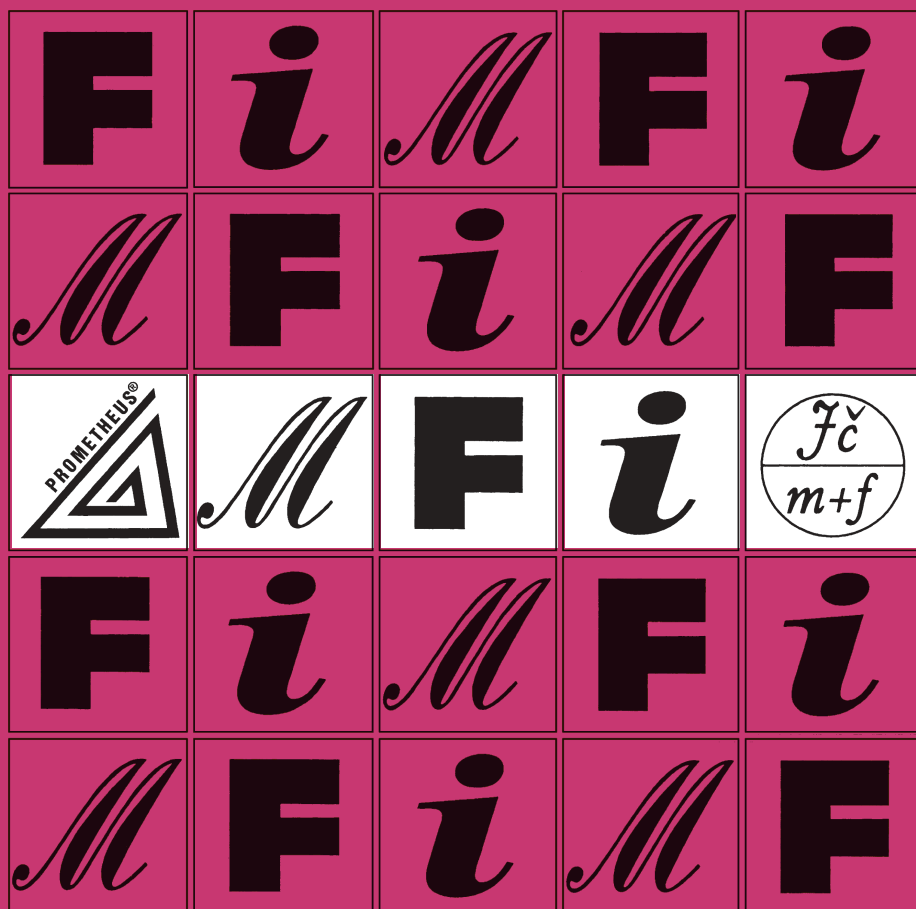


MATEMATIKA 4 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXXI (2022), číslo 4

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku
Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek
Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška, Michaela Křížová, Miluše Lachmannová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil (předseda redakční rady), Dana Mandíková, Oldřich Odvárko, Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel Töpfer

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>P. Leischner</i> : Zkřížené žebříky	241
<i>D. Hrubý</i> : Grafy relací	253
<i>J. Zhouf</i> : Tři speciální body ležící na jedné přímce IV	261
<i>J. Slezáková</i> : Trojúhelníkové puzzle	270
Zajímavé matematické úlohy	275

FYZIKA

<i>L. Šlégrová, J. Šlégr</i> : Několik poznámek k učivu o Sluneční soustavě	279
<i>J. Kříž, F. Studnička, L. Šlégrová, J. Šlégr</i> : Fyzikální úlohy Evropské experimentální olympiády EOES	289

INFORMATIKA

<i>P. Osička, P. Krajča</i> : Informatické hádanky	297
<i>F. Frank, M. Zíka</i> : Úlohy pro výuku JavaScriptu z předmětu Programování 1	303

ZPRÁVY

<i>J. Veselý</i> : 40. mezinárodní konference Historie matematiky	315
<i>J. Kříž, F. Studnička</i> : Čtyři medaile pro české studenty na 52. mezinárodní fyzikální olympiádě	316
<i>Editor MFI</i> : Veletrh nápadů učitelů fyziky	319

