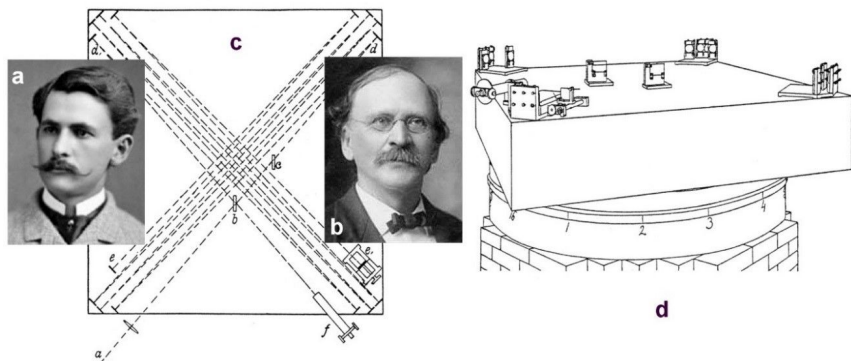
xwellově teorii srozumitelnou formu zavedením vektorových diferenciálních operátorů a Maxwellovu teorii dále rozvinul. Již ve 26 letech se stal profesorem teoretické fyziky.

Nový pohled na světlo a marné hledání éteru ([3]–[5])

Geniální Maxwellova hypotéza, že světlo je elektromagnetické vlnění o vlnových délkách (380 až 780) nm, jej přivedla k vypracování *elektromagnetické teorie světla*, což současně znamenalo nejen propojení elektřiny a magnetismu, ale i optiky. Bohužel od optiků, objevitelů vlnového charakteru světla (*T. Younga* a *A. J. Fresnela*, 1800) přijal také hypotézu o *éteru* – jakémisi materiálním prostředí, potřebném k šíření světla. Fyzici totiž tehdy vycházeli z poznatku mechanického vlnění, že např. zvuk potřebuje k šíření vzduch. Z teorie elastických vln (známé již na konci 18. století) pro rychlost podélných vln v jednorozměrném pružném kontinuu o hustotě ρ a Youngovu modulu pružnosti E vychází výraz $v = \sqrt{E/\rho}$, např. pro ocel má hodnotu $v \doteq 5,1 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, která je o 5 řádů menší než rychlost světla c . Na hypotetický éter (prostupující látkami, např. sklem) by to kladlo zcela protichůdné požadavky: veliký modul E při velmi malé hustotě ρ .

Experimentální hledání éteru a jeho vztahu k prostoru trvalo téměř celé 19. století (podrobněji např. [4]). Některé experimenty dávaly vzájemně protichůdné výsledky. Rozhodnout měl experiment z roku 1881, který navrhl a provedl americký doktorand v Německu *Albert Abraham Michelson* (1852–1931), avšak experiment nic nerozhodl. Usuzovalo se, že jsou malé optické dráhy interferujících paprsků (dráha byla 1 m, přičemž ideální by byla 11 m). Proto spolu s *Edwardem W. Morleyem* (1838–1923) zdokonalil interferometr (obr. 2) a experiment roku 1887 provedli znovu. K interferenční záměně světých proužků za tmavé však nedošlo (očekávaný dráhový posun paprsku byl $0,45\lambda$). Jeden z možných výkladů již tehdy byl, že nastává kontrakce ramen ve směru orbitální rychlosti Země vůči éteru, spojeného s inerciální heliocentrickou soustavou, ztotožňovanou s absolutním newtonovským prostorem. Experiment je považován za největší negativní experiment 19. století. Nizozemského teoretika *Hendrika Antoona Lorentze* (1853–1928) přivedl k vyslovení teorému, že Maxwellovy rovnice elektromagnetického pole jsou kovariantní (neměnné) vůči inerciálním vztažným soustavám spojených s éterem (hypotézu éteru nikdy neopustil). Z podmínky kovariance roku 1895 odvodil transformace prostorových souřadnic – *Lorentzovy transformační vztahy* (současný tvar

je z roku 1904), které korigují Galileovu klasickou transformaci. Problém éteru vvřešen nebyl.



Obr. 2 Michelsonův–Morleyův experiment (1887): a) A. A. Michelson, b) E. W. Morley. c) Chod paprsků v interferometru (při experimentu měly paprsky v jedné uhlopříčce směr orbitální rychlosti Země kolem Slunce $2,97 \cdot 10^4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, přičemž se očekávalo, že v důsledku změněné rychlosti světla vůči éteru vznikne dráhový posun vůči paprskům v druhé, k ní kolmé uhlopříčce). d) Konstrukce interferometru (masivní kamenná deska se zrcátky plovla ve vaně se rtutí k jejímu snadnému otočení – k záměně směru paprsků). Zdroje: [7]–[9]

Východisko z krize poznávání: Einsteinova speciální relativita ([4], [5])

Zcela nový přístup k teorii elektromagnetického pole, neovlivněný hypotézou éteru (ani Michelsonovým–Morleyovým pokusem) zvolil německý fyzik *Albert Einstein* (1879–1955). Roku 1905 ve dvou článcích formuloval *speciální teorii relativity*. Výchozí principy jsou:

Princip konstantní rychlosti světla ve vakuu, univerzální fyzikální konstanty c , viz výrazy (3) a (7).

Speciální princip relativity: Všechny inerciální vztažné soustavy jsou rovnocenné pro popis všech fyzikálních jevů (tedy včetně elektromagnetických).

Cílem tohoto článku není zabývat se speciální relativitou (zájemce lze odkázat na četnou literaturu, např. na publikaci [4]). Ukážeme zde jen na její podstatné výsledky, dokumentující završení 120letého vývoje sledovaného poznávání elektromagnetismu.

Při odvození prostoročasových transformačních vztahů Einstein vyšel z jednoduché úvahy. Mějme dvě inerciální vztažné soustavy $S(x, y, z, t)$ a

$S'(x', y', z', t')$, které se vůči sobě pohybují tak, že soustava S' má vůči S konstantní rychlost v , přičemž osy x, x' splývají a ostatní dvě osy zůstávají rovnoběžné. Představme si, že v okamžiku $t' = t = 0$, kdy počátky obou soustav splývají, se vyšle z počátku signál. Podle principu relativity se v obou soustavách za dobu t, t' rozšíří na kulové vlnoplochy: $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$ (v S) a $x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$ (v S'). Těmto rovnicím vyhovuje lineární transformace $x' = \gamma(x - vt)$, kde γ je *relativistický koeficient*, přičemž čas je relativní ($t' \neq t$). Poměrně jednoduchým algebraickým výpočtem lze transformaci dořešit. *Lorentzovy transformační vztahy* jsou:

$$x' = \gamma(x - vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \quad (11)$$

přičemž

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (12)$$

Pro opačný přechod (od S' k S) se zamění nečárkované veličiny za čárkované a naopak, přičemž $v' = -v$ a $v'^2 = v^2$ a tudíž také $\gamma' = \gamma$, neboť z principu je $c' = c$.

Výsledky ukazují vzájemnou vazbu souřadnic prostoru a času, především relativnost času. Vyplyvá z nich relativnost současnosti, mezní rychlost přenosu fyzikální interakce (rychlostí c), kontrakce délky

$$l = l_0/\gamma = l_0\sqrt{1 - \beta^2},$$

dilatace času

$$T = \gamma T_0 = T_0/\sqrt{1 - \beta^2},$$

vzorce pro skládání rychlostí (při součtu rychlostí nelze překročit mezní rychlost c) a také již v 1. Einsteinově článku popsany relativistický Dopplerův jev.

Relativistická dynamika výrazně koriguje Newtonovu klasickou dynamiku. Významné jsou výsledky pro relativistickou pohybovou rovnici, hmotnost a energii:

$$F = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}), \quad m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad E = mc^2. \quad (13)$$

Hybnost $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \gamma m_0 \mathbf{v}$ roste, na rozdíl od klasické mechaniky, se zvětšující se rychlostí v nelineárně a pro $v \rightarrow c$ je $p \rightarrow \infty$. *Pohybová rovnice*

zůstává v původním Newtonově tvaru, avšak derivuje se hybnost, jako součin dvou funkcí rychlosti. *Relativistická hmotnost* $m = \gamma m_0$, jako míra setrvačných účinků tělesa (částice), s rychlostí $\mathbf{v}$ roste z klidové hodnoty m_0 a v limitní situaci $v \rightarrow c$ je $m \rightarrow \infty$, protože konečnou silou již nelze zvětšit rychlost na mezní hodnotu c . Energie $E = mc^2$ tělesa (částice) má klidovou hodnotu $E_0 = m_0 c^2$ (odvození vztahu je v následujícím odstavci).

Einstein problémem „éteru“ nebyl zatížen a pro svou teorii éter nepotřeboval. Za prostředí potřebné pro šíření elektromagnetického vlnění relativita považuje prostoročas, který je dán existencí materiálních objektů v celém vesmíru.

Speciální relativita významně přispěla k teorii elektromagnetického pole. V důsledku principu relativity mají Maxwellovy rovnice v soustavách S a S' sice stejný tvar (rovnice jsou kovariantní), avšak mění se hodnoty kartézských složek intenzity $\mathbf{E}$ a indukce $\mathbf{B}$ v obou soustavách. Hodnoty pro elektrickou a magnetickou složku jsou vzájemně závislé (jsou funkcí rychlosti v). Pole je nejjednodušší, je-li částice o náboji q v soustavě S v klidu – vytváří elektrostatické pole. Při pozorování ze soustavy S' přistupují složky indukce magnetického pole (částice se vůči S' pohybuje, vytváří elektrický proud a je nejen zdrojem elektrického, ale i magnetického pole). Lze říci, že magnetické pole je relativistický efekt elektrického pole. Užitím relativistického vzorce pro transformaci síly lze z Coulombova zákona odvodit zákony elektrodynamiky: Biotův–Savartův–Laplaceův zákon a zákon Ampérův (viz např. [4]).

Vztah mezi energií a hmotností

Nechť se v inerciální vztažné soustavě nachází objekt, např. volná částice, o klidové hmotnosti m_0 . Částice nechť se v této soustavě nachází v klidu ($v_0 = 0$). Má-li dojít ke změně pohybového stavu, je nutné na ni působit silou $\mathbf{F}$, která konáním práce jí udělí zrychlení. Uvažujme element vykonané dráhy $d\mathbf{l}$. Protože ke změně pohybového stavu došlo ze stavu klidu, mají vektory $\mathbf{F}$, $d\mathbf{l}$ stejný směr, výpočet lze provést skalárně. Pak element práce dW a element přírůstku kinetické energie dE_k je

$$\begin{aligned} dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} &= F dl = \frac{dp}{dt} dl = v d(mv) = \\ &= v(v dm + m dv) = mv dv + v^2 dm = dE_k. \end{aligned} \quad (14)$$

Pro pokračování ve výpočtu má rozhodující význam veličina hmotnost m .

a) Klasická fyzika hmotnost chápe jako veličinu, která je mírou setrvačných a gravitačních účinků těles a současně také jako míru množství látky. Tedy $m = \text{konst.}$, a tudíž $dm = 0$. Pak z (13) plyne

$$dW = mv \, dv = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dE_k, \quad (15)$$

neboli

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

což je klasický výraz pro výpočet kinetické energie.

b) *Relativistická fyzika* je vázaná principem konstantní rychlosti světla ve vakuu c , která je současně mezní rychlostí všech materiálních objektů. Důsledkem je vzrůst hmotnosti ve vztažné inerciální soustavě s rychlostí v podle vztahu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \quad (16)$$

Z toho plyne $m^2(c^2 - v^2) = m_0^2c^2 = \text{konst.}$ Diferencováním vztahu dostaneme

$$mv \, dv + v^2 \, dm = c^2 \, dm.$$

Dosažením tohoto vztahu do (13) dostaneme pro element kinetické energie vztah

$$dE_k = c^2 dm, \quad (17)$$

neboli přírůstek kinetické energie částice se projeví jako přírůstek její hmotnosti. Pokud je částice urychlena z klidového stavu, kdy je $v = 0$ a částice má klidovou hmotnost m_0 , do stavu s rychlostí $v < c$, pak po integraci vztahu (16) platí

$$E_k = (m - m_0)c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1\right)m_0c^2. \quad (18)$$

Neboli $E = E_0 + E_k$, kde

$$E = mc^2, \quad E_0 = m_0c^2 \quad (19)$$

je *celková energie* a *klidová energie* částice (tělesa). Výpočet změny energiového stavu jsme provedli užitím elementu mechanické práce. Dosažené poznatky (18) relativistická fyzika zobecňuje i na jiné druhy změn energiových stavů. Pohled na energii z hlediska obecné relativity je složitější; je mimo rámec tohoto příspěvku.



