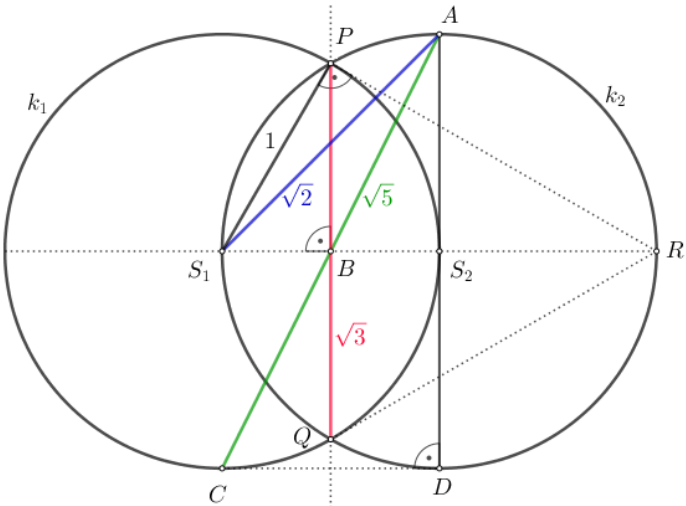
Užitečná dvojice kružnic

LENKA JUKLOVÁ – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V tomto příspěvku se budeme zabývat konstrukcemi úseček, jejichž délky jsou iracionální čísla tvaru $\sqrt{n}$, kde n je přirozené číslo, které není druhou mocninou jiného přirozeného čísla. Cílem článku je poukázat na jednu užitečnou konfiguraci dvojice jednotkových kružnic, v níž lze snadno objevit úsečky, jejichž délky jsou rovny některým výše uvedeným iracionálním číslům, a to buď přímo, nebo doplněním vhodného bodu(ů) v této konfiguraci. Uvedený postup je méně obvyklý, avšak zejména díky snadné konstrukci a důkazům založených na Pythagorově větě a Eukleidových větách mohou jej využít učitelé přímo v hodinách planimetrie věnovaných výše zmíněnému učivu.

Uvažujme dvě jednotkové kružnice k_1, k_2 po řadě se středy S_1, S_2, z nichž každá prochází středem druhé z nich. Označme P, Q průsečíky kružnic k_1, k_2 a B průsečík přímek PQ a S_1S_2, viz obr. 1. Je zřejmé, že kružnice k_1, k_2 jsou souměrně sdružené podle přímky PQ (jejich chordály).



Obr. 1

Označme dále A, D průsečíky tečny ke kružnici k_1 sestrojené v bodě S_2 s kružnicí k_2, viz obr. 1, R druhý z průsečíků přímky S_1S_2 s kružnicí k_2 a C bod kružnice k_1 středově souměrný s bodem A ve středové souměrnosti se středem B.

Nejprve ukážeme, že platí

(i) $|S_1A| = \sqrt{2}$,

(ii) $|PQ| = \sqrt{3}$,

(iii) $|AC| = \sqrt{5}$.

Jednotlivá tvrzení lze snadno dokázat pouze s využitím Pythagorovy věty a vět Eukleidových.

ad (i) Tvrzení plyne přímo z Pythagorovy věty. Trojúhelník S_1S_2A je pravoúhlý rovnoramenný s pravým úhlem při vrcholu S_2 a odvěsnami délky 1. Zřejmě tedy platí $|S_1A| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ (obr. 1).

ad (ii) Z Thaletovy věty plyne, že trojúhelník S_1RP je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu P, úsečka PB je jeho výška z vrcholu P (obr. 1). Ze vzájemné polohy obou kružnic plyne

$$|S_1B| = |BS_2| = \frac{1}{2}, \quad |S_1R| = 2 \quad \text{a} \quad |BR| = \frac{3}{2}.$$

Podle Eukleidovy věty o výšce v pravoúhlém trojúhelníku S_1RP tak platí

$$|PB| = \sqrt{|S_1B| \cdot |BR|} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vzhledem k tomu, že B je střed úsečky PQ, platí $|PQ| = 2|PB| = \sqrt{3}$.