Obsah ročníku XXXI (2022)

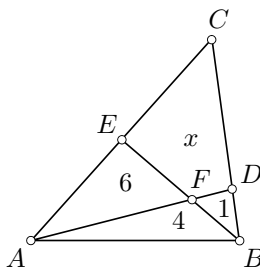
Zkřížené žebříky

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Poznatky označované jako *věty o zkřížených žebřících* (*Crossed ladders theorems*) se nedávno staly populárními, protože usnadňují řešení některých úloh o poměrech obsahů částí trojúhelníků. Může se stát, že je žák najde například na YouTube a překvapí učitele neočekávaným řešením úlohy z obr. 1:

$$\frac{1}{x+11} + \frac{1}{4} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{x+11} = \frac{2+4-5}{20} = \frac{1}{20} \Rightarrow x = 9.$$



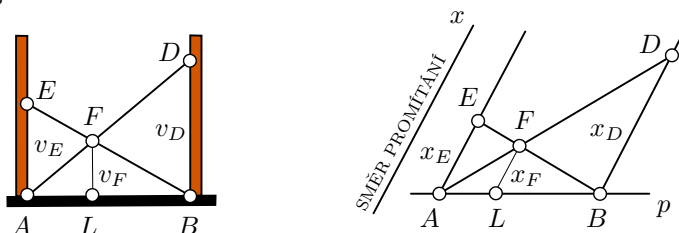
Obr. 1 Určete obsah x , jestliže $S_{AFE} = 6$, $S_{ABF} = 4$ a $S_{BDF} = 1$

Tento příspěvek si klade za cíl důkladněji seznámit čtenáře s danou problematikou.

Věty o zkřížených žebřících a jejich původ

Na počátku byla klasická úloha neznámého původu (tak ji označuje Gardner [1, str. 62]), která vychází ze situace na obr. 2 vlevo. Spočívá v určení vztahu mezi výškou v_F průsečíku F žebříků AD a BE opřených

o zdi a výškami v_D a v_E míst D a E , v nichž se horní konce žebříků dotýkají zdi.



Obr. 2 Zkřížené žebříky a obrázek k větě 1

Výsledný vztah

$$\frac{1}{v_F} = \frac{1}{v_D} + \frac{1}{v_E}, \quad (1)$$

souvisí s faktem, že délka té příčky lichoběžníku, která prochází průsečíkem jeho úhlopříček rovnoběžně se základnami, je harmonickým průměrem délek základů (viz např. [2, str. 157–159] nebo [4]).

Roku 2002 vztah zobecnil americký středoškolský učitel *Harold Joseph Stengel* [3]. Jeho příspěvek shrneme ve třech větách, jež pronikly do povědomí veřejnosti včetně názvů, které se v článku vyskytovaly.

Budeme se zabývat promítáním do přímky p , rovnoběžným s přímkou x . Délku úsečky ohraničené libovolným bodem Z a jeho průmětem značíme x_Z . Termín *ceviána* užíváme pro úsečku s krajními body ve vrcholu trojúhelníku a ve vnitřním bodě protilehlé strany.

Věta 1 (věta o zkřížených žebřících) Nechť body E , D leží v téže polořovině s hraniční přímkou p . Jejich průměty v promítání do p ve směru přímky $x \nparallel p$ označíme po řadě A , B . Je-li F průsečík úseček AD a BE (obr. 2 vpravo), pak

$$\frac{1}{x_F} = \frac{1}{x_D} + \frac{1}{x_E}. \quad (2)$$

Důkaz. Platí $\triangle ALF \sim \triangle ABD$ a $\triangle LBF \sim \triangle ABE$. S využitím obou podobností dostáváme