Obr. 3 Hlavní tvůrci nauky o elektřině a magnetismu a teorie elektromagnetického pole: a) Ch. A. Coulomb, b) A. Volta, c) H. Ch. Ørsted, d) A. M. Ampère, e) M. Faraday, f) J. C. Maxwell, g) H. R. Hertz, h) A. Einstein. Zdroje: [10]–[17]

Literatura a zdroje vyobrazení

- [1] *Vybíral, B.*: Technické aplikace fyziky. Gaudeamus, Hradec Králové, 2019.
- [2] *Vybíral, B.*: Od elektromagnetismu ke speciální teorii relativity – poznámky k historii. In: 7. konference o matematice a fyzice na vysokých školách technických, Brno 22. září 2011, Univerzita obrany, Brno, 2011, s. 11–32.
- [3] *Vybíral, B.*: Teorie elektromagnetického pole. Pedagogická fakulta, Hradec Králové, 1984.
- [4] *Vybíral, B.*: Teorie relativity a gravitace. Gaudeamus, Hradec Králové, 2008.
- [5] *Votruba, V.*: Základy speciální teorie relativity. Academia, Praha, 1969.
- [6] *Vybíral, B.*: Kapitoly z experimentální fyziky. Gaudeamus, Hradec Králové, 2014.
- [7] *E. W. Morley*: http://www.epola.co.uk/epola_org/michelson_morley_3.jpg
- [8] *Michelsonův–Morleyův experiment 1*: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:On_the_Relative_Motion_of_the_Earth_and_the_Luminiferous_Ether_-_Fig_4.png

- [9] *Michelsonův–Morleyův experiment 2*: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:On_the_Relative_Motion_of_the_Earth_and_the_Luminiferous_Ether_-_Fig_3.png
- [10] *Ch. A. Coulomb*: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/42/Coulomb.jpg>
- [11] *A. Volta*: https://akm-img-a-in.tosshub.com/indiatoday/volta_647_030516021229.jpg?Fsve4yWSxMYOBjN4TdriF2WL218MbQQr
- [12] *H. Ch. Ørsted*: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/7/79/%C3%98rsted.jpg/225px-%C3%98rsted.jpg>
- [13] *A. M. Ampère*: <http://www.geocities.ws/saladefisica9/biografias/ampere10.jpg>
- [14] *M. Faraday*: http://1.bp.blogspot.com/-MZy9hk5i_qs/T6DPZk8001I/AAAAAAAAAB4c/uEFI_WmrWYY/s1600/Michael%2BFaraday%2B%2BPhoto.jpg
- [15] *J. C. Maxwell*: https://usercontent2.hubstatic.com/13882069_f520.jpg
- [16] *H. R. Hertz*: <https://i.pinimg.com/originals/23/f6/9c/23f69c2ac734c5d2cfdffd8ddf1585d8.jpg>
- [17] *A. Einstein*: http://blogs.esa.int/orion/files/2013/07/Einstein_patentoffice.jpg

VPython/GlowScript Trinket ve výuce fyziky

JAN VÁLEK

Pedagogická fakulta, MU Brno

Vizuální stránka hraje ve společnosti v posledních několika letech velmi výraznou roli. To se podepisuje také na tom, že je kladen mnohem větší důraz na to, jak prezentovat informace, než jaké informace se prezentují. To je ale v přímém rozporu s tím, jak obrazovou reprezentaci vnímají přírodovědci. Ti kladou důraz na maximální přesnost a adekvátní množství sdělovaných informací. Didaktici mimo vědecké přesnosti požadují názorost přiměřenou mentální úrovni žáků.

Vizualizace ve vzdělávání je důležitá i z toho důvodu, že člověk přijímá cca 80 % informací ze svého okolí zrakově [1]. Pokud chceme, aby si tato data pamatoval, pak je účinnost takového procesu 40% [1]. Dalšími cíli vizualizace je získat pozornost žáka, zaujmout žáka, sdělit nové informace žákovi, názornost probírané látky. Vizualizační prostředky lze využít ve všech fázích vyučovací hodiny. Od motivační fáze, až po fázi diagnostickou. Shrňme-li si předchozí, pak lze říci, že žáci si za pomoci vizuálií lépe zasazují informace do správného kontextu [2].

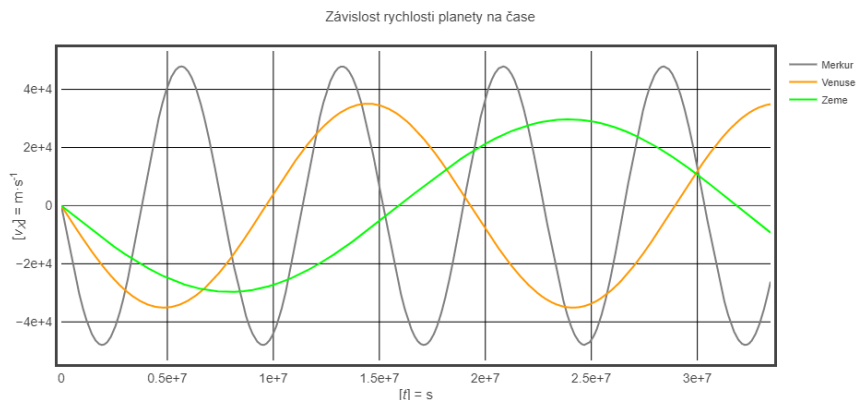
K vlastní vizualizaci, v našem případě budeme hovořit o modelech fyzikální podstaty, lze využívat různá vývojová prostředí, ve kterých mohou pracovat jak vědci, učitelé, tak jejich žáci a studenti. Některými z nich jsou například Famulus, IP Coach, Algodo (dříve Phun), PHP, HTML5, Mathematica, Easy Java Simulations, Modellus, VPython a nebo jeho zcela otevřená varianta GlowScript Trinket. Poslednímu zmíněnému prostředí, GlowScript Trinket, se budeme v tomto příspěvku věnovat blíže [3].

VPython/GlowScript Trinket

Prostředí VPython, které v roce 2000 vytvořil D. Scherer, umožňuje vytváření 3D zobrazení a animací, a to i těm, kteří mají omezené zkušenosti s programováním. Prostředí je založeno na klasickém Pythonu, dokáží s ním proto pracovat zkušení programátoři i vědci. Pro pohodlnější práci a tvorbu animací vytvořili v roce 2011 D. Scherer a B. Sherwood GlowScript, který vychází z programové základny Pythonu, používá grafické knihovny VPythonu, ale na rozdíl od nich ho lze provozovat ve webovém prohlížeči a to jak tvorbu zdrojového kódu, tak i jeho výstup. Prostředí Trinket, které pracuje se stejnou syntaxí jako GlowScript, pak v roce 2003 vytvořil E. Hauser. Výhodné je, že je možné užívat totéž prostředí jak ve škole, tak i doma, a to bezplatně na straně žáka/studenta [4–6].

VPython/GlowScript má výhodu v tom, že v něm lze modelovat například pohyb těles, pohyb elektronů obvodem a mnoho dalšího. Současně lze vykreslovat průběh veličin, které jsou v animaci měněny a pomocí matematických vztahů zapisovány. Tuto vlastnost tak lze využít jak v kvalitativní, tak i v kvantitativní přiblížení nového učiva napříč všemi úrovněmi školního vzdělávání. Například na prvním stupni základní školy můžeme žákům demonstrovat pohyb planet Sluneční soustavy kvalitativně, zatímco na druhém stupni základní školy již můžeme nechat vykreslovat průběh rychlosti planet v jednotlivých fázích oběhu kolem Slunce (obr. 1). Dále lze animaci přiblížit nebo naopak oddálit případně jinak s objekty manipu-

lovat. Žáci mohou modelovanou situaci digitálně prozkoumat z více úhlů pohledu. Lze tak tedy celý systém sledovat komplexně nebo jenom některé část izolovaně, což napomáhá lepšímu porozumění zkoumaných jevů.



Obr. 1 Graf závislosti x -ové složky rychlosti planet Merkur, Venuše, Země na čase

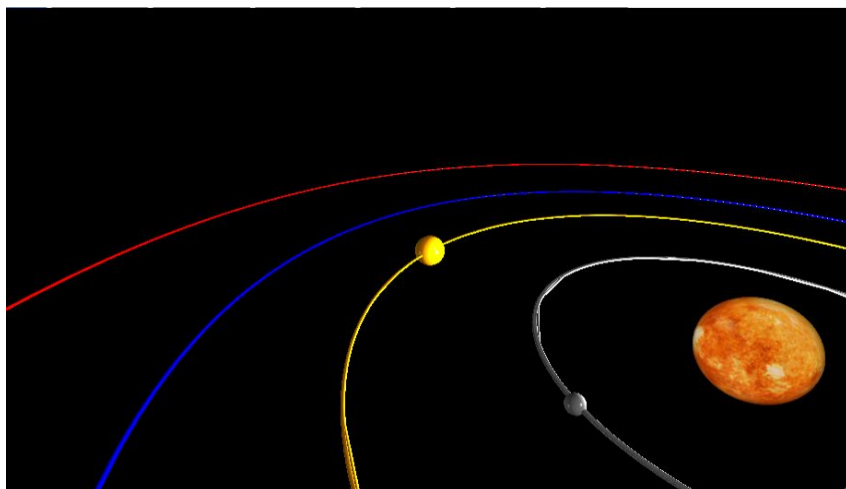
Protože se jedná o prostředí, které je primárně vytvořeno pro demonstraci fyzikálních jevů, vytvořili autoři programu sami knihovnu, ve které jsou předvytvořené některé objekty, se kterými se ve fyzice setkáváme. Ať už se jedná o klasická tělesa (koule, krychle, válce), ale i šípky, pružinu, jehlan, kruh a další.

Z tohoto pohledu tak pro tvůrce modelu/vizualizace odpadá nutnost přemýšlet a vytvářet vlastní modely pomocí zápisu kódu jednotlivých prvků, ale může se více soustředit na fyzikální podstatu problému.

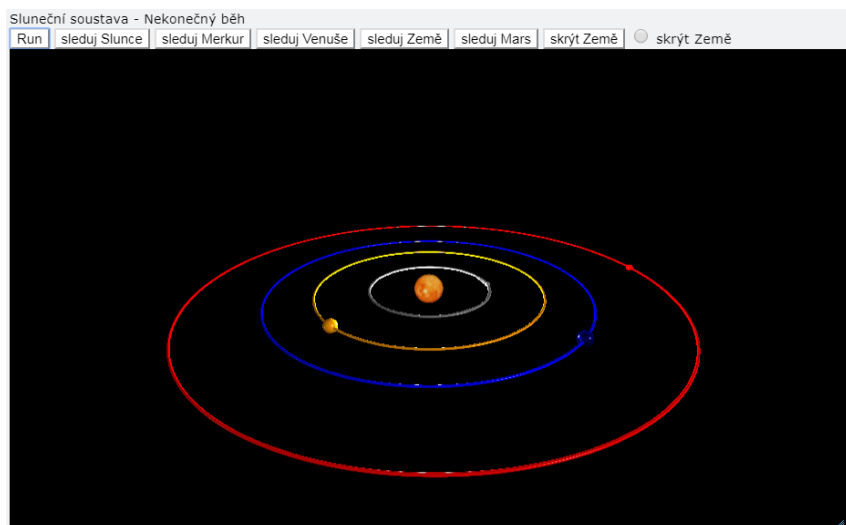
Pokud se zaměříme na tvorbu modelů z pohledu učitele, tak na ni bude jistě nahlížet z několika úhlů a to z didaktického, fyzikálního, technického a programátorského.

Didaktické hledisko

Pokud se nyní nebudeme soustředit na tvorbu, ale již na prezentaci hotových modelů, pak je vhodné poznamenat, že z didaktického hlediska se jedná o vhodný nástroj. Jak je již uvedeno výše, s modely lze různě manipulovat (pohybovat, natáčet, přibližovat/oddalovat), což umožňuje zkoumání jednotlivých detailů (viz obr. 2). Nebo naopak se od nich oprotíme a budeme systém sledovat jako celek, tedy „z dálky“ (viz obr. 3).



Obr. 2 Pohled na model Sluneční soustavy – kamenné planety, detail na Merkur a Venuši. (Vidíme, že přivrácené strany planet ke Slunci jsou jím osvětlené.)



Obr. 3 Pohled na model Sluneční soustavy – kamenné planety

Další výhodou je možnost práce se světlem, což opět napomáhá realistickému efektu zkoumaného jevu (například Sluneční soustava). Žáci tak

mohou studovat pohyb planet kolem Slunce, a jak tento jev souvisí se střídáním dne a noci nebo z pohybu Měsíce kolem Země si vysvětlit zatmění Slunce a Měsíce. Pohyby těchto vesmírných těles můžeme modelovat pomocí matematického zápisu fyzikální podstaty jevu.

Na tomto místě je vhodné poznamenat, že nejčastěji se používají jednoduché matematické postupy ve chvílích, kdy je analytické řešení problému žákovi cizí nebo je pro něj právě matematicky náročné. Tento postup je odborné veřejnosti znám jako dynamické modelování. Dynamické modelování využívá toho, že autor umí fyzikálně a matematicky popsat daný jev a dokáže diferenciální rovnice komplexně popisující děj vyřešit a přepsat na takové vztahy, kdy jsou veličiny získávány na základě funkce času. K tomu potřebujeme znát také počáteční podmínky popisující systém [3, 7–9].

Fyzikální hledisko

Vyjdeme ze dvou základních faktů, se kterými přicházejí žáci z mateřských škol (dále MŠ) do škol základních (dále ZŠ) a to, že:

- 1) Země má jednu přirozenou družici, Měsíc,
- 2) dvojice Země–Měsíc obíhá kolem Slunce.

