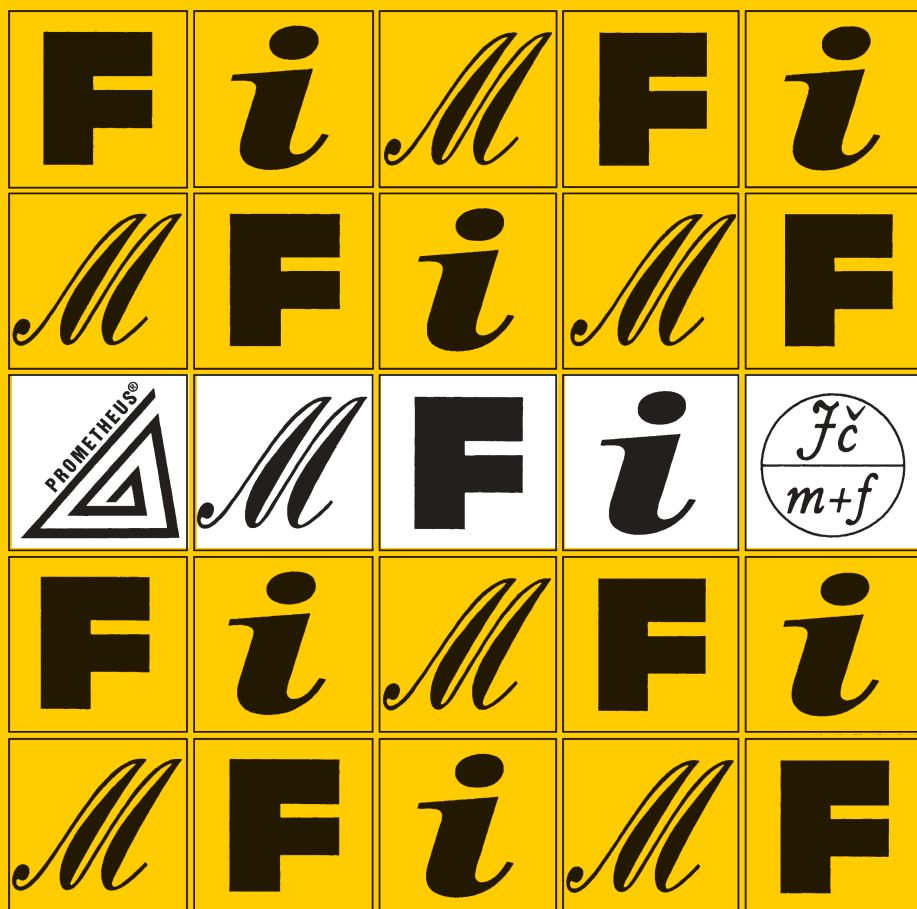


MATEMATIKA 4 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXX (2021), číslo 4

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku
Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek
Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška, Michaela Křížová, Miluše Lachmannová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil (předseda redakční rady), Dana Mandíková, Oldřich Odvárko, Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel Töpfer

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>J. Polák</i> : Důkazy v planimetrii užitím komplexních čísel	241
<i>J. Fiala, M. Hrušešová</i> : Geometrický průměr ve finanční matematice na střední škole	252
<i>J. Zhouf</i> : Tři speciální body ležící na jedné přímce II	261
Zajímavé matematické úlohy	272

FYZIKA

<i>O. Lepil</i> : Odpor cívky zanedbejte II	279
<i>E. Hejnová</i> : Úlohy rozvíjející dovednost identifikace a kontroly proměnných	287

INFORMATIKA

<i>P. Osička</i> : Několik informatických hádanek	299
<i>M. Zíka</i> : Katalogizace knih pro knihovní systém pomocí otevřených dat	306

ZPRÁVY

<i>P. Töpfer</i> : Mezinárodní olympiády v informatice v roce 2021	316
--	-----

Obsah ročníku XXX (2021)

Důkazy v planimetrii užitím komplexních čísel

JOSEF POLÁK

Fakulta aplikovaných věd ZČU v Plzni

1. Komplexní čísla a jejich geometrický význam

Tímto článkem bezprostředně navazujeme na článek [1] o užití geometrických vektorů v důkazech planimetrických vět. V obdobném pojetí ukážeme, jak můžeme planimetrické věty dokazovat též *metodou užití komplexních čísel*.

Ve středoškolských učebnicích matematiky se s ní zpravidla setkáváme nikoliv v planimetrii, ale pouze jen jako se zajímavou aplikací teorie komplexních čísel pro řešení planimetrických úloh (viz např. [2, s. 198–199] a [3]).

Výhody metody použití komplexních čísel při řešení planimetrických úloh jsou obdobné jako u metody užití geometrických vektorů, přičemž často obě metody spolu úzce souvisejí. Připomeňme též význam použití komplexních čísel v planimetrii z hlediska důkladného porozumění matematice, který zejména vyzdvihuje *Vlastimil Dlab* (viz odkaz v [1] na jeho článek).

Cílem tohoto článku je především *prezentace důkazů* významných planimetrických vět užitím komplexních čísel. Protože navazujeme na důkazy obdobných vět pomocí geometrických vektorů v článku [1], jejich formulace v tomto článku jsou stručnější a nepovažujeme za nutné u nich uvádět obdobné obrázky. Jednotné a co nejjednodušší pojetí důkazů je založeno na *algebře komplexních čísel*, jejíž použité poznatky a označení stručně zrekapitulujeme.

Komplexní čísla (prvky oboru komplexních čísel \mathbb{C}) budeme značit z , z_1, z_2, z_A, z_B apod. Připomeňme (viz [2]–[6]), že *komplexními čísly* (prvky oboru \mathbb{C}) se rozumí uspořádané dvojice reálných čísel $z = [x, y]$, $x, y \in \mathbb{R}$ a z praktického hlediska je užitečné jejich vyjádření v *algebraickém tvaru*, v němž $i = [0, 1] \in \mathbb{C}$ je tzv. *imaginární jednotka*:

$$z = x + yi, \quad \text{kde } x, y \in \mathbb{R} \text{ a } i^2 = [0, 1]^2 = -1. \quad (1)$$

Číslo $x \in \mathbb{R}$ se nazývá *reálná část komplexního čísla* z , značí se $\operatorname{Re} z = x$ a číslo $y \in \mathbb{R}$ se nazývá *imaginární část komplexního čísla* z , značí se $\operatorname{Im} z = y$. Přitom pak číslo $\bar{z} = x - yi$ se nazývá *komplexně sdružené číslo* ke komplexnímu číslu $z = x + yi$.

V oboru komplexních čísel \mathbb{C} se definují základní operace sčítání a násobení komplexních čísel, přičemž pro *součet komplexních čísel* a *součin komplexních čísel* platí ($z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$):

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (2)$$

$$z_1 z_2 = z_2 z_1, \quad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3), \quad (3)$$

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3, \quad (4)$$

tj. operace sčítání a násobení jsou *komutativní* a *asociativní*, operace násobení vzhledem ke sčítání je *distributivní*.

Operace *odčítání* a *dělení* komplexních čísel jsou definovány jako inverzní operace ke sčítání a násobení:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2), \quad \text{pro } z_2 \neq 0: \quad \frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2}. \quad (5)$$

Pro operace s *komplexně sdruženými čísly* platí (pro každé $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$):

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad z \bar{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2, \quad (6)$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \quad (7)$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (\text{pro } z_2 \neq 0). \quad (8)$$

Absolutní hodnota komplexního čísla z je definována vztahem

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{z \bar{z}} \Rightarrow |z|^2 = z \bar{z}. \quad (9)$$

Odtud mj. plyne, že ve vzorci (5) pro podíl komplexních čísel z_1, z_2 je $z_2 \overline{z_2} = |z_2|^2$. Ze vztahu (9) dále plyne, že pro absolutní hodnoty součtu a rozdílu komplexních čísel z_1, z_2 platí rovnosti

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2) \overline{(z_1 + z_2)} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}), \quad (10)$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2) \overline{(z_1 - z_2)} = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}). \quad (11)$$

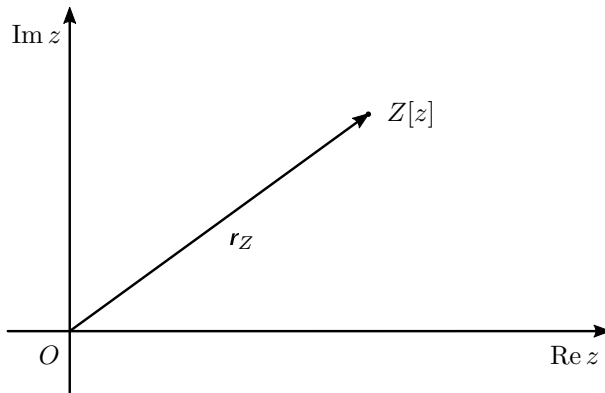
Z nich po sečtení vyplývá rovnost

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \quad (12)$$

Pro absolutní hodnoty součinu a podílu komplexních čísel z_1, z_2 platí rovnosti

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{pro } z_2 \neq 0. \quad (13)$$

Zejména dále využijeme *geometrickou interpretaci komplexních čísel a operací s nimi v Gaussově rovině*, ve které je zavedena kartézská soustava souřadnic s počátkem $O[0, 0]$ a osami $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$. Každému komplexnímu číslu $z = x + yi \in \mathbb{C}$ je přiřazen vzájemně jednoznačně bod $Z[x, y]$ Gaussovy roviny \mathbb{G} a říkáme, že číslo z je *komplexní souřadnicí* bodu $Z \in \mathbb{G}$ (obr. 1). Bod Z se nazývá *obraz čísla z v \mathbb{G}* a přiřazuje se mu též (vzájemně jednoznačně) *průvodič (radiusvektor)* bodu Z označovaný $r_Z = \mathbf{OZ}$, tj. *vázaný vektor* reprezentovaný orientovanou úsečkou, jejíž počáteční bod O je počátek Gaussovy roviny \mathbb{G} a jejíž koncový bod je bod Z .



Obr. 1

Geometrické zobrazení komplexních čísel se speciálně uplatňuje při geometrické konstrukci součtu a rozdílu komplexních čísel pomocí *vektorového rovnoběžníku*, resp. *vektorového trojúhelníku*. Názornou geometrickou interpretaci mají též absolutní hodnoty komplexního čísla z a rozdílu dvou různých komplexních čísel z_1, z_2 : $|z| = |r_z| = |\mathbf{OZ}| = |\mathbf{OZ}|$ představuje vzdálenost obrazu komplexního čísla z od počátku O a $|z_1 - z_2| = |\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2|$ vzdálenost obrazů komplexních čísel z_1, z_2 .

V úzké návaznosti na geometrická zobrazení komplexních čísel se zavádí jejich tzv. *goniometrický tvar komplexního čísla* $z \neq 0$, který je definován vzorcem

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (14)$$

kde $|z|$ je absolutní hodnota komplexního čísla z a φ je velikost orientovaného úhlu \widehat{XOZ} sevřeného kladnou poloosou OX osy $x = \operatorname{Re} z$ a polopřímku OZ nazývaná *argument komplexního čísla* z . Jeho hlavní (základní) hodnoty jsou v intervalu $0 \leq \varphi < 2\pi$ (resp. $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$) a značíme je $\arg z = \varphi$. Ve vzorci (14) $\cos \varphi + i \sin \varphi$ je *komplexní jednotka* ($|\cos \varphi + i \sin \varphi| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$).

Pro součin a podíl nenulových komplexních čísel v goniometrickém tvaru $z_1 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ vyplývá ze vzorce (14) a ze součtových vzorců pro funkce sinus a kosinus, že platí

$$z_1 z_2 = |z_1 z_2| [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \quad (15)$$

přičemž

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad (16)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \quad (17)$$

přičemž

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2. \quad (18)$$

V aplikacích, mj. v geometrii je často výhodně používán alternativní *exponenciální tvar komplexního čísla* $z \neq 0$, v němž základem je *Eulerovo číslo* e (tj. iracionální číslo $e = 2,71828\dots$):

$$z = |z|e^{i\varphi}, \quad \text{kde } e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad \varphi = \arg z. \quad (19)$$

Jeho použitím nabývají vzorce pro součin a podíl nenulových komplexních čísel z_1, z_2 (15), (17) jednoduchá vyjádření:

$$z_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}. \quad (20)$$

Užitím goniometrického, resp. exponenciálního, tvaru nenulových komplexních čísel

$$\begin{aligned} z_1 &= |z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), & \text{resp. } z_1 &= |z_1| e^{i \varphi_1}, \\ z_2 &= |z_2| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), & \text{resp. } z_2 &= |z_2| e^{i \varphi_2}, \end{aligned}$$

lze též dokázat užitečné rovnosti pro výrazy $z_1 \bar{z}_2$ a $\bar{z}_1 z_2$:

$$\begin{aligned} z_1 \bar{z}_2 &= |z_1| \cdot |z_2| [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)], \\ &\text{resp. } z_1 \bar{z}_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \\ \bar{z}_1 z_2 &= |z_1| \cdot |z_2| [\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i \sin(\varphi_2 - \varphi_1)], \\ &\text{resp. } \bar{z}_1 z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}. \end{aligned}$$

Odtud získáváme rovnosti pro výrazy $\text{Re}(z_1 \bar{z}_2)$ ve vzorcích (10), (11):

$$\text{Re}(z_1 \bar{z}_2) = \text{Re}(\bar{z}_1 z_2) = |z_1| \cdot |z_2| \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = |z_1| \cdot |z_2| \cos(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (21)$$

Též uijeme zajímavou rovnost, jež platí pro každá čtyři komplexní čísla z_1, z_2, z_3, z_4 :

$$(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3) = (z_1 - z_3)(z_2 - z_4). \quad (22)$$

2. Důkazy planimetrických vět užitím komplexních čísel

Příklad 1 Pomocí komplexních souřadnic vrcholů obecného trojúhelníku ABC v Gaussově rovině \mathbb{G} dokažte pro něj *kosinovou větu* vyjádřenou vzorcem:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (23)$$

a speciálně pro pravoúhlý trojúhelník ABC *Pythagorovu větu* vyjádřenou vzorcem $c^2 = a^2 + b^2$.

Důkaz. Nechť vrcholy A, B, C trojúhelníku ABC [1, obr. 2] jsou obrazy komplexních čísel z_A, z_B, z_C v Gaussově rovině (tj. tato komplexní čísla

jsou komplexními souřadnicemi bodů A, B, C). Užitím vzorce (11) vyjádříme

$$|z_A - z_B|^2 = |z_A|^2 + |z_B|^2 - 2 \operatorname{Re}(z_A \overline{z_B}),$$

přičemž podle vzorce (21) je

$$\operatorname{Re}(z_A \overline{z_B}) = |z_A| \cdot |z_B| \cos(\varphi_A - \varphi_B) = |z_A| \cdot |z_B| \cos(\varphi_B - \varphi_A),$$

kde $|z_A|, |z_B|$ jsou absolutní hodnoty komplexních čísel z_A, z_B , $\varphi_A = \arg z_B$, $\varphi_B = \arg z_B$ jsou základní (hlavní) hodnoty jejich argumentů. Zvolíme-li (bez újmy na obecnosti) $z_C = 0$ čili vrchol C v počátku O Gaussovy roviny, pak $\varphi_B - \varphi_A = \sphericalangle r_B, r_A = \gamma$ a po dosazení dostáváme $|z_A - z_B|^2 = |z_B|^2 + |z_A|^2 - 2 \cos \gamma$ čili $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cos \gamma$, tj. vzorec (23) kosinové věty pro c^2 . (Její obdobná vyjádření pro a^2, b^2 lze získat využitím cyklické záměny proměnných a, b, c .)

Speciálně pro pravoúhlý trojúhelník ABC , kde $\gamma = 90^\circ$, a tedy $\cos \gamma = 0$, plyne odtud vzorec: $c^2 = a^2 + b^2$, který vyjadřuje *Pythagorovu větu*. Obrácením postupu (implikací) důkazu vyplývá též platnost *obrácené Pythagorovy věty*.

Příklad 2 Užitím geometrické interpretace komplexních čísel dokažte *větu o úhlopříčkách rovnoběžníku*: Pro každý rovnoběžník $ABCD$ se stranami o délkách $|AB| = |CD| = a$, $|BC| = |AD| = b$ a úhlopříčkami o délkách $|AC| = u_1$, $|BD| = u_2$ platí

$$u_1^2 + u_2^2 = 2(a^2 + b^2). \quad (24)$$

Důkaz. Označíme komplexní souřadnice vrcholů rovnoběžníku $ABCD$ [1, obr. 4] po řadě z_A, z_B, z_C, z_D . Umístíme-li vrchol A do počátku O Gaussovy roviny, tj. položíme $z_A = 0$, je $u_1 = |z_B + z_D|$ a $u_2 = |z_B - z_D|$. S použitím vzorce (12) pak dostáváme: $u_1^2 + u_2^2 = |z_B + z_D|^2 + |z_B - z_D|^2 = 2(|z_B|^2 + |z_D|^2) = 2(a^2 + b^2)$.

Příklad 3 Dokažte užitím komplexních čísel *Thaletovu větu*: V libovolné kružnici k jsou všechny obvodové úhly AVB nad jejím průměrem AB pravé ($\sphericalangle AVB = 90^\circ$).

Důkaz. Zvolme libovolnou kružnici k o poloměru r a středem S [1, obr. 7], který umístíme do počátku O Gaussovy roviny, takže průsečíky A, B kružnice k s osou $\operatorname{Re} z$ mají komplexní souřadnice $z_A = -r$, $z_B = r$. Komplexní

souřadnice vrcholů V obvodových úhlů AVB označíme z_V ($|z_V| = r$). Pak pro vzdálenosti bodů A, B od vrcholů V platí

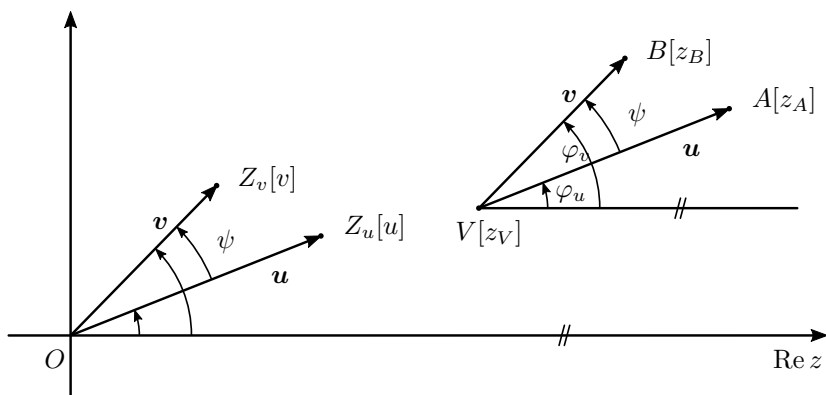
$$b = |VA| = |-r - z_V| = |z_V + r|, \quad a = |VB| = |r - z_V| = |z_V - r|,$$

takže

$$\begin{aligned} b^2 + a^2 &= |z_V + r|^2 + |z_V - r|^2 = \\ &= (z_V + r)(\overline{z_V} + r) + (z_V - r)(\overline{z_V} - r) = 2(z_V \overline{z_V} + r^2) = (2r)^2 = c^2. \end{aligned}$$

Z odvozené rovnosti $a^2 + b^2 = c^2$ podle obrácené Pythagorovy věty plyne, že trojúhelník AVB (pro každé V) je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu V .

Příklad 4 V geometrických aplikacích komplexních čísel kromě jejich geometrické interpretace jako bodů Gaussovy roviny, resp. příslušných rádiusvektorů (průvodičů), tj. vázaných vektorů s počátečním bodem v jejím počátku O , se také efektivně používá (viz např. [8]) geometrické znázornění pomocí *volných geometrických vektorů*. Spočívá v tom, že nenulovým komplexním číslům u , resp. v (obvykle ve tvaru součtu, popř. rozdílu dvojic komplexních čísel z_1, z_2) se přiřazují jako jejich obrazy volné vektory $\mathbf{u} = \mathbf{OZ}_u$, $\mathbf{v} = \mathbf{OZ}_v$, kde Z_u, Z_v jsou obrazy komplexních čísel u, v v Gaussově rovině. Kromě základního umístění $\mathbf{OZ}_u, \mathbf{OZ}_v$ vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} mohou mít též libovolné jiné zvolené umístění \mathbf{VA}, \mathbf{VB} (obr. 2). Přitom platí, že $|\mathbf{u}| = |\mathbf{OZ}_u| = u$, $|\mathbf{v}| = |\mathbf{OZ}_v| = v$.



Obr. 2

Nechť komplexní čísla u, v mají goniometrické tvary

$$u = |u|(\cos \varphi_u + i \sin \varphi_u), \quad v = |v|(\cos \varphi_v + i \sin \varphi_v),$$

kde $\varphi_u = \arg u$, $\varphi_v = \arg v$ a $\varphi_v > \varphi_u$. Dokažte, že pak kladně orientovaný úhel vektorů \mathbf{u}, \mathbf{v} má velikost

$$\psi = |\sphericalangle \mathbf{u}, \mathbf{v}| = |\widehat{Z_u O Z_v}| = \varphi_v - \varphi_u = \arg \frac{v}{u} = \arg(u\bar{v}) = \arg(\bar{u}v). \quad (25)$$

Důkaz. Vyjdeme z rovnosti kladně orientovaných úhlů v obr. 2: $\varphi_u + \psi = \varphi_v \Rightarrow \psi = \varphi_v - \varphi_u$ a dále použitím goniometrického vyjádření komplexních čísel u, v (popř. jejich exponenciálního vyjádření) dostáváme, viz rovnosti (17) a (21):

$$\psi = \varphi_v - \varphi_u = \arg v - \arg u = \arg \frac{v}{u} = \arg(u\bar{v}) = \arg(\bar{u}v),$$

tj. platí rovnosti (25), neboť $\operatorname{Re}(u\bar{v}) = \operatorname{Re}(\bar{u}v) = |u| \cdot |v| \cos(\varphi_v - \varphi_u) = |u| \cdot |v| \cos \psi$. Přitom zároveň pro příslušné volné vektory \mathbf{u}, \mathbf{v} je jejich skalární součin $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |u| |v| \cos |\sphericalangle \mathbf{u}, \mathbf{v}| = |u| |v| \cos \psi$. Odtud speciálně plyne *kritérium ortogonality (kolmosti) vektorů \mathbf{u}, \mathbf{v}* :

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v} \Leftrightarrow |\sphericalangle \mathbf{u}, \mathbf{v}| = 90^\circ \Leftrightarrow \cos |\sphericalangle \mathbf{u}, \mathbf{v}| = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(u\bar{v}) = 0. \quad (26)$$

Příklad 5 Užitím kritéria (26) provedeme alternativní důkaz Thaletovy věty z příkladu 3 bez použití obrácené Pythagorovy věty.

Důkaz. Volné geometrické vektory $\mathbf{p} = \mathbf{VA}$, $\mathbf{q} = \mathbf{VB}$ (viz [1, obr. 7]) jsou přiřazeny komplexním číslům $p = z_A - z_V$, $q = z_B - z_V$, přičemž $z_A = -r$, $z_B = r$ a $|z_V| = r$. Užitím kritéria (26) dokážeme, že $\mathbf{p} \perp \mathbf{q}$ takto: Vyjdeme z výpočtu součinu

$$\begin{aligned} p\bar{q} &= (z_A - z_V)(\overline{z_B - z_V}) = -(r + z_V)(r - \bar{z}_V) = \\ &= -r^2 + z_V \bar{z}_V + r(\bar{z}_V - z_V) = -r^2 + |z_V|^2 + r(\bar{z}_V - z_V) = r(\bar{z}_V - z_V) \end{aligned}$$

čili $\operatorname{Re}(p\bar{q}) = \operatorname{Re} r(\bar{z}_V - z_V) = 0$, a tedy podle (26) je $\mathbf{p} \perp \mathbf{q}$, tj. $|\sphericalangle AVB| = 90^\circ$ pro všechny vrcholy V .

Příklad 6 Dokažte, že pro velikost úhlu volných geometrických vektorů $\mathbf{u} = \mathbf{VA}$, $\mathbf{v} = \mathbf{VB}$ přiřazených komplexním číslům $u = z_A - z_V$, $v = z_B - z_V$ platí:

$$\psi = |\sphericalangle \mathbf{u}, \mathbf{v}| = |\widehat{AVB}| = \arg(z_B - z_V) - \arg(z_A - z_V) = \arg \frac{z_B - z_V}{z_A - z_V}. \quad (27)$$

Důkaz. Vztahy (27) vyplývají ze vztahů (25), viz obr. 2.