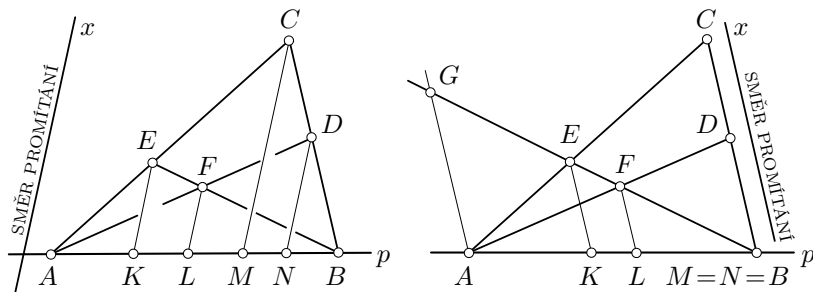
$$1 = \frac{|AL| + |LB|}{|AB|} = \frac{|AL|}{|AB|} + \frac{|LB|}{|AB|} = \frac{x_F}{x_D} + \frac{x_F}{x_E}$$

a odtud vztah (2), který je pro $x \perp p$ ekvivalentní s (1).

Stengel se dále zabýval situací, kdy jsou žebříky opřeny o stěny chodby trojúhelníkového profilu.

Věta 2 (zobecněná věta o zkřížených žebřících) V rovině trojúhelníku ABC uvažujme promítání do přímky AB rovnoběžné s přímkou x . Označíme-li F průsečík cvián AD a BE trojúhelníku, pak platí

$$\frac{1}{x_D} + \frac{1}{x_E} = \frac{1}{x_F} + \frac{1}{x_C}. \quad (3)$$



Obr. 3 Vlevo ilustrace k větě 2, vpravo obrázek k jejímu důkazu

Důkaz. Uvažujme nejprve situaci na obr. 3 vpravo, pro niž je $x \parallel BC$. Průměty bodů E a F nechť jsou po řadě K a L . Body C a D se zobrazí do B . Označme ještě G ten bod přímky BE , který se promítne do A .

Aplikací věty 1 na body G, D , a pak na body G, C dostáváme

$$\frac{1}{x_F} = \frac{1}{x_G} + \frac{1}{x_D} \quad \text{a} \quad \frac{1}{x_E} = \frac{1}{x_G} + \frac{1}{x_C}. \quad (4)$$

Oba vztahy lze přepsat do tvaru

$$\frac{1}{x_G} = \frac{1}{x_F} - \frac{1}{x_D} = \frac{1}{x_E} - \frac{1}{x_C}.$$

V něm je poslední rovnost ekvivalentní se vztahem (3), jenž jsme měli dokázat.

Jiné situace netřeba vyšetřovat, protože vztah (3) nezávisí na směru promítání. Označíme-li totiž průměty bodů E, F, C a D pro promítání určené přímkou $x' \nparallel x$ po řadě K', L', M' a N' , pak ze vzájemné podobnosti trojúhelníků EKK', FLL', CBM' a DBN' plyne

$$\frac{x'_E}{x_E} = \frac{x'_F}{x_F} = \frac{x'_C}{x_C} = \frac{x'_D}{x_D} = k.$$

Odtud a ze vztahu (3) dokázaného pro $x \parallel BC$ zjistíme

$$\frac{1}{x'_D} + \frac{1}{x'_E} = \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{1}{x_D} + \frac{1}{x_E} \right) = \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{1}{x_F} + \frac{1}{x_C} \right) = \frac{1}{x'_F} + \frac{1}{x'_C}.$$

Uvažujme dále situaci z věty 2 za předpokladu, že $x \perp AB$. Vztah (3) je pak ekvivalentní s rovností

$$\frac{1}{\frac{1}{2}|AB|v_D} + \frac{1}{\frac{1}{2}|AB|v_E} = \frac{1}{\frac{1}{2}|AB|v_F} + \frac{1}{\frac{1}{2}|AB|v_C},$$

kde v_D , v_E , v_F a v_C jsou výšky trojúhelníků ABD , ABE , ABF a ABC .

Platí tedy věta 3, které se též říká věta o (zkřížených) žebřících, třebaže ji Stengel označil jen jako důsledek věty 2.