Pro první přiblížení pro žáky v MŠ, ale i na 1. stupni ZŠ, bude stačit, když sdělíme, že vzdálenosti a hmotnosti všech tří vesmírných těles nabývají takových hodnot, že setrvávají na svých oběžných drahách a nemají tendenci tento svůj stav měnit. Jsou tedy ve vhodné vzdálenosti, aby nebyly přitaženy Sluncem, a nemají takovou pohybovou energii, aby opustili jeho oběžnou dráhu.

Žákům na 2. stupni ZŠ pak může objasnit, že mezi všemi třemi tělesy působí gravitační síla. Teprve až na gymnáziu nebo střední škole budeme tuto s žáky počítat. Použijeme Newtonův gravitační zákon:

$$F_g = G \frac{mM}{r^2} \quad (1)$$

Kde $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ je gravitační konstanta, m a M jsou hmotnosti těles a r je jejich vzdálenost.

Dále již nebudeme uvažovat vektorový zápis a budeme zkoumat pouze pohyb v ose x . Index i u veličin reprezentuje krok daného výpočtu, $i + 1$ krok následující, $i - 1$ krok předcházející. Budeme postupovat v těchto krocích (pozn.: Budeme zapisovat pouze pohyb v ose x , v osách y a z by

byly zápisy obdobné):

$$\begin{aligned}F_{g_i} &= G \frac{mM}{(x_{1i} - x_{2i})^2} \frac{x_{1i} - x_{2i}}{r} \\a_i &= \frac{F_{g_i}}{m} \\v_i &= v_{i-1} + a_i dt \\x_i &= x_{i-1} + v_i dt \\t_{i+1} &= t_i + dt\end{aligned}$$

kde F_{g_i} je síla, kterou těleso 1 působí na těleso 2.

Celý výpočet pak můžeme převést do programu na výpočet pomocí několika řádků (uvedeno níže v Programátorském hledisku), s tím, že tyto řádky se bude cyklicky opakovat.

Abychom vzali v úvahu všechny interakce, budeme muset spočítat vzájemné síly mezi všemi dvojicemi vesmírných těles z uvedené trojice, tj. Slunce–Země, Země–Měsíc.

Technické hledisko

Prostředí IDE GlowScript Trinket je provozováno on-line, což s sebou nese jak výhody, tak nevýhody. Výhodou je to, že pro tvorbu a editaci kódu nám postačuje jakýkoliv prohlížeč (v počítači, tabletu, mobilu) napříč všemi platformami. V tom je velká síla tohoto vývojového prostředí. Další výhodou je to, že vepsáním jakéhokoliv znaku se kód automaticky ukládá. Syntaxe kódu je zvláště podobná jako například v PSPadu nebo Eclipse. Nevýhodou lze současně spatřovat v nutnosti být on-line v případě editace kódu (ano výše je tentýž bod uvedený jako plus, ale je zřejmé, že je to dvousečná zbraň). Po zkompileování lze snadno a v reálném čase měnit zadané hodnoty a animace/model se tak okamžitě mění.

Programátorské hledisko

Syntaxe kódu není nijak složitá, naopak se velmi podobá českému prostředí FAMULUS (vycházejícího z Pascalu). Velký důraz je tu kladen na přehlednost kódu. Jelikož je hlavně pro žáky důležité nejen to, jak model vpadá, ale i jak funguje. Možná trochu nestandardní bude zápis cyklů a vlastních funkcí, kdy tento v podstatě nekončí klíčovým slovem, ale pro-

gram sám podle odsazení kódu od začátku řádku rozpozná, že zápis kódu cyklu skončil.

```
while (True):  
    rate(programSpeed)  
    pohyb (Merkur)  
    pohyb (Venuse)  
    pohyb (Zeme)  
    pohyb (Mars)
```

Takto vypadá fragment cyklu `while`, z jiných programovacích jazyků jsme zvyklí na ukončovací syntaxi, která zde zcela chybí.

```
Fgrav = G * Slunce.mass * Planeta.mass * (Slunce.pos -  
    Planeta.pos).norm() / (Slunce.pos - Planeta.pos).mag2  
  
Planeta.acceleration = Fgrav / Planeta.mass  
Slunce.acceleration = Fgrav / Slunce.mass  
  
Planeta.velocity = Planeta.velocity + Planeta.acceleration * dt  
Slunce.velocity = Slunce.velocity + Slunce.acceleration * dt  
  
Planeta.pos = Planeta.pos + Planeta.velocity * dt  
Slunce.pos = Slunce.pos + Slunce.velocity * dt  
  
t = t + dt
```

Fragment kódu, který odpovídá fyzikálnímu zápisu (výše v části Fyzikální hledisko), tj. vztahy pro výpočet gravitační síly mezi tělesy (Sluncem a planetou Sluneční soustavy) a následuje úprava rychlosti pohybu planety a také Slunce, na základě vzájemného působení gravitační síly. Stejně tak musíme upravit i pozici planety a Slunce. Vidíme, že zde vystupuje člen `dt`, což naznačuje, že rychlost je funkcí času a jsme tedy již v dynamickém modelování [7–8].

Protože ale v GlowScript Trinket můžeme pracovat s vektory (zápis nemusí obsahovat popisování dějů v jednotlivých osách, je nutné ale správně uvést počáteční podmínky) a v tomto případě tomu tak opravdu je, musíme při výpočtu gravitační síly uvažovat i tzv. jednotkový vektor pomocí funkce `norm()` a druhou mocninu vzdálenosti těles můžeme spočítat pomocí funkce `mag2()`. Pokud bychom nespočítali jednotkový vektor, tak by v kódu nastala chyba typu proměnných a program by dále nepokračoval.

Výše byly předloženy různé pohledy na tvorbu modelu pro použití ve výuce fyziky. Protože se jedná především o metodu, která má pomoci žá-

kům s porozuměním a vhodným zasazením informací do správného kontextu, měl by být kladen největší důraz na didaktické hledisko a v „těsném závěsu“ na fyzikální hledisko, abychom žákům sice vhodně nereprezentovali vizuální informace, ale aby nebyla fyzikálně nesprávná. Z technického hlediska je tvorba nenáročná jak na software, tak na hardware. Programátorská část také není složitá, neboť žáci na základních školách již základní algoritmizaci zvládají. Pokud budeme tedy s žáky takové modely vytvářet sami, pak i syntaxe je jednoduchá a pochopitelná pro žáky samotné.

Zpětná vazba z praxe

S modelem Sluneční soustavy pracovali učitelé základních škol a to na 1. stupni i na 2. stupni. Na 1. stupni byl model zařazen do Vzdělávací oblasti *Člověk a jeho svět*, Vzdělávacího oboru *Člověk a jeho svět*, konkrétně 2. období, kde očekávaným výstupem je: *ČJS-5-4-02 vysvětlí na základě elementárních poznatků o Zemi jako součásti vesmíru souvislost s rozdělením času a střídáním ročních období*. S modelem pracoval vyučující a soustředil se na Zemi, Měsíc a Slunce a jejich vzájemnou polohu.

Na 2. stupni byl model zařazen do Vzdělávací oblasti: *Člověk a příroda*, Vzdělávacího oboru FYZIKA, očekávaným výstupem je část Vesmír: *F-9-7-01 objasní (kvalitativně) pomocí poznatků o gravitačních silách pohyb planet kolem Slunce a měsíců planet kolem planet*. S modelem pracoval nejdříve vyučující a soustředil se na kamenná planety a jejich měsíce. Následně s modelem pracovali žáci, kde jedním z úkolů bylo seřadit planety podle jejich oběžné rychlosti a oběžné doby oběhu kolem Slunce.

Na základě zpětné vazby byla do modelu přidána možnost měnit rychlost celého dění (změna pomocí tlačítka SPEED) a možnost sledovat vybrané vesmírné těleso (pomocí tlačítka s názvem vybraného tělesa). Stejný požadavek měli také učitelé fyziky na 2. stupni.

Celkový čas práce učitele s modelem v hodinách činil 10 minut na obou stupních ZŠ. Žáci na druhém stupni s modelem pracovali cca 5 minut. Po úkolech stanovených učitelem následovalo shrnutí pozorovaných skutečností žáky.

Závěr

Jak lze z výše uvedeného odvodit, tvorba modelů pro výuku fyziky v prostředí GlowScript Trinket není nijak náročná. Z pohledu žáka je vytvořený model názorný a může s ním manipulovat tak, aby došel kompletního pochopení probíraných pojmů. Výhodou předloženého prostředí je absolutní

nezávislost na platformě a není potřeba instalovat vůbec žádný další software nad rámec toho, který již v notebooku, PC, chytrém mobilu nebo tabletu je.

Předvedený model lze použít ve výuce v mateřské škole, základní škole ale i na gymnáziu a střední škole. Model lze vytvořit, ale také spustit na různých platformách, a pro jeho tvorbu nám postačí jakýkoli webový prohlížeč. Univerzalita prostředí GlowScript Trinket je značná co do platform, ale také do možností, které nám prostředí nabízí. Lze s ním pracovat jak kvalitativně, tak kvantitativně. Pokud se zaměříme na mezipředmětovost, pak ji samozřejmě můžeme najít mezi Fyzikou a ICT předmětem, nyní hovoříme o základní škole, gymnáziu a střední škole.



Obr. 4 Ukázka ovládacího rozhraní modelu

Další vzdělávací podtext můžeme spatřit v tom, že necháme žáky, aby sami hledali základní parametry těles, která se nacházejí ve Sluneční soustavě.

Literatura

- [1] *Petty, G.*: Moderní vyučování. Vyd. 5., přeložil Š. Kovařík, Portál, Praha, 2008.
- [2] *Spousta, V.*: Vizualizace: gnostický a komunikační prostředek edukologických fenoménů. Vyd. 1., Masarykova univerzita, Brno, 2007.
- [3] *Válek, J., Sládek, P.*: Web based dynamic modeling by means of PHP and JavaScript. In: J. Kapounová, K. Kostolányová: Information and Communication Technologies in Education. Rožnov pod Radhoštěm, Univerzita Ostrava, 2012, s. 291–301.
- [4] History. VPython [online]. 2002 [cit. 2019-10-17]. Dostupné z: <https://vpython.org/contents/history.html>
- [5] History. GlowScript [online]. 2011 [cit. 2019-10-17]. Dostupné z: <https://www.glowscript.org/docs/GlowScriptDocs/history.html>
- [6] Our Story. trinket [online]. 2019 [cit. 2019-10-17]. Dostupné z: <https://trinket.io/our-story>
- [7] *Lepil, O., Látal, F.*: Rezonance v učivu o střídavých proudech. MFI, roč. 23 (2014), č. 5, s. 356–368.
- [8] *Lepil, O., Richterek, L.*: Dynamické modelování. Repronis, Olomouc, 2007.
- [9] *Šedivý, P.*: Modelování pohybů numerickými metodami. Studijní text pro řešitele FO č. 38, Hradec Králové. 1999.

Superelipsa a superformule

LUDEK SPÍCHAL

Ústav matematiky a statistiky, Masarykova univerzita, Brno

Kuželosečky patří k učivu, se kterým se většina studentů setká v průběhu svého středoškolského studia. Přestože bezesporu patří mezi důležité partie matematiky s řadou důležitých aplikací, pro studenty mohou představovat málo zajímavou a současně i relativně obtížnou kapitolu.

K určitému zatraktivnění by mohl přispět následující text, který poukazuje na širší souvislosti umožňující popisovat jednotným způsobem mnohem širší množinu křivek, než je samotná elipsa. Řadu takových křivek je navíc možné celkem snadno modelovat dostupnými grafickými programy, jako je např. Geogebra.

Samotný pojem elipsy, který zahrnuje mnoho různých aplikací a jejichž výčet by ovšem byl „nošením dříví do lesa“, bude proto pouze východiskem pro zavedení pojmů superelipsy a superformule.

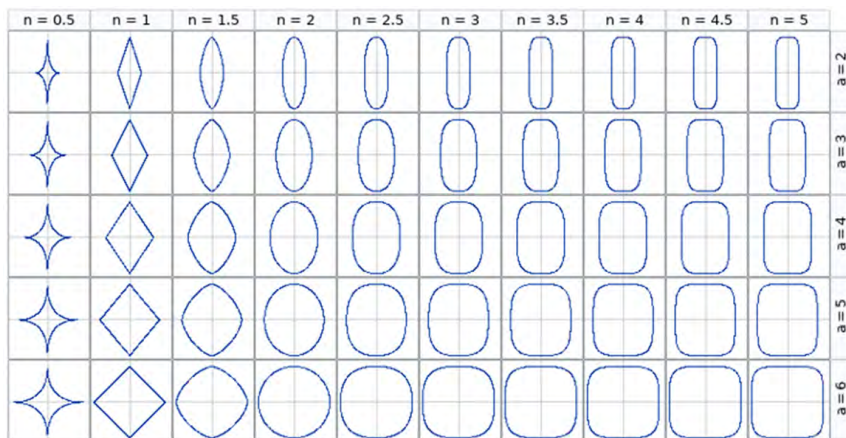
Laméovy křivky

Celou řadu křivek jako je kružnice, elipsa, ale také čtverec či obdélník lze vyjádřit jedinou rovnicí, jak v roce 1818 ukázal Gabriel Lamé.¹⁾ Zajímalo jej, jak se bude chovat zobecněná rovnice kružnice a elipsy [1, 2, 3, 4]

$$\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1, \quad (1)$$

kde $a, b \in \mathbb{R}^+$, v případě, že měnil spíše hodnotu exponentu n , než délky poloos a, b . Změnami hodnot exponentu n Lamé získal široké spektrum křivek (obr. 1).

