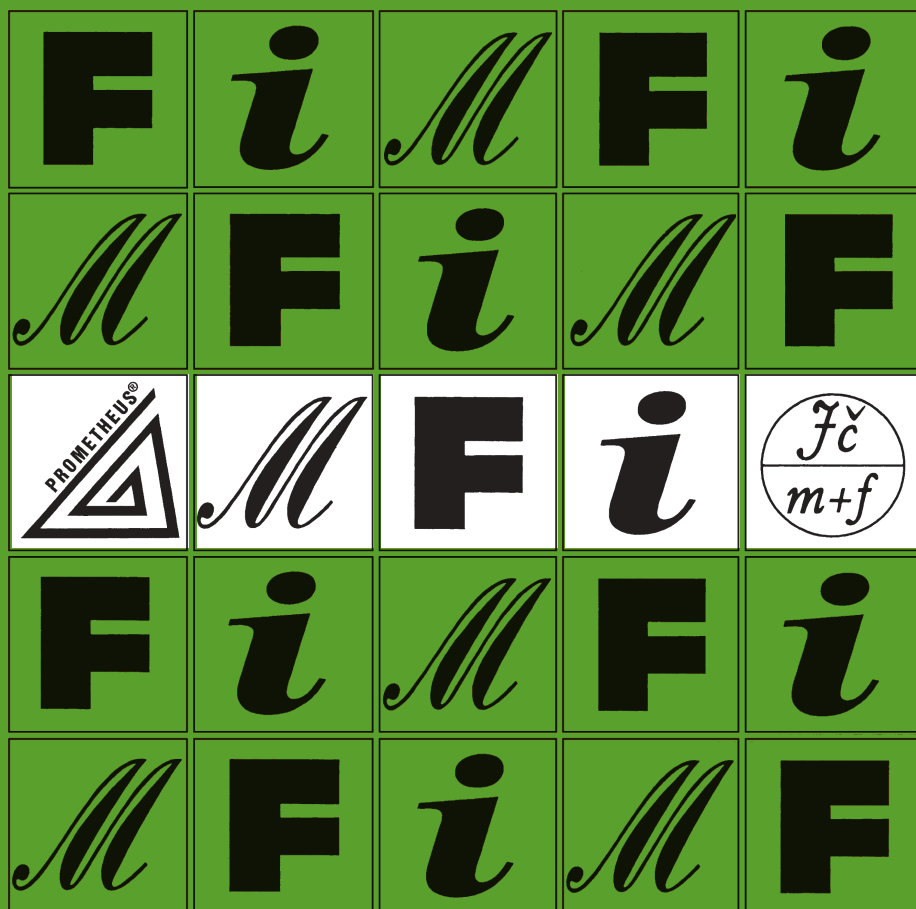


MATEMATIKA

3 FYZIKA

INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXIX (2020), číslo 3

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku
Eduard Bartl – redaktor pro informatiku
Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška, Michaela Křížová, Miluše Lachmannová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil (předseda redakční rady), Dana Mandíková, Oldřich Odvárko, Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel Töpfer

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>M. Chodorová, L. Juklová:</i> Pravidelný sedmnáctiúhelník	161
<i>L. Spíchal:</i> Reprodukční potenciál aneb když se hraboš přemnoží	171
<i>S. Lukáč:</i> Hodnotiace prostriedky na formatívne hodnotenie vo vyučovaní matematiky	181
Zajímavé matematické úlohy	197

FYZIKA

<i>O. Lepil:</i> Rezonanční křivka – portrét oscilátoru	201
<i>J. Kadaňka:</i> Odvození 1. kosmické rychlosti	213
<i>Z. Pucholt:</i> Počítačové simulace PhET ve výuce fyziky na gymnáziu	219

INFORMATIKA

<i>J. Sedláček, T. Pitner:</i> Juniorní centra excelence pro informační bezpečnost . .	230
--	-----

ZPRÁVY

<i>L. Richterek:</i> Celostátní kolo FO 2020	238
--	-----

Pravidelný sedmnáctiúhelník

MARIE CHODOROVÁ – LENKA JUKLOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Přesné konstrukce některých pravidelných mnohoúhelníků pomocí pravítka a kružítka jsou poměrně známé, s některými z nich se seznámí žáci již na základní škole. Mnohdy se však např. při výuce matematiky či deskriptivní geometrie mezi žáky SŠ a posluchači VŠ objeví pochybnosti, zda známa konstrukce pravidelného pětiúhelníku, viz např. [2] nebo [6], je přesná či pouze přibližná. Vyčerpávající odpověď na otázku, které pravidelné n -úhelníky lze zkonstruovat eukleidovsky (pomocí pravítka a kružítka) přesně, dává níže uvedená Gaussova věta.¹⁾

Kromě trojúhelníku a pětiúhelníku je dalším pravidelným n -úhelníkem s prvočíselnou hodnotou n , který lze přesně eukleidovsky zkonstruovat, právě až sedmnáctiúhelník. Cílem tohoto příspěvku je seznámit čtenáře – zájemce o tuto problematiku – s jednou konstrukcí pravidelného sedmnáctiúhelníku.

Věta 1 (Gaussova)

Pravidelný n -úhelník lze zkonstruovat eukleidovsky, právě když pro počet n ($n \geq 3$) jeho vrcholů platí $n = 2^i p_1 p_2 \dots p_j$, kde i, j jsou celá nezáporná čísla a p_1, p_2, \dots, p_j jsou navzájem různá Fermatova prvočísla.

Poznámka. Fermatova čísla (prvočísla) jsou taková přirozená čísla (prvočísla), která lze zapsat ve tvaru $2^{2^s} + 1$, kde s je přirozené číslo (např. $17 = 2^{2^2} + 1$).

Po zveřejnění Gaussova výsledku se vyšetřování prvočíselnosti Fermatových čísel stalo poměrně důležitým úkolem, na němž začalo pracovat

¹⁾Johann Carl Friedrich Gauss, německý matematik a fyzik (*30. 4. 1777 v Braunschweigu, †23. 2. 1855 v Göttingen).

mnoho matematiků. Jak se později ukázalo, nešlo o snadný úkol. Fermatových prvočísel je doposud známo pouze pět, a to pro $s = 0, 1, 2, 3, 4$, pro $s = 5$ je však číslo $2^{2^5} + 1$ dělitelné prvočíslem 641. Další Fermatova prvočísla patrně neexistují. Dosud jsou prozkoumaná Fermatova čísla do hodnoty $s = 32$, kdy pro $s = 5, 6, \dots, 32$ je známo, že se jedná vesměs o čísla složená.

Připomeňme ještě, že zhruba před 2000 lety *Eukleidés z Alexandrie* (cca 325 př. n. l. – cca 260 př. n. l.) věděl, že pomocí pravítka a kružítko lze přesně zkonstruovat pravidelné mnohoúhelníky s n ($n \geq 3$) vrcholy, kde $n = 2^i 3^j 5^k$, přičemž i, j, k jsou celá nezáporná čísla.

Úlohu „sestrojit pravidelný n -úhelník“ lze převést na (totožnou) úlohu „rozdělit kružnici na n stejných částí“. Při konstrukci pravidelných mnohoúhelníků tak můžeme názorně poukázat na propojení algebry a eukleidovské geometrie, neboť obrazy komplexních čísel v Gaussově rovině, jež jsou kořeny binomické rovnice $z^n - 1 = 0$, leží na jednotkové kružnici a rozdělí ji na n stejných částí (n shodných kružnicových oblouků). Sestrojit vrcholy pravidelného n -úhelníku je tedy v podstatě úlohou o nalezení kořenů binomické rovnice. V praxi se často setkáváme s úlohou sestrojiti pravidelný mnohoúhelník s daným poloměrem kružnice opsané či danou délkou strany. Zde pak využíváme stejnolehlosti. Již *R. Descartes* dokázal, že eukleidovskými konstrukcemi lze sestrojiti složené výrazy obsahující operace sčítání, odčítání, násobení, dělení a využití druhé odmocniny. Lze tudíž pravidelný n -úhelník zkonstruovat, právě když je poloha jeho vrcholů vyjádřena v Gaussově rovině algebraickými výrazy obsahujícími pouze tyto operace. Toto tvrzení dokázal *P. L. Wanzenel* v 19. století, přičemž vycházel právě z výše zmíněného Descartesova důkazu.

Gauss sice konstrukci pravidelného sedmnáctiúhelníku sám nepopsal, dokázal však následující větu udávající polohy vrcholů rovnostranného trojúhelníku, pravidelného pětiúhelníku a pravidelného sedmnáctiúhelníku (v souvislosti s polohou kořenů odpovídajících binomických rovnic na jednotkové kružnici), které jsou vyjádřeny výrazy zkonstruovatelnými pouze pomocí pravítka a kružítko.

Věta 2

Pro $\cos \frac{2\pi}{n}$ ($n = 3, 5, 17$) platí rovnosti

$$\text{a) } \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2},$$

$$\text{b) } \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1),$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \cos \frac{2\pi}{17} &= \frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{2(17 - \sqrt{17})} \right) + \\ &+ 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{2(17 - \sqrt{17})} - 2\sqrt{2(17 + \sqrt{17})}}. \end{aligned}$$

Důkaz provedeme podrobně pro případy $n = 3$ a $n = 5$. Hledáme tedy kořeny binomických rovnic $z^3 - 1 = 0$ a $z^5 - 1 = 0$.

Kořeny binomické rovnice $z^n - 1 = 0$ můžeme vyjádřit jako komplexní čísla v goniometrickém tvaru $z_k = \cos k\varphi + i \sin k\varphi$ pro $k = 0, \dots, n-1$, kde $\varphi = \frac{2\pi}{n}$. Z Viětových vzorců plyne, že součet všech kořenů této rovnice je roven nule, tj. $z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = 0$. Z rozkladu

$$z^n - 1 = (z - 1)(z^{n-1} + \dots + z + 1) = 0$$

plyne $z_0 = 1$, a tedy

$$z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = -1. \quad (1)$$

Pro n liché jsou kořeny z_k a z_{n-k} ($k = 1, \dots, n-1$) komplexně sdružená čísla, a pro jejich součet proto platí

$$z_k + z_{n-k} = 2 \cos k\varphi. \quad (2)$$

ad a) Snadno se vidí, že pro $n = 3$ je $z_0 = 1$, $z_1 + z_2 = -1$ a také $z_1 + z_2 = 2 \cos \varphi$. Odtud dostáváme $2 \cos \varphi = -1$ a po dosazení za $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ obdržíme přímo $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, což představuje známou skutečnost.

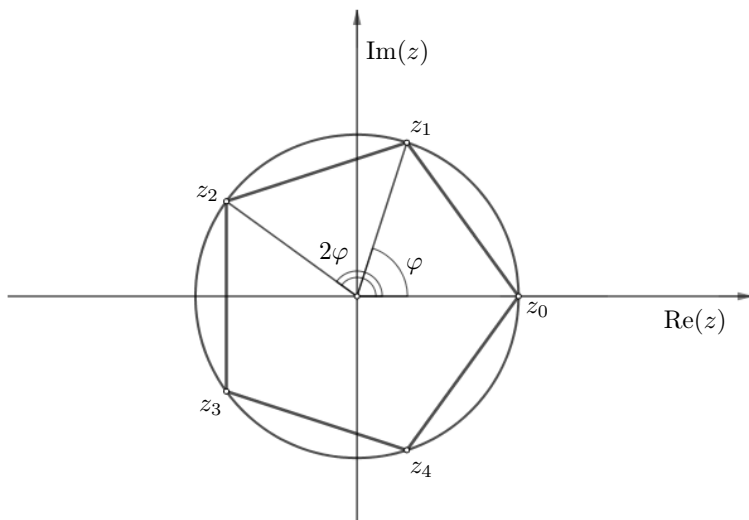
ad b) Podobně pro $n = 5$ z rozkladu

$$z^5 - 1 = (z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

plyne, že $z_0 = 1$, tedy $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -1$, kde z_1 a z_4 , resp. z_2 a z_3 , jsou komplexně sdružená čísla. Označme dále

$$\begin{aligned} v_1 &= z_1 + z_4, \\ v_2 &= z_2 + z_3. \end{aligned} \quad (3)$$

Užijeme-li (2), platí $v_1 = 2 \cos \varphi$, $v_2 = 2 \cos 2\varphi$. Vzhledem k tomu, že $\varphi = \frac{2\pi}{5}$, platí pro hodnoty v_1 a v_2 nerovnost $v_2 < 0 < v_1$.



Obr. 1

Pokud najdeme takovou kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou čísla v_1, v_2 , má tato rovnice užitím Viětových vztahů tvar

$$x^2 - (v_1 + v_2)x + v_1 v_2 = 0.$$

Z (3) přitom plyne $v_1 + v_2 = -1$.

Dále určíme hodnotu součinu v_1, v_2 . Nejprve připomeňme následující goniometrickou identitu. Pro libovolné argumenty α, β platí známá identita, kterou následně využijeme.

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta). \quad (4)$$

Užitím (1), (2), (3) a (4) postupně upravujeme

$$\begin{aligned} v_1 v_2 &\stackrel{(3)}{=} 4 \cos \varphi \cos 2\varphi \stackrel{(4)}{=} 2(\cos 3\varphi + \cos \varphi) \stackrel{(2)}{=} (z_3 + z_2) + (z_1 + z_4) \stackrel{(3)}{=} \\ &= v_1 + v_2 \stackrel{(3)}{=} -1. \end{aligned}$$

Čísla v_1, v_2 jsou tedy kořeny kvadratické rovnice $x^2 + x - 1 = 0$, tj.

$$v_1 = 2 \cos \varphi = \frac{1}{2} (\sqrt{5} - 1), \quad v_2 = 2 \cos 2\varphi = -\frac{1}{2} (\sqrt{5} + 1),$$

přičemž $\varphi = \frac{2\pi}{5}$. Tím jsme dokázali druhou z rovností uvedenou ve větě 2.

ad c) Analogicky lze odvodit také případ $n = 17$, který zde však pro jeho větší rozsah a technickou náročnost nebudeme uvádět. Lze jej nalézt např. v [3].

Naznačíme jen odvození třetího vztahu z věty 2 a následně uvedeme také konstrukci pravidelného sedmnáctiúhelníku, která je popsána např. v [4].

Označme S součet následujícího výrazu:

$$S = \cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos k\varphi, \quad (5)$$

kde k je libovolné přirozené číslo a připomeňme další známou goniometrickou identitu, která je splněna pro všechny reálné argumenty α, β

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}. \quad (6)$$

Obě strany rovnosti (5) nejprve vynásobíme číslem $2 \sin \frac{\varphi}{2}$ a dostaneme $2S \sin \frac{\varphi}{2} = 2 \cos \varphi \sin \frac{\varphi}{2} + 2 \cos 2\varphi \sin \frac{\varphi}{2} + 2 \cos 3\varphi \sin \frac{\varphi}{2} + \dots + 2 \cos k\varphi \sin \frac{\varphi}{2}$.

Na jednotlivé sčítance na pravé straně součtu uplatníme nyní vztah (6).

$$2S \sin \frac{\varphi}{2} = (\sin \frac{3}{2}\varphi - \sin \frac{1}{2}\varphi) + (\sin \frac{5}{2}\varphi - \sin \frac{3}{2}\varphi) + (\sin \frac{7}{2}\varphi - \sin \frac{5}{2}\varphi) + \dots \\ \dots + (\sin(k + \frac{1}{2})\varphi - \sin(k - \frac{1}{2})\varphi) = \sin(k + \frac{1}{2})\varphi - \sin \frac{1}{2}\varphi.$$

Závěrem opět použijeme identitu (6) a po úpravě dostaneme

$$S = \frac{\cos \frac{1}{2}(k + 1)\varphi \cdot \sin \frac{1}{2}k\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi}. \quad (7)$$

Položíme-li ve vztazích (5) a (7) $k = 16$ a $\varphi = \frac{2\pi}{17}$, dostáváme

$$\cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos 16\varphi = -1.$$

Ze vztahu (2) plyne pro kosiny jednotlivých úhlů v sedmnáctiúhelníku rovnost

$$\cos \varphi = \cos 16\varphi, \cos 2\varphi = \cos 15\varphi, \dots, \cos 8\varphi = \cos 9\varphi, \quad (8)$$

tj.

$$\cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos 8\varphi = -\frac{1}{2}. \quad (9)$$

Pro liché násobky φ tedy platí

$$\cos \varphi + \cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \dots + \cos 15\varphi = -\frac{1}{2}.$$

Levou stranu poslední rovnosti rozložíme rozložíme na součet m a n , kde

$$\begin{aligned} m &= (\cos \varphi + \cos 13\varphi) + (\cos 9\varphi + \cos 15\varphi), \\ n &= (\cos 3\varphi + \cos 5\varphi) + (\cos 7\varphi + \cos 11\varphi). \end{aligned} \quad (10)$$

Potom $m + n = -\frac{1}{2}$. Nyní určíme hodnotu součinu $m \cdot n$. S ohledem na (8) pak platí

$$\begin{aligned} m \cdot n &= (\cos \varphi + \cos 4\varphi + \cos 8\varphi + \cos 2\varphi) \cdot \\ &\quad \cdot (\cos 3\varphi + \cos 5\varphi + \cos 7\varphi + \cos 6\varphi) = \\ &= \cos \varphi \cos 3\varphi + \cos \varphi \cos 5\varphi + \cos \varphi \cos 7\varphi + \cos \varphi \cos 6\varphi + \\ &\quad + \cos 4\varphi \cos 3\varphi + \cos 4\varphi \cos 5\varphi + \cos 4\varphi \cos 7\varphi + \cos 4\varphi \cos 6\varphi + \\ &\quad + \cos 8\varphi \cos 3\varphi + \cos 8\varphi \cos 5\varphi + \cos 8\varphi \cos 7\varphi + \cos 8\varphi \cos 6\varphi + \\ &\quad + \cos 2\varphi \cos 3\varphi + \cos 2\varphi \cos 5\varphi + \cos 2\varphi \cos 7\varphi + \cos 2\varphi \cos 6\varphi. \end{aligned}$$

Použitím rovnosti (4) na každý ze šestnácti sčítanců na pravé straně předešlé rovnosti a následným využitím (9) již přímo obdržíme

$$m \cdot n = 2(\cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos 8\varphi) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Čísla m a n jsou tudíž kořeny kvadratické rovnice $2x^2 + x - 2 = 0$, pro něž platí

$$m = \frac{1}{4}(\sqrt{17} - 1); \quad n = -\frac{1}{4}(\sqrt{17} + 1). \quad (11)$$

Položíme-li $m = \cotg \alpha$, kde α je vhodné reálné číslo, je zřejmě $n = -\tg \alpha$.

Označme nyní

$$p = \cos \varphi + \cos 13\varphi, \quad q = \cos 9\varphi + \cos 15\varphi, \quad (12)$$

$$r = \cos 3\varphi + \cos 5\varphi, \quad s = \cos 7\varphi + \cos 11\varphi. \quad (13)$$

Opětovným použitím vztahů pro součin dvou kosinů (4) dostaneme

$$2pq = \cos \varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos 8\varphi = -\frac{1}{2},$$

tj. $pq = -\frac{1}{4}$ a podobně $rs = -\frac{1}{4}$.

Kvadratická rovnice, jejíž kořeny jsou p, q , má tedy tvar

$$4x^2 - 4mx - 1 = 0, \quad (14)$$

podobně, kvadratická rovnice, jejíž kořeny jsou r, s , má tvar

$$4x^2 - 4nx - 1 = 0. \quad (15)$$

Z rovnice (14) získáme následně kořeny ve tvaru

$$p = \frac{1}{2}m + \sqrt{\frac{1}{4}(m^2 + 1)} = \frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2}\alpha,$$

$$q = \frac{1}{2}m - \sqrt{\frac{1}{4}(m^2 + 1)} = -\frac{1}{2} \tg \frac{1}{2}\alpha,$$

přičemž kořen p je kladný, neboť jak $\cos \varphi$, tak $\cos 13\varphi$ jsou kladná čísla.

Analogicky pro kořeny rovnice (15) platí

$$r = \frac{1}{2}n + \sqrt{\frac{1}{4}(n^2 + 1)} = \frac{1}{2} \tg \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right),$$

$$s = \frac{1}{2}n - \sqrt{\frac{1}{4}(n^2 + 1)} = -\frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

První z rovností ve vztahu (12) lze také zapsat využitím (2) ve tvaru $\cos \varphi + \cos 4\varphi = p$. Aplikujeme-li (4) na první rovnost v (13) získáme $\cos 3\varphi + \cos 5\varphi = 2 \cos \varphi \cdot \cos 4\varphi = r$, tj.

$$\cos \varphi + \cos 4\varphi = \frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2}\alpha,$$

$$\cos \varphi \cdot \cos 4\varphi = \frac{1}{4} \tg \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

Položíme-li $2 \cos \varphi = w_1$ a $2 \cos 4\varphi = w_2$, jsou hodnoty w_1 a w_2 kořeny kvadratické rovnice

$$w^2 - w \cotg \frac{\alpha}{2} + \tg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = 0. \quad (16)$$

Její řešení zjistíme, že kořen $w_1 = 2 \cos \varphi = 2 \cos \frac{2\pi}{17}$ je dvojnásobkem hodnoty třetího vztahu z věty 2.

V článku [4] je provedena jiná úvaha, která vede k efektivnější konstrukci sedmnáctiúhelníku a která umožní stanovit postup, jak sestrojít úhel φ (a některé jeho násobky) na jednotkové kružnici:

Uvažujme kružnici k se středem v počátku kartézského souřadnicového systému a poloměrem 1, tj. kružnici vyhovující rovnici

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (17)$$

a dále dvě přímky

$$y = -w_i(x - 1), \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

kde $w_1 = 2 \cos \varphi$ a $w_2 = 2 \cos 4\varphi$, které procházejí bodem $A = [0;1]$ kružnice k . Tyto přímky protínají kružnici k (kromě bodu A) ještě v bodech I , J (obr. 2). Rovnici přímky $u = IJ$, která prochází těmito body, lze zapsat v úsekovém tvaru

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (19)$$

kde a, b jsou vhodná nenulová reálná čísla. Dosadíme-li do (19) $y = w(x-1)$ (viz vztah (18)), pak po úpravě dostáváme

$$x = \frac{a(w - b)}{aw - b},$$

tj.

$$y = \frac{b(a - 1)w}{aw - b}$$

Tyto výrazy dosadíme za x a y do (17) a po elementárních úpravách získáme kvadratickou rovnici o neznámé w

$$w^2 - w \frac{2a}{b(a - 1)} + \frac{a + 1}{a - 1} = 0,$$

ve které nyní položíme

$$\frac{2a}{b(a - 1)} = \cotg \frac{\alpha}{2} \quad \text{a} \quad \frac{a + 1}{a - 1} = \tg \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{1 + \cotg \frac{\alpha}{2}}, \quad (20)$$

což je zřejmě rovnice (16).

Dále současně platí

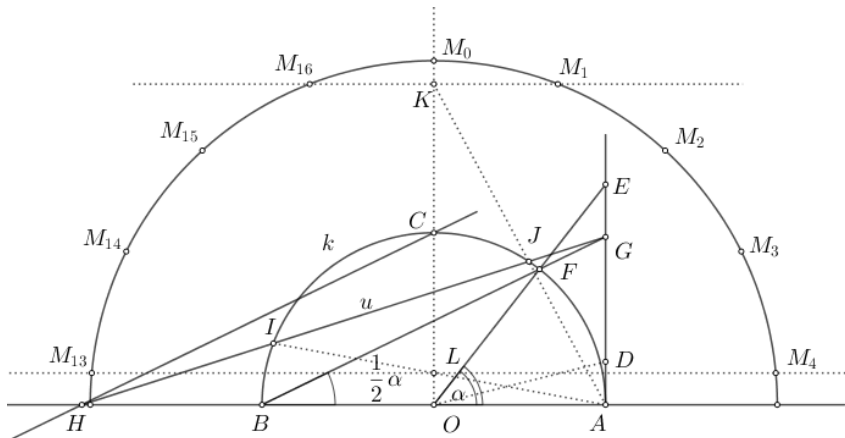
$$a = -\cotg \frac{\alpha}{2} \quad \text{a} \quad b = \frac{2}{1 + \cotg \frac{\alpha}{2}}.$$

Rovnice přímky u je ve tvaru

$$2x \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - y \left(1 + \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \right) + 2 = 0,$$

pro její sestrojení lze použít úsečku délky $|a|$ a bod $G = [1; 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}]$.