Příklad 7 Užitím komplexních čísel a přiřazených volných geometrických vektorů podle příkladu 6 dokažte *Ptolemaiovu větu* pro tětívové čtyřúhelníky: V každém tětívoovém čtyřúhelníku $ABCD$ se stranami o délkách $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$ a úhlopříčkami o délkách $|AC| = u_1$, $|BD| = u_2$ platí vztah

$$u_1 u_2 = ac + bd. \quad (28)$$

Důkaz. Vrcholům tětívového čtyřúhelníku $ABCD$ [1, obr. 6] přiřadíme v Gaussově rovině po řadě komplexní souřadnice z_A, z_B, z_C, z_D , pro něž podle (22) platí identická rovnost

$$(z_A - z_B)(z_C - z_D) + (z_A - z_D)(z_B - z_C) = (z_A - z_C)(z_B - z_D), \quad (29)$$

přičemž $|z_A - z_B| = a$, $|z_B - z_C| = b$, $|z_C - z_D| = c$, $|z_A - z_D| = d$, $|z_A - z_C| = u_1$, $|z_B - z_D| = u_2$.

Velikosti vnitřních úhlů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ čtyřúhelníku $ABCD$ můžeme reprezentovat jako velikosti kladně orientovaných úhlů $\widehat{BAD}, \widehat{CBA}, \widehat{DCB}, \widehat{ADC}$, jež lze vyjádřit na základě vztahů (27) ve tvaru

$$\begin{aligned} \alpha &= |\widehat{BAD}| = \arg(z_D - z_A) - \arg(z_B - z_A) = \arg \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A}, \\ \beta &= |\widehat{CBA}| = \arg(z_A - z_B) - \arg(z_C - z_B) = \arg \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}, \\ \gamma &= |\widehat{DCB}| = \arg(z_B - z_C) - \arg(z_D - z_C) = \arg \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C}, \\ \delta &= |\widehat{ADC}| = \arg(z_C - z_D) - \arg(z_A - z_D) = \arg \frac{z_C - z_D}{z_A - z_D}. \end{aligned}$$

Přitom pro velikosti protilehlých vnitřních úhlů tětívového čtyřúhelníku $ABCD$ platí rovnosti (viz [1]):

$$\alpha + \gamma = 180^\circ, \quad \beta + \delta = 180^\circ.$$

Po dosazení do první z těchto rovností (obdobně by bylo možné užít druhou rovnost) dostáváme:

$$\alpha + \gamma = \arg \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} + \arg \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} = \arg \frac{(z_D - z_A)(z_B - z_C)}{(z_B - z_A)(z_D - z_C)} = \arg(-1).$$

Odtud plyne, že

$$\arg(z_A - z_B)(z_C - z_D) = \arg(z_A - z_D)(z_B - z_C) = \varphi,$$

a tedy výrazy na levé straně rovnosti (29) lze vyjádřit v exponenciálním tvaru

$$\begin{aligned}(z_A - z_B)(z_C - z_D) &= |z_A - z_B| \cdot |z_C - z_D| e^{i\varphi}, \\ (z_A - z_D)(z_B - z_C) &= |z_A - z_D| \cdot |z_B - z_C| e^{i\varphi}.\end{aligned}$$

Sečtením těchto rovností získáváme levou stranu rovnosti (29) ve tvaru

$$\begin{aligned}(z_A - z_B)(z_C - z_D) + (z_A - z_D)(z_B - z_C) &= \\ &= [|z_A - z_B| \cdot |z_C - z_D| + |z_A - z_D| \cdot |z_B - z_C|] e^{i\varphi}\end{aligned}$$

a pravá strana rovnosti (29) má obdobný tvar

$$(z_A - z_C)(z_B - z_D) = |z_A - z_C| \cdot |z_B - z_D| e^{i\varphi}.$$

Po dosazení do rovnosti (29) a vydělení $e^{i\varphi}$ tak dostáváme, že platí rovnost

$$|z_A - z_B| \cdot |z_C - z_D| + |z_A - z_D| \cdot |z_B - z_C| = |z_A - z_C| \cdot |z_B - z_D|$$

čili $ac + bd = u_1 u_2$.

Příklad 8 Užitím komplexních souřadnic dokažte, že pro každý (konvexní nebo nekonvexní) čtyřúhelník platí *Varignonova věta*: Středy M, N, P, Q stran AB, BC, CD, DA libovolného čtyřúhelníku $ABCD$ jsou vrcholy rovnoběžníku $MNPQ$.

Důkaz. Pro libovolně zvolený čtyřúhelník $ABCD$ [1, obr. 10a, b] v Gaussově rovině přiřaďme jeho vrcholům A, B, C, D komplexní souřadnice z_A, z_B, z_C, z_D a středům M, N, P, Q jeho stran komplexní souřadnice z_M, z_N, z_P, z_Q . Protože pro ně platí rovnosti $z_M = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$, $z_N = \frac{1}{2}(z_B + z_C)$, $z_P = \frac{1}{2}(z_C + z_D)$, $z_Q = \frac{1}{2}(z_D + z_A)$, plyne odtud:

$$\begin{aligned}z_M - z_N &= \frac{1}{2}(z_A - z_C) \Rightarrow |z_M - z_N| = \frac{1}{2}|z_A - z_C| \text{ čili } |MN| = \frac{1}{2}|AC|, \\ z_Q - z_P &= \frac{1}{2}(z_A - z_C) \Rightarrow |z_Q - z_P| = \frac{1}{2}|z_A - z_C| \text{ čili } |QP| = \frac{1}{2}|AC|, \\ z_M - z_Q &= \frac{1}{2}(z_B - z_D) \Rightarrow |z_M - z_Q| = \frac{1}{2}|z_B - z_D| \text{ čili } |MQ| = \frac{1}{2}|BD|, \\ z_N - z_P &= \frac{1}{2}(z_B - z_D) \Rightarrow |z_N - z_P| = \frac{1}{2}|z_B - z_D| \text{ čili } |NP| = \frac{1}{2}|BD|,\end{aligned}$$

takže dvojice protějších stran čtyřúhelníku $MNPQ$ jsou shodné, tj. je to rovnoběžník.

3. Závěr

Geometrické aplikace komplexních čísel jsou nejen zajímavou ukázkou jejich použití, ale mají také zásadní význam z hlediska propojení algebry s planimetrií. V článku uvedené příklady důkazů jednoduchých významných planimetrických vět mohou být vhodně využity ve výuce středoškolské matematiky. Další a složitější příklady jsou obsaženy v publikacích [6] až [10]. Zejména sbírka geometrických úloh [9] zahrnuje i velmi náročné důkazy planimetrických vět užitím komplexních čísel, jež jsou podrobně zpracovány (v návaznosti na četné ruské i jiné zahraniční matematické literární zdroje). Obdobně jako použití geometrických vektorových metod v planimetrii (viz [1]) i užití komplexních čísel v ní může významně přispět k hlubšímu porozumění matematice ve výuce a v práci s matematicky talentovanými studenty.

Literatura

- [1] *Polák, J.*: Důkazy v planimetrii užitím vektorů. MFI, roč. 30 (2021), č. 3, s. 161–177.
- [2] *Polák, J.*: Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. I. část. Konkrétní didaktika matematiky. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2014.
- [3] *Calda, E.*: Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla. 3. vydání, Prometheus, Praha, 2000.
- [4] *Polák, J.*: Přehled středoškolské matematiky. Dotisk 10. vydání, Prometheus, Praha, 2019.
- [5] *Polák, J.*: Matematická analýza v komplexním oboru I. 2. vydání, ZČU FAV, Plzeň, 2002.
- [6] *Ráb, M.*: Komplexní čísla v elementární matematice. MU PřF, Brno, 1996.
- [7] *Larson, L. C.*: Problem-Solving Through Problems. Springer Verlag, New York - Berlin, 1983, (slovenský překlad: Metódy řešení matematických problémov. Alfa, Bratislava, 1990).
- [8] *Prasolov, V. V.*: Zadači po planimetrii. Čast' II. Nauka, Moskva, 1986.
- [9] *Modenov, P. S.*: Zadači po geometrii. Nauka, Moskva, 1979.
- [10] *Dlab, V., Bečvář, J.*: Od aritmetiky k abstraktní algebře. Vlastním nákladem, Praha, 2016.

Geometrický průměr ve finanční matematice na střední škole

JAN FIALA – MARIKA HRUBEŠOVÁ

Ekonomická fakulta – Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Když se řekne průměrná hodnota, leckomu se nejprve vybaví nejznámější a nejpoužívanější průměr, totiž aritmetický průměr. Již děti na základní škole si pomocí něj počítají průměrnou známku, která může vyjadřovat jejich hodnocení z daného vyučovacího předmětu. Na středních školách se studenti mohou seznámit i s dalšími možnými průměry, např. s průměrem geometrickým či harmonickým.¹⁾ Máloukdy se však studenti setkají s praktickým využitím těchto charakteristik při řešení různých úloh.

Článek se zaměřuje na geometrický průměr. Po zavedení geometrického průměru jsou představeny některé jeho vlastnosti, jejichž zařazení do výuky může přispět k rozvoji různých matematických znalostí a dovedností studentů (úlohy 1–4). Dále jsou řešeny úlohy 5 až 10 z ekonomie a finanční matematiky (např. výpočet průměrné procentní sazby změny hodnoty během určitého časového období), při nichž se právě geometrický průměr využívá.

Geometrický průměr a jeho geometrická interpretace

Geometrický průměr n nezáporných reálných čísel x_1, x_2, \dots, x_n (hodnot sledovaného kvantitativního znaku x), označený \bar{x}_G , je definován jako n -tá odmocnina součinu hodnot x_1, x_2, \dots, x_n ,²⁾ tj.

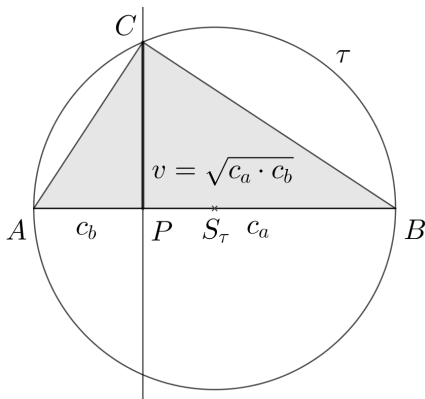
$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\frac{1}{n}}. \quad (1)$$

Speciálně pro $n = 2$ dostaneme $\bar{x}_G = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$.

¹⁾ Průměry jsou např. s mediánem či modem statistickými charakteristikami polohy neboli tzv. středními hodnotami souboru dat. Charakteristiky polohy různým způsobem vypovídají o střední hodnotě souboru dat.

²⁾ Často se užívá formulace, že x_i tvoří datovou řadu.

Geometrický průměr dvou kladných čísel c_a , c_b lze geometricky interpretovat jako velikost v výšky CP v pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem u vrcholu C (na obr. 1 představují kladná čísla c_a , c_b po řadě délky úseček BP , AP), kterému je opsána Thaletova kružnice τ sestrojená nad průměrem AB . Konstrukce úsečky představující geometrický průměr dvou úseček kladných délek užívá Eukleidovu větu o výšce, která v obr. 1 vyplývá z rovnosti poměrů odpovídajících si stran v podobných trojúhelnících APC a CPB (uu).



Obr. 1 Geometrická interpretace geometrického průměru dvou čísel c_a , c_b

Úloha 1

Pomocí pravítka a kružítka sestrojte úsečku délky $u = \sqrt{8}$ cm.

Řešení. Číslo 8 lze napsat v součinném tvaru $8 = 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$, tedy $u = \sqrt{8} = \sqrt{1 \cdot 8} = \sqrt{2 \cdot 4}$. Délka úsečky je tedy geometrickým průměrem např. čísel $c_a = 4$ a $c_b = 2$. Podle obr. 1 sestrojíme úsečku délky $c_a + c_b = 4 + 2$ a nad ní jako nad průměrem Thaletovu kružnici τ . Výška v v obr. 1 představuje hledanou úsečku u délky $\sqrt{8}$ cm.

Základní vlastnosti geometrického průměru

Geometrický průměr je na rozdíl od aritmetického průměru definován pouze pro nezáporná reálná čísla x_i . Pokud bude alespoň jeden z činitelů roven nule, bude geometrický průměr také roven nule. Na rozdíl od aritmetického průměru není hodnota geometrického průměru výraznou měrou ovlivněna extrémními hodnotami ze souboru dat.

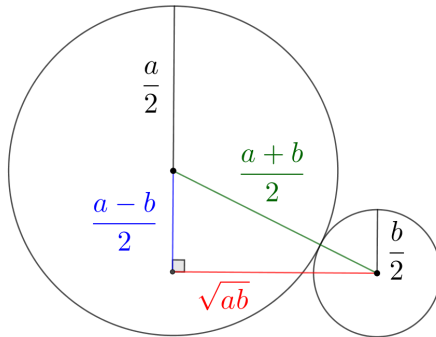
Vztah mezi geometrickým a aritmetickým průměrem

Je známo, že geometrický průměr \bar{x}_G nezáporných reálných hodnot x_1, x_2, \dots, x_n je vždy menší nebo roven jejich aritmetickému průměru \bar{x} , tj. platí

$$\bar{x}_G \leq \bar{x}. \quad (2)$$

Rovnost zde nastává, právě když $x_1 = x_2 = \dots = x_n$. Platnost vztahu (2) pro $n = 2$ lze snadno geometricky ověřit např. v obrázku 1, kde velikost poloměru $S_\tau C$ kružnice τ představující hodnotu aritmetického průměru čísel c_b, c_a bude vždy větší nebo nejvýše rovna velikosti výšky v .

Geometrický důkaz beze slov je uveden např. [3, str. 51], viz obr. 2.



Obr. 2 Geometrická interpretace nerovnosti geometrického a aritmetického průměru dvou čísel a, b

Úloha 2

Algebraickými úpravami dokažte nerovnost (2) pro dvě libovolná nezáporná reálná čísla x_1 a x_2 .

Řešení. Máme dokázat, že pro každá dvě nezáporná reálná čísla x_1, x_2 platí

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (3)$$

Po vynásobení obou stran nerovnice (3) dvěma, následném umocnění obou nezáporných stran nerovnice na druhou a úpravě nerovnice dostaneme

$$0 \leq (x_1 - x_2)^2. \quad (4)$$

Tato nerovnice (4) platí pro každá x_1 a x_2 , platí tedy tvrzení (3). Rovnost zde nastane, právě když $x_1 = x_2$.

Poznámka. Důkaz nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem pro n ($n > 2$) nezáporných hodnot x_1, \dots, x_n zde kvůli rozsahu důkazu neuvádíme.³⁾

Logaritmus geometrického průměru

Logaritmus při základu a ($a > 0$, $a \neq 1$) geometrického průměru kladných reálných čísel x_1, \dots, x_n je roven aritmetickému průměru jejich logaritmů, tj. platí

$$\log_a \bar{x}_G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log_a x_i. \quad (5)$$

Úloha 3

Užitím pravidel o logaritmech ověřte platnost rovnosti (5).

Řešení. Užitím základních pravidel pro počítání s logaritmy máme

$$\log_a \bar{x}_G = \log_a \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}},$$

tj.

$$\log_a \bar{x}_G = \frac{1}{n} \log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n).$$

Kromě toho dále platí

$$\log_a (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n) = \log_a x_1 + \log_a x_2 + \dots + \log_a x_n,$$

tedy

$$\log_a \bar{x}_G = \frac{1}{n} (\log_a x_1 + \log_a x_2 + \dots + \log_a x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log_a x_i,$$

což jsme chtěli ukázat.

Úloha 4

Použitím logaritmů (bez kalkulátoru) vypočítejte geometrický průměr čísel 16 a 1 024.

³⁾Důkaz lze nalézt např. v [2, str. 7–15] nebo [5, str. 17–18].

Řešení. Pokud nemůžeme k řešení využít kalkulátor, pomohou nám k vyřešení úlohy logaritmy. Stačí si uvědomit, že číslo $16 = 2^4$ a číslo $1024 = 2^{10}$. Obě čísla logaritmujeme o základu 2, takže $\log_2 16 = 4$ a $\log_2 1024 = 10$. Vypočteme aritmetický průměr exponentů 4 a 10 (ten je 7) a tímto výsledkem umocníme základ logaritmu 2. Geometrický průměr čísel 16 a 1024 je tedy $2^7 = 128$.

Některá užití geometrického průměru ve finanční matematice

Jak už jsme se zmínili v úvodu článku, geometrický průměr se používá k výpočtu některých ekonomických ukazatelů, obecně k výpočtu průměrných hodnot růstových charakteristik v čase. Geometrický průměr lze tedy aplikovat na koeficienty růstu dané veličiny, např. pro výpočet průměrného tempa růstu HDP, hrubé mzdy, devizového kurzu, zisku firmy apod.⁴⁾

Poměrně častá je otázka na průměrnou procentovou míru růstu (poklesu) (také tempo růstu) ceny zboží při jeho opakovaném zdražování nebo zlevňování, tedy např. o kolik procent průměrně vzrostly ceny každý měsíc během celého roku, jaký byl průměrný růst cen akcií, cen bytů, roční míry inflace apod.

Považujme cenu c nějakého zboží (služby) za veličinu, kde c_0 je hodnota na začátku a hodnoty c_1 až c_n na konci n sledovaných n stejně dlouhých období. Čísla r_1, r_2, \dots, r_n definujeme jako poměry dvou po sobě jdoucích hodnot sledované veličiny c , změřené vždy na konci daného období, tj.

$$r_1 = \frac{c_1}{c_0}, r_2 = \frac{c_2}{c_1}, \dots, r_n = \frac{c_n}{c_{n-1}}.$$

Čísla r_1, r_2, \dots, r_n nazýváme koeficienty růstu (poklesu) ceny c . Průměrnou hodnotu koeficientu r růstu ceny c nazýváme průměrné tempo růstu a označíme x . Uplatníme-li tedy stejnou hodnotu x pro všechny hodnoty zdražení, pak pro různé hodnoty ceny c_0 a c_n musí platit:

$$\begin{aligned} c_0 \cdot x^n &= c_n, \\ x &= \sqrt[n]{\frac{c_n}{c_0}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Průměrnou procentovou míru růstu (pro $x > 1$), resp. poklesu (pro $x < 1$) lze vyjádřit vztahem $(x - 1) \cdot 100$, resp. $(1 - x) \cdot 100$.

⁴⁾Viz např. [1, str. 35, 249, 356] aj.

Následující úloha 5 zdůvodňuje, proč je při výpočtu průměrné hodnoty koeficientu růstu nezbytné využít geometrický průměr a jak postupovat, jsou-li přímo zadané procentní hodnoty zdražení či zlevnění ceny zboží.

Úloha 5

Původní cena zboží byla 1 000 Kč. Zboží bylo dvakrát zdraženo: nejdříve na 1 250 Kč, pak na hodnotu 1 375 Kč. Jaká byla průměrná procentová míra zdražení, tzn. o kolik procent by muselo být zboží s původní cenou dvakrát po sobě zdraženo, aby cena zboží po druhém zdražení byla 1 375 Kč?

Řešení. Pomocí podílů nové ceny po každém zdražení a ceny přímo předcházející, tj. $r_1 = \frac{1250}{1000} = 1,25$ a $r_2 = \frac{1375}{1250} = 1,1$, snadno zjistíme, že po prvním zdražení vzrostla cena zboží o 25 % a po druhém zdražení o 10 % vůči předchozí ceně.

	c_0	c_1	c_2
Cena zboží [Kč]	1 000	1 250	1 375
Koeficient r_i růstu ceny c		$\frac{1250}{1000} = 1,25$	$\frac{1375}{1250} = 1,1$

Tabulka 1 Průběžné ceny zboží s odpovídajícími koeficienty růstu ceny

Z tabulky 1 vyplývá, že cena po druhém zdražení 1 375 Kč je rovna součinu počáteční ceny 1 000 Kč a koeficientů r_1, r_2 , tj. $1\,000 \cdot 1,25 \cdot 1,1 = 1\,375$ Kč.

Pomocí vztahu (6) lze vypočítat průměrné tempo růstu:

$$x = \sqrt{1,375} = \sqrt{\frac{1375}{1000}} = \sqrt{1,25 \cdot 1,1} \doteq 1,172\,6. \quad (7)$$

Průměrné tempo růstu, resp. průměrná hodnota koeficientu r je po zaokrouhlení 1,173, tedy průměrná procentová míra zdražení zboží činila přibližně 17,3 %. Stejný výsledek získáme také z úvahy, podle které hledáme takovou hodnotu x průměrného tempa růstu ceny, pro kterou by platila rovnice

$$1\,000 \cdot x \cdot x = 1\,375.$$

Poznámka. Pokud bychom průměrné tempo růstu (poklesu) určili za použití aritmetického průměru jako podíl $\frac{25+10}{2} \% = 17,5 \%$, byla by cena zboží po dvojnásobném zdražení 1 380,625 Kč, což je chybný výsledek.

Poznámka. Výraz $\sqrt{1,25 \cdot 1,1}$ ve výpočtu (7) lze obecně zapsat $x = \sqrt{r_1 \cdot r_2}$, což je vzorec (1) pro výpočet geometrického průměru pro $n = 2$.

Jsou-li při řešení úloh přímo zadané hodnoty p_1, p_2, \dots, p_n procentových měr zdražení zboží (v %), pak pro výpočet průměrné hodnoty růstu ceny zboží (nebo jiné veličiny) postupujeme pomocí vztahu

$$x = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}, \quad (8)$$

kde

$$x_i = 1 + \frac{p_i}{100}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (9)$$

V případě zlevňování se ve vzorci (9) změní součty na rozdílly.

Průměrná úroková sazba za sledované období se vypočítá jako geometrický průměr jednotlivých hodnot úrokových měr v daných úrokových obdobích a je vždy menší nebo maximálně rovna aritmetickému průměru jednotlivých úrokových měr. Aritmetický průměr má tendenci nadhodnocovat průměrné hodnoty: čím více se vstupy (zadané hodnoty) za daná období od sebe liší, tím více se hodnota aritmetického průměru odlišuje od hodnoty geometrického průměru. Např. pokud se výnosy zvýší za první období o 90 % a v dalším období se sníží o 20 %, je meziroční rozdíl 110 %, což je značně velká odchylka. Aritmetický průměr 35 % by zde byl velmi nadhodnocený a nepřesný. Důvodem je fakt, že čísla nejsou na sobě nezávislá. Naproti tomu geometrický průměr po zaokrouhlení 23,3 % je relevantní údaj. Pokud jsou však hodnoty vstupů sobě blíže, může být aritmetický průměr rychlou cestou k odhadu výnosů (hodnota ale i tak nebude přesná).

Úloha 6

Uvažujme akcii, jejíž cena v prvním roce rostla o 10 %, v druhém roce klesla o 20 % a v třetím roce opět klesla o 15 %. Jaký byl průměrný procentový růst ceny dané akcie?

Řešení. Průměrné tempo růstu cen akcie je geometrickým průměrem dat o růstu (poklesu) její ceny. Po dosazení do vzorců (8) a (9) bude

$$\bar{x}_G = \sqrt[3]{(1 + 0,1) \cdot (1 - 0,2) \cdot (1 - 0,15)} \doteq 0,908,$$

tedy průměrný pokles ceny akcie byl po zaokrouhlení 9,2 % ($1 - 0,908 = 0,092$, tj. 9,2 %). Číslo 9,2 % vyjadřuje hodnotu průměrného konstantního poklesu ceny akcie ve sledovaných letech, tedy platí $0,908^3 \doteq 1,1 \cdot 0,8 \cdot 0,85$.

Úloha 7

Tempo růstu cen bytů bylo v období čtyř po sobě jdoucích let postupně 2 %, 1 %, 3 % a 3 %. Vypočítejte průměrnou hodnotu koeficientu růstu cen bytů.

Řešení. Opět s využitím vzorců (8) a (9) dostaneme

$$\bar{x}_G = \sqrt[4]{1,02 \cdot 1,01 \cdot 1,03 \cdot 1,03} \doteq 1,0225,$$

tzn. průměrné tempo růstu je po zaokrouhlení 2,25 %. Číslo 2,25 % vyjadřuje přibližnou hodnotu průměrného konstantního růstu cen v každém ze čtyř sledovaných měsíců, a proto platí $1,0225^4 \doteq 1,02 \cdot 1,01 \cdot 1,03 \cdot 1,03$.

Úloha 8

Tabulka 2 udává hodnoty průměrné roční míry inflace⁵⁾ v České republice za roky 1999–2008. Vypočítejte průměrnou roční míru inflace za celé období. O kolik procent se zvýšila průměrná cenová hladina od roku 1998 do roku 2008?⁶⁾

1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
2,1 %	3,9 %	4,7 %	1,8 %	0,1 %	2,8 %	1,9 %	2,5 %	2,8 %	6,3 %

Tabulka 2 Míry inflace v letech 1999–2008

Řešení. S využitím vzorců (8) a (9) dostaneme

$$\bar{x}_G = \sqrt[10]{1,021 \cdot \dots \cdot 1,063} \doteq 1,02877.$$

Průměrná roční míra inflace byla po zaokrouhlení 2,88 %, pokud zaokrouhlujeme na setiny. Zvýšení průměrné cenové hladiny od roku 1998 do roku 2008 se vypočítá podle vzorce (6) pro $n = 10$, tedy

$$\frac{c_{10}}{c_0} = (x)^{10} \doteq 1,02877^{10} \doteq 1,328,$$

tedy došlo k cenovému zvýšení přibližně o 32,8 %.