¹⁾ Gabriel Lamé (1795–1870) byl francouzský matematik a fyzik. Motivací Lamého práce bylo využít Descartovu analytickou geometrii pro popis tvaru krystalů, jejich rozmanitých tvarů, plocha a hran, ve kterých s plochy stýkají.



Obr. 1 Laméovy křivky pro různé hodnoty a a n ($b = 6$)

Pro $n = 2$ je grafem *elipsa* (pro $a = b$ *kružnice*), pokud hodnota n klesá k 1, pak se křivka ve vrcholech „zašpičatuje“ (*subelipsa*, pro $a = b$ *subkružnice*), pro $n = 1$ je grafem *paralelogram* (diamant). V případě, že je hodnota n menší než 1, pak mají strany křivky konkávní tvar (pro $n = 2/3$ je křivkou asteroida), pro $n = 0$ přechází křivka do kříže splývajícího s osami.²⁾

Pro $n > 2$ se strany křivky „zplošťují“ (*superelipsa*, pro $a = b$ *superkružnice*) a křivka se tvarem přibližuje obdélníku (obdélníkem se stává limitním přechodem $n \rightarrow \infty$, obr. 2) [8]. V článku budeme dále pro Laméovy křivky používat označení *superelipsa*, které navrhl P. Hein.³⁾ Hein použil superelipsu v architektuře, návrzích nábytku, šperků, při výrobě keramiky [7]. V 60. letech 20. století byla poměrně populární jím navržená

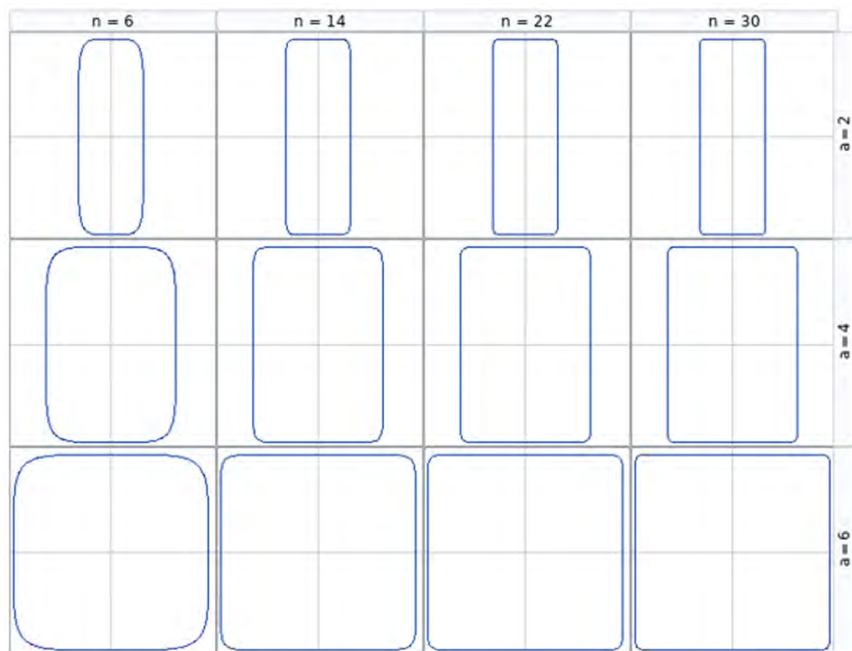
²⁾Křivky lze velmi snadno generovat v různých grafických programech, např. Geogebra apod. Zde uvedené obrázky byly vytvořené programy SAS/STAT (SAS Institut) a Graph (<https://www.stahuj.cz/>), např. na stránce <http://nb.procato.com/superellipse/> lze nalézt program online vykreslující superelipsy vzhledem k zadaným parametrům a určující obvod a obsah křivky.

³⁾Pro subelipsu a superelipsu se v literatuře objevuje rovněž označení hypoelipsa, resp. hyperelipsa. Piet Hein (1905–1996) byl dánský matematik a literát. Superelipsou označil křivku s hodnotou $n = 5/2$ a poměrem délek poloos $a/b = 6/5$, kterou navrhl pro kruhový objezd na obdélníkové náměstí Sergels Torg ve Stockholmu. Tvar superelipsy byl v architektuře použit opakovaně i později (např. Aztécký stadion v Mexico City). Kanadský architekt Gerald Robinson navrhl pro nákupní centrum v Peterborough v Ontariu supereliptické garáže ($a/b = 9/7$, $n = e$).

hračka mající tvar superelipsoidu, který vzniká rotací superelipsy o rovnici

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2,5} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2,5} = 1$$

kolem osy x , kde $a/b = 4/3$ [6].⁴⁾



Obr. 2 Laméovy křivky pro vyšší hodnoty exponentu n ($b = 6$)

Superelipsa není pouhá matematická kuriozita, neboť postupně našla zajímavé použití v některých oblastech aplikované matematiky. Skutečností, v minulosti ovšem často opomíjenou jsou příčné průřezy kmeny stromů, jejichž tvar je jen zřídka kruhový. Výzkumníci zabývající se studiem tvaru příčných průřezů kmeny stromů, přírůstem dřevní hmoty apod. tak nahrazují ve svých modelech kruhový tvar průřezu tvary eliptickými, či dokonce supereliptickými.

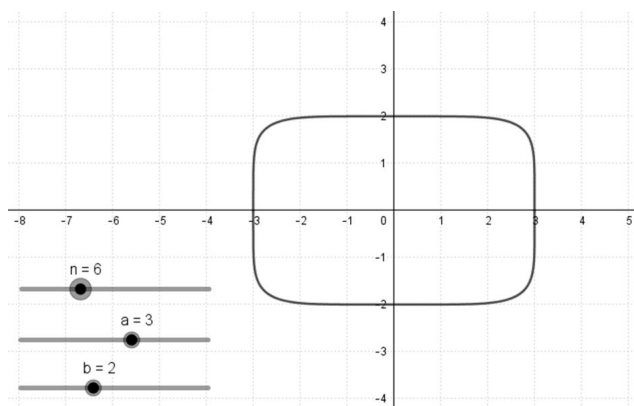
⁴⁾P. Hein navrhl pro superelipsoid název *superegg*.

Modelování superelipsy

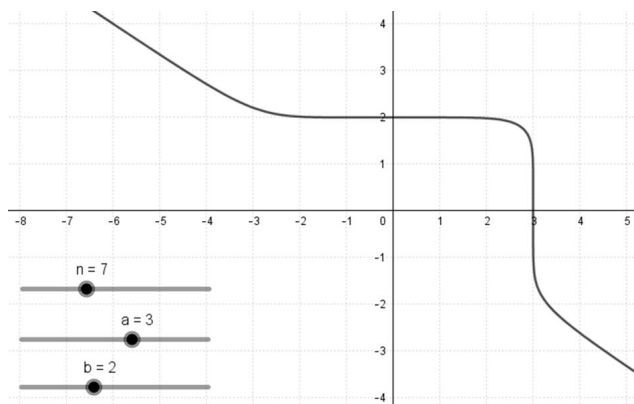
Při modelování superelipsy v Geogebře je možné pro její konstrukci přímo využít implicitní rovnici (1). Pro každou čtvrtinu grafu zapíšeme samostatnou rovnici

$$\left(\pm\frac{x}{a}\right)^n + \left(\pm\frac{y}{b}\right)^n = 1 \quad (2)$$

kde koeficienty a , b a exponent n zadáme pomocí posuvníků. Na obr. 3 si můžeme povšimnout, jak závisí tvar křivky na sudé a liché hodnotě exponentu n .



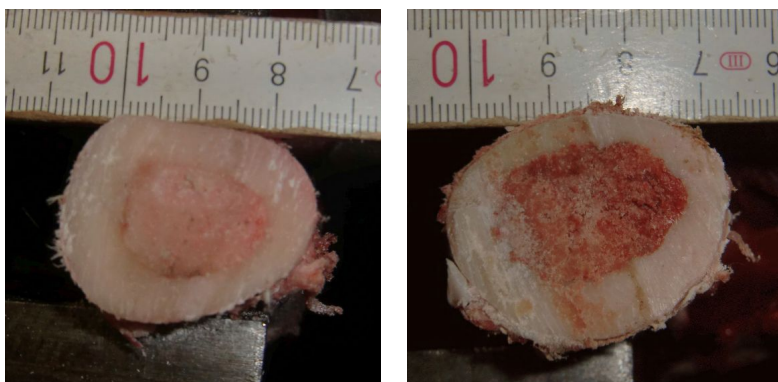
Laméovy křivky pro sudé exponenty (Geogebra)



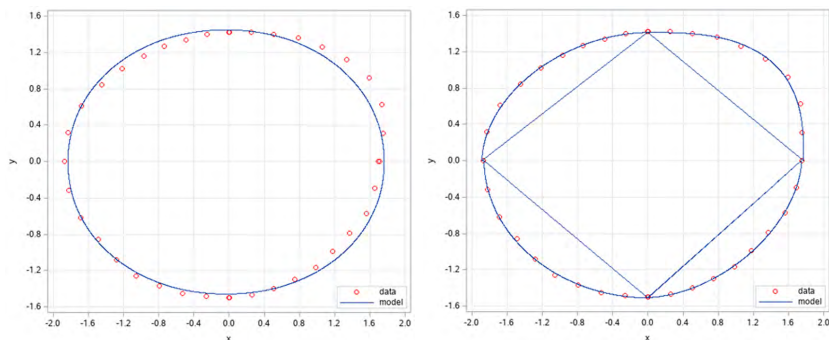
Laméovy křivky pro liché exponenty (Geogebra)

Obr. 3

V úvodu bylo zmíněno použití superelipsy při modelování tvarů stromových letokruhů. My zde jako příklad uvedeme možnost využít superelipsu k modelování tvaru příčných průřezů dlouhých kostí suchozemských obratlovců. Příčné průřezy pažních a stehenních kostí jsou obvykle protažené ve směru osy pohybu zvířete a jejich tvar zhruba odpovídá elipse. Z obr. 4 je zřejmé, že skutečný tvar průřezů se však od elipsy více či méně odchyluje. Zakřivení okraje budeme dále posuzovat použitím superelipsy, pro kterou se pokusíme určit vhodnou hodnotu exponentu n . Jednoduchá superelipsa (obr. 5 vlevo) jako osově souměrná křivka neprokládá dostatečně spolehlivě body v nepravidelných částech okraje řezu kostí, lepší volbou je použít

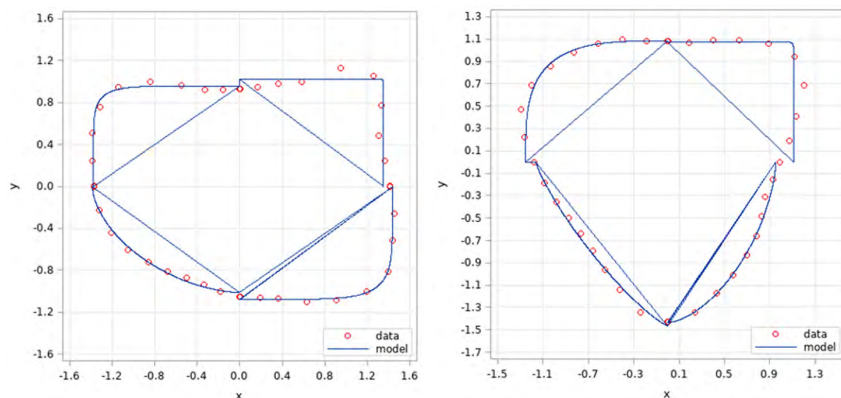


Obr. 4 Příčné řezy středem holenní (vlevo) a pažní kostí jelena lesního (vpravo)



Obr. 5 Model jednoduché superelipsy (vlevo, $n = 2,07$), model skládané superelipsy (vpravo, exponenty řazené po kvadrantech, $n = 2,83$; $n = 1,85$; $n = 1,97$; $n = 1,73$) k příčnému řezu pažní kostí jelena lesního (obr. 4 vpravo)

Využití takto provedeného odhadu tvaru průřezu může např. výrazně zpřesnit výpočet plochy příčného řezu, který se uplatňuje při posuzování napětí ovlivňujícího odolnost kosti proti ohnutí nebo zlomení.⁵⁾ Dlužno dodat, že některé dlouhé kosti mají průřez natolik nepravidelný, že jej model skládané superelipsy nezachytí s dostatečnou přesností (obr. 6).