Popis konstrukce je tedy následující, viz obr. 2:



Obr. 2

- Sestrojíme jednotkovou polokružnici k se středem O , viz (17), průměr označíme AB . Středem O polokružnice vedeme kolmici k přímce AB , průsečík této kolmice s polokružnicí k označme C .
- Sestrojíme bod D , pro který platí $|AD| = \frac{1}{4} |OA|$ a $AB \perp AD$.
- Sestrojíme bod E na polopřímce AD , pro který platí $|DE| = |DO|$. Platí $|AE| = \frac{1}{4}(\sqrt{17} + 1)$, viz (11), tedy velikost úhlu AOE je α a velikost úhlu ABF je $\alpha/2$, viz (20), kde bod F je průsečík polokružnice k s přímkou OE .
- Sestrojíme bod G na polopřímce AD , pro který platí $|AG| = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, viz (20). Vzhledem k tomu, že $|AB| = 2$, je AG odvěsnou v pravouhlém trojúhelníku ABG , kde G je průsečík BF a AD .
- Bodem C vedeme rovnoběžku s přímkou BG , která protne přímku AB v bodě H , úsečka OH má velikost $|a|$, tj. $\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$ (ze vztahu (20) plyne $a = -\operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$).

- Přímka HG (přímka u) protne kružnici k v bodech I, J .
- Body I, J promítneme z bodu A na přímku OC do bodů K, L , pro které platí $|OK| = w_1 = 2 \cos \varphi$ a $|OL| = w_2 = 2 \cos 4\varphi$, viz (18).
- Sestrojíme kružnici k' o poloměru 2 soustřednou s kružnicí k . Body K, L vedeme rovnoběžky s přímkou AB , které protínají kružnici k' v bodech M_1, M_4, M_{13}, M_{16} . Velikost úhlu KOM_1 je φ a velikost úhlu KOM_4 je 4φ . Našli jsme tedy hledaný úhel určený polohou bodů na jednotkové kružnici a body M_1, M_4, M_{13}, M_{16} jsou tedy vrcholy hledaného sedmnáctiúhelníku.

Obdobným způsobem bychom mohli pokračovat pro velikosti úhlů 2φ a $8\varphi, 3\varphi$ a $5\varphi, 6\varphi$ a 7φ .

Tímto postupem lze tedy sestavit vrcholy pravidelného sedmnáctiúhelníku s jednotkovou kružnicí opsanou. Pokud bychom chtěli sestavit pravidelný sedmnáctiúhelník s kružnicí opsanou, která má jiný poloměr, stačí využít stejnohlodosti se středem O a (kladným) koeficientem různým od jedné.

Literatura

- [1] *Bold, B.*: Famous Problems of Geometry and How to Solve Them. Dover Publications Inc., New York, 1982.
- [2] *Fabián, J.*: Pětiúhelník. Nakladatelství Lupus, Trutnov, 2005.
- [3] *Křížek, M., Somer, L., Šolcová, A.*: Kouzlo čísel. Academia, Praha, 2011.
- [4] *Strnad, A.*: O sestrování pravidelného sedmnáctiúhelníku, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, roč. 36 (1907), č. 1, s. 81–86.
- [5] *Horáková, K.*: Eukleidovské a přibližné konstrukce pravidelných mnohoúhelníků. Bakalářská práce, PdF UK, Praha, 2013.
- [6] *Švrček, J.*: Konstrukce pravidelného pětiúhelníku. Matematika a fyzika ve škole, roč. 16 (1985/86), č. 8, s. 524–527.

Reprodukční potenciál aneb když se hraboš přemnoží

LUDEK SPÍCHAL

Ústav matematiky a statistiky MU, Brno

V posledních letech snad každý z nás mohl zaznamenat řadu reportáží, článků či jen běžných rozhovorů mezi lidmi týkajících se problému přemnožení určitého živočišného druhu (např. hraboši, divoká prasata, lýkožrout smrkový apod.). Přitom schopnost organismů rozmnožovat se patří mezi základní projevy života, neboť zajišťuje zachování rodu a druhu. Každý organismus volí při rozmnožování (reprodukcí) určitou strategii, a to jak pokud jde o počet potomků, tak pokud jde o péči, kterou potomstvu věnuje.¹⁾ Na druhou stranu je rozmnožování organismů za běžných podmínek ovlivněno řadou různých faktorů ovlivňujících reprodukční úspěch, tedy skutečný počet potomků.

Přestože článek tématicky vychází z oblasti biologie, obsahově se zaměřuje na matematický popis reprodukčních schopností (potenciálů) živočichů. V článku uvedeme tři různé druhy organismů, které jsou v posledních letech zmiňovány vzhledem ke skutečnému nebo potenciálnímu nárůstu početnosti jejich populací. Vysoké stavy či dokonce přemnožení uvažovaných organismů vytváří situace, kdy v zemědělství (např. hraboš) nebo lesnictví (např. lýkožrout smrkový) dochází ke vzniku obvykle lokálních, nicméně nikoliv zanedbatelných škod.

Reprodukční potenciál

Reprodukční potenciál můžeme chápat jako maximální rychlost růstu za předpokladu trvale optimálního složení populace a trvale optimálních

¹⁾Některé organismy (včetně člověka) svým nemnoha potomkům často poskytují dlouhodobou péči a zajišťují jim tak vysoké šance na přežití. Takové druhy biologie označuje jako K-stratégy. Jiní se reprodukují rychle, ale pokud se nevyvíjí v umělém prostředí, většina potomků nepřežije do dospělosti. Takové druhy biologové nazývají R-stratégy. Oba pojmy jsou do jisté míry relativní, neboť je třeba brát v úvahu, které organismy takto porovnááme. Pokud takto srovnáme tři druhy zmíněné v článku, pak lze jistě ve dvojici hraboš-prase klasifikovat hraboše jako R-stratéga a prase jako K-stratéga. Porovnání dvojice prase-vlk ovšem posouvá prase k R-strategii a hodnotí vlka jako K-stratéga.

podmínek prostředí. V reálných podmínkách obvykle organismy využívají reprodukční potenciál pouze částečně, neboť prostředí samo vytváří jistý odpor k množení.

Uveďme nyní stručně některé základní vlastnosti uvažovaných organismů, které se týkají zejména etologie rozmnožování. Uvedené informace budou východiskem pro návrhy modelů týkajících se maximálního reprodukčního potenciálu jednotlivých druhů.

Hraboš polní patří mezi nejhojnějších hlodavce vyskytující se v České republice. Samice vyvádí mláďata (obvykle 3 až 10) třikrát až sedmkrát ročně, přičemž potomci dosahují pohlavní dospělosti již velmi záhy. Samice může být pohlavně dospělá již v 13. dni života a vlastní mláďata může mít zhruba ve 35 dnech věku [1].

Prase divoké je typickým všežravcem, schopným velmi dobře se přizpůsobit podmínkám kulturní krajiny České republiky. Samice (bachyně) prasat divokých pohlavně dospívají v 8. až 10. měsíci života, samci přibližně ve věku 2 let. Samice je březí přibližně 4 měsíce a k vrhu mláďat dochází obvykle v období od března do května, přičemž počet mláďat ve vrhu se pohybuje od 3 do 12 [2].

Vlci jsou příkladem živočišného druhu, který se po úplném vyhubení na přelomu 19. a 20. století postupně vrací na území Česka. Příslušníci druhu jsou převážně monogamní, tj. tvoří trvalé páry, které spolu zůstávají až do smrti jednoho z partnerů. Samice zabřezávají ve volné přírodě obvykle po dosažení věku dvou let a mají dále jeden vrh do roka. Takto produktivní mohou být až do smrti. Březost samic, které trvá 62–75 dní, je obvykle ukončena vrhem 5–6 vlčat [3].

Předmětem článku je vytvoření jednoduchých matematických modelů reprodukčního potenciálu a jejich porovnání s modelem exponenciálního růstu, který je popisován v literatuře. Přestože je problematika populační dynamiky a její modelování obvykle úzce svázaná s použitím vyšší matematiky (např. diferenciálních rovnic), v článku se zaměříme pouze na takové oblasti, které lze matematicky popsat způsoby dostupnými středoškolským studentům (geometrické posloupnosti, logaritmy).

Modely

Při vytváření jednotlivých modelů použijeme následující parametry:

- *počet a poměr jedinců* ve vrhu,
- *počet generací* v průběhu roku či sledovaném období,
- *koefficient úbytku* v průběhu roku či sledovaném období.

Použité parametry modelů, které vychází z etologie jednotlivých druhů, budeme uvažovat jako průměrné hodnoty, které lze podle potřeby měnit. Do reprodukce budou vstupovat všechny páření schopné (dospělé) samice, přičemž délka březosti či délka období mezi dvěma reprodukčními cykly bude vyjádřena výše zmíněným počtem generací.

Pevně určený poměr pohlaví

V prvním případě použijeme pro všechny tři druhy stejný počet i poměr jedinců ve vrhu, rozdíl bude představovat pouze počet generací za rok (tabulka 1). Postupy zde naznačené dále využijeme pro zobecnění výpočtu v další části článku.

	Počet jedinců ve vrhu	Poměr pohlaví (σ : φ) ve vrhu	Počet generací za rok
hraboš polní	5	2 : 3	5
prase divoké	5	2 : 3	1
vlk obecný	5	2 : 3	0,5

Tabulka 1 Parametry použité pro sestavení modelu reprodukčního potenciálu pro pevně určený poměr pohlaví

Generace	Samice		Samci		Celkem
	nově narozené	celkem	nově narození	celkem	
1.	3	3	2	2	5
2.	12	15	8	10	25
3.	48	63	32	42	105
4.	192	255	128	170	425
5.	768	1023	512	682	1705

Tabulka 2 Počty jedinců podle pohlaví a celkem podle parametrů uvedených v tabulce 1

V tabulce 2 jsou zaznamenány počty jedinců podle pohlaví i celkem tvořící potomstvo jedné samice (0. generace). Z údajů v tabulce uvedených snadno zjistíme, že pro zvolený počet a poměr pohlaví potomků jedné samice v dané generaci roste počet jedinců samičího pohlaví tempem, které

odpoví trojnásobku počtu samic (včetně samice z 0. generace) v předchozí generaci.

Celkový počet potomků samičího pohlaví po n generacích vyjadřuje vztah

$$P_{\text{samice}} = 4^n - 1, n \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Při rozboru tempa růstu počtu jedinců samčího pohlaví musíme vzít v úvahu závislost počtu nově narozených samců v n -té generaci na počtu samic schopných reprodukce, což jsou v našem modelu všechny samice v $(n - 1)$ generaci. Počet nově narozených samců v n -té generaci je tedy dvojnásobkem počtu samic (včetně samice z 0. generace) v $(n - 1)$ generaci

$$2 \cdot 4^{n-1}, n \in \mathbb{N}.$$

Při stanovení celkového počtu jedinců samčího pohlaví po n generacích uvážíme, že řazeno po obdobích, tvoří počty jedinců geometrickou posloupnost 2, 8, 32, 128, 512, \dots , jejichž součet pro prvních n členů vyjadřuje vztah

$$P_{\text{samci}} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = 2 \cdot \frac{4^n - 1}{4 - 1} = 2 \cdot \frac{4^n - 1}{3}. \quad (2)$$

Celkový počet jedinců obou pohlaví po n generacích (*maximální reprodukční potenciál*) je součtem výrazů z rovnic (1) a (2)

$$P_{\text{celkem}} = P_{\text{samice}} + P_{\text{samci}} = 4^n - 1 + 2 \cdot \frac{4^n - 1}{3} = \frac{5 \cdot 4^n - 5}{3}. \quad (3)$$

Pokud zvolíme jako příklad počet jedinců na konci druhého roku, pak podle údajů v tabulce 1 a vzorce (3) by teoretický *maximální reprodukční potenciál* jedné samice činil v případě:

- hraboše celkem 1 747 625 jedinců (10 generací),
- prasete celkem 25 jedinců (2 generace),
- vlka celkem 5 jedinců (1 generace).

Proměnlivý poměr pohlaví

V předchozí části byl počet a poměr nově narozených jedinců pevně určen hodnotami uvedenými v tabulce 1. V této části ukážeme, že použitý rozbor není nutné provádět *ad hoc* pro každý jednotlivě zvolený model počtu a poměru pohlaví jedinců. Naopak, pokusíme se výpočet v maximální míře zobecnit a zredukovat.



Obr. 1 Počet jedinců po n generacích podle rovnic (1), (2) a (3)

Počet jedinců ve vrhu	Poměr pohlaví ($\sigma : \text{♀}$) ve vrhu	Počet generací
p	$(p - p_1) : p_1$	n

Tabulka 3 Parametry použité pro sestavení modelu reprodukčního potenciálu pro proměnlivý poměr pohlaví

Celkový počet potomků samičího pohlaví po n generacích vyjadřuje vztah

$$P_{\text{samice}} = (1 + p_1)^n - 1, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Počet samců v n -té generaci je $(p - p_1)$ násobkem počtu samic v $(n - 1)$ generaci

$$(p - p_1)(1 + p_1)^n$$

a tvoří tak geometrickou posloupnost

$$(p - p_1), (p - p_1)(1 + p_1), (p - p_1)(1 + p_1)^2, \dots,$$

kde součet prvních n členů

$$P_{\text{samci}} = (p - p_1) \cdot \frac{(1 + p_1)^n - 1}{p_1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

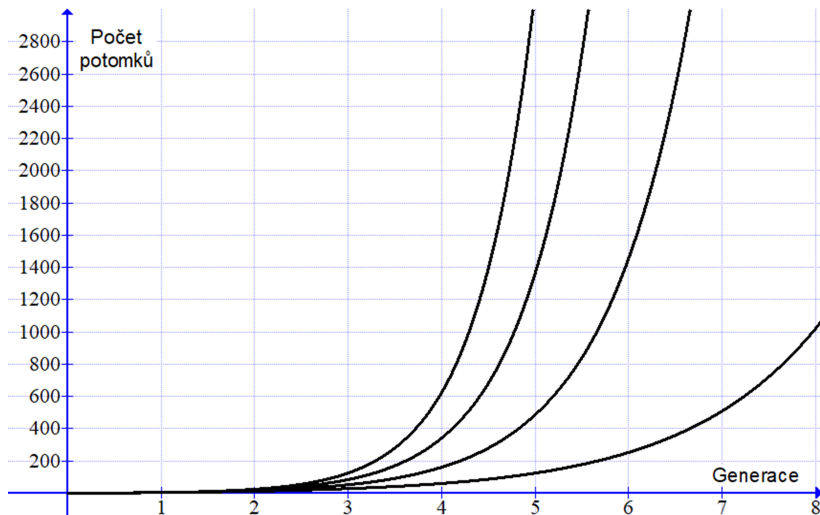
určuje celkový počet samčích potomků po n generacích.

Maximální reprodukční potenciál

Maximální reprodukční potenciál jedné samice po n generacích je součtem výrazů z rovnic (4) a (5)

$$\begin{aligned} P_{\text{celkem}} &= (1 + p_1)^n - 1 + (p - p_1) \cdot \frac{(1 + p_1)^n - 1}{p_1} = \\ &= \frac{p}{p_1} \left((1 + p_1)^n - 1 \right). \quad (6) \end{aligned}$$

Na obr. 2 vidíme model pro konstantní počet potomků ve vrhu, graf ukazuje obraz typický pro neomezený růst.



Obr. 2 Počet jedinců po n generacích podle rovnice (6) pro 4 potomky; první křivka vpravo odpovídá jedné samici ve vrhu, směrem doleva počet samic ve vrhu stoupá po 1

Reprodukční potenciál s úbytkem

Model, který jsme popsali rovnicí (6) má zcela jistě značně daleko ke skutečnému stavu. Dále se tedy pokusíme o jisté přiblížení realitě formou vložení koeficientu, který bude popisovat jednak konstantní (k), jednak poměrný (μ) úbytek jedinců samičího pohlaví. Postupně tak pro počet jedinců samičího pohlaví v jednotlivých generacích platí:

Generace	Počet samic
0.	1
1.	$1 + p_1 - k$
2.	$(1 + p_1)^2 - (1 + p_1)k - k$
3.	$(1 + p_1)^3 - (1 + p_1)^2k - (1 + p_1)k - k$
4.	$(1 + p_1)^4 - (1 + p_1)^3k - (1 + p_1)^2k - (1 + p_1)k - k$
⋮	⋮
n .	$(1 + p_1)^n - k \frac{(1+p_1)^n - 1}{p_1}$

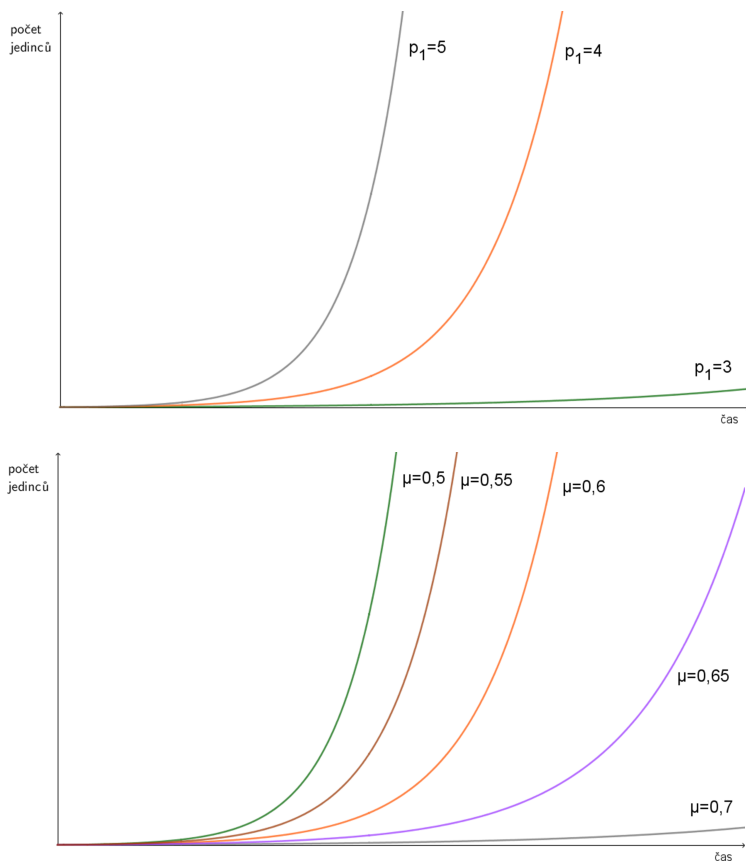
Celkový počet potomků jedné samice samičího pohlaví po n generacích s konstantním úbytkem k vyjadřuje vztah

$$P_{\text{samice}} = \frac{p_1 - k}{p_1} \left((1 + p_1)^n - 1 \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq k \leq p_1. \quad (7)$$

I v případě započítání konstantního úbytku je výsledkem (sice pomalejší, ale přesto) neomezený růst, ve kterém se konstantní úbytek zřetelně projevuje pouze v několika prvních generacích.

V dalším modelu budeme uvažovat míru úbytku μ jako poměrnou část jedinců dané generace, přičemž $0 \leq \mu < 1$. Pro počet jedinců samičího pohlaví v jednotlivých generacích v tomto případě platí:

Generace	Počet samic
0.	1
1.	$1 + p_1 - \mu(1 + p_1) = (1 + p_1)(1 - \mu)$
2.	$(1 + p_1)(1 - \mu)p_1 - \mu \left((1 + p_1)(1 - \mu)p_1 \right) = (1 + p_1)(1 - \mu)^2 p_1$
3.	$\left((1 + p_1)(1 - \mu)^2 p_1 \right) p_1 - \mu \left((1 + p_1)(1 - \mu)^2 p_1 \right) p_1 = (1 + p_1)(1 - \mu)^3 p_1^2$
⋮	⋮
n .	$(1 + p_1)(1 - \mu)^n p_1^{n-1}$



Obr. 3 Modely s úbytkem pro $\mu = 0,6$ (nahore), pro čtyři samice v potomstvu (dole)

Celkový počet potomků jedné samice samičího pohlaví po n generacích s mírou úbytku μ vyjadřuje vztah

$$P_{\text{samice}} = \frac{p_1 + 1}{p_1} \left((1 - \mu)p_1 \right)^n - 1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \mu < 1. \quad (8)$$

Hodnota parametrů μ a p_1 nebude v reálných podmínkách konstantní, nýbrž bude odpovídat řadě faktorů určujících reprodukční úspěch jedinců v jednotlivých generacích. Přijmeme proto vztah popsany rovnicí (8) jako model, který srovnáme s přístupem zmiňovaným v literatuře.

Exponenciální růst

V této sekci se pokusíme srovnat vztah popsaný rovnicí (8) s rovnicemi známými z literatury, které popisují tzv. *exponenciální růst*. Např. Kalas (2001) uvádí pro exponenciální růst rovnici²⁾

$$x(t) = x(0) e^{\lambda t}, \quad (9)$$

kteřá popisuje počet jedinců tvořících populaci v čase t , kde $x(0)$ je počáteční stav populace v čase $t = 0$ a λ je přirozený logaritmus reálného čísla většího než 1 [5]. Přestože rovnice (8) určuje počet potomků jedné samice v n -té generaci a rovnice (9) počet jedinců tvořících populaci v čase t , neměli bychom přehlédnout určité společné rysy obou vztahů. V obou rovnicích nalezneme jak člen (či výraz) určující počáteční stav, tak exponenciální výraz charakterizující růst počtu potomků (popř. populace). Bez podstatné újmy na platnosti bychom tedy mohli v rovnici (8) výraz pro počáteční počet $\frac{p_1+1}{p_1}$ nahradit členem $x(0)$ a výraz $((1-\mu)p_1)^n$ výrazem $e^{\lambda t}$. V případě, že položíme $n = t$, pak

$$((1-\mu)p_1)^t = e^{\lambda t} \Leftrightarrow \lambda = \ln((1-\mu)p_1),$$

kde pro $(1-\mu)p_1 > 1$ mluvíme o *exponenciálním růstu*, pro $0 < (1-\mu)p_1 < 1$ pak o *exponenciálním poklesu*.

Dodejme, že použití Eulerova čísla e v základu exponenciální funkce je ve vztazích odpovídajících rovnicí (9) poměrně běžné (např. v matematické biologii), neboť takto vyjádřený exponenciální růst usnadňuje další související výpočty.³⁾

Přirozeným pokračováním tématu by bylo zvážení vnitrodruhové konkurence vyplývající z omezených zdrojů, která zvyšuje úmrtnost nebo snižuje porodnost. Míru růstu populace bychom volili jako klesající funkci

²⁾Rovnice je označována také jako Malthusův model podle Thomase Malthuse (1766–1834), který růst populace poprvé matematicky modeloval v esejí *An Essay on the Principle of Population* vydané v r. 1798 v Londýně. Malthus sám tvrdil, že velikost zdrojů potravy může růst pouze lineárně (aritmeticky), takže exponenciální (geometrický) růst velikosti populace není udržitelný. Malthusův model dává dobré výsledky pro kratší časové úseky a menší populace, pro větší populace a delší časové úseky směřuje k neomezenému růstu [5].

³⁾Zmíňme např. skutečnost, že hodnota směrnice tečny ke grafu funkce $y = e^x$ v jejím libovolném bodě je rovna hodnotě funkce v daném bodě. Jestliže bude např. $C[c, e^c]$ bod dotyku tečny ke grafu funkce $y = e^x$, pak pro rovnici tečny platí vztah $y = e^c x + e^c(1-c)$, kde e^c je směrnice tečny.

velikosti populace a použitím prostředků vyšší matematiky (diferenciální počet) dospěli k tzv. *logistickému růstu*, což je shora omezená funkce, která se svými hodnotami postupně blíží nosné kapacitě prostředí, ve kterém se populace nachází.