⁵⁾Míra inflace je často definovaná jako procentní tempo růstu cenové hladiny za dané období, přičemž za cenovou hladinu je považována průměrná úroveň cen zboží a služeb.

⁶⁾Podle [4, str. 170].

Úloha 9

Úspory a vložené do banky se úročí v prvním roce úrokovou mírou ve výši 2 %, ve druhém roce 3,5 % a ve třetím roce úrokovou mírou 5 %. Jaká konstantní výše úrokové míry vkladu v každém roce by zajistila stejný zisk?⁷⁾

Řešení. S měnící se hodnotou úrokové míry bude výsledná hodnota vloženého kapitálu $1,02 \cdot 1,035 \cdot 1,05 \cdot a$. Při konstantní hodnotě p úrokové míry po dobu všech tří let to je $(1 + p)^3 \cdot a$.

Ze zadání předpokládáme rovnost výsledného kapitálu na konci tří let: $1,02 \cdot 1,035 \cdot 1,05 \cdot a = x^3 \cdot a$, přičemž $x = 1 + p$. Dostáváme

$$x = \sqrt[3]{1,108485} \doteq 1,0349.$$

Tedy $p \doteq 0,0349$, což odpovídá po zaokrouhlení úrokové míře 3,49 %.

Úloha 10

Banka nabízí spořicí produkt na 5 let se zhodnocením vložených finančních prostředků ve výši a o 12 %. Jaká je roční úroková míra nabízená bankou?

Řešení. Po pěti úrokovacích obdobích bude celková částka $1,12 \cdot a$. Označme x průměrné zhodnocení za jedno úrokovací období. Pak platí rovnost

$$\begin{aligned} 1,12 \cdot a &= x^5 \cdot a, \\ x &= \sqrt[5]{1,12} \doteq 1,02292. \end{aligned}$$

Roční úroková míra činí po zaokrouhlení 2,29 %.

Závěr

Učivo o geometrickém průměru je zajímavým a užitečným nástrojem pro rozvoj různých matematických znalostí a dovedností studentů středních škol, neboť poskytuje příležitosti pro řešení výpočtových úloh např. z oblasti finanční matematiky. Rozvoj finanční gramotnosti mladých lidí se stává jednou ze stěžejních oblastí matematického učiva na základní a střední škole s praktickým dopadem do běžného života studentů.

⁷⁾Neuvažujte žádné bankovní poplatky ani daň z příjmu.

Literatura

- [1] *Hindls, R., Arltová, M., Hronová, S., Malá, I., Marek, L., Pecáková, I., Řezanková, H.*: Statistika v ekonomii. Professional Publishing, Přeborn, 2018.
- [2] *Navrátil, J.*: AG–nerovnost v příkladech. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Brno, 2010. Dostupné na: <https://is.muni.cz/th/sf147/diplomka.pdf>
- [3] *Nelsen, R. B.*: Proofs without words: Exercises in visual thinking. Mathematical Association of America, Washington. 1993. Dostupné na: https://moodle.tau.ac.il/2018/pluginfile.php/403616/mod_resource/content/1/Nelsen%201993%20Proofs%20without%20Words.pdf
- [4] *Robová, J., Hála, M., Calda, E.*: Komplexní čísla, kombinatorika, pravděpodobnost a statistika. Matematika pro střední školy. Prometheus, Praha, 2013.
- [5] *Rolínek, M., Šalom, P.*: Zdolávání nerovností. Univerzita J. U. Purkyně, Přírodovědecká fakulta, 2012.

Tři speciální body ležící na jedné přímce II

JAROSLAV ZHOUF

Vysoká škola ekonomická, Praha

V minulém článku na uvedené téma jsme se soustředili na připomenutí známých skutečností, a to že na jedné přímce leží např. vrchol trojúhelníku, střed jeho protilehlé strany a jeho těžiště a také na jedné přímce leží vrchol trojúhelníku, pata kolmice vedené z tohoto vrcholu na protilehlou stranu a průsečík výšek. Těchto faktů pak bylo využito k uvedení dalších zajímavých trojic bodů ležících také na jedné přímce.

V článku nám šlo hlavně o důkazy těchto konfigurací. Byly zvoleny různorodé důkazy, které neměly společného jmenovatele. Ve stávajícím článku se seznámíme s jednou obecnou větou, pomocí níž se dá dokázat incidence

s jednou přímkou nejen dříve uvedených trojic bodů, ale i dalších významných trojic bodů. Touto větou je tzv. Menelaova věta. Jejím velkým pomocníkem nám bude také tzv. Cètova věta, ve které se duálně místo o trojici bodů na jedné přímce (tzv. kolinearitě bodů) mluví o trojici přímek procházejících jedním bodem (tzv. konkurenci přímek).

Věta Menelaova

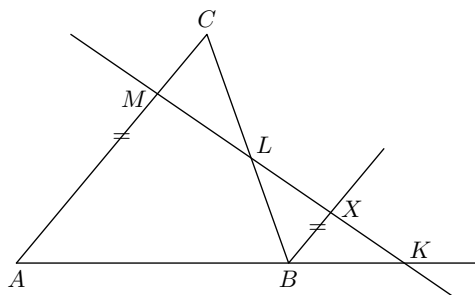
Na úvod si uveďme znění i důkaz první z avizovaných vět.

Věta 1 (Menelaova) V rovině je dán trojúhelník ABC , na přímkách AB , BC , CA leží po řadě body K , L , M , které jsou všechny různé od vrcholů trojúhelníku. Body K , L , M leží na jedné přímce, právě když zároveň platí:

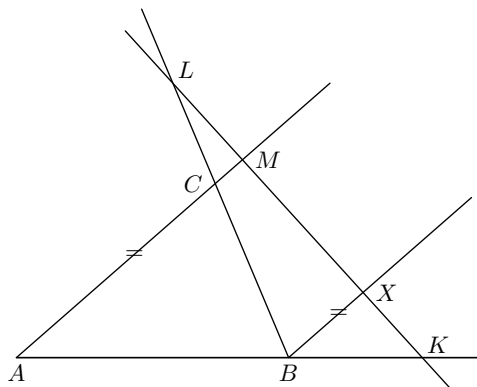
1. z bodů K , L , M leží na stranách trojúhelníku buď právě dva, nebo žádný,
2. $\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1$.

Důkaz. Dokážeme nejprve první implikaci této věty.

Předpokládáme, že body K , L , M leží na jedné přímce. V takovém případě je jasné, že platí tvrzení 1. Rozložení bodů K , L , M je např. takové, jak je znázorněno na obr. 1a, 1b. Označme ještě X průsečík přímky KL a rovnoběžky vedené bodem B s přímkou AC . Uvažujme jednak stejnoolehlost se středem K , kde např. platí $|AK| : |BK| = |AM| : |BX|$, a jednak stejnoolehlost se středem L , kde např. platí $|BL| : |CL| = |BX| : |CM|$. Vynásobením obou rovností dostaneme tvrzení 2.



Obr. 1a



Obr. 1b

Nyní se zaměříme na opačnou implikaci věty.

Podle tvrzení 1 předpokládejme například, že uvnitř strany AB neleží bod K , že leží například uvnitř polopřímky opačné k polopřímce BA . Kdyby byla přímka ML rovnoběžná s přímkou AB , byly by trojúhelníky ABC a MLC podobné, takže by platilo $|CM| : |AM| = |CL| : |BL|$. Z této rovnosti a z tvrzení 2 dostaneme $|AK| = |BK|$, což dává jedinou možnost, a sice že K je střed AB . To je ale spor, takže ML a AB jsou různoběžky. Jejich průsečík označme J .

Podle první dokázané implikace pro body J, L, M , které leží na jedné přímce, platí

$$\frac{|AJ|}{|BJ|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1.$$

Zároveň podle tvrzení 2 platí

$$\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1.$$

Z obou rovností vyplývá

$$\frac{|AJ|}{|BJ|} = \frac{|AK|}{|BK|}.$$

A z předpokladu o poloze bodu K vyplývá nerovnost

$$\frac{|AJ|}{|BJ|} = \frac{|AK|}{|BK|} > 1.$$

V případě $|AJ| \geq |AK|$ platí $|AJ| = |AK| + |KJ|$ a $|BJ| = |BK| + |KJ|$. Dosazením těchto dvou rovností do rovnosti $|AJ| : |BJ| = |AK| : |BK|$ dostaneme $|KJ| = 0$, tedy $K = J$. A jelikož body J, L, M leží na jedné přímce, leží i body K, L, M na jedné přímce, což jsme měli dokázat.

Stejný postup důkazu by byl i pro případ $|AJ| \leq |AK|$.

Věta Cèvova

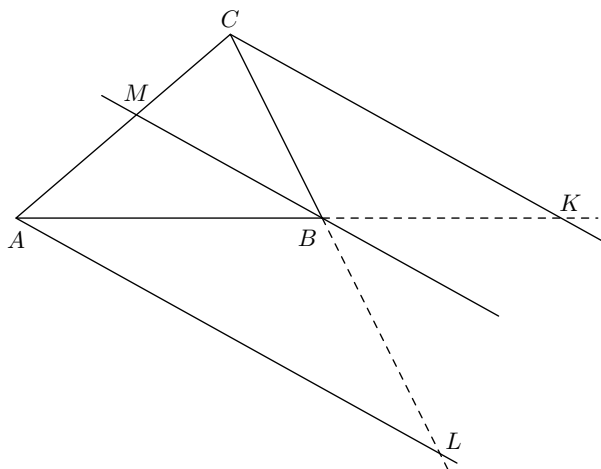
A nyní ještě uveďme znění i částečný důkaz druhé z avizovaných vět.

Věta 2 (Cèvova) V rovině je dán trojúhelník ABC , na přímkách AB, BC, CA leží po řadě body K, L, M , které jsou všechny různé od vrcholů trojúhelníku. Přímký CK, AL, BM procházejí jedním bodem, nebo jsou vzájemně rovnoběžné, právě když zároveň platí:

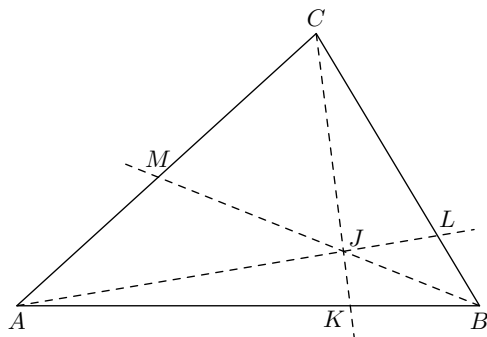
1. z bodů K, L, M leží na stranách trojúhelníku buď právě jeden, nebo všechny tři,
2. $\frac{|AK|}{|BK|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1$.

Důkaz. Dokážeme nejprve první implikaci v této větě.

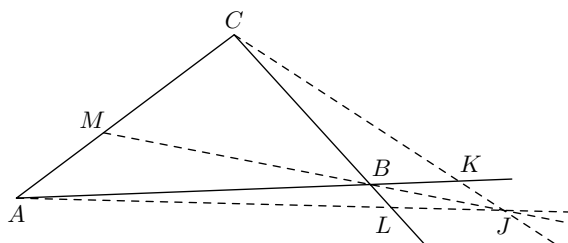
Předpokládáme, že přímký CK, AL, BM mají jeden společný průsečík, nebo jsou vzájemně rovnoběžné. V takovém případě je jasné, že platí tvrzení 1, viz obr. 2a, 2b, 2c.



Obr. 2a



Obr. 2b



Obr. 2c

Jsou-li přímky CK , AL , BM vzájemně rovnoběžné (obr. 2a), tak z bodů K , L , M patří trojúhelníku ABC jediný, a to např. bod M . Uvažujme jednak stejnolehlost se středem A , kde například platí $|AK| : |BK| = |CA| : |CM|$, a také stejnolehlost se středem C , kde například platí $|BL| : |CL| = |AM| : |CA|$. Vynásobením obou rovností dostaneme tvrzení 2.

Procházejí-li přímky CK , AL , BM společným bodem J (obr. 2b, 2c), použijeme Menelaovu větu. Jednak pro trojúhelník AKC a přímku BM platí

$$\frac{|AB|}{|BK|} \cdot \frac{|KJ|}{|CJ|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1,$$

jednak pro trojúhelník BCK a přímku AL platí

$$\frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CJ|}{|KJ|} \cdot \frac{|AK|}{|AB|} = 1.$$

Vynásobením obou rovností dostaneme tvrzení 2.

Nyní se zaměříme na opačnou implikaci v této větě.

Podle tvrzení 1 předpokládejme například, že uvnitř strany AC leží bod M . V tomto případě mohou nastat dvě situace.

První případ je takový, že přímka MB je rovnoběžná s přímkou CK (obr. 2a). Uvažujme případ, kdy bod K leží na polopřímce opačné k polopřímce BA ; případ, kdy bod K leží na polopřímce opačné k polopřímce AB , se řeší analogicky. Díky stejnolehlosti se středem A platí např. $|AK| : |BK| = |AC| : |CM|$. Použijeme-li k tomu rovnost z tvrzení 2, dostaneme postupně

$$\frac{|AC|}{|CM|} \cdot \frac{|BL|}{|CL|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1, \quad \frac{|AC|}{|AM|} = \frac{|CL|}{|BL|}.$$

Protože $\frac{|AC|}{|AM|} > 1$, je $\frac{|CL|}{|BL|} > 1$, což znamená, že bod L leží na polopřímce opačné k polopřímce BC . Proto platí

$$\frac{|AM| + |MC|}{|AM|} = \frac{|CB| + |BL|}{|BL|}, \quad \frac{|MC|}{|AM|} = \frac{|CB|}{|BL|}.$$

Z této rovnosti vyplývá, že je také přímka AL rovnoběžná s přímkami MB a CK . Tím je důkaz opačné implikace pro tuto situaci proveden.

Druhý případ je takový, že přímky MB a CK jsou různoběžné (obr. 2b, 2c). Jejich průsečík označme J . Dokážeme, že bodem J prochází i přímka AL . Pro trojúhelník AKC a přímku MB použijeme Menelaovu větu, takže platí

$$\frac{|AB|}{|KB|} \cdot \frac{|KJ|}{|CJ|} \cdot \frac{|CM|}{|AM|} = 1,$$

neboli

$$\frac{|CM|}{|AM| \cdot |BK|} = \frac{|CJ|}{|AB| \cdot |KJ|}.$$

Použijeme-li k tomu rovnost z tvrzení 2 ve tvaru

$$\frac{|CM|}{|AM| \cdot |BK|} = \frac{|CL|}{|AK| \cdot |BL|},$$

dostaneme

$$\frac{|AK|}{|AB|} \cdot \frac{|LB|}{|LC|} \cdot \frac{|JC|}{|JK|} = 1.$$

A to je tvrzení Menelaovy věty pro trojúhelník BKC a přímku AL , neboli že body A, L, J leží na jedné přímce.

Vrchol trojúhelníku, střed jeho protější strany a těžiště

Máme dán trojúhelník ABC a A_1, B_1, C_1 středy protilehlých stran k jeho vrcholům. Označme T (těžiště) průsečík přímek (těžnic) AA_1 a BB_1 . Dokážeme, že pak body C, T, C_1 leží na jedné přímce, tj. všechny těžnice trojúhelníku se protínají v jednom bodě.

Jeden důkaz tohoto tvrzení jsme prezentovali v předchozím článku. Nyní uvedeme ještě dva důkazy, a to pomocí prostředků uvedených v tomto článku, tj. pomocí Cèvovy věty a Menelaovy věty.

Nejprve tedy důkaz pomocí Cèvovy věty. Vypočítáme pro trojúhelník ABC a středy jeho stran A_1, B_1, C_1 tuto hodnotu:

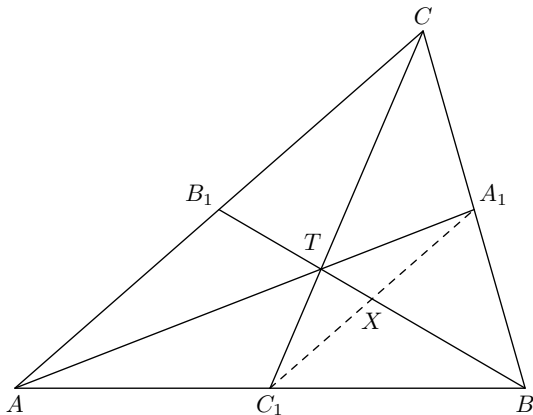
$$\frac{|AC_1|}{|BC_1|} \cdot \frac{|BA_1|}{|CA_1|} \cdot \frac{|CB_1|}{|AB_1|} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

Podle získané hodnoty vidíme, že se těžnice trojúhelníku ABC protínají ve společném bodě T . To je důkaz, že body C_1, T, C leží na jedné přímce.

Nyní důkaz pomocí Menelaovy věty. Průsečík přímek AA_1 a BB_1 označíme T a průsečík přímek BT a A_1C_1 označíme X (obr. 3). Jelikož $|AC| = 2|C_1A_1|$, tak díky stejnohlosti se středem T je $|B_1T| = 2|TX|$. Podobně díky stejnohlosti se středem B je $|B_1B| = 2|XB|$. Takže $|TB| = 2|B_1T|$. Nyní již můžeme pro trojúhelník ABB_1 a body C_1, T, C vypočítat hodnotu:

$$\frac{|AC_1|}{|BC_1|} \cdot \frac{|BT|}{|B_1T|} \cdot \frac{|B_1C|}{|AC|} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Podle získané hodnoty vidíme, že body C_1, T, C leží na jedné přímce.



Obr. 3

Vrchol trojúhelníku, pata výšky na protější straně a ortocentrum

Máme dán trojúhelník ABC a A_0, B_0, C_0 paty kolmic vedených postupně z vrcholů A, B, C na protilehlé strany. Označme V (ortocentrum, průsečík výšek) průsečík přímek (výšek) AA_0 a BB_0 . Dokážeme, že pak body C, V, C_0 leží na jedné přímce. Neboli říkáme, že se všechny výšky trojúhelníku protínají v jednom bodě.

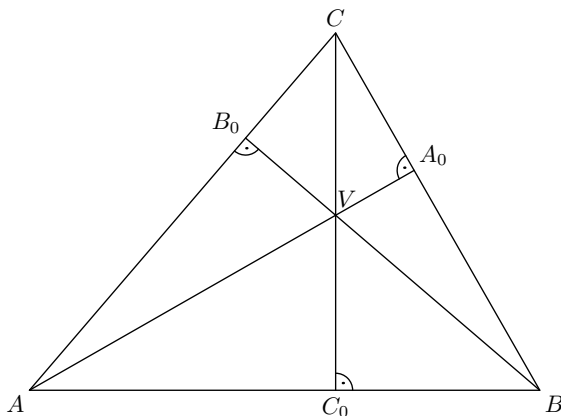
Analogicky jako v předchozí kapitole byl jeden důkaz tohoto tvrzení prezentován v předchozím článku. I nyní uvedeme ještě dva důkazy, a to pomocí Cëvovy věty a Menelaovy věty.

Nyní tedy důkaz pomocí Cëvovy věty. Označme klasicky a, b, c délky stran a α, β, γ velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC .

Důkaz provedeme nejprve pro ostroúhlý trojúhelník (obr. 4a). Vypočteme hodnotu:

$$\frac{|AC_0|}{|BC_0|} \cdot \frac{|BA_0|}{|CA_0|} \cdot \frac{|CB_0|}{|AB_0|} = \frac{b \cos \alpha}{a \cos \beta} \cdot \frac{c \cos \beta}{b \cos \gamma} \cdot \frac{a \cos \gamma}{c \cos \alpha} = 1$$

Podle získané hodnoty vidíme, že se výšky trojúhelníku ABC protínají ve společném bodě V . To znamená důkaz, že body C_0, V, C leží na jedné přímce.



Obr. 4a

Podobně provedeme důkaz pro tupoúhlý trojúhelník s tupým úhlem např. u vrcholu B (obr. 4b). Vypočteme hodnotu:

$$\frac{|AC_0|}{|BC_0|} \cdot \frac{|BA_0|}{|CA_0|} \cdot \frac{|CB_0|}{|AB_0|} = \frac{b \cos \alpha}{a \cos (180^\circ - \beta)} \cdot \frac{c \cos (180^\circ - \beta)}{b \cos \gamma} \cdot \frac{a \cos \gamma}{c \cos \alpha} = 1$$

I zde podle získané hodnoty vidíme, že se výšky trojúhelníku ABC protínají ve společném bodě V , což opět znamená důkaz, že body C_0, V, C leží na jedné přímce.

Nyní ještě dokážeme tvrzení pouze pomocí Menelaovy věty.

V trojúhelníku ABC sestrojíme výšky AA_0, BB_0, CC_0 . Průsečík výšek AA_0, BB_0 označíme V . Uvažujme trojúhelník ABB_0 . Chceme dokázat, že body C_0, V, C leží na jedné přímce.

Důkaz provedeme nejprve pro ostroúhlý trojúhelník (obr. 4a). Vypočteme hodnotu:

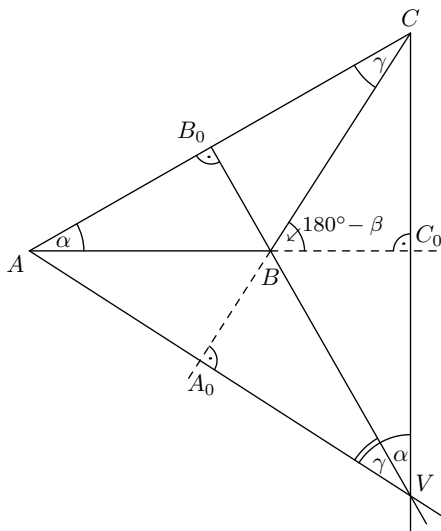
$$\begin{aligned} \frac{|AC_0|}{|BC_0|} \cdot \frac{|BV|}{|B_0V|} \cdot \frac{|B_0C|}{|AC|} &= \frac{|AC_0|}{|BC_0|} \cdot \frac{|BB_0| - |B_0V|}{|B_0V|} \cdot \frac{|B_0C|}{|AC|} = \\ &= \frac{|AC_0|}{|BC_0|} \cdot \frac{|BB_0| - |B_0C| \cotg \alpha}{|B_0C| \cotg \alpha} \cdot \frac{|B_0C|}{|AC|} = \\ &= \frac{|AC_0|}{|BC_0|} \cdot \frac{|BB_0| - |B_0C| \cotg \alpha}{|AC| \cotg \alpha} = \frac{b \cos \alpha}{a \cos \beta} \cdot \frac{a \sin \gamma - a \cos \gamma \cotg \alpha}{b \cotg \alpha} = \\ &= \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} \cdot \frac{\sin \gamma - \cos \gamma \cotg \alpha}{\cotg \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \cdot (\sin \gamma - \cos \gamma \cotg \alpha) = \\ &= \frac{\sin \alpha \sin \gamma - \cos \gamma \cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{-\cos(\alpha + \gamma)}{\cos \beta} = \frac{\cos \beta}{\cos \beta} = 1 \end{aligned}$$

Podle získané hodnoty vidíme, že body C_0, V, C leží na jedné přímce.

A ještě přidáme důkaz pro tupoúhlý trojúhelník (obr. 4b). Vypočteme hodnotu:

$$\begin{aligned} \frac{|AC_0|}{|BC_0|} \cdot \frac{|BV|}{|B_0V|} \cdot \frac{|B_0C|}{|AC|} &= \frac{|AC_0|}{|BC_0|} \cdot \frac{|B_0V| - |BB_0|}{|B_0V|} \cdot \frac{|B_0C|}{|AC|} = \\ &= \frac{|AC_0|}{|BC_0|} \cdot \frac{|B_0C| \cotg \alpha - |BB_0|}{|B_0C| \cotg \alpha} \cdot \frac{|B_0C|}{|AC|} = \frac{|AC_0|}{|BC_0|} \cdot \frac{|B_0C| \cotg \alpha - |BB_0|}{|AC| \cotg \alpha} = \\ &= \frac{b \cos \alpha}{a \cos(180^\circ - \beta)} \cdot \frac{a \cos \gamma \cotg \alpha - a \sin \gamma}{b \cotg \alpha} = \\ &= \frac{\cos \alpha}{-\cos \beta} \cdot \frac{\cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos(\alpha + \gamma)}{-\cos \beta} = \frac{-\cos \beta}{-\cos \beta} = 1 \end{aligned}$$

Také zde vidíme, že body C_0, V, C leží na jedné přímce.



