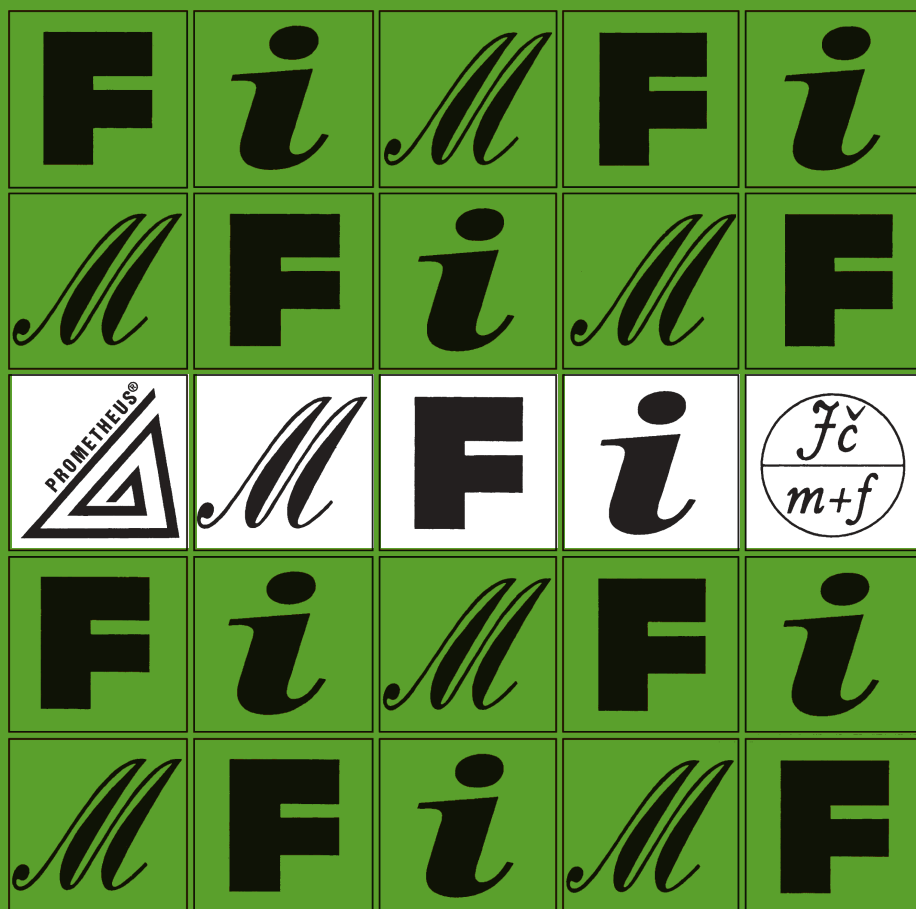


MATEMATIKA 2 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXIX (2020), číslo 2

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku

Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška, Michaela Křížová, Miluše Lachmannová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil (předseda redakční rady), Dana Mandíková, Oldřich Odvárko, Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Emanuel Svoboda, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel Töpfer

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>Š. Arslanagić</i> : Tři důkazy jedné trigonometrické nerovnosti	81
<i>L. Beldík, J. Příbyl</i> : Úlohy inspirované origami	87
<i>P. Leischner</i> : Jednoduchý planimetr	99
Zajímavé matematické úlohy	109

FYZIKA

<i>A. Veselá, M. Křížová</i> : Historické pokusy v současné škole	112
<i>J. Toušková, J. Toušek</i> : Sluneční energie a fotovoltaika	121

INFORMATIKA

<i>E. Bartl</i> : Počítačová grafika, 1. část	138
<i>J. Sedláček, T. Pitner</i> : Kyberbezpečnost a informační bezpečnost na středních školách	149

ZPRÁVY

<i>B. Vybíral, J. Kříž</i> : Præmium Bohemiæ 2019 mladým přírodovědcům	154
--	-----

Tři důkazy jedné trigonometrické nerovnosti

ŠEFKET ARSLANAGIĆ

Univerzita Sarajevo, BOSNA A HERCEGOVINA

V tomto příspěvku uvedeme tři odlišné důkazy jedné důležité trigonometrické nerovnosti a následně pak některé její přímé aplikace. Dříve však než zmíněnou nerovnost popíšeme a dokážeme, uvedeme jedno pomocné tvrzení, které následně uplatníme v jednom z důkazů zmíněné nerovnosti.

V celém článku budeme používat standardní označení délek stran a velikostí vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC .

Lemma

V libovolném trojúhelníku ABC platí pro délky jeho stran a velikosti vnitřních úhlů trojice rovností

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},$$
$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}},$$

kde $2s = a + b + c$.

Důkaz provedeme pouze pro první z uvedených tří identit (zbylé dvě pak dostaneme užitím principu cyklické záměny). Využijeme přitom známou rovnost

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad (1)$$

která platí pro velikost α vnitřního úhlu při vrcholu A v libovolném trojúhelníku ABC . Z kosinové věty v trojúhelníku ABC ve tvaru

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

dostaneme po dosazení za $\cos \alpha$ v (1) a provedení následných úprav

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{a^2 - (b - c)^2}{4bc}} = \\ &= \sqrt{\frac{(a + b - c)(a + c - b)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(2s - 2c)(2s - 2b)}{4bc}} = \\ &= \sqrt{\frac{4(s - b)(s - c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{bc}}. \end{aligned}$$

Tím je důkaz lemmatu uzavřen.

Nyní uvedeme výše zmíněnou trigonometrickou nerovnost a její varianty získané užitím principu cyklické záměny:

Věta

Pro délky stran a, b, c a velikosti vnitřních úhlů α, β, γ v libovolném trojúhelníku ABC platí nerovnosti

$$\sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{b + c}, \quad \sin \frac{\beta}{2} \leq \frac{b}{c + a}, \quad \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{c}{a + b}.$$

První důkaz provedeme (stejně jako v případě dalších důkazů) pouze pro první z uvedených tří nerovností. Při jejím důkazu využijeme nerovnost (1), dokážeme tedy

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{bc}} \leq \frac{a}{b + c}.$$

Tuto nerovnost ekvivalentně upravíme do tvaru

$$\left(\frac{a}{b + c} \right)^2 \geq \frac{(s - b)(s - c)}{bc} = \frac{(c + a - b)(a + b - c)}{4bc},$$

tj.

$$4a^2bc \geq (b + c)^2(c + a - b)(a + b - c) = (b^2 + 2bc + c^2)[a^2 - (b - c)^2].$$

Po vynásobení výrazů na pravé straně, které přenecháváme čtenáři, upravíme poslední nerovnost postupně do tvaru

$$\begin{aligned} b^4 + c^4 + 2a^2bc - a^2b^2 - 2b^2c^2 - c^2a^2 &\geq 0, \\ (b^2 - c^2)^2 - a^2(b - c)^2 &\geq 0, \\ (b - c)^2[(b + c)^2 - a^2] &= (b - c)^2(a + b + c)(b + c - a) \geq 0. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že všechny provedené úpravy byly ekvivalentní, a s ohledem na platnost nerovnosti $b + c - a > 0$, je první z uvedených nerovností dokázána. Rovnost v ní nastane, právě když $b = c$. Užitím principu cyklické záměny platí tedy i zbylé dvě nerovnosti.

Druhý důkaz. Označme r poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC . Užitím sinové věty upravíme pravou stranu dokazované nerovnosti i do tvaru

$$\sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{b + c} = \frac{2r \sin \alpha}{2r \sin \beta + 2r \sin \gamma} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta + \sin \gamma}.$$

Stačí tedy dokázat nerovnost

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta + \sin \gamma} \geq \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Využitím známého goniometrického vzorce pro součet sinů dvou argumentů (ve jmenovateli na levé straně poslední nerovnosti) a dále vzorce pro sinus dvojnásobného argumentu přepíšeme poslední nerovnost do tvaru

$$\frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} \geq \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

Vzhledem k tomu, že

$$\sin \frac{\beta + \gamma}{2} = \sin \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \frac{\alpha}{2},$$

lze nerovnost (2) snadno upravit na tvar

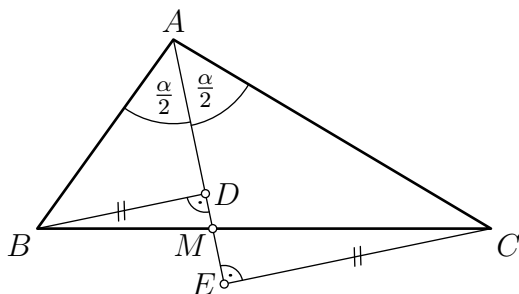
$$\frac{1}{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}} \geq 1,$$

tj.

$$\cos \frac{\beta - \gamma}{2} \leq 1,$$

což je evidentně platná nerovnost. Tím je i druhý důkaz uvedené nerovnosti uzavřen. Rovnost zde nastane, právě když $\beta = \gamma$, tedy, právě když $b = c$.

Třetí důkaz. Označme M průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu A se stranou BC trojúhelníku ABC a D, E po řadě paty kolmic z vrcholů B, C k přímce AM , viz obr. 1.



Obr. 1

Z pravoúhlých trojúhelníků ABD a ACE vyjádříme

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CE|}{|AC|}. \quad (3)$$

Z rovností (3) a z trojúhelníkových nerovností v trojúhelnících BMD a CME dále plyne

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CE|}{|AC|} = \frac{|BD| + |CE|}{|AB| + |AC|} \leq \frac{|BM| + |CM|}{|AB| + |AC|},$$

tj.

$$\sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{|BC|}{|AB| + |AC|},$$

neboli

$$\sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{b + c},$$

což jsme chtěli dokázat. Rovnost zde nastane, právě když je trojúhelník ABC rovnoramenný se shodnými rameny AB a AC .

Poznámka. Ve všech třech nerovnostech uvedených v úvodní větě nastanou přitom rovnosti současně, právě když $a = b = c$, tedy v případě, kdy je trojúhelník ABC rovnostranný.

Nyní uvedeme několik aplikací právě dokázaných tří nerovností. Především součinem všech tří nerovností uvedených ve větě dostaneme bezprostředně

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}. \quad (4)$$

Na základě nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro libovolnou dvojici kladných reálných čísel, přesněji užitím nerovností $a + b \geq 2\sqrt{ab}$, $b + c \geq 2\sqrt{bc}$ a $c + a \geq 2\sqrt{ca}$, můžeme pravou stranu (4) dále odhadnout následujícím způsobem:

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{abc}{2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca}} = \frac{1}{8},$$

a tedy

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}. \quad (5)$$

Rovnost v (5) nastane, právě když $a = b = c$, tj. v případě rovnostranného trojúhelníku ABC .

Důsledek 1

V libovolném trojúhelníku ABC platí pro velikosti jeho vnitřních úhlů α , β a γ nerovnost

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \leq \frac{3}{2}. \quad (6)$$

Důkaz. Vyjdeme ze známé identity

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}, \quad (7)$$

která platí pro velikosti vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku ABC . O její platnosti se lze přesvědčit aplikací rovností $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$, resp. $\frac{1}{2}\gamma = 90^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, na levé, resp. na pravé straně (7), a následných úpravách. S ohledem na nerovnost (5) z této identity plyne

$$\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \leq 1 + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2},$$

což přímo dokazuje uvedený důsledek. Rovnost v (6) nastane, právě když je trojúhelník ABC rovnostranný.

Důsledek 2

V libovolném trojúhelníku ABC platí pro velikosti jeho vnitřních úhlů α , β a γ nerovnost

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \geq \frac{3}{4}. \quad (7)$$

Důkaz. Také zde vyjdeme ze známé trigonometrické identity

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma), \quad (8)$$

která platí pro velikosti vnitřních úhlů v libovolném trojúhelníku (její důkaz je založen na trojím využití známé formule pro kosinus dvojnásobného argumentu). Pravou stranu (8) lze přitom odhadnout pomocí nerovnosti (6), a dostaneme tak

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4},$$

Tím je i druhý důsledek ověřen.

Existuje řada další zajímavých nerovností, které lze dokázat užitím výše dokázané věty a jejich důsledků. Např. v publikaci [2] lze na str. 20, nalézt nerovnost 2.9

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2},$$

kterou lze dokázat mj. užitím výše uvedených nerovností. Její důkaz ponecháváme čtenářům.

Z německého originálu psaného pro časopis Matematika–Fyzika–Informatika přeložil a upravil *Jaroslav Švrček*.

Literatura

- [1] *Arslangić, Š.*: Matematika za nadarene. Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
- [2] *Bottema, O., Djordjević, R. Ž, Janić, R. R., Mitrinović, D. S., Vasić, P. M.*: Geometric inequalities. Wolters–Nordhoff Publishing, Groningen (The Netherlands), 1969.
- [3] *Mintaković, S., Franić, M.*: Trigonometrija. Element, Zagreb, 1999.

Úlohy inspirované origami

LIBOR BELDÍK – JIŘÍ PŘIBYL

SPŠE a ZDVPP Žatec – Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem

V současnosti bychom jen s obtížemi hledali mezi lidmi někoho, kdo by nevěděl, co se skrývá pod pojmem origami. Nadto je matematická veřejnost obvykle také obeznámena s faktem, že v oblasti origami je (z pohledu matematického) celá řada úloh a problémů různého stupně obtížnosti. Mnohé z nich jsou pak svým charakterem vhodné pro žáky základních nebo středních škol. Jak se snažíme názvem naznačit, budeme zde prezentovat úlohy s prvky origami, které byly řešeny během vyučování matematice, přičemž se jednalo o rozšířené hodiny matematiky.

Autoři článku si uvědomují, že učitel na základní, popř. na střední škole, má k dispozici poměrně velké množství úloh různé obtížnosti. Tyto úlohy k němu přicházejí nejen prostřednictvím různých učebních materiálů a sbírek, ale také z různých soutěží a testování. Přestože je těchto úloh hodně, domníváme se (na základě vlastní zkušenosti), že učitelé se rádi vracejí k úlohám, které sami vymyslí (objeví), popř. s nimiž je seznámili jejich žáci. Do této skupiny patří také úlohy prezentované v článku. Některé jsou původní (autorské), u jiných se ukázalo, že se v literatuře objevily již dříve. Úlohy, které předkládáme, jsou odzkoušené ve školské praxi a míra jejich obtížnosti odpovídá úlohám z matematiky nejvýše pro střední školy. Vzhledem k tomu, že úlohy ve vzdělávacím procesu hrají celou řadu rolí, necháváme na čtenáři (učiteli), aby se sám rozhodl, zda a popř. kam zařadí vybrané úlohy do své výuky.

Úlohy budeme prezentovat takovým způsobem, že čtenáři představíme určitou konstrukci (postup), a pak položíme otázku. Přeformulování úlohy do jiného kontextu není obtížné.

Začneme úlohou, jejíž idea se objevuje při řešení celé řady dalších úloh.

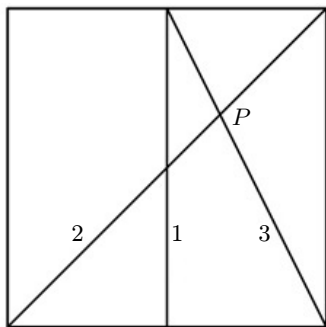
Úloha první

Mějme čtvercový papír. Sestrojme bod P konstrukcí, která je zaznamenána na obr. 1.¹⁾ Jednotlivá čísla u úseček označují pořadí, ve kterém byly sestrojovány. Nejprve tedy byla sestrojena osa strany papíru, následně

¹⁾Hrany papíru a vytvořené přehyby budeme nazývat *úsečkami*. Jsme si vědomi toho, že v celé řadě publikací jsou tyto hrany označovány jako *přímky*.

pak osa úhlu. Než budeme pokračovat dále, můžeme s žáky (v závislosti na jejich věku) hledat odpovědi na následující otázky:

- 1) Kolik existuje os souměrnosti čtverce a které to jsou?
- 2) Které z os souměrnosti čtverce mají největší délku a které naopak nejmenší délku?
- 3) Jaké jsou délky os v milimetrech, pokud sestrojíme postupně čtverec z papírů formátu A3, A4 a A5?
- 4) Protínají se všechny osy souměrnosti čtverce v jednom bodě? Pokud ano, proč?
- 5) Mají osy i jiné pojmenování?



Obr. 1 Konstrukce bodu P

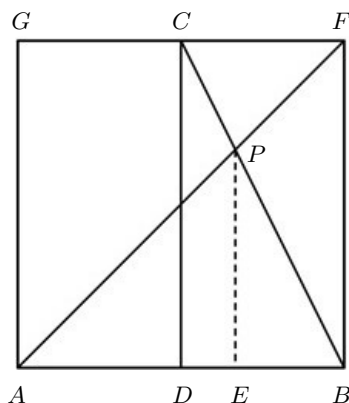
Nyní sestrojíme třetí úsečku tak, jak ukazuje obr. 1. Bod P vznikne jako průsečík úsečky 2 a úsečky 3. Určete:

- 1) V jakém poměru dělí bod P úsečku 2?
- 2) Vedeme-li z bodu P kolmici ke straně AB (viz obr. 2), v jakém poměru dělí pata kolmice E stranu papíru AB ?
- 3) Obdobně předchozí otázce: Pokud sestrojíme kolmici z bodu P ke straně BF , v jakém poměru dělí pata této kolmice stranu BF papíru?

Před žáky jsme předstoupili pouze s druhou otázkou, přičemž po jejím zodpovězení, je nalezení odpovědi na otázky 1) a 3) již běžnou záležitostí.

Pro odpověď na tuto otázku sledujeme obr. 2. Předpokládejme, že délka strany čtvercového papíru je rovna 1. Pokud se s tímto předpokladem žáci setkávají poprvé, je pro ně obtížně zdůvodnitelný či pochopitelný.

K tomuto zavedení můžeme dojít po provedení celé řady případů, kdy necháme žáky postupně pracovat s různě velkými čtverci a ukážeme, že na velikosti strany nezáleží.



Obr. 2 Dělení úsečky

Do kartézské souřadnicové soustavy umístíme čtverec tak, aby jeho vrchol A splynul s počátkem souřadnicového systému a bod F měl souřadnice $[1; 1]$. Souřadnice bodu P jsou neznámé, označíme je x , přesněji $P[x, x]$. Žáci by měli sami zdůvodnit, proč y -ová souřadnice bodu P je stejná jako x -ová. Úsečka AE má tedy délku x a úsečka EB má délku $1 - x$. Ukážeme, že bod E dělí úsečku AB v poměru $2 : 1$.

Trojúhelníky BDC a BEP jsou podobné (věta uu), platí tedy

$$\frac{|CD|}{|PE|} = \frac{|BD|}{|BE|}$$

a odtud

$$\frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - x} \Rightarrow 2 - 2x = x \Rightarrow x = \frac{2}{3}.$$

Úsečka AE má tedy délku $\frac{2}{3}$ a úsečka EB má délku $\frac{1}{3}$. Odtud plyne výše uvedený závěr.

Uvedená konstrukce se používá k dělení papíru nebo úsečky na tři shodné díly. Prezentovaný postup lze najít v celé řadě publikací, čtenářově pozornosti však doporučujeme [4].

Následující úloha je jedním z možných navázání na předchozí úlohu.

Úloha druhá

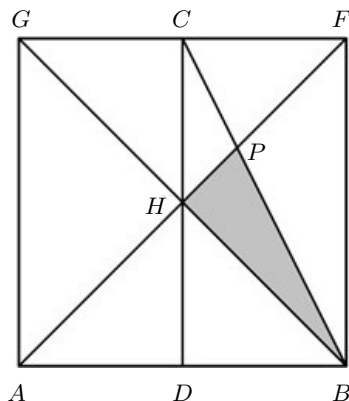
Předpokládejme, že strana čtverce z první úlohy má velikost 1. Určete obsah trojúhelníku FCP (viz obr. 2).

Tato úloha přirozeně vyplynula z toho, že žáci zkoumali vlastnosti výše prezentované konstrukce.

Obsah trojúhelníku FCP určíme snadno s využitím předchozího poznatku, že vzdálenost bodu P od úsečky FC je rovna $\frac{1}{3}$ (viz třetí otázka první úlohy a souřadnice bodu P), což je zároveň délka výšky v trojúhelníku FCP ke straně FC (označme ji v_1). Protože velikost úsečky FC je rovna $\frac{1}{2}$, pak obsah trojúhelníku FCP určíme následovně:

$$S_{FCP} = \frac{1}{2} \cdot |FC| \cdot v_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

Úlohu můžeme snadno modifikovat. Sestrojme přeložením papíru druhou úhlopříčku ve čtverci. Situace je znázorněna na obr. 3. Určete obsah vybarveného trojúhelníku BPH .



Obr. 3 Obsah trojúhelníku BPH

Obsah trojúhelníku BPH určíme jako rozdíl obsahů trojúhelníku BFH a trojúhelníku BFP . Obsah trojúhelníku BFH je roven $\frac{1}{4}$. Doporučujeme, aby si žáci tuto skutečnost ověřili právě přeložením daného čtverce nejprve podle jedné úhlopříčky, vznikne rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník o polovičním obsahu, a následně přeložením podle druhé úhlopříčky, opět vznikne rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, avšak o čtvrtinovém obsahu čtverce.

Pro výpočet obsahu trojúhelníku BFP využijeme znalosti o poloze bodu P . Z obr. 2 je patrné, že vzdálenost BE je velikostí výšky v trojúhelníku BFP na stranu BF . Označíme-li si velikost výšky jako v_2 , potom platí $v_2 = \frac{1}{3}$. Obsah trojúhelníku BFP určíme jako

$$S_{BFP} = \frac{1}{2} \cdot |BF| \cdot v_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

a obsah trojúhelníku S_{FCP}

$$S_{BPH} = S_{BFH} - S_{BFP} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Za povšimnutí stojí fakt, a minimálně žáky tato skutečnost překvapila, že trojúhelníky FCP a BPH mají stejný obsah.

Čtenářům nabízíme další náměty pro výuku, resp. k další úvaze:

- 1) Povšimněte si vlastnosti, kterou má rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník. Přeložíme-li ho v polovině, tj. podle výšky spuštěné z vrcholu při pravém úhlu, získáme opět rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, avšak o polovičním obsahu. Jedná se o analogii s překládáním papíru formátu A. Přeložíme-li papír formátu A4, získáme papír formátu A5, avšak o polovičním obsahu. Oba trojúhelníky jsou podobné, stejně tak oba papíry A4 i A5 jsou podobné.
 - a) Zdůvodněte, proč tuto vlastnost má mezi obdélníky pouze obdélník formátu papíru A.
 - b) Rozhodněte a zdůvodněte, zda existují i jiné trojúhelníky s touto vlastností, tj. po určitém přeložení vznikne trojúhelník s původním podobný (avšak o polovičním obsahu) než jen rovnoramenné pravoúhlé.
 - c) V obou případech určete koeficient podobnosti.
- 2) Určete obsahy trojúhelníků HPC a GBC .
- 3) Povšimněte si, že je-li dán čtverec papíru o straně 1, umíme sestrojit trojúhelníky s obsahy: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$. Rozhodněte, zda lze sestrojit trojúhelník s obsahem $\frac{1}{3}$.
- 4) Jak se změní pozice bodu P , budeme-li pracovat nikoliv se čtvercem, ale s papírem formátu A, např. A4. K této úloze doporučujeme přejít až po vyřešení problému 1 tohoto seznamu. Vezměte v potaz skutečnost, že první úsečku můžete sestrojit dvěma různými způsoby – nejprve jako osu delší strany, následně pak jako osu kratší strany.