Závěr

Pokud si položíme otázku způsobem naznačeným v předchozích sekcích, pak z matematického pohledu můžeme nabídnout jednoznačnou odpověď, tj. stanovit způsob, jak určit *maximální reprodukční potenciál*. Pohled matematika a biologa na stejný problém však nemusí a v řadě případů patrně ani nebude stejný. V místě, kde nalezením požadovaného vztahu končí práce matematika se biolog začne ptát, do jaké míry je vztah aplikovatelný ve skutečných podmínkách a jak relevantní jsou data, která nabízí. V žádném bodě takových úvah nelze opomenout skutečnost, že jde o *potenciál*, jehož případné využití ovlivňuje řada faktorů, z nichž zmiňme např.

- dostupnost potravy,
- vhodné klimatické podmínky,
- tlak predátorů,
- infekce snižující početnost populace apod.

Jednotlivé živočišné druhy tedy obvykle využijí jen určitou část svého *potenciálu*, který je navíc druhově specifický (srovnejte s výše uvedenými údaji). Ve výrazné míře se reprodukční potenciál uplatní např.

- V prostředí, kde je omezený nebo prakticky nulový tlak predátorů. V českých zemích můžeme zmínit v současnosti vysoké stavy jelení a srnčí zvěře či divokých prasat, kterým chybí přirozený predátor např. vlk nebo medvěd [4].
- V prostředí, kde se změny klimatické podmínky favorizují určitý druh organismů. V ČR došlo v několika posledních letech k masivnímu přemnožení lýkožrouta smrkového decimujícího smrkové porosty zejména ve středních polohách. Přestože příčinou je téměř jistě souhra vícero faktorů (např. velké zastoupení smrku v českých lesích, změna způsobu hospodaření), mezi nejdůležitější patří zejména mírné zimy a teplá a relativně suchá léta.
- V prostředí, kde se pro daný druh objeví volná *nika*, kterou může zaplnit.⁴⁾ Příkladem mohou být situace, kdy na některých ostrovech

⁴⁾ Termínem *nika* se v ekologii označuje souhrn takových podmínek, které umožňují životaschopnou existenci populace určitého druhu.

krysy, zavlečené námořníky či kolonizátory, díky rychlému množení zdecimovaly místní populace ptáků, plazů či obojživelníků. V české krajině se v posledních letech objevují místa s lokálními populacemi vlků, kteří takto zaplňují volnou niku, vyvolávají však současně poměrně bouřlivé debaty mezi ekology a ochránci na jedné straně a myslivci a zemědělci na straně druhé.

Literatura

- [1] https://cs.wikipedia.org/wiki/Hrabo%C5%A1_poln%C3%AD
- [2] https://cs.wikipedia.org/wiki/Prase_divok%C3%A9
- [3] https://cs.wikipedia.org/wiki/Vlk_obecn%C3%BD
- [4] https://cs.wikipedia.org/wiki/Ekologick%C3%A1_nika
- [5] Kalas, J., Pospíšil, Z.: Spojité modely v biologii. Masarykova univerzita, Brno, 2001.

Hodnotiace prostriedky na formatívne hodnotenie vo vyučovaní matematiky

STANISLAV LUKÁČ

Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice, SLOVENSKO

Snahy o skvalitnenie procesu učenia a zlepšenie učebných výsledkov vedú k hľadaniu a využívaniu rôznych foriem interakcií a dialógu medzi učiteľom a žiakom. Dôležitou podmienkou pre skvalitnenie a inováciu matematického vzdelávania je rozvíjanie profesionálnych kompetencií učiteľov matematiky. Medzi významné oblasti profesionálneho rozvoja učiteľa patrí využívanie rôznych stratégií učenia. Východiskom pre plánovanie a realizáciu výučby je identifikácia kritických miest vo vzdelávacom obsahu, získavanie informácií o učebných výsledkoch žiakov. Pre učiteľa to znamená snažiť sa preniknúť do myslenia žiakov, odhaľovať zdroje a príčiny neporozumenia a žiacke miskoncepce [1].

Zatiaľ čo vzdelávacie ciele a stratégie v mnohých európskych krajinách signalizujú vysokú úroveň pozornosti venovanej formatívne hodnoteniu, z niektorých krajín, medzi ktoré bola zaradená aj Slovenská republika, je len málo informácií o efektívnom a systematickom využívaní formatívneho hodnotenia na školách a v triedach [4]. V triednej praxi učitelia často využívajú sumatívne hodnotenie na stanovenie celkovej úrovne osvojenia vedomostí a zručností po ukončení výučby. Jeden z výsledkov sumatívneho hodnotenia je zaradenie výkonov žiakov do klasifikačných stupňov. Termín formatívne hodnotenie použil prvýkrát Bloom na odlíšenie priebežného hodnotenia v triede od záverečných súhrnných testov [9]. Formatívne hodnotenie je zamerané hlavne na priebežnú identifikáciu oblastí, ktoré si môžu vyžadovať zlepšenie, analýzu získaných informácií o procese učenia a prijatie rozhodnutí o ďalšom priebehu výučby. Wiliam [9] charakterizuje formatívne hodnotenie ako súbor procesov využívajúcich informácie o učebných výsledkoch žiakov, ich analýzu učiteľom, žiakom alebo jeho rovesníkmi a poskytovanie spätnej väzby za účelom usmerňovania a zlepšenia učenia. Pri formatívnom hodnotení učitelia získavajú informácie o aktuálnych vedomostiach žiakov a na základe týchto informácií majú zhodnotiť, či sú učebné postupy účinné, alebo či je potrebné ich pozmeniť, prípadne sa aj vrátiť k objasneniu niektorých pojmov a vzťahov. Formatívne hodnotenie možno charakterizovať ako dynamickú interakciu medzi učiteľom a žiakmi, ktorá v sebe zahŕňa plánovanie, vyučovanie a reflexiu výsledkov učenia za účelom prijatia lepších rozhodnutí o ďalšej výučbe [2]. Každé hodnotenie v triede môže plniť funkcie formatívneho hodnotenia, ak informácie o učení sa žiakov sú využívané na prispôsobenie ďalšej výučby potrebám a schopnostiam žiakov.

V štandardoch pre národné združenie učiteľov matematiky NCTM v USA [10] sa uvádza, že formatívne hodnotenie v sebe zahŕňa päť kľúčových stratégií.

1. Vysvetlenie učebných cieľov a kritérií pre hodnotenie učebných výkonov. Učitelia môžu rozobrať so žiakmi učebné ciele a hodnotiace kritériá na začiatku vyučovacej jednotky. Diskusia o ukazovateľoch výborných výkonov môže mať pozitívny vplyv na dosahovanie výborných učebných výsledkov. Porozumenie učebných cieľov a hodnotiacich kritérií môže pomôcť žiakom hodnotiť svoj vlastný učebný postup a porovnávať ho s požadovanými učebnými výkonmi. Na vymedzenie jednotlivých úrovní žiackych učebných výkonov možno využiť hodnotiace rubriky. Učitelia môžu pomocou rubriek zdieľať so žiakmi kritériá úspechu.

2. Využívanie učebných aktivít na získavanie informácií o učení sa žiakov. Pri analýze priebehu a výsledkov učebných aktivít by sa mal učiteľ snažiť porozumieť mysleniu žiakov a identifikovať prípadné miskoncepce. Pri plánovaní výučby by si mal učiteľ premyslieť, aké súvislosti, príklady a otázky využije pri sprístupňovaní novej témy. Dôležitým spôsobom na získavanie informácií o myslení žiakov, ale aj na stimulovanie myslenia, je kladenie otázok a organizovanie diskusie so žiakmi.

3. Poskytovanie spätnej väzby na usmerňovanie učenia. Učiteľ pri výučbe pozoruje prácu žiakov, zadáva otázky, počúva vysvetlenia žiakov, koriguje ich odpovede a usmerňuje ich činnosti pri učení. Vyjadrenie hodnotenia riešenia úloh v teste alebo v pracovnom liste pomocou bodov nemusí mať vplyv na zlepšenie učenia žiakov. Aby mala spätná väzba vplyv na zvýšenie výkonu žiaka, mala by byť konštruktívna. Učiteľ by sa mal snažiť poskytnúť žiakom konkrétne komentáre k chybám a aj návrhy, ako sa môžu zlepšiť. Efektívna spätná väzba by mala byť zameraná na konkrétne oblasti alebo činnosti, v ktorých by sa mal žiak zlepšiť. Pre zvýšenie efektívnosti spätnej väzby je dôležité, aby mal žiak čas na premyslenie svojho riešenia. Preto by spätná väzba nemala byť poskytovaná príliš rýchlo po zadaní úlohy, ale ani s väčším časovým odstupom, keď už žiak mohol zabudnúť hlavné myšlienky svojho riešenia.

4. Nabádanie žiakov na hodnotenie ich vlastného učenia sa. Zapojenie žiakov do hodnotenia svojho učenia môže byť premietnuté do zlepšenia ich učebných výsledkov. Sebahodnotenie má podnecovať žiaka, aby sa zamyslel nad osvojenými poznatkami, nad tým, ako porozumel nové pojmy, vzťahy a ako vníma ich súvis so skôr osvojenými poznatkami. Hodnotenie svojho učenia je základným prvkom metakognície. Zlepšovanie žiakov v oblasti metakognície je dôležitým predpokladom pre hlbšie porozumenie vzdelávacieho obsahu a lepšie riadenie svojho učenia.

5. Zapojenie žiakov do vzájomného učenia. Žiaci môžu zohrávať dôležitú úlohu pri zlepšovaní učebných výkonov svojich spolužiakov. Pre žiaka môže byť jednoduchšie a pohodlnejšie žiadať o pomoc a vysvetlenia svojho spolužiaka ako učiteľa. Na druhej strane musí žiak pri objasňovaní svojich riešení spolužiakom hľadať vhodné vysvetlenia a argumenty. Pre podporu vzájomného učenia je vhodné skupinové vyučovanie. Aby skupinové vyučovanie mohlo byť efektívne, mali by byť presne stanovené skupinové ciele a úlohy pri organizovaní skupinovej práce, aby každý žiak pociťoval zodpovednosť za prácu skupiny.

Bežným postupom na zisťovanie spôsobov rozmýšľania žiaka a miery jeho porozumenia základných pojmov a vzťahov je kladenie otázok. Podľa Freia a Fishera [3] možno rozlíšiť niekoľko základných typov otázok:

- otázky na opakovanie sú zamerané na skôr naučené poznatky a predchádzajúce skúsenosti,
- otázky k vypracovaniu riešenia úlohy nabádajú žiakov k opísaniu ich nápadov na riešenie predloženej úlohy,
- otázky na objasnenie požadujú od žiakov, aby objasnili a vysvetlili svoje riešenia,
- otázky na reflexiu podnecujú žiakov k vysvetľovaniu svojich názorov a vlastných pohľadov na svoje riešenia alebo na riešenia svojich spolužiakov.

Pri diagnostikovaní porozumenia pojmov a vzťahov a pri identifikovaní miskoncepcií majú dôležité postavenie otázky na porozumenie základného konceptu, ktoré možno označovať ako konceptuálne otázky. Otázky tohto typu je vhodné používať aj pri formatívnom hodnotení.

Návrh prostriedkov na formatívne hodnotenie

Viacerí autori vo svojich publikáciách [5, 6, 7, 8] opisujú konkrétne formy prostriedkov na formatívne hodnotenie. Niektoré z opisovaných prostriedkov sa odlišujú len v malých detailoch. V článku sme sa nesnažili demonštrovať veľký počet prostriedkov na formatívne hodnotenie, ale vybrali sme na ukážku len niekoľko základných typov, ktoré podľa nášho názoru možno vhodne využiť vo vyučovaní matematiky. Úlohy na formatívne hodnotenie môžu byť založené na rozhodovaní o pravdivosti výrokov, modifikovaní výrokov, aby boli pravdivé, hľadanie chýb v postupoch riešení úloh, alebo v rozhovoroch medzi dvoma žiakmi (môžu v nich byť zapracované typické chyby žiakov), výber správnych grafov podľa slovného opisu alebo predpisu funkcie, priradovanie kartičiek obsahujúcich rôzne reprezentácie pojmov a vzťahov, a pod.

Vybrané typy prostriedkov na formatívne hodnotenie:

Model Frayer využíva grafickú schému na prehľadné usporiadanie definície a významu pojmov. Žiak nemá preukázať len zapamätanie definície a vlastností pojmov, ale má sa zamyslieť aj nad hľadaním vhodných príkladov a protipríkladov. Tento model umožňuje diagnostikovať porozumenie konceptu základných pojmov a vzťahov. Na obr. 1 je znázornený model Frayer pre pojem rovnobežník.

Priezvisko:		Trieda:	Dátum:
Definícia:		Vlastnosti rovnobežníkov:	
Tri príklady na špeciálne typy rovnobežníkov:		Tri protipríklady:	

Obr. 1 Model Frayer pre pojem rovnobežník

Komentovaný náčrt využíva grafickú reprezentáciu objektov a vzťahov. Žiaci sú vyzvaní, aby svoje úvahy vyjadrili graficky. Pri vypracovaní zadania sa môže od žiakov vyžadovať vytvorenie alebo doplnenie náčrtu, označenie a stručné vysvetlenie jednotlivých častí náčrtu. Náčrt sa môže vzťahovať na opis jednotlivých častí grafu funkcie, grafický model riešenia slovnej úlohy a pod. Ako príklad sme vybrali náčrt, ktorý by obsahoval načrtnutý štvorec $ABCD$ so stranou a . Žiak by mal do náčrtu doplniť obdĺžnik $KLMN$ tak, že by jednu stranu štvorca zväčšil o 10 % a susednú stranu štvorca zmenšil o 10 %. Na záver by mal porovnať obsahy oboch načrtnutých útvarov.

Predikčná karta môže poskytnúť základný rámec pri nastolení výskumnej otázky pri bádateľsky orientovanom vyučovaní a pomôcť prebudiť záujem žiakov o bádanie. Učiteľ môže pomocou nej rýchlo získať informácie o intuitívnom náhľade žiakov na riešenie nastolenej výskumnej otázky a o ich úsudkoch po využití experimentovania, modelovania alebo úvah podložených výpočtami. Tabuľka 1 obsahuje námet na predikčnú kartu, ktorú by učiteľ mohol využiť v úvode výučby pravdepodobnosti.

Pri posudzovaní spravodlivosti opísaného losovania sa u žiakov môže prejaviť miskoncepia súvisiaca s nerozlišením mincí pri analyzovaní všet-

kých výsledkov hodov dvoma mincami. Dôsledkom takéhoto postupu je presvedčenie, že losovanie je spravodlivé pre všetkých troch chlapcov. Po vykonaní väčšieho počtu náhodných pokusov a vyhodnotení výsledkov by žiaci mali dôjsť k zisteniu, že navzájom rôzne strany padajú pri hode dvoma mincami častejšie ako dva znaky aj ako dve čísla.

Priezvisko:	Trieda:	Dátum:		
Traja chlapci Adam, Boris a Cyril chceli hrať futbal, ale žiadnemu z nich sa nechcelo ísť domov po loptu. Preto sa rozhodli, že budú losovať hodením dvoch mincí. Ak padne na oboch minciach číslo, pôjde po loptu Adam. Ak padne na oboch minciach znak, pôjde po loptu Boris. Ak padne na minciach číslo aj znak, pôjde po loptu Cyril.				
Otázka	Predpoveď		Odpoveď	
Je opísané losovanie spravodlivé pre každého chlapca?	áno	nie	áno	nie

Tabuľka 1 Predikčná karta na motivovanie žiakov k bádaniu vo výučbe pravdepodobnosti

Karta na vyvodenie je zameraná na vyvodenie záverov z údajov, ktoré mohol žiak získať na základe pozorovania, experimentovania alebo modelovania. Žiak by mal vypozerovať určité súvislosti, na základe ktorých by mal zostaviť čiastočné úsudky, ktoré by potom zhrnul do záverov. Uvedená stratégia formatívneho hodnotenia je vhodná na rozvíjanie bádateľských spôsobilostí, ktoré by mal žiak uplatňovať pri bádateľsky orientovanom vyučovaní matematiky. Na ukážku sme vybrali neúplnú tabuľku (pozri tabuľku 2) k riešeniu kombinatorickej úlohy, v ktorej je naznačený systém výpisu možností.

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
1												
2												
3												
4												
5												
6												

Tabuľka 2 Model vo forme tabuľky k riešeniu kombinatorickej úlohy

Spolu s tabuľkou by mal žiak k dispozícii aj zadanie úlohy: Zo šiestich detí je potrebné vybrať dve, ktoré pôjdu na súťaž. Vie sa, že Alena pôjde len s Jurajom. V tabuľke je naznačený systém výpisu možností a niekoľko možností výberu dvojice detí. Doplňte do zvýraznenej oblasti tabuľky čiarky tak, aby tabuľka obsahovala všetky možnosti pre výber dvojice detí na súťaž. Rozhodnite, ktoré číslo prislúcha v tabuľke Alene a ktoré Jurajovi.

Odpoveďový hárok predstavuje formu krátkého priebežného testu, v ktorom by mohla byť postupne rozvíjaná úloha alebo uvedená skupina súvisiacich úloh. Učiteľ ho môže zadať žiakom v priebehu výučby príslušnej témy, aby zistil informácie o aktuálnych vedomostiach žiakov a prípadne aj identifikoval nedostatky, ktoré si vyžadujú ďalšie učebné činnosti na zlepšenie. Vybraná ukážka je zameraná na aplikáciu lineárnej funkcie: Do zásobníka plynu v aute vojde 62 litrov plynu. Auto spotrebuje priemerne 14 litrov plynu na prejdenú dráhu 100 km.

a) Určte, medzi ktorými veličinami je vzťah priamej úmernosti a vyjadrite ho zápisom obsahujúcim premenné.

b) Zapište predpis funkcie f , ktorá vyjadruje množstvo plynu v zásobníku po prejdení x km.

Pre rýchle a jednoduché vyhodnotenie žiackych riešení v triede môže byť k odpoveďovému hároku pridaná pre učiteľa aj rubrika. Často je postačujúca jednoduchá rubrika vymedzujúca štyri úrovne výkonu žiaka. Pri hodnotení uvedenej úlohy by mohlo hodnotenie postupne gradovať od nevyhovujúceho výkonu, keď žiak nevedel aplikovať ani priamu úmernosť, k ďalším úrovniam výkonu, ak žiak vedel opísať priamu úmernosť medzi veličinami, vedel zapísať aj predpis správne aplikovanej priamej úmernosti až po zostavenie predpisu lineárnej funkcie f .

Súbor otázok začínajúci faktami je vhodný prostriedok na zisťovanie úrovne osvojenia vedomostí a zručností a aj miery porozumenia pojmov a vzťahov. Jeho obsah tvorí gradovaná postupnosť otázok, ktorá začína jednoduchšími otázkami zameranými na zapamätanie informácií a postupne sú otázky stále viac orientované na uplatnenie výpočtových a argumentačných spôsobilostí. Na ilustráciu sme vybrali súbor otázok k lineárnej funkcii.

1. Čo je grafom lineárnej funkcie?
2. Ktorá z funkcií $f: y = 3 + 2x + x^2$, $g: y = 5 - 2x$ je lineárna?

3. Ktorá z hodnôt $f(-1)$ a $g(-1)$ je väčšia?
4. Ako možno zostrojiť graf lineárnej funkcie, ktorá je daná predpisom?
5. Aký je predpis lineárnej funkcie, ak jej smernica je rovná 1 a jej graf prechádza bodom $[0; -2]$?
6. Akú smernicu má lineárna funkcia, ktorej graf prechádza bodmi $[2; 1]$ a $[4; 7]$?
7. Aké znamienko má smernica lineárnej funkcie h , pre ktorú platí

$$h(-1) > h(1)?$$

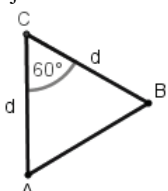
8. Aké argumenty by ste využili pri zdôvodnení svojej odpovede na prvú otázku?

Niektoré z uvedených otázok možno v triede využiť aj na diskusiu o rôznych prístupoch k hľadaniu odpovede. Naše skúsenosti ukazujú, že žiaci v menšej miere využívajú pri riešení úloh charakteristickú vlastnosť lineárnej funkcie a význam jednotlivých koeficientov v predpise lineárnej funkcie a viac sa spoliehajú na výpočty. Možno očakávať, že pri hľadaní odpovede na otázku 6 budú viacerí žiaci hľadať predpis lineárnej funkcie a nebudú analyzovať prírastok lineárnej funkcie v súvislosti s jej smernicou. Učiteľ by mal so žiakmi diskutovať aj o týchto súvislostiach. Pri hľadaní odpovede na poslednú otázku by mali žiaci vychádzať z charakteristickej vlastnosti lineárnej funkcie a zhodnosti trojuholníkov.

Kontrolný zoznam môže nadobúdať rôzne formy v závislosti od účelu jeho využitia. Jedna z jeho foriem môže byť zameraná na rozhodovanie o pravdivosti výrokov. Výroky môžu byť umiestnené do prvého stĺpca tabuľky obsahujúcej tri stĺpce. Druhý a tretí stĺpec tabuľky je určený na rozhodnutie o pravdivostnej hodnote výroku a zdôvodnenie odpovede. Nižšie uvedený kontrolný zoznam v tabuľke 3 obsahuje výroky o podobnosti útvarov.

V jednoduchšej forme môže byť kontrolný zoznam určený aj ako pomôcka k sebahodnoteniu žiakov. V takomto prípade by bol kontrolný zoznam využitý vo forme prehľadu základných vedomostí a zručností v osvojovanej téme. Tabuľka by obsahovala len dva stĺpce. Prvý stĺpec by obsahoval zoznam vedomostí a zručností a v druhom stĺpci by mal žiak zaznamenať, či ovláda príslušné vedomosti a zručnosti. Napríklad v téme výška trojuholníka by mohol kontrolný zoznam obsahovať v prvom stĺpci

vedomosť vysvetliť pojem výška trojuholníka a zručnosti zostrojiť výšku v ostrouhľom, pravouhľom a tupouhľom trojuholníku.

Priezvisko:	Trieda:	Dátum:
V ľavom stĺpci tabuľky sú uvedené výroky o podobnosti geometrických útvarov. O každom výroku rozhodnite, či je pravdivý alebo nepravdivý (nehodí sa škrtnite). Svoju odpoveď zdôvodnite.		
Výrok	Odpoveď	Zdôvodnenie
Ak sú dva trojuholníky podobné, potom ak je jeden trojuholník tupouhlý, tak aj druhý trojuholník je tupouhlý.	P N	
Každé dva pravouhlé trojuholníky sú podobné.	P N	
Ak v trojuholníku splyývajú stred opísanej a stred vpísanej kružnice, potom je tento trojuholník podobný s trojuholníkom na obrázku.	P N	
		
Každé dva štvoruholníky, ktoré majú rovnaké pomery všetkých dvojíc zodpovedajúcich si strán, sú podobné.	P N	

Tabuľka 3 Kontrolný zoznam k podobnosti útvarov

Lístok pri odchode predstavuje ďalší spôsob nabádania a vedenia žiakov k sebahodnoteniu. Učiteľ by ho mohol zadať žiakom na konci vyučovacej hodiny, aby žiaci sami zhodnotili svoje nadobudnuté vedomosti a zručnosti. Po analýze odpovedí žiakov by mal učiteľ na nasledujúcej vyučovacej hodine prediskutovať so žiakmi zistené nedostatky a prípadné žiacke otázky. Na ukážku uvádzame v tabuľke 4 lístok pri odchode pre tému siete kocky.

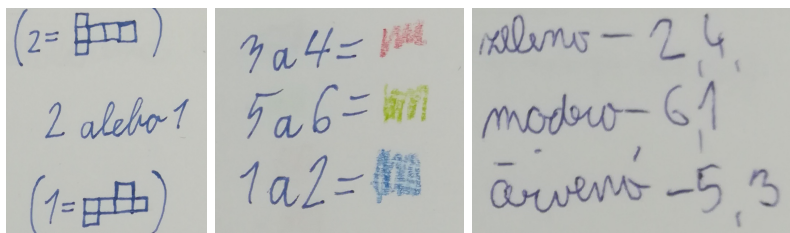
Priezvisko:	Trieda:	Dátum:
Zameranie odpovedí	Odpovede	
Na sieťach kocky ma najviac zaujalo:		
V čom som sa zlepšil?		
Otázka, ktorú stále mám:		
<p>Do akej miery si viete predstaviť poskladanie kocky z rôznych načrtnutých sietí?</p> <ol style="list-style-type: none"> Viem pri rôznych sieťach kocky. Viem len pri niektorých sieťach kocky. Neviem. 		