Obr. 4b

Úlohy k samostatnému řešení

Úloha 1

Trojúhelník ABC má délky stran a, b, c . Těžnice ho rozdělí na šest trojúhelníků, jejichž těžiště tvoří vrcholy šestiúhelníku. Jaký je jeho a) obvod, b) obsah vzhledem k obvodu a obsahu trojúhelníku ABC ?

Úloha 2

Body C, D leží na polokružnici s průměrem AB . Přímky AC a BD se protínají v bodě P , přímky AD a BC v bodě Q . Z bodu P je vedena kolmice na úsečku AB s patou R . Dokažte, že body P, Q, R leží na jedné přímce.

Návody k řešení zadaných úloh

Úloha 1: Označme $2s$ obvod, v_b, v_c výšky po řadě z vrcholů B, C a A_1, B_1, C_1 středy stran, T těžiště trojúhelníku ABC , dále $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6$ těžiště trojúhelníků $AC_1T, BC_1T, BA_1T, CA_1T, CB_1T, AB_1T$ a C_2, C_3, A_2 středy úseček AC_1, BC_1, BA_1 .

a) Z podobnosti trojúhelníků T_1T_2T a C_2C_3T plyne $|T_1T_2| = \frac{c}{3}$. Z podobnosti trojúhelníků T_2T_3T a C_3A_2T plyne $|T_2T_3| = \frac{b}{6}$. Analogicky to

platí pro délky dalších stran. Ovod šestiúhelníku je

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)(a + b + c) = s.$$

b) V trojúhelníku T_1T_2T je $|T_1T_2| = \frac{c}{3}$ a výška $\frac{2}{9}v_c$, proto je jeho obsah roven $\frac{2}{27}$ obsahu trojúhelníku ABC . Analogicky v T_2T_3T je $|T_2T_3| = \frac{b}{6}$ a velikost výšky $\frac{5}{18}v_b$, proto je jeho obsah roven $\frac{5}{54}$ obsahu trojúhelníku ABC . Obsah šestiúhelníku je tedy

$$3\left(\frac{2}{27} + \frac{5}{54}\right) = \frac{1}{2}$$

obsahu trojúhelníku ABC .

Úloha 2: V trojúhelníku ABP jsou AD , BC , PR jeho výšky. Výšky AD , BC se protínají v bodě Q , Takže jím prochází i výška PR .

Závěr

Tento článek představil dvě velice užitečné věty – větu Menelaovu a větu Cěvovu s jejich důkazy. Následně byly dokázány vlastnosti těžnic a výšek trojúhelníku pomocí těchto vět, tedy jiným způsobem než byly dokázány v předchozím článku. Stejně či podobné důkazy je možné najít např. v publikacích [1, 2, 3, 4]. V následujících článcích se budeme zabývat dalšími trojicemi bodů ležícími na téže přímkce, přitom hojně využijeme věty uvedené právě v tomto článku.

Literatura

- [1] Boček, L., Zhouf, J.: Planimetrie. 2. rozšířené vydání, PedF UK, Praha, 2012.
- [2] Hejný, M. a kol.: Teória vyučovania matematiky 2. Slovenské pedagogické vydavateľstvo, Bratislava, 1990.
- [3] Kadleček, J.: Geometrie v rovině a prostoru. Prometheus, Praha, 1996.
- [4] Švrček, J., Vanžura J.: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha, 1988.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 273 a 274 můžete zaslat nejpozději do 31. 3. 2022 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz.

Úloha 273

Určete všechny mnohočleny $P(x)$ s celočíselnými koeficienty takové, že pro všechna přirozená čísla a, b je číslo $P(a) + P(b)$ dělitelné číslem $a + b$.

Ján Mazák

Úloha 274

Do dvou krabic rozmístíme n černých a n bílých koulí tak, že každá z nich obsahuje alespoň jednu kouli. S pravděpodobností $\frac{1}{2}$ vybereme jednu z krabic a z ní vytáhneme jednu kouli (v každé krabici je vytažení v ní obsažené koule stejně pravděpodobné). Při jakém rozmístění koulí bude pravděpodobnost vytažení bílé koule

- co největší;
- co nejmenší.

Józef Kalinowski (Kalety)

Dále uvádíme řešení úloh 269 a 270, jejichž zadání jsme zveřejnili ve druhém čísle aktuálního (30.) ročníku našeho časopisu.

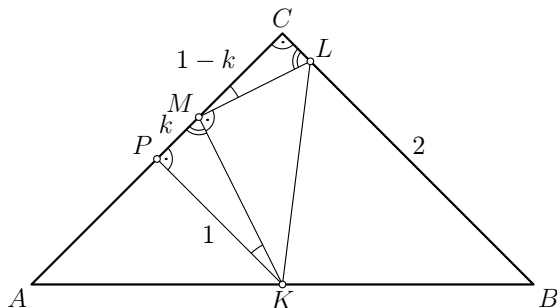
Úloha 269

Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC , v němž K je střed jeho přepony AB . Uvažujme pravoúhlý trojúhelník KLM s pravým úhlem při vrcholu M , kde vrcholy L, M leží po řadě uvnitř odvěsen BC, AC . Sestrojte bod L tak, aby úsečka BL měla co nejmenší délku.

Jaroslav Švrček

Řešení. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že odvěsny pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC mají délku 2. Označme P střed odvěsny AC . Úsečka PK je střední příčkou trojúhelníku ABC , má tak délku 1 a je kolmá na odvěsnu AC . Aby bod L byl vnitřním bodem odvěsny BC , musí bod M být zřejmě vnitřním bodem úsečky PC . Trojúhelník KMP

a MLC jsou pravoúhlé s pravými úhly při vrcholech po řadě P , C a součet jejich vnitřních úhlů při vrcholu M je 90° . Tedy podle věty uu jsou podobné. Označme k délku úsečky PM . Protože bod P je středem odvěsny AC s délkou 2, je délka úsečky CM rovna $1 - k$.



Z podobnosti trojúhelníků KMP a MLC plyne

$$\frac{|CL|}{1 - k} = \frac{|CL|}{|CM|} = \frac{|PM|}{|PK|} = \frac{k}{1}.$$

Odtud dostaneme

$$|CL| = k - k^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - k\right)^2.$$

Úsečka BL bude mít nejmenší délku, právě když úsečka CL bude nejdelší. Z nezápornosti druhé mocniny plyne

$$|CL| \leq \frac{1}{4},$$

kde rovnost nastane, právě když $k = \frac{1}{2}$, tedy právě když bod M je středem úsečky PC .

Úsečka BL tak bude mít nejmenší délku pro vnitřní bod L odvěsny BC takový, že

$$|BL| = |BC| - |CL| = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = \frac{7}{8}|BC|,$$

jehož konstrukce je zřejmá.

Poznámka. Pro hledaný bod L v trojúhelníku CLM platí

$$|CM| = \frac{1}{2}, \quad |CL| = \frac{1}{4} \quad \text{a} \quad |LM| = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$

V trojúhelníku KLM dopočítáme

$$|KM| = \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad |LM| = \frac{\sqrt{5}}{4}, \quad \text{a} \quad |LK| = \frac{5}{4}.$$

Trojúhelníky KLM a MLC jsou tak podobné s poměrem podobnosti $\sqrt{5} : 1$, tedy jejich vnitřní úhly po řadě u vrcholů M a K jsou shodné. Podle věty o obvodovém a úsekovém úhlu je v tomto případě přímka AC tečnou kružnice s průměrem KL (opsané trojúhelníku KLM). Někteří řešitelé pomocí této vlastnosti charakterizovali bod L a popsali jeho konstrukci.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, *Anton Hnáth* z Moravan, *Petr Vach* z Jablonce nad Nisou, *Michal Beránek* z G v Praze 10, *Voděradská*, *Veronika Borková* z GVM v Novém Městě na Moravě, *Tomáš Flídr* z G v Kojetíně, *Martin Fof* z MG v Opavě, *Jiří Harvalík* z G v Plzni, *Mikulášské nám.*, *Hynek Jakeš* ze SG v Olomouci, *Zdeněk Pezlar* z G v Brně, *tř. Kpt. Jaroše*, *Piotr Kulisz* ze ZSOT v Lublinci (Polsko), *Adam Mendl* z GPdC v Táboře, *Ladislav Nagy* z G v Českých Budějovicích, *Jírovcova*, *Michal Janík* a *Samuel Rosiar*, oba z GJK v Praze 6, *Ondřej Trinkewitz* z G a SPŠE ve Frenštátě pod Radhoštěm a *Kristýna Zemene* z G a ZUŠ ve Šlapanicích.

Úloha 270

Uvažujme čísla $a = 2 \cos(\pi/7)$, $b = 2 \cos(3\pi/7)$ a $c = 2 \cos(5\pi/7)$. Dokažte, že tři výrazy $a + b + c$, $1/a + 1/b + 1/c$, abc nabývají celočíselných hodnot.

Pavel Calábek

Řešení. Podle Moivreovy věty pro čísla $t \in \{\frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7}\}$ platí

$$(\cos t + i \sin t)^7 = \cos 7t + i \sin 7t = -1. \quad (1)$$

Pro tato čísla t je i reálná část výrazu na levé straně rovna -1 , užitím binomické věty tak dostaneme

$$\begin{aligned} -1 &= \cos^7 t - 21 \cos^5 t \sin^2 t + 35 \cos^3 t \sin^4 t - 7 \cos t \sin^6 t = \\ &= \cos^7 t - 21 \cos^5 t (1 - \cos^2 t) + \\ &+ 35 \cos^3 t (1 - \cos^2 t)^2 - 7 \cos t (1 - \cos^2 t)^3 = \\ &= 64 \cos^7 t - 112 \cos^5 t + 56 \cos^3 t - 7 \cos t. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že čísla z množiny $\{\cos \frac{\pi}{7}, \cos \frac{3\pi}{7}, \cos \frac{5\pi}{7}\}$ jsou kořeny rovnice

$$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x + 1 = 0. \quad (2)$$

Z rozkladu

$$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x + 1 = (x + 1)((2x)^3 - (2x)^2 - 2(2x) + 1)^2 \quad (3)$$

a z faktu, že čísla z množiny $\{\cos \frac{\pi}{7}, \cos \frac{3\pi}{7}, \cos \frac{5\pi}{7}\} = \{\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\}$ jsou zřejmě navzájem různá a navíc jsou různá i od čísla -1 , plyne, že čísla a, b, c jsou tři různé kořeny kubické rovnice

$$y^3 - y^2 - 2y + 1 = 0. \quad (4)$$

Užitím Viètových vztahů dostaneme

$$a + b + c = 1, \quad ab + bc + ca = -2 \quad \text{a} \quad abc = -1.$$

Ze druhé a třetí rovnosti navíc získáme

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ca}{abc} = \frac{-2}{-1} = 2.$$

Proto $a + b + c = 1$, $1/a + 1/b + 1/c = 2$ a $abc = -1$, což jsou vesměs celá čísla.

Poznámka 1. Rovnost (1) platí také pro čísla $t \in \{\frac{7\pi}{7}, \frac{9\pi}{7}, \frac{11\pi}{7}, \frac{13\pi}{7}\}$. Protože ze známých vzorců pro kosinus plyne

$$\cos \frac{7\pi}{7} = -1, \quad \cos \frac{9\pi}{7} = \cos \frac{-5\pi}{7} = \cos \frac{5\pi}{7}, \quad \cos \frac{11\pi}{7} = \cos \frac{3\pi}{7}, \quad \cos \frac{13\pi}{7} = \cos \frac{\pi}{7},$$

dá se očekávat, že rovnice (2) bude mít kořen -1 a její zbývající kořeny budou dvojnásobné, tedy se dá očekávat existence rozkladu (3) ve tvaru součinu $x + 1$ a druhé mocniny kubického čtyřčlenu.

Poznámka 2. V předloženém řešení se uvažuje reálná část výrazu (1). Pokud budeme uvažovat její imaginární část, dojde ke komplikacím, které vyžadují podrobnější diskusi. Imaginární část levé strany výrazu (1) je rovna nule. Po vydělení nenulovým číslem $\sin t$ dostaneme podobně jako v předloženém řešení rovnici

$$\begin{aligned} 0 &= 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1 = \\ &= ((2x)^3 - (2x)^2 - 2(2x) + 1)((2x)^3 + (2x)^2 - 2(2x) - 1), \end{aligned}$$

která má nejen kořeny z množiny $\{\cos \frac{\pi}{7}, \cos \frac{3\pi}{7}, \cos \frac{5\pi}{7}\} = \{\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\}$, ale též (podobnou úvahou jako v poznámce 1) z množiny $\{\cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{6\pi}{7}\} = \{-\frac{c}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{a}{2}\}$. Čísla z množiny $\{a, b, c, -a, -b, -c\}$ jsou tak (navzájem různé) kořeny rovnice

$$(y^3 - y^2 - 2y + 1)(y^3 + y^2 - 2y - 1) = 0.$$

Každý z činitelů na levé straně má právě tři kořeny z této množiny. Snadno nahlédneme, že žádný z nich nemá jako své kořeny dvojici opačných čísel. Jelikož koeficient u y je v obou činitelích záporný, musí mít každý z činitelů aspoň jeden záporný kořen. Jeden z činitelů tak má dva kladné a jeden záporný kořen a druhý naopak jeden kladný a dva záporné kořeny. Úvahou o absolutním členu zjistíme, že dva kladné a jeden záporný kořen má rovnice

$$y^3 - y^2 - 2y + 1 = 0.$$

Protože koeficient u y^2 je -1 , znamená to, že součet těchto kořenů je 1. Užitím zřejmé nerovnosti $2 > a > 1,5 > -c > 1 > b > 0$ zjistíme, že může mít jako kladné kořeny pouze a a b , a tedy záporný kořen c . Tím jsme jiným způsobem dokázali, že rovnice (4) má kořeny a, b, c .

Jiné řešení (podle Samuela Rosiara). Uvažujeme komplexní číslo

$$u = \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}.$$

Potom

$$u^{-1} = \cos \left(-\frac{\pi}{7}\right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{7}\right) = \cos \frac{\pi}{7} - i \sin \frac{\pi}{7}.$$

Platí tedy $a = 2 \cos \frac{\pi}{7} = u + u^{-1}$. Podobně také odvodíme $b = u^3 + u^{-3}$ a $c = u^5 + u^{-5}$. Navíc z Moivreovy věty dostaneme $u^7 = u^{-7} = -1$ a $u^{14} = u^{-14} = 1$. Platí tak

$$\begin{aligned} a + b + c &= u + u^{-1} + u^3 + u^{-3} + u^5 + u^{-5} = \\ &= u^{-5} \cdot (1 + u^2 + u^4 + u^6 + u^8 + u^{10}) = \\ &= u^{-5} \cdot \frac{1 - u^{12}}{1 - u^2} = u^{-7} \cdot \frac{u^2 - u^{14}}{1 - u^2} = (-1) \cdot \frac{u^2 - 1}{1 - u^2} = 1, \end{aligned}$$

což je celé číslo. Podobně užitím identit $u^9 = u^{14}u^{-5} = u^{-5}$ a $u^{-9} = u^5$

dostaneme

$$\begin{aligned} abc &= (u + u^{-1})(u^3 + u^{-3})(u^5 + u^{-5}) = \\ &= u^9 + u^7 + u^3 + u + u^{-1} + u^{-3} + u^{-7} + u^{-9} = \\ &= u^{-5} - 1 + u^3 + u + u^{-1} + u^{-3} - 1 + u^5 = a + b + c - 2 = -1, \end{aligned}$$

což je opět celé číslo. Konečně

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{ab + bc + ca}{abc} = \\ &= -((u + u^{-1})(u^3 + u^{-3}) + (u + u^{-1})(u^5 + u^{-5}) + (u^3 + u^{-3})(u^5 + u^{-5})) = \\ &= 2 - (u^8 + u^6 + u^4 + u^2 + 1 + u^{-2} + u^{-4} + u^{-6} + u^{-8}) - \\ &\quad - (u^4 + u^2 + 1 + u^{-2} + u^{-4}) = \\ &= 2 - u^{-8} \cdot \frac{1 - u^{18}}{1 - u^2} - u^{-4} \cdot \frac{1 - u^{10}}{1 - u^2} = 2 - \frac{u^{-8} - u^{10} + u^{-4} - u^6}{1 - u^2} = \\ &= 2 - \frac{-u^{-1} + u^3 - u^3 + u^{-1}}{1 - u^2} = 2, \end{aligned}$$

což je také celé číslo

Poznámka 3. Řešení Zdenka Pezlara je směsí předcházejících dvou řešení. Úpravami podobnými jako v tomto řešení ukázal, že čísla $a = u + u^{-1}$, $b = u^3 + u^{-3}$ a $c = u^5 + u^{-5}$ jsou kořeny rovnice (4) a dále pokračoval stejně jako v prvním řešení.

Jiné řešení (podle Piotra Kuliszze). Úlohu lze také řešit užitím řady součtových vzorců pro funkce sinus, kosinus a vztahy mezi nimi. Tyto vzorce můžete nalézt v každém přehledu vlastností goniometrických funkcí. Jejich užitím platí

$$\begin{aligned} a + b + c &= 2 \cos \frac{\pi}{7} + 2 \cos \frac{3\pi}{7} + 2 \cos \frac{5\pi}{7} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{3\pi}{7} + 2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{5\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \\ &= \frac{\sin \frac{2\pi}{7} + (\sin \frac{-2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7}) + (\sin \frac{-4\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7})}{\sin \frac{\pi}{7}} = \\ &= \frac{\sin \frac{2\pi}{7} - \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{6\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{6\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = 1, \end{aligned}$$

což je celé číslo. Dále máme

$$\begin{aligned} abc &= 2 \cos \frac{\pi}{7} \cdot 2 \cos \frac{3\pi}{7} \cdot 2 \cos \frac{5\pi}{7} = 8 \cos \frac{\pi}{7} (-\cos \frac{4\pi}{7})(-\cos \frac{2\pi}{7}) = \\ &= 4 \cdot \frac{2 \sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = 2 \cdot \frac{2 \sin \frac{2\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{4\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{\sin \frac{8\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = \frac{-\sin \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{\pi}{7}} = -1, \end{aligned}$$

což je opět celé číslo. Nyní

$$\begin{aligned} ab &= 2 \cos \frac{\pi}{7} \cdot 2 \cos \frac{3\pi}{7} = 2 (\cos \frac{-2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7}) = 2 (-\cos \frac{5\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7}), \\ bc &= 2 \cos \frac{3\pi}{7} \cdot 2 \cos \frac{5\pi}{7} = 2 (\cos \frac{-2\pi}{7} + \cos \frac{8\pi}{7}) = 2 (-\cos \frac{5\pi}{7} - \cos \frac{\pi}{7}), \\ ca &= 2 \cos \frac{5\pi}{7} \cdot 2 \cos \frac{\pi}{7} = 2 (\cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}) = 2 (-\cos \frac{3\pi}{7} - \cos \frac{\pi}{7}). \end{aligned}$$

Užitím těchto vztahů a již vypočtených

$$abc = -1, \quad a + b + c = 1$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= \frac{ab + bc + ca}{abc} = -ab - bc - ca = \\ &= 2 (\cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7}) + 2 (\cos \frac{5\pi}{7} + \cos \frac{\pi}{7}) + 2 (\cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{\pi}{7}) = \\ &= 2 (2 \cos \frac{\pi}{7} + 2 \cos \frac{3\pi}{7} + 2 \cos \frac{5\pi}{7}) = 2(a + b + c) = 2, \end{aligned}$$

což je konečně také celé číslo.

Správná řešení zaslali *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jiří Harvalík* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Hynek Jakeš* ze SG v Olomouci, *Zdeněk Pezlar* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Piotr Kulisz* ze ZSOT v Lublinci (Polsko), *Michal Janík* a *Samuel Rosiar*, oba z GJK v Praze 6,

Pavel Calábek

Odpor cívky zanedbejte II

OLDŘICH LEPIL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Před 25 lety vyšel v MFI příspěvek [1], který se zamýšlí nad tím, že při řešení fyzikálních úloh často zjednodušujeme podmínky průběhu fyzikálního děje, aby řešení bylo dostupné i s použitím méně náročných matematických postupů. Nejčastěji je to při řešení úloh z mechaniky, kde zanedbáváme zejména působení odporových sil. Tak je tomu třeba u volného pádu těles, kde neuvažujeme odpor prostředí, nebo v úlohách o pohybu těles, kde neuvažujeme síly tření. Méně pozornosti je této problematice věnováno v úlohách z elektřiny, kde zanedbáním některých parametrů obvodových prvků se snadno dostáváme za hranice reality. Jestliže je důvodem těchto zjednodušení náročnost matematického řešení takových úloh, pak využití prostředků IT nám mnohé usnadňuje a přibližuje řešení úloh realitě poměrně jednoduchými postupy.

Tím se zabýval citovaný příspěvek [1], který ukázal několik možností řešení úloh s elektrickými obvody obsahujícími cívku o indukčnosti L a odporu R . K řešení úloh byl použit dnes už trochu zapomenutý program FAMULUS, který byl ve své době téměř revolucí v didaktickém využití IT. Tento příspěvek lze tedy považovat za jakýsi „upgrade“ postupů v příspěvku [1] s tím, že je využit všeobecně dostupnější program MS Excel a k příspěvku je přiložen sešit s řešením úloh, kde si zájemce může ověřit, jak vlastnosti cívky, její indukčnost a rezistance ovlivňují děje v elektrickém obvodu.

Uvedeme jako příklad čtyři charakteristické úlohy, které jsou také v učebnici Elektřina a magnetismus [2], popř. ve Sbírce úloh [3] a posoudíme vliv idealizace vlastností cívky na jejich řešení. Sešit s řešením úloh je dostupný z <http://mfi.upol.cz/files/30/3004/civka.xlsx>.

Úloha 1

Cívku o indukčnosti $L = 1 \text{ H}$ v určitém okamžiku ($t_0 = 0$) připojíme ke zdroji napětí $U = 10 \text{ V}$. a) Určete proud procházející cívku v čase $t = 0,5 \text{ s}$. Odpor cívky i vnitřní odpor zdroje napětí zanedbejte. b) Určete proud, který cívku prochází ve stejném okamžiku v případě, že její odpor je $R = 2 \Omega$.

Řešení

Od okamžiku připojení cívky ke zdroji napětí je na svorkách cívky trvale svorkové napětí zdroje ($U = u_L$), takže ve smyslu úvah v příspěvku [4] napíšeme 2. Kirchhoffův zákon pro tento obvod ve tvaru

$$U = L \frac{di}{dt}. \quad (1)$$

Odtud vyplývá, že v čase t bude cívku procházet proud

$$I = \int \frac{U}{L} dt = \frac{U}{L} t + \text{konst.},$$

kde $\text{konst.} = I_0$, tj. proud v počátečním okamžiku. V našem případě je $I_0 = 0$. Dospěli jsme ke zjištění, že v tomto idealizovaném případě je proud procházející cívku lineární funkcí času a poněvadž neuvažujeme ani vnitřní odpor zdroje, měl by se proud v obvodu lineárně a bez omezení zvětšovat. Na první pohled je patrné, že tato situace odporuje realitě.

U skutečné cívky však tato situace nenastane, poněvadž její odpor, popř. i odpor zdroje zanedbat nemůžeme. Řešená úloha se tak mění ve známý případ přechodného děje v sériovém obvodu RL (viz např. CD k učebnici [2], R6.3, s. 75) a 2. Kirchhoffův zákon pro tento obvod vyjadřuje vztah

$$U = L \frac{di}{dt} + Ri. \quad (2)$$

Je to diferenciální rovnice, jejíž řešení uvádí každá vysokoškolská učebnice elektromagnetismu (a je také v učebnici [2] na CD ve Slovníčku pojmů, s. 42). Pro výpočet proudu v cívce v čase t

$$i = \frac{U}{R} \left(1 - e^{-t/\tau} \right), \quad (3)$$

kde $\tau = L/R$ je časová konstanta obvodu.

Nesnáz s diferenciální rovnicí na střední škole velmi snadno překonáme vytvořením jednoduchého a pro středoškoláka dostatečně názorného počítačového modelu. Z rovnice (2) vyjádříme změnu proudu di v obvodu za dobu dt , která má v počítačovém modelu význam časového kroku. Čím menší je časový krok, tím přesnější je řešení úlohy.