- 5) Jak se změní poloha bodu P , budeme-li pracovat nikoliv se čtvercem, ale s obdélníkem s poměrem stran 1 : 2. Zvažte obě možnosti.

Zatímco první úloha je standardní a druhá vznikla jako reakce na tuto úlohu, následující úlohy vznikly spontánně při výuce matematiky z podnětů žáků.

Úloha třetí

V rámci výuky jsme se zabývali modelem krychle, jejímž autorem je první z autorů článku. Autorům je známo přes třicet různých způsobů, jak s pomocí origami vytvořit model krychle. Do výuky byl zvolen model, který se složí ze dvou čtvercových papírů. Byl vybrán z toho důvodu, že jeho poskládání není obtížné a zvládnou ho i méně zruční žáci – je netriviální, nespočívá jen ve spojení šesti stěn a je méně obvyklý. Sestavenou krychli je vidět na obr. 5, jednotlivé moduly, ze kterých vzniká, pak na obr. 4.



Obr. 4 Dvě části modelu krychle (žákovská práce)

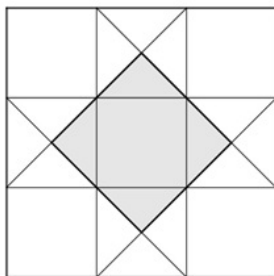


Obr. 5 Složený model krychle (žákovská práce)

Tato úloha vznikla, když žáci rozložili model na dva jednotlivé díly – moduly – a zkoumali u daného modulu jeho geometrické vlastnosti. Vzniklý čárovec²⁾ lze vidět na obr. 6.

²⁾Rozložený papír, ve kterém jsou vidět (popř. jsou zvýrazněny jen ty nejdůležitější) hrany, které vznikaly v průběhu skládání.

Mějme čtvercový papír o straně délky 1. Určete, jaký je obsah vystínovaného útvaru.



Obr. 6 Čárovec rozloženého modulu krychle

Řešení úlohy je následující: Naznačené vodorovné a svislé přehyby rozdělily čtvercový papír na 9 shodných čtverců, strana každého vzniklého čtverce má tudíž délku $\frac{1}{3}$ a obsah každého z těchto čtverců je $\frac{1}{9}$. Vybarvený čtverec má délku strany rovnou délce úhlopříčky čtverců vzniklých přehýbáním papíru (obr. 6), tedy $\frac{1}{3}\sqrt{2}$. Obsah vybarveného čtverce je pak roven

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

Nabízíme i druhý způsob řešení. Uvědomme si, že vybarvený čtverec se skládá z jednoho „malého“ čtverce a čtyř trojúhelníků. Pomyslným přesunutím tří trojúhelníků k jednomu vybranému získáme další čtverec. Výsledkem je součet obsahů dvou čtverců, z nichž každý má obsah roven $\frac{1}{9}$.

Čtenářům zde nabízíme další náměty do výuky či k přemýšlení:

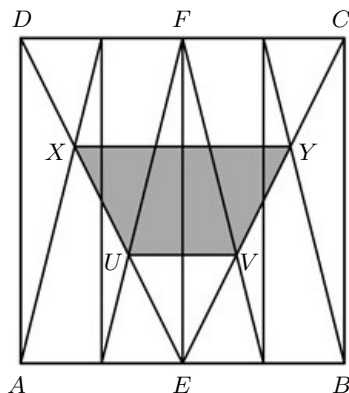
- 1) Úlohu lze modifikovat použitím obdélníkového papíru. Pokud budeme pracovat s obdélníkovým papírem, vznikne kvádr.
- 2) Rozmyslete si, jak sestavit modul pro sestavení krychle. Napovíme, že k vyřešení tohoto problému s úspěchem můžete využít výsledek první úlohy našeho článku.
- 3) Doplňte do čárovce úhlopříčky do čtyř rohových čtverců a do prostředního čtverce. Získáte papír rozdělený na 36 shodných (rovnoramenných pravoúhlých) trojúhelníků. Rozhodněte, zda je možné vyznačit na papíru čtverce s obsahem: $\frac{1}{9}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{8}{9}$ a 1.

Nepodaří-li se vám nalézt čtverec, rozhodněte, zda existuje alespoň obdélník s daným obsahem.

Také následující úloha vznikla ve vyučovací hodině, její ideový základ položili žáci sami, když se snažili pomocí přehýbání papíru konstruovat různé rovinné obrazce. Celkem snadno se jim podařilo sestrojit kromě čtverce, obdélníku, rovnoramenného trojúhelníku i rovnoběžník a lichoběžník.

Úloha čtvrtá

Sestrojte rovnoramenný lichoběžník $UVYX$, jak je ukázáno na obr. 7.



Obr. 7 Rovnoramenný lichoběžník $UVYX$

V lichoběžníku $UVYX$ postupně určete:

- 1) velikosti obou základů,
- 2) délku ramene,
- 3) výšku lichoběžníku,
- 4) obsah lichoběžníku,
- 5) velikost úhlu, který svírá rameno se základnou XY .

Nabízíme řešení, které je založeno na analytické geometrii. Pro řešení úlohy, resp. pro zodpovězení některých otázek, je vhodné určit souřadnice bodů X , Y , U , V . Předpokládejme, že čtverec papíru má velikost strany 1. Umístíme čtverec do kartézské soustavy souřadnic tak, že bod A bude umístěn do počátku a bod C má souřadnice $[1; 1]$. Body B a D budou mít po řadě souřadnice $[1; 0]$ a $[0; 1]$. Pokud jste neopomenuli řešit první úlohu, pak je jasné, že paty kolmic z bodu X k úsečkám DA a AE dělí každou z nich v poměru $1 : 2$. Snadno již určíme, že bod X má souřadnice $[\frac{1}{6}; \frac{2}{3}]$.

Obdobně určíme souřadnice bodu U , které jsou $[\frac{1}{3}; \frac{1}{3}]$. Následně určíme souřadnice bodů V a Y , které jsou po řadě $[\frac{2}{3}; \frac{1}{3}]$ a $[\frac{5}{6}; \frac{2}{3}]$. Nyní již snadno zodpovíme dané otázky.

ad 1)

$$|XY| = \frac{2}{3}, \quad |UV| = \frac{1}{3},$$

ad 2)

$$|XU| = \sqrt{\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{6},$$

ad 3) výšku lichoběžníku označíme v , platí

$$v = \frac{1}{3},$$

ad 4) obsah lichoběžníku určíme ze známého vztahu

$$S = \frac{1}{2}(|XY| + |UV|)v = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

ad 5) úhly YXU a XEA jsou střídavé, tedy shodné. Budeme se tedy zabývat úhlem XEA , jehož velikost označíme α . Užitím Pythagorovy věty nejprve určíme velikost přepony pravoúhlého trojúhelníku AED s pravým úhlem při vrcholu D :

$$|ED|^2 = |AD|^2 + |AE|^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4},$$

$$|ED| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Z definice funkce sinus v pravoúhlém trojúhelníku víme, že

$$\sin \alpha = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Chceme-li zjistit přibližnou hodnotu α , užijeme inverzní funkci arkus sinus ($\arcsin$).

$$\alpha = \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{5} \doteq 63,43^\circ.$$

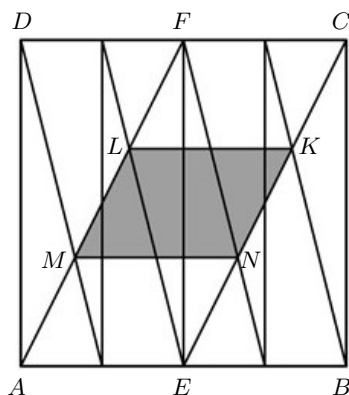
Zájemcům o tuto problematiku nabízíme další náměty pro výuku:

- 1) Dokažte, že bod U leží na úhlopříčce AC .
- 2) Určete obsah lichoběžníku $XYCD$.
- 3) Určete úhel, který svírá rameno XU lichoběžníku $UVYX$ se základnou UV .
- 4) Jak se změní jednotlivé hledané velikosti, budeme-li pracovat s pářím s poměrem stran $2 : 1$?
- 5) Jak se změní jednotlivé hledané velikosti, budeme-li pracovat s pářím formátu A?
- 6) Je daný lichoběžník $UVYX$ tečnový či tětívový?

Poslední úloha, kterou předkládáme čtenářům, je variací na předchozí téma.

Úloha pátá

Sestrojme rovnoběžník stejně jako na obr. 8.



Obr. 8 Rovnoběžník $KLMN$

V rovnoběžníku $KLMN$ postupně určete

- 1) délku strany KL ,
- 2) délku strany LM ,
- 3) výšku rovnoběžníku,
- 4) obsah rovnoběžníku.

Řešení této úlohy je obdobné jako úlohy předešlé. Opět můžeme využít metod analytické geometrie a stejně jako v předchozí úloze umístit čtverec do kartézské soustavy souřadnic tak, aby bod A měl souřadnice $[0; 0]$, bod C měl souřadnice $[1; 1]$ a body B a D měly po řadě souřadnice $[1; 0]$ a $[0; 1]$. Opět (jako v předešlé úloze) si stačí uvědomit, že bod M dělí úsečku DA v poměru $2 : 1$ a úsečku AE v poměru $1 : 2$. Takže bod M bude mít souřadnice $[\frac{1}{6}; \frac{1}{3}]$. Obdobným způsobem určíme i zbývající souřadnice. Bod N bude mít souřadnice $[\frac{2}{3}; \frac{1}{3}]$, bod K bude mít souřadnice $[\frac{5}{6}; \frac{2}{3}]$ a bod L souřadnice $[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$. Nyní již opět snadno zodpovíme stanovené otázky:

ad 1)

$$|LK| = \frac{1}{2},$$

ad 2)

$$|ML| = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{6},$$

ad 3) výšku rovnoběžníku označíme v , platí

$$v = \frac{1}{3},$$

ad 4) obsah rovnoběžníku určíme ze vztahu

$$S = |MN| \cdot v = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

V případě čtvrté otázky této úlohy pak nastíníme, jak by se dalo postupovat bez využití metody analytické geometrie. Povšimněme si rovnoběžníku $AECF$. Je zřejmé, že platí

$$|KL| = |MN| = |AE| = \frac{1}{2}.$$

Je zřejmé, že rovnoběžník $MNKL$ se do rovnoběžníku $AECF$ vejde celkem třikrát (je tvořen třemi shodnými rovnoběžníky). Obsah rovnoběžníku $AECF$ je $\frac{1}{2}$, neboť stačí od čtverce $ABCD$ odebrat dva trojúhelníky AFD a CEB , které po přesunutí vytvoří obdélník s obsahem $\frac{1}{2}$. Protože obsah rovnoběžníku $MNKL$ je třetinový obsahu rovnoběžníku $AECF$, pak je výpočet již snadný.

Čtenáři nabízíme pouze jeden námět k přemýšlení:

1) Určete rozměry papíru tak, abychom při provedení konstrukce rovnoběžníku získali kosočtverec.

Závěr

Naše zkušenosti ukazují, že použití origami ve výuce matematiky může hrát nejen roli motivační, ale právě také může ukázat, zda žákovy poznatky jsou pouze na úrovni formální či mírně je přesahující, nebo zda žák plně porozuměl dané problematice a je schopen aplikovat své znalosti i na školsky nestandardní úlohy. Vhodně zvolené úlohy mohou doplnit obvyklou výuku geometrie (především) a nenásilně přivést žáky k aktivnímu přístupu k výuce. Zkušenost, kterou jsme získali je taková, že průměrní nebo nenápadní žáci se projeví překvapivě, např. zajímavým řešením nebo tvořivou obměnou modelu či postupu skládání.

Předchozí text ukazuje, jak z původního tématu (dělení úsečky) vzájemnou interakcí mezi učitelem a žáky vznikly další, méně obvyklé úlohy. K dalšímu seznámení s problematikou „origami a matematika“ lze doporučit články [1], [2] a [3].

Literatura

- [1] *Fiala, J.*: Origamová geometrie – Podivná trisekce úhlu. *Vesmír*, roč. 90 (2011), č. 7, s. 462–463.
- [2] *Fiala, J.*: Origamová geometrie – Co lze zkonstruovat? *Vesmír*, roč. 90 (2011), č. 9, s. 524–525.
- [3] *Fiala, J.*: Origamová geometrie – Co nelze zkonstruovat? *Vesmír*, roč. 92 (2013), č. 11, s. 645–647.
- [4] *Hull, T.*: *Project Origami: Activities for Exploring Mathematics*. AK Peters, Ltd., Wellesley, MA., 2006.

Jednoduchý planimetr

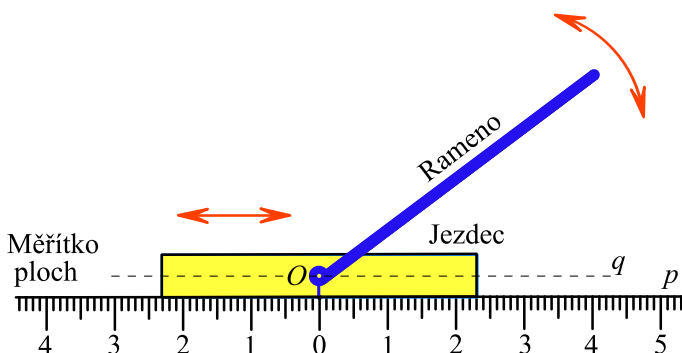
PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Na počátku 19. století vzrostla potřeba určování velikosti pozemků z map a plánů. To vedlo k vynálezům a zdokonalování různých typů *planimetrů*, jež sloužily k měření obsahů rovinných útvarů.

Planimetr, kterým se budeme zabývat, nesestavuje na rozdíl od jiných obsah měřeného útvaru po částech, ale je založen na převodu útvaru z mnohoúhelníku na trojúhelník téhož obsahu. Jeho funkční model si můžeme snadno vyrobit nebo vytvořit jeho počítačovou verzi v dynamické geometrii.

Vynález byl v různých variantách přiznán několika osobám. Všechny takové planimetry jsou v podstatě stejné, skládají ze tří částí (obr. 1).



Obr. 1 Schéma planimetru

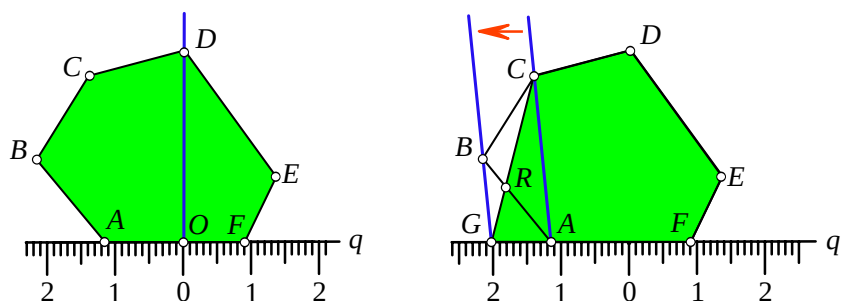
Měřítka ploch je pravítko se stupnicí. Umísťujeme je pevně na mapu do potřebné polohy. Podél jeho hrany p lze posouvat *jezdcem*, k němuž je otáčivě v bodě O připevněno *rameno*. Polohu bodu O , kterou určuje jeho kolmý průmět na přímku p , odečítáme pomocí rysky vyznačené na jezdcí. Písmenem q budeme značit rovnoběžku s přímkou p vedenou bodem O .

Řada dostupných pramenů uvádí, že prvním autorem tohoto vynálezu je *Karel Gangloff* (1809–1879), který za něj ve Vídni roku 1856 obdržel malou bronzovou medaili. V podstatě stejný planimetr však sestrojil pol-

ský geodet *Jan Zaremba* (v polštině *Zareba*) již roku 1829. Popsal jej v rodné řeči, a tak se o něm za hranicemi Polského království, které bylo částí carského Ruska, příliš nevědělo [9], [5]. První německy psaný popis [4] Zarembova planimetrie je z roku 1908.

1. Měření obsahu s pomocným výpočtem

Planimetry pro tento způsob měření měly stupnici i na ramenu, a to s počátkem v bodě O . I když se postup neobejde bez výpočtu, byl v praxi užíván a je vhodný pro naše úvodní úvahy. Bez újmy na obecnosti budeme zanedbávat vzdálenost bodu O od hrany p měřítka. Jinak řečeno, ztotožníme přímky q a p .



Obr. 2 Měření obsahu šestiúhelníku se dvěma vrcholy na přímce q

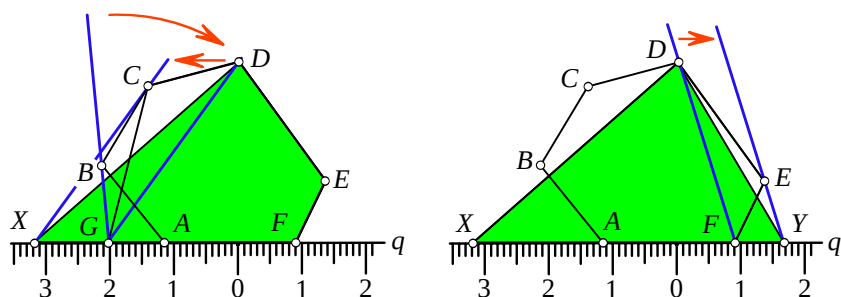
Máme zjistit obsah šestiúhelníku $ABCDEF$ na obr. 2 jeho přeměnou na trojúhelník XDY téhož obsahu. Umístíme planimetr tak, aby body A a F ležely na přímce q , rameno planimetru procházelo vrcholem D a bylo kolmé k hraně měřítka ploch, a aby se bod O nacházel v počátku stupnice měřítka (obr. 2 vlevo). Výšku $v = |OD|$ trojúhelníku XDY zjistíme na stupnici ramene. Polohy krajních bodů X a Y jeho základny určíme na přímce q následovně.

1. Rameno přemístíme do polohy AC a pak posuneme tak, aby procházelo vrcholem B . Výslednou polohu bodu O označíme G (obr. 2 vpravo). Platí $GB \parallel AC$. Záměnou trojúhelníku ACB za trojúhelník ACG téhož obsahu tedy nahradíme šestiúhelník $ABCDEF$ pětiúhelníkem $GCDEF$, aniž by se obsah útvaru změnil.

Povšimněme si, že i obsahy trojúhelníků CBR a GAR , kde R je průsečík úseček AB a CG , jsou stejné. (Jsou to obsahy trojúhelníků

ACB a ACG zmenšené o obsah jejich společné části ACR .) Rovnost obsahů útvarů $ABCDEF$ a $GCDEF$ můžeme tedy zdůvodnit i odebráním trojúhelníku CBR a přidáním trojúhelníku GAR .

2. Rameno planimetru otočíme z polohy GB do polohy GD a pak posuneme, aby procházelo vrcholem C . Výslednou polohu bodu O označíme X (obr. 3 vlevo). Pětúhelník $GCDEF$ jsme nahradili čtyřúhelníkem $XDEF$, aniž by se změnil obsah.
3. Nakonec analogicky upravíme ohraničení u vrcholu E : Rameno umístíme do polohy FD a potom posuneme do polohy $YE \parallel FD$.



Obr. 3 Další kroky měření obsahu šestiúhelníku

Získali jsme trojúhelník XYD s obsahem rovným obsahu šestiúhelníku $ABCDEF$. Výšku trojúhelníku již známe a jeho základnu $z = |XY|$ určíme z poloh bodů X a Y zjištěných na stupnici planimetru.

Obsah šestiúhelníku je tedy

$$S = z \cdot \frac{v}{2}. \quad (1)$$

2. Přímé měření obsahu

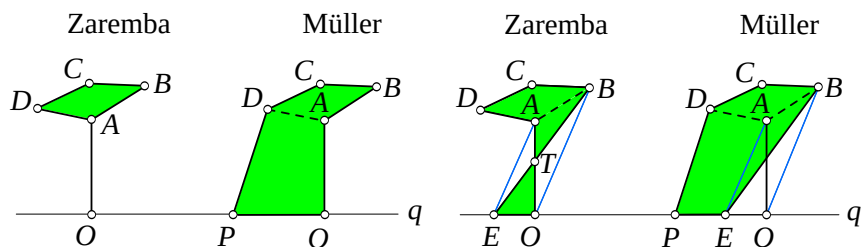
Uvedené měření lze upravit tak, abychom mohli číst velikost obsahu přímo na stupnici měřítka ploch. Stačí pozměnit postup, aby vznikl trojúhelník, který má libovolně zvolenou výšku.

Ze vztahu (1) plyne, že při volbě $v = 2$ je $S = z$. Obsah pak udává délka základny na stupnici měřítka. Dokonce můžeme k používané mapě zvolit výšku v tak, aby nejmenší dílek stupnice měřítka ploch představoval jeden hektar měřeného pozemku, nebo jeho dekadický násobek.

Postup, který uvedeme, užíval Zaremba i Gangloff. Oba prováděli měření stejně, Zaremba jej zdůvodnil v [9]. Ganglof u svých vynálezů publikoval jen popis přístroje a návod k obsluze. Důkaz Gangloffova postupu měření uvedl až Müller, viz [6] nebo [7]. Nevíme, zda jej od Gangloffa převzal. Obě zdůvodnění si ukážeme na příkladu určení obsahu čtyřúhelníku $ABCD$.

Na počátku měření umístíme planimetr tak, aby jeho rameno procházelo vrcholem A , bylo kolmé k hraně měřítka, a aby byla délka úsečky OA rovna zvolené výšce v hledaného trojúhelníku (obr. 4 vlevo).

Kvůli názornému zdůvodnění si Müller doplnil čtyřúhelník $ABCD$ na šestiúhelník $ABCDPO$, kde $P \in p$. Zaremba počáteční stav nedoplňoval, ale považoval útvar $ABCDPO$ za singulární šestiúhelník (míníme tím šestiúhelník $ABCDVO$, kde $V = A$; úsečka OA představuje jeho dvě sousední, avšak totožné strany). Oba pak pokračovali níže popsáním způsobem.