Tabuľka 4 Lístok pri odchode

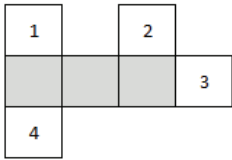
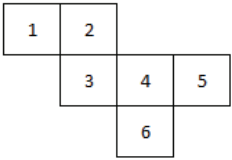
Skúsenosti z využitia formatívneho hodnotenia

Niektoré z uvedených typov prostriedkov na formatívne hodnotenie vyškúšali vybraní dvaja učitelia vo vyučovaní matematiky v 7. ročníku ZŠ. Po krátkom zaškolení dostali učitelia k dispozícii prostriedky na využitie formatívneho hodnotenia pre témy, ktoré mali vyučovať v najbližšom období. Prvý učiteľ zadal v skupine 16 žiakov odpoveďový hárok (pozri tabuľku 5) zameraný na siete kocky.

Prvú úlohu vyriešilo správne deväť žiakov. Väčšina z nich dokázala využiť svoju predstavivosť aj pri riešení druhej úlohy, lebo siedmi z nich vyriešili správne aj druhú úlohu. Na ilustráciu sme uviedli jedno správne riešenie prvej úlohy v ľavej časti obr. 2.



Obr. 2 Ukážky žiackych riešení úloh k sieťam kocky

Priezvisko:	Trieda:	Dátum:
V ľavom stĺpci tabuľky sú uvedené zadania úloh spolu s obrázkami. Svoju odpoveď zapíšte do druhého stĺpca tabuľky.		
Úloha	Odpoveď	
<p>1. Ktorý očíslovaný štvorec je potrebné odobrať, aby sme získali sieť kocky? Nájdite všetky možnosti.</p> 		
<p>2. Predstavuje nižšie uvedený obrázok sieť kocky? Ak áno, rozhodnite, ktoré dvojice štvorcov máme zafarbiť modrou, červenou a zelenou farbou, aby po zložení kocky boli steny oproti sebe zafarbené rovnakou farbou.</p> 		

Tabuľka 5 Odpoveďový hárok k sieťam kocky

Pri riešení prvej úlohy štyria žiaci uviedli len jedno riešenie spočívajúce v odstránení štvorca s číslom 2. Možno predpokladať, že títo žiaci vedia v mysli poskladať niektoré štandardné siete kocky, ale pri niektorých špeciálnych typoch sietí kociek zlyhávajú. Jeden z týchto žiakov vyriešil správne druhú úlohu. Predpokladáme, že pri riešení druhej úlohy dvaja žiaci neporozumeli zadanie úlohy, lebo ofarbili susedné steny kocky. Jedno z týchto riešení uvádzame v prostrednej časti obr. 2. Piatí žiaci správne vyfarbili rovnakou farbou len jednu dvojicu stien kocky, ktoré boli označené číslami 3, 5. Pri farbení zvyšných stien kocky sa pomýlili, lebo si nevedeli predstaviť zloženie siete do kocky. Jedno z týchto riešení je zobrazené v pravej časti obr. 2. Niektorí žiaci neodpovedali na prvú otázku

pri riešení druhej úlohy. Učiteľ by preto mohol zadať žiakom aj úlohu na farbenie stien kocky na obrázku, ktorý by nepredstavoval sieť kocky.

V inej triede v 7. ročníku ZŠ zadala učiteľka žiakom dva kontrolné zoznamy zamerané na rozhodovanie o pravdivosti výrokov a zdôvodnenie odpovedí. Prvý zoznam obsahoval dva výroky o povrchu a objeme kvádra.

1. Kváder s rozmermi $a = 2$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm má rovnaký povrch ako kváder s rozmermi $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $c = 2$ cm. Platí uvedené tvrdenie?

2. Peter v rozhovore so spolužiakmi tvrdí, že kváder s dĺžkami hrán vyjadrenými číslami a , b , c a kváder s dĺžkami hrán vyjadrenými inými číslami d , e , f majú rôzne objemy. Platí Petrove tvrdenie pre každé dva kvádre s uvedenými vlastnosťami?

Prvú úlohu vyriešili správne štrnásť žiaci. Len jeden žiak uviedol nesprávnu odpoveď bez zdôvodnenia. Traja žiaci uviedli zdôvodnenie založené na výpočte povrchu oboch kvádrov. Všetci ostatní žiaci založili zdôvodnenie na úvahe, že druhý kváder má rovnaké rozmery ako prvý kváder, len sú inak označené. Pri riešení druhej úlohy boli už žiaci menej úspešní. Len štyria žiaci uviedli, že Petrove tvrdenie nie je pravdivé. Traja z nich sa pokúsili aj o zdôvodnenie svojej odpovede, ale ich vysvetlenie nemalo racionálny základ. Snažili sa využiť analogický postup ako v prvej úlohe a tvrdili, že kvádre sa líšia len označením hrán. Zvyšní jedenásť žiaci sa domnievali, že Petrove tvrdenie je pravdivé. Na obr. 3 je uvedené nesprávne riešenie vybraného žiaka.

2. Peter v rozhovore so spolužiakmi tvrdí, že kváder s dĺžkami hrán vyjadrenými číslami a , b , c a kváder s dĺžkami hrán vyjadrenými inými číslami d , e , f majú rôzne objemy.

Platí Petrove tvrdenie pre každé dva kvádre s uvedenými vlastnosťami?

Platí.

Zdôvodnenie:

Platí, pretože kváder s inými dĺžkami hrán nemôže mať rovnaký objem ako iný kváder s inými dĺžkami.

Obr. 3 Ukážka nesprávneho žiackeho riešenia

Žiakom evidentne chýbala predstava, že aj kvádre s rôznymi rozmermi môžu mať rovnaký objem. Žiaden žiak sa nepokúsil pri zdôvodňovaní ne-

pravdivosti výroku využiť rôzne rozklady prirodzeného čísla. Napríklad kváder s rozmermi 1, 2, 36 má rovnaký objem ako kváder s rozmermi 3, 4, 6. Uvedené postupy by mohol učiteľ využiť pri analýze žiackych riešení v triede a organizovaní diskusie so žiakmi s cieľom napraviť mylnú predstavu žiakov.

Druhý kontrolný zoznam obsahoval tri výroky pojednávajúce o pomeroch. Pri rozhodovaní o ich pravdivostnej hodnote a zdôvodňovaní odpovedí mali žiaci preukázať zručnosti pri práci s pomermi a porozumenie vzťahov pri delení objektov na časti.

1. Ak sú dĺžky úsečiek AB a CD v pomere 2 : 6, tak dĺžka úsečky CD je trikrát väčšia ako dĺžka úsečky AB . Platí uvedené tvrdenie?

2. Ak sú dĺžky úsečiek AB a CD v pomere 1 : 3 a dĺžky úsečiek EF a CD sú v pomere 4 : 6, tak dĺžka úsečky EF je dvakrát väčšia ako dĺžka úsečky AB . Platí uvedené tvrdenie?

3. Miro si na ovocnom nápoji s objemom 1 liter prečítal, že voda a ovocná šťava sú v pomere 3 : 2 a v ovocnej šťave sú pomarančová šťava a jablková šťava v pomere 1 : 3. Po krátkom zamyslení vyhlásil, že voda a jablková šťava sú v pomere 3 : 3. Je Mirov záver správny?

Prvú úlohu vyriešili správne všetci šestnásť žiaci. Pri zdôvodňovaní žiaci najčastejšie upravili pomer 2 : 6 na 1 : 3 alebo si za dĺžky úsečiek zvolili konkrétne dĺžky 2 a 6. Riešenie druhej a tretej úlohy si vyžadovalo porozumenie rozdielu pri spájaní dvoch pomerov do postupného pomeru a pri rozdelení jednej časti celku na ďalšie časti. Pri riešení druhej úlohy už žiaci neprejavili takú sebaistotu. Pravdivostnú hodnotu výroku v druhej úlohe vyhodnotilo správne 9 žiakov, ale štyria z nich nezdôvodnili svoju odpoveď. Pri zdôvodňovaní žiaci znova najčastejšie využívali konkrétne dĺžky úsečiek. Na ukážku uvádzame na obr. 4 neúplné žiacke zdôvodnenie založené na správnej úvahe.

2. Ak sú dĺžky úsečiek AB a CD v pomere 1 : 3 a dĺžky úsečiek EF a CD sú v pomere 4 : 6, tak dĺžka úsečky EF je dvakrát väčšia ako dĺžka úsečky AB .

Platí uvedené tvrdenie?

Áno

Vysvetlenie:

Lebo leby je rovnaký pomer 1:3 dvakrát je to 2:6, a teda je to a pomer EF a CD je 4:6

Obr. 4 Ukážka neúplného žiackeho riešenia pri vytváraní postupného pomeru

Viacerí žiaci neporozumeli spájanie dvoch pomerov do postupného pomeru. Učiteľka ešte v rozhovore s autorom článku spomenula, že niektorí žiaci pri vytváraní postupného pomeru len sčítajú dve čísla v pomeroch (napr. zo súvisiacich pomerov $1 : 2$ a $3 : 4$ vytvoria postupný pomer $1 : 5 : 4$). Tento druh chyby sa v riešeniach žiakov nevyskytol. U viacerých žiakov sa však preukázalo neporozumenie postupného pomeru. Na obr. 5 je zobrazené nesprávne riešenie, v ktorom sa žiak bez úpravy jedného z pomerov snažil vytvárať postupný pomer.

2. Ak sú dĺžky úsečiek AB a CD v pomere $1 : 3$ a dĺžky úsečiek EF a CD sú v pomere $4 : 6$, tak dĺžka úsečky EF je dvakrát väčšia ako dĺžka úsečky AB .

Platí uvedené tvrdenie?

NIE

Vysvetlenie:

AB a $CD : 1:3$

EF a $CD : 4:6$

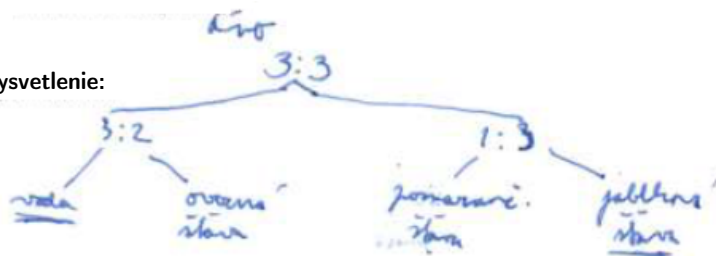
JE STYRIKRÁT DLHŠIA

Obr. 5 Ukážka nesprávneho žiackeho riešenia úlohy o pomere

3. Miro si na ovocnom nápoji s objemom 1 liter prečítal, že voda a ovocná šťava sú v pomere $3 : 2$ a v ovocnej šťave sú pomarančová šťava a jablková šťava v pomere $1 : 3$. Po krátkom zamyslení vyhlásil, že voda a jablková šťava sú v pomere $3 : 3$.

Je Mirov záver správny?

Vysvetlenie:



Obr. 6 Ukážka nesprávneho žiackeho riešenia úlohy pri porovnávaní častí celku

Správnu odpoveď pri riešení tretej úlohy uviedlo osem žiakov. Zdôvodnenie odpovede žiaci často neuviedli, alebo len zapísali kvantitatívne vzťahy zo zadania úlohy. Pri správnych zdôvodneniach traja žiaci vychádzali z úvahy, že ak z menšej ovocnej časti nápoja zoberieme jednu časť, tak nemôže byť rovnaká ako väčšia časť tvorená vodou. Dvaja žiaci rozde-

lili v obrázku jeden liter ovocného nápoja podľa zadaných pomerov. Žiacke výsledky poukázali na prekvapivé zistenie, že viacerí žiaci si neuvedomili, že ak voda predstavuje väčšiu časť nápoja a menšiu ovocnú časť nápoja rozdelíme na časti, tak žiadna z týchto častí nemôže byť v nápoji zastúpená rovnakým množstvom ako voda. Na ilustráciu uvádzame na obr. 6 jedno z nesprávnych žiackych riešení.

Záver

Opisované prostriedky formatívneho hodnotenia môžu učiteľovi pomôcť identifikovať rôzne nedostatky a zdroje neporozumenia, na ktoré potom môže zareagovať ešte v priebehu výučby. Pri téme Pomery zadala učiteľka v triede aj lístok pri odchode na sebahodnotenie žiakov. Vyskytli sa v ňom aj zaujímavé žiacke otázky. Napríklad jeden žiak uviedol, že nerozumie, prečo sú pomery $2 : 1$ a $1 : 2$ rozdielne. Iný žiak sa opýtal, či môžu byť v pomeroch aj desatinné čísla. V takomto prípade by učiteľ mohol žiakom dať za úlohu vytvoriť postupný pomer, ak $a : b = 5 : 2$ a $b : c = 5 : 1$. Ak by mali premenné a , b , c vyjadrovať napríklad počty mincí s rôznymi hodnotami, tak by pomer $12,5 : 5 : 1$ mohol byť nahradený pomerom $25 : 10 : 2$.

Potvrdilo sa, že mnohí žiaci na základnej škole nevedia presne vyjadrovať svoje matematické nápady, vysvetľovať a zdôvodňovať svoje riešenia. Preto by učiteľia mali pri hodnotení žiackych riešení podporovať a usmerňovať žiacku diskusiu. Pre prípad, že by sa v triede nevyskytli niektoré typické žiacke chyby, učiteľ by mohol mať dopredu pripravené riešenia s typickými chybami žiakov. Učiteľ ich môže získať z literatúry alebo zo svojej skúsenosti z predchádzajúcej výučby. Pre rozbor týchto riešení so žiakmi si vie učiteľ dopredu pripraviť vhodnú postupnosť otázok a príklady. Pripravené chybné riešenia môže učiteľ využiť na začiatku hodnotenia žiackych riešení pre vyprovokovanie žiackej diskusie a privedenie žiakov k argumentom na zdôvodnenie nesprávnosti riešenia.

V článku sú stručne vysvetlené základné charakteristiky formatívneho hodnotenia. Aby sme neuvádzali len popis rôznych diagnostických prostriedkov, snažili sme sa uviesť aj niekoľko konkrétnych príkladov pre vybrané témy a načrtnúť niektoré možnosti ich využitia. Ako už bolo uvedené, zámerom formatívneho hodnotenia je identifikovať a analyzovať aspekty a priebeh výučby vzhľadom na vytýčené ciele a formovať následné vyučovanie. Preto by sa učiteľ mal snažiť nielen získavať informácie o učení sa žiakov, ale ich aj vhodne využiť pre elimináciu zistených chýb a nedostatkov a pre diferenciaciu výučby podľa schopností žiakov.

Pod'akovanie

Príspevok vznikol s podporou projektu VEGA 1/0265/17 „Formatívne hodnotenie vo výučbe prírodných vied, matematiky a informatiky“.

Literatúra

- [1] *Black, P., Wiliam, D.*: Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. Phi Delta Kappan, vol. 80 (1998), no. 2, p. 139–148.
- [2] *Duckor, B., Holmberg, C.*: Mastering Formative Assessment Moves, 7 High-Leverage Practices to Advance Student Learning. ASCD, 2017.
- [3] *Frei, N., Fisher, D.*: The Formative Assessment Action Plan. Practical Steps to More Successful Teaching and Learning. ASCD, 2011.
- [4] *Nusche, D., Radinger, T., Santiago, P., Shewbridge, C.*: Synergies for Better Learning, An International Perspective on Evaluation and Assessment. OECD Reviews of Evaluation and Assessment in Education, OECD 2013.
- [5] *Keeley, P.*: Science Formative Assessment, 75 Practical Strategies for Linking Assessment, Instruction, and Learning. Corwin Press, 2008.
- [6] *Keeley, P., Tobey, Ch. R.*: Mathematics Formative Assessment, 75 Practical Strategies for Linking Assessment, Instruction, and Learning. Corwin, 2011.
- [7] *Regier, N.*: Book Two: 60 Formative Assessment Strategies. Regier Educational Resources, 2012.
- [8] *Tobey, Ch. R., Arline, C. B.*: Uncovering Student Thinking about Mathematics in the Common Core, 25 Formative Assessment Probes. Corwin, 2014.
- [9] *Wiliam, D.*: Embedded Formative Assessment. Solution Tree Press, 2011.
- [10] The National Council of Teachers of Mathematics: Five “Key Strategies” for Effective Formative Assessment. Association Drive, Reston, 2007. https://www.nctm.org/uploadedFiles/Research_and_Advocacy/research_brief_and_clips/Research_brief_04_-_Five_Key%20Strategies.pdf

Zajímavé matematické úlohy

Uverejňujeme ďalšiu časť pravidelnej rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádzame zadanie ďalšej dvojice úloh. Riešenie nových úloh 263 a 264 môžete zaslať najpozdšie do 15. 12. 2020 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc alebo také elektronickou cestou (pouze však v \TeX ovských verzích, príp. v MS Wordu) na emailovú adresu: mfi@upol.cz.

Úloha 263

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, které mají pro každé přirozené číslo m následující vlastnost: pokud označíme d_1, d_2, \dots, d_n všechny dělitele čísla m , platí $f(d_1) + f(d_2) + \dots + f(d_n) = m$.

Pavel Calábek

Úloha 264

Tři bohatýři bojují s drakem Gorynyčem. Ilja Muromec každým svým úderem meče setne drakovi polovinu jeho hlav a k tomu ještě jednu. Dobryňa Nikitič každým svým úderem odetne drakovi třetinu jeho hlav a k tomu ještě dvě. Aljoša Popovič utne každým svým úderem drakovi čtvrtinu jeho hlav a k tomu ještě tři. Bohatýři bojují s drakem v pořadí, které si sami zvolí. Pokud žádný z bohatýřů nemůže utít drakovi hlavy (neboť počet hlav by nebyl celočíselný), Gorynyč tři bohatýry sežere. Rozhodněte, zda bohatýři mohou stít všechny hlavy draku Gorynyčovi, který má $29!$ hlav.

převzato ze soutěže Turnaj měst

Dále uvádíme řešení úloh 259 a 260, jejichž zadání jsme zveřejnili v prvním čísle tohoto (29.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 259

Určete předposlední číslici desítkového zápisu čísla 11^{2020} .

Vladimír Vaněk

Řešení. V následující tabulce vypíšeme několik prvních mocnin čísla 11.

n	1	2	3	4	5	6
11^n	11	121	1331	14641	161051	1771561

Na jejím základě můžeme vyslovit hypotézu: Poslední číslice libovolné mocniny čísla 11 je 1 a pokud předposlední číslice n -té mocniny je a , potom předposlední číslice následující $(n+1)$ -mocniny je $a+1 \pmod{10}$.

Tuto hypotézu nyní dokážeme matematickou indukcí. Z tabulky vidíme, že toto tvrzení platí pro $n=1$ (a také pro $n=2, 3, 4, 5$). Nyní předpokládejme, že n -tá mocnina čísla 11 končí číslicí 1 a má předposlední číslici a , platí tedy $11^n = 100b + 10a + 1$, kde a je číslice a b je celé nezáporné číslo. Potom

$$11^{n+1} = 11^n \cdot 11 = (100b + 10a + 1) \cdot 11 = 100(11b + a) + 10(a + 1) + 1.$$

Odtud vidíme, že poslední číslicí $(n+1)$ -mocniny je 1 a pokud a je číslice menší než 9, potom poslední číslicí tohoto čísla je $a+1$, pokud $a=9$, tak

poslední číslicí této mocniny je 0. V obou případech je tedy poslední číslicí $(n+1)$ -mocniny čísla 11 číslice $a+1 \pmod{10}$. Podle principu matematické indukce tak tvrzení platí pro všechna přirozená čísla n .

Jelikož předposlední číslice čísla 11^1 je 1, z dokázaného tvrzení plyne, že předposlední číslice čísla 11^n se shoduje s poslední číslicí čísla n . Proto číslo 11^{2020} má předposlední číslici stejnou jako je poslední číslice čísla 2020, tedy číslici 0.

Jiné řešení. Podle binomické věty platí

$$\begin{aligned} 11^{2020} &= (10 + 1)^{2020} = \\ &= 10^{2020} + \binom{2020}{1} \cdot 10^{2019} + \dots + \binom{2020}{1998} \cdot 10^2 + \binom{2020}{1999} \cdot 10 + 1. \end{aligned}$$

Sčítance posledního součtu, které obsahují mocniny desítky větší než 1, nemají vliv na poslední a předposlední číslici dané mocniny. Odtud tak vidíme, že poslední číslice této mocniny je 1 a její předposlední číslice je shodná s poslední číslicí čísla $\binom{2020}{1999} = 2020$, což je 0.

Správné řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Piotr Kulisz* ze ZSOT v Lublinci (Polsko).

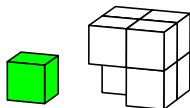
Úloha 260

Krychle $ABCD A'B'C'D'$ je složena z osmi jednotkových krychlí. Kolika způsoby ji můžeme rozdělit na dvě souvislé části, které jsou také složené z jednotkových krychlí (jednotkové krychle v souvislých částech sousedí aspoň jednou celou stěnou, na pořadí částí nezáleží)? (Označíme-li jednotkové krychle podle vrcholů, které obsahují, pak příkladem dvou různých dělení jsou $\{A, A'\}$, $\{B, C, D, B', C', D'\}$ a $\{B, B'\}$, $\{A, C, D, A', C', D'\}$.)

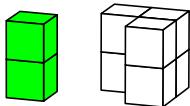
Tomáš Holan

Řešení. Uvažujme následující možnosti dle toho, kolik jednotkových krychlí obsahují uvažované souvislé části.

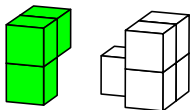
a) Jedna souvislá část obsahuje jednu jednotkovou krychli, druhá obsahuje (souvislých) 7 krychlí. Souvislá část obsahující jedinou jednotkovou krychli je jednoznačně určena vrcholem původní krychle 2×2 . Každá krychle má 8 vrcholů, takových dělení tak bude právě 8.



b) Jedna souvislá část obsahuje dvě jednotkové krychle, zbývající souvislá část obsahuje 6 jednotkových krychlí. Dvě jednotkové krychle tvoří souvislou část, pokud leží u jedné hrany původní krychle 2×2 , zbývajících 6 krychlí pak také tvoří souvislou část. Jelikož má krychle 12 hran, takových dělení existuje právě 12.

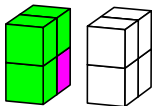


c) Jedna souvislá část obsahuje tři krychle, druhá 5 krychlí. Souvislá část krychle složená ze tří jednotkových krychlí leží v jedné stěně původní krychle, tvoří písmeno „L“ a je jednoznačně určena jednotkovou krychlí ve „zlomu“ písmena „L“. Zbývajících pět krychlí pak nutně tvoří také souvislou část. Krychle má 6 stěn, každá stěna má 6 vrcholů, proto souvislou část obsahující 3 jednotkové krychle můžeme vybrat právě $6 \times 4 = 24$ způsoby.



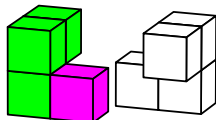
d) Každá ze souvislých částí obsahuje právě 4 krychle. Následující úhahy dále rozdělíme podle toho, jak k souvislé části složené ze tří jednotkových krychlí (podle předcházejícího bodu tvoří „L“ ležící v jedné stěně) přidáme čtvrtou jednotkovou krychli.

- (i) Čtvrtou jednotkovou krychlí přidáme ke koncové krychlí „L“ tak, že všechny čtyři krychle tvoří stěnu původní krychle 2×2 . Potom zbývající jednotkové krychle tvoří také souvislou stěnu původní krychle. Tato souvislá část je jednoznačně určena stěnou krychle. Krychle má 6 stěn, ovšem obě souvislé části jsou nerozlišitelné, proto existují celkem $6 : 2 = 3$ taková rozdělení krychle.