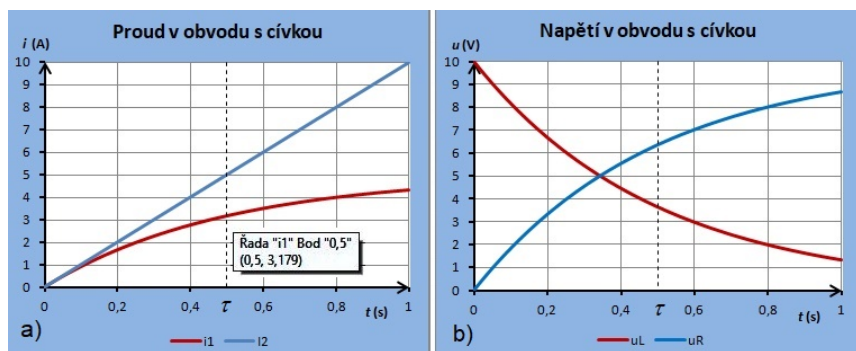
Celý počítačový model tvoří následující cyklus (viz příložený model CVK1):

$$di = (U - R \cdot i) / L \cdot dt$$

$$i = i + di$$

$$t = t + dt$$

Pro hodnoty napětí zdroje a indukčnosti cívky uvedené v zadání úlohy dostaneme s použitím časového kroku $dt = 0,01$ s řešení, jehož grafické vyjádření je na obr. 1a. Pro část úlohy b) bychom výpočtem zjistili, že v čase $t = 0,5$ s má proud v cívice hodnotu $i_\tau \doteq 3,2$ A, což je v souladu s výpočtem pomocí počítačového modelu ($i_\tau = 3,179$ A $\doteq 3,2$ A). Současně můžeme ověřit teoretický poznatek, že pro okamžité napětí na cívice u_L a napětí na rezistanci u_R v čase odpovídajícím časové konstantě $\tau = L/R = 0,5$ s platí $u_L = 0,37U \doteq 3,7$ V a $u_R = 0,63U \doteq 6,3$ V (obr. 1b).



Obr. 1

Úloha 2 ([2], Teoretická cvičení na CD, s. 27, příklad 3, upraveno)

Cívka o indukčnosti 0,5 H je připojena ke zdroji stejnosměrného napětí 3,0 V. Odpor R vinutí cívky i vnitřní odpor R_i zdroje je velmi malý. a) Určete dobu, za kterou proud v cívice po jejím připojení ke zdroji vzroste o 2,4 A. b) Určete velikost napětí na cívice a proud v obvodu ve stejném okamžiku, jestliže zdroj napětí má vnitřní odpor 0,5 Ω .

Řešení

Po připojení cívky ke zdroji napětí se proud začne zvětšovat z hodnoty $i_0 = 0$ na hodnotu $i = 2,4$ A, takže $\Delta i = i - i_0 = 2,4$ A. V předcházející úloze jsme ukázali, že při zanedbatelném odporu ($R + R_i \approx 0$) bude po připojení cívky ke zdroji napětí proud v obvodu narůstat rovnoměrně. Vztah pro napětí na cívce pak můžeme napsat v diferenciálním tvaru

$$U = L \frac{\Delta i}{\Delta t}$$

a řešení části a) úlohy bude jednoduché

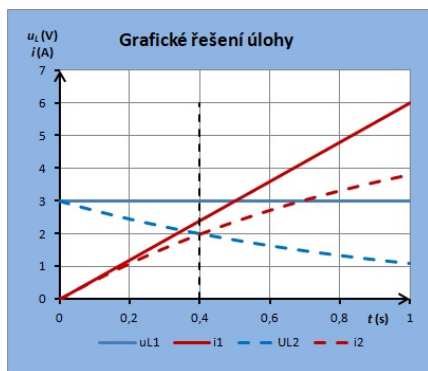
$$\Delta t = \frac{L \Delta i}{U} \approx \frac{0,5 \cdot 2,4}{3,0} \text{ s} = 0,4 \text{ s}.$$

V části b) úlohy však tento postup použít nemůžeme a východiskem řešení je opět 2. Kirchhoffův zákon vyjádřený diferenciální rovnicí (2). Výsledek najdeme pomocí modelu (CVK2) a v grafické podobě je na obr. 2. Pro srovnání určíme napětí numericky pomocí vztahu (3). Vzhledem k časové konstantě obvodu $\tau = L/R = 1$ s dostaneme

$$i = \frac{U}{R_i} \left(1 - e^{-t/\tau}\right) = \frac{3}{0,5} \left(1 - e^{-0,4}\right) \doteq 2,0 \text{ A}$$

a napětí na cívce

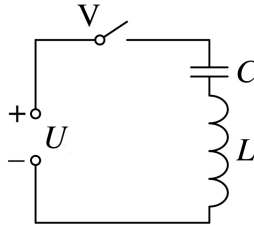
$$u_L = U - R_i i \doteq 2,0 \text{ V}.$$



Obr. 2

Úloha 3 ([3], s. 181, úloha 5.409)

V obvodu na obr. 3 sepneme vypínač V. Určete největší proud v obvodu a největší napětí na kondenzátoru.



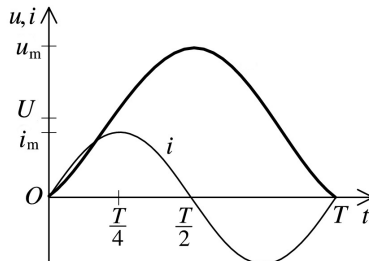
Obr. 3

Řešení

Úlohy tohoto typu se zpravidla řeší na základě zákona zachování energie a rovněž řešení úlohy v [3] vychází ze vztahu

$$\frac{Li^2}{2} + \frac{Cu^2}{2} = qU = CuU, \quad (4)$$

kde i je okamžitá hodnota proudu v obvodu, u je okamžitá hodnota napětí na kondenzátoru a q je okamžitá hodnota náboje na deskách kondenzátoru. V okamžiku, kdy proud dosáhne největší hodnoty, bude $di/dt = 0$, napětí na cívce bude mít nulovou hodnotu a napětí na kondenzátoru bude rovno napětí zdroje ($u = U$). Z rovnice (4) pro největší proud vychází $i_m = U\sqrt{C/L}$. Nabíjení kondenzátoru však pokračuje při zmenšujícím se proudu a napětí na kondenzátoru dosáhne největší hodnoty při $i = 0$, kdy $u_m = 2U$. Obecné řešení úlohy zobrazuje graf na obr. 4.



Obr. 4

Ke stejnému výsledku nás dovede jednoduchou cestou i počítačový model CVK3, kterým se řeší přechodný děj v sériovém obvodu LC . Poněvadž neuvažujeme odpor cívky, vyjadřuje 2. Kirchhoffův zákon pro tento obvod diferenciální rovnice

$$U = L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C}, \tag{5}$$

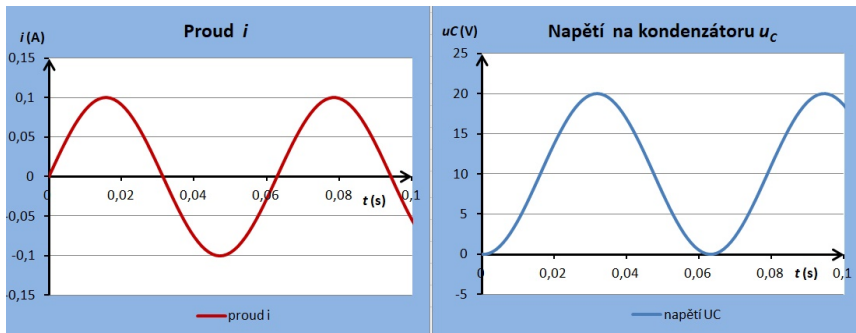
a pro změnu proudu v obvodu platí

$$di = \frac{U - \frac{q}{C}}{L} dt.$$

Při přechodném ději se ovšem mění také náboj kondenzátoru. Poněvadž okamžitá hodnota proudu v obvodu je vyjádřena vztahem $i = dq/dt$, upravíme počítačový model do následující podoby:

$$\begin{aligned} q &= q + i \cdot dt \\ di &= (U - q/C) / L \cdot dt \\ i &= i + di \\ t &= t + dt \end{aligned}$$

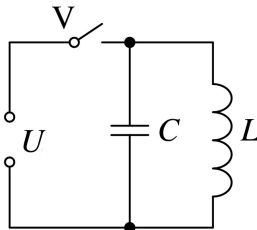
Při výpočtu použijeme hodnoty z úlohy 1 ($U = 10 \text{ V}$; $L = 1 \text{ H}$), které doplníme o kapacitu kondenzátoru $C = 100 \mu\text{F}$. Řešením získáme časové diagramy na obr. 5. Z grafů odečteme $i_m = 0,1 \text{ A}$ a $u_m = 20 \text{ V}$. Změnou parametrů si můžeme ověřit jejich vliv na průběh děje v obvodu. Děj probíhá s periodou $T = 2\pi\sqrt{LC} \doteq 0,063 \text{ s}$.



Obr. 5

Úloha 4 ([3], s. 182, úloha 5.410)

Ke zdroji stejnosměrného napětí 10 V je připojen oscilační obvod tvořený kondenzátorem o kapacitě $20 \mu\text{F}$ a cívkou o indukčnosti 20 mH (obr. 6). Při sepnutém vypínači prochází cívkou proud 2 A. Vypínač rozpojíme. Určete náboj kondenzátoru v okamžiku, kdy cívkou prochází proud 1 A. Ztráty vznikající přeměnou energie na vnitřní energii obvodu neuvažujte.



Obr. 6

Řešení

Úloha v podstatě představuje obrácený postup obvyklé demonstrace kmitání oscilačního obvodu LC . Při ní zpravidla nabijeme kondenzátor a pak ho připojíme k cívce. V praxi však můžeme použít také postup odpovídající obr. 6. To znamená, že cívkou prochází proud, který v počátečním okamžiku přerušíme. To má za následek indukci napětí, které může být podstatně větší, než je napětí použitého zdroje. Požadované počáteční hodnoty proudu v cívce a tím i velikosti napětí v okamžiku přerušení proudu však dosáhneme jen použitím rezistoru zařazeného v přívodu k cívce (na obr. 6 není zakreslen). Praktické použití tohoto postupu k demonstraci kmitání obvodu LC je popsáno v [5].

Řešení v [3] opět vychází ze zákona zachování energie

$$\frac{Li_1^2}{2} + \frac{CU^2}{2} = \frac{Li_2^2}{2} + \frac{q^2}{2C}.$$

Odtud pro náboj kondenzátoru v okamžiku, kdy cívkou prochází proud i_2 , platí vztah

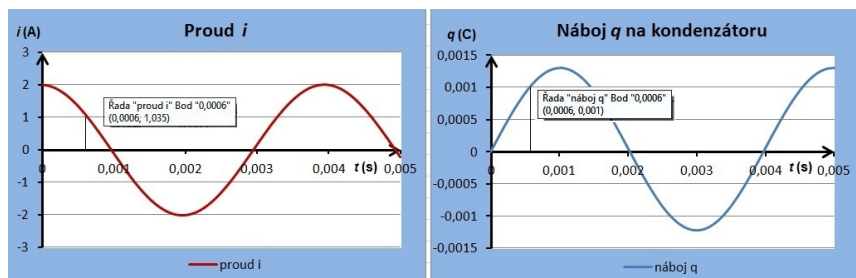
$$q = C\sqrt{U^2 + \frac{L(i_1^2 - i_2^2)}{C}} \doteq 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ C}.$$

Jednodušší řešení nám nabídne počítačový model CVK4, pro jehož vytvoření opět použijeme rovnici (5). V počátečním okamžiku cívkou pro-

chází proud $i_1 = 2 \text{ A}$ a na deskách kondenzátoru je vzhledem k zanedbatelnému odporu cívky napětí $u_0 = 0$, takže počáteční hodnota náboje $q_0 = C u_0 = 0$. Po rozpojení vypínače se proud v cívce začíná zmenšovat a kondenzátor se nabíjí indukovaným napětím. Z rovnice (5) vyjádříme změnu proudu di a v počítačovém modelu napíšeme:

$$di = -q / (L \cdot C) \cdot dt$$

Výsledný průběh časových změn náboje na kondenzátoru je na obr. 7 a z grafu popř. z tabulky odečteme řešení úlohy. Přesnost výsledku je dána volbou velikosti časového kroku. V sešitě CVK4 je také graf napětí na cívce a na kondenzátoru, z něhož je patrné značné zvětšení napětí při přerušení proudu.



Obr. 7

Dosud jsme stále pracovali s ideálním modelem obvodu bez ztrát. Jestliže budeme uvažovat odpor R cívky, musíme doplnit na pravé straně rovnice (5) člen $u_R = Ri$, úbytek napětí na rezistanci obvodu. 2. Kirchhoffův zákon vyjádříme rovnicí

$$U = L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} + Ri$$

a pro změnu proudu v počítačovém modelu dostaneme:

$$di = (U - q/C - R \cdot i) / L \cdot dt$$

Velikost odporu můžeme měnit posuvníkem a ověřit tak vliv odporu na průběh děje v obvodu, který má charakter tlumeného kmitání.

Literatura

- [1] *Lepil, O.*: Odpor cívky zanedbejte. Matematika, fyzika, informatika, roč. 5 (1996), č. 9, s. 476.
- [2] *Lepil, O., Šedivý, P.*: Fyzika pro gymnázia. Elektřina a magnetismus. 7. vydání, Prometheus, Praha, 2017. ISBN 978-80-7196-460-5
- [3] *Lepil, O., Bednařík, M., Šíroká, M.*: Fyzika. Sbírka úloh pro střední školy. 4. vydání, Prometheus, Praha, 2016.
- [4] *Lepil, O.*: Elektromagnetická indukce v obvodu s cívkou. Matematika, fyzika, informatika, roč. 27 (2018), č. 3, s. 197.
- [5] *Lepil, O., Látal, F.*: Experiment v učivu o kmitání elektromagnetického oscilátoru. Matematika, fyzika, informatika, roč. 22 (2013), č. 5, s. 344.

Úlohy rozvíjející dovednost identifikace a kontroly proměnných

EVA HEJNOVÁ

Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem

Na začátku roku 2021 byla zveřejněna tzv. „malá revize“ Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání [1], která vedla k redukci vzdělávacího obsahu Člověk a příroda, konkrétně se tyto redukce ve větší míře dotkly i vzdělávacího oboru Fyzika [2]. Mezi kritérii, na základě kterých byly škrty provedeny, je uvedeno (mimo jiné) i kritérium „zjednodušení obsahu k podpoře hledání souvislostí“ [3], s. 2. Podobně Strategie 2030+ [4] deklaruje, že modernizací obsahu kurikula bude přenesen důraz od získávání poznatků k osvojování obecných principů myšlení.

Tyto obecné principy, označované také jako metakognitivní kompetence [5], lze dobře rozvíjet v rámci výuky přírodních věd, kde jsou obvykle označovány jako vědecké myšlení či uvažování. V našem příspěvku se úžeji zaměříme na jednu specifickou dovednost vědeckého myšlení, kterou je

identifikace a kontrola proměnných (dále jen KOPR). U této dovednosti se v mnoha mezinárodních i českých výzkumech ukázalo, že činí problémy nejen žákům základních a středních škol, ale často i studentům škol vysokých. Jedná se přitom o stěžejní dovednost pro plánování a realizaci tzv. kontrolovaného experimentu¹⁾ i vyvozování správných závěrů ze zjištěných výsledků. V článku prezentujeme ukázky několika různě obtížných úloh zaměřených na dovednost KOPR a na jedné úloze ilustrujeme i možnost využití metody Concept Cartoons pro procvičování této dovednosti na základních školách.

1. Vědecké myšlení a dovednost identifikace a kontroly proměnných

Co přesně představuje vědecké myšlení, je složitý problém, proto dosud na jeho definici neexistuje obecná shoda [6]. Jeho struktura vychází z hypoteticko-deduktivní povahy vědy [7] a jednoduše ho lze charakterizovat jako souhrn obecných dovedností (nebo také způsobilostí k vědecké práci [8, 9] zahrnující určité myšlenkové a logické postupy. Americká asociace pro rozvoj vědy [10] formulovala třináct takových dovedností, jež rozdělila na základní (pozorování, měření, třídění, kvantifikaci, usuzování, předpovídání, hledání vztahů – identifikaci proměnných a komunikaci) a vyšší (integrované) dovednosti (interpretaci, kontrolu proměnných, definování, tvorbu hypotéz a experimentování). Tyto dovednosti nejsou nezávislé, nýbrž vytvářejí určitou hierarchii, tj. předpokladem zvládnutí vyšších dovedností je ovládnutí dovedností nižších.

Důležitou dovedností pro rozvoj vědeckého myšlení, kterou je možné cíleně rozvíjet v rámci výuky přírodních věd, a to již u mladších žáků na základních školách [11], je dovednost KOPR. Jedná se o objevování vztahů a souvislostí mezi dvěma, nebo více proměnnými, zkouáme-li chování nějakého systému. S pomocí různých postupů (např. opakování měření, standardizace procedur zahrnující přesné určení experimentálních podmínek apod.) identifikujeme proměnné, které je třeba během experimentu udržovat konstantní, abychom mohli zkoumat vztah mezi vybranými dvěma proměnnými a určit, které proměnné se mění v závislosti na jiných. Pod dovednost KOPR patří celé spektrum dílčích dovedností, proto se v literatuře (např. [12, 13]) zpravidla rozlišuje několik úrovní této dovednosti,

¹⁾Kontrolovaným experimentem rozumíme experiment určený k ověřování a získávání empirických poznatků v plánované a výzkumníkem řízené situaci, při níž jsou kontrolovány experimentální proměnné.

pro něž jsou pak formulovány různé typy problémů. V našem příspěvku se omezíme pouze na dvě úrovně, které pro naše potřeby označíme jako základní a pokročilou. Podrobněji o nich bude pojednáno u jednotlivých ukázek úloh.

2. Výzkumy dovednosti identifikace a kontroly proměnných

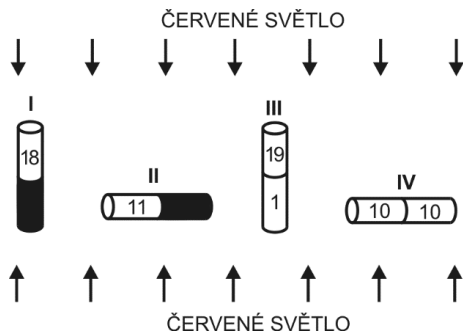
Pro hodnocení vědeckého myšlení, včetně dovednosti KOPR, bývá velmi často používán Lawsonův test vědeckého uvažování [7], který je mezi výzkumníky i pedagogy velmi oblíbený (český překlad testu lze nalézt ve [14]). Pro ověření dovednosti KOPR je do tohoto testu zařazen největší počet úloh (tři párové položky), což podtrhuje důraz, který je na tuto dovednost kladen. Úlohy zařazené v testu zahrnují dva typy problémových situací: návrh kontrolovaného experimentu (dvojice úloh 9 a 10) a rozhodnutí, zda lze na základě experimentálních výsledků určit vzájemnou souvislost více proměnných, které mohou mít na výsledek pokusu vliv (dvojice úloh 11 a 12; 13 a 14).

Mnohé zahraniční výzkumy (např. [11, 15, 16] ukazují, že žáci a studenti všech stupňů škol mají se zvládnutím dovednosti KOPR často problémy. Tato skutečnost se ukázala i v našem výzkumu, který jsme realizovali v roce 2017 se souborem 165 žáků ve věku 14–15 let z osmi tříd 9. ročníku základní školy a jedné kvarty víceletého gymnázia (podrobněji o výzkumu viz [17]). Jedním z testů, který byl žákům v rámci tohoto výzkumu zadán, byl Lawsonův test vědeckého uvažování. V oblasti úloh zaměřených na dovednost KOPR dosáhli žáci velmi nízké úspěšnosti. Průměrný bodový zisk za úlohy v této oblasti byl 1,4 z maximálně možných 6 bodů. Zároveň byl u těchto úloh zaznamenán vůbec největší rozptyl v bodových ziscích u jednotlivých žáků, přičemž zhruba polovina žáků nevyřešila správně ani jednu úlohu.

Slabé výsledky v oblasti KOPR byly při řešení Lawsonova testu zaznamenány i u českých vysokoškolských studentů ([17, 18, 19]). Hrouzková [19] zadávala test 291 studentům přírodovědných oborů a učitelství v 1. ročníku na Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého v Olomouci. Její výzkum ukázal, že pro studenty byla nejnáročnější dvojice otázek 11 a 12. Na otázku 11 odpovědělo správně 35,9 % studentů, na otázku 12 pouze 28,4 % studentů. Podobně se nejnižší úspěšnost při řešení této dvojice otázek ukázala i ve výzkumu provedeném mezi vysokoškolskými studenty v Německu [20], kde obě otázky správně vyřešilo 44 % studentů. Pro ilustraci uvádíme zadání těchto dvou testových úloh (úlohy a obrázky jsou převzaty ze [14]).

3. Ukázka testových úloh 11 a 12

11. Do každé ze čtyř skleněných trubiček dáme dvacet ovocných mušek. Trubičky těsně uzavřeme. Trubičky I a II jsou zčásti pokryty černým papírem. Trubičky III a IV nejsou vůbec zakryté. Trubičky jsou umístěny tak, jak to ukazuje obr. 1. Pak je vystavíme červenému světlu po dobu pěti minut. Na obr. 1 jsou uvedeny počty mušek v nezakrytých částech trubiček.



Obr. 1

Tento experiment ukazuje, že mušky reagují (to znamená, že se posunou blíže, nebo dál) na:

- červené světlo, ale ne na gravitaci,
 - gravitaci, ale ne na červené světlo,
 - červené světlo i na gravitaci,
 - nereagují ani na červené světlo ani na gravitaci,
12. *protože*
- většina mušek je v horní části trubičky III, ale jsou rozmístěny zhruba rovnoměrně v trubičce II.
 - většina mušek nejde ke dnu trubiček I a III.
 - mušky potřebují světlo, aby viděly, a musí letět proti gravitaci.
 - většina mušek je v horních koncích a v osvětlených koncích trubiček.
 - nějaké mušky jsou na obou koncích každé trubičky.

Řešení úlohy

Správná odpověď je 11 B a 12 A.

4. Ukázky úloh rozvíjejících dovednost identifikace a kontroly proměnných pro různé úrovně obtížnosti

V této části uvádíme ukázky několika úloh pro základní a pokročilou úroveň dovednosti KOPR, které jsou vhodné k jejímu procvičování na všech stupních škol. Úlohy zahrnují různé faktory jako je počet proměnných, kontext úloh (reálný svět vs. svět fyziky) a poskytnutí, či absence výsledků experimentů. Výzkumy ukázaly [13, s. 186], že jednodušší jsou pro studenty úlohy, pokud neobsahují výsledky experimentů.

Příklad úlohy pro základní úroveň KOPR

V této úloze musí žák rozpoznat, že se jedná o kontrolovaný experiment, a rozhodnout, zda vybraná proměnná (v tomto případě tloušťka háčku) může být tímto experimentem otestována. V úloze nejsou k dispozici experimentální výsledky, žáci se tak dokáží lépe zaměřit pouze na podmínky, za kterých je experiment prováděn, a úspěšněji tak určují proměnné veličiny, které jsou experimentem testovatelné.

Rybaření (přeloženo z [13], s. 178, upraveno)

Jirka, Adam a Štěpán chodí společně rybařit. Používají stejné rybářské náčiní a s rybařením mají podobné zkušenosti (to znamená, že pokaždé chytí přibližně stejný počet ryb). Při jejich posledním rybaření měli na výběr různé rybářské pruty a háčky a pro chytání ryb si mohli vybrat různá místa. Všichni chytali ryby dvě hodiny. Podmínky, za kterých jednotliví chlapi chytali ryby, jsou uvedeny v následující tabulce.

		Jirka	Adam	Štěpán
Podmínky	Rybářský prut	dlouhý	dlouhý	krátký
	Rybářský háček	tlustý	tenký	tenký
	Místo rybolovu	rybník	rybník	řeka

Pokud neuvažujeme jiné proměnné, můžeme informace v tabulce použít k testování toho, zda tloušťka háčku má vliv na počet ulovených ryb?

Zakroužkuj odpověď:

a) Ano b) Ne

Napiš zdůvodnění své odpovědi:

Řešení úlohy

Správná je odpověď a).

Zdůvodnění: Jirka i Adam použili stejně dlouhý prut a lovili na stejném místě (v rybníku). Dvě proměnné se tedy v průběhu experimentu neměnily, měnila se pouze jedna proměnná, tj. tloušťka háčku.

Příklady úloh pro pokročilou úroveň KOPR

Kyvadlo (přeloženo z [13], s. 178, upraveno)

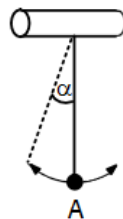
V úloze musí žák rozhodnout, zda proměnné veličiny byly provedenými pokusy otestovány, přičemž jsou kromě hodnot jednotlivých proměnných veličin (délka vlákna, hmotnost kuličky a úhel vychýlení) zadány také výsledky experimentu (počet kmitů vykonaných za 10 s). Jak bylo výše uvedeno, tato skutečnost činí úlohu zpravidla obtížnější. Pokud jsou v úloze zadány i výsledky experimentů, žáci mají tendenci zahrnovat je do svých úvah, což často vede k úsudkům o možných vztazích mezi proměnnými veličinami namísto úvah o jejich testovatelnosti v daném experimentálním uspořádání. Žáci mají také tendenci zaměřovat proměnnou, která experimentem nemůže být otestována za tu, která nemá na výsledek experimentu vliv.