Věta 3 Protínají-li se ceviány AD a BE trojúhelníku ABC v bodě F , pak pro obsahy trojúhelníků ABD , ABE , ABF a ABC platí

$$\frac{1}{S_{ABD}} + \frac{1}{S_{ABE}} = \frac{1}{S_{ABF}} + \frac{1}{S_{ABC}}. \quad (5)$$

Co Stengel neuvedl

Výsledek průzkumu situace, kdy jsou žebříky opřeny o stěny příkopu lichoběžníkového průřezu (obr. 4), popisuje následující věta.

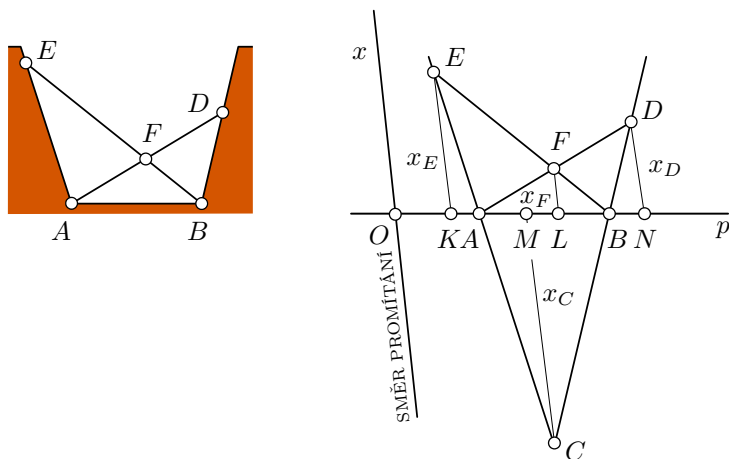
Věta 4 V rovině trojúhelníku ABC uvažujme promítání do přímky AB rovnoběžné s přímkou x . Jsou-li D , E po řadě vnitřní body polopřímek opačných k polopřímkách BC , AC a je-li F průsečík úseček AD a BE , pak

$$\frac{1}{x_D} + \frac{1}{x_E} = \frac{1}{x_F} - \frac{1}{x_C} \quad \text{a} \quad \frac{1}{S_{ABD}} + \frac{1}{S_{ABE}} = \frac{1}{S_{ABF}} - \frac{1}{S_{ABC}}. \quad (6)$$

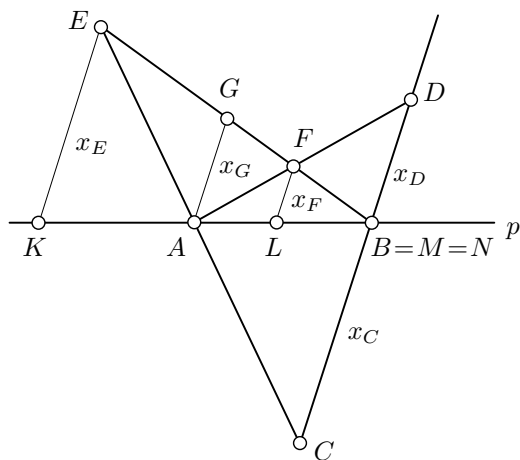
Důkaz se téměř neliší od důkazu věty 2. Jediný rozdíl spočívá v tom, že bod C nyní leží v opačné polorovině s hraniční přímkou AB , jak vidíme na obr. 5. Důsledkem je záměna bodů E a G v jejich pořadí na přímce BE , a tím i záměna zlomků $\frac{1}{x_E}$ a $\frac{1}{x_G}$ v druhém ze vztahů (4). Soustava má nyní tvar

$$\frac{1}{x_F} = \frac{1}{x_G} + \frac{1}{x_D} \quad \text{a} \quad \frac{1}{x_G} = \frac{1}{x_E} + \frac{1}{x_C},$$

z něž plyne (6).