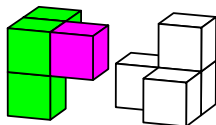


- (ii) Čtvrtou jednotkovou krychlí přidáme ke koncové krychlí „L“ tak, že všechny čtyři krychle tvoří „prostorového hada“. Zbývající čtyři krychle tvoří také souvislého „hada“. Každý takový „had“ je jedno-

značně určen první a poslední dvojicí krychlí, tyto dvojice určují mimoběžné hrany krychle. Krychle má 12 hran, ke každé hraně existují právě 4 mimoběžné hrany (dále 4 různoběžné a 3 rovnoběžné), dvojice mimoběžných hran určujících „hada“ jsou nerozlišitelné a vzniklé souvislé „prostorové hadi“ jsou také nerozlišitelné, existuje tak celkem $(12 \cdot 4) : (2 \cdot 2) = 12$ takových rozdělení krychle.



- (iii) Čtvrtou jednotkovou krychlí přidáme ke střední krychle „L“. Zbývající čtyři krychle také tvoří stejnou souvislou část. Každá taková čtveřice krychlí je jednoznačně určena krychlí „uprostřed“, která svou stěnou souvisí s každou ze zbývajících tří krychlí. Tato prostřední krychle je jednoznačně určena jedním vrcholem původní krychle. Krychle má 8 vrcholů, dvě vzniklé části o 4 vrcholech jsou nerozlišitelné, existují tak $8 : 2 = 4$ taková dělení krychle.



Počet dělení krychle na souvislé části o čtyřech krychlích je tak roven $3 + 12 + 4 = 19$.

Celkem proto existuje

$$8 + 12 + 24 + 19 = 63$$

dělení krychle na dvě souvislé části.

Správná řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy. Neúplné řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan a *Jozef Mészáros* z Jelky.

Po uzávěrce minulého čísla ještě redakce obdržela správná řešení úloh 257 a 258 od *Jozefa Mészároše* z Jelky.

Pavel Calábek

Rezonanční křivka – portrét oscilátoru

OLDŘICH LEPIL

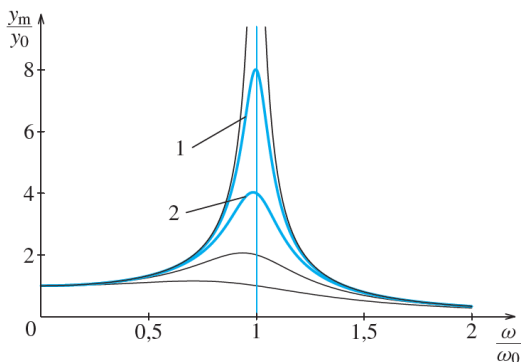
Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Učivo o mechanickém kmitání a vlnění má v učebnicích zpravidla tradiční uspořádání, při kterém výklad postupuje od volného kmitání oscilátoru bez tlumení, přes tlumené kmitání k nucenému kmitání, kdy na oscilátor působí vnější síla s harmonickým průběhem. Výklad tohoto učiva na střední škole se soustředí hlavně na netlumený oscilátor s cílem, popsat časový průběh harmonického kmitání a určit klíčové veličiny kmitavého pohybu, především závislost periody, popř. frekvence kmitání na parametrech oscilátoru. Nejméně pozornosti je obvykle věnováno nucenému kmitání, které je však z hlediska technické praxe nejdůležitější.

Poznatky o nuceném mechanickém kmitání můžeme považovat za prekoncept učiva o elektromagnetickém kmitání, jehož struktura je odlišná. Jedním z nejdůležitějších témat učiva elektromagnetismu jsou totiž poznatky o střídavých proudech, které jsou vlastně nuceným kmitáním elektrických obvodů s různými parametry. Teprve v závěru učiva elektromagnetismu se dospívá k oscilačnímu obvodu jako objektu, který volně kmitá s úhlovou frekvencí určenou jeho parametry. Tato koncepce učiva o elektromagnetickém kmitání má možná historické kořeny, kdy se poznatky o střídavých proudech vztahovaly především k fyzikálním základům energetiky, a oscilační obvod se dostal „na pořad dne“ později v souvislosti s vývojem radiotechniky. V každém případě je v tomto učivu zcela klíčovým poznatkem *jev rezonance*, který má významný přesah i do dalších oblastí fyziky.

Výklad rezonance ve středoškolských učebnicích je převážně kvalitativní, kdy se jen konstatuje, že rezonance, čili nucené kmitání s maximální amplitudou vzniká při shodě úhlové frekvence ω nucených kmitů s vlastní úhlovou frekvencí oscilátoru ω_0 . Tento poznatek je dokumentován *rezonanční křivkou*, což je *amplitudová frekvenční charakteristika oscilátoru*. Je zobrazena jako závislost amplitudy výchylky y_m oscilátoru na úhlové frekvenci nuceného kmitání: $y_m = f(\omega)$. Graf rezonanční křivky nemá triviální průběh a v učebních textech (nejen středoškolských, jak se lze přesvědčit na webu) se setkáváme s rezonančními křivkami nakreslenými „od ruky“, takže často ani neodpovídají realitě, popř. se autoři učebního textu zobrazení rezonanční křivky raději vyhnou.

Nástup „počítačové éry“ výrazně napomohl k řešení tohoto problému a tak první, zcela korektní vyobrazení v našich středoškolských učebnicích najdeme až v 3. přepracovaném vydání učebnice [1] (obr. 1), kde vyobrazení vytvořil programem METAPOST *P. Šedivý*. Text učebnice je také prvním krokem ke kvantitativnímu popisu rezonance mechanického oscilátoru na středoškolské úrovni. Pro jednoduchost je v učebnici [1] řešena jen rezonance ideálního mechanického oscilátoru bez tlumení. V tomto příspěvku ukážeme další možnosti podrobnějšího seznámení s rezonancí na středoškolské úrovni, tzn. s použitím matematického aparátu dostupného žákovi střední školy.



Obr. 1 Rezananční křivka mechanického oscilátoru

Rezonance mechanického oscilátoru

Dalším krokem ke kvantitativnímu výkladu kmitavého pohybu mechanického oscilátoru je poslední vydání učebnice *Mechanické kmitání a vlnění* [2]. V rozšiřujícím učivu na CD je vyložena pohybová rovnice tlume-

ného kmitání pružinového oscilátoru, v níž b je konstanta odporu prostředí, tzn. závislosti odporové síly na rychlosti kmitavého pohybu (Stokesův zákon),

$$ma = -ky - bv,$$

a pohybová rovnice nuceného kmitání netlumeného oscilátoru

$$ma = -ky + F_m \sin \omega t.$$

Tyto rovnice upravíme jako *rovnici nuceného kmitání tlumeného oscilátoru*

$$a + \frac{b}{m}v + \frac{k}{m}y = \frac{F_m}{m} \sin \omega t.$$

Tlumené kmitání charakterizuje *součinitel tlumení* δ , pro který platí

$$\delta = \frac{b}{2m},$$

a podíl parametrů oscilátoru k a m určuje *vlastní úhlovou frekvenci* ω_0 oscilátoru

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Rovnici upravíme

$$a + 2\delta v + \omega_0^2 y = \frac{F_m}{m} \sin \omega t \quad (1)$$

a do upravené rovnice dosadíme za jednotlivé kinematické veličiny jejich časové závislosti (viz [2, s. 23, tab. 1-3]). Doplníme předpoklad, že v závislosti na frekvenci nuceného kmitání se bude měnit také fáze φ těchto veličin vzhledem k síle, která kmitání oscilátoru vynucuje. Dostaneme rovnici

$$-\omega^2 y_m \sin(\omega t + \varphi) + 2\delta \omega y_m \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 y_m \sin(\omega t + \varphi) = \frac{F_m}{m} \sin \omega t.$$

Tato rovnice platí pro všechna t , takže ji můžeme zjednodušit řešením pro dva konkrétní časové okamžiky t_1 a t_2 , které zvolíme tak, že platí:

$$\text{a) } (\omega t_1 + \varphi) = 0 \Rightarrow \omega t_1 = -\varphi,$$

$$\text{b) } (\omega t_2 + \varphi) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega t_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Dosazením hodnot okamžitých fází ωt_1 a ωt_2 do rovnice nuceného kmitání získáme pro zvolené časové okamžiky rovnice:

$$\text{pro } t_1: \quad 2\delta \omega y_m = -\frac{F_m}{m} \sin \varphi,$$

$$\text{pro } t_2: \quad -\omega^2 y_m + \omega_0^2 y_m = \frac{F_m}{m} \cos \varphi.$$

Sečteme druhé mocniny těchto rovnic a po úpravě získáme vztah pro *amplitudu výchylky nucených kmitů* v závislosti na úhlové frekvenci nuceného kmitání:

$$y_m = \frac{F_m}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}. \quad (2)$$

Veličina F_m je velikost síly, jejímž působením se těleso oscilátoru při $\omega = 0$ (oscilátor nekmitá) vychýlí z rovnovážné polohy do vzdálenosti y_{m0} . V případě pružinového oscilátoru, jehož pružina se deformuje podle Hookeova zákona, platí

$$\frac{F_m}{y_{m0}} = k \Rightarrow y_{m0} = \frac{F_m}{k}.$$

Dělením rovnic pro t_1 a t_2 najdeme také vztah pro závislost fáze ($\text{tg } \varphi$) veličin nuceného kmitání na frekvenci (*fázová frekvenční charakteristika*):

$$\text{tg } \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (3)$$

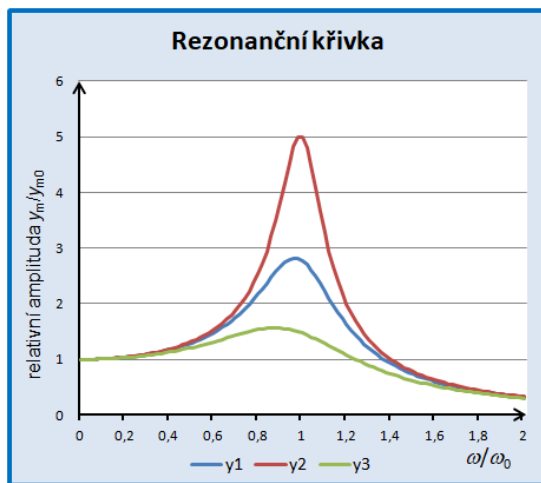
Na základě vztahu (2) byl vytvořen model M4.2 na CD k učebnici [2], který pomocí tabulkového procesoru MS Office Excel, popř. LibreOffice Calc umožňuje podrobněji se seznámit s průběhem rezonančních křivek tří mechanických oscilátorů a vlivu tlumení na tvar rezonanční křivky (obr. 2).¹⁾

V tomto příspěvku ukážeme, jaké další informace o oscilátoru lze z rezonanční křivky vyčíst a jak v praxi slouží k jeho celkové charakteristice. K tomu si zavedeme vedle již zmíněných veličin další, souhrnnou veličinu – *činitel jakosti oscilátoru* Q . Hodnota činitele jakosti vyplývá z úvah o přeměnách energie v oscilátoru s tlumením a zahrnuje v jedné fyzikální veličině jak úhlovou frekvenci vlastního kmitání ω_0 , tak součinitel tlumení δ . Činitel jakosti je těsně spjat s tvarem rezonanční křivky: 1. s výškou rezonanční křivky, 2. se šířkou rezonanční křivky. Další úvahy se budou týkat oscilátoru s malým tlumením ($\delta \ll \omega_0$).

1. Výška rezonanční křivky odpovídá maximální amplitudě y_{mrez} při úhlové frekvenci $\omega = \omega_0$ a činitel jakosti je definován jako poměr této amplitudy a výchylky oscilátoru y_{m0} při úhlové frekvenci $\omega = 0$. Dosazením do vztahu (2) určíme činitel jakosti Q

$$Q = \frac{y_{mrez}}{y_{m0}} = \frac{\frac{F_m}{m} \frac{1}{2\delta\omega_0}}{\frac{F_m}{k}} = \frac{k}{m} \frac{1}{2\delta\omega_0} = \frac{\omega_0}{2\delta}. \quad (4)$$

¹⁾V popisu modelu na CD se vyskytla tisková chyba, kterou je třeba opravit podle vztahu (2).



Obr. 2 Rezonanční křivky oscilátorů s různým tlumením

Činitel jakosti je tedy v podstatě zesilovací činitel oscilátoru. Určuje, kolikrát větší je amplituda kmitů při rezonanci, než výchylka y_{m0} : $y_{mrez} = = Qy_{m0}$.

2. Činitel jakosti charakterizuje ztráty energie oscilátoru způsobené tlumením. Pro definici činitele jakosti je zvoleno zmenšení maximální energie E_{rez} , kterou má oscilátor při rezonanční frekvenci ω_0 , na poloviční hodnotu $E = E_{rez}/2$. Vzhledem ke tvaru rezonanční křivky může mít oscilátor poloviční energii při dvou úhlových frekvencích $\omega_1 < \omega_0$ a $\omega_2 > \omega_0$. Pro maximální energii oscilátoru při rezonanční frekvenci platí

$$E_{rez} = \frac{1}{2}mv_{mrez}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2y_{mrez}^2.$$

Při malém tlumení je rezonanční křivka v okolí rezonanční frekvence ω_0 poměrně strmá a úhlové frekvence ω_1 a ω_2 , při nichž je energie oscilátoru poloviční, se od rezonanční frekvence příliš neliší: $\omega_{1,2} = \omega_1 = \omega_2 \approx \omega_0$. Pro poloviční energii tedy platí

$$\frac{1}{2}m\omega_{1,2}^2y_{m1,2}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2}m\omega_0^2y_{mrez}^2 \Rightarrow y_{m1,2} = \frac{y_{mrez}}{\sqrt{2}} \doteq 0,7y_{mrez}.$$

Hodnotu součinitele tlumení δ určíme úpravou výrazu pod odmocninou ve

vztahu (2) pro případ, že $\omega_{1,2} \approx \omega_0$:

$$\begin{aligned}\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{1,2}^2)^2 + (2\delta\omega_{1,2})^2} &= \sqrt{2} \cdot 2\delta\omega_{1,2}, \\ (\omega_0^2 - \omega_{1,2}^2)^2 + (2\delta\omega_{1,2})^2 &= 8\delta^2\omega_{1,2}^2, \\ (\omega_0 + \omega_{1,2})^2(\omega_0 - \omega_{1,2})^2 &= 4\delta^2\omega_{1,2}^2.\end{aligned}$$

Když přihlídneme k blízkosti hodnot úhlových frekvencí, dostaneme pro rozdíl frekvencí

$$\omega_0 + \omega_{1,2} = \pm\delta = \frac{\Delta\omega}{2},$$

kde $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\delta$ je *šířka rezonanční křivky* na úrovni amplitudy $y_m \doteq 0,7y_{mrez}$. Součinitel tlumení oscilátoru je tedy roven polovině šířky rezonanční křivky. Srovnáním se vztahem (2) upravíme vztah pro činitele jakosti

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$

Pro ověření charakteristik oscilátorů na základě tvaru rezonanční křivky jsou k příspěvku přiloženy jednoduché modely vytvořené programem MS Excel, kterými jsou rozšířeny modely na CD k učebnici [2]. Model rezonance mechanického oscilátoru (RezM) tvoří s navazujícím modelem rezonance elektromagnetického oscilátoru *RLC* (RezE) společný sešit dostupný z <http://www.mfi.upol.cz/files/29/2903/rezonnance.xlsx>. Zpětně lze některé získané poznatky ověřit modely na CD.

Tvar rezonanční křivky je v modelu RezM měnitelný nastavením hodnoty součinitele tlumení pomocí posuvníku. Model je však otevřený a zájemce si může měnit i další vstupní veličiny modelu. Pomocí tohoto modelu byla získána rezonanční křivka na obr. 3a (na ose x je úhlová frekvence ω , kdežto na dalších grafech je na ose x relativní hodnota ω/ω_0).

Pro srovnání je v grafu také rezonanční křivka amplitudy rychlosti kmitání oscilátoru (zobrazeny jsou hodnoty $0,1v_m$). Graf odpovídá vztahu $v_m = y_m\omega$, který upravíme na tvar

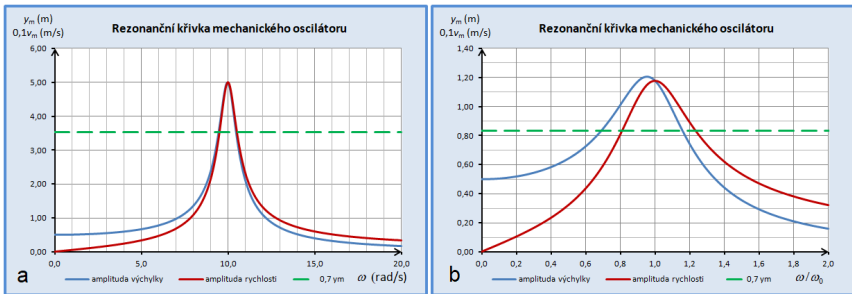
$$v_m = y_m\omega = \frac{F_m}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)^2 + 4\delta^2}} = \frac{F_m}{\sqrt{(\omega m - \frac{k}{\omega})^2 + b^2}}. \quad (5)$$

Odtud vyplývá celkem samozřejmý poznatek patrný z grafu. Na rozdíl od výchytky je při $\omega = 0$, kdy oscilátor nekmitá, rychlost vždy nulová.

Pozornost věnujeme také rezonanční úhlové frekvenci oscilátoru. Z obr. 3a bychom soudili, že rezonanční křivky výchylky i rychlosti mají maximum při stejné rezonanční frekvenci. Z teorie však vyplývá, že rezonance výchylky nuceného kmitání nastává při úhlové frekvenci

$$\omega_{\text{rezy}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2},$$

kdežto k rezonanci rychlosti dochází vždy při vlastní úhlové frekvenci netlumeného kmitání: $\omega_{\text{rezy}} = \omega_0$.²⁾ To je ovšem patrné teprve při větším tlumení oscilátoru (obr. 3b). V technické praxi, zejména u elektromagnetických oscilátorů se však vesměs řeší kmitání s malým tlumením, kdy je rozdíl mezi rezonančními frekvencemi analogických veličin zanedbatelný.



Obr. 3 Rezonanční křivky při hodnotě Q : a) 10, b) 2,4

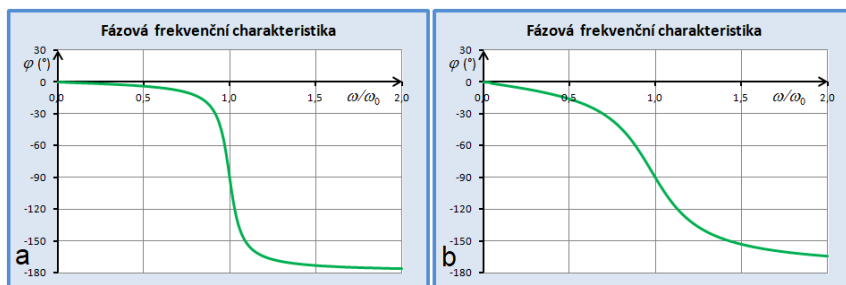
Obdobně získáme pomocí vztahu (3) fázovou frekvenční charakteristiku. Musíme si však uvědomit, že při dosažení rezonance se změní znaménko výrazu ve jmenovateli a největší záporná hodnota $\text{tg } \varphi$ se skokem změní v největší kladnou hodnotu. To neodpovídá realitě spojitě probíhajícího děje při změnách frekvence. Souladu se skutečnými změnami fáze dosáhneme, když v modelu RezM k první kladné hodnotě φ přičteme $(-\pi)$. Na obr. 4 jsou fázové frekvenční charakteristiky pro oscilátory se stejnými činiteli jakosti jako na obr. 3 (pro názornost je fáze vyjádřena ve stupních). Vidíme, že fáze φ má při rezonanci hodnotu $-\pi/2$ (-90°) a při nižších, popř. vyšších frekvencích se tento úhel zmenšuje, popř. zvětšuje.

²⁾Výraz pod odmocninou v rovnici (2) má nejmenší hodnotu, když jeho derivace $d/d\omega$ je rovna nule:

$$\omega(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2) = 0 \Rightarrow \omega_{\text{rez}} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\delta^2}.$$

Z derivace obdobného výrazu v rovnici (5) plyne: $\omega_{\text{rez}} = \omega_0$.

Dobře je to patrné na časových diagramech nuceného kmitání, vytvořených pomocí modelu M4.1 na CD k učebnici [2]. Tento model v podstatě představuje přechodný děj, kdy na oscilátor v počátečním okamžiku začne působit harmonicky proměnná síla. Působením vnější síly dochází ke skokové změně stavu oscilátoru, což se projeví tím, že vznikne složené kmitání, které je superpozicí vlastního tlumeného kmitání s frekvencí určenou parametry oscilátoru a nuceného kmitání s frekvencí budicí síly s konstantní amplitudou. Fázový posun síly a výchylky odpovídající teorii pozorujeme až po utlumení vlastního kmitání oscilátoru. Proto časové diagramy na obr. 5 nezačínají v počátečním časovém okamžiku.



Obr. 4 Fázové frekvenční charakteristiky při hodnotě Q : a) 10, b) 2,4



Obr. 5 Časové diagramy nuceného kmitání při: a) $\omega < \omega_0$; b) $\omega = \omega_0$; c) $\omega > \omega_0$

Obdobný průběh má fázová frekvenční charakteristika pro vzájemný fázový posun výchylky a rychlosti, její průběh je dán vzhledem k fázovému rozdílu výchylky a rychlosti ($\Delta\varphi = \pi/2$) recipročnou hodnotou vztahu (3):

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\delta\omega} = \frac{m\omega - \frac{k}{\omega}}{b}. \quad (6)$$

Tato charakteristika má obrácený průběh než charakteristiky na obr. 4. Jejím počátečním bodem je fáze $-\pi/2$ a při rezonanci má výchylka i rych-

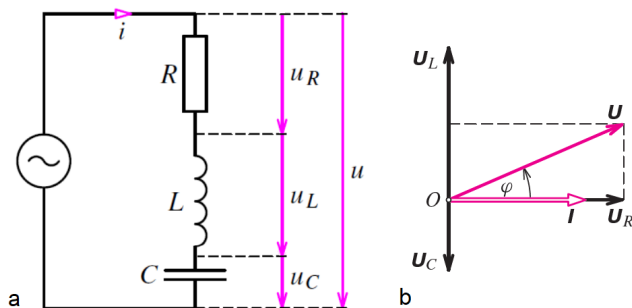
lost oscilátoru stejnou fází. K tomuto poznatku se vrátíme u elektromagnetického oscilátoru, kde je názorněji patrný jeho fyzikální význam.

K ukázkce užití rezonanční křivky jako portrétu oscilátoru, ze kterého lze vyčíst všechny jeho charakteristické vlastnosti, využijeme obr. 3a. Hodnoty veličin v modelu RezM jsou pro názornost poněkud idealizované, takže praktická realizace pružinového oscilátoru s těmito parametry by asi nebyla jednoduchá. Vyjdeme z předpokladu, že známe hmotnost oscilátoru: $m = 0,2 \text{ kg}$. To umožňuje určit z rezonanční křivky následující charakteristické veličiny – ω_0 , k , F_0 , Q , δ , b :

- $\omega_0 = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$,
- $k = m\omega_0^2 = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$,
- $y_{m0} = 0,5 \text{ m} \Rightarrow F_0 = ky_{m0} = 10 \text{ N}$,
- $y_{mrez} = 5 \text{ m} \Rightarrow Q = y_{mrez}/y_{m0} = 10$,
- $\delta = \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{\omega_0}{2Q} = 0,5 \text{ s}^{-1}$,
- $b = 2\delta m = 0,2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

Elektromagnetický oscilátor

Rezananční křivka mechanického oscilátoru nás názorně seznamuje s charakteristikami, které jsou obdobné u oscilátorů z jiných oblastí fyziky. Pro technickou praxi je důležitá zejména znalost rezonanční křivky elektromagnetického oscilátoru. V učivu fyziky je základním reprezentantem tohoto typu oscilátorů obvod střídavého proudu s obvodovými prvky R , L , C spojenými v sérii (obr. 6a), který je připojen ke zdroji harmonického napětí $u = U_{m0} \sin \omega t$.