Zadání úlohy

Hanka si vytvořila kyvadlo tak, že zavěsila malou kuličku na vlákno, které pak připevnila k tyči. Kyvadlo může kývat v jedné svislé rovině (viz obr. 2).

Nyní chce zjistit, zda počet kmitů, které kyvadlo vykoná za 10 s, závisí, či nezávisí

- na délce vlákna,
- na hmotnosti kuličky,
- na velikosti úhlu α při vychýlení kuličky z rovnovážné polohy (bod A v obr. 2).



Obr. 2

Provedla proto několik experimentů, aby zjistila, které z těchto tří faktorů ovlivňují počet kmitů vykonaných kyvadlem za 10 s. Podmínky, za kterých prováděla experimenty, jsou uvedeny v následující tabulce.

		Pokus 1	Pokus 2	Pokus 3
Proměnné veličiny	Délka vlákna	10 cm	10 cm	40 cm
	Hmotnost kuličky	20 g	30 g	30 g
	Úhel vychýlení kyvadla	15°	30°	15°
Počet kmitů vykonaných za 10 s		16	16	8

Pokud neuvažujeme jiné proměnné, o které proměnné nebo proměnných můžeme na základě údajů uvedených v tabulce říci, že byly tímto způsobem otestovány?

<i>Zakroužkuj odpověď:</i>	
a) Pouze délka vlákna	e) Obě proměnné uvedené v bodech a a c
b) Pouze hmotnost kuličky	f) Obě proměnné uvedené v bodech b a c
c) Pouze úhel vychýlení vlákna	g) Všechny proměnné uvedené v bodech a , b a c
d) Obě proměnné uvedené v bodech a a b	h) Žádná proměnná nemůže být otestována na základě údajů uvedených v tabulce.
<i>Napiš zdůvodnění své odpovědi:</i>	

Řešení úlohy

Správná odpověď je h), tj. žádná proměnná nemůže být otestována na základě údajů uvedených v tabulce.

Zdůvodnění: Neexistuje žádná dvojice pokusů, v nichž by se měnila pouze jedna proměnná. Z výsledku experimentů nelze proto ani usoudit, zda jednotlivé proměnné mají, či nemají vliv na proměnnou počet kmitů vykonaných za 10 s.

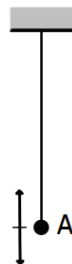
Pružina (přeloženo z [13], s. 178, upraveno)

Podobně jako v předchozí úloze musí žák rozhodnout, zda proměnné veličiny (původní délka pružiny a velikost výchylky kuličky z rovnovážné polohy) byly provedenými pokusy otestovány. V tomto případě má navíc jedna ze dvou proměnných (původní délka pružiny) vliv na výsledek experimentu (počet kmitů vykonaných za 10 s) a druhá proměnná (velikost výchylky kuličky z rovnovážné polohy) nikoliv, čímž je tento případ oproti předchozímu poněkud komplikovanější.

Zadání úlohy

Honza si vytvořil jednoduchý oscilátor tak, že zavěsil malou kuličku na pružné gumové vlákno (viz obr. 3). Nyní chce zjistit, zda počet kmitů ve svislém směru, které oscilátor vykoná za 10 s, závisí, či nezávisí

- na původní délce vlákna (tj. délce nezatíženého vlákna),
- na velikosti výchylky kuličky z rovnovážné polohy (bod *A* v obr. 3),
- na hmotnosti kuličky.



Obr. 3

Provedl proto několik experimentů, aby zjistil, které z těchto tří veličin ovlivňují počet kmitů vykonaných oscilátorem za 10 s. Podmínky, za kterých prováděl experimenty, jsou uvedeny v následující tabulce.

		Pokus 1	Pokus 2	Pokus 3
Proměnné veličiny	Původní délka vlákna	27 cm	12 cm	12 cm
	Velikost výchylky kuličky z rovnovážné polohy	4 cm	2 cm	4 cm
	Hmotnost kuličky	67 g	67 g	67 g
Počet kmitů vykonaných za 10 s		10	15	15

Pokud neuvažujeme jiné proměnné, o které proměnné nebo proměnných můžeme na základě údajů uvedených v tabulce říci, že byly tímto způsobem otestovány?

<i>Zakroužkuj odpověď:</i>	
a) Pouze původní délka vlákna	e) Obě proměnné uvedené v bodech <i>b</i> a <i>c</i>
b) Pouze velikost výchylky kuličky z rovnovážné polohy	f) Obě proměnné uvedené v bodech <i>a</i> a <i>c</i>
c) Pouze hmotnost kuličky	g) Všechny proměnné uvedené v bodech <i>a</i> , <i>b</i> a <i>c</i> .
d) Obě proměnné uvedené v bodech <i>a</i> a <i>b</i>	h) Žádná proměnná nemůže být otestována na základě údajů uvedených v tabulce.
<i>Napiš zdůvodnění své odpovědi:</i>	

Řešení úlohy

Správná je odpověď d), tj. obě proměnné uvedené v bodech *a* a *b*.

Zdůvodnění: Původní délka vlákna mohla být otestována při pokusu 1 a 3 (mění se pouze původní délka pružiny, ostatní proměnné se v uvedených pokusech nemění). Velikost výchylky kuličky z rovnovážné polohy mohla být otestována při pokusu 2 a 3 (mění se pouze velikost výchylky kuličky z rovnovážné polohy, ostatní proměnné se nemění).

Počet kmitů vykonaných za 10 s není nezávisle proměnná a nesouvisí tedy s tím, zda byl, nebo nebyl testovací experiment proveden správně. Pokud máme k dispozici data z experimentu, můžeme vyslovit závěr, že původní délka pružiny má vliv na počet kmitů vykonaných za 10 s (viz pokusy 1 a 3), zatímco velikost výchylky z rovnovážné polohy vliv nemá (viz pokusy 2 a 3).


Příklad úlohy zadané ve formě Concept Cartoons

Pro procvičování dovednosti KOPR u žáků na základní škole je možné využít i úloh zadaných ve formě Concept Cartoons (podrobněji je o metodě Concept Cartoons pojednáno např. ve [21]), pomocí nichž se žáci mohou snadněji zapojit do diskuze k předložené situaci. Pro základní úroveň dovednosti KOPR je možné využít například úlohu na obr. 4.


Kontrola proměnných **Brzdná dráha**


Tomáš si koupil auto a chce zjistit, jaká je jeho brzdná dráha. Rozhodl se, že vyzkouší různé povrchy vozovky za různého počasí a použije při tom staré a nové pneumatiky. Při každé jízdě jel Tomáš rychlostí 50 km/h a u předem určeného místa začal brzdit. Potom změnil vzdálenost, na které zastavil. Jízdy absolvoval vždy přibližně ve stejné kondici. Podmínky, za kterých Tomáš prováděl jednotlivé jízdy, jsou uvedeny v tabulce.


		Jízda 1	Jízda 2	Jízda 3
Podmínky	Povrch vozovky	beton	beton	asfalt
	Stav vozovky	suchý	mokrá	mokrá
	Kvalita pneumatik	staré	staré	nové




Pokud neuvažujeme jiné proměnné, můžeme informace v tabulce použít k testování toho, zda stav vozovky má vliv na délku brzdné dráhy?

A  Můžeme, protože u jízd 1 a 3 se mění zároveň všechny podmínky.

B  Můžeme, protože při jízdě 2 a 3 byl stejný stav vozovky a ostatní podmínky se měnily.

C  Můžeme, protože při jízdě 1 a 2 byl stejný povrch vozovky a stejná kvalita pneumatik.

D  Nemáte pravdu. Já si myslím, že ...

Obr. 4 Příklad úlohy zadané ve formě Concept Cartoons

Řešení úlohy

Pravdu má Roman (odpověď C). Abychom mohli testovat proměnnou stav vozovky, musí se měnit pouze tato proměnná, zbylé dvě proměnné (povrch vozovky, kvalita pneumatik) musí být při pokusech konstantní (v tomto případě je to splněno pro dvojici jízd 1 a 2).

Závěr

V našem příspěvku jsme ukázali, jakými úlohami lze u žáků i studentů rozvíjet dovednost identifikace a kontroly proměnných, která je pro rozvoj vědeckého myšlení zásadní. Výzkumy nicméně opakovaně ukazují její nízkou úroveň, a to u žáků i studentů všech stupňů škol. Úlohy prezentované v tomto článku mohou dobře posloužit jako průprava pro plánování a navrhování kontrolovaných experimentů, které jsou základním předpokladem pro otevřené vědecké bádání. Výzkumy i zkušenosti učitelů ukazují, že významnější pokrok v rozvoji dovednosti KOPR je zaznamenáván zejména u kurzů založených na badatelské výuce, během níž jsou často dovednosti rozvíjející vědecké myšlení zdůrazňovány a také procvičovány.

Literatura

- [1] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. MŠMT, Praha, 2021. Dostupné na: <http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-zakladni-vzdelavani>.
- [2] Přehled změn v RVP ZV. Dostupné na: <https://revize.edu.cz/prehled-redukci-v-rvp-zv>.
- [3] Vyjádření k redukcím v RVP ZV. Dostupné na: <https://revize.edu.cz/files/npi-vyjadreni-k-redukcim-v-rvp-zv.pdf>.
- [4] Strategie 2030+. Dostupné na: <https://www.msmt.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/strategie-2030>.
- [5] *Stuchlíková, I., Mareš, J.*: Rozvoj metakognitivních kompetencí žáků – otevřený úkol. *Pedagogika*, roč. 64 (2014), č. 3, s. 267–269. Dostupné na: <https://pages.pdf.cuni.cz/pedagogika/?p=4051>.
- [6] *Janoušková, S., Pyskatá Rathouská, L., Žák, V., Stratilová Urválková, E.*: The scientific thinking and reasoning framework and its applicability to manufacturing and services firms in natural sciences. *Research in Science & Technological Education*, roč. 39 (2021), č. 1, s. 1–22. Dostupné na: <https://doi.org/10.1080/02635143.2021.1928048>.

- [7] *Lawson, A. E.*: The development and validation of a classroom test of formal reasoning. *Journal of Research in Science Teaching*, roč. 15 (1978), č. 1, s. 11–24.
- [8] *Padilla, M. J.*: The science process skills. *Research matters*. Dostupné na: <https://narst.org/research-matters/science-process-skills>.
- [9] *Minárechová, M.*: História induktívneho prístupu v prírodovednom vzdelávaní v USA a jeho súčasná reflexia na Slovensku. *Scientia in educatione*, roč. 5 (2014), č. 1, s. 2–19. Dostupné na: <https://ojs.cuni.cz/scied/article/view/94/1456>.
- [10] *American Association for the Advancement of Science. Project 2061: Science for all Americans*. AAAS, Washington, 1989. Dostupné na: <https://www.aaas.org/programs/project-2061>.
- [11] *Chen, Z., Klahr, D.*: All other things being equal: Acquisition and transfer of the control of variables strategy. *Child Development*, roč. 70 (1999), č. 5, s. 1098–1120. Dostupné na: <http://www.etc.cmu.edu/projects/sci-fri/wp-content/uploads/2012/02/Chen-Klahr-1999-All-other-things-being-equal-acquisition-and-transfer-of-the-control-of-variables-strategy.pdf>.
- [12] *Han J.*: Scientific Reasoning: Research, Development, and Assessment (Dizertační práce). The Ohio State University, Ohio, 2013. Dostupné na: https://etd.ohiolink.edu/apexprod/rws_olink/r/1501/10?p10_etd_subid=3888&clear=10.
- [13] *Zhou, S. et al.*: Assessment of scientific reasoning: The effects of task context, data, and design on student reasoning in control of variable. *Thinking Skills and Creativity*, 2016, č. 19, s. 175–187. Dostupné na: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC4772877/>.
- [14] *Dvořáková, I.*: Fyzikální vzdělávání žáků a učitelů v projektu Heuréka (Dizertační práce). Univerzita Karlova, Praha, 2011. Dostupné na: <http://kdf.mff.cuni.cz/lide/dvorakova/Disertace.pdf>.
- [15] *Boudreaux, A. et al.*: Student understanding of control of variables: deciding whether or not a variable influences the behavior of a system. *American Journal of Physics*, roč. 76 (2008), č. 2, s. 163–170. Dostupné na: https://www.researchgate.net/publication/252123674_Student_understanding_of_control_of_variables_Deciding_whether_or_not_a_variable_influences_the_behavior_of_a_system.
- [16] *Bao, L. et al.*: Learning of content knowledge and development of scientific reasoning ability: A cross culture comparison. *American Journal of Physics*, roč. 77 (2009), č. 12, s. 1118–1123. Dostupné

na: https://www.researchgate.net/publication/1741716_Learning_of_Content_Knowledge_and_Development_of_Scientific_Reasoning_Ability_A_Cross_Culture_Comparison.

- [17] *Hejnová, E.*: Testování vědeckého myšlení. Matematika-fyzika-informatika, roč. 27 (2018), č. 5, s. 350–359. Dostupné na: http://mfi.upol.cz/files/27/2705/mfi_2705_350_359.pdf.
- [18] *Nováková, A., Chytrý, V., Říčan, J.*: Vědecké myšlení a metakognitivní monitorování studentů učitelství pro 1. stupeň základní školy. Scientia in educatione, roč. 9 (2018), č. 1, s. 66–80. Dostupné na: <https://ojs.cuni.cz/scied/article/view/1041/539>.
- [19] *Hrouzková, T.*: Lawsonův test vědeckého myšlení. Bakalářská práce, Univerzita Palackého, Olomouc, 2020. Dostupné na: http://muj.optol.cz/richterek/lib/exe/fetch.php?media=diplomky:bp_lawsonuv_test_final.pdf.
- [20] *Opitz, A., Heene, M., Fischer, F.*: Using differential item functioning to analyze the domain generality of a common scientific reasoning test. European Journal of Psychological Assessment, roč. 37 (2021), č. 4. Dostupné na: <https://econtent.hogrefe.com/doi/10.1027/1015-5759/a000662>.
- [21] *Hejnová, E.*: Realizace konstruktivistického přístupu ve výuce fyziky prostřednictvím úloh zadaných formou diskuze. Matematika-fyzika-informatika, roč. 25 (2016), č. 2, s. 102–115. Dostupné na: http://mfi.upol.cz/files/25/2502/mfi_2502_102_115.pdf.

INFORMATIKA

Několik informatických hádanek

PETR OSIČKA

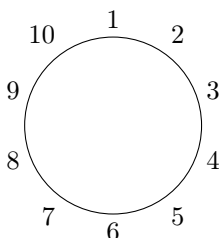
Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Hádkanky jsou již dlouho součástí matematiky i informatiky. Některé z nich se již stali součástí folkloru dané oblasti, jiné se objevují při pracovních pohovorech (například v Google) či v odborných magazínech. Řešení hádanek je příjemnou zábavou, při které lze dobře procvičit myšlení, u hádanek informatických myšlení algoritmické.

1. Josefův problém

Hádkanka je inspirována příhodou Josefa, starověkého židovského historika. Traduje se, že během židovsko-římských válek bylo 41 židovských rebelů skrývajících se v jeskyni obklíčeno římskými vojsky. Mezi rebely byl i Josef. Rebelové se rozhodli, že upřednostní sebevraždu před zajetím a že se postaví do kruhu a budou zabíjet každého třetího živého, dokud to bude možné. Josef byl jeden ze dvou přeživších, dokázal si totiž spočítat, kam se má postavit.

Pro jednoduchost předpokládejme, že začneme s čísly $1, 2, \dots, n$ vepsanými po obvodu kruhu, půjdeme po směru hodinových ručiček a škrtneme každé druhé číslo, na které narazíme. Zřejmě nám na konci zůstane pouze jedno číslo. Například, pokud $n = 10$, dostaneme následující kruh:



V prvním kole škrtneme postupně 2, 4, 6, 8, 10. V dalším kole 3, 7 a nakonec 1, 9. Zůstane číslo 5. Úkolem je navrhnout postup (ideálně vzoreček), který pro n vrátí přeživší číslo.

Řešení

Postup, který si ukážeme, je založen na následujícím pozorování. Pokud se podíváme na čísla, která zůstanou po prvním kole, můžeme si všimnout, že opět dostáváme Josefův problém, pouze je nutné provést „přečíslování“. Navíc se počet osob, pro které problém řešíme, zmenší (zhruba) na polovinu. Můžeme tedy problém opakovaně zmenšovat až do triviální situace, kdy zůstane pouze jedno číslo. Ze způsobu přečíslování při každém zmenšení pak odvodíme, jaké to bylo číslo v prvním kole.

Výsledek pro problém s n čísly označíme jako $J(n)$. Pokud je $n = 2k$ pro nějaké k , zůstanou po prvním kole 1, 3, 5, 7, ..., $2k - 1$, tj. k čísel. Navíc je můžeme převést na Josefův problém přečíslováním. Podíváme-li se na následující tabulku,

1	3	5	7	...	$2k - 1$
1	2	3	4	...	k

vidíme, že číslo z dolního řádku převedeme na číslo z horního řádku tak, že jej vynásobíme dvěma a odečteme jedničku. Můžeme psát

$$J(2k) = 2J(k) - 1. \quad (1)$$

$J(k)$ je číslo odpovídajícímu dolnímu řádku, předchozí vztah ho transformuje do číslování pro původní problém.

Je-li $n = 2k + 1$, pak po prvním kole zůstanou osoby 3, 5, 7, 9, ..., $2k + 1$. Po krátkém pohledu na tabulku

3	5	7	9	...	$2k + 1$
1	2	3	4	...	k

vidíme, že tentokrát číslo ze spodního řádku převedeme na číslo z horního řádku tak, že jej vynásobíme dvěma a přičteme jedničku. Můžeme tedy psát

$$J(2k + 1) = 2J(k) + 1. \quad (2)$$

Vztahy (1) a (2) stačí doplnit triviálním $J(1) = 1$.

Nyní musíme pravidla pro přečíslování při zmenšování problému využít pro určení přímého vztahu pro přeživšího číslo. Pro začátek si spočítáme prvních pár čísel do tabulky.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$J(n)$	1	1	3	1	3	5	7	1	3	5	7	9	11	13	15

Vidíme, že pokud je n osob mocninou dvou, přežije vždycky číslo 1. Ostatně, lze to vypočítat i z odvození vztahu (1). Můžeme tedy psát $J(2^m) = 1$.

Pokud n není roven mocnině dvou, vyjádříme jej jako $n = 2^m + l$, kde m je největší číslo takové, že $2^m \leq n$. Na mocninu dvou se n zredukuje po l škrtnutích. První číslo v pořadí za l -tým škrtnutým je $2l + 1$ (škrtnáme totiž každé druhé číslo). Zbývající čísla si nyní představíme jako instanci Josefova problému, kde je prvním číslem právě $2l + 1$. Protože počet osob je mocninou dvou, je $2l + 1$ i přeživším číslem. Platí tedy, že

$$J(2^m + l) = 2l + 1. \tag{3}$$

Pokud chceme nalézt řešení Josefova problému pro n , musíme nalézt největší mocninu dvou menší než n a od n ji odečíst. Rozdíl poté vynásobíme dvěma a přičteme k němu jedničku.

2. Rozpoznávání barev

Hádanka je z oblasti interaktivních dokazovacích systémů. K jejímu vyřešení není potřeba hlubokých znalostí matematiky, postačí elementární znalost pravděpodobnosti.

Uvažujme dva kamarády, Alici a Boba. Alice je barvoslepá, Boba má různobarevné kuličky. Bob chce o tom, že kuličky jsou skutečně různobarevné, Alici přesvědčit. Tě ovšem, kvůli barvosleposti, kuličky připadají stejné. Úkolem je vymyslet scénář, ve kterém figurují jenom Alice, Bob, kuličky a mince, a díky kterému Bob může přesvědčit Alici o různobarevnosti svých ponožek s velkou jistotou. (Bob nemůže Alici přesvědčit úplně, pravděpodobnost, že Bob Alici lže se ale dá snížit na libovolně malé (nenulové) číslo.)

Řešení

Bob dá kuličky Alici, Alice drží každou kuličku v jedné ruce. Poté se Bob otočí k Alici zády tak, aby na kuličky neviděl. Alice si hodí mincí a

pokud padne orel, tak kuličky prohodí (tj. kuličku, kterou drží v levé ruce, si dá do pravé ruky a tu z pravé ruky bude držet levou rukou). Bob se otočí zpět a Alice se jej zeptá, jestli kuličky prohodila. Pokud jsou kuličky skutečně různobarevné, Bob to pozná s pravděpodobností 1. Pokud nejsou různobarevné, Bob si pravděpodobností $1/2$ správný výsledek tipne. Předchozí pokus lze opakovat, řekněme, že jsme jej zopakovali n -krát. Pokud nejsou nejsou různobarevné, je pravděpodobnost, že Bob odpoví n -krát správně pouhým tipováním $1/2^n$. Například pro $n = 10$ už je to méně než $1/1000$. Pokud tedy Bob odpoví ve všech opakováních správně, jsou kuličky různobarevné s pravděpodobností $1 - 1/2^n$.

3. Svoboda za minci

Vězni Alois a Bořivoj si zahrají se žalářníkem následující hru. Žalářník připraví šachovnici o velikosti 8×8 políček. Na každé políčko umístí minci, některé z mincí jsou obráceny nahoru orlem, jiné hlavou. Poté žalářník zavolá k šachovnici Aloise (Bořivoj v ten moment šachovnici nevidí) a ukáže na jednu minci na šachovnici. Alois si poté také jednu minci na šachovnici vybere, obrátí ji a odejde. Potom zavolá žalářník Bořivoje a požádá ho, aby našel minci, kterou žalářník Aloisovi. Pokud Bořivoj tuto minci najde, jsou oba vězni propuštěni. Vězni si mohou dopředu připravit strategii, po zahájení hry už ovšem spolu nesmí komunikovat. Existuje strategie, se kterou vězni vždy zvítězí?

Řešení

Bořivoj může poznat, kterou minci žalářník Aloisovi ukázal, pouze ze situace na šachovnici, například ze seznamu míst, na kterých je mince otočená hlavou nahoru. Potřebujeme tedy nějakou funkci, která množině takových míst přiřadí místo, které označil žalářník. Aloisovou úlohou bude otočit minci na šachovnici tak, aby funkce vrátila správné místo, Bořivoj ji pak spočítá.

Očíslujme políčka na šachovnici čísly 0 až 63. Každé z těchto čísel můžeme reprezentovat pomocí řetězce 6 bitů. Dále předpokládejme, že na šachovnici je n míst s mincí otočenou hlavou nahoru. Bitové reprezentace těchto míst označíme pomocí T_i pro $i = 1, \dots, n$. Jako J označíme bitový zápis místa, které vybral žalářník, a jako X bitový zápis místa, na kterém Alois otočí minci. Naše funkce je prostou \oplus operací XOR aplikovanou po bitech na místa, na kterých je hlava. Alois tedy musí nalézt hodnotu X

v rovnici

$$(T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_n) \oplus X = J.$$

Řešením je

$$X = (T_1 \oplus T_2 \oplus \dots \oplus T_n) \oplus J.$$

Pokud je na místě X před otočením mince orel, protokol je zřejmě správně. Pokud je ovšem na tomto místě před otočením mince hlava, mohlo by se zdát že předchozí trik nefunguje. Uvědomíme-li si však, že v tomto případě máme $X = T_i$ pro nějaké i a navíc pro libovolný bitový řetězec S platí $S \oplus S = 0$, pak vidíme, že

$$\begin{aligned} J &= (T_1 \oplus \dots \oplus T_i \oplus \dots \oplus T_n) \oplus T_i = \\ &= T_1 \oplus \dots \oplus T_i \oplus T_i \oplus \dots \oplus T_n = T_1 \oplus \dots \oplus T_{i-1} \oplus T_{i+1} \oplus \dots \oplus T_n \end{aligned}$$

a Bořivoj spočítá správnou pozici.

4. Inspekce čerpacích stanic

Inspektor chce navštívit benzínky, které jsou rovnoměrně rozmístěny na úseku silnice. Očíslujme si je $1, 2, \dots, n$. Inspektor začíná na benzínce 1, u benzínky 2 až $n - 1$ musí všechny navštívit stejněkrát, a benzínky 1 a n musí navštívit nejméně dvakrát. Není určeno, na které benzínce má inspektor cestu zakončit. V jakém pořadí musí inspektor benzínky navštívit, aby urazil nejkratší vzdálenost a proč?