Obr. 4 První kroky Zarembova a Mülleroва zdůvodnění postupu

Nejprve stanovili směr postupu měření po hranici útvaru. Zvolíme jej v kladném smyslu (proti pohybu hodinových ručiček), tedy přes vrcholy A, B, C a D v tomto pořadí.

První krok, otočení ramene z polohy OA do polohy OB a pak posunutí do polohy EA , zapíšeme $OA \rightarrow OB \rightarrow EA$.

Jak vidíme na obr. 4 vpravo, nahradil Müller šestiúhelník $ABCDPO$ pětiúhelníkem $BCDPE$ téhož obsahu. Při Zarembově postupu byl singulární šestiúhelník $ABCDPO$ nahrazen jiným neobvyklým útvarem, zkříženým šestiúhelníkem $BCDAOE$. Jeho strany AO a BE jsou zkřížené, protínají se v bodě T . Tím vzniká dojem, že obsah nezůstal konstantní, neboť

$$S_{BCDAOE} = S_{ABCD} + S_{TBA} + S_{TOE}.$$

Nutno si však uvědomit, že planimetr měří *orientovaný obsah*. Pokud

směr postupu obrátíme, budeme ramenem posouvat v opačném směru a výsledná poloha ramene zobrazí obsah na opačné straně od jeho počáteční polohy. Orientovaný obsah značíme tučným písmenem $\mathbf{S}$ na rozdíl od neorientovaného obsahu S . Pro libovolný trojúhelník XYZ platí $S_{XYZ} = S_{XZY} > 0$, avšak $\mathbf{S}_{XYZ} = -\mathbf{S}_{XZY}$.

Zajímá-li nás orientovaný obsah zkrříženého šestiúhelníku $BCDAOE$, musíme vzít v úvahu, že zkrřížení ramen způsobí obrácení směru postupu. Máme-li zvolen směr postupu měření v pořadí E, B, C, D, A, O , je tento směr při procházení trojúhelníku TOE opačný, než směr odpovídající útvaru $TBCDA$. Víme, že

$$\mathbf{S}_{TOE} = -\mathbf{S}_{TBA},$$

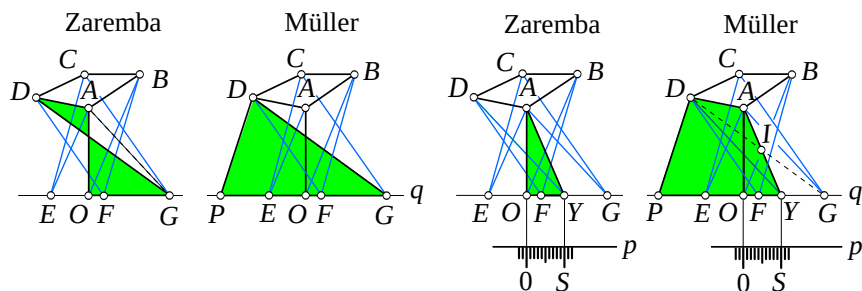
a proto platí

$$\mathbf{S}_{BCDAOE} = \mathbf{S}_{TBCDA} + \mathbf{S}_{TOE} = \mathbf{S}_{ABCD} + \mathbf{S}_{TBA} + \mathbf{S}_{TOE} = \mathbf{S}_{ABCD}.$$

Na obr. 5 vlevo vidíme situaci po dalších dvou krocích,

$$EA \rightarrow EC \rightarrow FB \quad \text{a} \quad FB \rightarrow FD \rightarrow GC.$$

V Müllerově případě jsme získali trojúhelník PGD . Ten ale nemá danou výšku v . Zarembův postup vedl ke zkrříženému čtyřúhelníku $OADG$.



Obr. 5 K závěru Zarembova a Müllerova zdůvodnění postupu

Provedením posledního kroku, $GC \rightarrow GA \rightarrow YD$, obrátíme u Zaremby trojúhelník AOY , jehož základna má délku $|OY| = S_{AOY} = S_{ABCD}$.

V Müllerově situaci nahradíme trojúhelník GDY trojúhelníkem ADY . Vznikne čtyřúhelník $ADPY$, který má s počátečním útvarem $ABCDPO$ společnou část $ADPO$. Po odečtení obsahu této části od obsahu S_{ADPY} a S_{ABCDPO} dojdeme k témuž výsledku $S_{ABCD} = S_{AOY} = |OY|$.

3. Historické poznámky

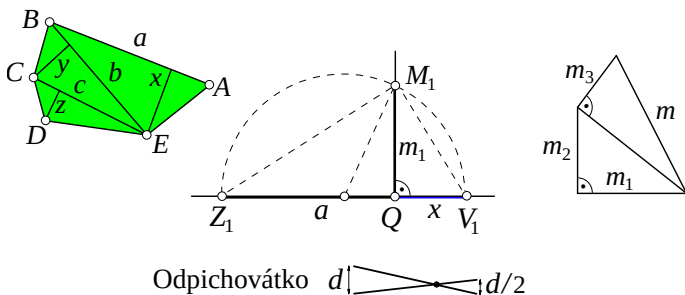
Předchůdcem Zarembova vynálezu byl *Kolbergův planimetr*¹⁾ z roku 1920 popsán v polském lesnickém časopisu Sylwan [1]. Kolberg vycházel z poznatku, že pro obsah S trojúhelníku platí $2S = m^2$, kde $m = \sqrt{z \cdot v}$ je geometrický průměr základny a výšky. Jeho planimetr se skládal z tabulkového diagramu vyrytého do mosazné destičky a z dvojitého odpichovátko, které umožňovalo současně přenášet délku d i její polovinu (obr. 6 dole).

Pro určení obsahu Kolbergovou metodou zvolíme pětiúhelník $ABCDE$ na obr. 6. Pětiúhelník nejprve rozdělíme vhodně zvolenými úhlopříčkami na co nejmenší počet trojúhelníků, v nichž pak zvolíme základny a výšky. Geometrické průměry $m_1 = \sqrt{ax}$, $m_2 = \sqrt{by}$ a $m_3 = \sqrt{cz}$ sestrojíme s využitím odpichovátko a Eukleidovy věty o výšce postupem vyznačeným pro konstrukci úsečky m_1 na obr. 6 uprostřed.

K určení výsledného obsahu, který je dán vztahem

$$S = \frac{m^2}{2}, \quad \text{kde} \quad m = \sqrt{m_2^2 + m_3^2 + m_1^2},$$

se využívala konstrukce na obr. 6 vpravo a diagram na tabulce planimetru.

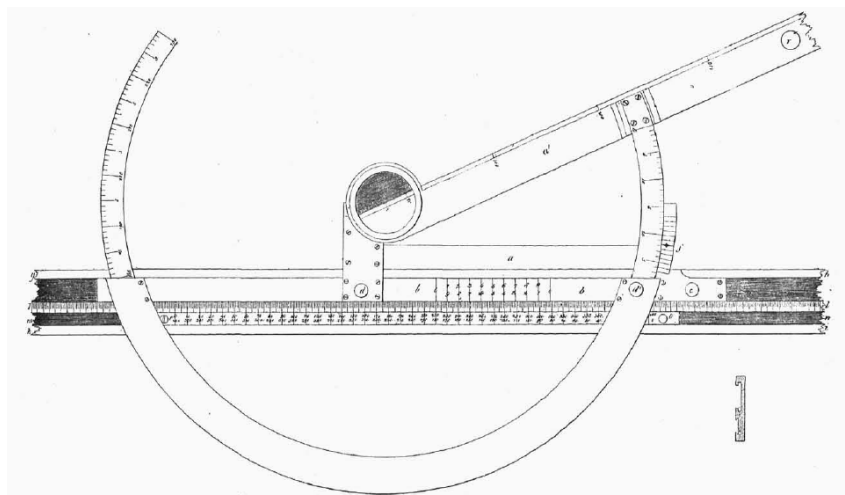


Obr. 6 Měření obsahu podle Kolberga

Jan Zaremba byl přísežný geometr knížete Adama Czartoryského. S podporou knížete sestrojil planimetr, který důkladně popsal v publikaci [9]. Ta rovněž obsahuje odborný posudek univerzitních profesorů Kolberga a Grabinského a List přiznání vynálezu vystavený Administrativní radou království. Publikace je na webu dostupná ve formátu pdf.

¹⁾Kolberg se ve starších pramenech uvádí jako Colberg

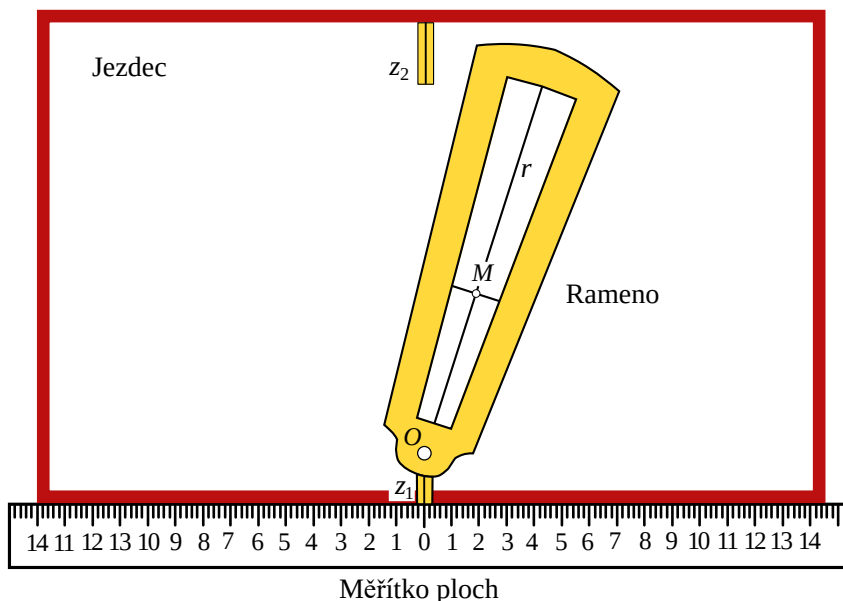
Kopii původního nákresu Zarembova planimetru představuje obr. 7. Přístroj byl vyroben z mosazi. Kruhový prstenec pevně spojený s ramenem byl opatřen stupnicí s noniem a umožňoval přesné nastavení směru ramene. Jezdec se pohyboval ve drážce a aretační šrouby umožňovaly zajistit polohu jezdce i ramene. Stupnice měřítka ploch byla vybavena noniem a na posuvatelné liště měla dvojí číslování (zleva doprava a zprava doleva), aby si uživatel mohl podle potřeby nastavovat počátek a pohodlně odečítat délku jedním, nebo druhým směrem.



Obr. 7 Zarembův planimetr

Karel Gangloff, nadlesní v Rožmitále pod Třemšínem, absolvoval jednoroční kurz na pražské polytechnice. Protože byl autorem celé řady užitečných vynálezů, nazývali jej jeho současníci *Český Archimédés*.

Gangloffův planimetr byl podstatně jednodušší, dal se snadno a levně vyrobit. Jeho první verze (1856) je znázorněna na obr. 8. Měřítkem ploch bylo samostatné pravítko, jehož stupnice má stejné číslování na obě strany od nuly umístěné uprostřed. Jezdec se skládal ze skleněné desky o rozměrech 42×26 cm. Rameno tvořila žíně r napjatá v rámu otáčivě připevněném k desce jezdce v bodě O . Ryska z_1 ukazovala polohu bodu O na stupnici a ryska z_2 sloužila k nastavení vlákna r do polohy kolmé na hranu pravítka. V rámu ramene byla ještě jedna napjatá žíně, která protínala žíně r v bodě M tak, aby $|OM|$ byla zvolenou výškou v výsledného trojúhelníku.



Obr. 8 Gangloffův planimetr

O Gangloffovi je známo, že své vynálezy neustále zlepšoval. Jeho planimetr z roku 1876 znázorňuje obr. 1. Rameno, jež vyrobil ve tvaru kovové pásky, mělo pět rysek určujících bod M pro mapy různých měřítek a pro měření jak ve starých rakouských jednotkách, tak i v nově zavedené metrické soustavě, viz [3].

Když roku 1877 popsal vídeňský profesor Josef Schlesinger své vynálezy, tachygraf a tachygrafický planimetr v rozsáhlé publikaci [8], reagoval na to prof. František Müller článkem [7]. Ukázal, že Gangloffův i Schlesingerův planimetr jsou v podstatě stejné, a že objev přísluší Gangloffovi, neboť je jeho vynález o 21 let starší. Prioritu vynálezu přiřadil Gangloffovi i ve své významné učebnici [6] a z těchto pramenů se poznatek zřejmě dostal do encyklopedií a navazujících prací.

Kolem roku 1908 se s Müllerovým článkem seznámil mladý polský astronom Lucjan Grabowski, který tehdy působil jako stipendista v Německu. Aby uvedl věci na pravou míru, sepsal v němčině článek [4] o polských vynálezech planimetrů. Ukázal, že principiálně stejný planimetr sestrojil Zaremba o 27 let dříve než Gangloff. Článek tehdy ještě neznámého vědce byl zapomenut.

Planimetr s úpravou pro měření popsané v odstavci 2 vyráběla v sedmdesátých letech 19. století německá firma Mechaniker Sickler v Karlsruhe. Bývá označován jako planimetr Dasnoyův, viz [2] a [6].

Kromě Schlesingera si podobné planimetry nechal patentovat Hieronymus Totsching z Insbruku (1905 a 1919). Gangloff se v době Zarembova objevu učil lesníkem nedaleko hranice s Polskem. Nevíme, zda Zarembův vynález znal, nebo zda planimetr objevil nezávisle na něm. Žádost o patent pravděpodobně nepodal.



Obr. 9 Gangloffův planimetr, originál a model

4. Námět pro zájmovou práci

Model Gangloffova planimetru z obr. 9 vpravo si můžeme snadno pořídit. Za měřítko ploch zvolíme delší pravítko a jako jezdec poslouží obdélníková plastová destička. Při jejím dolním středu vyvrtáme otvor o průměru 1 mm, provlečeme jím stejně silný hřebíček a na něj nasadíme rameno vystřižené z tvrdší plastové podložky na psaní. Osu ramene narýsujeme permanentním fixem. Na jejím dolním konci je třeba vyvrtat otvor pro otáčivé připojení k jezdcí. Po nasazení ramene narazíme na hřebík včelařský mezerníček (nebo jiný vhodný objekt), aby části držely pohromadě.

Planimetry lze vyrobit svépomocí a práci s nimi bychom měli zaměřit na rozvoj geometrického myšlení. Metodické rozpracování nechávám na učiteli. Doporučoval bych nejprve směřovat studenty k nalezení postupu z odstavce 1. Můžeme začít obecným čtyřúhelníkem nebo pětiúhelníkem a rameno planimetru opatřit stupnicí. Nechat žáky, zda sami objeví nějaký postup měření obsahu. Pokud budou neúspěšní, zvolíme vhodnou nápo vědu. Po zvládnutí základů lze procvičit složitější situace. Řešit úlohu,

je-li při počáteční poloze pouze jeden vrchol útvaru na přímce q . Seznámit s pojmem orientovaného obsahu a metodou jeho přímého měření. Řešit problém, jak jedním měřením nalézt součet nebo rozdíl obsahů dvou mnohoúhelníků, je-li jeden mnohoúhelník vně (nebo uvnitř) druhého, apod.

Model planimetru lze též vytvořit v dynamické geometrii a výuku provádět pouze na počítači, bez použití mechanických pomůcek. Případně můžeme vyzkoušet obojí a uvést i něco z historie.

Literatura

- [1] *Colberg, P. J.*: Opisanie składu i užycia Planimetru. Sylwan 1820, č. 2, s. 34–54.
- [2] *Doll, M.*: Instrument zur Verwandlung von Vielecken in Dreiecke durch Parallelabschieben. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen 1874, s. 83–85.
- [3] *Gangloff, K.*: Jednoduchý planimetr. Lesní a lovčí kalendář, roč. 12 (1878), s. 17–21, Český spolek lesnický, Praha, 1878.
- [4] *Grabowski, L.*: Über einige Planimeter polnischer Erfindung, insbesondere über das Planimeter von Zareba. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen 1908, s. 70–74 a 108–112.
- [5] *Kucharzewski, F.*: Planimetry polskie i ich wynalazcy. Warszawa, 1902.
- [6] *Müller, F.*: Kompendium geodésie a sférické astronomie, II. díl. Nákladem České matice technické, Praha, 1899.
- [7] *Müller, F.*: Die Planimeter von Gangloff und Schlesinger. Zeitschrift für Vermessungswesen, roč. 8 (1879), s. 150–169.
- [8] *Schlesinger, J.*: Der geodätische Tachygraph und der Tachygraph-Planimeter. Wien, 1877.
- [9] *Zaręba, J.*: Planimetr, narzędzie jeometryczne. Tiskárna Puławy, 1829.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 261 a 262 můžete zaslat nejpozději do 20. 9. 2020 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz.

Úloha 261

Dokažte, že desítkový zápis některé přirozené mocniny čísla 2021 začíná čtyřčíslím 2020.

Pavel Calábek

Úloha 262

Je dán tětíivový čtyřúhelník $ABCD$. Kružnice, která prochází vrcholy A a B daného čtyřúhelníku, protíná jeho úhlopříčky AC , BD po řadě ve vnitřních bodech K , L . Polopřímky AL a BK protínají kružnici opsanou čtyřúhelníku $ABCD$ po řadě v bodech P ($P \neq A$) a Q ($Q \neq B$). Dokažte, že přímky CD a PQ jsou rovnoběžné.

Jaroslav Švrček

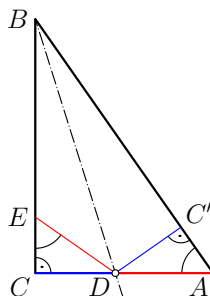
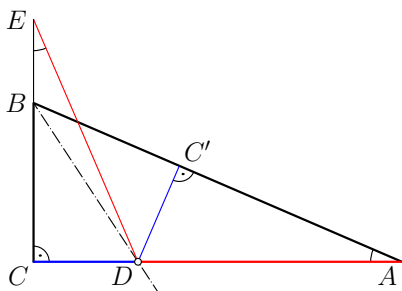
Dále uvádíme řešení úloh 257 a 258, jejichž zadání jsme zveřejnili ve čtvrtém čísle loňského (28.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 257

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB protíná osa vnitřního úhlu u vrcholu B odvěsnu AC v bodě D . Nechť E je bod polopřímky CB pro který platí $|AD| = |DE|$. Dokažte, že body A , B , D , E leží na téže kružnici.

Robert Geretschläger & Jaroslav Švrček

Řešení. Označme C' patu kolmice z bodu D na přeponu AB . Jelikož BD je osa vnitřního úhlu trojúhelníku ABC u vrcholu B , je bod C' obrazem bodu C v souměrnosti podle osy BD a platí tak $|CD| = |C'D|$. Ze zadání plyne $|AD| = |DE|$. Pravoúhlé trojúhelníky CDE a $C'DA$ se tak shodují v přeponě a jedné z odvěsen, podle věty *Ssu* jsou shodné a shodují se tedy i ve vnitřních úhlech při vrcholech E a A .



Pokud je bod B bodem úsečky CE (obr. vlevo), je vidět úsečka BD z bodů E a A pod stejným úhlem a body A, B, D, E leží na téže kružnici. Naopak, pokud je bod E bodem úsečky CB (obr. vpravo), je ve čtyřúhelníku $EDAB$ součet velikostí vnitřních úhlů u protějších vrcholů E a A roven 180° , odkud opět plyne dokazované tvrzení.

Jiné řešení. Podle věty o mocnosti bodu ke kružnici stačí dokázat rovnost

$$|CD| \cdot |CA| = |CB| \cdot |CE|.$$

Při obvyklém značení stran trojúhelníku ABC máme $|CA| = b$, $|CB| = a$. Osa úhlu dělí protější stranu v poměru přilehlých stran, platí tak

$$|CD| = \frac{ab}{a+c}, \quad |DE| = |AD| = \frac{bc}{a+c}.$$

Z pravoúhlého trojúhelníku CDE podle Pythagorovy věty dostaneme

$$|CE| = \sqrt{|DE|^2 - |CD|^2} = \sqrt{\left(\frac{bc}{a+c}\right)^2 - \left(\frac{ab}{a+c}\right)^2} = \quad (1)$$

$$= \frac{b}{a+c} \sqrt{c^2 - a^2} = \frac{b^2}{a+c}. \quad (2)$$

Platí tak

$$|CD| \cdot |CA| = \frac{ab^2}{a+c} = |CB| \cdot |CE|,$$

což jsme chtěli dokázat.

Správné řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy.

Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

Úloha 258

Dokažte, že pro libovolné reálné číslo x platí nerovnost

$$x^4 + 2x + 1 \geq x^2(2x + 1).$$

Pro která x nastane rovnost?

Robert Geretschläger

Řešení. Daná nerovnost je ekvivalentní nerovnosti

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 \geq 0,$$

která platí, protože postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 &= \\ &= x^4 + x^2 + 1 - 2x^3 - 2x^2 + 2x = (x^2 - x - 1)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

jelikož druhá mocnina reálného čísla je nezáporná.

Rovnost v této nerovnosti nastane, právě když $x^2 - x - 1 = 0$, tj. právě když

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Jiné řešení (podle Piotra Kulisze). Ekvivalentní nerovnost

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

zřejmě platí pro $x = 0$. Pokud $x \neq 0$, můžeme obě strany dané nerovnosti dělit číslem x^2 a její levou stranu pak upravit do tvaru

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \left(x - \frac{1}{x} \right) - 1 = \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 - 2 \left(x - \frac{1}{x} \right) + 1 = \left[\left(x - \frac{1}{x} \right) - 1 \right]^2.$$

Uvedený výraz na levé straně nabývá výhradně nezáporných hodnot, proto daná nerovnost platí. Stejně jako v předcházejícím řešení najdeme body, ve kterých nastává rovnost.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan a *Piotr Kulisz* ze ZSOT v Lublinci.

Pavel Calábek

Historické pokusy v současné škole

ANEŽKA VESELÁ – MICHAELA KŘÍŽOVÁ

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

Úvod

Fyzika většinou nepatří mezi oblíbené školní předměty, přestože s jejími technickými aplikacemi se dennodenně setkáváme a život bez nich si už nedokážeme představit. U řady lidí tato nepřízeň pochází již ze školy, kde jim možná byly základy fyziky vykládány příliš nezajímavě. Kromě toho znalost fyziky, a s ní úzce související matematiky, vyžaduje úsilí a pochopení, díky čemuž je i předmětem, ze kterého mají žáci strach. Přesto je fyzika a její dějiny, stejně jako jiné vědy, nedílnou součástí lidské kultury.