Obr. 6 Obvod s RLC v sérii

Rovnicí nuceného kmitání obvodu s RLC v sérii je 2. Kirchhoffův zákon pro tento elektrický obvod, při jehož zápisu uplatníme fázorový diagram na obr. 6b:

$$\begin{aligned} U_L + U_R + U_C &= U \\ L \frac{\Delta i}{\Delta t} + Ri + \frac{q}{C} &= U_{m0} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Rovnici upravíme do tvaru

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} + \frac{R}{L}i + \frac{1}{LC}q = \frac{U_{m0}}{L} \sin \omega t$$

a srovnáme ji s rovnicí (1). Využijeme známé analogie mezi mechanickými a elektromagnetickými oscilátory (viz rozšiřující učivo na CD k učebnici [3, čl. R7.2, Tab. R7-1]), kde $a \sim \frac{\Delta i}{\Delta t}$, $v \sim i$ (v diferenciálním tvaru $a = \frac{d^2 y}{dt^2} \sim \frac{di}{dt} = \frac{d^2 q}{dt^2}$, $v = \frac{dy}{dt} \sim i = \frac{dq}{dt}$). Získáme rovnici

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} + 2\delta i + \omega_0^2 q = \frac{U_{m0}}{L} \sin \omega t,$$

ve které

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad \text{a} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Nyní už snadno napíšeme vztah pro změny amplitudy náboje na kondenzátoru, popř. napětí na kondenzátoru a proudu v obvodu při různých hodnotách úhlové frekvence napětí zdroje nuceného kmitání:

$$\begin{aligned} q_m &= \frac{U_{m0}}{L} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}, \\ U_m &= \frac{q_m}{C} = \frac{U_{m0}}{LC} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} = U_{m0} \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}, \\ I_m &= \omega q_m = \frac{U_{m0}}{L} \frac{\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}. \end{aligned}$$

Vztah pro amplitudu proudu dále upravíme tak, že veličiny ω a L převedeme do výrazu pod odmocninou a po úpravách získáme známý vztah, který vyjadřuje Ohmův zákon pro obvod s RLC v sérii:

$$I_m = \frac{U_{m0}}{\sqrt{(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 + R^2}} = \frac{U_{m0}}{Z}.$$

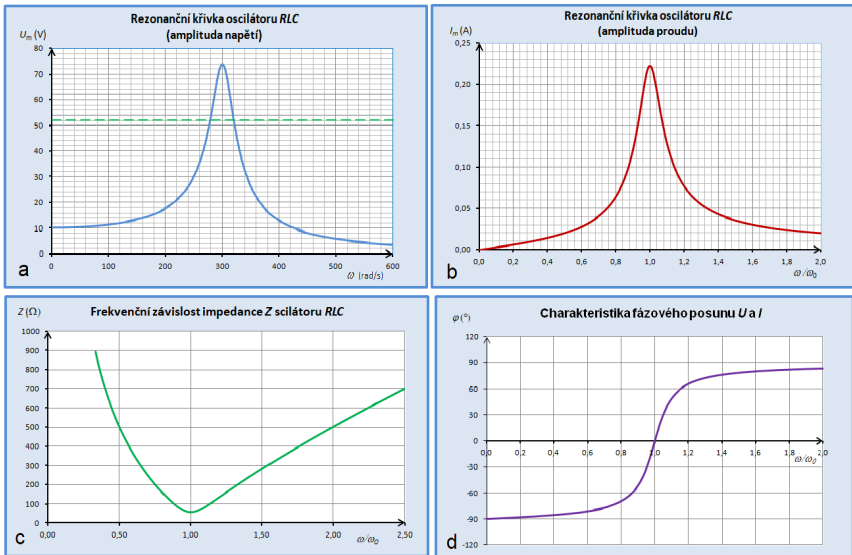
Pro závislost impedance Z na frekvenci budicího napětí tedy platí

$$Z = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}.$$

Zbývá ještě nalézt vztah pro fázovou frekvenční charakteristiku. Získáme ji buď standardním postupem z fázorového diagramu na obr. 6b, nebo jednoduše na základě analogií s mechanickým oscilátorem „překladem“ vztahu (6):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Frekvenční charakteristiky všech uvedených veličin jsou na obr. 7. Rezonanční křivka napětí (obr. 7a) je grafem amplitudy napětí na kondenzátoru. V klidovém stavu ($\omega = 0$) se kondenzátor nabije na napětí U_{m0} , obvodem neprotéká proud, rezonanční křivka proudu (obr. 7b) začíná u nulové hodnoty. Impedance obvodu $Z \rightarrow \infty$, takže počáteční bod frekvenční charakteristiky impedance (obr. 7c) nelze zobrazit.



Obr. 7 Frekvenční charakteristiky oscilátoru RLC

Z frekvenční fázové charakteristiky (obr. 7d) je zřejmé, že v počátečním okamžiku má napětí na kondenzátoru fázi $\varphi = -\pi/2$. Dobře je to patrné z fázorového diagramu obvodu RLC pro případ, kdy proud v obvodu $I = 0$ a tedy $U_L = 0$, takže $U_C = U$. Při postupném zvětšování frekvence se napětí za proudem zpožďuje a fáze se nejprve zvolna, ale v blízkosti rezonanční frekvence rychle zmenšuje. Při rezonanci mají fázory U_C a U_L opačnou fázi, impedance $Z = R$ a fázový rozdíl napětí a proudu je nulový. Při vyšších frekvencích napětí proud předbíhá (viz obr. 6b) a jeho fáze $\varphi \rightarrow -\pi/2$.

Činitel jakosti Q elektromagnetického oscilátoru určíme stejným způsobem jako u mechanického oscilátoru z rezonanční křivky napětí (obr. 7a):

$$Q = U_{\text{mrez}}/U_{\text{m0}}.$$

Poněvadž $U_{\text{mrez}} = I_{\text{m}}L\omega_0$ a $U_{\text{m0}} = I_{\text{m}}R$, bude

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{Z_0}{R}.$$

Veličina Z_0 je *charakteristická impedance* elektromagnetického oscilátoru. Její fyzikální význam spočívá v tom, že představuje „zásobu“ energie v oscilátoru, kdežto rezistance R určuje, jaká část této energie se v průběhu periody kmitu přemění na jinou formu energie (*disipace energie*) a představuje ztrátu energie. Poněvadž součinitel tlumení $\delta = R/2L$, dospějeme ke stejnému výrazu pro činitele jakosti jako u mechanického oscilátoru

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$

Pro hodnocení vlastností elektromagnetického oscilátoru je důležitá zejména šířka rezonanční křivky $\Delta\omega$ na úrovni $U_{\text{m}}/\sqrt{2}$, popř. $I_{\text{m}}/\sqrt{2}$. V elektrotechnice, v teorii přenosu signálů se tento pokles označuje jako *útlum a*. Vyjadřuje se v logaritmické míře v jednotkách dB. Určíme ho jako poměr výkonu při rezonanci $P_{\text{rez}} = U_{\text{m}}I_{\text{m}}$ a jeho poklesu na hodnotu $P_{\text{rez}}/2$:

$$a_P = 10 \log \left(\frac{P_{\text{rez}}}{P_{\text{rez}}/2} \right) = 3 \text{ dB}.$$

Šířka rezonanční křivky představuje *výběrovost*, čili *selektivnost* oscilátoru. Tím je dána schopnost oscilátoru z kmitání dvou blízkých frekvencí jedno zesílit a druhé potlačit.

Závěr

V příspěvku jsme ukázali, jak můžeme využít standardní programové vybavení počítače v podobě programu MS Excel k praktickému seznámení s vlastnostmi rezonančních křivek, které jsou významným portrétem mechanických a elektromagnetických oscilátorů. Určení parametrů elektromagnetického oscilátoru z konkrétní rezonanční křivky na obr. 7a ponecháme na čtenáři (výchozí hodnotou je indukčnost cívky $L = 1,1$ H). Pro zájemce o podrobnější seznámení s problematikou nuceného kmitání elektromagnetických oscilátorů v širších souvislostech lze doporučit studijní text FO [4] s množstvím skvělých vyobrazení frekvenčních charakteristik, která vytvořil autor publikace.

Reference

- [1] *Lepil, O.*: Fyzika pro gymnázia. Mechanické kmitání a vlnění. 3. přepracované vydání, Prometheus, Praha, 2001.
- [2] *Lepil, O.*: Fyzika pro gymnázia. Mechanické kmitání a vlnění. 5. přepracované vydání s CD, Prometheus, Praha, 2018.
- [3] *Lepil, O., Šedivý, P.*: Fyzika pro gymnázia. Elektřina a magnetismus. 7. přepracované vydání s CD, Prometheus, Praha, 2017.
- [4] *Šedivý, P.*: Obvody střídavého proudu s lineárními jednobrany a dvojbřany. Dostupné na: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/stpr1.pdf>

Odvození 1. kosmické rychlosti

JIŘÍ KADAŇKA

Střední škola informatiky, elektrotechniky a řemesel, Rožnov pod Radhoštěm

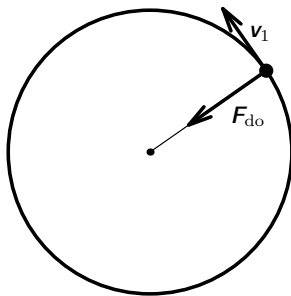
Definice první kosmické rychlosti je jednoznačná a známá. Jedná se o rychlost, kterou má oběžnice Země (nebo jakéhokoli velkého vesmírného tělesa tvaru koule) na kruhové oběžné dráze v zanedbatelné výšce nad jejím povrchem. V učebnicích středoškolské fyziky je pro Zemi nejčastěji uváděna zaokrouhlená hodnota $v_1 = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ (viz např. [1]). V následujícím textu je uvedeno 5 různých odvození této rychlosti.

1. Pomocí dostředivé síly

Jde o klasické středoškolské odvození vztahu pro první kosmickou rychlost. Obecně je příčinou rovnoměrného pohybu po kružnici tzv. dostředivá síla F_{do} . Tato síla je v případě oběžnic planety gravitační silou, kterou Země působí na oběžnici při jejím pohybu. Pro velikost gravitační síly platí Newtonův gravitační zákon ve známém tvaru:

$$F = G \frac{mM}{R^2},$$

kde m je hmotnost oběžnice, M hmotnost Země, R poloměr Země a G gravitační konstanta.



Protože je tato síla silou dostředivou, lze ji vyjádřit i z obecného vzorce pro velikost dostředivé síly:

$$F = \frac{mv^2}{R}$$

Porovnáním obou vztahů dostáváme pro velikost 1. kosmické rychlosti známý vztah:

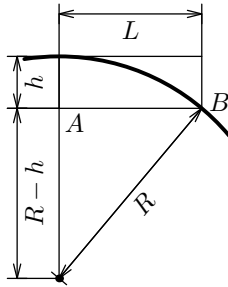
$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

2. Pomocí Pythagorovy věty

Let kolem planety si lze v průběhu velmi krátkého časového okamžiku T představit jako zvláštní případ vodorovného vrhu. Země v průběhu letu oběžnice díky své kulatosti jakoby „uhýbá“ pod letící oběžnicí. Svislou složkou vodorovného vrhu je volný pád. Jde o to, aby dráha h volného pádu během doby T přesně odpovídala „uhýbání“ Země, ke kterému dojde na dráze L uražené oběžnicí za tuto dobu T .

Dráha L ve vodorovném směru je vlastně dráha uražená 1. kosmickou rychlostí:

$$L = v_1 T$$



V pravoúhlém trojúhelníku ASB platí Pythagorova věta ve tvaru:

$$L^2 + (R - h)^2 = R^2$$

Po dosazení za h (volný pád) a L dostáváme:

$$(v_1 T)^2 + \left(R - \frac{1}{2} g T^2\right)^2 = R^2$$

$$v_1^2 T^2 + R^2 - R g T^2 + \frac{1}{4} g T^4 = R^2$$

V limitním případě $T \rightarrow 0$ lze člen se 4. mocninou času T zanedbat a vychází:

$$v_1^2 T^2 - R g T^2 = 0$$

$$T^2 (v_1^2 - R g) = 0$$

Tato rovnost platí v případě, že $v_1 = \sqrt{Rg}$. Po dosazení vztahu

$$g \approx a_g = G \frac{M}{R^2}$$

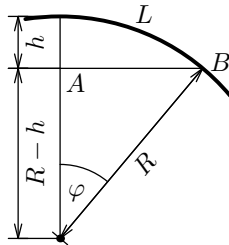
(viz např. [1, s. 134]) a úpravě pak dostáváme pro velikost rychlosti v_1 opět známý vztah:

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

3. Pomocí goniometrických funkcí

Tento způsob je variantou předchozího odvození. Po dosazení za h (dráha volného pádu za dobu T) vychází v pravoúhlém trojúhelníku ASB pro kosinus úhlu φ :

$$\cos \varphi = \frac{R - h}{R} = \frac{R - \frac{1}{2}gT^2}{R} = 1 - \frac{gT^2}{2R}$$



Pro sinus úhlu φ platí známý vzorec $\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$. Dosadíme-li za $\cos \varphi$, dostáváme:

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{gT^2}{2R}\right)^2}$$

Po umocnění závorky a zanedbání členu s T^4 (v limitním případě $T \rightarrow 0$) vychází:

$$\sin \varphi = T \sqrt{\frac{g}{R}}$$

Pro $T \rightarrow 0$ platí i $\varphi \rightarrow 0$ a dále $\sin \varphi \rightarrow \varphi$. Pro délku L oblouku (dráha oběžnice za dobu T) vychází:

$$L = R\varphi = RT \sqrt{\frac{g}{R}} = T \sqrt{Rg}$$

Pro velikost rychlosti pak po dosazení za gravitační zrychlení (viz předchozí odvození) vyjde:

$$v_1 = \frac{L}{T} = \sqrt{Rg} = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

4. Pomocí volného pádu do středu Země

Je-li v tělese tvaru koule soustředná kulová dutina, je výsledná gravitační síla kdekoli uvnitř této dutiny nulová. Totéž platí i pro gravitační zrychlení uvnitř této dutiny. Určujeme-li gravitační zrychlení v místě vzdáleném x od středu planety, nemusíme vrstvu nad uvažovaným místem (jakousi „slupku“) uvažovat a gravitační zrychlení pak počítáme jako zrychlení na povrchu koule o poloměru x soustředné se Zemí. Pro hmotnost m takové koule lze odvodit vztah:

$$m = \left(\frac{x}{R}\right)^3 M,$$

kde R je poloměr Země a M její hmotnost.

Pro velikost gravitačního zrychlení g v místě vzdáleném x od středu Země pak po úpravě dostáváme:

$$g = G \frac{m}{x^2} = G \frac{M}{R^3} x$$

Padá-li těleso hypotetickou šachtou proraženou Zemí přes její střed, je zrychlení tohoto pádu rovno právě tomuto gravitačnímu zrychlení. Velikost tohoto zrychlení je přímo-úměrná vzdálenosti x . Zrychlení je současně rovno druhé derivaci vzdálenosti x podle času. Platí tedy:

$$\ddot{x} = -G \frac{M}{R^3} x$$

a po úpravě

$$\ddot{x} + G \frac{M}{R^3} x = 0$$

Jde o diferenciální rovnici harmonického pohybu s úhlovou frekvencí ω . Těleso se tedy při pohybu šachtou pohybuje harmonickým pohybem s amplitudou R a úhlovou frekvencí ω , pro kterou platí:

$$\omega = \sqrt{G \frac{M}{R^3}}$$

Pro maximální velikost v rychlosti harmonického pohybu (v tomto případě jde o rychlost ve středu Země) pak platí:

$$v_1 = \omega R = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

což je opět známý vztah pro první kosmickou rychlost.

5. Pomocí zákona zachování mechanické energie

Toto odvození je variantou předchozího postupu – volného pádu z povrchu Země do hypotetické šachty přes zemský střed. Nulovou hladinu potenciální energie umístíme do středu Země. Těleso na povrchu Země má nulovou kinetickou energii. Potenciální energii na povrchu Země určíme jako mechanickou práci potřebnou k „vynesení“ tělesa ze středu Země na její povrch. Protože se v průběhu tohoto děje mění hodnota gravitačního zrychlení, počítáme potenciální energii integrálem.

Pro diferenciál potenciální energie platí:

$$dE_p = dW = F_g dx = mg dx = mG \frac{M}{R^3} x dx$$

Vztah pro gravitační zrychlení $g = G \frac{M}{R^3} x$ ve vzdálenosti x od středu Země byl odvozen výše.

Potenciální energii na zemském povrchu pak určíme pomocí určitého integrálu:

$$E_p = \int_0^R dE_p = \int_0^R mG \frac{M}{R^3} x dx = \frac{GmM}{2R}$$

Kinetická energie tělesa padajícího šachtou je ve středu Země $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Celková energie padajícího tělesa je na povrchu Země určena jen jeho potenciální energií (kinetická je nulová) a celková energie ve středu Země je zase určena jen energií kinetickou – zde je nulová energie potenciální. Ze zákona zachování mechanické energie potom vyplývá:

$$E_k = E_p \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GmM}{2R}$$

Z této rovnosti pak vyjádříme rychlost ve středu Země:

$$v = v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}},$$

což je opět vztah pro první kosmickou rychlost.

Poznámka: Všechna odvození platí beze změny pro jakkoliv velké vesmírné těleso, které má kulový tvar.

Reference

- [1] Svoboda, E. a kol.: Fyzika pro gymnázia. Mechanika. Prometheus, Praha, 2013.

Počítačové simulace PhET ve výuce fyziky na gymnáziu

ZDENĚK PUCHOLT

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

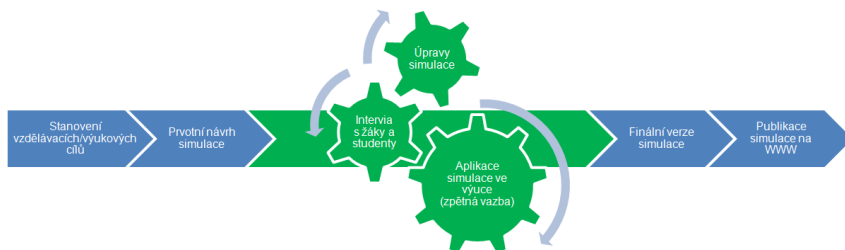
Projekt PhET

V roce 2002 byl pod vedením laureáta Nobelovy ceny Carla Wiemana na University of Colorado Boulder založen celosvětově známý projekt PhET – *Physics Education Technology* [1]. Toto označení není v současné době příliš přesné, jelikož soubor více než stovky simulací pro různé věkové kategorie zahrnuje kromě fyzikální tematiky i experimenty z chemie, biologie, případně simulace vhodné pro integrovaně vyučovaný předmět Science [2].

Projekt získal od doby svého vzniku celou řadu ocenění, např. MERLOT Editor's Choice Award (2006), NSF & Science Magazine's International Science & Engineering Visual Challenge Award (2007), Tech Award and Microsoft Education Award (2011), SIGOL Online Learning Award (2012, 2. místo), WISE Awards (2017), APS Excellence in Physics Education Award (2018), Open Education Award for Excellence: Open Simulation (2019) a mnohá další [1].

Tým autorů simulací původně vedl samotný Carl Wieman, který předal r. 2008 pomyslné žezlo Kathy Perkins. V současné době tvoří vývojářský tým více než dvacítka odborníků z fyziky, chemie, biologie, informatiky či psychologie. Díky pravidelným setkáváním členů týmu a zpětným vazbám od učitelů z praxe, je možné velmi rychle reagovat na problémy, které se mohou při práci se simulacemi objevit. Vzniklo tak velmi flexibilní prostředí pro učitele a akademické pracovníky, kteří se díky projektu mohou zaměřovat na celou řadu (výzkumných) témat z oblasti výuky přírodovědných oborů.

Jak ukazuje obr. 1, prototypy simulací jsou hloubkově a opakovaně testovány, je též kladen důraz na zpětnou vazbu od žáků, příp. studentů (např. v podobě metodicky vedeného rozhovoru), a to vše v rámci obecného zvýšení kvality a dostupnosti interaktivních zdrojů pro vzdělávání (viz koncept STEM [1]).



Obr. 1 Diagram popisující standardní vývojový cyklus každé simulace vyvíjené v projektu PhET [1]

Cílem simulací je také podporovat myšlenku konstruktivismu, tj. kdy je žák aktivním prvkem ve výuce, který objevuje a též činí závěry. Simulace mají za cíl taktéž rozvíjet konceptuální představy o dané problematice jako celku a efektivně odstraňovat případné miskoncepty. Realizované simulace jsou navíc interaktivní – umožňují uživatelský vstup a možnost změn vstupních parametrů a řešit například i takové situace, které je možné v reálné laboratoři jen stěží navodit.

Celá řada reálných objektů z běžného života je v simulacích zjednodušena do podoby modelů. Tyto modely jsou ve shodě s běžně využívanými modely ve výuce, např. modely struktury látek [1]. Kromě běžné vizuální stránky simulace nabízejí i další grafické výstupy, nejčastěji grafy, diagramy, případně i datové výstupy. Jelikož jsou práce s grafy a zpracovávání dat pro žáky velmi problematické [3], ukazují se simulace jako vhodný nástroj pro procvičování [1]. Navíc časté propojení simulace s reálnými objekty navozuje příjemné a hravé prostředí.

Na podporu interaktivity a atraktivnosti jsou do PhET simulací začleňovány různé ovládací prvky (tlačítka, zaškrťovací pole, přepínače, posuvníky či vstupní textová pole). Oblíbená je v současné době taktéž metoda tzv. drag & drop, která je v PhET simulacích hojně pro svou intuitivnost využívána. Pro podporu reálnosti měření jsou v simulacích implementovány běžné měřicí přístroje (svinovací metr, multimetr, manometr, ...).

V neposlední řadě je zapotřebí připomenout jistou variabilitu nejenom PhET simulací. Není nutné je striktně využívat pouze jako demonstrační nástroj, ale mohou nalézt uplatnění například v laboratorních cvičeních (v kombinaci s pracovními listy) a stát se doplňkem k tradičním přístupům, případně býti dostupnou učební pomůckou v rámci domácí přípravy [1].

Jelikož je v současné době vývoj webových stránek a přidružených technologií značně progresivní, je nezbytné tento vývoj kopírovat i v oblasti

simulací. Vybrané PhET simulace jsou spustitelné přímo z webového prohlížeče, většina z nich se dá v současnosti taktéž stáhnout a spouštět offline, tedy bez přístupu k internetu. Nicméně doposud fungující applety mimo PhET (implementované zejména v jazyce Java) zaměřené převážně na fyzikální tematiku jsou dnes zastaralou technologií a není předpokládáno, že by se jejich vývoj nadále podporoval. Na internetu lze nalézt celou řadu odkazů na applety, které ale již bohužel nejsou funkční – to je důkazem nezvratného progresu webových technologií. Otázkou však zůstává, co bude v budoucnu tím „ideálním řešením“.

Jak ukazují vývojáři projektu PhET a další autoři webových aplikací, budoucnost lze hledat v novém HTML 5¹⁾ (finální specifikace značkovacího jazyka byla vydána 28. října 2014). HTML 5 navíc obsahuje jeden z významných prvků – tzv. *canvas* (z angl. *plátno*). Tento prvek nabízí pro uživatele maximální možnou míru interakce, grafické výstupy a zejména propojení s JavaScriptem a jeho perspektivní knihovnou jQuery podporující technologii AJAX²⁾. V porovnání s applety má tato nová technologie obrovskou výhodu – není nutné spouštět žádný další software, kromě aktualizovaného webového prohlížeče.

Zdrojové kódy PhET simulací jsou veřejně přístupné. Každý uživatel má možnost si kód simulace stáhnout a modifikovat jej. Samotný projekt PhET je neziskový, nicméně je možné přispět libovolnou částkou na jeho činnost. Kromě technických aspektů je zapotřebí zmínit i dostupnost jazykových mutací. Každá ze simulací jich nabízí v současnosti několik, včetně češtiny. Doplňující informace k projektu je možné nalézt také v publikovaných článcích samotného zakladatele C. Wiemana [4].