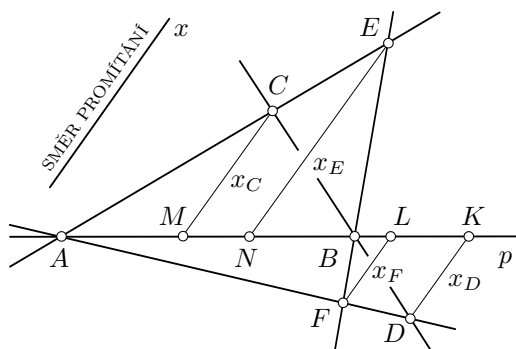
Obr. 4 Vlevo zkřížené žebříky v příkopu, vpravo ilustrace k větě 4



Obr. 5 Obrázek k důkazu věty 4

Další konfiguraci přímek AB , AC , BC , AD a BE představuje obr. 6. Asi se nám nepodaří motivovat ji zkříženými žebříky. Po zkušenostech z předchozích postupů však není těžké ověřit (užitím promítání rovnoběžného s jednou z přímek AC , BC), že platí

$$\frac{1}{x_E} - \frac{1}{x_D} = \frac{1}{x_C} - \frac{1}{x_F} \quad \text{a} \quad \frac{1}{S_{ABE}} - \frac{1}{S_{ABD}} = \frac{1}{S_{ABC}} - \frac{1}{S_{ABF}}.$$



Obr. 6 Další z možných konfigurací

Některé z dalších situací vidíme na obr. 7, ale zanechme raději analýzy a přistupme k syntéze. Abychom zahrnuli všechny situace do jediného celku, doplníme danou rovinu o *nevlastní body*. Na střední škole ovšem nebudeme seznamovat studenty s projektivním prostorem. Vystačíme s intuitivní představou nevlastního bodu jako směru rovnoběžek (tzv. průsečíku rovnoběžek v nekonečnu).

Shrnutí

V dosud zkoumaných situacích byl pevně dán trojúhelník ABC a rovnoběžné promítání do přímky $p = AB$ ve směru přímky $x \nparallel p$. Na přímkách BC a AC volíme v daném pořadí body D a E , různé od vrcholů trojúhelníku. Průsečík přímek AD a BE značíme F a pro body $Z \in \{C, D, E, F\}$ hledáme vztah mezi délkami x_Z a vztah mezi obsahy trojúhelníků ABZ .

Délku x_Z jsme definovali jako délku úsečky Z_0Z , kde Z_0 je průmět bodu Z . Nahradíme ji reálným číslem $\mathbf{x}_Z$ tak, aby platilo $\mathbf{x}_Z = x_Z$, jestliže Z leží v polorovině ABC , nebo $\mathbf{x}_Z = -x_Z$, pokud Z leží v polorovině opačné. Bude-li bod C nevlastní, zvolíme za polorovinu ABC libovolnou z polorovin s hraniční přímkou p a do obrázku ji vyznačíme šipkami (viz např. obr. 8 vlevo).

Orientovanou vzdáleností $\mathbf{v}_Z$ bodu Z od přímky p rozumíme vzdálenost v_Z opatřenou znaménkem $+$, jestliže Z leží v polorovině ABC , nebo znaménkem $-$, pokud Z leží v polorovině opačné.

Orientovaný obsah trojúhelníku ABZ zavedeme vztahem

$$\mathbf{S}_{ABZ} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot \mathbf{v}_Z.$$

Pokud je některý z bodů Z nevlastní, klademe

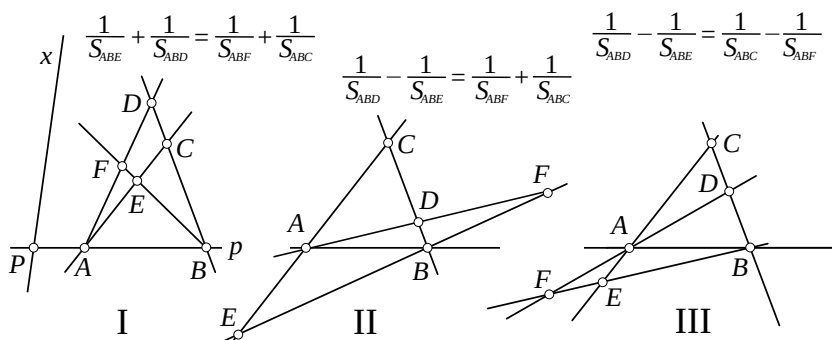
$$\frac{1}{\mathbf{x}_Z} = \frac{1}{x_Z} = 0, \quad \frac{1}{\mathbf{v}_Z} = \frac{1}{v_Z} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{1}{\mathbf{S}_{ABZ}} = \frac{1}{S_{ABZ}} = 0.$$