A tak je třeba hledat cesty ke zlepšení tohoto trendu. Důležitou součástí výuky je správná motivace, aby fyzika žáky bavila. Jako velmi vhodné se ukázalo využití různých materiálů z historie fyziky a techniky. Téma historie fyziky je velmi obsáhlé a není mu v současné školské fyzice věnována pozornost, kterou si zaslouží. Dějiny fyziky totiž ukazují mimo jiné fyziku jako lidskou vědu – výsledek práce konkrétních lidí, seznamují žáky s celým procesem vzniku nových poznatků, ne pouze s výsledkem poznávacího procesu a nabízejí mnoho zajímavých námětů pro práci se žáky – od řešení netradičních fyzikálních úloh po realizaci experimentů.

Během několika uplynulých let jsme měli možnost v praxi vyzkoušet řadu experimentů motivovaných historií fyziky u žáků různých ročníků gymnázia. Protože se jednalo o pokusy spojené s dějinami fyziky, byly vždy uvedeny krátkou informační prezentací o jejich autorovi a historické verzi experimentu.

V článku předkládáme vybrané významné historické experimenty z dílen fyziků 16. až 18. století a předkládáme návod na jejich přípravu a návrh, jak tyto pokusy zařadit do výuky fyziky na střední škole. Podrobněji popíšeme Galileovy experimenty z mechaniky a další pokusy uvedeme stručně jako námět na dobrovolný domácí úkol žáků či do školního projektu.

Galileo Galilei (1564–1642)

Galileovy experimenty s volným pádem vyvracely představy aristotelovské mechaniky, že různě těžké předměty padají k zemi různou rychlostí. Galileo naopak prokázal, že všechna tělesa padají k zemi se stejným zrychlením, rozdíl je způsoben odporem prostředí. Později, v roce 1609 experimentálně stanovil, že dráha uražená tělesem roste úměrně s druhou mocninou času. Významné jsou také Galileovy pokusy s nakloněnou rovinou, u které lze nastavit sklon, a v níž byl žlábek pro pohyb koule, tzv. *padostroj*. Pomocí padostroje zkoumal rovnoměrně zrychlený pohyb snadněji, protože zrychlení je menší než u volného pádu a formuloval *zákon setrvačnosti*. Také dospěl k tomu, že stejně velké síly udělí stejně hmotným tělesům stejné zrychlení, nevyjádřil však své myšlenky matematicky jako později Isaac Newton. Tyto poznatky společně s principem nezávislosti a skládání rychlostí umožnily Galileovi zkoumat pohyby těles v tíhovém poli Země (vrhy).



Obr. 1 Veřejné předvádění padostroje [3]

Galileův padostroj byla asi šest stop¹⁾ dlouhá dřevěná deska (nakloněná rovina), jejíž sklon bylo možné regulovat. Na desce byl žlábek, vyložený pergamenem pro co nejhladší povrch, určený pro valení koulí. Kromě toho byla deska opatřena v určitých vzdálenostech od sebe osmi strunami.

¹⁾Šest stop odpovídá délce asi 1,8 metru.

Galileo znovu a znovu spouštěl žlábkem vyleštěnou mosaznou kouli, jejíž pohyb způsoboval rozeznění strun. Pokus doprovázel zpěvem a hrou na loutnu, rytmus písně je mu časovou mírou. Galileo se snažil umístit struny na desce tak, aby tóny při průchodu koule zaznívaly ve stejných časových intervalech. Přestože mohlo jeho počínání připomínat spíše dětskou hru, vedl tento experiment k objevení důležitého zákona přírody.

Pokud se náklon zvětšoval, rovnoměrně zrychlený pohyb koule se blížil volnému pádu, naopak při zmenšování náklonu se pohyb stával rovnoměrným. Galileo díky tomu formuloval zákon volného pádu, tedy že dráha volného pádu je přímo úměrná druhé mocnině času. Stejný zákon platí i pro pohyb po nakloněné rovině [2, 13–20, 137–379], [3].

Pokud se ve Vašem fyzikálním kabinetu nenachází podobný exemplář jako na Gymnáziu Svitavy (obr. 2), můžete si ho sami vyrobit. Možností, jak si pro potřeby vyučování fyziky sestavit vlastní padostroj je mnoho, některé postupy jsou uvedeny například v [4]. Jiný návod následuje.



Obr. 2 Padostroj v učebně fyziky Gymnázia Svitavy

Na výrobu padostroje jsou zapotřebí 4 rohové lišty délky 2 m, 4 dřevěné kolíčky, lepicí tavná pistole s náplní, 4 dřevěné obdélníkové destičky a samozřejmě 4 stejné kuličky, případně dvoumetrové pásmo. Lišty pevně upevníme tavnou pistolí, z kolíčků a destiček vyrobíme záložky. Pásmo upevníme k lištám tak, aby nebránilo volnému pohybu kuliček (obr. 3).

Pak už lze posunováním jednotlivých zarážek provádět experiment stejný jako Galileo. Pravidelného zvuku kuliček dopadajících na překážky dosáhneme, jsou-li jejich vzájemné vzdálenosti v poměru $1 : 4 : 9 : 16$. K měření časových intervalů lze použít vlastní sluch (pravidelnost či nepravidelnost nárazů je jasně patrná) nebo nějakého časového měřidla. Jedná se o názornou demonstraci nerovnoměrného pohybu. Padostroj se však nehodí k přesnému měření, neboť i na první pohled stejné lišty mohou mít různě drsný povrch, což pak ovlivňuje pohyb kuliček. Pokud se kulička valí a nikoliv klouže, mělo by být větší tření naopak výhodou, což může učitel s žáky prodiskutovat.

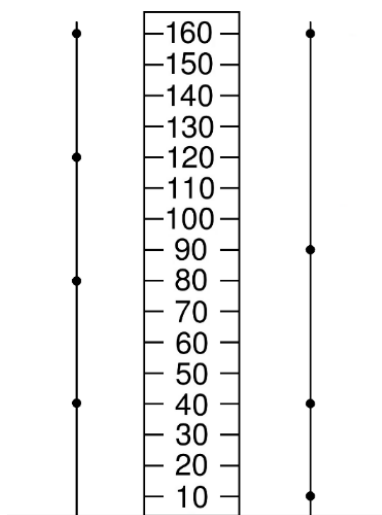


Obr. 3 Padostroj

Někdy žáky zaujaly i složitější konstrukce, které bychom během hodiny ve škole vyrobit nestihli. Využili jsme jejich zájmu a zadali jejich výrobu jako dobrovolný domácí úkol.

Na střední škole je tento pokus vhodný do prvního ročníku, zařazujeme jej do kapitoly o rovnoměrně zrychleném pohybu nebo o volném pádu. Z naší zkušenosti hrátky s padostrojem žáky zajímaly už od chvíle, kdy jsme s dvoumetrovým zařízením vešli do třídy. Experimentování jsme začínali s jednou kuličkou, mluvili jsme o tom, zda se jedná o pohyb rovnoměrný či nerovnoměrný. Poté jsme začali spouštět kuličky všechny čtyři, a hledali jsme vhodnou polohu zářezek tak, aby nárazy byly pravidelné.

Nejjednodušší variantu padostroje vyrobíme pomocí tenkého provázku a 8 větších korálků o stejné hmotnosti a rozměrech. Na jednu nit délky 2 metry navážeme 4 korálky tak, že mají mezi sebou stejné vzdálenosti podle obrázku. Na druhou nit navážeme kuličky postupně ve vzdálenostech 10 cm, 40 cm, 90 cm a 160 cm (obr. 4). Padostroj spouštíme ze židle, stolu nebo jiného zvýšeného místa. Vhodné je dolní konec připevnit k podlaze, například izolepou nebo nějakou zátěží, aby byly dobře slyšet nárazy na podlahu. Pokud nejprve spustíme nit s rovnoměrně rozmístěnými korálky, rytmus jednotlivých úderů korálků o podlahu je nepravidelný a zrychluje se. Při stejném pokusu s druhou nití je rytmus dopadajících kuliček pravidelný. Tento experiment je velmi názorný a jednoduchý. Jeho výrobu lze svěřit i žákům. Vhodný je také jako domácí pokus. Spadá opět k učivu o nerovnoměrném pohybu, respektive volném pádu.



Obr. 4 Kuličkový padostroj

Další náměty motivované historickými experimenty

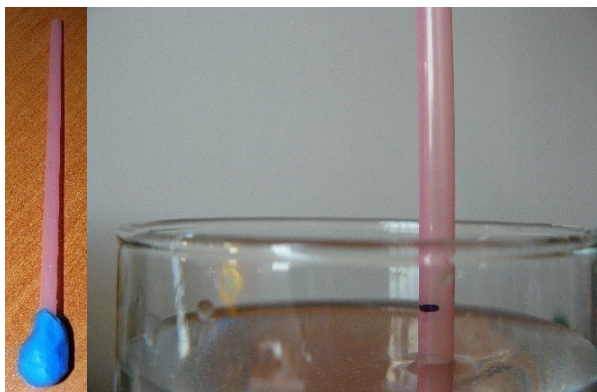
Ve výuce na víceletém gymnáziu jsme používali jak demonstrační experimenty, tak jsme se snažili se žáky i některé pomůcky pro pokusy vyrobit v rámci hodin fyziky. V průběhu několika let jsme vyzkoušeli více než 25 experimentů motivovaných historií fyziky např. Galileův termoskop a dalekohled, Keplerův dalekohled a camera obscura, Marciho rázy, Torricelliho pokus s vodou, Pascalova hydraulická zařízení, Pascalův sud, Boyleva vývěva či Newtonova skla. V rámci hodiny fyziky jsme stihli vyrobit i tři následující pomůcky.

Evangelista Torricelli (1608–1647) byl průkopníkem hydrodynamiky – oboru fyziky, který se zabývá prouděním kapalin. Kromě jiného objevil zákon, podle něhož je možné určit rychlost v výtoku otvorem ve stěně nádoby v dané hloubce h pod hladinou. Dnes používáme vztah určený Danielem Bernoullim $v = \sqrt{2gh}$, kde g je tíhové zrychlení. Pro experimentální ověření pokusu potřebujeme plastovou láhev o objemu alespoň 1,5 l, jehlu a vodu. Do láhve jehlou propíchneme ve stejných vzdálenostech od sebe několik dírek, které leží nad sebou v přímce. Láhev pak umístíme na vhodné místo (například na laboratorní táč) a celou ji naplníme vodou. Působením hydrostatického tlaku vytékají z otvorů pramínky vody. Čím vyšší je vodní sloupec, tím větší je hydrostatický tlak a voda dostříkne dál (obr. 5). Tento experiment spadá do kapitoly zabývající se mechanikou tekutin.



Obr. 5 Kvalitativní pokus k Torricelliho zákonu

K významným vynálezům **Roberta Hooka (1635–1703)** patří hustoměr. Hustoměr je zařízení k určování hustoty kapalin. Obvykle má tvar uzavřené trubice se stupnicí, dole zakončené baňkou. Funguje na principu Archimédova zákona. Vyrábí se s různými rozsahy pro měření různých druhů kapalin. Ve škole jsme vyrobili jednoduchý hustoměr pro porovnání hustoty vody a solného roztoku. K sestavení hustoměru potřebujeme pouze brčko a plastelínu. Z brčka odstříháme kolínko a na jeden jeho konec připevníme plastelínu, její množství upravíme tak, aby po ponoření do vody hustoměr plovál kolmo k hladině a brčko bylo alespoň z poloviny pod hladinou. Následně si připravíme dvě sklenice, jednu s čistou vodou a druhou s vodou s rozpuštěnou solí. Když pak ponoříme hustoměr do čisté vody, označíme fixem ponor. To samé zopakujeme pro slanou vodu a vidíme, že se tentokrát ponořil méně. Čím větší je ponor hustoměru, tím menší je hustota kapaliny. Z pozorování tedy vyplývá, že slaná voda má větší hustotu než čistá. Toto tvrzení jsme s žáky ověřili v tabulkách.



Obr. 6 Hustoměr a jeho poloha v nádobě se slanou vodou (čárka označuje ponor v čisté vodě)

Již od mládí se **Isaac Newton (1642–1727)** věnoval výzkumu optických jevů, ale jeho práci mnoho vědců odmítalo. Svoje objevy týkající se rozkladu bílého světla skleněným hranolem a teorie barev duhy Isaac Newton publikoval v časopise *Philosophical Transactions* pod názvem „Nová teorie světla a barev“. K rozkladu světla na spektrální barvy můžeme obecně použít hranol nebo mřížku. Jednoduchý mřížkový spektroskop vyrobíme z CD, lepenkové krabičky (například od čaje), nože, lepidla a alobalu či neprůhledné pásky. Krabičku slepíme lepidlem tak, aby se neroz-

kládala, a nožem vyřízneme do jejích stěn otvor na pozorování, šterbinu a výřez na zasunutí CD podle obrázku (obr. 7). Ten by měl s vodorovným dnem krabičky svírat úhel přibližně 30° . Šterbinu vytvoříme tak, že nejdříve vyřízneme do stěny krabičky větší otvor, který pak upravíme na požadovanou šířku pomocí více vrstev alobalu nebo neprůhledné pásky. Šířka šterbiny by měla být asi 1 mm. Celý spektroskop můžeme navíc ještě zabalit do alobalu, aby dovnitř nevnikalo žádné další světlo. Experimentování s tímto spektroskopem je vhodné i pro žáky základní školy, mohou si jej sami vyrobit ve škole nebo doma.



Obr. 7 Spektroskop z CD a krabičky od čaje

Závěr

K demonstracím jsme často využívali vlastnoručně vyrobené pomůcky, někdy ve více exemplářích, aby si je mohli žáci dobře prohlédnout. Některé jednodušší pomůcky jsme zvládli během hodiny i vyrobit, například hustoměr či spektroskop z krabičky od čaje. Z našich dosavadních zkušeností plyne, že je pro žáky zajímavé jakékoli oživení vyučovací hodiny experimentem, tím spíše, jde-li o pokusy týkající se historie. Zvyšují jejich zájem o předmět, napomáhají také lepšímu zapamatování a pochopení učiva. Je to však výsledek našeho pozorování ve velice krátkém časovém intervalu. Jistě by bylo zajímavé, hodnotit vliv experimentů inspirovaných dějinami fyziky na motivaci a učení žáků z dlouhodobějšího hlediska.

Protože jsme měli možnost vyzkoušet zařazení experimentů do výuky jak na vyšším, tak na nižším stupni víceletého gymnázia, můžeme také porovnat přístup různých tříd. Všimli jsme si, že starší žáci oceňovali spíše historické informace a zajímali se více o okolnosti z života fyzika. Naopak mladší žáci (odpovídající 6.–8. třídě ZŠ) dávali přednost výrobě vlastních pomůcek a frontálnímu provádění pokusů. Do výuky jsme připravili také přehledné informační plakáty o významných fyzicích 16.–18. století, které jsou nyní vystaveny na chodbě školy. Poučit se o historii fyziky tak mohou všichni žáci i učitelé (obr. 8).

1560 1570 1580 1590 1600 1610 1620 1630 1640 1650 1660 1670 1680 1690 1700 1710 1720 1730 1740 1750 1760

Galileo Galilei

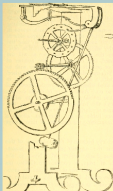
(1564-1642)

- Italský filozof, matematik, fyzik, astronom a nadšený experimentátor.
- Žil nejprve v Pise, poté v Padově a nakonec ve Florencii a jejím okolí.
- Životní partnerka Marina Gamba, tři děti.
- Původně měl být lékařem, nadchla ho však matematika a fyzika.
- Působil jako profesor matematiky, přivydělával si výrobou přístrojů.
- Zastával heliocentrický názor Mikuláše Koperníka, před inkvizicí jej musel odvolat, ale kvůli vysokému věku byl potrestán jen domácím vězením.
- Bývá nazýván „otcem moderní fyziky“.



Obr. 1: Galileo Galilei [50]

„A přece se točí“



Obr. 2: Galileovy kyvadlové hodiny (nakres) [41]

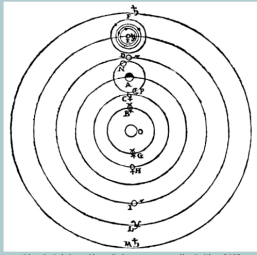


Obr. 3: Galileův geometrický kompas [60]

„Bible nám říká, jak se dostat do nebe, nikoli jak se nebe pohybuje.“



Obr. 5: Galileův teleskop [37]



Obr. 6: Schéma Sluneční soustavy podle Galilea [65]

Nejvýznamnější objevy, experimenty a vynálezy:

- Pohyb **kyvadla** (Obr. 2) - doba kyvu nezávisí na hmotnosti závaží ani velikosti rozkvy, pouze na délce závěsu; kyvadlové hodiny však před smrtí sestrojil nestihl.
- **Vzduchový termoskop** - předchůdce teploměru.
- **Zdokonalený dalekohled** tvořený spojkou a rozptylkou (Obr. 5), pomocí kterého zkoumal Měsíc, objevil Saturnovy prstence a čtyři Jupiterovy měsíce: Io, Europa, Ganymed a Callisto.
- **Zákon volného pádu**: různé těžká tělesa padají k zemi stejnou rychlostí a závisí jen na odporu prostředí.
- **Padostroj**: pohyby těles po nakloněné rovině (Obr. 4).
- **Vrhy**.
- **Zákon setrvačnosti**.
- **Zákon síly** (nevýjádřil ho tak přesně matematicky jako I. Newton).
- **Geometrický a vojenský kompas** (Obr. 3).
- **Princip relativity**.

Tento text vznikl jako podklad diplomové práce „Významné historické experimenty jako nástroje ve výuce fyziky“ Autorkou je Bc. Anetka Veselá, vedoucí práce RNDr. Michaela Králové, Ph.D. Všechny obrázky byly vytvořeny v programu Microsoft Office 2010 na základě autoritativních zdrojů.

 **Univerzita Hradec Králové**
Přírodovědecká fakulta

Obr. 8 Plakát Galileo Galilei; soubor 10 posterů je ke stažení jako příloha čísla na adrese: http://mfi.upol.cz/files/29/2902/mfi_2902_priloha_postery.pdf

V článku jsme chtěli připomenout známé a jednoduché experimenty, díky kterým se hodiny fyziky mohou stát pro žáky zajímavějšími a srozumitelnějšími. Řada učitelů ale na podobné experimentování nemá čas ani energii, což je velká škoda. Zvýšený zájem žáků o fyziku nám učitelům jistě vložené investice vrátí.

Literatura

- [1] *Lafferty, P.*: Síla a pohyb. Nakladatelský dům OP, Praha, 1995.
- [2] *Štoll, I.*: Dějiny fyziky. Prometheus, Praha, 2009.
- [3] *Bührke, T.*: Převratné objevy fyziky: Od Galileiho k Lise Meitnerové. Academia, Praha, 1999.
- [4] *Vondřejcová, K., Kabrhel, P.*: Rohová lišta ve výuce fyziky. Sborník konference Veletrh nápadů učitelů fyziky 16 (Olomouc, 2.–4. září 2011), Univerzita Palackého v Olomouci, 2011.

Sluneční energie a fotovoltaika

JANA TOUŠKOVÁ, JIŘÍ TOUŠEK

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

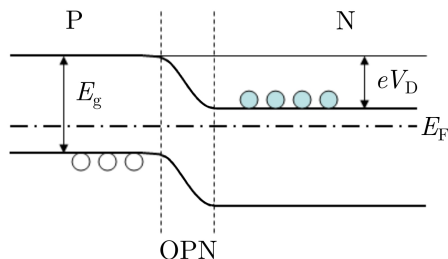
Jak řešit zásobování lidstva energií

Vzhledem k rostoucímu počtu obyvatelstva a se zvyšující se spotřebou energie vzniká otázka, jak řešit zásobování energií a při tom se vyhnout negativnímu vlivu na životní prostředí. Spalování fosilních paliv přináší řadu problémů se znečišťováním planety; roste zároveň koncentrace oxidu uhličitého a v důsledku skleníkového efektu se postupně atmosféra otepluje. K řešení už nyní přispívají obnovitelné zdroje, mezi nimi zaujímá důležité místo přímá přeměna energie slunečního záření na energii elektrickou. Slunce představuje prakticky nevyčerpatelný zdroj a jeho využití neznamena skleníkový efekt ani tepelné zamoření. Sluneční záření má však nízkou hustotu zářivého toku (v České republice přibližně 1 kW/m^2 na povrchu Země), jeho velikost závisí na počasí a je omezeno na denní dobu, s čímž souvisí nutnost akumulace energie. Zářivý tok, který Slunce vysílá na celou Zemi je $175\,000 \text{ TW}$ ($1 \text{ TW} = 10^{12} \text{ W}$), což je o mnoho řádů více než je spotřeba lidstva, jak vyplývá z výpočtu na základě údajů v [1]. Mezinárodní agentura pro energii (IEA) udává, že vloni byl výkon všech elektráren na světě $6\,650 \text{ GW}$, čili $6,65 \text{ TW}$. I z tohoto hlediska je využívání sluneční energie perspektivní.

Anorganické sluneční články – princip činnosti

Základem slunečních článků je nejčastěji přechod P-N. Pokud se jedná o jediný materiál, kde se jeho části liší jen typem vodivosti, jde o homogenní přechod, přechod mezi chemicky rozdílnými materiály s opačným, případně i stejným typem vodivosti je přechod heterogenní (heteropřechod). Příslušné materiály jsou buď anorganické, organické, nebo jejich kombinace (hybridní články).

V případě anorganických článků se typ vodivosti obvykle dosahuje difúzí nebo implantací dopantů-donorů pro N a akceptorů pro P část. Jako donory slouží prvky, které mají obvykle o jeden valenční elektron víc než základní materiál, akceptory naopak mívají o jeden valenční elektron méně. Obvykle stačí malé množství energie k tomu, aby se elektrony z donorů uvolnily do vodivostního pásu a zanechaly po sobě ionizované donory, nebo aby akceptory přijaly elektrony z valenčního pásu a vznikly tak ionizované akceptory. Ve valenčním pásu pak zůstávají tzv. díry. Jako příklad lze uvést přechod P-N na křemíku, kde P-typová oblast je vytvořena difúzí boru, jakožto akceptoru a N-oblast difúzí fosforu jako donoru. Vznik přechodu P-N je ilustrován na obr. 1.



Obr. 1 Schéma přechodu P-N. V_D je difúzní napětí, E_g značí šířku zakázaného pásu, barevné kroužky označují elektrony, nevybarvené kroužky označují díry.