Obr. 6 Průřez vřetenní kostí modelovaný skládanou superelipsou (jelen, prase)

Obdobně je možné zaznamenat přítomnost supereliptických tvarů v řadě dalších přírodních i uměle vyrobených objektech (viz výše). Z přírodních za zmínku kromě již výše uvedených stojí dále např. průřezy kmeny bambusů (příčné i podélné) či stonky rostlin [2, 3]. Zejména v případě zmíněných stonků supereliptické uspořádání přináší větší stabilitu a odolnost proti případnému ohnutí či zlomení (podobně jako u kostí).

⁵⁾Optimalizace tvaru byla řešena použitím nelineární regrese metodou důvěryhodné oblasti (TRM) s využitím softwaru SAS/STAT (SAS Institut). Oficiální stránky společnosti SAS: https://www.sas.com/cs_cz/home.html. Software lze pro výzkumné a studijní účely používat bezplatně, ke stažení zde: https://www.sas.com/cs_cz/software/university-edition/download-software.html#windows. Na stránkách společnosti je uveden podrobný postup instalace softwaru. Řešení řady problémů softwarem SAS lze nalézt např. na <https://blogs.sas.com/content/iml/>. Výpočet plochy superelipsy není zcela triviální záležitostí, vyžaduje použití tzv. gamma funkce (Γ)

$$S = 4ab \frac{(\Gamma(1 + 1/n))^2}{\Gamma(1 + 2/n)}.$$

K tabelování hodnot gama funkce při výpočtu plochy lze např. použít funkci GAMMA v programu Excel (statistické funkce). Více o vlastnostech gama funkce např. na https://cs.wikipedia.org/wiki/Gama_funkce.

Superformule

Omezená symetrie superelipsy ovšem není příliš vhodná pro modelování složitějších či nepravidelných tvarů. Takovými mohou být např. již zmíněné průřezy některými dlouhými kostmi, ale také stonky a listy rostlin apod., které se výrazně odlišují od eliptických tvarů nebo objekty, které jsou tvořené několika zhruba identickými částmi, tj. projevující určitou míru rotační symetrie. Přitom zejména u rostlin (a v určité míře i živočichů) můžeme takové symetrie jejich tělních částí běžně zaznamenat. Takto můžeme popsat pravidelné (paprsčité souměrné) květy (např. kakost, mochna), dlanitě složené (např. jetel, vlčí bob, jírovec, jahodník) nebo zpeřené (např. jasan) listy, semena (olše) či plody řady rostlinných druhů.

Zajímavý způsob zavedení rotační symetrie do rovnice superelipsy popsal Johan Gielis [2]–[4], který tak navázal na práci G. Lamého. Implicitní tvar rovnice (1) ovšem není vhodným nástrojem, mnohem lepších výsledků dosáhneme použitím polárních souřadnic (ρ, θ) . Do rovnice (1) postupně zavedeme substituci

$$x = \rho(\theta) \cos \theta, \quad y = \rho(\theta) \sin \theta, \quad (3)$$

tedy

$$\left| \frac{\rho(\theta) \cos \theta}{a} \right|^n + \left| \frac{\rho(\theta) \sin \theta}{b} \right|^n = 1$$

po dalších úpravách pak

$$\rho(\theta) = \left(\left| \frac{\cos \theta}{a} \right|^n + \left| \frac{\sin \theta}{b} \right|^n \right)^{-\frac{1}{n}}. \quad (4)$$

kde pro $a \neq b$ získáme polární rovnici *superelipsy*, pro $a = b$ pak polární rovnici *superkružnice*.

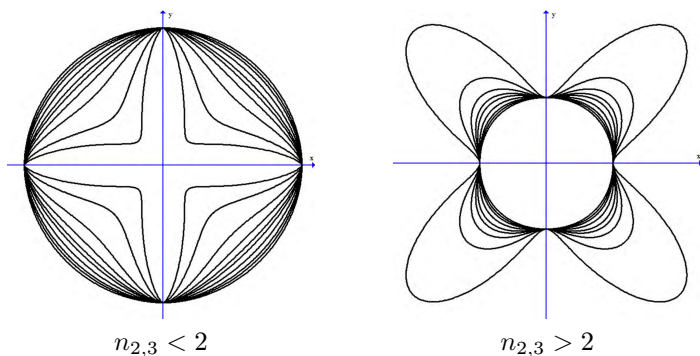
Pokud dále odlišíme v polární rovnici superkružnice ($a = b = 1$) hodnoty jednotlivých exponentů, pak

$$\rho(\theta) = (|\cos \theta|^{n_2} + |\sin \theta|^{n_3})^{-\frac{1}{n_1}}, \quad (5)$$

kde $n_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n_{2,3} \in \mathbb{R}$.

Pro $n_2 = n_3$ a $n_{2,3} < 2$ jsou jednotlivé tvary vepsány do kružnice (obr. 7, vlevo), pro $n_{2,3} > 2$ naopak kružnici opsány (obr. 7, vpravo). Parametr $1/n_1$ působí jako jakási „tahová“ či „tlaková síla“ na jednotlivé strany,

zatímco „kotevní body“ křivek (0° , 90° , 180° , 270°) jsou pevně fixovány ke kružnici (obr. 7).



Obr. 7 Křivky získané z rovnice (5) pro $n_2 = n_3$, $n_1 > 0$

Jestliže do argumentů obou goniometrických funkcí navíc vložíme parametr $m/4$ ($m \in \mathbb{R}$), pak získáme rovnici

$$\rho(\theta) = \left(\left| \frac{1}{a} \cos \left(\frac{m}{4} \theta \right) \right|^{n_2} + \left| \frac{1}{b} \sin \left(\frac{m}{4} \theta \right) \right|^{n_3} \right)^{-\frac{1}{n_1}}, \quad (6)$$

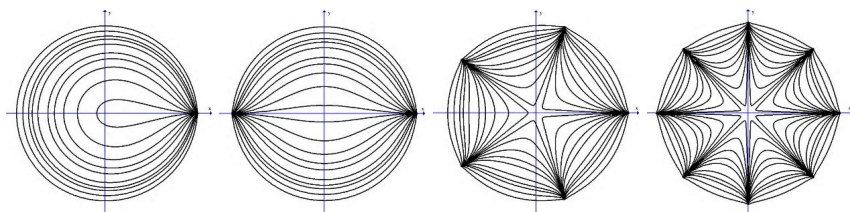
kteřá umožňuje detailnější vyjádření symetrie (obr. 8, 9) než v případě superelipsy, která je omezena na čtyři základní kvadranty.⁶⁾ Z obr. 8, 9 je zřejmé, že hodnota parametru m určuje počet zachovávajících se „kotevních bodů“ a dovoluje rozdělit rovinu do libovolného počtu sektorů. Takto zobecněná rovnice superelipsy byla Johanem Gielisem označena jako superformule.⁷⁾

Rotační symetrie vyplývající z použití parametru $m/4$ definuje *polygony* (vepsané *subpolygony*, obr. 8, popř. opsané *superpolygony*, obr. 9), jejichž vrcholy jsou fixované k základní kružnici, v rozích jsou polygony zašpičatělé nebo naopak zploštělé, strany polygonů jsou přímé, konvexní nebo konkávní.⁸⁾

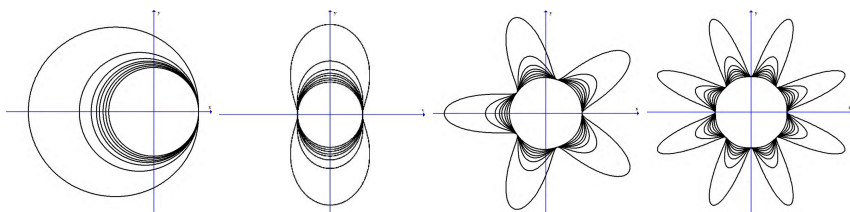
⁶⁾ Hodnota koeficientu m může být pro goniometrické funkce různá, tj. $m_1 \neq m_2$.

⁷⁾ Johan Gielis (1962) je belgický botanik a matematik. V anglicky psané literatuře je superformule označovaná jako *Superformula*, *Gielis Formula* nebo *Gielis Superformula*.

⁸⁾ Uvážením Gielisovy transformace lze pojem mnohoúhelníku chápat obecněji. Pokud počet kotevních bodů sub- a superpolygonů ztotožníme s počtem vnitřních úhlů, pak lze dodatečně zavést pojmy nulaúhelník (zerogon), jednoúhelník (monogon) a dvojuhelník (diagon). Na druhou stranu vzhledem k tomu, že podle obecného vzorce pro výpočet

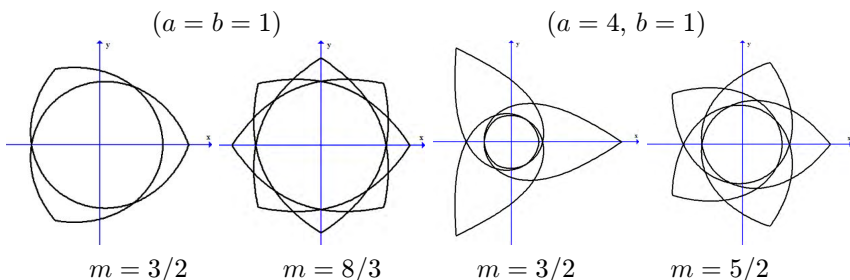


Obr. 8 Křivky (subpolygony) získané z rovnice (6) pro $a = b = 1$ a různé hodnoty parametru symetrie m ($m = 1, 2, 5, 8$), $n_{2,3} < 2$, $n_1 > 0$ (upraveno podle [3])



Obr. 9 Křivky (superpolygony) získané z rovnice (6) pro $a = b = 1$ a pro různé hodnoty parametru symetrie m ($m = 1, 2, 5, 8$), $n_{2,3} > 2$, $n_1 > 0$

Jestliže je hodnota čísla m zlomková ($m = p/q$), pak se tvar neuzavírá po jedné otáčce, nýbrž po q rotacích. Tak např. pro $m = 8/3$ se tvar uzavírá po třech rotacích (6π). Gielis [3] označil takto vznikající tvary jako *superpolygramy* (obr. 10). Na obr. 11 příklady přírodnin odpovídajících křivkám určeným rovnicí (6).



Obr. 10 Křivky (superpolygramy) pro racionální hodnoty parametru symetrie m ($n_{1,2,3} = 1$)

plochy pravidelného polygonu $S = mr^2 \operatorname{tg}(\pi/m)$, pro uvedené polygony nelze stanovit velikost jejich plochy, nebudeme je z pohledu běžné geometrie za polygony považovat.



Obr. 11 Přírodní modely polygonů a polygramů (cibule, netřesk)

Transformace rovinných křivek

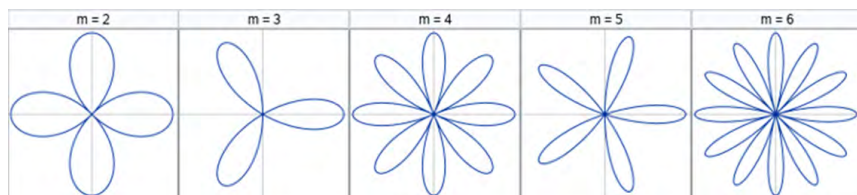
Jak bylo ukázáno výše, superrovnice umožňuje transformovat elipsu do množiny sub- a superelips. Použitím superrovnice lze dále libovolnou kladnou reálnou funkci určenou polární rovnicí $f(\theta)$ transformovat do polární rovnice (tzv. Gielisova transformace) [3]

$$\rho(\theta) = f(\theta) \left(\left| \frac{1}{a} \cos \left(\frac{m}{4} \theta \right) \right|^{n_2} + \left| \frac{1}{b} \sin \left(\frac{m}{4} \theta \right) \right|^{n_3} \right)^{-\frac{1}{n_1}}, \quad (7)$$

která zavádí rotační symetrii funkce $f(\theta)$. Vhodnými kandidáty pro zmíněné transformace jsou zejména trigonometrické funkce a spirály.

Protože se v další části zaměříme zejména na modelování tvarů květů a listů rostlin, vyjdeme z polární rovnice křivky označované jako *Grandiho růžice* (*rhodonea*)⁹⁾

$$f(\theta) = \cos(m\theta). \quad (8)$$



Obr. 12 Modely Grandiho růžice

⁹⁾Křivku objevil mezi lety 1723 až 1728 italský matematik Guido Grandi (1671–1742). V anglicky psané literatuře je křivka označovaná jako *Rose curve*, *Rhodonea curve*, *Grandi curve*. Alternativně lze pro vyjádření křivky použít rovnici $f(\theta) = \sin(m\theta)$. Více o vlastnostech křivky např. <http://mathworld.wolfram.com/Rose.html>.

Tato křivka vytváří v rovině množinu tvarů tvořených shodnými částmi, jejichž počet závisí na hodnotě parametru m . Křivku pro liché m tvoří m „okvětních lístků“ a $2m$ „okvětních lístků“ pro sudé m (obr. 12).¹⁰⁾

Modelování tvaru květů

Jak korunní či okvětní plátky rostlin (obr. 16), tak listy rostlin obvykle nejsou jednoduše tvarově srovnatelné s modely *Grandiho růžice* (obr. 12). Použití Gielisovy transformace nalezením odpovídajících hodnot parametrů umožňuje modelovat různě složité tvary vyjadřující jak určitý stupeň rotační symetrie, tak rozmanitý tvar a velikost jednotlivých lístků.