Řešení

Úlohu si můžeme zjednodušit a převést do grafové podoby. Protože minimalizujeme vzdálenost, kterou inspektor urazí, můžeme předpokládat, že když jede okolo nějaké benzínky, tak ji i navštíví. Tím pádem hledáme nejkratší sled začínající v uzlu 1, který navštíví uzly 1 a n nejméně dvakrát, v následujícím grafu:

$$1 \text{ — } 2 \text{ — } \dots \text{ — } n$$

Délku nejkratšího sledu můžeme zesponu omezit následovně. Protože máme navštívit uzel n dvakrát, musíme i uzel $n - 1$ navštívit minimálně

dvakrát. Podobně odvodíme, že i ostatní uzly musíme navštívit minimálně dvakrát, dohromady je to $2n$ návštěv. Při každé návštěvě uzlu, mimo první návštěvy uzlu 1, ve kterém začínáme, musíme přejít po hraně ze sousedního uzlu, tj. dohromady přejdeme přes $2n - 1$ hran.

Lze tohoto minima dosáhnout? Pokud je n sudé, pak ano. Můžeme uzly projít v pořadí

$$1, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 4, \dots,$$

tak jako na následujícím obrázku.

$$1 \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightleftarrows \\ \rightarrow \end{array} 2 \longrightarrow 3 \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightleftarrows \\ \rightarrow \end{array} 4 \longrightarrow \dots$$

Pokud je ovšem n liché, pak minima dosáhnout nemůžeme. Platí totiž následující tvrzení:

Pokud je n liché, neexistuje sled, ve kterém bychom navštívili každý z mezilehlých uzlů $2, \dots, n - 1$ právě dvakrát.

Tvrzení dokážeme indukcí. Pro $n = 3$ (kde 2 je jediný mezilehlý uzel) tvrzení platí. Předpokládejme tedy, že platí pro liché $n \geq 3$. Pokud by tvrzení neplatilo pro $n + 2$, museli bychom uzel $n + 1$ navštívit dvakrát a sled bychom museli zakončit $\dots, n + 1, n + 2, n + 1, n + 2$, a žádný z uzlů $n + 1, n + 2$ předtím nenavštívit. Pak by ovšem předchozí segment sledu, ve kterém jsme navštívili uzly $1, \dots, n$, byl legitimním sledem odpovídajícím zadání pro n uzlů. To je ale spor s indukčním předpokladem.

Pro liché n je tak optimálním sledem

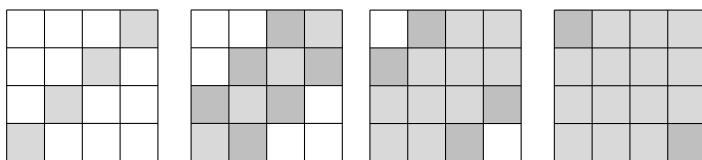
$$1, 2, \dots, n - 1, n, n - 1, \dots, 2, 1, 2, \dots, n - 1, n.$$

5. Nakažená šachovnice

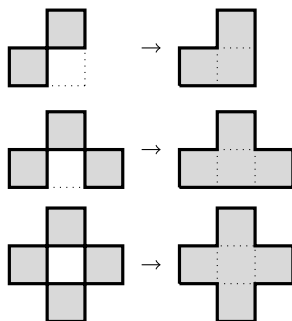
Představme si, že na zobecněné šachovnici, která má stranu dlouhou n políček, se mohou jednotlivá políčka nakazit virem. Z nakaženého políčka virus nikdy nezmizí. Do nenakaženého políčka se rozšíří v případě, že alespoň dvě jeho sousední políčka jsou nakažená. Uvažujeme přitom pouze horizontální a vertikální sousedy. Jaký je minimální počet políček, která musíme na začátku nakazit, aby se nákaza rozšířila na celou šachovnici?

Řešení

Po chvilce experimentování zjistíme, že lze najít n políček, ze kterých se nákaza úspěšně rozšíří. Můžeme vybrat například diagonálu. Viz následující příklad na šachovnici se stranou dlouhou 4 políčka.



Zbývá ověřit, že na začátku nelze vybrat méně než n políček. K tomu postačí následující úvaha. Změříme obvod souvislých nakažených oblastí, za jednotku zvolíme hranu jednoho políčka. Podíváme-li se na předchozí obrázky, tento obvod je u všech 4 šachovnic vždy 16 hran. To není náhoda. Nakazíme-li totiž nenakažené políčko, obvod nakažené části se nemůže zvětšit. Nakažením vždy z obvodu odebereme nejméně dvě hrany (hrany mezi nenakaženým políčkem a jeho nakaženými sousedy) a přidáme maximálně dvě hrany (hrany mezi nenakaženým políčkem a jeho nenakaženými sousedy). Viz příklady na následujícím obrázku.



Na konci má nakažená část obvod $4n$ hran, na začátku tedy musíme nakazit minimálně n políček.

Poznámka. První hádanka je převzata z knihy [1]. Druhá hádanka je variací na interaktivní protokol pro grafový izomorfismus. Zbylé hádanky jsou převzaty z knihy [2].

Literatura

- [1] *Graham, R., Knuth, D. E., Patashnik, O.:* Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science (2nd Edition). Addison–Wesley Publishing, Reading, Massachusetts, 1994.
- [2] *Levitin, A. Levitin, M.:* Algorithmic puzzles. Oxford University Press, Oxford, 2011.

Katalogizace knih pro knihovní systém pomocí otevřených dat

MIROSLAV ZÍKA

Fakulta pedagogická ZČU v Plzni

Knihovní služby v době mimořádných opatření zaznamenaly nesčetné omezení. Dne 13. 3. 2020 bylo přijato usnesení č. 199 o přijetí krizového opatření [1], které zakazovalo přítomnost veřejnosti v knihovnách. V průběhu roku docházelo k vydávání doporučení, přičemž v současné době platí opatření č. 575 [2]. V něm jsou vymezené podmínky pro provoz knihovních a dalších kulturních institucí. Během té doby musely knihovny nabídnout alternativní způsoby zapůjčování literárních děl veřejnosti. Jejich možnosti byly ovšem značně rozdílné kvůli různorodosti jejich zázemí.

Výsledky těchto aktivit mapuje ve čtyřech krajích¹⁾ série článků *Dopad koronavirové situace na knihovny* internetový měsíčník *Čtenář*. Mezi zmíněné možnosti výpůjček patří:

- donáška knih do domu [3],
- bezkontaktní výpůjční systém,
- poskytování e-knih (např. akce *#knihyprotiviru*).

V případě prvních dvou zmíněných možností je nutno počítat s předpokladem, že čtenáři mají k dispozici seznam knih obsažených v knihovním fondu – ať již v podobě elektronického katalogu nebo např. v méně komfortní papírové podobě. Pouze tak mohou čtenáři vybírat z dostupných knížek a následně komunikovat s personálem za účelem výpůjček.

Problematiku zprostředkování knihovního fondu čtenářům jsme řešili také v knihovně Mladého Smolivce, která se i přes menší velikost dá považovat za nedílnou veřejnou službu v obci. Článek tudíž může sloužit jako materiál uvádějící do problematiky využití otevřených dat a jako shrnutí poznatků získaných během vývoje zmíněného knihovního systému.

Podmínky kladené na knihovní systém

Mezi primární podmínku vzniknuvšího systému byla jeho dostupnost. Vzhledem k tehdy platným vládním nařízením se realizační tým přiklonil

¹⁾Středočeský kraj, kraj Vysočina, Ústecký kraj a Liberecký kraj.

k podobě webové stránky disponující vyhledáváním v databázi. Na webový portál je nutno z hlediska funkcionalit pohlížet ze dvou rozdílných rolí:

- *Čtenář*: disponuje přístupem do katalogu a v případě ověřeného účtu také právem rezervace knihy k zapůjčení.
- *Knihovník*: rozšíření role čtenáře, kterému je navíc umožněno potvrzovat výpůjčky, potvrzovat vrácení a vkládat nové knih do systému s případnou změnou vložených údajů.

Dalšími kritérii byla jednoduchá správa výpůjčního procesu a správa knih v knihovním fondu. V počátečním konceptu měl čtenář k dispozici kromě názvu knihy a jeho autora také stručnou anotaci, žánrové zařazení, jazyk textu a miniaturu obálky knihy. K těmto údajům následně přibýly další doplňující údaje, jež v případě výběru nehrají klíčovou roli, ale mohly by je využít případní čtenáři-studenti za účelem citací, tj. nakladatel, číslo vydání, rok vydání a ISBN. Na základě zmíněných údajů bylo možné navrhnout strukturu tabulky, ale hlavně vyvodit vyšší náročnost evidence záznamů, převážně z důvodů delších anotací, neboť i pouhé vyhledávání textu by bylo časově náročné.

Existující knihovní systémy

Anna Stöcklová ve svém článku *Automatizace v knihovnách České republiky* zmiňuje přehled automatizovaných knihovních systémů [4]. Jedná se o systémy disponující kromě základních funkcionalit také modulem katalog, který by umožňoval potřebnou evidenci a prohlížení knihovního fondu. Pravděpodobně nejznámější z představených automatizovaných systémů je knihovní systém ALEPH, který využívá minimálně knihovna Západočeské univerzity v Plzni.

Všechny ve článku uvedené systémy mají nicméně pár nevýhod, především placené využívání a omezené možnosti zásahu do grafického vzhledu, kvůli nimž jsme se nakonec rozhodli pro vlastní implementaci databázového řešení.

Otevřená data

Evidence knižních záznamů v podobě datových entit by dle výše uvedeného řešení byla na správci webu, popřípadě knihovnici se stejnými přístupovými právy. Jak již bylo zmíněno výše, vzhledem k většímu počtu informací vázaných k objektu a počtu knih nutných k evidenci, bylo nutno vyhledat prostředky ke snížení časové náročnosti evidence.

Dostupnost knižního fondu přes webové rozhraní nabízelo využití principů otevřených dat a s nimi spojené webové služby. Otevřená data jsou velice široký pojem, což vyplývá z definice organizace Open Knowledge Foundation [5]: „Otevřená data jsou data, která může kdokoliv volně použít, opakovaně využít a redistribuovat pouze s výhradou požadavků na atributy sdílení.“ Nutno zmínit, že se neřeší ani účel využití těchto dat. Aby data byla ovšem považována za otevřená, musí splňovat kritéria níže [6]:

Úplnost dat: data by měla být poskytována v co největším rozsahu; nemělo by tedy docházet k odstraňování konkrétních záznamů a současně by měly být udržovány v co nejaktuálnějším stavu.

Strojová čitelnost: data jsou ukládána ve formátech, které je možné číst pomocí programových aplikací. Jedná se o formáty volně dostupné, nebo formáty bezplatně do nich převoditelné. Např. html, pdf, jpeg, xml, . . .

Dostupnost: je podmíněno minimálním vynaložením nákladů pro získání otevřených dat, ačkoliv poskytovatel může požadovat o zpoplatnění přístupu ve výši nákladů spojených s jejich zpřístupněním veřejnosti. Podmínky využití musí být jasně definovány pomocí uvedení licence. Je dělena do pěti kategorií.

Na internetu je množství dat ve výše zmiňovaných formátech, nicméně to samotné z nich nečiní data otevřená. Co vytváří otevřená data opravdu specifickými a opravdu otevřenými je právě kombinace výše uvedených vlastností – převážně strojová čitelnost a dostupnost. Dohromady vytvářejí prostředek k vývoji softwarových aplikací a odborných analýz [6]. Jejich dostupnost a jednoduchost čitelného čtení umožňuje nejen programátorům, ale také vědcům a novinářům rozvíjet dále význam těchto dat a pomáhat tím k rozvoji společnosti, což je i případ tematiky tohoto článku.

Webové služby a čerpání otevřených dat

Jedná se o nástroje využívající protokol HTTP(S). Pomocí nich je zajištěna komunikace napříč aplikacemi, přičemž pod pojmem komunikace dochází k podobnému činnosti jako je načítání webové stránky. Na základě požadavku ze strany klienta dochází ke zpracování vstupních dat webovou službou, která zpět odešle odpověď v podobě požadovaných dat, nejčastěji v podobě XML souboru. Vzhledem k prostředí, ve kterém komunikace probíhá, je možné využít ostatní webové technologie k samotné komunikaci – tedy především skriptovací jazyky JavaScript, PHP či jejich kombinaci v podobě AJAXu [7].

Google Books API

Typ webové služby: REST

Google Books je vyhledávací služba od společnosti Google, která vznikla v roce 2004. Jedná se o projekt, jehož cíle je digitalizace tištěných knih a umožnění jejich prohlížení v rozsahu dle autorského zákona. V současné době je do projektu zapojeno více druhů institucí, neboť pomocí této služby je umožněno knihy prohlížet, zapůjčovat, ale i prodávat [8].

Součástí projektu je také webová služba Google Books API, která bez poplatků umožňuje přístup k informacím o evidovaných knižních entitách. Pro plné využívání je nutno službu provázat s Google účtem. Portálu knihovny službu využívalo k získání informací na základě ISBN, nicméně starší knihy nebylo možné takto vyhledávat. V případě novějších knih došlo při vyhledání na základě ISBN i k zobrazení neodpovídajících záznamů. Výčet by bylo možné zredukovat přidáním dalšího vyhledávacího parametru, např. jména autora.

Výsledky zobrazené na obr. 1 byly získány podáním požadavku následující URL adresou: <https://www.googleapis.com/books/v1/volumes?q=9788024711164>

Rostlinolékař	Dorothea Baumjohann,Peter Baumjohann	2007	Zapiš
Tachles, Lustig	Arnošt Lustig,Karel Hvizďala,Jan Malý	2011	Zapiš
Neviditelný	C.D. Payne	2012-01-01	Zapiš
Tvorba informačních systémů	Bruckner Tomáš, Voříšek Jiří, Buchalceová Alena a kolektiv	2012	Zapiš
Připravujeme zahradu na jaro a léto	Pasečný Petr	2012-03-19	Zapiš
Moje první pohádky	Marie Tetourová	2020-01-01	Zapiš
Biosyntéza	Boadella David, Carletonová Jacqueline A., Frankelová Esther, Rodriguesová Eunice	2012	Zapiš
Mimozemšťani útočí! : případ č. 1	Thomas Brezina	2012	Zapiš
Antonín Vitvar – 20 let na Jawě a Nortonu	Vitvar Jan	2012	Zapiš
PHP a XML	Jiří Kosek	2009	Zapiš

Obr. 1 Vykreslené výsledky vyhledávání ISBN 978-80-247-1116-4 (PHP a XML)

Parametr q představuje vyhledávaný řetězec, který je v případě potřeby možné rozšiřovat o doplňující informace konkretizující vyhledávanou knihu. Odpověď webové služby Google Books API, kterou zobrazí i prostý prohlížeč, je objekt typu JSON s jednotlivým záznamy odpovídající krité-

riím vyhledávání. Přístup k atributům je znázorněn na obr. 2.

```
$.getJSON("https://www.googleapis.com/books/v1/volumes?q=" + d, function (c) {
    "undefined" == typeof c.items
    ? print_modal("\u017d\u00e1dn\u00e1 kniha se neshoduje s ISBN.")
    : 1 < c.items.length && 0 == b
    ? print_modal(modal_vypis_knihy(c.items), 1)
    : ($("#nazev-js").val(c.items[a].volumeInfo.title),
      $("#autor-js").val(c.items[a].volumeInfo.authors.join(", ")),
      $("#rok-js").val(c.items[a].volumeInfo.publishedDate.substring(0, 4)),
      "cs" == c.items[a].volumeInfo.language && $("#jazyk-js").val("\u010c\u00e9\u0161tina"),
      c.items[a].volumeInfo.description != null && $("#notace-js").val(c.items[a].volumeInfo.description),
      c.items[a].volumeInfo.publisher != null && $("#vydavatel-js").val(c.items[a].volumeInfo.publisher));
});
```

Obr. 2 Načtení dat pomocí JS

Kromě základních informací jsou záznamy doplněny o další atributy, např. cenu knihy, počet stránek, zda je výtisk k prodeji aj. Podrobné informace k implementaci webové služby můžete nalézt v [dokumentaci](#).

knihovny.cz

Typ webové služby: Z39.50

Jedná se o portál vycházející z projektu Koncepce rozvoje knihoven ČR na léta 2011–2015, který má za jeden z cílů umožnit přístup do knižních katalogů. Na této spolupráci se podílí již více jak šest desítek knihoven, včetně 4 univerzitních. Kromě toho umožňuje služba pomocí parametru prohledávat více zdrojů [9]:

- souborný katalog ČR,
- výběr ze zahraničních knihoven,
- staré tisky,
- články,
- zaměření dle jazyka:
 - anglicky mluvící země,
 - německy mluvící země,
 - slovensky mluvící země.

Vyhledávání je na webu knihovny realizováno na základě uvedeného názvu díla a jména autora (stačí příjmení). Oproti *Google Books API* dokáže služba dohledat informace i o starších knižních titulek, dochází ale k nalezení více záznamů, což se projevuje v delší době zpracování dat a následného zobrazení výsledků.

Nevýhodou jsou také rozličnosti ve struktuře dat a způsobu jejich plnění, neboť centralizovaná data nejsou pravděpodobně nijak centrálně validována. Aspoň to by mohl být důvod, proč dochází k neúplnosti dat,

k jejich nečitelnosti nebo i k prohození údajů uvnitř struktury (např. cena místo ISBN). Vzhledem k rozličnostem v evidenci byly implementovány dvě funkce – zápis celého záznamu a zápis pouze anotace.

Nalezeno záznamů: 368

Záznam: 1 <input type="button" value="Zapsat"/> <input type="button" value="Zapsat anotaci"/>		
Autor: Dumas Alexandre	ISBN: 46.00	Název: Tři mušketýři.
Nakladatelství: Albatros	Rok: 1987	Vydání: 5. vyd.

Záznam: 2 <input type="button" value="Zapsat"/> <input type="button" value="Zapsat anotaci"/>		
Autor: Dumas Alexandre	ISBN: 33.00	Název: Tři mušketýři po dvaceti letech.
Nakladatelství: Albatros	Rok: 1982	Vydání: 1. vyd.

Záznam: 3 <input type="button" value="Zapsat"/> <input type="button" value="Zapsat anotaci"/>		
Autor: Dumas Alexandre	ISBN: 32.00	Název: Tři mušketýři ještě po deseti letech aneb Vikomt de Bragelone.
Nakladatelství: Albatros	Rok: 1978	Vydání: 1. vyd.

Záznam: 4 <input type="button" value="Zapsat"/> <input type="button" value="Zapsat anotaci"/>		
Autor: Doblado Ana	ISBN: 978-80-7567-819-5	Název: Tři mušketýři /
Nakladatelství: Sun	Rok: 2021	Vydání: 2. vydání
Array		

Obr. 3 Vykreslené výsledky vyhledávání pro „tři mušketýři“ a „Dumas“ (pouze část výsledků)

Data získaná pomocí webové služby *knihovny.cz* se zpracovávají do zobrazitelné podoby pomocí skriptovacího jazyka PHP a funkce pro práci s protokolem Z39.50, viz obr. 4.

```
$yaz = yaz_connect("www.knihovny.cz:9000");
yaz_database($yaz, "cpk_caslin");
yaz_range($yaz, 1, 10);
yaz_search($yaz, "rpn", "&and @attr 1=4 *. $kniha." @attr 1=1003 *. $autor.");
yaz_wait();
$error = yaz_error($yaz);
if (!empty($error)) {
    echo "Chyba: $error\n";
} else {
    $hits = yaz_hits($yaz);
    echo "<pre>Nalezeno záznamů: $hits</pre>";
    for ($p = 1; $p <= $hits; $p++) {
        $kniha = array("id" => "", "isbn" => "", "autor" => "", "nazev" => "", "vydani" => "", "vydavatel" => "", "rok" => "", "anotace" => "", "zann" => "");
        $kniha["id"] = $p;
        $rec = yaz_record($yaz, $p, "xml");
        $reader = simplexml_load_string($rec);
        //print_r($reader);
        if (empty($rec)) break;
        /*
        if(strpos($reader->controlfield[3], "cze") === false){
            continue;
        }
        */
        //echo $reader->controlfield[3];
        //print_r($reader);
        foreach ($reader->datafield as $value){

```

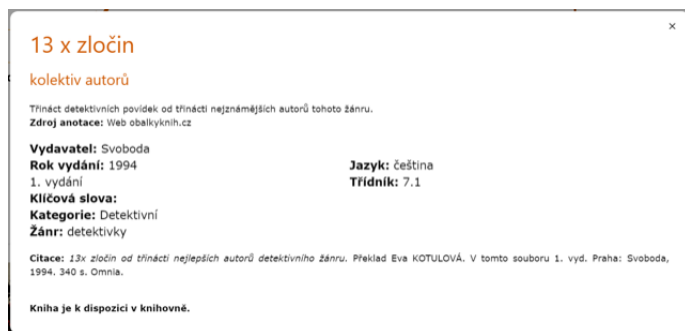
Obr. 4 Zpracování dat ze služby knihovny.cz pomocí PHP

Získání dat je zde realizováno pomocí funkce `yaz_search`, jejíž parametry jsou údaje k připojení k databázi a řetězec definující vyhledávací sekvenci – konkrétněji zde dochází k vyhledávání v závislosti na jménu knihy a jejího autora (zpracování vstupních dat není ve skriptu zobrazeno). V případě nechybového vyhledávání jsou v konstrukcích `for` a `foreach` postupně zpracovány získané záznamy k vykreslení do šablony.

obalkyknih.cz

Typ webové služby: REST

Webová služba vznikla v roce 2008 v rámci projektu VISK3 a stojí za ní, obdobně jako u služby *knihovny.cz*, Moravská zemská knihovna. Primárním cílem této služby byla však centralizace obálek knih za účelem poskytování náhledů do katalogů ostatních knihoven. Na vývoji služeb se postupně podílela Vědecká knihovna Olomouc, Městská knihovna v Praze, Sdružení knihoven ČR a Jihočeská vědecká knihovna v Českých Budějovicích. V současné době databáze obsahuje přes 2,4 miliónů obálek a 650 tisíc obsahů českých i zahraničních publikací. Služba totiž kromě obálek a obsahů poskytuje také anotace, hodnocení knih a citace dle normy ISO 690. Na obrázku níže jsou zobrazeny informace o zvolené knize. Kromě údajů z interní databáze portálu je zde uvedena citace a se zdrojem zvýrazněna anotace, protože je získána pomocí služby *obalkyknih.cz* (pokud interní záznam anotaci nemá) [10].



Obr. 5 Zobrazení informací o knize pomocí modálního okna

Služba poskytovaná serverem *obalkyknih.cz* je podmíněna registrací, kdy je do účtu knihovny nutno uvést IP adresu či URL adresu katalogu, a vytvořením zpětného odkazu na stránky poskytovatele. V případě knihovních stránek je požadovaný odkaz vytvořen na poskytované obálce knihy.

Na obr. 6 je vykreslen výsledek úspěšného vyhledání s parametrem ISBN 80-205-0441-9. Pro knihu *15 pátračů* s ISBN 01-080-87 nebylo nic nalezeno, byl tedy automaticky nahrán obrázek o velikosti 1 × 1 px s transparentním pozadím.



Obr. 6 Vyhledávání v katalogu pro žánr Detektivní

Odeslání požadavku o data ze služby *obalkyknih.cz* je kombinací předchozích dvou služeb. Požadavek je definován URL adresou, která obsahuje parametry vyhledávání, a získaná odpověď je zpracována pomocí PHP. V ukázce se jedná o ISBN a části názvu: [http://cache.obalkyknih.cz/api/books?multi=\[{"isbn":"XXX","part_name":"XXX"}\]](http://cache.obalkyknih.cz/api/books?multi=[{) I zde by bylo možné si výsledek zobrazit v prohlížeči, služba je ale omezena pouze na registrované domény a IP adresy. Z toho důvodu je odpověď ještě zpracována právě pomocí PHP, který je prováděn na serveru a klient získává celistvou vykreslenou stránku se všemi údaji.

Podrobné informace k implementaci webové služby můžete nalézt v [dokumentaci](#).

Zprovoznění systému

Do knihovního systému bylo v rámci testování evidováno 50 knih – nejprve pomocí vyhledávání, následně bez. Časová náročnost evidence, kterou by bylo možné ještě snížit redukcí nepovinných údajů, je zobrazena v tabulce 1.

Styl vkládání	Časová náročnost
Vyhledání údajů	2 hodiny a 12 minut
Manuální vepsání všech údajů	2 hodiny a 39 minut

Tabulka 1: Přehled časové náročnosti evidence knih do systému

Rozdílnost v evidenci daného počtu knih bez vyhledávání a s vyhledáváním je 27 minut. Jedná se o relativně nízké ušetření času, které je pravděpodobně způsobeno následujícími faktory.

- Systém nedovede pomocí skriptů vybírat žánr knihy.
- Je nutno z vyhledaných údajů vybrat správný např. dle roku vydání či vydavatele.
- Po doplnění údajů z otevřených dat je nutno provést kontrolu.
- Je nutno vyplnit unikátní evidenční číslo knihy²⁾ a její třídění dle umístění v knihovně.