Aby vznikl rovnovážný stav při spojení obou částí přechodu, musí být Fermiho hladina E_F všude stejná. To nastane tak, že v důsledku gradientu koncentrace, část elektronů přejde z N oblasti do P oblasti a část děr přejde z P oblasti do N oblasti. Dojde k narušení neutrality a po obou stranách přechodu vznikají oblasti prostorového náboje (OPN) tvořené ionizovanými donory, respektive akceptory a vnitřní elektrické pole, které pak brání dalšímu difúznímu toku nosičů náboje. Potenciálový schod (viz obr. 1) odpovídá tzv. difúznímu napětí. Přiložíme-li na N část záporné vnější napětí a na P část kladné napětí, jsou elektrony přitahovány do P

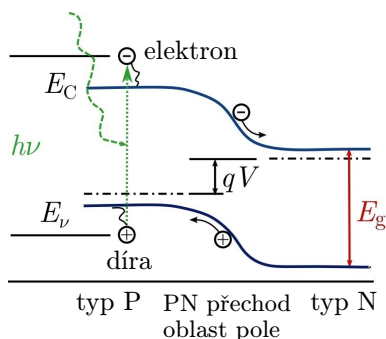
a díry do N oblasti a přes přechod teče propustný neboli přímý proud. Závislost proudu na vnějším napětí čili volt-ampérová charakteristika je dána touto rovnicí:

$$I = I_0 [\exp(eU/nkT) - 1], \quad (1)$$

kde U je vnější vložené napětí, T je absolutní teplota, k je Boltzmannova konstanta a n je faktor, který souvisí s mechanismem transportu náboje přechodem (nejčastěji má hodnotu mezi 1 a 2).

Při opačné polaritě napětí elektrony a díry jsou naopak od rozhraní obou částí přechodu oddalovány. Při tomto napětí, kdy exponenciála ve vztahu (1) je vůči jedné zanedbatelná, teče pouze nasycený proud I_0 .

Co se nyní stane, když P-N přechod osvětlíme? Situaci ukazuje obr. 2.

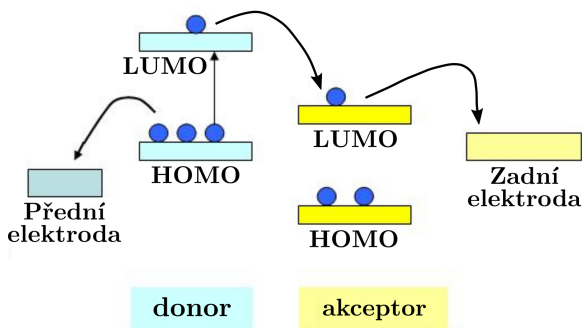


Obr. 2 Pásové energetické schéma osvětleného přechodu P-N. Elektrony a díry generované světlem difundují k oblasti prostorového náboje, kde je vnitřní pole rozdělí.

Světelná energie vybudí elektrony z valenčního pásu do vodivostního pásu a v obou částech se vytvoří páry elektron-díra. Ty pak difundují směrem k OPN, kde jsou vnitřním elektrickým polem rozdělány tak, že elektrony pronikají do N-oblasti a díry do P-oblasti. Oblast typu N se nabíjí záporně a oblast typu P kladně. Ve vnějším obvodu pak teče proud. Reálně však všechny generované nosiče náboje nedospějí do OPN, protože cestou dochází k rekombinaci elektronů s děrami. Rozhodující roli při tom hraje tzv. difúzní délka, která udává vzdálenost, na které klesne koncentrace generovaných nosičů náboje na $(1/e)$ původní hodnoty. Je zřejmé, že dostatečně velká hodnota difúzní délky příznivě ovlivňuje účinnost osvětleného článku. V anorganických materiálech jsou difúzní délky řádu mikrometrů.

Organické sluneční články – princip činnosti

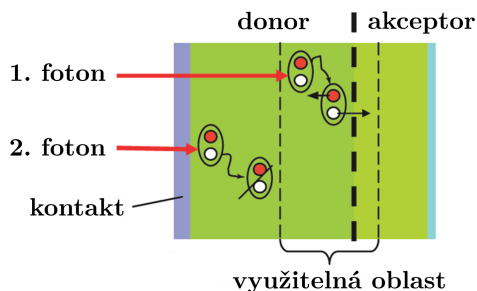
Činnost organických polovodičů je založena na molekulové bázi. Nejvyšší molekulová energetická hladina obsazená elektrony je tzv. HOMO hladina a nejnižší neobsazená hladina se nazývá LUMO hladina [2]. Základem článků je opět přechod mezi oblastí typu P, která působí jako dárce elektronů a typu N jako jejich příjemce. Vytvářejí se heterogenní přechody mezi dvěma polymery s opačným typem vodivosti (obr. 3), ale častěji mezi polymerem typu P a materiálem s malými molekulami, jako je fullerén, který vykazuje typ N.



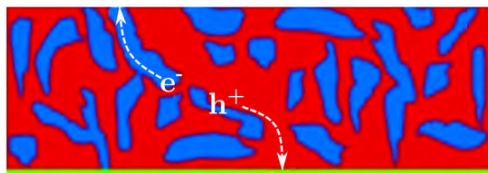
Obr. 3 Rozdělení excitonu na přechodu mezi dvěma polymery – šipkou je označen generovaný exciton.

Po osvětlení se tvoří tzv. excitony, což jsou páry elektron-díra vázané, vzhledem k nízké dielektrické permitivitě organických materiálů, značnou Coulombovskou silou [2]. Aby došlo k přenosu náboje, musí být tyto páry rozděleny elektrickým polem přechodu. Jsou-li generovány mimo oblast přechodu, musí k němu dospět difúzí. Situaci znázorňuje (obr. 4). Excitony však mohou difundovat jen na krátkou vzdálenost, obvykle maximálně do 10 až 20 nanometrů, pak anihilují. Přenosu náboje se tedy účastní jen excitony v části vyznačené na obrázku jako využitelná oblast.

Původní dvouvrstvé články proto nejsou příliš vhodné a nahrazují se jednou vrstvou, kde jsou materiály s opačným typem vodivosti promíchány, jak ukazuje obr. 5. Tím se zvětšuje plocha přechodu a pravděpodobnost rozdělení excitonů je daleko větší. Pak už zbývá dopravit rozdělené elektrony a díry k příslušným elektrodám. Tomu v poslední době napomáhají tzv. elektronové a děrové transportní vrstvy pod elektrodami.



Obr. 4 Sluneční článek s rovinným rozhraním mezi P (donor) a N (akceptor) polovodičem. Foton č. 1 generuje exciton ve střední části (využitelná oblast), kde difunduje, potom je disociován a jeho elektron a díra mohou přispívat k proudu. Exciton generovaný fotonem č. 2 je pro fotoproud ztracený.

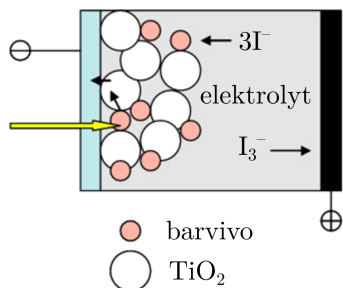


Obr. 5 Organický článek ze směsi P a N oblastí uvnitř objemu. Vzdálenost excitonů od míst přechodu je kratší. Plocha přechodu je zvětšená a možnost rozdělení excitonů je vyšší.

Fotochemické články (Graetzelovy cely) – princip činnosti

Princip činnosti těchto článků [3] je ilustrován na obr 6. Na skleněném substrátu pokrytém obvykle vodivou vrstvou směsi oxidu ciničitého a inditého (ITO) je nanesen oxid titaničitý (TiO_2) ve formě nanočástic. Ty představují velký povrch, ale málo absorbují světlo. Proto se pokrývají barvivem – nejlépe sloučeninami ruthenia. Světlo z barviva uvolňuje elektrony, které jsou přenášeny přes TiO_2 k elektrodě ITO. Do barviva se elektrony doplňují z druhé-grafitové, nebo platinové elektrody prostřednictvím elektrolytu, který obsahuje ionty jódu.

Tyto články již dosáhly účinnosti 10–13 %. Uvedené články lze jednoduše použít pro demonstraci jejich činnosti; stačí, když použijeme přírodní barvivo jako např. květ ibišku, maliny, třešně, nebo černý rybíz. Články si mohou tedy připravit i sami studenti [4].



Obr. 6 Elektrochemický článek (Graetzelova cela). Elektroda vlevo je ITO, vpravo je elektroda grafitová, nebo platinová. Princip činnosti je popsán v textu.

Materiály pro sluneční články

a) anorganické materiály

V praxi je stále nejvíce využíván křemík a to v podobě monokrystalické, polykrystalické, nebo amorfni. Výhodou je, že se ho v zemské kůře nachází dostatek, není toxický a technologie výroby článků i celých panelů je již zvládnutá. Na druhé straně krystalický křemík má nízkou absorpci slunečního záření, což vede k nutnosti použití alespoň 200 mikrometrů tlustých vrstev, a tedy k velké spotřebě materiálu, což se odráží i v ceně.

Jako určité řešení se jevil hydrogenizovaný amorfni křemík, který má velký absorpční koeficient, takže stačí jen několik mikrometrů tlustá vrstva k výrobě článků. Degradace vlivem slunečního záření je však vážnou překážkou a ke stabilizaci dochází až po roce provozu, po níž se účinnost ustaví na poměrně nízké hodnotě (10 %).

Články na základě heterogenního přechodu CdS/CdTe jsou stabilní. Technologie není náročná a spotřeba materiálu je poměrně nízká, neboť stačí jen asi 2 mikrometry tenké vrstvy. Námitkou je toxicita kadmia, která nevadí, pokud je článek zapouzdřený, ale problém může nastat při likvidaci. Nevýhodou jsou dále nízké zásoby teluru.

Kombinací Cu, In a Se, kde lze indium nahradit galiem a selen sírou, jsou připravovány tenkovrstvé články s nízkou toxicitou a nenáročnou technologií. Většímu rozšíření článků tohoto typu brání nedostatek india v zemské kůře.

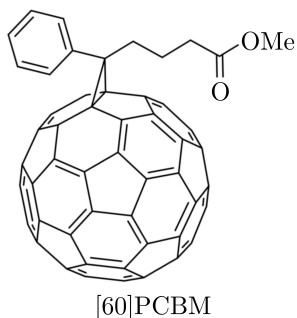
Monokrystalické články z GaAs se uplatňují hlavně v kosmu vzhledem k odolnosti vůči radiaci a vysoké ceně.

b) organické materiály

Sluneční články na bázi organických polovodičů, jejichž základem jsou

molekuly, mají řadu výhod. Technologie jejich přípravy je poměrně jednoduchá, i když v posledních letech pro dosažení dostatečně velké účinnosti je třeba volit poněkud složitější postupy. Organické materiály lze nanášet z roztoku, což je energeticky málo náročné, např. oproti vakuovému napařování. Nejčastěji používané je rotační nanášení na skleněný substrát pokrytý vodivou vrstvou, která tvoří jednu z elektrod k aktivní vrstvě. Vlastnosti vrstev lze možno měnit volbou koncentrace roztoku, a tloušťku vrstvy rychlostí otáček. Protože se tyto materiály vyznačují velkou absorpcí, stačí vytvořit tenké vrstvy o tloušťce 100–150 nanometrů, což znamená velkou úsporu materiálu a představuje další výhodu. V posledních letech byla vyvinuta levná metoda tisku vrstev na ohebný substrát, takže články lze získat i v rolích.

Organické články se nejčastěji vyrábějí z polymerů jako je poly(3-hexylthiofen) zkráceně P3HT, nebo poly[(ethylhexyl-oxy)-benzodithiofen-(ethylhexyl)-thienothiogen] zkráceně PTB7 v kombinaci s deriváty fullerenu uváděnými jako PCBM, což jsou obvykle molekuly uhlíku C_{60} (obr. 7). V literatuře lze ovšem najít další organické polymery vhodné pro sluneční články [2, 5, 6].



Obr. 7 Typická struktura molekuly uhlíku (derivát fullerenu C_{60} označovaný jako PCBM). Vykazuje vodivost typu N a v organických slunečních článcích působí jako akceptor elektronů. Další typy fullerenu lze najít např. v práci [2]

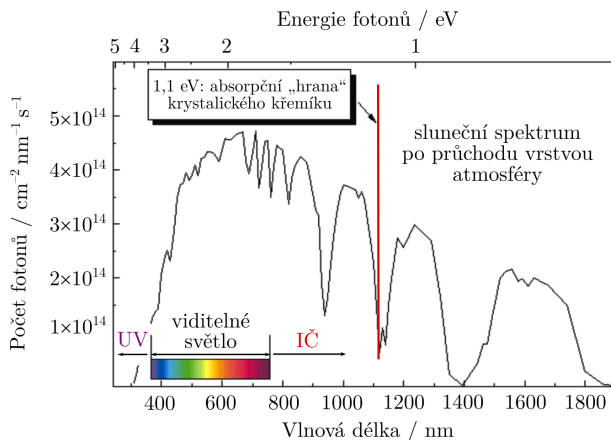
c) perovskity

V posledních letech se do popředí dostává materiál zvaný perovskit, který má krystalovou strukturu jako oxid titaničito-vápenatý ($CaTiO_3$). Ve fotovoltaických článcích se však používá chemicky jiná látka, která se popisuje jako organicko-anorganický perovskit. Práce [7] se např. zabývá vrstvami perovskitu $CH_3NH_3PbI_3$ s anorganickou mřížkou PbI_3^- obsahu-

jící uvnitř buněk organické molekuly CH_3NH_3^+ . Takové články byly již připraveny na Fakultě elektrotechnické ČVUT v Praze a dosáhly účinnosti 19,1 %. Problémem je však nestabilita a obsah olova v článcích. Kombinací širokopásových a úzkopásových článků vyrobili čínští [8] a kanadští [9] výzkumníci výhradně perovskitové tandemové články s účinností téměř 25 %. Perspektivní jsou také tandemy s krystalickým křemíkem nebo např. s CuInSe_2 . Swansea University [10] již ohlásila tisk solárních modulů (systém několika pospojovaných článků) formátu A4 s účinností 6,3 %. Pokud by se podařilo vyrábět takové moduly ve velkém, mohly by konkurovat křemíkovým.

Účinnost slunečního článku

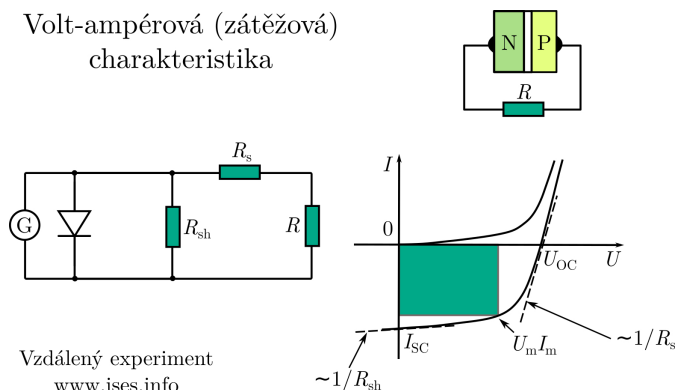
Účinnost článku ovlivňuje několik faktorů. Když se podíváme na sluneční spektrum (obr. 8), je zřejmé, že záleží na tom, jakou část z tohoto spektra je článek schopen využít. To závisí na šířce zakázaného pásu E_g daného materiálu, což je minimální energie potřebná k vytvoření páru elektron-díra, resp. excitonu. Článek tedy nemůže využít sluneční energii nižší než je energie E_g a nadbytek energie nad E_g je přeměněn na teplo.



Obr. 8 Sluneční spektrum po průchodu 1,5 násobkem tloušťky zemské atmosféry. Červená čára znázorňuje, které fotony ze spektra může ještě využít článek z krystalického křemíku (solarnielektrarny.webnode.cz)

Světlo, které dopadá na článek, je z části odraženo a z části absorbováno, při čemž poměr počtu párů elektron-díra nebo excitonů vytvoře-

ných fotony k počtu absorbovaných fotonů se nazývá vnitřní kvantovou účinností. Naproti tomu vnější kvantová účinnost vyjadřuje poměr počtu vytvořených párů, resp. excitonů, k počtu dopadajících fotonů a je ovlivněna reflexí od povrchu. Ve všech případech hraje významnou roli velikost difúzní délky, o které jsme se již zmiňovali. V souvislosti s tím se někdy zavádí tzv. sběrná účinnost, což je poměr počtu párů, resp. excitonů, které skutečně přispěly k proudu, (to znamená, že dospěly k OPN, byly rozděleny polem přechodu a dostaly se k elektrodám a odtud do elektrického obvodu) k počtu těch párů, resp. excitonů, které byly světlem vytvořeny.



Obr. 9 Vlevo je náhradní schéma osvětleného článku jako generátoru proudu s paralelně připojenou diodou. R_s je sériový odpor, R_{sh} je shuntující odpor a R je odpor zátěže. Vpravo v prvním kvadrantu je volt-ampérová charakteristika článku za tmy a ve čtvrtém kvadrantu při osvětlení. I_{SC} je proud nakrátko, U_{OC} je napětí naprázdno. Plocha největšího vepsaného obdélníku udává maximální výkon z článku. Tomu přísluší proud I_m a napětí U_m

Reálně mají oblasti N, P a kontakty dohromady odpor R_s , což snižuje velikost protékajícího proudu. Situaci je vidět na obr. 9 vlevo, znázorňujícím náhradní schéma osvětleného článku jako generátoru proudu I_L s paralelně připojenou diodou. Vedle sériového odporu R_s hraje roli také paralelní (shuntující) odpor R_{sh} , který obvykle souvisí se svody. Volt-ampérová charakteristika osvětleného článku, tj. závislost proudu zátěží R na napětí, má tvar:

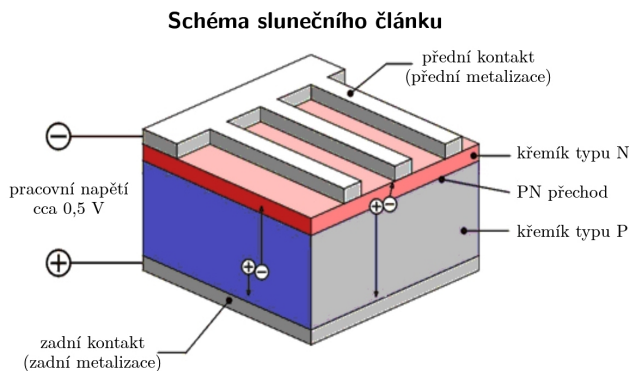
$$I = I_0 \left(\exp \left[\frac{e(U - IR_s)}{nkT} \right] - 1 \right) + \frac{U - IR_s}{R_{sh}} - I_L. \quad (2)$$

Tuto závislost ukazuje obr. 9 vpravo ve čtvrtém kvadrantu; U_{OC} a I_{SC} jsou hodnoty napětí naprázdno a proudu nakrátko. Tyto hodnoty jsou ovlivněny právě parametry výše uvedenými. Plocha největšího vepsaného obdélníku udává největší výkon, který lze z článku získat ($U_m I_m$). Celková účinnost je pak poměr tohoto výkonu k příkonu, čili k výkonu dopadajícího světla. Na obrázku jsou tečnami znázorněny převrácené hodnoty sériového a paralelního odporu. Na adrese [11] je tzv. vzdálený experiment, kde je možno přímo z vaší místnosti změřit charakteristiku křemíkového článku při několika intenzitách osvětlení.

Konstrukce článků

a) anorganické články

Klasickou konstrukci křemíkového slunečního článku s hřebenovou horní elektrodou ukazuje obr. 10.



Obr. 10 Klasická konstrukce křemíkového článku zobrazující vytvořené elektrony (–) a díry (+) a jejich pohyb směrem k elektrodám. Přední elektroda má tvar hřebenu s takovou velikostí „prstů“, aby maximálně sbíraly náboje a přitom minimálně stínily světlo (L. A. Dobrzanski et al. J. Achievements in Mater. and Manufact. Engineering. 59 (2013), 67), upraveno.

Dokonalejší články jsou na povrchu opatřeny antireflexní vrstvou, která snižuje ztráty reflexí. Další pokrok představují texturované povrchy vytvořené leptáním [12]. Na povrchu jsou pak malé pyramidy; světlo odražené ze stran pyramid je využito tak, že je reflektováno dovnitř materiálu. Maximální účinnosti článků z anorganických materiálů jsou uvedeny v Tabulce 1.

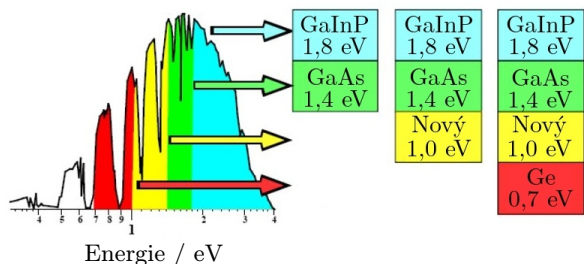
Tabulka 1: Účinnosti slunečních článků a modulů při osvětlení AM1,5 [13]

TYP ČLÁNKU	ÚČINNOST (%)	PLOCHA zkoumaného článku (cm ²)	VÝROBCE
křemík			
Si krystalický článek	26,7 ± 0.5	79	Kaneka, N-typ
Si polykrystalický článek	22.3 ± 0.4	3.9	Fraunhofer ISE, N-typ
články III-V			
GaAs tenká vrstva	29,1 ± 0.4	1	Alta devices
chalkogenidy			
CIGS	23,4± 0.5	1	Solar Frontier
CdTe	21,0± 0.4	1	First Solar
Amorfni/mikrokrystalický Si			
Si amorfni	10,2± 0.3	1	AIST
Si mikrokrystalický	11,9± 0.3	1	
perovskity			
článek z perovskitu	24,2± 0.8	0,1	KRICT, Korea
článek z perovskitu	20,9± 0.7	1	KRICT, Korea
modul	17,3± 0.6	703	Toshiba
články Graetzelova typu (barvivové)	10 -13		
článek	11,9± 0.4	1	Sharp
modul	8,8± 0.3	400	Sharp
organika			
organický článek	16,4± 0.2	0,04	SCUT, China
organický článek	16,4± 0.4	0,04	HKUST, Hong Kong
organický článek	11,2± 0.3	1	Toshiba
modul	9,7± 0.3	26	Toshiba

Pro lepší využití slunečního záření se konstruuji tzv. tandemové články složené ze dvou nebo více jednotlivých článků s rozdílnými šířkami zakázaného pásu. Světlo dopadá na vrchní článek s nejširším zakázaným pásem a postupuje do dalšího článku s nižším pásem, kde jsou využity delší vlnové délky (obr. 11).