Pokud na rovnici Grandiho růžice aplikujeme Gielisovu transformaci, pak získáme rovnici [2, 3]

$$\rho(\theta) = \left| \cos\left(\frac{m}{2}\theta\right) \right|^{\frac{1}{n_4}} \left(\left| \frac{1}{a} \cos\left(\frac{m}{2}\theta\right) \right|^{n_2} + \left| \frac{1}{b} \sin\left(\frac{m}{2}\theta\right) \right|^{n_3} \right)^{-\frac{1}{n_1}}. \quad (9)$$

V důsledku použití absolutní hodnoty křivku tvoří m okvětních lístků pro liché i sudé m (obr. 13), hodnota exponentu $n_4 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ovlivňuje jejich tvar (obr. 14).

SAS program (SAS/STAT) modelující Grandiho křivky (rhodonea) znázorněné na obr. 13–15 je tento:

```
data Rhodonea;
n = 1;
do m = 2 to 6 by 1;
do theta = 0 to 2*constant("pi") by 0.01;
r = cos(m*theta);
x = r*cos(theta);
y = r*sin(theta);
output;
end;
end;
run;

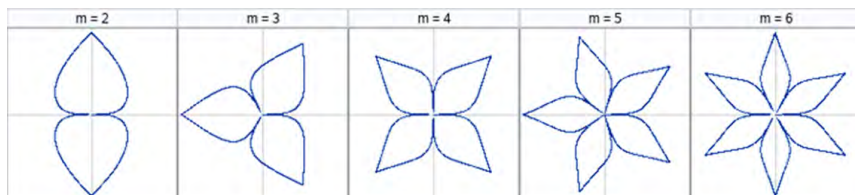
ods graphics / width=800px height=400px;
proc sgpanel data=Rhodonea aspect=1 noautolegend;
styleattrs datacontrastcolors=(crimson green);
panelby m n/ layout=lattice onepanel;
```

¹⁰⁾V anglicky psané literatuře jsou „okvětní lístky“ označovány jako *petala*.

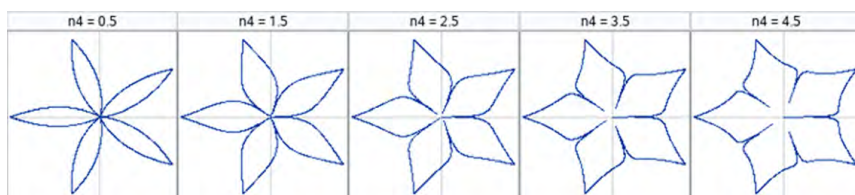
```

refline 0 / axis=x transparency=0.5;
refline 0 / axis=y transparency=0.5;
series x=x y=y;
colaxis display=none;
rowaxis display=none;
run;

```

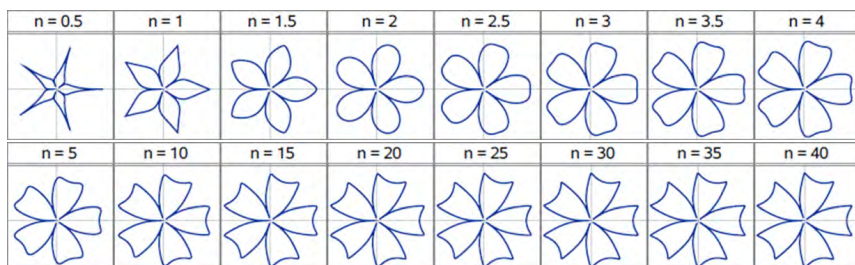


Obr. 13 Gielisovy transformace Grandiho růžice ($n_1 = n_2 = n_3 = 1$, $n_4 = 2$, $a = b = 1$)



Obr. 14 Gielisovy transformace Grandiho růžice ($n_1 = n_2 = n_3 = 1$, $a = b = 1$)

Na obr. 15 zaznamenáme postupnou změnu tvaru „superkvětů“ s rostoucí hodnotou exponentů n_1 , n_2 , n_3 (pro zjednodušení voleno $n = n_1 = n_2 = n_3$).



Obr. 15 Gielisovy transformace Grandiho růžice ($m = 5$, $n_1 = n_2 = n_3 = n$, $n_4 = 2$, $a = b = 1$)

Příkladů dokládajících přítomnost tvarů odpovídajících transformacím Grandiho růžice existuje nespočet (obr. 16). Fascinující na této záležitosti je však zejména relativní jednoduchost rovnice, která jednotlivé tvary vytváří a omezený počet parametrů, jejichž hodnoty popisovaný či hledaný tvar určují.



Obr. 16 Přírozené variace pětičetné Grandiho růžice (zleva: brutnák, dýně, zvonek, kakost)

Modelování superformule v Geogebře

Výpočet přesných hodnot parametrů superformule modelující konkrétní tvary květů či listů rostlin by vyžadoval použití metod, které svou složitostí přesahují záměr článku, my si můžeme alespoň vyzkoušet odhad parametrů modelováním v Geogebře.

Model vytvoříme pomocí polární rovnice (9), kde parametry modelu m , a , b , n_1 , n_2 , n_3 , n_4 budou představovány posuvníky. Model je dále nutné transformovat do kartézských souřadnic, z matematických funkcí tedy zvolíme položku:

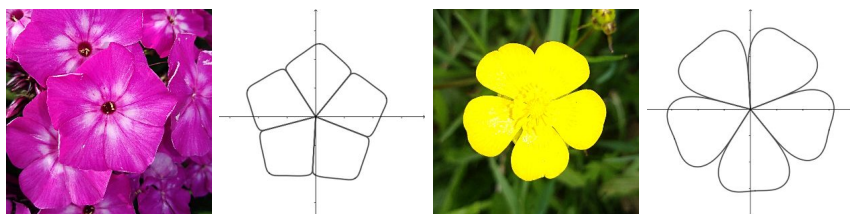
$$\text{Krivka } (<\text{Výraz}>, <\text{Výraz}>, <\text{Parametr proměnné}>, \\ <\text{Počáteční hodnota}>, <\text{Koncová hodnota}>),$$

do které vložíme výrazy $(\rho(t) * \cos(t), \rho(t) * \sin(t))$, parametr proměnné (t) , počáteční (0) a koncovou hodnotu (2π) . V případě potřeby je možné do výrazů doplnit další parametr

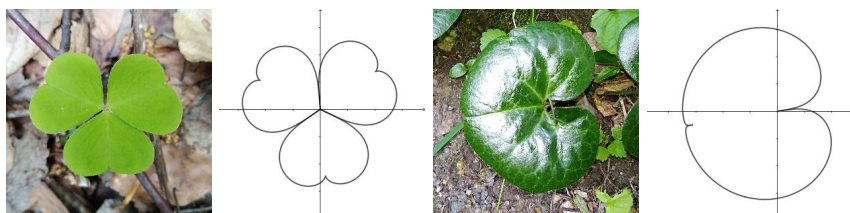
$$\rho(t) * \cos(t + \alpha), \rho(t) * \sin(t + \alpha),$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$ je parametr umožňující rotaci modelu kolem středu.

Na obr. 17 a 18 jsou příklady modelů jednoduchých květů a listů zobrazených v Geogebře.



Obr. 17 Květy a jejich modely v Geogebře (plaménka¹¹⁾, pryskyřník¹²⁾)



Obr. 18 Listy a jejich modely v Geogebře (šťavel¹³⁾, kopytník¹⁴⁾)

Rovnici (7) lze modifikovat mnoha způsoby a dosáhnout tak požadovaného tvaru. Nabízí se např.:

- Použití racionální hodnoty parametru m nebo rozlišení hodnoty parametru $m_1 \neq m_2$ v argumentech trigonometrických funkcí (např. rožec, obr. 19)

$$\rho(\theta) = f(\theta) \left(\left| \frac{1}{a} \cos \left(\frac{m_1}{2} \theta \right) \right|^{n_2} + \left| \frac{1}{b} \sin \left(\frac{m_2}{2} \theta \right) \right|^{n_3} \right)^{-\frac{1}{n_1}}. \quad (10)$$

- Doplněním parametru δ do argumentu trigonometrických funkcí (např. tabák, obr. 19)

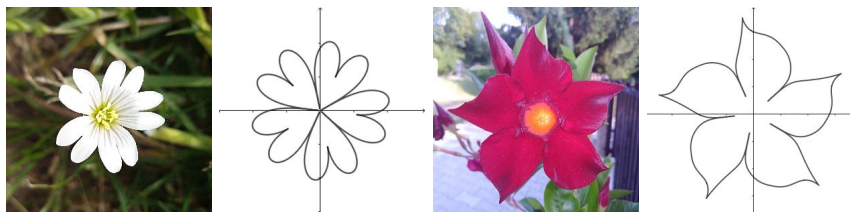
$$\rho(\theta) = f(\theta) \left(\left| \frac{1}{a} \cos \left(\frac{m}{2} (\theta + \delta_1) \right) \right|^{n_2} + \left| \frac{1}{b} \sin \left(\frac{m}{2} (\theta + \delta_2) \right) \right|^{n_3} \right)^{-\frac{1}{n_1}}. \quad (11)$$

¹¹⁾Použité parametry rovnice (9): $m = 5$, $n_2 = n_3 = 2,5$, $n_1 = 20$, $n_4 = 50$.

¹²⁾Použité parametry rovnice (9): $m = 5$, $n_2 = 0$, $n_3 = 2$, $n_1 = -4$, $n_4 = 4,5$.

¹³⁾Použité parametry rovnice (9): $m = 3$, $n_2 = n_3 = 0,5$, $n_1 = -5$, $n_4 = 3$.

¹⁴⁾Použité parametry rovnice (9): $m = 1$, $n_2 = 1$, $n_3 = -0,2$, $n_1 = 16$, $n_4 = 2,5$.



Obr. 19 Modely květů v Geogebře (rožec¹⁵⁾, tabák¹⁶⁾)

Závěr

Článek poukázal na méně známou oblast matematiky týkající se zobecněného pojmu elipsy, který byl zaveden již na počátku 19. století a který by patrně zůstal dále nepovšimnut nebýt příspěvní dánského matematika a vynálezce Pieta Heina a belgického botanika Johana Gielise. Přestože zejména Gielisova práce je poměrně nedávného data, našla jak v matematice samotné (např. numerické metody řešení parciálních diferenciálních rovnic, 3D modely), tak mimo matematiku již řadu zajímavých uplatnění, z nichž některá byla v článku zmíněna a další se postupně objevují (např. modely v buněčné biologii, výpočty trajektorií částic ve fyzice kapalin a další [10]). Dodejme rovněž, že teoretický výzkum vlastností Gielisovy superformule je příležitostí pro zájemce o geometrii křivek a matematiku obecně.

Ukončeme toto stručné pojednání citátem jednoho z největších myslitelů počátku novověku Galilea Galileiho: „Ve velké knize přírody může číst jen ten, kdo zná jazyk, v němž je napsána a tímto jazykem je matematika“ [11].

Literatura

- [1] *Bellos, A.*: Alexova dobrodružství v zemi čísel. Dokořán, Praha, 2015.
- [2] *Gielis, J.*: Inventing the circle. The geometry of nature. Geniaal Publishers. Antwerp, 2003.
- [3] *Gielis, J.*: The Geometrical Beauty of Plants. Atlantis Press, Paris, 2017.
- [4] *Gielis, J.*: A generic geometric transformation that unifies a wide range of natural and abstract shapes. American Journal of Botany, roč. 90 (2003), č. 3, s. 333–338.

¹⁵⁾Použité parametry rovnice (10): $f(\theta) = 1$, $m_1 = 5$, $m_2 = 10$, $b = a/2$.

¹⁶⁾Použité parametry rovnice (11): $f(\theta) = \cos(5\theta/2 + 0,6)$, $a = 2$, $b = 3$, $\delta_1 = -0,2$, $\delta_2 = -2,6$

- [5] *Spíchal, L.*: Modeling the cross-sectional shape of the long bones using the superellipse. Matematika, informační technologie a aplikované vědy (MITAV 2019). Brno, Univerzita obrany, 2019.
- [6] *Pickover, C. A.*: The Math Book: From Pythagoras to the 57th Dimension, 250 Milestones in the History of Mathematics. Sterling Publishing Company, Inc., 2009.
- [7] *Gridgeman, N. T.*: Lamé ovals. The Mathematical Gazette, roč. 54 (1970), č. 387, s. 31–137.
- [8] *Gardner, M.*: The “superellipse”: a curve that lies between the ellipse and the rectangle. Scientific American, roč. 213 (1965), č. 3, s. 222–238.
- [9] *Wicklin, R.*: The spiral of splatter. Dostupné z: <https://blogs.sas.com/content/iml/2015/06/11/spiral-of-splatter.html>
- [10] *Matsuura, M.*: Gielis’ superformula and regular polygons. Journal of Geometry, roč. 106 (2015), s. 383–403.
- [11] *Devlin, K.*: Jazyk matematiky. Jak zviditelnit neviditelné. Dokořán, Praha, 2011.