Za těchto předpokladů vždy platí

$$\frac{1}{\mathbf{x}_D} + \frac{1}{\mathbf{x}_E} = \frac{1}{\mathbf{x}_C} + \frac{1}{\mathbf{x}_F} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\mathbf{S}_{ABD}} + \frac{1}{\mathbf{S}_{ABE}} = \frac{1}{\mathbf{S}_{ABC}} + \frac{1}{\mathbf{S}_{ABF}}. \quad (7)$$

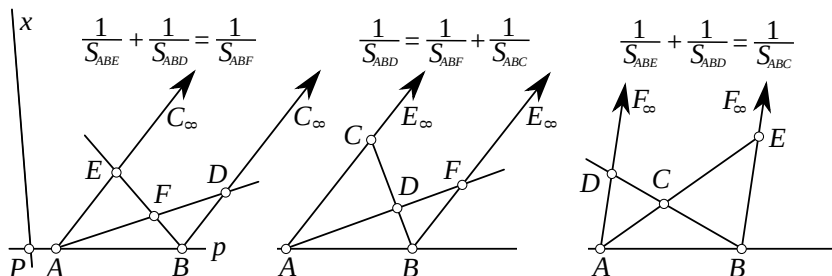
Všechny zkoumané situace lze roztrždit do šesti skupin podle toho, které z bodů C, D, E a F jsou vlastní a které z nich leží ve stejné polorovině.

- I. Body $Z \in \{C, D, E, F\}$ jsou vlastní a leží v polorovině ABC , viz např. obr. 7 vlevo nebo obr. 3. Zlomky ve vztazích (7) mají po záměnách $\mathbf{x}_Z$ za x_Z a $\mathbf{S}_{ABZ}$ za S_{ABZ} stejné znaménko.
- II. Body Z jsou vlastní, tři z nich leží v jedné polorovině s hraniční přímkou AB a jeden v polorovině opačné (např. obr. 7 uprostřed nebo obr. 4). Jeden zlomek ve vztazích (7) má po záměnách $\mathbf{x}_Z$ za x_Z a $\mathbf{S}_{ABZ}$ za S_{ABZ} opačné znaménko než zbývající tři.
- III. Body Z jsou vlastní, dva z nich leží v polorovině ABC a dva v polorovině opačné, viz obr. 7 vpravo nebo obr. 6. Dva zlomky ve vztazích (7) mají po záměnách $\mathbf{x}_Z$ za x_Z a $\mathbf{S}_{ABZ}$ za S_{ABZ} znaménko plus, a druhé dva mínus.



Obr. 7 K situacím I, II a III

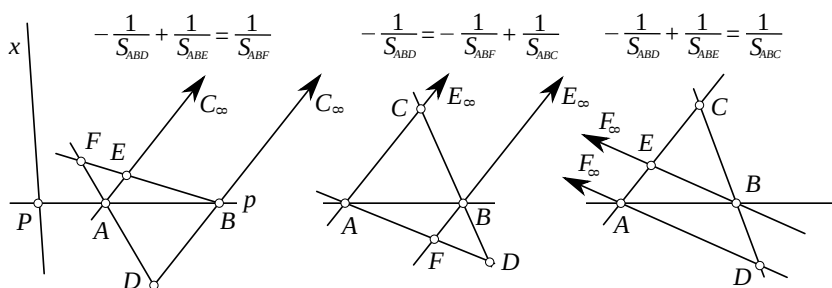
IV. Právě jeden z bodů Z je nevlastní a všechny tři vzniklé trojúhelníky leží v téže polorovině s hranicí p . Tři z možných situací vidíme na obr. 8. Představují až na označení totéž, zkrřížené žebříky z našich počátečních úvah.