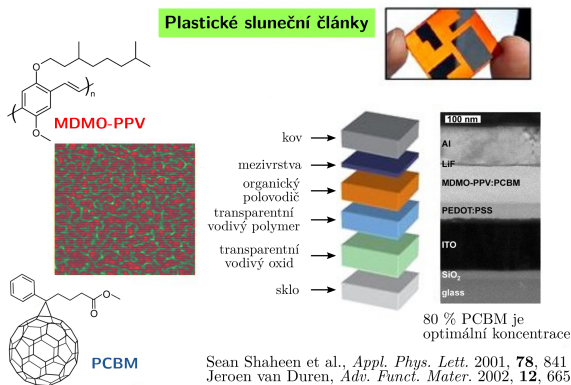
b) organické články

První organické články měly podobu dvou vrstev opačného typu vodivosti nanesených na sobě. Především vzhledem k nízkým difúzním délkám byla jejich účinnost velmi malá (< 1 %). Mnohem lepších výsledků se dosáhlo promícháním obou typů polovodičů v jedné vrstvě. Vznikl tak tzv.



Obr. 11 Využití sluneční energie v tandemovém článku. Účinnost dvouvrstvého tandemu je 31 %, třívrstvého tandemu 38 % a čtyřvrstvého tandemu 41 %. „Nový materiál“ může být např. GaInNAs.

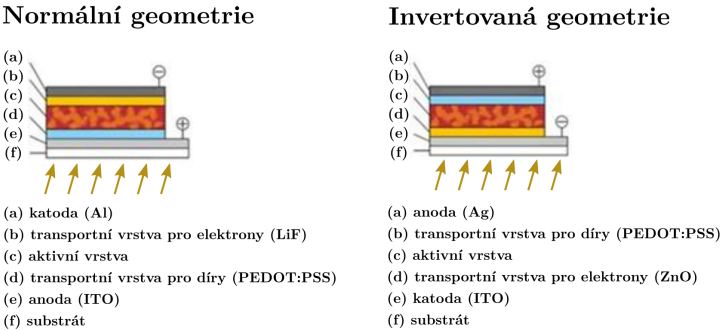
objemový článek. Materiálem typu P bývá polymer a materiálem typu N fulleren. Tím se zvýší plocha přechodu, na které se rozdělují excitony a současně klesne vzdálenost, kterou musí excitony urazit, aby se k přechodu dostaly (obr. 5). To vedlo k účinnostem postupně až nad 10 %. Na obr. 12 je struktura plastického článku s organickým polovodičem MDMO-PPV (derivát polyphenylenu vinilenu) ve směsi s fullerenem.



Obr. 12 Struktura plastického článku s organickým polovodičem MDMO-PPV (derivát polyphenylenu vinilenu) ve směsi s fullerenem. Tenké mezivrstvy LiF a PEDOT:PSS napomáhají přenosu nábojů k elektrodám.

V současnosti účinnost článků z organických materiálů překročila hranici 10 %, která se již považuje za ekonomicky zajímavou. Struktura článků je ovšem složitější. Pod elektrodami jsou tzv. transportní vrstvy, které

propouštějí ke katodě pouze elektrony, resp. k anodě pouze díry, aby nedocházelo ke ztrátám nábojů rekombinací. Situace je vidět na obr. 13 jak pro případ normální geometrie, tak pro geometrii invertovanou, kde je článek chráněn proti vlivu atmosféry (jedná se především o oxidaci hliníku) vrchní stříbrnou elektrodou.



Obr. 13 Sluneční článek s objemovým heteropřechodem opatřený vodivými vrstvami, které přenášejí elektrony a díry k příslušným elektrodám (transportní vrstvy pro elektrony a díry). Obrázek vlevo ilustruje normální geometrii, obrázek vpravo invertovanou geometrii (pv.sjtu.edu.cn/research.html).

Tabulka 2: Účinnosti slunečních článků a modulů při koncentraci záření (4. sloupec) [13]

TYP ČLÁNKU	ÚČINNOST (%)	PLOCHA (cm2)	INTENZITA AM1.5	VÝROBCE
GaAs	29,3± 0.7	0.1	49.9	LG Electronics
Si	27,6 ± 1,2	1	92	Amonix
CIGS tenká vrstva	23,3± 1,2	0,1	15	NREL
AlGaInP/AlGaAs/GaAs/GaInAs	47,1± 2,6	0,1	143	NREL
GaInP/GaInAs/Ge;Si	40,6± 2,0	287	365	UNSW

Poznámka: AM1.5 je zářivý tok dopadající na Zemi po průchodu 1,5 násobkem tloušťky zemské atmosféry a o hustotě výkonu 930 W/m². Tato hodnota se používá nejčastěji.

Fotovoltaické systémy

Jednotlivé články se používají jen v aplikacích, jako jsou např. kalkulačky, hodinky, nabíječky, nebo drobné osvětlení. Spojením několika článků vznikají moduly o ploše desítek až stovek cm², kde se články spojují do sé-

rie i paralelně. V praxi se setkáváme s fotovoltaickými panely, které jsou na přední straně opatřeny sklem odolným proti nárazu a zapouzdřeny do plastického materiálu a obvykle mají kovový rám. Dalším stupněm je zapojení panelů do fotovoltaických systémů často doplněných akumulátory, které dodávají energii v noci, nebo při nedostatečném slunečním svitu. Stejnoseměrný proud z panelů je přeměněn na střídavý pomocí invertorů, aby mohl být použit pro síťové spotřebiče a pro dodání do rozvodné sítě. Panely většinou nevyžadují údržbu a životnost v případě křemíkového krystalického materiálu je 20 až 30 let. Jako ukázkou uvádíme fotovoltaický systém instalovaný v roce 2003 na střeše Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze v areálu Trója (obr. 14). Je to případ fotovoltaické (PV) elektrárny s výkonem 20 kW. Tato elektrárna vyrobí ročně přibližně 20 MWh elektrické energie. Podle údajů z roku 2017 je v ČR instalováno 28 315 PV elektráren s úhrnným výkonem 2 110 MW. Energetický regulační úřad ve zprávě o provozu elektrizační soustavy v České republice uvádí, že ve 4. čtvrtletí roku 2018 byl celkový instalovaný výkon PV elektráren 2 048,9 MW. V ČR je největší PV elektrárna v bývalém výcvikovém areálu Ralsko s výkonem 38,3 MW (obr. 15), následuje elektrárna Vepřek v Nové Vsi o výkonu 35,1 MW a Brno-letišť Tuřany s 21,2 MW.



Obr. 14 Sluneční elektrárna na střeše budovy Matematicko-fyzikální fakulty v Praze Tróji. Výkon elektrárny postavené v roce 2003 je 20 kW.

Většina elektráren byla spuštěna v roce 2010. V Evropě dosáhl roční instalovaný výkon maxima v roce 2011, a to asi 20 000 MW. V současnosti se uvádí, že největší PV elektrárna v Evropě je ve Španělsku s instalovanou kapacitou 300 MW. Na 2. a 3. místě jsou PV elektrárny na dvou místech



Obr. 15 Sluneční elektrárna v Ralsku o výkonu 38,3 MW (www.fotovoltaiickepanely.eu)



Obr. 16 Sluneční elektrárna ve Spojených arabských emirátech se současně nejvyšším výkonem 1,2 GW (www.pveurope.eu).

v Německu (54 MW a 53 MW), kde se jedná o tenkovrstvé panely. Při tom celkový instalovaný výkon v Německu je 45,9 GW. V roce 2019 byla uvedena do provozu největší elektrárna na světě. Je instalována ve Spojených arabských emirátech a má výkon 1,2 GW (obr. 16). Nabízí elektřinu velmi levně, údajně jen za 55 haléřů za 1 kWh. V roce 2017 bylo uvedeno, že celkové množství výkonu z PV zařízení je 227 GW a bylo vyrobeno hlavně v Číně, Japonsku a USA. Všechny tyto údaje jsou převzaty ze Serveru Google a z [14]. Organické PV panely bývají často zkonstruovány z článků tištěných na ohebnou folii. Pro lepší využití slunečního záření a pro zvýšení celkové účinnosti se počítá s tandemovými články. Obr. 17 ukazuje tištěné a srolovatelné organické moduly vyráběné v Dánsku [15]. Principiálně jimi lze pokrýt i střechy, nebo fasády domů.



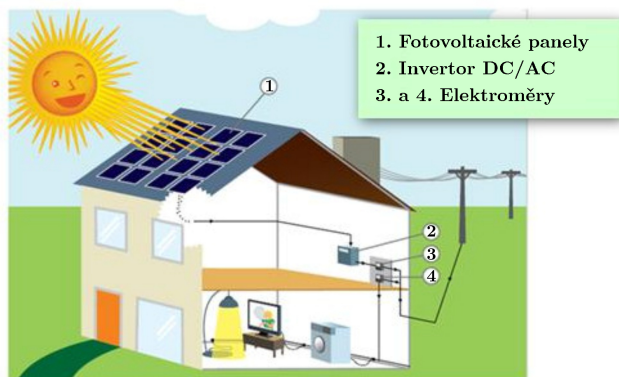
Obr. 17 Srolovatelný modul z organických článků tištěný na ohebné folii vyráběný v Dánsku (infinitypv.com).

Střešní panely

Velký praktický význam mají panely umístěné na střechách obytných nebo veřejných budov. Zajímavostí je např. instalace solárních panelů na střeše provozní budovy Národního divadla v Praze, nebo střešní elektrárna v Ostrožné Lhotě postavená v neužívané průmyslové zóně. Na střechách obytných domů se podle rozsahu spotřeby uplatňují panely s výkonem 3 kW_p až 5 kW_p (W_p je tzv. špičkový výkon při dopadu zářivého toku 1 kW/m^2) jakožto vlastní zdroje doplněné baterií (obr. 18).



Obr. 18 Obytné domy se střešní elektrárnou v kombinaci s baterií (www.solarenavi.cz).



Obr. 19 Ilustrace sluneční elektrárny v kombinaci s rozvodnou sítí.

Hybridní systémy využívají kombinace střešní elektrárny a rozvodné sítě. Situaci ukazuje schematicky obr. 19, kde jsou na střeše umístěny moduly, větší střechy bývají rovněž pokryty fotovoltaickými panely. V případě nedostatku slunečního svitu je možno odebírat energii ze sítě a naopak při jeho přebytku energii do sítě dodávat.

Literatura

- [1] *Lorenzo, E. et al.*: Solar Elektricitiy. Engineering of Photovoltaic System. Earthscan Publications Ltd. & PROGENSA, 1994.
- [2] *Brabec, Ch., Scherf, U., Dyakonov, V. (Eds.)*: Organic Photovoltaics. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2008.
- [3] *Smestad, G. P., Graetzel, M.*: Demonstrating electron transfer and nanotechnology: A natural dye-sensitized nanocrystalline energy converter. J. Chem. Educ. 75(6) (1998), 752–756.
- [4] Man Solar 2006. www.mansolar.nl/
- [5] *Lüssem, B., Riede, M., Leo, K.*: Doping of organic semiconductors. Physica Status Solidi A 210 (2013), 9–43.
- [6] *Li, W. et al.*: Polymer solar cells with diketopyrrolopyrrole conjugated polymers as the electron donor and electron acceptor. Advanced Materials 26(20) (2014), 3304–3309.
- [7] *Holovský, J. et al.*: Photocurrent spectroscopy of perovskite layers and solar cells: A sensitive probe of material degradation. J. Phys. Chem. Letters 8(4) (2017), 838–843.
- [8] Nanjing University. www.nju.edu.cn/en/main.psp
- [9] University of Toronto. www.utoronto.ca/
- [10] Swansea University. www.swansea.ac.uk/
- [11] iSES – Internet School Experimental System. www.ises.info
- [12] *Green, M. A.*: Solar Cells: operating principles, technology, and system applications. Prentice–Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1982.
- [13] *Green, M. et al.*: Solar cell efficiency tables (version 54). Progress in Photovoltaics 27(7) (2019), 565–575.
- [14] oEnergetice.cz – denní zpravodajství z energetiky. oenergetice.cz/
- [15] *Krebs, F. C., Fyenbo, J., Jørgensen, M.*: Product integration of compact roll-to-roll processed polymer solar cell modules: methods and manufacture using flexographic printing, slot-die coating and rotary screen printing. J. Mater. Chem. 20(41) (2010), 8994–9001.

Počítačová grafika, 1. část

EDUARD BARTL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Počítačová grafika je zajímavou a bezesporu důležitou informatickou disciplínou, která se zabývá metodami pro tvorbu a manipulaci digitálního obrazu, případně digitální animace (někdy je počítačovou grafikou také nazýván předmět zájmu této disciplíny, tedy právě zmíněný digitální obraz nebo animace). Přes svoji důležitost je jí ve výuce informatiky zpravidla věnováno málo nebo vůbec žádný prostor. Cílem tohoto několikadílného příspěvku tedy je poskytnout čtenáři (zejména učiteli nebo studentovi na střední škole) základní vhled do této disciplíny formou, která je – alespoň podle skromného názoru autora – v určitém ohledu neotřelá.

1. Úvod

Počítačová grafika se zrodila brzo poté, kdy se objevily první elektronické počítače.¹⁾ Důvodem je patrně skutečnost, že pro většinu lidí je přirozené vnímat okolní svět pomocí obrazové informace. Pokud tedy počítač vykoná nějaký výpočet, jehož výsledek se nedá jednoduše vyjádřit (například pomocí jednoho nebo několika málo čísel) a přesto má být pro člověka snadno a rychle vstřebatelný, pak jej zpravidla vyjádříme s využitím nějakého grafického prvku. Třeba můžeme číselné výsledky uspořádat do tabulky, ve které jsou jednotlivé buňky odděleny čarami, nebo můžeme výsledek zobrazit pomocí grafu. Velmi dobrým příkladem užitečnosti grafického zobrazení je výsledek měření výpočetního tomografu; lékař jistě ocení, když výsledkem nebudou miliony čísel popisujících strukturu zkou-

¹⁾Termín počítačová grafika poprvé použili roku 1960 Verne Hudson a William Fetter, kteří pracovali pro společnost Boeing.

maného objektu, ale jeden trojrozměrný obrázek přímo znázorňující tento model.

Počítačová grafika zaujímá v informatice poněkud zvláštní místo. Je to zjevně dáno tím, že ke svému životu potřebuje nejen matematiku a některá další informatická odvětví (jmenujme například lineární algebru, geometrii, teorii informace a kódování, umělou inteligenci), ale i několik zcela neinformatických disciplín (kupříkladu psychologii, fyziologii oka nebo optiku). Neobvyklé postavení počítačové grafiky v informatice je také dáno jejím využitím ve výtvarném umění a filmové tvorbě.

Počítačovou grafiku můžeme rozdělit na dvourozměrnou a trojrozměrnou počítačovou grafiku podle toho, zdali je jejím předmětem zájmu dvourozměrný (často také říkáme 2D) nebo trojrozměrný (3D) obraz nebo animace. Trojrozměrná počítačová grafika využívá metody dvourozměrné a významným způsobem je obohacuje o další metody, které řeší problémy typické pro trojrozměrné scény, například řešení viditelnosti, osvětlení scény, zobrazování stínů atd. Tento několikadílný článek se bude zabývat výhradně dvourozměrnou počítačovou grafikou.

2. Matematický model obrazu

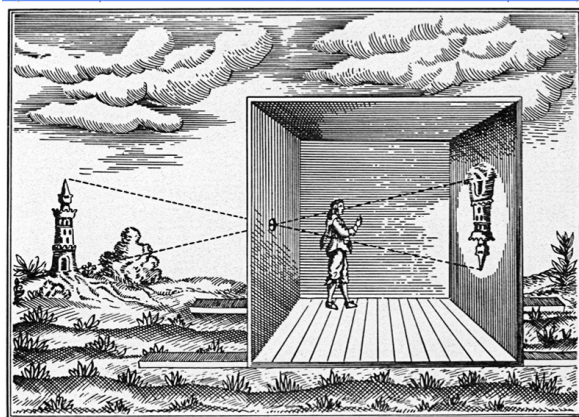
Digitální obraz můžeme uměle vygenerovat (jak uvidíme v dalších dílech tohoto článku) nebo získat pomocí nějakého zařízení. Zastavme se nyní krátce u problematiky získávání dvourozměrného obrazu. Toto mírné odbočení nám později pomůže zavést jednoduchou definici digitálního obrazu, ze které pak můžeme vyvodit, jakým způsobem uložit obraz do paměti počítače.

V současné době nejpoužívanějším zařízením pro získání obrazu je bezesporu digitální fotoaparát. Digitální fotoaparát je postaven na principu klasického fotoaparátu a je doplněn o elektronické zařízení, které obdržený obraz takzvaně *digitalizuje*, tedy převede do podoby, která umožňuje jeho uložení na elektronické paměťové médium.

Je všeobecně známo, že první fotografie se objevily v první polovině 19. století. Méně známá je však skutečnost, že princip klasického fotoaparátu je založen na zařízení, které se jmenuje *camera obscura*²⁾ a jehož princip byl popsán Aristotelem kolem roku 350 před naším letopočtem. Dobové vyobrazení *camera obscura* na obr. 1 dobře vystihuje, jakým způsobem

²⁾ Překlad tohoto latinského názvu je *tmavý pokoj*; mohli bychom jej přeložit také jako *temná komora*. V anglické literatuře se často používá název *pinhole camera* – *dírková komora*.

toto zařízení pracuje. Technická realizace je ve skutečnosti o něco složitější, velikost otvoru ve stěně totiž ovlivňuje kvalitu získaného obrazu na průmětně. Čím je otvor větší, tím více světla dopadá na průmětnu, obraz je tak jasnější, ale kvůli difrakci je rozmazanější. Zmenšením otvoru získáme ostřejší obraz, který je však málo jasný. Tento problém se řeší umístěním vhodné čočky do otvoru stěny.



Obr. 1 Camera obscura (13. století), zdroj Wikipedia

Získaný obraz na průmětně camera obscury můžeme popsat pomocí funkce

$$o: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow C, \quad (1)$$

které budeme říkat *obrazová funkce* a která bodu o souřadnicích $\langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ přiřazuje nějakou barvu z množiny všech barev C .

Zdůrazníme, že obrazová funkce je velmi obecným *matematickým modelem* získaného obrazu. Pokud bychom ji chtěli použít k uložení obrazu do paměti počítače, případně k zobrazení obrazu na displeji, tak příliš neuspějeme. Důvody jsou dva.

Zprvė, jednotlivými prvky množiny C jsou barvy, které jsou pro naše účely příliš abstraktními objekty. Každou barvu v množině C bychom měli být schopni nějak rozumně popsat, nejlépe pomocí čísla nebo několika málo čísel. Touto problematikou se budeme zabývat v sekci 3, 4 a 5.

Zadruhé, body tohoto obrazu jsou ideální objekty (například jim budeme říkat *geometrické body*) patřícími do geometrického světa, v našem reálném světě se však nevyskytují – neumíme je žádným zařízením zobrazit a

neumíme je ani vidět. Přesto si je umíme v naší mysli představit, a proto také o nich teď můžeme rozprávět. Jakým způsobem pracovat s těmito geometrickými body si povíme v sekci 6.

3. Barvy

Zabývat se podrobně popisem barev vyžaduje hluboké znalosti optiky, fyziologie lidského oka a dalších souvisejících disciplín. Abychom se příliš nevzdalovali od směru našeho výkladu, pokusíme se být maximálně struční. Zopakování několika základních pojmů z optiky se však nevyhneme.

Jak víme, světlo je elektromagnetické vlnění, které je charakterizováno vlnovou délkou λ a frekvencí f , mezi kterými platí známý vztah

$$\lambda = \frac{c}{f},$$

kde c je rychlost světla ve vakuu. Zajímat nás bude pouze malý rozsah vlnových délek, přibližně od 400 nm do 700 nm. V tomto rozsahu jsme totiž schopni světlo vnímat naším zrakem, proto také nazýváme toto světlo *viditelným světlem*. Různé vlnové délky viditelného světla vyvolávají odlišný zrakový vjem – vnímáme je jako světlo různé *barvy*. Konkrétně, viditelné světlo s vlnovou délkou v rozsahu přibližně od 400 nm do 450 nm vnímáme jako fialové, v rozsahu od 450 nm do 490 nm jako modré, od 490 nm do 560 nm jako zelené, od 560 nm do 590 nm jako žluté a od 590 nm do 700 nm jako červené. Těmto barvám říkáme *spektrální barvy*.³⁾ Celé barevné spektrum je znázorněno na obr. 2.



Obr. 2 Barevné spektrum, zdroj Wikipedia.

Další barvy vznikají složením spektrálních barev. Například bílá barva vzniká složením viditelného světla všech vlnových délek.

Doposud jsme se bavili o *barvě světla*. Pokud ovšem použijeme slovo *barva* v běžné mluvě, tak tím máme zpravidla na mysli barvu nějakého

³⁾Někdy se mezi spektrální barvy uvádí také tyrkysová barva, která je v barevném spektru na rozhraní mezi modrou a zelenou (vlnová délka kolem 490 nm, a dále pak oranžová barva, jež je na rozhraní mezi žlutou a červenou (vlnová délka kolem 590 nm).

předmětu. Jak tedy spolu souvisí barva světla s barvou předmětu? Odpověď je jednoduchá. Barva předmětu je dána barvou odraženého světla. Pokud během vegetačního období posvítí na list lípy bílé světlo, odražené světlo bude v zelené části spektra a my proto budeme tento list vnímat jako zelený.⁴⁾ Dobrým příkladem je také dopadající světlo na bílou stěnu pokoje. Taková stěna totiž velmi dobře odráží viditelné světlo všech vlnových délek. Posvítíme-li tedy na stěnu bílým světlem, téměř všechny vlnové délky se odrazí, složením vznikne opět bílé světlo, stěnu tak vnímáme jako bílou. Jestliže ale na stěnu posvítíme červeným světlem, odrazí se červené světlo a stěnu vnímáme jako červenou. Pokud bychom tedy neměli možnost zjistit barvu světla v místnosti, budeme přesvědčeni, že je stěna natřena na červeno.

4. Barevné modely

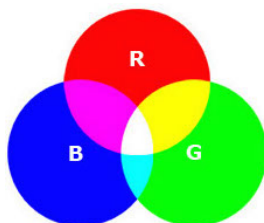
Řekli jsme si, že množina C v definici obrazové funkce obsahuje jako své prvky barvy. Jakým způsobem počítač s barvami pracuje? Počítač si jistě, narozdíl od člověka, neumí vytvořit vjem barvy. Jednotlivé barvy musíme nějakým způsobem kódovat tak, aby s nimi mohl počítač pracovat (například uložit je do paměti). K tomuto účelu složí *barevné modely*, z nichž nejznámější se nazývá RGB barevný model.