Nejlevnější vaření

(Úlohy z MO kategorie P, 39. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V dalším pokračování dlouhodobého seriálu článků o úlohách z Matematické olympiády kategorie P (programování) vám představíme úlohu z krajského kola předložského 67. ročníku MO (školní rok 2017/18). Úloha na první pohled pojednává o tom, jak nejlépe zkombinovat kuchařské recepty, abychom získali co nejlevněji požadované jídlo. Při její hlubší analýze ale zjistíme, že se vlastně jedná o grafový problém a při jeho řešení skutečně použijeme modifikace obecně známých algoritmů na hledání nejkratší cesty v grafu. Jako obvykle se nejprve seznámíme s přesným zadáním.

* * * * *

Honza se rozhodl, že si uvaří večeři. Jeho kuchařské schopnosti jsou ale značně omezené. Zvládá používat jen velmi jednoduché recepty, podle nichž ze dvou jídel vznikne nějaké třetí. Navíc nemá moc peněz, a tak by byl rád, kdyby ho celé vaření stálo co nejméně.

Soutěžní úloha

Existuje n druhů jídla. Pro potřeby této úlohy si je očíslováme od 1 do n . Honza chce připravit jednu porci jídla číslo 1. Každé jídlo lze přímo koupit v obchodě. Jedna porce jídla číslo i má v obchodě cenu c_i . Od každého druhu jídla je možné koupit libovolný počet porcí.

Honza má kuchařskou knihu, která obsahuje r jednoduchých receptů. Každý z receptů má následující tvar: „Z jedné porce jídla s_i a jedné porce jídla t_i připravíš jednu porci jídla u_i .“

Napište program, který spočítá, za jakou nejnižší cenu lze získat jednu porci jídla číslo 1.

Formát vstupu a výstupu

Na prvním řádku vstupu jsou čísla n a r : počet druhů jídla a počet receptů. Na druhém řádku je n kladných celých čísel $c_1, \dots, c_n$: obchodní cena jedné porce pro každé jídlo. Zbytek vstupu tvoří r řádků, z nichž každý má tvar s_i, t_i, u_i a popisuje jeden recept.

Program vypíše jedno číslo: nejmenší dosažitelnou cenu jedné porce jídla číslo 1.

Omezení a hodnocení

Za libovolné správné řešení získáte alespoň 4 body. Za libovolné správné řešení, jehož časová složitost je polynomiální vzhledem k n a r , které obsahuje také korektní důkaz správnosti, získáte alespoň 7 bodů.

Vzorové řešení vyřeší efektivně libovolný vstup, pro který platí $1 \leq n \leq 100\,000$, $0 \leq r \leq 100\,000$.

Příklady

Vstup:	Výstup:
5 3	22
47 1 10 20 4700	
4 5 1	
2 3 4	
3 2 5	

Kdyby Honza přímo koupil jednu porci jídla číslo 1, stálo by ho to 47. Existují ale levnější postupy. Nejlepší z nich vypadá takto: Za $1+1+10+10$ koupí Honza dvě porce jídla 2 a dvě porce jídla 3. Potom z jedné dvojice jídel 2 a 3 uvaří jídlo 4 a z druhé dvojice uvaří jídlo 5. Na závěr z jedné porce jídla 4 a jedné porce jídla 5 uvaří požadované jídlo 1.

Vstup:	Výstup:
4 3	80
1000 1000 1000 10	
2 2 1	
3 3 2	
4 4 3	

Tentokrát je nejlepší jednu porci jídla číslo 1 postupně uvařit z osmi porcí jídla číslo 4.

* * * * *

Ačkoliv to není na první pohled úplně zřejmé, k řešení úlohy lze využít postupy přímo inspirované standardními grafovými algoritmy na hledání nejkratší cesty v ohodnoceném grafu. Postupně si ukážeme tři různé postupy, které se liší svou časovou efektivitou.

Začneme úplně primitivním řešením, kterým je zkoušení všech možností. Pokud bychom už znali optimální cenu jedné porce každého jídla a všechna jídla bychom si podle této ceny uspořádali vzestupně, pak k přípravě každého jídla budeme jistě používat pouze jídla umístěná před ním, tzn. jídla s nižší cenou. V takovém případě by byl výpočet jednoduchý – procházeli bychom jídla v pořadí zleva doprava a rovnou bychom počítali jejich výsledné ceny. Optimální cenou každého jídla je buď jeho kupní cena, nebo je to cena získaná podle některého receptu, v němž již známe optimální ceny obou vstupů.

Jediný problém tohoto řešení spočívá v tom, že správné pořadí jídel neznáme. Můžeme ale vyzkoušet všech $n!$ různých pořadí a pro každé z nich použít výše uvedený postup. Mezi všemi způsoby uspořádání jídel je jistě i ten správný (nemusí být jediný), pro který dostaneme optimální cenu jídla číslo 1. Výsledkem úlohy je tedy nejnižší cena jídla číslo 1 ze všech možností, které získáme pro jednotlivá pořadí jídel.

Popsané řešení je sice zaručeně správné, ale velmi neefektivní. Zkusíme proto nalézt jiný postup s polynomiální časovou složitostí. Inspirací pro nás bude Bellmanův–Fordův algoritmus na určení délky nejkratší cesty v hranově ohodnoceném grafu ze zadaného startovního vrcholu do všech

ostatních vrcholů grafu. Připomeneme si nejprve ve stručnosti a bez důkazu správnosti, jak tento algoritmus funguje. Pro každý vrchol v počítáme hodnotu h_v představující délku dosud nejkratší nalezené cesty ze startovního vrcholu do vrcholu v . Na začátku výpočtu má startovní vrchol hodnotu 0 a všechny ostatní vrcholy hodnotu ∞ (nekonečno). Hodnoty vrcholů budeme opakovaně přepočítávat a zlepšovat, tzn. snižovat, dokud to půjde. V každém kroku výpočtu projdeme všechny hrany grafu (v libovolném pořadí) a pro každou hranu (u, v) se pokusíme zlepšit hodnotu h_v tím, že bychom šli do vrcholu v z vrcholu u touto hranou. Pokud bude platit $h_u + |(u, v)| < h_v$, hodnotu h_v patřičně snížíme. Výpočet ukončíme ve chvíli, když už se v některém kroku výpočtu hodnota žádného vrcholu nezmění. V grafu bez záporných cyklů k tomu dojde nejpozději po $n - 1$ krocích, kde n je počet vrcholů grafu. Pokud se i v n -tém kroku výpočtu některá hodnota vrcholu sníží, v grafu jistě existuje záporný cyklus a úloha hledání nejkratší cesty v takovém případě nemá smysl. Časová složitost popsaného algoritmu je $O(n \cdot m)$, kde n je počet vrcholů a m je počet hran grafu.

Při řešení naší úlohy o vaření budeme postupovat obdobně. Jídla zde odpovídají vrcholům grafu a jejich hodnotou bude nejlepší cena, za jakou jídlo zatím dokážeme získat. Počáteční hodnotu každého jídla nastavíme na jeho kupní cenu. V následujících krocích výpočtu budeme opakovaně procházet seznam všech receptů a pro každý z nich vždy zkontrolujeme, zda pomocí něho můžeme zlepšit (tzn. snížit) hodnotu toho jídla, které se receptem vytváří. Pro recept $(s \ t \ u)$ se tedy ptáme, zda $h_s + h_t < h_u$. Pokud ano, hodnotu h_u snížíme na $h_s + h_t$. Výpočet ukončíme, když se v některém kroku výpočtu hodnota žádného jídla nezmění. K tomu dojde nejpozději po $n - 1$ krocích.

Ukážeme, proč popsaný algoritmus skutečně funguje, a že po $n - 1$ krocích udávají hodnoty všech jídel optimální cenu, za jakou lze tato jídla získat. Představme si opět, že máme všechna jídla seřazena podle jejich optimální ceny. Hodnoty jídel jsou na počátku rovny jejich kupním cenám. Hodnota prvního, tzn. nejlevnějšího jídla se hned na začátku výpočtu rovná jeho optimální ceně, neboť nejlevnější jídlo se nikdy nevyplatí vařit podle receptu z dražších surovin. Při každém průchodu všemi recepty získáme optimální cenu alespoň jednoho dalšího jídla v našem pořadí. Zdůvodnění je podobné, jako v prvním uvedeném řešení úlohy. Při průchodu všemi recepty vyzkoušíme mimo jiné také všechny způsoby, jak lze toto jídlo uvařit z jídel, která jsou levnější a pro která už známe optimální

cenu. Po $n - 1$ průchodech všemi recepty proto budeme znát optimální ceny všech jídel.

Pro některá vstupní data můžeme získat optimální cenu více jídel při jednom průchodu seznamem receptů. Výsledné ceny všech jídel v takovém případě dostaneme dokonce po méně než $n - 1$ krocích výpočtu. Výpočet lze tedy v některých případech urychlit tím, že nebudeme vždy provádět plných $n - 1$ průchodů seznamem receptů, ale skončíme ve chvíli, když se při některém průchodu hodnota žádného jídla nezmění. Zjevně by se totiž žádná hodnota nezměnila ani v případě, že bychom další průchody prováděli.

Popsaný algoritmus má časovou složitost v nejhorším případě $O(n \cdot r)$, kde n je počet jídel a r je počet receptů. Provádí totiž nejvýše $n - 1$ kroků výpočtu a každý z nich má složitost $O(r)$ odpovídající průchodu seznamem všech r receptů.

```
Varenil; {Bellman-Ford}
```

```
const MaxN = 100000; MaxR = 100000;
var N, R: integer; {počet jídel a receptů}
    H: array [1..MaxN] of integer; {hodnoty jídel}
    S: array [1..MaxR, 1..3] of integer; {recepty}
    i: integer;
    Zmena: boolean;

begin
  readln(N, R);
  for i := 1 to N do read(H[i]);
  for i := 1 to R do read(S[i,1], S[i,2], S[i,3]);
  Zmena := true;
  while Zmena do
    begin
      Zmena := false;
      for i := 1 to R do
        if H[S[i,1]] + H[S[i,2]] < H[S[i,3]] then
          begin
            H[S[i,3]] := H[S[i,1]] + H[S[i,2]];
            Zmena := true;
          end;
        end;
      end;
  writeln(H[1])
end.
```

Výše uvedené řešení má již sice polynomiální časovou složitost, ale je stále ještě dost pomalé. Důvodem je skutečnost, že v každém kroku výpočtu zbytečně procházíme úplně všechny recepty, ačkoliv mnohé z nich nám v tu chvíli nijak nepomohou: u některých receptů dosud neznáme optimální ceny vstupů, jiné recepty jsme zase již s aktuálními hodnotami vstupů použili v některém z předchozích kroků. Algoritmus proto upravíme tak, abychom v každém kroku použili pouze ty recepty, které nám mohou přinést nějaký užitek, a přitom abychom nadále v každém kroku získali optimální cenu jednoho dalšího jídla.

Upravený algoritmus je založen na podobné myšlence, jako Dijkstrův algoritmus na určení délky nejkratší cesty v ohodnoceném grafu. Velmi stručně si opět připomeneme, jak Dijkstrův algoritmus pracuje a čím se liší od Bellmanova–Fordova algoritmu. Začátek je u obou těchto algoritmů stejný: pro každý uzel grafu v budeme počítat hodnotu h_v udávající délku dosud nejkratší nalezené cesty ze startovního vrcholu do vrcholu v . Stejná je rovněž inicializace těchto hodnot – startovní vrchol má počáteční hodnotu 0 a všechny ostatní vrcholy hodnotu ∞ (nekonečno). Také nyní budeme hodnoty h_v opakovaně přepočítávat a zlepšovat. V Dijkstrově algoritmu ovšem budeme navíc rozlišovat, která hodnota h_v je dočasná (tzn. možná ji v budoucnu ještě snížíme) a která už je trvalá (je už zaručeně rovna nejkratší vzdálenosti ze startovního vrcholu do vrcholu v). Na začátku výpočtu označíme všechny hodnoty jako dočasné. Dočasná hodnota h_v bude vždy určovat délku nejkratší cesty ze startovního vrcholu do vrcholu v , pokud jdeme pouze přes ty vrcholy, které již mají trvalou hodnotu.

V každém kroku výpočtu najdeme vrchol u s nejmenší dočasnou hodnotou a jeho hodnotu prohlásíme za trvalou. Pro každou hranu (u, v) vedoucí z vrcholu u do dočasného vrcholu v se potom pokusíme zlepšit hodnotu h_v tím, že bychom šli do vrcholu v z vrcholu u touto hranou. Pokud bude platit $h_u + |(u, v)| < h_v$, hodnotu h_v patřičně snížíme. Jak sami vidíte, přepočítávání hodnot vrcholů se provádí v obou algoritmech shodným způsobem, liší se pouze pořadí, v jakém tyto hodnoty přepočítáváme. V Dijkstrově algoritmu se těchto výpočtů provádí podstatně méně. Podmínkou jeho fungování ovšem je, aby ohodnocení všech hran grafu bylo nezáporné (což zpravidla bývá). V každém kroku výpočtu se jedna hodnota h_u stane trvalou, takže po n krocích výpočtu budou všechny trvalé, tzn. budeme znát nejkratší vzdálenosti ze startovního do všech ostatních vrcholů grafu.