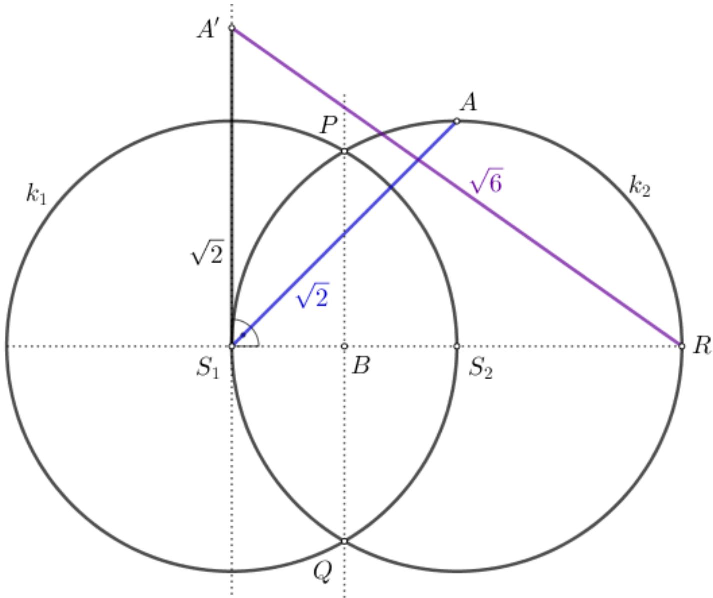
ad (iii) K důkazu tvrzení využijeme opět Pythagorovu větu. Bod $C \in k_1$ je obrazem bodu A ve středové souměrnosti se středem B a současně je souměrně sdružený s bodem D vzhledem k ose PQ. Tečna ke kružnici k_2 sestrojená v bodě D je tedy totožná s tečnou ke kružnici k_1 sestrojenou v jejím bodě C a je kolmá k PQ, a tedy i k AD. Trojúhelník ACD je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu D, v němž $|CD| = 1$, $|AD| = 2$. Platí tedy (obr. 1)

$$|AC| = \sqrt{|AD|^2 + |CD|^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Úsečky délek $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ je tedy v uvedené konfiguraci kružnic možno objevit přímo. Doplněním dalšího vhodného bodu můžeme získat postupně úsečky délek $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, atd.

Uvažujme otočení $\mathcal{R}(S_1; +45^\circ)$, v němž se bod A zobrazí na bod A' (obr. 2). Trojúhelník $A'S_1R$ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu S_1. Pro délku jeho přepony $A'R$ platí

$$|A'R| = \sqrt{|A'S_1|^2 + |S_1R|^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{6}.$$



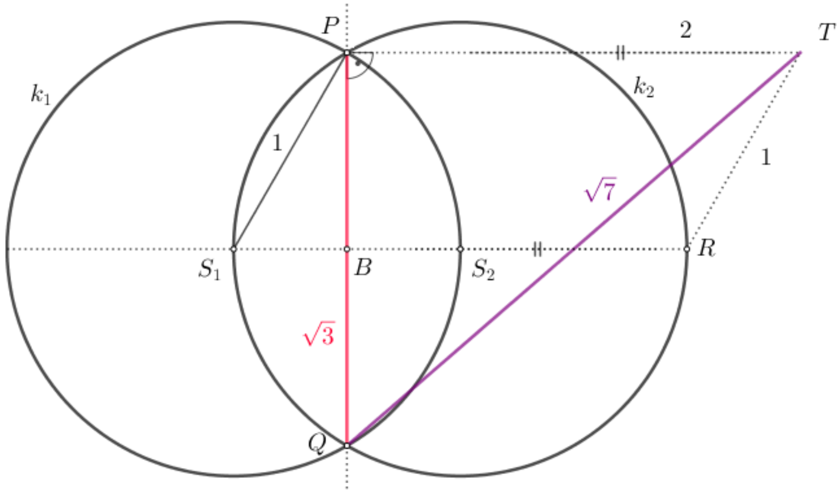
Obr. 2

Následující konstrukce úsečky délky $\sqrt{7}$, která vychází rovněž z prezentované konfigurace, využívá doplnění trojice bodů P, S_1, R na rovnoběžník PS_1RT (obr. 3), přičemž pro délky jeho stran platí

$$|PS_1| = |TR| = 1 \quad \text{a} \quad |S_1R| = |PT| = 2.$$

Vzhledem k tomu, že $PS_1 \parallel TR$ a $PQ \perp S_1R$, je také $PQ \perp PT$. Trojúhelník PQT je tedy pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu P a podle Pythagorovy věty platí

$$|PT| = \sqrt{|PQ|^2 + |PT|^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{7}.$$