Jak můžeme tušit, zkratka RGB poukazuje na tři základní barvy, se kterými tento barevný model pracuje – jedná se o červenou (anglicky red), zelenou (anglicky green) a modrou barvu (anglicky blue). Výběr těchto základních barev není náhodný a souvisí se skutečností, že podstatnou část dalších barev (zdůrazněme, že nikoliv všechny) jsme schopni získat složením těchto tří základních barev. Pokud například posvítíme na nějaké místo bílé stěny baterkou, která vydává červené světlo a do stejného místa dále posvítíme baterkou, která vydává zelené světlo, odražené světlo bude mít barvu žlutou. Takovému skládání říkáme *aditivní*, schematicky

⁴⁾Souvisí to s chlorofylem, který je přítomný v rostlinách, sinicích a řasách. Chlorofyl totiž silně pohlcuje fialové, modré a červené světlo, vlnové délky odraženého světla se budou pohybovat zejména kolem 550 nm, list lípy pak vnímáme jako zelený. Na podzim se však chlorofyl rozkládá, v listech začnou převládat třísloviny, které zelené světlo pohlcují a naopak odrážejí světlo žluté nebo červené barvy. Na podzim proto listy dostávají svoje typické červenožluté zbarvení.

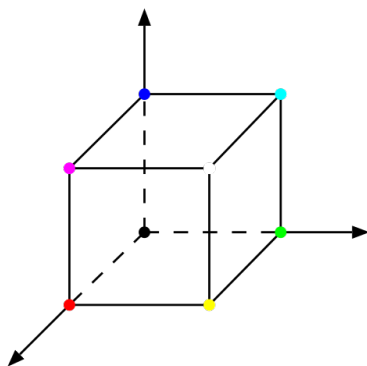
Pokud dáme někomu za úkol popsat, jak vypadá list stromu, tak jistě ve své odpovědi zmíní, že je zelený. Vlastnost „být zelený“ je tedy úzce svázána s významem sousloví „list stromu“. Uvědomíme-li si ale fyzikální podstatu věci, dojdeme k poněkud překvapivému zjištění, že je totiž tento úzký vztah dán „nepřátelským“ chováním listů k zelené barvě světla – je to jediná barva, kterou odráží.

je znázorněno na obr. 3.



Obr. 3 Aditivní skládání barev, zdroj Wikipedia

RGB model znázorňujeme pomocí jednotkové krychle, které říkáme *RGB krychle*. Vidíme ji na obr. 4. Krychle je umístěna do souřadnicového

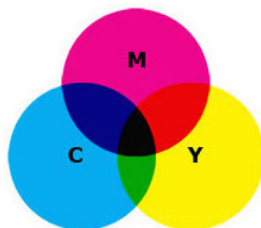


Obr. 4 RGB krychle, zdroj Wikipedia

vého systému způsobem, který vidíme na právě zmíněném obrázku. Každá barva je určena, jak jsme již řekli, určitým zastoupením základních barev – červené, zelené a modré barvy. Barvu zobrazitelnou RGB modelem tedy reprezentujeme jako bod o souřadnicích $\langle r, g, b \rangle$, kde r , g a b jsou reálná čísla z intervalu $[0, 1]$, která vyjadřují stupeň zastoupení základních barev. Například tedy černá barva je reprezentovaná bodem o souřadnicích $\langle 0, 0, 0 \rangle$, žlutá barva (vzniklá složením červené a zelené) je reprezentovaná bodem o souřadnicích $\langle 1, 1, 0 \rangle$, bod $\langle 0.7, 0.7, 0.7 \rangle$ určuje barvu, kterou bychom mohli pojmenovat jako světle šedá a podobně.

Vidíme tedy, že ve vrcholech leží základní barvy nebo barvy, které vznikají složením základních barev – těm se říká *doplňkové barvy* a jedná se o tyrkysovou (anglicky cyan), purpurovou (anglicky magenta) a žlutou (anglicky yellow). Na tělesové uhlopříčce se nacházejí šedé odstíny, které začínají v počátku souřadnicového systému černou barvou a končí v protilehlém vrcholu bílou barvou. Vzdalováním se od tělesové úhlopříčky obdržíme barvy, které jsou více satureované (syté). Saturace a desaturace barvy jsou základními barevnými transformacemi a podrobněji se jimi budeme zabývat v příštím díle.

Pozastavme se ještě na chvíli u skládání barev. Řekli jsme, že skládání v RGB modelu funguje tak, že kupříkladu složením červené a zelené barvy vznikne barva žlutá. Toto skládání jde však zcela zásadně proti naší zkušenosti se skládáním (v tomto případě bychom možná spíše měli říct mícháním) vodových barev při malování na papír. Pokud totiž namalujeme vodovou barvou nějaký červený objekt a posléze ho přemalujeme na zeleno, jistě nevznikne žlutý, ale spíše hnědý obrázek. Tento typ skládání barev je samozřejmě zcela v souladu s tím, co jsme si doposud řekli; jen je potřeba dobře si uvědomit, že je takové skládání výrazně složitější. Na bílém papíru jsou totiž na sobě dvě vrstvy barvy, některé vlnové délky dopadajícího světla jsou první vrstvou odrazeny, jiné projdou do druhé vrstvy, od které se opět nějaké vlnové délky odrazí, jiné projdou až na papír. Výsledné odražené světlo, jehož barvu pak vnímáme, bude spíše tmavšího odstínu. Tomuto typu skládání barev se říká *subtraktivní*, znázorněno je na obr. 5.



Obr. 5 Subtraktivní skládání barev, zdroj Wikipedia

Na subtraktivním skládání barev je založen model, který je v jistém smyslu opačný k modelu RGB. Nazývá se CMY modelem. V uvedené zkratce jsou opět použity základní barvy, kterými jsou v tomto případě tyrkysová (C), purpurová (M) a žlutá (Y). Pozorný čtenář si jistě všiml,

že základní barvy CMY modelu jsou doplňkovými barvami RGB modelu. Dá se pak vytušit, že doplňkovými barvami modelu CMY budou právě základní barvy modelu RGB, tedy červená, zelená a modrá.

CMY model zobrazujeme opět jako krychli vhodně umístěnou do souřadnicového systému. Vše pak funguje stejně jako v RGB modelu – každá zobrazitelná barva je reprezentována bodem ležícím uvnitř nebo na povrchu krychle a číselně vyjádřená souřadnicemi $\langle c, m, y \rangle$, kde $c, m, y \in [0, 1]$ určují stupeň zastoupení jednotlivých základních barev; rozdíl oproti RGB modelu je pouze ve volbě základních barev a v subtraktivnosti jejich skládání. V počátku souřadnicového systému je tedy bílá barva, v protilehlém vrcholu je černá barva a podobně.

Ze vzájemného vztahu základních a doplňkových barev v RGB a CMY modelu můžeme snadno odvodit obecný vzoreček umožňující transformovat jeden model na druhý. Pokud tedy budeme uvažovat jistou barvu, která má v RGB krychli souřadnice $\langle r, g, b \rangle$, tak jsou její souřadnice $\langle c, m, y \rangle$ v CMY krychli vyjádřeny vztahem

$$\langle c, m, y \rangle = \langle 1 - r, 1 - g, 1 - b \rangle.$$

Jak jsme si již řekli, RGB model je založen na aditivním skládání barev. Tento typ skládání se přesně hodí na popis barev zobrazovaných na CRT monitorech nebo LCD displejích. Fungování těchto dvou typů zobrazovacích zařízení je sice založeno na zcela jiných principech, oba však skládají světelné paprsky různých barev aditivním způsobem. CRT monitory i LCD displeje proto používají pro popis zobrazených barev RGB barevný model. CMY model využívající subtraktivní skládání se naproti tomu používá v tiskařské technice. V tiskařské praxi se však z technických důvodů přidává k základním barvám modelu CMY ještě jedna barva, totiž černá barva. Vzniká tak model CMYK (písmeno K odkazuje na anglické slovo black).

Barevné modely RGB a CMY mají jednu zásadní nevýhodu – tvorba barev v těchto modelech je málo intuitivní. Pokusíme se to demonstrovat na následujícím příkladu. Uvažujme barvu, která má v RGB modelu souřadnice $\langle 0.1, 0.83, 0.75 \rangle$. Tuto barvu si můžete zobrazit v nějakém grafickém editoru; kvůli vysokému podílu modré a zejména pak zelené barvy, bychom výsledek mohli pojmenovat jako zelenomodrá barva. Představme si nyní, že touto barvou vybarvíme v grafickém editoru nějaký geometrický objekt, ale později zjistíme, že je tato barva příliš světlá. Rádi bychom přibližně zachovali odstín této barvy, ale učinili ji trochu tmavší. Kterou

barevnou složku změníme a o kolik? Na tuto otázku se nedá uspokojivě odpovědět. Z tohoto důvodu se v různých grafických aplikacích používají i jiné barevné modely (například HSL nebo HSV modely, více informací o těchto modelech je možné najít na v [1] nebo v [2]).

5. Barevná hloubka

V počítačové grafice máme pro vyjádření zastoupení jednotlivých barev k dispozici jen omezené množství paměti. V dnešní době se zpravidla pro uložení každé základní barvy používá 1 bajt, tedy 8 bitů. Pro všechny tři základní barvy tedy potřebujeme 24 bitů. Celkový počet bitů potřebných pro vyjádření základních barev (a potažmo všech barev vyjádřitelných v daném barevném modelu) se nazývá *barevná hloubka*.

Systém využívající barevnou hloubku o velikosti 24 bitů se nazývá *true color* systém a dnes jej využívá například formát Blu-Ray. Pojmenování *true color* (do češtiny se překládá jako plurál – věrné barvy) bylo zvoleno proto, že díky 24 bitům jsme schopni vyjádřit celkem

$$2^{24} = 16\,777\,216 \text{ barev.}$$

Lidské oko je schopno rozlišit kolem 10 milionů barev, tato barevná hloubka tedy umožňuje uložit obrazovou informaci s věrným barevným vyjádřením.

V minulosti se kvůli technickým omezením používaly i menší barevné hloubky, například 16 bitů⁵⁾ (systémy využívající tuto hloubku se nazývají *high color* systémy), 12 bitů, 8 bitů nebo dokonce pouhé 4 bity.⁶⁾ Tyto barevné hloubky se však dnes využívají velmi zřídka, pouze v některých speciálních aplikacích. Naopak je možné setkat se s vyšší barevnou hloubkou, konkrétně 32 bitů. Otázkou je, zdali je užitečné nadále zvyšovat počet vyjádřitelných barev; ve skutečnosti je i v tomto případě použito 8 bitů na vyjádření každé základní barvy (stejně jako v případě 24 bitové

⁵⁾Mezi tři základní barvy bylo těchto 16 bitů zpravidla rozděleno tak, že na červenou a modrou barvu bylo vyčleněno po 5 bitech, na zelenou barvu pak 6 bitů.

⁶⁾Příkladem, který si autor nemůže dovolit z nostalgických důvodů neuvést, jsou osmi-bitové počítače, které byly velmi oblíbené v 80. letech 20. století. Konkrétně, v Československu velmi populární počítače Atari s označením 800XL (i některé pozdější modely) používaly několik grafických režimů; v jednom z nich byla k dispozici 4 bitová barevná hloubka, v jiném dokonce pouze 1 bitová (obraz byl tedy dvoubarevný, nikoliv však nutně černobílý). Většího počtu barev, než kolik byl schopen daný režim zobrazovat, bylo dosahováno sofistikovanými programátorskými technikami využívajících krátkého okamžiku, během kterého se paprsek vykreslující obraz na stínítko obrazovky vracel z konce jednoho řádku na začátek bezprostředně následujícího řádku.

barevné hloubky), poslední bajt je využit jako takzvaný alfa-kanál, kterým se realizuje průhlednost obrazu. O tom, jak alfa-kanál funguje, si povíme v jednom z následujících dílů článku.

6. Pixely

Pokud budeme chtít s geometrickými body obrazu pracovat v našem reálném světě, budeme z nich muset vytvořit objekty, které budeme schopni výpočetně „uchopit“. Takovým objektům se pak v počítačové grafice říká *fyzické pixely*.⁷⁾ Obvykle se definují jako obdélníkové plošky, které jsou těsně vedle sebe a pokrývají část průmětny, která nás zajímá.

Kromě fyzického pixelu budeme také v dalších dílech pracovat s pojmem *logického pixelu*. Důvodem pro zavedení tohoto pojmu je potřeba nějakým způsobem vyjádřit souřadnice daného fyzického pixelu – z fyzického pixelu tedy vybereme nějaký geometrický bod (často je to střed fyzického pixelu nebo jeden z jeho vrcholů) a tomuto bodu budeme říkat logický pixel. Souřadnice logického pixelu pak určují souřadnice příslušného fyzického pixelu.

K fyzickým a logickým pixelům se vrátíme později (například při výkladu Bresenhamova algoritmu pro rasterizaci základních geometrických útvarů), vše si pak demonstrujeme na obrázcích. Dodejme, že pokud budeme mluvit o *pixelu*, tak tím budeme mít na mysli fyzický pixel.

7. Digitální obraz

Vraťme se nyní k obrazové funkci o , viz předpis (1). Řekli jsme si, že se jedná o velmi obecný a pro praktické účely nepříliš vhodný model obrazu. Pomocí barevných modelů si však umíme poradit s množinou všech barev C a pomocí fyzických a logických pixelů si umíme poradit i s jednotlivými geometrickými body tohoto obrazu.

Pokud budeme chtít na počítači zpracovat obraz získaný na průmětně camera obscura, vytvoříme z něho takzvaný *digitální obraz*. Postup je následující. Na průmětně camera obscura nejprve nadefinujeme obdélníkovou oblast našeho zájmu. Počátek souřadnicového systému umístíme do některého z vrcholů tohoto obdélníka. V počítačové grafice se tento počátek zpravidla umísťuje do levého horního rohu, kladná polovina osy x směřuje doprava, jak jsme zvyklí; kladná polovina osy y však obvykle smě-

⁷⁾Slovo *pixel* vzniklo zkrácením anglických slov *picture element*, tedy *obrazový bod*. Svého času byla také zavedena zkratka *pel*, ta se však neujala.

řuje dolů. Obraz je tedy určen barvami všech geometrických bodů ležících v obdélníkové oblasti našeho zájmu.

Obdélníkovou oblast našeho zájmu pak souvisle pokryjeme fyzickými pixely. Logický pixel každého fyzického pixelu umístíme například do jeho levého horního vrcholu. Měřítka na osách zvolíme tak, aby měly fyzické pixely jednotkovou šířku i výšku. Důsledkem toho je, že x -ová i y -ová souřadnice logického (a potažmo i fyzického) pixelu je přirozené číslo. Barva fyzického pixelu o souřadnicích $\langle x, y \rangle$ je pak určena barvou příslušného logického pixelu, tedy hodnotou $o(x, y)$.⁸⁾ Tuto barvu pak kódujeme s využitím nějakého barevného modelu. V případě RGB modelu nebo CMY modelu tedy barvu kódujeme jako trojici čísel, kde jednotlivá čísla této trojice určují stupeň zastoupení základních barev.

Z pohledu programátora je digitální obraz dvourozměrným polem, jehož hodnoty určují barvy příslušných pixelů. Takto definovanému digitálnímu obrazu se v počítačové grafice říká *rastrový obraz* nebo *rastrová grafika* (pixely nesoucí informaci o barvě totiž tvoří rastr). Existují i jiné přístupy (například *vektorová grafika*), které se však používají jen v některých speciálních aplikacích a proto se jimi nebudeme zabývat.

8. Závěr

První díl série článků o počítačové grafice byl pouze úvodní. Čtenář byl seznámen se základními pojmy, které budou nezbytné pro pochopení dalších dílů. V těch se budeme věnovat zejména algoritmům využívaných ve dvourozměrné počítačové grafice.

Literatura

- [1] *Huges, J. F. a kol.: Computer Graphics. Principles and Practice. 3. vydání, Addison-Wesley, 2014.*
- [2] *Felkel, P., Sochor, J., Žára, J., Beneš, B.: Moderní počítačová grafika. 2. vydání, Computer Press, 2005.*
- [3] *Martíšek, D.: Matematické principy grafických systémů. Littera, 2002.*

⁸⁾V technické praxi se tomuto „odebíráni barev“ z obrazové funkce říká *vzorkování*. Vzorkování je pak součástí procesu, kterému se říká *digitalizace*. Problematika vzorkování a digitalizace je poměrně dosti složitá, vyžaduje znalost alespoň základních kurzů vysokoškolské matematiky. Pro účely tohoto článku jsme proto tyto pojmy značně zjednodušili; pro další výklad však bude tento zjednodušený pohled dostačující.

Kyberbezpečnost a informační bezpečnost na středních školách

JIŘÍ SEDLÁČEK – TOMÁŠ PITNER

Network Security Monitoring Cluster – Masarykova univerzita, Národní centrum kompetence pro kyberbezpečnost

Článek může sloužit jako rychlý orientační materiál pro vedení středních škol a učitele informatiky v tom, jaká jsou východiska výuky kyberbezpečnosti a informační bezpečnosti v dnešní době plné hrozeb pocházejících z online světa, a jak takovou výuku zavést do všech středoškolských RVP a ŠVP v České republice.

Nastíní nově vyvinutý trojúrovňový koncept výuky kyberbezpečnosti a informační bezpečnosti s nejvyšším stupněm v podobě *Juniorních center excellence (JCE)*. V dalším čísle se budeme podrobněji věnovat prvním zkušenostem s JCE a jejich službám pro ostatní školy v rámci daných regionů.

Kyberbezpečnost a informační bezpečnost

V dnešní dynamické době jsme stále častěji konfrontováni s pojmy IoT, IoS, IoP, . . . , Průmysl 4.0, chytré domy, chytrá města, cloudové služby, eGovernment, ale také kyberválka, kyberzločin, kyberšikana, kyberšpionáž, kybersabotáž, atd. Závislost dnešní společnosti na elektronických technologiích je stále vyšší a vyšší, stejně tak jako rizika z toho plynoucí.

Dne 1. 1. 2015 vešel v účinnost zákon č. 181/2014 Sb., o kybernetické bezpečnosti a o změně souvisejících zákonů (dále ZKB), ve znění pozdějších předpisů. To je v naší legislativě průlomový krok, díky němuž se začal měnit přístup ke kyberbezpečnosti nejen z pohledu organizačních a technických opatření, ale i v právní rovině (povinné subjekty mají zákonnou povinnost řešit kyberbezpečnost) a v oblasti vzdělávání a evangelizace. Počet povinných osob daný §3 ZKB byl v roce 2017, po transpozici evropské směrnice NIS, rozšířen. Obecně velkým strachákem, jakkoli iracionálně, je od 25. 5. 2018 evropské nařízení o ochraně osobních údajů známé pod názvem GDPR (General Data Protection Regulation).

Každý občan bude v osobním životě v kyberprostoru dříve či později řešit komunikaci se státní správou a samosprávou (eGovernment), bezpečnost svou, zabezpečení svého majetku, bezpečnost svých blízkých. Budování bezpečnostního povědomí a znalostní základny je proto nezbytné systematicky zajišťovat nejpozději na středních školách.

Národní strategie kybernetické bezpečnosti a očekávání od středních škol

Národní strategie kybernetické bezpečnosti (NSKB) České republiky na období let 2015–2020 konstatuje, že: Český model vzdělávání a výchovy v oblasti kybernetické bezpečnosti NEODPOVÍDÁ v současné podobě aktuálním požadavkům a trendům. Z tohoto důvodu pak nedostatečně vzdělává a vychovává na základním a středním stupni žáky a také v nedostatečné míře nabízí vysokoškolské programy, které by vytvářely odborníky na kybernetickou bezpečnost. Poptávka po těchto odbornících je přitom vysoká.

Národní strategie kybernetické bezpečnosti (NSKB) České republiky na období let 2015–2020 předpokládá v části F tato opatření:

F. Podpora vzdělávání, osvěta a rozvoj informační společnosti.

Navyšovat povědomí a gramotnost v otázkách kybernetické bezpečnosti jak u žáků a studentů základních a středních škol, tak i u široké veřejnosti, respektive koncových uživatelů, pomocí podpory iniciativ a osvětových kampaní, pořádáním konferencí pro veřejnost apod.

Modernizovat stávající vzdělávací programy na základní a středoškolské úrovni a podporovat na vysokoškolské úrovni nové studijní programy, které budou přímo vzdělávat experty na kybernetickou bezpečnost.

F.2.01 Modernizovat rámcové vzdělávací programy na základní a středoškolské úrovni.

Z výše uvedeného je zřejmé, že výuka kyberbezpečnosti není ve středním školství na úrovni odpovídající požadavkům rozvinuté informační společnosti. Školy musí ze zákona zajistit výuku studentů a současně chránit *informace o studentech* (zajištění dostupnosti, důvěrnosti a integrity), které jsou mnohdy charakteru *zvláštní kategorie osobních údajů* (viz např. dopady inkluze). Jsou povinny archivovat informace nezbytné k vystavení *opisů studijních dokladů* – dobrým příkladem, ovšem ze školství vysokého, je Masarykova univerzita, která již léta nabízí možnost dálkově ověřit platnost diplomu při znalosti jeho čísla a nově také vydává potvrzení o studiu opatřené *elektronickou pečeti* (Vertěši, 2020).

Principy informační bezpečnosti

V oblasti informační bezpečnosti jsou nezbytné:

- **Systémový přístup.** Každá organizace sestává z *lidí, procesů a technologií*. Problematika IB/KB je proto řešena komplexně.
- **Analytický přístup.** Než jsou přijímána rozhodnutí, je nezbytné danou problematiku podrobit analýze. Jedině tak je možné nasazovat vhodná a ekonomicky přijatelná řešení.
- **Měřitelnost.** IB/KB je postavena na měřitelnosti. Ať už z pohledu zavedených opatření, tak i z pohledu ekonomického, tzn. efektivity a účelnosti vynaložených nákladů.
- **Opakovatelnost a přenositelnost/kompatibilita.** Jak z pohledu času, tak z pohledu peněz je vhodné použít řešení, které je principiálně přenositelné i na ostatní obdobné organizace. Jde jak o kvalitu a ověření řešení, tak o jeho další rozvoj a výměnu zkušeností v komunitě uživatelů, dodavatelů a s akademickou sférou.
- **Standardy.** Tak jako jsou jako norma přijaty v oblasti IB standardy (např. normy řady ISO 27000), stejně tak je nutné tento přístup aplikovat na zvolená technická opatření. Otevřené standardy jsou jedna strana mince, dlouhodobě fungující spolehlivý dodavatel druhá.
- **Udržitelnost.** Nasazená řešení a technologie musejí dlouhodobě splňovat tytéž (nebo vyšší) požadavky na bezpečnost. To lze garantovat za podmínky jejich trvalé udržitelnosti, dostupnosti bezpečnostních varování, aktualizací, nástrojů pro monitoring a existence komunity s dostatečným know-how. Nezbytnost podmínkou udržitelnosti je rovněž ekonomická stránka – vybudované infrastruktury jak hardwarové, tak systémové a aplikační musejí být nejen nárazově na počátku, ale trvale finančně únosné. Nemá smysl vkládat velké prostředky na pořízení drahého řešení, když nebudou na provoz a údržbu, externí služby atd.
- **Racionalita.** Optimální přístup k řešení problematiky IB je postavený na *racionálních rozhodnutích podložených argumenty a fakty* (objektivně), nikoli dojmy.
- **Dokumentovatelnost.** Veškeré kroky jsou v oblasti IB/KB *dokumentovány*. Důvody jsou auditní (tzn. dohledatelnost, kdo, co jak a proč učinil), ale i udržení know-how (jak a proč se co technicky nastavovalo).
- **Systematičnost.** Souvisí se systémovým přístupem a s vědomím, že bezpečnost celku je odvislá od *bezpečnosti nejslabšího článku*.