Časová složitost závisí na způsobu uložení grafu a na konkrétní im-

plementaci algoritmu. V případě jednoduchého uložení hodnot h_v v poli dostáváme časovou složitost $O(n^2 + m)$ čili $O(n^2)$, neboť počet hran m je jistě menší než n^2 . Použití haldy pro uložení počítaných dočasných hodnot vede k časové složitosti $O(n \cdot \log n + m \cdot \log n)$, což je lepší výsledek pro grafy s velkým počtem vrcholů a relativně malým počtem hran. Podrobnější popis obou algoritmů na určení nejkratší vzdálenosti v grafu včetně důkazů jejich správnosti a odvození časové složitosti najdete v každé publikaci o teorii grafů.

My se nyní ale vrátíme zpět k naší původní úloze o vaření. Podobně jako v předchozím řešení budeme postupně počítat hodnoty všech jídel. Na začátku výpočtu dokážeme každé jídlo pořídit za jeho kupní cenu – to tedy budou počáteční hodnoty všech jídel. Všechny si označíme jako dočasné, neboť možná je ještě zlepšíme. Stejně jako v Dijkstrově algoritmu bude výpočet probíhat v n krocích, přičemž v každém kroku hodnotu jednoho jídla prohlásíme za trvalou – to bude optimální cena tohoto jídla. Výpočet skončí ve chvíli, až budeme znát trvalé hodnoty všech n jídel. Během výpočtu bude stále platit, že h_v je nejmenší dosažitelná hodnota jídla v , pokud toto jídlo buď přímo koupíme, nebo ho připravíme podle receptů z těch jídel, která už mají trvalou hodnotu.

Ukážeme si, jak vypadá jeden krok výpočtu. Bude velmi podobný jako v Dijkstrově algoritmu. Najdeme jídlo s s nejmenší dočasnou hodnotou h_s a tuto hodnotu prohlásíme za trvalou. Můžeme si to dovolit, neboť za nižší cenu nedokážeme koupit ani uvařit žádné jiné jídlo s dočasnou hodnotou, které by mohlo posloužit jako surovina pro přípravu jídla s . Když jsme získali nové jídlo s trvalou hodnotou, musíme zkontrolovat a případně zlepšit dočasné hodnoty všech jídel, která můžeme z jídla s uvařit. Projdeme tedy všechny recepty typu (stu) , v nichž je jídlo s jednou ze surovin, a je-li $h_s + h_t < h_u$, snížíme hodnotu h_u na $h_s + h_t$. Každý recept tedy použijeme pouze dvakrát – vždy, když jedna z jeho dvou surovin získá trvalou hodnotu.

Technicky potřebujeme vyřešit ještě dvě věci. První z nich je vhodné uložení receptů. Ke zvolenému jídlu potřebujeme projít jenom ty recepty, v nichž se toto jídlo využívá jako surovina, nechceme procházet všechny recepty. To vyřešíme snadno, stačí uložit si recepty do samostatných seznamů podle surovin. Pro každé jídlo tedy budeme mít seznam těch receptů, v nichž je toto jídlo jednou ze surovin. Každý recept bude samozřejmě uložen ve dvou takových seznamech, neboť má dvě suroviny. Druhou věcí je vhodné uložení hodnot jídel. V každém kroku výpočtu potřebujeme na-

lézt jídlo s nejmenší dočasnou hodnotou. To lze udělat jednoduše tak, že projdeme všech n jídel a porovnáme jejich hodnoty uložené v poli. Takové řešení bude mít časovou složitost $O(n^2 + r)$ neboli $O(n^2)$, neboť každý z n kroků výpočtu potřebuje čas $O(n)$ na určení jídla s nejmenší dočasnou hodnotou a každý z r receptů se během celého výpočtu použije pouze dvakrát. Jinou možností je podobně jako při implementaci Dijkstrova algoritmu použít k uložení dočasných hodnot jídel haldy. Určení jídla s nejmenší dočasnou hodnotou má pak konstantní časovou složitost, odstranění této hodnoty z haldy má složitost $O(\log n)$ a provádí se n -krát, přepočítání dočasné hodnoty každého z jídel zvládneme také v čase $O(\log n)$ a takových změn se za celý výpočet provede $O(r)$. Celková časová složitost výpočtu tak vychází na $O(n \cdot \log n + r \cdot \log n)$.

Popsaný algoritmus můžeme ještě mírně zrychlit tím, že předčasně ukončíme výpočet ve chvíli, kdy jídlo číslo 1 získá trvalou hodnotu. V tom okamžiku známe výslednou optimální cenu jídla číslo 1 a nemusíme již dopočítávat optimální ceny zbývajících jídel. Časová složitost algoritmu v nejhorším případě se tím ovšem nijak nezmění, jelikož jídlo číslo 1 může získat trvalou hodnotu až jako posledních ze všech jídel po provedení plných n kroků výpočtu. V průměru se ale doba výpočtu zkrátí.

V následující programové ukázce jsme zvolili jednodušší implementaci algoritmu bez použití haldy, tzn. řešení s časovou složitostí $O(n^2)$. Recepty ukládáme do dynamicky alokovaných lineárních spojových seznamů rozdělené podle jednotlivých surovin a výpočet ukončíme, jakmile získá jídlo číslo 1 trvalou hodnotu.

```

program Vareni2; {Dijkstra - bez haldy}

const MaxN = 100000;

type pRecept = ^Recept;
      Recept = record
          surovina, vysledek: integer;
          dalsi: pRecept
      end;

var N, R: integer;                                {počet jídel a receptů}
    H: array [1..MaxN] of integer;                {hodnoty jídel, záporné = trvalé}
    S: array [1..MaxN] of pRecept;                {recepty rozdělené podle surovin}

```

```

    S1, S2, S3: integer;
    P: pRecept;
    i, j: integer;

begin
    readln(N, R);
    for i := 1 to N do
        begin
            read(T, H[i]);
            S[i] := nil
        end;
    for i := 1 to R do
        begin
            read(S1, S2, S3);
            new(P);
            P^.surovina := S2; P^.vysledek := S3;
            P^.dalsi := S[S1]; S[S1] := P;
            new(P);
            P^.surovina := S1; P^.vysledek := S3;
            P^.dalsi := S[S2]; S[S2] := P;
        end;

    while H[1] > 0 do    {jídlo číslo 1 má dočasnou hodnotu}
        begin
            j := 1;
            for i := 2 to N do
                if (H[i] > 0) and (H[i] < H[j]) then j := i;
                {j = jídlo s nejmenší dočasnou hodnotou}
            H[j] := -H[j];    {trvalá hodnota}
            P := S[j];
            while P <> nil do
                begin
                    if abs(H[j]) + abs(H[P^.surovina]) < H[P^.vysledek]
                    then
                        H[P^.vysledek] := abs(H[j]) + abs(H[P^.surovina]);
                        P := P^.dalsi
                    end
                end;
            end;

            writeln(-H[1])
        end.

```

ZPRÁVY

13. středoevropská matematická olympiáda

Již podruhé ve třináctileté historii Středoevropské matematické olympiády (MEMO) byla organizací této druhé nejvýznamnější mezinárodní matematické soutěže středoškoláků pověřena Česká republika. Poprvé se tak stalo hned v jejím 2. ročníku (v roce 2008), kdy se vlastní soutěž konala v Olomouci pod patronací tamní Přírodovědecké fakulty UP. Organizace 13. ročníku MEMO se ujala MFF UK v Praze. Vlastní soutěž se však uskutečnila v Pardubicích, a to od 26. srpna do 1. září 2019. O zdařilý průběh této prestižní mezinárodní soutěže se vzorně postaral organizační štáb soutěže pod vedením *doc. RNDr. Zbyňka Šíry, Ph.D* z MFF UK.

Soutěže se tradičně zúčastnilo 60 soutěžících z deseti středoevropských zemí (Švýcarska, Německa, Rakouska Slovinska, Chorvatska, Maďarska, Slovenska, Polska, Litvy a České republiky). Každou zemi reprezentovalo šestičlenné družstvo složené z žáků, kteří v uplynulém školním roce nematurovali. České reprezentační družstvo bylo složeno ze tří vítězů a tří úspěšných řešitelů ústředního kola 68. ročníku MO v kategorii A, kteří splňovali podmínky této mezinárodní soutěže a současně nereprezentovali naši zemi na 60. IMO v anglickém Bathu.

Složení našeho mladého týmu na 13. MEMO bylo následující: *Jana Bušová* (5/8 G Brno, tř. Kpt. Jaroše), *Vojtěch David* (6/8 WG, Ostrava-Poruba), *Viktor Fukala* (6/8 GJK Praha 6), *Adéla Heroudková* (5/8 G Brno, tř. Kpt. Jaroše), *Magdaléna Mišinová* (6/8 GJK Praha 6) a *Jan Vavříň* (6/8 PORG – GaZŠ, Praha). Vedoucími české delegace byli tentokrát bývalí čeští úspěšní olympionici *Bc. Filip Bialas* a *Danil Koževnikov*. Všechna zúčastněná družstva, jejich doprovod a členové mezinárodní jury byli ubytováni v pardubickém hotelu Labe.

Den před soutěží jednotlivců provedla mezinárodní jury, jejímž předsedou byl *prof. RNDr. Jan Kratochvíl, CSc.*, současný děkan MFF UK a mj. bývalý úspěšný reprezentant Československa na IMO, definitivní výběr všech 12 soutěžních úloh (4 pro soutěž jednotlivců a 8 pro soutěž družstev – po jedné z algebry, kombinatoriky, geometrie a teorie čísel pro soutěž jednotlivců, a po dvou jiných úlohách ze stejných oblastí pro týmovou soutěž.

Výběr úloh z jednotlivých oblastí provedli a hlavními koordinátory úloh z těchto oblastech byli: za algebru *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D*, za kombinatoriku *doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D*, za geometrii *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.* a za teorii čísel *doc. RNDr. Jaromír Šimša, CSc.*



Obr. 1 Družstvo ČR – zleva: Vojtěch David, Jana Bušová, Adéla Heroudková, Jan Vavřín, Magdaléna Mišínová, Viktor Fukala, Danil Koževnikov a Filip Bialas

Soutěž jednotlivců se konala ve středu 28. srpna 2019, týmová soutěž proběhla o den později. Po oba dny se přitom soutěžilo v učebnách Univerzity Pardubice, která byla spolu s MŠMT ČR, Nadací RSJ, Pardubickým krajem, městem Pardubice a Gymnáziem v Pardubicích na Dašické ul. jedním z nejvýznamnějších spolupořadatelů a partnerů 13. MEMO.

Následující den po soutěži družstev probíhala koordinace soutěžních úloh za přítomnosti vedoucích národních týmů. Každá soutěžní úloha byla hodnocena nejvýše 8 body (s celočíselným bodovacím schématem v rozpětí 0–8 bodů). Soutěžící týž den (v pátek 30. srpna) absolvovali společný výlet po historických památkách Pardubic a blízkého okolí. Na poslední den, kterým byla sobota 31. srpna, připravili organizátoři pro všechny účastníky soutěže společný jednodenní výlet spojený s prohlídkou Národního hřebčína v Kladrubech nad Labem a městské památkové rezervace v Kutné Hoře, která je dlouhodobě součástí světového dědictví UNESCO.

Po návratu ze společného výletu proběhlo v aule pardubické univerzity oficiální vyhlášení výsledků a ocenění nejlepších jednotlivců a družstev na 13. MEMO. Ukázalo se, že vybrané úlohy v soutěži jednotlivců byly

poměrně náročně. Svědčí o tom především skutečnost, že nejlepší řešitel v soutěži jednotlivců, kterým byl *Krešimir Nežmah* z Chorvatska, získal pouze 21 bodů (ze 32 možných). S ohledem na dosažené výsledky bylo v souladu pravidly MEMO uděleno 5 zlatých, 13 stříbrných a 14 bronzových medailí. Na zlatou medaili stačil tentokrát zisk alespoň 19 bodů, na zisk stříbrné medaile zisk aspoň 13 bodů a bronzovou medaili získali ti soutěžící, kteří dosáhli v součtu zisk aspoň 9 bodů. Mezi medailisty se objevili také tři naši soutěžící – *Vojtěch David*, který získal 11 bodů, *Magdaléna Mišinová* a *Jan Vavřín*, kteří shodně získali 9 bodů. Všichni tři byli při závěrečném ceremoniálu oceněni bronzovými medailemi. Navíc dva další naši mladí soutěžící – *Viktor Fukala* a *Adéla Heroudková* zůstali pouhý 1 bod za medailovou hranicí.

Velmi dobrého výsledku dosáhli naši žáci v soutěži družstev, když skončili na pěkném 5. místě se ziskem 49 bodů za vítězným týmem Polska (63 bodů ze 64 možných), druhým Maďarskem (58 bodů), třetím Němcem (53 bodů) a čtvrtým Slovenskem (51 bodů).

Podrobnější informace a texty všech soutěžních úloh lze najít na oficiálních stránkách 13. MEMO <http://memo2019.karlin.mff.cuni.cz/>.

Příští 14. ročník MEMO se bude na základě oficiálního pozvání konat v posledním srpnovém týdnu 2020 na Slovensku – v Košicích.



Obr. 2 Mezi medailisty se objevili tři naši soutěžící

Jaroslav Švrček