Počítačové simulace vs. reálné měření

Často si nejenom vyučující fyziky, ale obecně vyučující přírodních věd a matematiky kladou otázku, do jaké míry jsou počítačové simulace přínosné ve vzdělávacím procesu a jakým způsobem je možné jejich efektivnost měřit. Nejenom autoři PhET simulací čelili a stále čelí četným otázkám, z nichž například uveďme tyto:

- *Mohou simulace nahradit měření v běžných laboratořích (hands-on labs)?*

Na základě studií provedených PhET týmem bylo zjištěno, že efek-

¹⁾HTML (Hypertext Markup Language). Verze značkovacího jazyka sloužícího pro tvorbu webových stránek.

²⁾AJAX (Asynchronous JavaScript and XML). Obecné označení pro technologie interaktivních webových aplikací, které mění obsah svých stránek bez nutnosti jejich kompletního znovunačítání.

tivnější v získávání konceptuálních znalostí jsou simulace v porovnání s tradičním přístupem (tj. měřením v reálné laboratoři). Nicméně je nutné upozornit, že simulace nedokážou žáka naučit specifické laboratorní činnosti, např. práci s konkrétními přístroji a jejich nastavením, obratnost při sestavování laboratorní aparatury, atp. Je tedy vždy nutné důsledně specifikovat vzdělávací cíle pro danou aktivitu [1].

- *Jak nejlépe začlenit PhET simulace do mé výuky?* Způsob začlenění simulací může být velmi variabilní – od prosté demonstrace simulace, resp. vybraného jevu, přes domácí úlohu, projekty, semináře, workshopy až k laboratorním úlohám. Například v rámci laboratorní úlohy mají žáci možnost se simulací aktivně pracovat a sami objevovat. Jak autoři uvádějí, cílem bylo vytvořit intuitivní simulace s jednoduchým ovládním a minimem textu. Součástí projektu nejsou žádné rozsáhlé manuály, jak konkrétní simulaci ovládat, pouze lze na stránkách projektu u každé simulace nalézt vytvořené pracovní listy a náměty na laboratorní úlohy od učitelů z praxe, které se liší v několika aspektech – obecně kvalitou (materiály lze na stránkách hodnotit), časovým rozsahem, náročností, věkovým zaměřením či stylem vedení žáka. Většina materiálů je bohužel dostupná výhradně v angličtině [1].
- *Jsou žáci schopni se něco naučit, když jim jenom řeknete, ať jdou domů a hrají si sami se simulacemi?* Podle zkušeností PhET nelze u všech žáků vzbudit zájem a nadšení v simulacích, byť jsou často motivováni známkou, případně jiným evaluačním nástrojem. Jak sami autoři doslovně uvádí: „Simulations. . . they’re fun, but not that fun³⁾.“ Pro vytěžení maximálního potenciálu simulací je proto nutné co nejvhodnějším způsobem simulace do domácí přípravy začlenit [1].

Pokud bychom se podívali na dosavadní výzkumy týkající se měření efektivnosti počítačových simulací v porovnání s tradičním přístupem, nalezneme poměrně mnoho vědeckých článků (např. na Web of Science). Obecně však tyto studie podávají rozporuplné informace o efektivnosti simulací. Není pravdou, že by každá studie prokázala pozitivní přínos simulací. Některé prokázaly srovnatelnou efektivnost simulací, jiné simulace zhodnotily nadměru pozitivně, některé i negativně. Proto je nezbytné nečinit rychlé závěry a na jednotlivé studie se blíže podívat. Lze tak zjistit, že v jednotlivých případech byly stanoveny zcela rozdílné podmínky – časová dotace práce se simulací, poměr doby strávené tradiční výukou a výukou

³⁾Simulace. . . jsou zábavné, ale není to ta „pravá“ zábava.

se simulací, metody vyhodnocení studií (kvalita závisí i na počtu respondentů výzkumu), způsoby začlenění simulací do výuky (typ pracovního listu, resp. styl vedení při výuce) a další. Můžeme tak nalézt celou řadu dalších parametrů, které mohou výsledky studií ovlivnit.

Jeden ze zdrojů [5] především pojednává o možnostech pre-testování u laboratorních cvičení. Autor ukazuje, že kromě tradiční možnosti, tj. testování pomocí pre-testu, lze používat i jiný způsob – studentův písemný popis způsobu měření úlohy, kterou budou v praktiku měřit. Hodnocení je poté třístupňové, tj. žádná znalost způsobu měření úlohy, částečná a vynikající. Tento způsob hodnocení je v článku porovnáván s možnostmi přípravy s využitím počítačových online simulací a testování. Autor provedl detailní výzkum, který prokázal pozitivní vliv simulací na připravenost studentů univerzity před začátkem měření v běžné laboratoři. Aktuální problematika je doplněna vlastními animacemi, které jsou bezplatně online dostupné.

Další studie [6] je zaměřena na analýzu a rešerši prací zabývajících se počítačovými simulacemi v přírodovědných předmětech. V úvodu autor klade otázky „Jak lze obohatit klasické vyučování využitím počítačových simulací?“, „Jak lze počítačové simulace co nejlépe využít ve výuce?“ a definuje pojem *počítačová simulace* jako program znázorňující model reálného systému nebo procesu. Zdrojem článků pro rešerši byly tři databáze – ERIC, Scopus a ISI Web of Knowledge, které byly využívány od r. 2009 do r. 2011. Vybírány byly studie zaměřené na žáky od 12 do 20 let.

Kromě tradičních simulací lze zapojit další smysly a vytvořit tzv. *haptické počítačové simulace* [7]. Uživatel v rámci tohoto typu simulací zasahuje do jejího průběhu s využitím vhodné počítačové periferie, např. joysticku. Simulace tak dostává další „rozměr“. Zřejmou nevýhodou takového typu simulací je bezesporu cena těchto periférií.

Vhodně sestaveným didaktickým experimentem lze efektivnost měřit v delším časovém období. Tento způsob měření je popsán například v další publikaci [8], kde autor poukazuje na značnou úspěšnost v řešení konceptuálních otázek s důrazem na vysvětlování a argumentaci u experimentální skupiny využívající počítačové simulace v porovnání se skupinou vzdělávanou tradičním způsobem, tj. bez simulací. Další provedený výzkum [9] například ukázal již zmíněnou nejednoznačnost v efektivnosti počítačových simulací ve výuce.

To, do jaké míry mohou být simulace efektivní, může ovlivnit styl pracovního listu (pokud je využíván) [10]. Jak je ukázáno, je možné vytvářet

tzv. „cook-book“, tedy jakési kuchařky s přesným postupem, co provádět, nebo vytvářet takové pracovní listy, které podporují konstruktivistický přístup a vybízejí žáka k aktivitě a vlastnímu zkoumání daného jevu [11].

Aplikace simulací na školách v ČR

V našich podmínkách nejsou simulace příliš využívány. Vyučující přírodních věd si mohou sami sobě položit otázku, jak často a jakým způsobem je využívají. Pokud ano, nejčastěji se jedná pouze o demonstrační funkci, minimum našich vyučujících simulace využívá jako propracované laboratorní úlohy.

Zkusme proto na konkrétní ukázce popsat, možná i jako motivaci pro čtenáře, jak lze simulace do výuky začlenit v rámci laboratorní úlohy. Přesuňme se do hodin hydromechaniky a využijme již zmíněnou PhET simulaci *Fluid Pressure and Flow* [1]. Pojmy jako objemový průtok či rychlost proudění tekutiny jsou poměrně intuitivní a lze je proto bez větších obtíží objasnit. Naopak rovnice kontinuity, Bernoulliho rovnice či hydrodynamický paradox jsou na vysvětlení značně komplikovanější.

Nejčastěji máme na gymnáziu dvě možnosti – celá třída je vyučována v počítačové učebně (ideálně má každý z žáků k dispozici počítač), případně výuka probíhá v několika oddělených skupinách (nejčastěji dvě skupiny v rámci cvičení z fyziky).

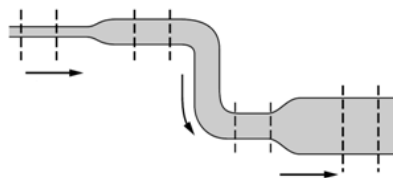
Abychom mohli pozorovat pokrok žáků v dané tematické oblasti, je vhodné sestavit dvojici testů – pre-test a post-test. Pre-test ověřuje míru dosavadních vědomostí a miskonceptů, se kterými žáci před výukou daného tematického celku přicházejí. Typický a častý miskoncept v hydromechanice lze například nalézt u hydrostatického (hydrodynamického) paradoxu. Naopak post-test ověřuje získané vědomosti, ať už konceptuálního rázu, případně z typizovaných úloh probíraných ve výuce. Ideálně shodnou náročností obou testů (např. lze pozměnit zadání úloh, číselné údaje, pořadí distraktorů a jiné) můžeme měřit progres u každého žáka a pokud máme dvojice odpovídajících si úloh z pre-testu a post-testu, můžeme dokonce zjišťovat, zda došlo k odstranění miskonceptů či nikoliv.

Další alternativou může být porovnání dvou rozdílných přístupů ve výuce – jednu část třídy je možné vyučovat běžným postupem (*kontrolní skupina*) a se zbývajícími žáky využívat simulace (*experimentální skupina*). Při dodržení základních pravidel, mezi které patří například shodná časová dotace výuky pro obě skupiny, je možné měřit úspěšnost jednotlivých přístupů.

Zvolme například poslední uvedenou možnost a popišme si, jak může probíhat práce v jednotlivých skupinách (vycházíme ze skutečného průběhu vyučování na gymnáziu). Cílem samotné vyučovací hodiny bude zopakovat vlastnosti kapalného skupenství; vybrané pojmy (ideální tekutina, reálná tekutina, viskozita tekutin); definovat objemový průtok a odvodit jeho jednotku; odvodit rovnici kontinuity a diskutovat její význam; vysvětlit hydrodynamický paradox a jeho důsledky v praxi.

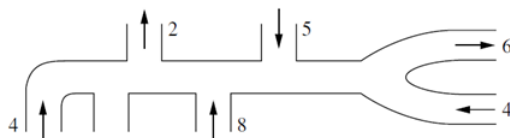
V pre-testu, jehož výsledky žáci nesmí znát dříve, než po ukončení výuky celého tematického celku, odpovídají nejčastěji na úlohy s uzavřenými odpověďmi s cca 4–6 distraktory. Pre-test absolvují v běžné hodině fyziky, tj. před výukou v oddělených skupinách. Jako možné otázky k pre-testu (post-testu) uveďme například:

- Na obr. 2 je zakreslena část vodorovného potrubí (pohled shora), kterým protéká ideální kapalina. Rozhodněte, ve kterém místě (označeno číslem) je velikost tlaku kapaliny v potrubí nejvyšší [12].
- Na obr. 2 je zakreslena část vodorovného potrubí (pohled shora), kterým protéká ideální kapalina. Rozhodněte, ve kterém místě (označeno číslem) je rychlost průtoku kapaliny nejvyšší [12].



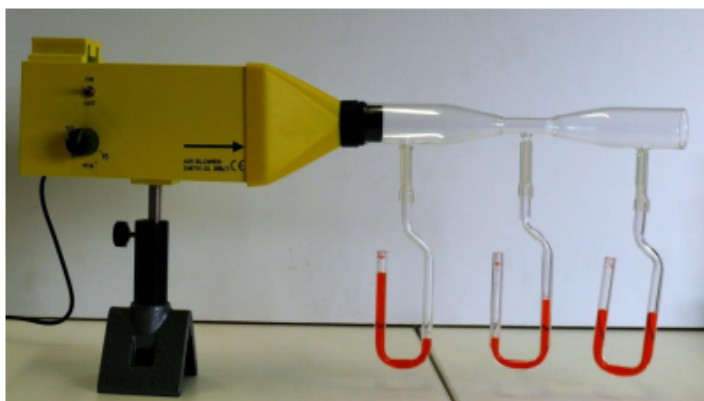
Obr. 2 Ilustrace úlohy pro evaluační testy z hydromechaniky (1) [12]

- Na obr. 3 je znázorněno vodorovné rozvětvené potrubí (pohled shora). Šípkami je značen směr toků ideální kapaliny v jednotlivých větvích a čísla udávají množství kapaliny, které těmito větvemi proteče. U jedné větve oba údaje (šipka a hodnota) chybí, doplňte je [12].



Obr. 3 Ilustrace úlohy pro evaluační testy z hydromechaniky (2) [12]

Obě skupiny budou postupně odděleně vyučovány 45 minut stejným vyučujícím. Kontrolní skupina má ve třídě k dispozici běžné vybavení – tabuli s křídami, žáci mají sešity, psací potřeby a kalkulačky, učebnice a sbírku úloh. Na začátku výuky jsou ideálně formou brainstormingu zopakovány výše uvedené poznatky o tekutinách a učiněny závěry. Na základě zkušeností z pozorování v běžném životě lze formou indukce, tj. z dílčích případů a situací, definovat objemový průtok a odvodit i jeho jednotku (pozorování proudění vody v řece, zužování koryta). S tím související i rovnice kontinuity může být odvozena obdobným způsobem (laicky řečeno: „Co přiteče, i odtéče.“). Odtud lze získat známá vyjádření rovnice kontinuity. Aerodynamický paradox můžeme v hodině demonstrovat například pomocí Venturiho trubice (viz obr. 4), případně skleněnou aparaturou, kterou protéká voda (hydrodynamický paradox) a žáci sledují výstup vody v jednotlivých kapilárách a posléze stanovují závěry z pozorování.

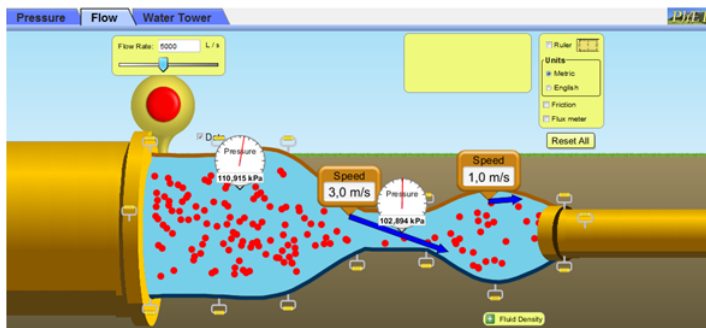


Obr. 4 Venturiho trubice s U-trubicemi pro měření tlaku protékající tekutiny

Jak je patrné z obr. 4, získáváme ne příliš uspokojivý výsledek u pravé U-trubice, který je způsoben poklesem tlaku vlivem předčasného ukončení Venturiho trubice a úniku tekutiny do volného prostoru. Tento jev je možné s žáky taktéž diskutovat. Demonstraci paradoxu lze docílit i se dvěma volně svěšenými listy papíru, kdy fouknutím mezi ně pozorujeme jejich přiblížení. Na základě realizovaných experimentů poté dochází k formulaci závěru a specifikaci hydrodynamického (aerodynamického) paradoxu.

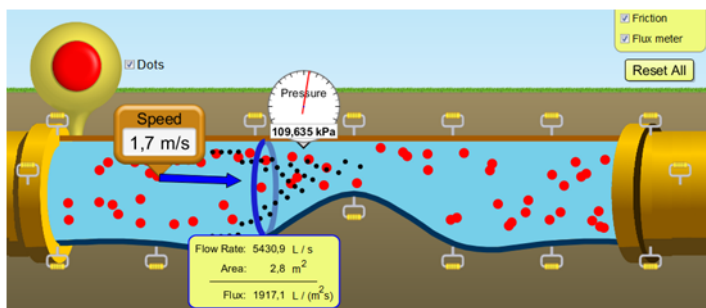
Členové experimentální skupiny pracují s počítači a zmíněnou simulací. Buď mohou pracovat s pracovními listy, které je simulací provádí nebo je

simulace žáky průběžně využívána. Zvolme tentokrát druhou možnost. Na začátku hodiny jsou stejně jako u kontrolní skupiny formou brainstormingu zopakovány poznatky o tekutinách. Následuje krátké seznámení se simulací a jejím ovládním.



Obr. 5 Prostředí simulace Fluid Pressure and Flow [1]

Takto by měli být žáci schopni popsat význam funkcí na kartě Flow (viz obr. 5): Na kartě je potrubí, kterým protéká kapalina. V horní části simulace jsou ovládací prvky, jako Flow Rate (objemový průtok; nutno využít slovník), měřidla rychlosti průtoku (Speed) a tlaku kapaliny (Pressure), včetně volby jednotek a aktivace funkce Flux meter. Kliknutím na velké červené tlačítko u levého okraje potrubí dojde ke vpuštění „proudnic“ (funkce Dots), kterými lze znázornit tok kapaliny potrubím – buď ideální nebo reálné (nutná je aktivace funkce Friction). Využitím úchytků podél potrubí lze vytvořit jeho zcela libovolný tvar (viz obr. 6).



Obr. 6 Aktivace funkcí Flux meter, Speed, Pressure a Dots [1]

Jak je patrné, už při popisu prvků simulace se žáci seznámí s veličinou objemový průtok. Ten je zde uveden v jednotkách litr/s . Nástrojem Flux meter lze pozorovat, že je objemový průtok ve všech místech stejný. Modifikací tvaru potrubí žáci zjišťují, že je opět průtok stálý a dochází k závěru, že bez ohledu na tvar potrubí je objemový průtok v celém potrubí konstantní, což je v podstatě slovní formulace rovnice kontinuity. Na základě poznatku žáků je zformulována rovnice kontinuity a vyjádřena v odpovídajících tvarech jako u kontrolní skupiny.

Žáci zpravidla se simulací pracují velmi rychle a zkouší sami nové prvky, které doposud nevyužili. Zřejmě vyučujícího předstihnou a sami využijí nástroje pro měření rychlosti průtoku a tlaku kapaliny. Když vyučující položí otázky typu „V jakých částech potrubí je rychlost protékající kapaliny nejvyšší?“ nebo „V jakých částech potrubí je tlak kapaliny nejvyšší?“, žáci zpravidla odpověď znají, nicméně si neuvědomují, že tyto odpovědi jsou zcela v rozporu s jejich původními předpoklady (to lze ověřit v rámci pre-testu). Poté, co vyučující upozorní na tento paradox, žáci dále se simulací pracují a uvědomují si jej; zjišťují například tyto závěry:

- průtok kapaliny je ve všech místech potrubí stejný;
- se zmenšujícím se průřezem potrubí se zvyšuje rychlost proudící kapaliny;
- se zmenšujícím se průřezem potrubí se tlak kapaliny snižuje;
- se zvyšujícím se ponořením manometru do potrubí, se zvyšuje výsledná velikost tlaku (započítáním hydrostatického tlaku).

Při práci se simulací je zapotřebí žákům nechat jistou volnost – nechat je objevovat a prozkoumávat. To je i jedna z myšlenek tvůrců projektu PhET. Žák je tím, kdo sám objevuje. Bez složitého ovládní se tak dá velmi efektně ukázat celá řada jevů, nejenom z oblasti hydromechaniky.

Závěr

Počítačové simulace nabízejí vyučujícím přírodovědných oborů nepřehledné množství funkcí. Je na zvážení každého vyučujícího, do jaké míry simulace do výuky začlení. S rostoucí oblibou výpočetní techniky je tak možné, ne příliš oblíbené předměty o něco více zatraktivnit. V žádném případě simulace nenahrazují běžné školní experimenty, ale lze je například i využívat tam, kde není možné z jakýchkoliv důvodů klasické experimenty realizovat (finanční stránka, časové možnosti, ...).

Reference

- [1] PhET Interactive Simulations: Interactive Simulations for Science and Math [online]. [cit. 3. září 2020]. Dostupné z: <http://phet.colorado.edu>.
- [2] Wikipedia: PhET Interactive Simulations [online]. [cit. 3. září 2020]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/PhET_Interactive_Simulations.
- [3] *Maries, A. et al.*: Performance of graduate students at identifying introductory students' difficulties related to kinematics graphs. In: 2014 Physics Education Research Conference Proceedings, American Association of Physics Teachers, 2015, s. 171–174. DOI: 10.1119/perc.2014.pr.039.
- [4] *Wieman, C. E. et al.*: Teaching Physics Using PhET Simulations. *The Physics Teacher*, 48 (2010), č. 4, s. 225–227. DOI: 10.1119/1.3361987.
- [5] *Paetkau, M. et al.*: Measuring the Effectiveness of Simulations in Preparing Students for the Laboratory. *The Physics Teacher*, 51 (2013), č. 2, s. 113–115. DOI: 10.1119/1.4775536.
- [6] *Rutten, N. et al.*: The learning effects of computer simulations in science education. *Computers & Education*, 58 (2012), č. 1, s. 136–153. DOI: 10.1016/j.compedu.2011.07.017.
- [7] *Han, I. et al.*: Incorporating haptic feedback in simulation for learning physics. *Computers & Education*, 57 (2011), č. 4, s. 2281–2290. DOI: 10.1016/j.compedu.2011.06.012.
- [8] *Zacharia, Z. C. et al.*: Physical versus virtual manipulative experimentation in physics learning. *Learning and Instruction*, 21 (2011), č. 3, s. 317–331. DOI: 10.1016/j.learninstruc.2010.03.001.
- [9] *Steinberg, R. N.*: Computers in teaching science: To simulate or not to simulate? *American Journal of Physics*, 68 (2000), s. 37–41. DOI: 10.1119/1.19517.
- [10] *Windschitl, M. et al.*: Using computer simulations to enhance conceptual change: The roles of constructivist instruction and student epistemological beliefs. *Journal of Research in Science Teaching*, 35 (1998), č. 2, s. 145–160.
- [11] *Adams, W. K. et al.*: What Levels of Guidance Promote Engaged Exploration with Interactive Simulations? AIP Conference Proceedings, 2008, s. 59–62. DOI: 10.1063/1.3021273.
- [12] *Halliday, D. et al.*: Fyzika: vysokoškolská učebnice obecné fyziky. 1. české vyd., 2. dotisk, Prometheus, Praha, 2006.

Juniorní centra excelence pro informační bezpečnost

JIŘÍ SEDLÁČEK^{1,2} – TOMÁŠ PITNER²

¹Network Security Monitoring Cluster

²Národní centrum kompetence pro kyberbezpečnost MU, Brno

V předchozím čísle jsem se věnovali důvodům, proč systematicky vzdělávat v kyberbezpečnosti a informační bezpečnosti. Nyní se podíváme na nejvyšší stupeň této specializované výuky, tedy na Juniorní centra excelence (JCE). Popíšeme si cestu, jak se JCE dá vybudovat, jak má vypadat vybavení Centra, jaké vzdělání potřebují jeho pedagogové a co to přinese vedle rozšíření výukových programů také pro bezpečný provoz školy. Seznámíme také se službami, které lze od Juniorních center excelence v kyberbezpečnosti očekávat pro ostatní školy v rámci daného regionu.

Juniorní centra excelence

Excelentní centra by měla být výjimečná, progresivní v přístupu k výuce a evangelizaci informační bezpečnosti, s ohledem na implementaci bezpečnostních opatření v organizaci typu střední škola i s ohledem na technické vybavení. Jako optimální lze uvažovat krajský model, z důvodu rovnoměrného pokrytí celého území ČR těmito specializovanými školami.

Z povahy věci nemůže být centrem excelence každá škola; každá škola ovšem může s pomocí center zavést či zlepšovat výuku s ohledem na kyberbezpečnost. Excelentní centra potřebují pro plnění své funkce kvalifikovaný pedagogický sbor a potřebné technické prostředky. Cíle vzniku center je dosáhnout, aby:

- stredoškolská centra excelence byla průkopníky pro zajištění výuky IB ve všech RVP;

- výuka IB/KB pomohla zajistit podmínky pro hladce fungující informační společnost, občané získají potřebné návyky pro zodpovědné chování v kyberprostoru, čímž bude významně redukována úspěšnost kybernetických útoků prostřednictvím lidského faktoru a občanům bude díky nabytým znalostem umožněn přístup k elektronickým službám rozvinuté informační společnosti;
- zajištění potřebné expertní základny umožnilo lépe čelit nejnovějším kyberhrozbám;
- Česká republika udržela dosavadní významné postavení v oblasti KB v celosvětovém měřítku, což přispěje k udržení její konkurenceschopnosti;
- kritická informační infrastruktura, s úzkou vazbou na industriální systémy, byla efektivněji chráněna, kyberprostor ČR byl lépe zabezpečen a sociální a ekonomické zájmy byly lépe zajištěny.