- **Metodičnost.** Veškeré zaváděné postupy v IB/KB jsou aplikovány na základě předem stanovených *metodik*. Tedy nespolehat na improvizaci, ale postupovat systematicky a metodicky; metodiky existují, jen je používat.

Modelová koncepce výuky kyberbezpečnosti na SŠ

V rámci analýzy byly identifikovány 3 typy vzdělávacích programů informační bezpečnosti pro SŠ v ČR:

- I. Kategorie základní (KZ).
- II. Kategorie ICT (KICT).
- III. Kategorie JCE (KJCE).

Základ – KZ

Uvažuje se výuka pro všechny typy RVP, tedy těch, které s ICT nesouvisí, ale i RVP 18-20-M/01 Informační technologie, ŠVP *Kyberbezpečnost*, případně RVP *Kyberbezpečnost* v pilotním ověřování.

Předpokládá se tedy, že tato kategorie pokryje výuku IB/KB na všech školách, které nejsou více na tuto problematiku zaměřeny (specializovány) a dále na školách, které již vyučují RVP 18-20-M/01 *Informační technologie*, ŠVP *Kyberbezpečnost*, případně RVP KB v pilotním ověřování.

Informační bezpečnost a kyberbezpečnost uvažujeme vyučovat v základním rozsahu. Výuka je koncipována především se zaměřením na pokročilou evangelizaci, aby byli studenti dostatečně připraveni na fungování v rozvinuté informační společnosti. V rámci výuky pro kategorii *Základ* jsou uvažovány oblasti:

- *Úvod do informační bezpečnosti.*
- *Kyberprostor I.*
- *Sociální inženýrství.*
- *Právo v oblasti informační bezpečnosti I.*

Střed – KICT

Uvažuje se výuka v rámci RVP 18-20-M/01 *Informační technologie*, ŠVP *Kyberbezpečnost*, případně RVP *Kyberbezpečnost* v pilotním ověřování.

Předpokládá se tedy, že tato kategorie pokryje výuku IB/KB na všech školách, které již vyučují RVP 18-20-M/01 *Informační technologie*, ŠVP *Kyberbezpečnost*, případně RVP *Kyberbezpečnost* v pilotním ověřování.

Informační bezpečnost a kyberbezpečnost uvažujeme vyučovat ve středním rozsahu v návaznosti na základní rozsah. Školy jsou vybaveny učebnami ICT a mají tedy předpoklady pro výuku informační bezpečnosti a

kyberbezpečnosti nejen v teoretické, ale i v praktické rovině. Technická opatření je možné v počítačových učebnách implementovat a procvičovat dle možností dané školy. V rámci výuky pro KICT jsou uvažovány oblasti:

- *Informační bezpečnost v organizaci I.* (technická opatření u právnických osob nepodléhajících ZKB)

Top – KJCE

Uvažuje se výuka v rámci ŠVP *Kyberbezpečnost*, případně RVP *Kyberbezpečnost* v pilotním ověřování.

Předpokládá se tedy, že tato kategorie pokryje výuku IB/KB na všech školách, které již vyučují ŠVP *Kyberbezpečnost*, případně RVP *Kyberbezpečnost* v pilotním ověřování.

Informační bezpečnost a kyberbezpečnost uvažujeme vyučovat v návaznosti na střední a základní rozsah. Zvolené školy jsou excelentními centry s výukou kyberbezpečnosti a aspirující na vytvoření JCSIRT. Technické zázemí škol umožňuje i pokročilou praktickou výuku s možností procvičování vybraných technických opatření dle možností dané školy. Tyto školy mají roli lídra v oblasti IB v kraji. V rámci výuky pro KJCE jsou uvažovány oblasti:

- *Strategická analýza v organizaci.*
- *Integrovaná bezpečnost* (Informační bezpečnost, Kyberbezpečnost, Ochrana osobních údajů).
- *Kybernetický prostor II.*
- *Právo v oblasti informační bezpečnosti II.*
- *Standardy v oblasti informační bezpečnosti.*
- *Informační bezpečnost v organizaci II.*

Závěr

Jak je z výše uvedeného zřejmé, oblasti na sebe navazují. Tento model umožňuje výuku IB/KB na každé SŠ pro každý studijní obor na této SŠ; může nastat situace, že na jednu školu budou aplikovány všechny tři výše uvedené kategorie. Výuka IB/KB tedy nebude nadále doménou pouze pro školy se specializovanými studijními obory, jak tomu bylo doposud.

Literatura

- [1] *Veréši, M.*: Potvrzení o studiu na MUNI nově elektronicky a jedním klikem. Magazín M, Masarykova univerzita, Brno.
Dostupné z: <https://www.em.muni.cz/student/12394-potvrzeni-o-studiu-na-muni-nove-elektronicky-a-jednim-klikem>

ZPRÁVY

PRÆMIUM BOHEMIÆ 2019 mladým přírodovědcům

BOHUMIL VYBÍRAL – JAN KŘÍŽ

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové



Od roku 2001 se již stalo tradicí každoroční oceňování velmi úspěšných mladých přírodovědců, studentů a studentek, kteří se prosadili na přírodovědných olympiádách s celosvětovou účastí a získali zde medaile. Oceňovat úspěchy mladých lidí je záslužné a prozíravé, zvláště v oborech, které mají velký potenciál pro rozvoj společnosti. Těmi obory jsou, vedle technických oborů, zejména přírodní vědy včetně matematiky a informatiky.

Česká veřejnost se o úspěších mladých přírodovědců dozví bohužel málo. Je na škodu věci, že české sdělovací prostředky těmto úspěchům věnují jen malou (spíše žádnou) pozornost. Soustřeďují se spíše na politiku, na sport (bez ohledu na úspěchy v něm), na kriminalitu aj. Velmi záslužná proto je iniciativa rodinné *Nadace Bohuslava Jana Horáčka Českému ráji* (dále jen *Nadace*) oceňující již 18 let významnými cenami nejúspěšnější mladé české naděje v oblasti přírodních věd.

Prestížní nadační ocenění PRÆMIUM BOHEMIÆ uděluje Nadace v den výročí narození jejího zakladatele, mecenáše a filantropa Bohuslava Jana Horáčka (narodil se 4. prosince 1924 v Radvánovicích u Turnova, zemřel 18. října 2002 ve Stuttgartu). Cenu PRÆMIUM BOHEMIÆ získávají čeští studenti, úspěšní účastníci přírodovědných olympiád s celosvětovou účastí v oborech fyzika, chemie, biologie, matematika, informatika a astronomie

s astrofyzikou v příslušném kalendářním roce. Slavnostní akt udílení nadačních cen se koná na státním zámku Sychrov u Turnova. Nadace českým studentům a studentkám v letech 2001 až 2019 udělila celkem již 410 cen PRÆMIUM BOHEMIÆ (z toho 28 cen v roce 2019). Studenti za 19 ročníků získali finanční ocenění v celkové významné částce 7 miliónu 615 tisíc Kč (z toho 635 tisíc Kč v roce 2019). Cena, mimo morální prestiže, zahrnuje medaili B. J. Horáčka ze stejného kovu jako medaile olympijská (s vyraženým jménem laureáta na rubu), diplom a finanční odměnu. Za získání zlaté medaile laureát získává 50 tisíc Kč, za stříbrnou 25 tisíc Kč a za bronzovou 15 tisíc Kč. Mimo tato ocenění laureáti v roce 2019 obdrželi e-knihu B. Vybírala *Technické aplikace fyziky* s četnými přílohami, jejíž vydání, vedle JČMF (spolku v Hradci Králové) sponzorovala Nadace. Kromě uvedených řádných cen, Nadace v minulých letech udělila i mimořádné ceny PRÆMIUM BOHEMIÆ v hodnotě 10 tisíc Kč každému členovi českého zlatého týmu z evropské přírodovědné soutěže EUSO. Laureát může v určitém ročníku získat i více nadačních cen, získal-li na různých těchto soutěžích v daném roce medaile (např. v roce 2019 bylo uděleno 28 cen 16 studentům a 6 studentkám. Někteří mimořádně úspěšní studenti získali nadační ceny ve dvou i třech po sobě jdoucích letech.



Obr. 1 Nejúspěšnější čeští mladí přírodovědci z let 2018 a 2019: Jindřich Jelínek (na olympiádách z astronomie a astrofyziky v Číně 2018 a v Maďarsku 2019 získal zlaté medaile a na fyzikálních olympiádách v Portugalsku 2018 a Izraeli 2019 stříbrné medaile). Vpravo je Jan Obořil (získal zlaté medaile na světových chemických olympiádách v Česku a Slovensku 2018 a ve Francii 2019 a na evropské přírodovědné soutěži EUSO ve Slovinsku 2018 zlatou medaili), foto B. Vybíral

Slavnost na zámku Sychrov 2019

Podle tradice se slavnostní udílení cen konala v den 95. výročí narození mecenáše Bohuslava Jana Horáčka. Bylo to ve středu 4. prosince 2019 v zámeckém divadle na státním zámku Sychrov. Slavnosti se zúčastnili nejen ocenění studenti a studentky s rodinným doprovodem, ale i vzácní hosté. Mezi ně patřili představitelé českých přírodovědných olympiád, zástupci některých škol vyznamenaných studentů, předseda správní rady Nadace Jan Horáček (syn mecenáše) a členové správní a dozorčí rady Nadac; rovněž zástupci sdělovacích prostředků. Nejvzácnějším hostem byla delegace Učené společnosti ČR v čele s její předsedkyní prof. RNDr. Blankou Říhovou, DrSc.

Po hudebním úvodu slavnost zahájil krátkým projevem předseda správní rady Nadace Jan Horáček. Poté se ujala slova předsedkyně Učené společnosti prof. RNDr. Blanka Říhová, DrSc. Jménem Jednoty českých matematiků a fyziků, která garantuje tři z oceňovaných soutěží, promluvil prof. Ing. Bohumil Vybíral, CSc. Hlavní projev proslovil doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D., děkan Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové a předseda FO. Ve svém projevu mj. shrnul a ocenil úspěšnou účast českých studentů a studentek v oceňovaných soutěžích na světových kolbištích (jeho projev otiskujeme dále). Poté Jan Horáček a prof. Bohumil Vybíral předali studentům a studentkám ocenění. Za vyznamenané studenty promluvil Jan Obořil, držitel zlaté medaile z Mezinárodní chemické olympiády. Hudební vystoupení zajistili žáci Základní umělecké školy v Turnově. Slavnost moderoval Lukáš Váňa. Krátkou reportáž o udílení cen PRÆMIUM BOHEMIÆ 2019 zařadila do večerních *Událostí* 4. 12. 2019 Česká televize (viz Archiv ČT na webu). Byl rovněž profesionálně pořizován videozáznam podstatných částí slavnosti a byly natočeny rozhovory s některými účastníky (videozáznam je umístěn na internet, na *YouTube*).

České úspěchy na přírodovědných olympiádách

Projev doc. J. Kříže:

Setkáváme se zde v krásných prostorách zámku Sychrov, abychom ocenili nejlepší středoškoláky České republiky v přírodovědných oborech. Právě jim budou dnes, v historii již po devatenácté, uděleny nadační ceny PRÆMIUM BOHEMIÆ. Ke 372 řádným nadačním cenám pro studenty uděleným od roku 2001 letos přibude dalších, rekordních 28 cen, čímž celková suma rozdělená mezi studenty v rámci této ušlechtilé akce dosáhne více než 7,5 milionů Kč.

V letošním roce Nadace tedy ocení cenami PRÆMIUM BOHEMIÆ 6 studentek a 16 studentů, kteří získali na některé z letošních mezinárodních olympiád ve fyzice, chemii, biologii, matematice, informatice nebo astronomii s astrofyzikou některou z medailí. Snadným výpočtem zjistíte, že 6 studentek plus 16 studentů nerovná se 28 cen. Dva studenti si totiž odnesou ceny dvě a další dva dokonce tři!

Ještě před tím, než vás seznámím s letošním průběhem mezinárodních klání v přírodovědných disciplínách na mnoha světových kolbištích, dovolte mi jednu úvodní poznámku na téma „Ceny Præmium Bohemiæ a přírodovědné olympiády“. Původně byly totiž, jak již jsme slyšeli, udělovány ceny PRÆMIUM BOHEMIÆ výrazným vědcům a umělcům. Nápad udělovat tyto prestižní ceny úspěšným účastníkům olympiád vznikl v hlavě pana Bohumila Vybírala, emeritního profesora Univerzity Hradec Králové, přesně před 19 lety, dne 4. prosince 2000. Prof. Vybíral pracuje pro Fyzikální olympiádu od jejího úplného počátku, tj. od roku 1959, dodnes. V roce 2000 působil jako prorektor Univerzity Hradec Králové a dostal k vyřízení žádost pana Bohuslava Jana Horáčka, aby univerzita pomohla s vytipováním vědců pro cenu PRÆMIUM BOHEMIÆ. V noci 4. 12., shodou okolností přesně v den narozenin Bohuslava Jana Horáčka, prof. Vybírala napadlo, že by Nadace mohla udělovat ceny kromě etablovaným vědcům i začínajícím vědcům z řad studentů. Hned svůj nápad sepsal a poslal do Stuttgartu. Pan Horáček souhlasil. Vážený pane profesore, milý Mílo, dovol mi Ti za to poděkovat.

A nyní již k samotným přírodovědným olympiádám. Tyto soutěže jsou v České republice dlouhodobě zakořeněny a mají propracovaný systém. Kladou si za cíl vyhledávat a pěstovat talenty v uvedených oborech, které jsou významným činitelem pro rozvoj vzdělanosti, tvořivosti a prosperity našeho národa a lidstva vůbec. Pořádat olympiádu neznamená jen připravit soutěžní úlohy a zorganizovat jednotlivá kola soutěže. S olympioniky, zejména s těmi úspěšnými, je třeba pracovat systematicky, např. formou seminářů, soustředění, letních táborů či vydáváním studijních brožurek. Škola totiž nemůže vybavit talentované studenty znalostmi a dovednostmi potřebnými pro úspěch na mezinárodních prestižních soutěžích. České osobnosti se významně podíleli na formování těchto mezinárodních, dnes již celosvětových soutěží. Příznačné proto je, že úspěchy českých studentů jsou velmi dobré, což významně přispívá nejen k prezentaci české vědy a českého školství ve světě, ale přímo i k jeho rozvoji u nás.

Nyní se dostávám ke světovým přírodovědným soutěžím. Začneme le-

tos netradičně nejmladší z našich oceňovaných olympiád – Mezinárodní olympiádou v astronomii s astrofyzikou. Vzhledem k termínu loňské olympiády, konané v prosinci 2018, jsme bohužel nestihli loni ocenit medailisty z roku 2018, a tudíž uvidíme letos hned dvojnásobnou dávku mladých astronomů, kteří byli navíc na obou olympiádách velice úspěšní. 12. ročník této soutěže proběhl v roce 2018 v Číně a úspěch byl obrovský – jedna zlatá medaile, jedna stříbrná a tři bronzové! Zlatý medailista z roku 2018 Jindřich Jelínek obhájil roku 2019 zlato i na 13. IOAA v Maďarsku. Mezi 254 mladými astronomy ze 47 zemí pak zbylí členové českého týmu získali ještě jednu medaili stříbrnou a dvě bronzové.

Další pro nás zlatý lesk má Mezinárodní chemická olympiáda, která proběhla ve francouzské metropoli Paříži. Loňský zlatý medailista, chemik Jan Obořil, dokázal svůj úspěch zopakovat a do české kotliny dovezl další nejcennější kov. Vynikající úspěch mladých chemiků je podpořen třemi stříbrnými medailemi, to vše v konkurenci 309 soutěžících z 80 států světa.

Zlaté medaile pro letošní rok došly, zůstaňme ale ještě u medailí stříbrných. Za stříbrnou lze označit výpravu mladých českých biologů na jubilejní 30. mezinárodní biologické olympiádě v Maďarsku. Česká čtveřice zde bojovala s dalšími podobně biologicky zaměřenými mladými lidmi z celého světa velmi úspěšně – výsledkem jsou tři medaile stříbrné a jedna bronzová.

Pro další dvě stříbrné medaile se vydejme do Ázerbajdžánu. Právě zde se konala 31. mezinárodní olympiáda v informatice. Ke dvěma stříbrným medailím přidejme ještě jednu bronzovou vybojovanou mezi 327 soutěžícími z 87 států.

Na stole leží ještě jedna stříbrná medaile, vybojovaná na jubilejní 50. mezinárodní fyzikální olympiádě v Izraeli. Při o něco nižší účasti 363 fyziků ze 78 států získali čeští vyslanci jednu stříbrnou a tři bronzové medaile.

Opět jubilejní 60. mezinárodní matematická olympiáda, nejstarší a největší ze všech mezinárodních olympiád, se konala v Anglii. Své soutěžící na ni vyslalo 112 zemí a o medaile pak bojovalo 621 matematiků, z toho 48 dívek. Naše šestice se rozhodně neztratila a vybojovala 4 bronzové medaile. Do osmačtyřicítky děvčat také přispěla jednou soutěžící, ceněnou bronzem.

Úspěšné české nositele medailí za chvíli uvidíme osobně při přebírání cen PRÆMIUM BOHEMIÆ.

Dosáhnout výrazného úspěchu na světových vědeckých soutěžích není vůbec jednoduché. Úspěchem totiž je již sama účast v reprezentaci určitého státu. Soutěží se zúčastňují stovky řešitelů ze všech kontinentů.

Úlohy, které soutěžící řeší, jsou velmi obtížné a rozsáhlé a k jejich vyřešení má student k dispozici jen velmi omezený čas – a vypjatá atmosféra soutěže klidu k řešení jistě nepřidá. Je dobrým příslibem do budoucna, že se naši studenti dokáží prosadit v konkurenci vědeckých mocností, jakými jsou Spojené státy americké, Rusko a především četné asijské státy v čele s Čínou.

Milé medailistky, milí medailisté! Ze srdce Vám gratuluji k Vašemu úspěchu, který Vás však i zavazuje. Historie jasně prokázala, že úspěch v olympiádě je dobrým předpokladem pro dráhu vědce. Vydejte se na ni směle!



Obr. 2 Studenti a studentky ocenění PRÆMIUM BOHEMIÆ 2019, foto B. Vybíral

Přehled laureátů Præmium Bohemiæ 2019

1. *Fyzika, 50. IPhO, Izrael, 2019*: Jindřich Jelínek, stříbrná medaile (absolvent Gymnázia v Olomouci-Hejčíně, student University of Cambridge), • Viktor Fukala, bronzová medaile (student Gymnázia Jana Keplera v Praze 6), • Michal Jireš, bronzová medaile (absolvent Gymnázia Františka Martina Pelcla v Rychnově nad Kněžnou, student MFF Univerzity Karlovy v Praze), • Josef Minařík, bronzová medaile (absolvent Gymnázia v Brně na tř. Kpt. Jaroše, student MFF Univerzity Karlovy v Praze).
2. *Chemie, 51. IChO, Francie, 2019*: Jan Obořil, zlatá medaile (student Klasického a španělského gymnázia v Brně-Bystrc), • Miroslava Novoveská, stříbrná medaile (absolventka Masarykova gymnázia v Plzni, studentka University of Cambridge), • Richard Veselý, stříbrná medaile (absolvent Gymnázia v Praze 4 na Budějovické, student University of Cambridge), • Filip Svěrák, stříbrná medaile (absolvent Gymnázia

v Brně na tř. Kpt. Jaroše, student Přírodovědecké fakulty a Lékařské fakulty Masarykovy univerzity v Brně).

3. *Biologie, 30. IBO, Maďarsko, 2019: Kateřina Bezányiová*, stříbrná medaile (absolventka Gymnázia v Jablonci nad Nisou, studentka Přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy v Praze), • *Kateřina Čermáková*, stříbrná medaile (absolventka Gymnázia a Krajského vzdělávacího centra v Sokolově, studentka Přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy v Praze), • *Anna Hýsková*, stříbrná medaile (studentka Gymnázia J. A. Komenského a jazykové školy v Uherském Brodě), • *Ondřej Pelánek*, bronzová medaile (student Klasického a španělského gymnázia v Brně-Bystrci).
4. *Astronomie a astrofyzika, 12. IOAA v Číně, 2018: Jindřich Jelínek*, zlatá medaile (viz IPhO), • *Martin Orság*, stříbrná medaile (absolvent Gymnázia a Střední odborné školy zdravotnické a ekonomické ve Vyškově, student MFF Univerzity Karlovy v Praze), • *Jiří Vala*, bronzová medaile (absolvent Gymnázia v Brně na tř. Kpt. Jaroše, student MFF Univerzity Karlovy v Praze), • *Jáchym Bareš*, bronzová medaile (absolvent Gymnázia v Olomouci-Hejčíně, student MFF Univerzity Karlovy v Praze), • *Radka Křížová*, bronzová medaile (studentka Gymnázia Jaroslava Heyrovského v Praze 5).
5. *Astronomie a astrofyzika, 13. IOAA v Maďarsku, 2019: Jindřich Jelínek*, zlatá medaile (viz IPhO), • *Marco Souze de Joode*, stříbrná medaile (student Gymnázia v Praze 7, Nad Štolou), • *David Kománek*, bronzová medaile (student Gymnázia v Praze 7, Nad Štolou), • *Radka Křížová*, bronzová medaile (viz 12. IOAA).
6. *Matematika, 60. IMO ve Velké Británii, 2019: Matěj Doležálek*, bronzová medaile (absolvent Gymnázia dr. A. Hrdličky v Humpolci, student MFF Univerzity Karlovy v Praze), • *Václav Janáček*, bronzová medaile (student Gymnázia v Brně na tř. Kpt. Jaroše), • *Lenka Kopfová*, bronzová medaile (absolventka Mendelova gymnázia v Opavě, studentka MFF Univerzity Karlovy v Praze), • *Josef Minařík*, bronzová medaile (viz IPhO).
7. *Informatika, 31. IOI, Ázerbájdžán, 2019: Josef Minařík*, stříbrná medaile (viz IPhO), • *Jiří Kalvoda*, stříbrná medaile (student Gymnázia v Brně na tř. Kpt. Jaroše), • *Michal Jireš*, bronzová medaile (viz IPhO).