Obr. 3

Otočení lze využít také při konstrukci úsečky délky $\sqrt{8}$. Uvažujme otočení $\mathcal{R}(R; -90°)$, obraz bodu S_1 v tomto otočení označme S_1' (obr. 4). Trojúhelník S_1RS_1' je pravoúhlý rovnoramenný s pravým úhlem při vrcholu R a shodnými odvěsnami $|RS_1| = |RS_1'| = 2$. Platí tak

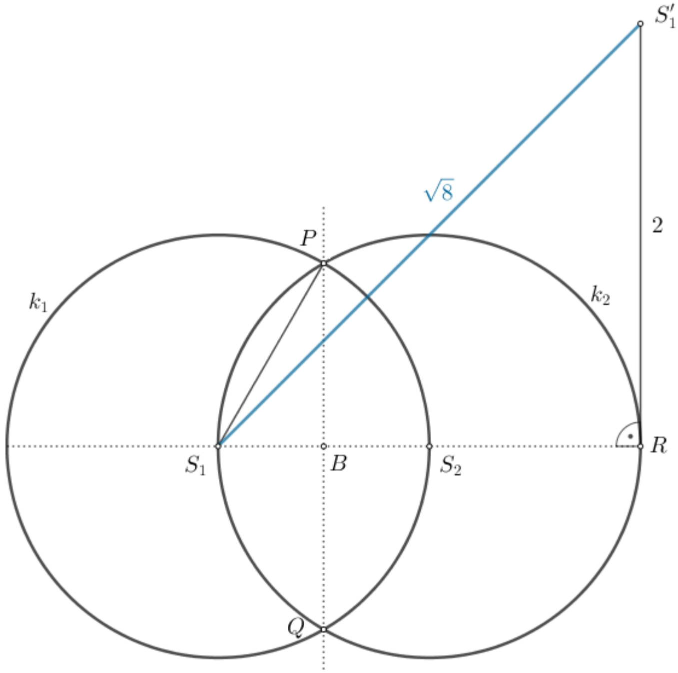
$$|S_1S_1'| = \sqrt{|S_1R|^2 + |RS_1'|^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Konstrukci (některých v pořadí dalších) úseček iracionálních délek, tj. úseček délek $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$ atd., ponecháme zájemcům o tuto problematiku k samostatnému procvičení (se snadnými návody). Platí např.

$$\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1^2}; \qquad \sqrt{11} = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}; \qquad \sqrt{12} = 2\sqrt{3};$$

$$\sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 2^2}; \qquad \sqrt{14} = \sqrt{3^2 + \left(\sqrt{5}\right)^2}.$$

Snadno také vidíme, že uvedenou konfiguraci lze využít ke konstrukci úseček délek $r \cdot \sqrt{n}$, kde r je dané kladné racionální číslo a n přirozené číslo, které není druhou mocninou jiného přirozeného čísla, např. $\frac{3}{4}\sqrt{13}$ apod.



Obr. 4

Popsanou konfiguraci dvou shodných jednotkových kružnic lze využít naznačeným způsobem k rychlé konstrukci úseček délek $\sqrt{n}$, kde n není druhou mocninou jiného přirozeného čísla. Vycházíme z jediného generického obrázku. Tyto konstrukce jsou efektivní především pro n malá přirozená ($n \leq 20$). Jde přitom o tzv. *stavebnicovou* metodu, při níž vycházíme z jedné a téže konfigurace. Je však nutné konstatovat, že popsanou metodou se hůře konstruují úsečky délek $\sqrt{n}$ pro velká n. Při konstrukci takových úseček je zapotřebí sestrojit poměrně velké množství úseček s racionálními či iracionálními délkami $\sqrt{d}$, kde d je přirozené číslo menší než n.

Literatura

[1] *Chodorová, M. Juklová, L.*: Pravidelný sedmnáctiúhelník. Matematika–Fyzika–Informatika, roč. 29 (2020), č. 3, s. 161–170.

[2] *Švrček, J.*: Konstrukce pravidelného pětiúhelníku. Matematika a fyzika ve škole, roč. 16 (1986), č. 8, s. 524–527.