Kandidáti s ambicí na získání statutu JCE

Ve spolupráci se sdružením Network Security Monitoring Cluster (NS-MC, <https://www.nsmcluster.com/>), jenž je autorem osnovy vzdělávacího programu Kyberbezpečnost na SŠ, probíhá výuka ve studijním oboru Kyberbezpečnost na těchto školách usilujících o statut Juniorního centra excelence pro kyberbezpečnost a informační bezpečnost:

SŠ IPF Čichnova Brno (od roku 2017), viz [2, 3, 4],

SPŠ Smíchovská Praha (od roku 2017), viz [5]

SŠ IS Dvůr Králové nad Labem (od roku 2018), viz [6].

V oblasti technických opatření a vybavení laboratoří nejsou tyto školy na stejné úrovni. Spojujícím elementem je však ambice a schopnost vyučovat informační a kybernetickou bezpečnost a být lídrem v této oblasti v regionu, včetně budování JCE.

Předpoklady a postup vzniku JCE

Než se pustíme do budování JCE

Koncepce JCE se opírá o podporu národní autority pro kyberbezpečnost, tedy *Národního úřadu pro kybernetickou a informační bezpečnost* (NÚKIB, <https://www.nukib.cz>), který vznik center podporuje. Nezbytnou podmínkou realizovatelnosti Centra je modernizované či revitalizované vybavení ICT technikou vč. laboratoří pro studenty, aby nebyli odtrženi od aktuální praxe, což nelze bez finanční angažovanosti zřizovatele a schopnosti vedení školy aktivně se zajímat o projektové financování, nejlépe

v součinnosti s odborným zázemím partnerů, jako byl v případě JCE Čichnova Network Security Monitoring Cluster. Nezbytností je další vzdělávání odbornými kurzy akreditovanými ministerstvem v rámci DVPP.

Kroky budování JCE

Postup je běh na delší trať a vyžaduje koncepční plánování:

1. Na krajské úrovni vytipovat kandidátní školu pro zřízení JCE
2. Proškolení personálu a vedení školy
3. Stanovení směrů rozvoje školy (studijní obory, vybavení školy)
4. Vypracování studie proveditelnosti
5. Vypracování projektové dokumentace
6. Zajištění financí ze zdrojů školy, zřizovatele a typicky i projektových prostředků
7. Realizace projektu
8. Certifikace

Každý krok znamená specifické úkoly na různých úrovních rozhodování a řešení.

Krok 1: Asociace krajů ČR přislíbila podporu a vzala si za své plán vytipovat vhodné školy ve všech krajích – samozřejmě s tím, aby se zohlednil zájem samotné školy. Dalším krokem (2) je proškolení vedení a zaměstnanců, alespoň uvedení do problematiky informační bezpečnosti a kyberbezpečnosti. V případě JCE Čichnova proběhlo vzdělávání na bázi akreditovaného kurzu *Kyberbezpečnost a informační bezpečnost pro pedagogické pracovníky a management středních škol* vyvinutého NSMC. *Směry rozvoje školy* (3) znamenají stanovit si, TODO. Na základě identifikovaných směrů je vypracována studie proveditelnosti, většinou za pomoci zkušeného vnějšího subjektu, jako byl v případě JCE Čichnova cluster NSMC. *Studie proveditelnosti* (4) zejména mapuje potřebná opatření v organizační rovině, jak z pohledu rozvoje výuky kyberbezpečnosti, technického vybavení laboratoře, posouzení bezpečnostních opatření školy s přihlédnutím k Vyhlášce o kybernetické bezpečnosti (organizace typu střední škola není povinnou osobou podle ZoKB – Vyhláška je brána pouze jako metodické vodítko!) a analýzy rizik spojených s klíčovými informačními systémy školy z pohledu požadavků na JCE. *Projektová dokumentace* (5) už musí popisovat do detailu, jak bude vypadat vybavení laboratoře, vybudování, posílení či modernizace infrastruktury (sítě, serverů, IS) školy vč. výkazů výměr. Zde se škola opět neobejde bez odborné pomoci. Projektová dokumentace je klíčovým praktickým nástrojem pro vypisování výběrových řízení a

projektových *žádostí o financování* (6). Ve fázi realizace (7) je podána obvykle projektová žádost na získání financí a uspěje-li, pak jsou vypisována potřebná *výběrová řízení na dodavatele*. Na závěr podstoupí JCE *certifikaci* (8), jejíž model je nyní připravován ve spolupráci NSMC, NÚKIB a Masarykovy univerzity.

Technické zázemí JCE

Poměrně zásadním momentem je vnímání několika rovin fungování JCE; nejen jako výukového pracoviště s laboratoří kyberbezpečnosti a případně studijním oborem Kyberbezpečnost, ale i jako vzorového pracoviště se schopností zajistit si na příkladné úrovni vlastní provozní záležitosti související s IT infrastrukturou a kyberbezpečností. Budované zázemí by mělo pokrývat:

- *Síťovou infrastrukturu školy;*
- *Zvýšení úrovně fyzické bezpečnosti;*
- *Výpočetní výkon (servery) pro provozní systémy školy;*
- *Servery a bezpečnostní technologie pro provoz laboratoře kyberbezpečnosti;*
- *Komunikační infrastruktura (videokonferenční zařízení) pro vnitřní a vnější komunikaci;*
- *Speciální nástroje na posílení kyberbezpečnosti* vč. sledování síťového provozu.

Při posilování technického zázemí JCE je možné využít *Bezpečnostní doporučení NÚKIB pro administrátory*, viz [7].

Síťová infrastruktura

Síť je páteří celého ICT školy, JCE a laboratoře Kyberbezpečnosti. Obnáší to spolehlivou i dostatečně dimenzovanou lokální síť s oddělenými segmenty kyberbezpečnostní laboratoře a provozních systémů + část viditelnou navenek. Předpokladem jsou spolehlivé a nechybující metalické kabelové rozvody, dostatečná propustnost připojení k veřejnému internetu – nejen kvůli provozním systémům školy (IS, webový portál), ale i komunikacím (videokonferencing) a vzdálenému přístupu umožňujícím sdílení technologií laboratoře z vnějšku jiným školám v regionu. K tomu patří rovněž oddělení skupin uživatelů a jejich autentizace (vnější/vnitřní uživatelé, privilegovaní uživatelé, experimentální účty pro laboratoř a kybercvičení) plus technologie segmentace provozního prostředí školy. Současné zvládnutí provozních a experimentálních/výukových/tréninkových prostředí v jedné škole není vůbec triviální záležitostí.

Architektura řešení

Komplexní řešení kyberbezpečnostní laboratoře pro výuku a sdílení současně s vyřešením provozních záležitostí školy zahrnuje:

- **Fyzickou bezpečnost** – zajištění fyzické bezpečnosti na úrovni perimetru školy, zajištění fyzické bezpečnosti serverovny.
- **Servery** – síťová infrastruktura provozního prostředí školy ve formě konvergované infrastruktury umožňující konfiguraci dle potřeb školy s možností přístupu do provozního prostředí školy pomocí VPN z internetu, zajištění optimálních provozních podmínek, kyberbezpečnosti a fyzické bezpečnosti, zajištění odpovídající serverové infrastruktury provozního prostředí školy formou virtuálního prostředí a bezpečnostních technologií zajišťujících „business continuity“.
- **Prostory** – zajištění vhodných prostor pro umístění technologií pro provozní prostředí školy, zajištění prostor pro laboratoř – jelikož při kybercvičeniích typu „capture the flag“ potřebujeme minimálně tři až čtyři týmy – modrý (obránci), červený (útočníci) a bílý (zajištění provozu, rozhodčí, technická asistence, vyhodnocení), musíme pro ně zajistit prostory vč. komunikačního videokonferenčního systému.
- **Zajištění kontinuity** zahrnuje v optimální variantě zálohování dat metodou *disk2disk2tape* (D2D2T) s možností archivace, zajištění zálohování důležitých technických aktiv.
- **Redundance v návrhu řešení** a zajištění náhradních technických aktiv v určeném čase, zajištění spolehlivé a dostatečné zálohy napájení technologií v serverovně včetně víceokruhového napájení, zajištění optimálních provozních podmínek v serverovně (chlazení).
- **Zajištění provozních systémů školy** – řízení přístupu do sítě, monitoring datových toků, antivirové prostředky, audit privilegovaných uživatelů, zajištění log managementu, zajištění oddělení provozního prostředí školy od internetu, kyberlaboratoře a technologických řídicích systémů, zajištění možnosti odpojení kompromitovaného zařízení od sítě.

Propojení na systémy kraje

Etalon v duchu této koncepce – JCE Čichnova v Brně – má nezanedbatelnou výhodu v napojení na *Security Operations Center – Kybernetické Operační Centrum Jihomoravského kraje* (KOC). S tímto napojením získala JCE Čichnova technické řešení Log Management a monitoring stavu kyberbezpečnosti ze strany KOC v reálném čase prostřednictvím *Security*

Information and Event Management (SIEM), návazných procesů a vyškolených pracovníků KOC. Přináší to výhodu z úspory zdrojů, kdy není nutné mít interně či externě zajišťovaný management kyberbezpečnosti vě. SOC, a navíc je kontakt s profesionály z reálného provozu přínosný i po přípravu studentů.

Kyberbezpečnostní laboratoř

Kyberbezpečnostní laboratoře je ze své podstaty určená k výuce a experimentování včetně vzdáleného přístupu. Z logiky věci musí být oddělená od provozních systémů s ostrými daty, informačních systémů školy, webového portálu atd.

Infrastruktura laboratoře

Síťová infrastruktura laboratoře s využitím konvergované infrastruktury by měla umožňovat *variabilní konfigurace* sítě dovolující provádět kyberbezpečnostní cvičení s možností přístupu do ní pomocí VPN z provozního prostředí školy a internetu. Měly by zde být k dispozici tři zvukově a technicky oddělené místnosti pro zajištění vhodných podmínek pro realizaci výuky formou kybercvičení tří týmů (červení – útočníci, modří – obránci, bílí – podpůrný tým), přičemž prostory pro obránce a útočníky by měly být dimenzovány každá pro min 10 osob a místnost pro podpůrný tým pro aspoň dvě osoby. Je třeba pamatovat na zajištění tepelné pohody jak v zimním, tak i v letním období při plném osazení – vzhledem k množství výpočetní techniky to není samozřejmost. Osvědčily se další praktické věci jako variabilní nábytek umožňující operativní změnu dispozice podle probíhající aktivity a zajištění koncových bezdiskových stanic pro připojení hráčů a podpůrného týmu k tréninkové infrastruktuře laboratoře, k čemuž patří serverová infrastruktura laboratoře formou virtuálního prostředí a bezpečnostních technologií k zajištění cvičebních bezpečnostních scénářů. Vzdálená komunikace by měla být podpořena komunikační (videokonferenční) infrastrukturou s dobrou konektivitou a HW zařízeními podporujícími používané protokoly (H.323, SIP, Skype) umožňující aspoň 1 + 3 spojení.

Sdílení mezi centry

Pro sdílení znalostí, zkušeností a know-how mezi JCE je nutné pamatovat na:

- zachování co nejvyšší míry *kompatibility technologií* v laboratořích,
- totéž u *videokonferenčních technologií*;

- sdílení znalostí a zkušeností na pravidelných *workshopech* (optimálně čtvrtletně),
- spolupráci na *konfiguracích v laboratoři*, herních *scénářích*, výukových a metodických *materiálech*.

Rídící roli zde má Masarykova univerzita s infrastrukturou KYPO (Kybernetický polygon) jakožto metodik a koordinátor.

Zkušenosti z JCE Čichnova

Při budování JCE Čichnova se ukázalo, že JCE lze při pečlivém plánování a aktivní účasti zainteresovaných stran (škola, zřizovatel, spolupracující subjekty) zřídit s minimálními dodatečnými nároky:

- *Minimální investice* – bezpečnostní technologie navržené pro provozní prostředí školy jsou pouze nezbytné a potřebné pro zajištění nejnужnější elementární úrovně informační bezpečnosti a jsou pořízeny v minimálním rozsahu dle možností regionu (s přihlédnutím k napojení školy do KOC JmK – Security Operations Center JmK).
- *Minimální nároky na personál* – důraz na efektivní administraci navržených provozních technologií a technologií laboratoře z důvodu využití pouze pracovníků školy bez nutnosti vzniku nových pracovních pozic, pro něž škola nedisponuje dostatečnými finančními prostředky.
- *Vzdálený přístup* – po ukončení projektu budou technologie laboratoře školy vzdáleně zpřístupněny i ostatním SŠ v rámci JmK.
- *Etalon pro ostatní* – projekt JCE Čichnova je etalonem pro vznik JCE na krajské úrovni v ČR v souladu s *Koncepcí Juniorních center excellence v oblasti informační bezpečnosti v ČR*, viz [1].
- *Eliminace vlastních problémů s bezpečností a ochranou dat* – po ukončení projektu JCE Čichnova budou minimalizovány možné případné budoucí sankce škole za (byť neúmyslné) porušení zákonných povinností při ochraně informací např. za porušení povinností správce z pohledu ochrany osobních údajů – GDPR.
- *Vládní CERT (Computer Emergency and Responce Team, www.govcert.cz)* podpoří zřizování *Juniorních CERT týmů*.

Co nabízí JCE Čichnova

Konkrétní sdílené aktivity dle příkladu JCE Čichnova zahrnují:

- Zpracování *metodiky výuky IB/KB pro SŠ*;
- *Výuka užití standardních bezpečnostních technologií*, umístěných v laboratoři školy – jak v rámci školy, tak i pro ostatní školy v rámci kraje

vzdáleně – všechny školy tak jako tak z mnoha důvodů nelze dokonale a udržitelně vybavit kvalitní technikou;

- Udržení souladu s praxí díky používání soudobých nezastaralých technologií – v rámci jednoho JCE v kraji jde lépe než rozptýleně na mnoha školách;
- Vytvoření *fiktivní organizace a implementace* IB a KB v této organizaci v souladu se zákonnými požadavky a standardy vč. například ochrany osobních údajů a dat obecně.
- *Kyberbezpečnostní cvičení, tabletop cvičení a soutěže.*
- *Forenzní analýza*, tzn. hloubkové zkoumání příčin, procesů a následků kyberincidentů a kyberútoků;
- Sdílení znalostí a zkušeností s ostatními SŠ a s *akademickou sférou*;
- *Edukace a evangelizace* IB/KB pro studenty a veřejnost;
- Vybudování *Junior SOC centra* – modelové výukové Bezpečnostní operační centrum (Security Operations Centre);
- Ustavení Junior CSIRT týmu napodobujícího práci skutečného Computer Security Incident Response Team.

Juniorní centra excelence jsou pokročilým konceptem, jak zrychlit zavádění dnes velice aktuální přípravy v kyberbezpečnosti. Podstatný je multiplikativní efekt směrem k ostatním školám, přičemž koncentrací prostředků na poměrně nákladné vybavení i vzdělanost učitelů do krajských Juniorních center lze náklady podstatně redukovat a využít sdružené a projektové financování z více zdrojů. Důležitým aspektem je i vazba na silné partnery v akademické a průmyslové sféře, což umožňuje průběžně doplňovat vzdělávání učitelů v Centru, koncipovat návazné projekty na modernizaci vybavení dle nových trendů, realizovat praxe studentů ve firmách a nabízet absolventům školy pokračování ve studiu na spolupracujících vysokých školách.

Reference

- [1] *Jiří Sedláček et al.*: Koncepce Juniorních center excelence pro kyberbezpečnost a informační bezpečnost, Network Security Monitoring Cluster, v13, 2020. Dostupné na: www.nsmcluster.com/doc/_JCE_Koncepce.pdf
- [2] *Jihomoravský kraj*: Střední škola na Čichnově v Brně bude mít Junior centrum excelence pro kybernetickou bezpečnost. www.kr-jihomoravsky.cz/Default.aspx?ID=347098&TypeID=2

- [3] *Ministerstvo pro místní rozvoj*: Junior centrum excellence pro kybernetickou bezpečnost a ICT při SŠ Čichnova Brno. irop.mmr.cz/cs/projekty/06-2-zkvalitneni-verejnych-sluzeb-a-podminek-zivot/junior-centrum-excellence-pro-kybernetickou-bezpe
- [4] Střední škola informatiky, poštovníctví a finančnictví Brno. www.cichnovabrno.cz/o-skole/projekty/aktualni-projekty/irop
- [5] Smíchovská střední průmyslová škola. www.sspss.cz/about/
- [6] Střední škola informatiky a služeb, Dvůr Králové nad Labem. ssis.cz/
- [7] *NCKB*: Bezpečnostní doporučení NÚKIB pro administrátory, v4.0, dostupné na: www.govcert.cz/cs/informacni-servis/doporuceni/2736-doporuceni-nukib-pro-administratory-verze-4-0/

ZPRÁVY

Celostátní kolo FO 2020

Ve školním roce 2019/2020 vstoupila Fyzikální olympiáda svým 61. ročníkem do sedmého desetiletí. Celostátní kolo kategorie A, které naštěstí proběhlo před opatřeními spojenými s epidemií koronaviru, hostil Středočeský kraj a především *Gymnázium Václava Beneše Třebízského* ve Slaném (www.gymnaziumslany.cz). Soutěž proběhla pod záštitou hejtmanky Středočeského kraje *Ing. Jaroslavy Pokorné Jermanové* a starosty královského města Slaný *Mgr. Martina Hrabánka*. Na základě výsledků krajských kol soutěže, jež proběhla 22. 1. 2020, přijelo změřit své síly celkem 40 soutěžících (z toho 2 dívky). Hostem slavnostního zahájení večer 25. 2. 2020 v Městském divadle ve Slaném byla i předsedkyně JČMF *doc. RNDr. Alena Šolcová, Ph.D.*, virtuálně na dálku

z Austrálie účastníky pozdravil bývalý student slánského gymnázia i účastník olympiád a dnes úspěšný hudebník Jan Pokorný „Pokáč“.

Ve středu 26. 2. dopoledne čekaly soutěžící v prostorách městského centra Grand čtyři teoretické úlohy, s nimiž se museli vypořádat během pěti hodin. Autorem úloh byl *RNDr. Jan Thomas* (První české gymnázium Karlovy Vary). První úloha s názvem *Čočka a stínítka* se zabývala zobrazením spojnou čočkou a plochou osvětleného kruhu na stínítku. Řešitelé za ni získali v průměru 5,6 bodu z deseti možných a podle názoru poroty nejoriginálnější řešení vypracoval *Jan Obořil* (G Brno-Bystrc). Druhá úloha s názvem *Supertěžká voda* kombinovala radioaktivní rozpad tritia a ohřev i vypařování těžké vody díky teplu uvolněnému při rozpadu. Při průměrném zisku 8,9 bodu porota ocenila zejména

postup *Martina Vavříka* (G Šumperk). Třetí, nejobtížnější úloha *Mössbauerův jev* obsahovala motivaci zpětného rázu při výstřelu z pušky i problematiku emise γ -fotonu jádrem idiria. Soutěžící dosáhli v průměru nejméně, 3,3 bodu, a nejvíce zaujalo řešení *Viktora Fukaly* (G J. Keplera Praha). Čtvrtá úloha s názvem *Pohyb kosočtverce*, která navazovala na studijní text [1], byla věnována výpočtu rychlosti bodů vázaných ve vrcholech kosočtverce. Soutěžící získali v průměru 6,4 bodu a porota ocenila jako nejzdařilejší přístup *Davida Klementa* (G Praha Nad Alejí). Závěrečnou redakci zadání i autorského řešení úloh provedl *RNDr. Jan Šlégr, Ph.D.* (Přírodovědecká fakulta UHK).



Řešení teoretických úloh v městském centru Grand

Ve čtvrtek 27. 2. dopoledne soutěžící ve dvou skupinách řešili praktickou úlohu, jejímž autory byli *RNDr. Filip Studnička, Ph.D.* a *RNDr. Jan Šlégr, Ph.D.* (Přírodovědecká fakulta UHK) a ve které zkoumali závislosti odpudivé síly mezi dvěma magnety na jejich vzdálenosti. Soutěžící získali v průměru 13,7 bodu a nejlepším experimen-

tátorem porota vyhlásila *Hynka Jakeše* (Slovanské G Olomouc).



Řešení experimentální úlohy v budově Gymnázia Václava Beneše Třebízského

K celostátnímu kolu tradičně patří i bohatý navazující program, jenž zahrnoval přednášky v aule gymnázia i experimenty. Ve středu 26. 2. odpoledne učitel gymnázia Mgr. Pavel Rubík představil fluorescenční mikroskop, předseda vzdělávacího spolku Kosmos-news Milan Halousek zaujal posluchače přednáškou na téma „Projekt Apollo – opravdu jsme byli na Měsíci?“ Do čtvrtěčního programu 27. 2. pak přispěla předsedkyně Státního ústavu pro jadernou bezpečnost *Ing. Dana Drábová, Ph.D.* přednáškou o aktuálních problémech vývoje jaderné energetiky. Někteří účastníci fyzikální olympiády si rovněž v rámci tematické exkurze prohlédli významné architektonické památky města a po celou dobu mohli účastníci sledovat mnoho zajímavých pokusů gymnaziálního talentcentra Laboriky.cz, jež si během své desetileté existence získalo popularitu přípravou experimentů pro televizní pořad *Zázraky přírody*.

Poslední den, v pátek 28. 2. dopoledne, proběhlo v kapli Zasnoubení Panny Marie bývalé piaristické koleje (dnes vlastivědného muzea) slavnostní vyhlášení výsledků, kterého se zúčastnila i předsedkyně JČMF doc. RNDr. Alena Šolcová, Ph.D., starosta města Mgr. Martin Hrabánek a Martin Draxler, radní Středočeského kraje pro oblast regionálního rozvoje, cestovního ruchu a sportu. Uvedme základní statistické údaje: osm účastníků se stalo vítězi, dvacet sedm úspěšnými řešiteli a čtyři účastníky soutěže. Celkové průměrné hodnocení všech úloh bylo 38,0 bodu, tj. 63,3 % z možných 60. Pomyslnou zlatou medaili vybojoval Hynek Jakeš (Slovanské G Olomouc), stříbrnou Viktor Fukala (G J. Keplera Praha) a bronzovou David Klement (G Praha Nad Alejí). Problémům spojeným s epidemiologickou situací (šíření koronaviru) se bohužel nevyhnula ani FO, o termínu Mezinárodní fyzikální olympiády, která měla proběhnout 18.–26. 7. 2020 v litevském Vilniusu (viz www.ipho2020.lt) se rozhodne podle situace, MŠMT ale s českou účastí nepočítá.

Uspořádání celostátního kola je nemyslitelné bez podpory a pomoci řady organizací a společností. Věcnými i finančními dary akci podpořili: *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Středočeský kraj, město Slaný, skupina ČEZ a Jednota Českých matematiků a fyziků*. Zejména je však třeba poděkovat obětavým organizátorům z pořádatelského gymnázia – předsedovi krajské komise FO, zástupci ředitele a členovi slánské městské rady RNDr. Vla-

dimíru Kulichovi a řediteli gymnázia RNDr. Milanu Dundrovi, CSc., kteří se rozhodující měrou zasloužili o hladký průběh soutěže a příjemnou pracovní i slavnostní atmosféru.



Vítěz celostátního kola Hynek Jakeš (Slovanské G Olomouc) při řešení experimentální úlohy

Pro příští školní rok v 62. ročníku fyzikální olympiády přebírá organizátorskou štafetu Plzeňský kraj, kam účastníky pozvala předsedkyně krajské komise FO PhDr. Zdeňka Kielbusová. Zájemci a příznivci soutěže najdou všechny potřebné aktuální informace včetně zadání i řešení úloh na čtenářům MFI jistě dobře známých internetových stránkách ÚKFO www.fyzikalniolympiada.cz.

Reference

- [1] Vybíral, B., Šedivý, P.: Mechanika rovinného pohybu tuhého tělesa. Knihovnička FO č. 65. MAFY, Hradec Králové, 2008. Dostupné z: fyzikalniolympiada.cz/texty/r_pohyb.pdf.

Lukáš Richterek