Oproti tomu manuální zapsání všech údajů je nejvíce problematické v nalezení informací ve vydavatelské tiráži, žánrového zařazení knihy a případné vepsání stručné anotace. Ze začátku byl žánr vybírán dle posouzení, následně se k tomu využívala Databazeknih.cz, která velkou měrou usnadnila získání údajů o žánru i anotaci.

Závěr

Článek pojednává o využití otevřených dat za účelem komfortnější evidence knižních titulů pro knihovnu Mladý Smolivec. Stručně seznamuje čtenáře s třemi webovými službami (Google Books API, knihovny.cz, obalkyknih.cz) a jejich využitím pro vytvořený portál knihovny, což je doplněno názornými skripty zpracující v odpovědi získaná data. Cílem článku je poskytnout čtenáři náhled do případné automatizace a digitalizace odvětví, které má na první pohled s touto tematikou velmi málo společného. Současně jsou mu také představena *otevřená data*, která jsou obsahově mnohem širší než ve zde zmíněné tematice. O jejich využití je snaha i ze strany vlády České republiky.

První webová služba, která byla v portálu knihovny využívána za účelem efektivní evidence knih, *Google Books API*, z počátku působila jako dostačující. Byly v ní k dispozici všechny potřebné informace o knize – od autora po zkratku země, ve které kniha byla publikovaná. V mnohých případech zde byly k dispozici i náhledy knížek, které by bylo ovšem nutno ukládat do databáze, protože nebylo možné získat pouze jednu konkrétní hodnotu. Tato služba se ovšem ukázala jako nedostačující pro starší knižní tituly, kterých byla většina. Z toho důvodu byly využity ještě dvě webové

²⁾Knihy mají v databázi unikátní číselné ID, ale to nebylo možné využít.

služby, které mají zázemí v České republice – *knihovny.cz* a *obalkyknih.cz*. Ani tyto webové služby nelze vždy efektivně využít za účelem snadného získání údajů ke všem knihám, hlavně v případě získání obálek knih, nicméně obě služby nabízejí širokou škálu dalších informací či doplňujících záznamů, pomocí nichž je možné potřebné údaje „poskládat“ dohromady.

Literatura

- [1] Usnesení vlády České republiky č. 199. Vláda České republiky. [Online] 12. Březen 2020. <https://apps.odok.cz/attachment/-/down/IHOABMNHPPAD>.
- [2] Mimořádné opatření č. 575. Vláda České republiky. [Online] 21. Červen 2021. <https://www.vlada.cz/assets/media-centrum/tiskove-zpravy/w210621a-0575.pdf>.
- [3] *Hradil, J.*: Téma: Dopad koronavirové situace na knihovny: Mimořádná opatření s vlivem na úpravy a rozvoj služeb (výsledky dotazníkového...). Čtenář – měsíčník pro knihovny. [Online] Listopad 2020. <https://www.svkkl.cz/ctenar/clanek/3216>.
- [4] *Stöcklová, A.*: Automatizace v knihovnách České republiky. Ikaros. [Online] 2006. <https://ikaros.cz/automatizace-v-knihovnach-ceske-republiky>.
- [5] *Dietrich, D., a kol.*: Open data handbook. [Online] <http://opendatahandbook.org/guide/en/what-is-open-data/>.
- [6] Ministerstvo vnitra České republiky. Standardy publikace a katalogizace otevřených dat VS ČR. Otevřená data. [Online] 2015. https://opendata.gov.cz/_media/standardy_publicace_a_katalogizace_otevrenych_dat_vs_cr.pdf.
- [7] *Kosek, J.*: PHP a XML. Grada, Praha, 2009.
- [8] Google Books. About Google Books. Google Books. [Online] Google. <https://www.google.com/intl/en/googlebooks/about/index.html>.
- [9] knihovny.cz. O portálu. Knihovny.cz. [Online] Moravská zemská knihovna. <https://www.knihovny.cz/Portal/Page/o-portalu>.
- [10] Obálky knih. O projektu Obálkyknih.cz. Obálky knih. [Online] Moravská zemská knihovna, Jihočeská vědecká knihovna v Českých Budějovicích. <https://www.obalkyknih.cz/about>.

ZPRÁVY

Mezinárodní olympiády v informatice v roce 2021

Ve školním roce 2020/21 přetrvávala na celém světě dlouhodobá hygienická opatření způsobená epidemií koronaviru. Také u nás byly po většinu doby školy uzavřeny a všechny středoškolské soutěže a předmětové olympiády se tak mohly uskutečnit pouze distanční formou. Tato omezení pochopitelně zasáhla i všechny programátorské soutěže, národní i mezinárodní.

Krajské kolo 70. ročníku Matematické olympiády kategorie P (programování) se konalo v původně plánovaném termínu v polovině ledna 2021. Zúčastnilo se ho 85 soutěžících z 11 krajů, ve třech krajích tentokrát žádný student olympiádu neřešil. Celkem 40 řešitelů získalo za řešení úloh krajského kola alespoň 15 bodů ze 40 možných a stalo se tak úspěšnými řešiteli. Z nich 30 nejlepších postoupilo do ústředního kola, přičemž k postupu bylo zapotřebí minimálně 21 bodů.

Ve dnech 25.–26. 3. 2021 se konalo ústřední kolo MO kategorie P, samozřejmě opět distančním způsobem. Zúčastnilo se ho 29 ze 30 pozvaných studentů. Největší zastoupení měl kraj Praha s devíti a Jihomoravský kraj s osmi soutěžícími. Účastníci ústředního kola řešili jako obvykle tři teoretické úlohy v prvním soutěžním dnu a tři praktické úlohy ve druhém soutěžním dnu. Soutěžní úlohy byly poměrně obtížné, ale i přesto letošní celkový vítěz soutěže *Václav Vladimír Janáček* získal za svá řešení úloh plný počet 60 bodů, což se v ústředním kole MO-P málokdy někomu podaří. První dvě místa v celkovém pořadí obsadili studenti z gymnázia na tř. kpt. Jaroše v Brně, mezi patnácti úspěšnými řešiteli bylo pět studentů z gymnázia Jana Keplera v Praze 6 a tři z gymnázia na Mikulášském náměstí v Plzni. Uvedené tři školy byly v letošní soutěži nejúspěšnější.

Podrobnější informace o celém 70. ročníku Matematické olympiády kategorie P naleznete na webu olympiády <https://mo.mff.cuni.cz/>. Pro zájemce jsou zde k dispozici zadání i vzorová řešení soutěžních úloh ze všech tří kol, testovací data k praktickým úlohám i výsledkové listiny. V archívu se pak můžete seznámit i se soutěžními úlohami ze starších ročníků olympiády.

Na základě výsledků ústředního kola MO kategorie P jsme pozvali všechny úspěšné řešitele na krátké výběrové soustředění, na kterém se určuje složení reprezentančních družstev pro obě mezinárodní olympiády v informatice. Toto víkendové výběrové soustředění proběhlo ve druhé polovině dubna formou praktické online soutěže. Při konečném výběru reprezentantů se sčítají výsledky ústředního kola MO-P s výsledky dosaženými na výběrovém soustředění. Čtyři soutěžící s nejlepším součtem dostávají každoročně příležitost reprezentovat Českou republiku na celosvětové Mezinárodní olympiádě v informatice IOI (International Olympiad in Informatics), zatímco další čtyři úspěšní řešitelé z nematuritních ročníků soutěží na Středoevropské olympiádě v informatice CEOI (Central European Olympiad in Informatics).

V roce 2021 se uskutečnil již 33. ročník IOI a 28. ročník CEOI. Mezinárodní olympiády v informatice nemají své pevné místo v kalendáři, přesný termín konání se každoročně přizpůsobuje možnostem místních pořadatelů a pokud možno i termínům ostatních mezinárodních předmětových olympiád. Světová olympiáda IOI se obvykle koná uprostřed prázdnin, střeoevropská CEOI již na konci června nebo na začátku července. Letošní termíny obou soutěží byly z tohoto pohledu značně neobvyklé, neboť IOI se uskutečnila již ve druhé polovině června (ve dnech 19.–28. 6. 2021), zatímco CEOI naopak až na začátku září (konkrétně v týdnu 1.–5. 9. 2021).



Mezinárodní olympiáda v informatice IOI 2021 se měla původně konat v Singapuru. Organizátoři dlouho váhali, jakým způsobem ji mají uspořádat – diskutovala se možnost normální prezenční soutěže i online soutěže. Velkou podporu pořadatelů měla dlouhou dobu hybridní varianta, podle níž by družstva některých zemí přijela do Singapuru, zatímco zbývající družstva by soutěžila ze svých zemí distančně. Příliš pomalý ústup celosvětové pandemie koronaviru nakonec neumožnil uspořádat soutěž prezenčním způsobem ani částečně. Mezinárodní výbor IOI proto rozhodl, že soutěž IOI 2021 proběhne online formou obdobným způsobem, jako tomu bylo již v roce 2020. Soutěžící tedy nemohou soutěžit z domova u svých počítačů, ale představitelé národních výborů olympiády z každé zúčastněné země je musí soustředit na společném místě a stálým dohledem zajistit regulérnost soutěže.

Letošní mezinárodní olympiády v informatice se zúčastnilo celkem 351 soutěžících z 88 zemí celého světa, mimo soutěž navíc řešilo úlohy ještě druhé družstvo pořádající země. Oproti loňskému roku se tak počet zúčastněných zemí zvýšil o jednu a také celkový počet soutěžících mírně vzrostl. Počet zemí i počet soutěžících studentů tím dosáhly rekordních hodnot v celé historii IOI. Naše české družstvo mělo následující složení: *Jiří Kalvoda*, absolvent Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, *Viktor Fukala*, absolvent Gymnázia Jana Keplera v Praze 6, *Magdaléna Mišinová*, absolventka Gymnázia Jana Keplera v Praze 6, *Ondřej Sladký*, absolvent Gymnázia na Mikulášském nám. v Plzni. Vedoucími české delegace na IOI 2021 byli doc. Mgr. *Zdeněk Dvořák*, Ph.D. a doc. RNDr. *Pavel Töpfer*, CSc., oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy.

Reprezentanti České republiky se sešli na MFF Univerzity Karlovy v Praze. Informatická sekce MFF UK poskytla olympiádě na soutěž vhodné prostory, počítače i síťovou infrastrukturu, oba vedoucí i další ochotní pracovníci fakulty se postarali o potřebné organizační a technické zabezpečení. Mimopražští soutěžící měli zajištěno ubytování v Praze po celý týden, kdy se olympiáda konala.

Vlastní soutěž proběhla jako obvykle ve dvou soutěžních dnech, a to v úterý

22. 6. a v pátek 25. 6. Již v sobotu 19. 6. ovšem předcházelo cvičné nesoutěžní kolo určené na seznámení studentů s počítači a se soutěžním prostředím (tzv. practice session), druhé kratší tréninkové kolo se pro zájemce uskutečnilo ještě v pondělí 21. 6. před slavnostním zahájením soutěže. Po druhém soutěžním dnu 25. 6. mohli všichni soutěžící odjet domů a závěrečné vyhlášení výsledků v pondělí 28. 6. už každý sledoval sám ze svého domova.

Průběh soutěže i způsob hodnocení úloh byl prakticky stejný, jako kdyby se soutěžilo obvyklým prezenčním způsobem. V každém soutěžním dnu studenti řešili tři náročné algoritmičké úlohy, na jejichž vyřešení měli 5 hodin času. Několik hodin před soutěží vedoucí všech delegací společně schválili soutěžní úlohy navržené pořadatelskou zemí, upravili podle potřeby jejich formulace a přeložili je do mateřského jazyka svých studentů. Čeští studenti tedy dostali jak anglickou, tak i českou verzi zadání úloh. Každý soutěžící pracuje na přiděleném osobním počítači s nainstalovaným soutěžním prostředím, které umožňuje vyvíjet a testovat programy a odesílat je k vyhodnocení. Správnost vypracovaných programů organizátoři automaticky testují v průběhu soutěže pomocí předem připravené sady testovacích dat, každý test je navíc omezen časovým limitem. Tím je zajištěna nejen kontrola správnosti výsledků, ale pomocí časových limitů se také odliší kvalita použitého algoritmu. Při testování každé úlohy se používají sady testovacích dat různé velikosti, takže teoreticky správné řešení založené na neefektivním algoritmu zvládne dokončit včas výpočet pouze pro některé testy – pro ty menší a jednodušší. Takové řešení je potom ohodnoceno částečným počtem bodů. Částečné body lze získat také za vyřešení některých speciálních případů, zatímco plný počet bodů přinese až řešení fungující v plné obecnosti. Krátce po odevzdání vypracovaného programu do vyhodnocovacího systému se soutěžící dozví hodnocení svého řešení a má pak ještě možnost opravit ho a odevzdat znovu. Řešení každé soutěžní úlohy může soutěžící odevzdat až 50krát a do výsledků se mu započítá bodově nejúspěšnější z těchto pokusů. Podobný systém používáme v posledních letech i u nás v Matematické olympiádě kategorie P pro hodnocení praktických úloh domácího a ústředního kola.

Každá ze šesti soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body, takže celkem bylo možné získat až 600 bodů. To se letos podařilo jedinému studentovi, absolutním vítězem soutěže s plným počtem bodů se stal *Mingyang Deng* z Číny. Na základě přesně stanovených pravidel se na IOI podle dosažených bodů rozdělují medaile. Některou z medailí obdrží nejvýše polovina účastníků soutěže, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se rozdělují v poměru 1 : 2 : 3 s ohledem na to, aby soutěžící se stejným bodovým ziskem získali stejnou medaili. Způsob rozdělení medailí je na IOI stanoven striktními pravidly, na rozdíl od CEOI ho nemohou členové mezinárodního výboru ani vedoucí národních delegací nijak ovlivnit. Na letošní IOI bylo uděleno celkem 173 medailí, z toho 30 zlatých, 58 stříbrných a 85 bronzových.

Výsledky našich soutěžících: 26. *Jiří Kalvoda*, 380 bodů, zlatá medaile, 113. *Viktor Fukala*, 253 bodů, bronzová medaile, 126. *Ondřej Sladký*, 245 bodů, bronzová medaile, 295. *Magdaléna Mišinová*, 133 bodů.

Zisk jedné zlaté a dvou bronzových medailí představuje pro Českou republiku velmi dobrý výsledek. Nejúspěšnější zemí se čtyřmi zlatými medailemi se stejně jako před rokem stala Čína, jejíž reprezentanti měli letos neobvykle silnou převahu a obsadili dokonce první čtyři místa v celkovém pořadí. Dalšími velmi úspěšnými zeměmi byly Rusko, USA a domácí Singapur, všechny se třemi zlatými a jednou stříbrnou medailí. Mezinárodní olympiáda v informatice je výhradně soutěží jednotlivců a oficiální pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlašováno. Není tedy ani stanoveno, zda by se mělo určovat podle počtu medailí, podle celkového počtu bodů získaných soutěžícími dané země nebo třeba podle součtu jejich dosažených umístění. Naše výsledky nás každopádně řadí přibližně do jedné třetiny v celkovém pořadí zúčastněných zemí, tzn. kolem 25.–30. místa. Slovenské družstvo bylo letos ještě o něco úspěšnější než naše, získalo jednu zlatou, jednu stříbrnou a jednu bronzovou medaili.

Všechny podrobnosti o soutěži i texty soutěžních úloh lze nalézt na Internetu na adrese <https://ioi2021.sg/>, kompletní výsledková listina je k dispozici na webové stránce se statistikami <http://stats.ioinformatics.org/results/2021>. Další ročníky Mezinárodní olympiády v informatice se budou konat postupně v Indonésii (2022), Maďarsku (2023) a Egyptě (2024).



Pořadatelem Středoevropské olympiády v informatice CEOI 2021 bylo Chorvatsko. Rovněž chorvatští pořadatelé dlouho plánovali uspořádat soutěž tradiční prezenční formou, měla se původně konat v hlavním městě Záhřebu na začátku října. Na konci května ovšem změnili svoje rozhodnutí a rozhodli se také pro online soutěž. Zároveň s tím posunuli termín konání na začátek září.

Na letošní CEOI soutěžilo celkem 48 studentů z 11 zemí. Vedle osmi tradičních účastnických středoevropských států (Česká republika, Chorvatsko, Maďarsko, Německo, Polsko, Rumunsko, Slovensko, Slovinsko) se navíc přihlásili jako hosté soutěžící z Itálie, Rakouska a Švýcarska. Tyto země se účastní CEOI poměrně často, ale protože se nepodílejí na střídavém pořádání olympiády, musí si svoji účast sami vždy uhradit. Jako obvykle se zúčastnilo také druhé družstvo z pořadatelské země.

České reprezentační družstvo na CEOI 2021 bylo tvořeno těmito studenty: *Daniél Skýpala*, student Gymnázia v Olomouci-Hejčíně, *Benjamin Swart*, student Mensa gymnázia v Praze 6, *Matouš Šafránek*, student Gymnázia Jana Keplera v Praze 6, *Lukáš Tomoszek*, student Gymnázia v Trinci. Vedoucími české delegace na CEOI 2021 byli jmenováni doc. RNDr. *Tomáš Pitner*, Ph.D. z Fakulty informatiky Masarykovy univerzity v Brně a doc. RNDr. *Pavel Töpfer*, CSc. z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Podobně jako při celosvětové olympiádě IOI se soutěžící z každé země shromáždili na dobu konání vlastní soutěže vždy na jednom místě, kde řešili zadané

soutěžní úlohy pod dohledem místních organizátorů národní informatické olympiády. Česká část CEOI se konala v prostorách Fakulty informatiky Masarykovy univerzity v Brně, její průběh i technické zabezpečení výborně zajistili pracovníci této fakulty. Vlastní soutěž proběhla obdobným způsobem jako Mezinárodní olympiáda v informatice IOI, časový program soutěže byl pouze o něco kratší a kompaktnější. Soutěžící se mohli seznámit s počítači a se soutěžním prostředím hned po slavnostním zahájení ve středu 1. 9. 2021, následující den ve čtvrtek 2. 9. se konala první část soutěže a po jednodenním odpočinku byl v sobotu 4. 9. druhý soutěžní den. Na nedělní online vyhlášení výsledků už mohli studenti odjet z Brna a sledovat ho každý sám ze svého domova.

Soutěžní úlohy připravili místní chorvatští pořadatelé. Vedoucí všech zúčastněných družstev se s úlohami seznámili vždy až večer před každým soutěžním dnem a připravili překlady do mateřského jazyka svých studentů. Charakter a náročnost úloh byly podobné jako na mezinárodní olympiádě v informatice IOI, stejným způsobem probíhala také vlastní soutěž a hodnocení odevzdaných řešení. Také na CEOI byly v každém soutěžním dnu zadány tři úlohy.

Každá ze soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body, celkově tedy bylo teoreticky možné dosáhnout 600 bodů. Zatímco v prvním soutěžním dnu získali dva soutěžící plný počet 300 bodů, jedna soutěžní úloha zadaná ve druhém soutěžním dnu se ukázala natolik obtížná, že za ni dokonce nikdo ze soutěžících nedostal ani jeden bod. Celkový vítěz soutěže *Dorijan Lendvaj* z Chorvatska dosáhl výsledku 473 bodů. Úspěšnější polovina soutěžících dostává na CEOI medaile, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se rozdělují v přibližném poměru 1 : 2 : 3. Na CEOI 2021 byly uděleny celkem 4 zlaté, 10 stříbrných a 11 bronzových medailí. Středoevropská olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců, žádné pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlášováno.

Naši reprezentující dosáhli následujících výsledků: 15. *Matouš Šafránek*, 264 bodů, bronzová medaile, 18. *Benjamin Swart*, 239 bodů bronzová medaile, 27. *Daniel Skýpala*, 180 bodů, 47. *Lukáš Tomoszek*, 8 bodů.

Dvě bronzové medaile pro nás představují dobrý výsledek s ohledem na to, že na rozdíl od mnoha jiných zemí posíláme na CEOI soutěžit mladší studenty, kteří se v příslušném roce ještě nedostali na IOI. Tento postup se nám velmi osvědčil. Naši mladší soutěžící získají na CEOI svoje první mezinárodní zkušenosti a často se pak stává, že v následujícím školním roce postoupí na IOI a velmi dobře tam uspějí. Slovenské družstvo letos získalo jednu stříbrnou a jednu bronzovou medaile. Nejúspěšnější zemí na CEOI 2021 bylo tradičně Polsko se dvěma zlatými a dvěma stříbrnými medailemi.

Veškeré informace o soutěži, texty soutěžních úloh i podrobné výsledky všech soutěžících lze nalézt na Internetu na adrese <https://ceoi.hsin.hr>. Představitelé členských států CEOI se dohodli, že následující 29. ročník Středoevropské olympiády v informatice CEOI 2022 se bude konat opět v Chorvatsku, snad již tradičním prezenčním způsobem. Další ročník CEOI v roce 2023 by pak mělo uspořádat Německo.

Pavel Töpfer

MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách

Ročník XXX (2021)

MATEMATIKA *T. Zdražil*: Peer instruction a výuka podobnosti (s. 1) – *J. Blažek*: Čtyři důkazy Heronova vzorce (s. 18) – *L. Juklová, J. Švrček*: Užitečná dvojice kružnic (s. 27) – *T. Riemel*: O exponenciálních diofantovských rovnicích (s. 81) – *R. Halaš, M. Chodorová, J. Švrček*: Překvapivá řešení jedné úlohy (s. 91) – *D. Hrubý*: Z historie výuky infinitezimálního počtu (s. 96) – *J. Polák*: Důkazy v planimetrii užitím vektorů (s. 161) – *I. Chajda*: Egyptské násobení (s. 178) – *J. Zhouf*: Tři speciální body ležící na jedné přímce I (s. 180) – *J. Polák*: Důkazy v planimetrii užitím komplexních čísel (s. 241) – *J. Fiala, M. Hrubešová*: Geometrický průměr ve finanční matematice na střední škole (s. 252) – *J. Zhouf*: Tři speciální body ležící na jedné přímce II (s. 261) Zajímavé matematické úlohy (s. 32, 106, 186, 272)

FYZIKA

D. Mandíková, V. Tomášek: Výsledky českých žáků ve výzkumu TIMSS 2019 (s. 37) – *O. Lepil*: Ohmův zákon a výuka fyziky na základní škole (s. 110) – *F. Jáchim*: Úpravy RVP ZV pohledem učitele základní školy (s. 114) – *Č. Kodejška, J. Šana, O. Valášek*: Virtuální laboratorní cvičení s využitím 3D modelů Corinth (s. 121) – *J. Hošková Prokšová*: Hermann von Helmholtz (k dvoustému výročí narození) (s. 128) – *L. Richterek, O. Smetanová*: Na akustiku s tabletem nebo smartphonem (s. 191) – *Z. Gibová, J. Kecer*: Určení rychlosti elektromagnetického vlnění pomocí dvojitých vedení z videozáznamu (s. 200) – *P. Wegenkittlová, V. Vochozka*: Fyzikální klasifikace pohybu Ozobotem (s. 206) – *O. Lepil*: Odpor cívky zanedbejte II (s. 279) – *E. Hejnová*: Úlohy rozvíjející dovednost identifikace a kontroly proměnných (s. 287)

INFORMATIKA

R. Bělohávek: Výuka v době koronavirových restrikcí (s. 55) – *E. Bartl*: Knuthovy vánoční stromky (s. 59) – *P. Osička*: Strojové učení a deep learning (s. 133) – *P. Töpfer*: Vybalancovaný úsek (Úlohy z MO kategorie P, 41. část) (s. 146) – *P. Töpfer*: Rozkopané křížovatky (Úlohy z MO kategorie P, 42. část) (s. 220) – *L. Spíchal*: Jak moc jsou okružáci okrouhlí? (s. 227) – *P. Osička*: Několik informatických hádanek (s. 299) – *M. Zíka*: Katalogizace knih pro knihovní systém pomocí otevřených dat (s. 306)

ZPRÁVY

P. Töpfer: Mezinárodní olympiády v informatice v roce 2020 (s. 74) – *M. Hykšová*: 39. mezinárodní konference Historie matematiky (s. 79) – *P. Calábek*: Ústřední kolo 70. ročníku MO kategorie A (s. 152) – *J. Švrček*: 10. evropská dívčí MO (EGMO) (s. 153) – *L. Richterek*: Celostátní kolo 62. ročníku FO (s. 155) – *L. Richterek*: Fontes Scientiæ aneb díla velikánů (alespoň částečně) v češtině (s. 158) – *P. Calábek*: Mimořádný úspěch v 62. ročníku Mezinárodní matematické olympiády (s. 238) – *P. Töpfer*: Mezinárodní olympiády v informatice v roce 2021 (s. 316)