Obr. 8 Různé možnosti pro situaci IV

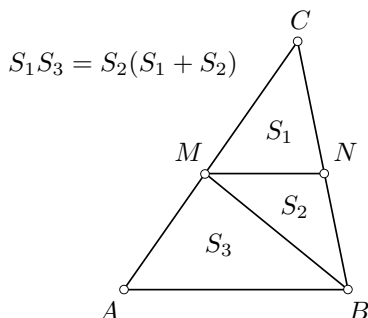
V. Právě jeden z bodů Z je nevlastní a všechny tři vzniklé trojúhelníky neleží v téže polorovině s hranicí p . Obr. 9 znázorňuje některé možnosti jako různé interpretace téže situace, z níž pro obsahy všech tří částí trojúhelníku rozděleného příčkou rovnoběžnou s jednou jeho stranou a libovolnou z úhlopříček vzniklého lichoběžníkového dílu plyne při označení podle obr. 10 vztah

$$S_1 S_3 = S_2 (S_1 + S_2) \quad (8)$$

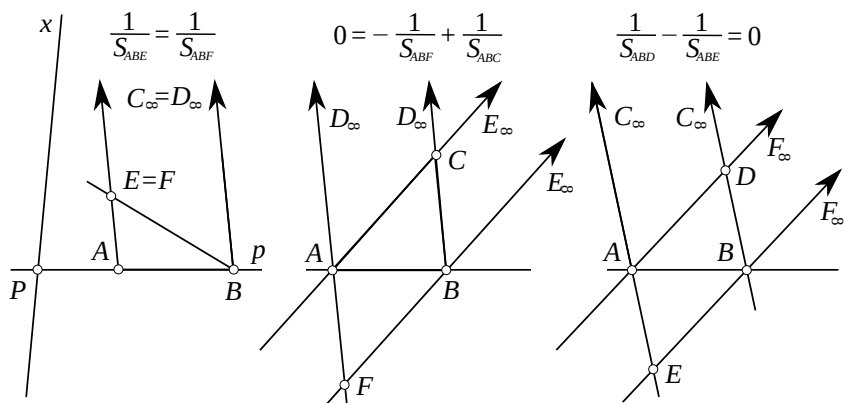


Obr. 9 Různé možnosti pro situaci V

VI. Jestliže jsou právě dva z bodů Z nevlastní, vzniknou jen dva trojúhelníky. Jejich obsahy si jsou podle (7) rovny, což snadno ověříme i názorně.



Obr. 10 Důsledek vztahů (7) pro situaci V



Obr. 11 Různé možnosti pro situaci VI

Jsou-li body C a D nevlastní, pak $C = D$ a $E = F$. Trojúhelníky ABE a ABF jsou totožné, obr. 11 vlevo. Situace pro nevlastní body C a E je analogická.

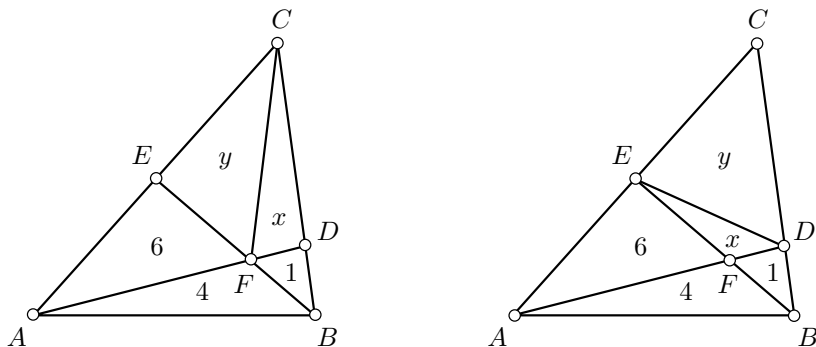
Zvolíme-li jako nevlastní body D a E , obdržíme trojúhelník ABF shodný s trojúhelníkem ABC , obr. 11 uprostřed.

Analogická situace nastane, když jsou nevlastní body C a F (obr. 11 vpravo).

Pokud by byl nevlastní bod F a jeden z bodů D a E , byl by nevlastní i druhý z nich. Konfiguracemi, kdy jsou alespoň tři body Z nevlastní se však nezabýváme (vzniká nejvýš jeden trojúhelník).

O aplikacích

S jedním využitím věty 3 jsme se seznámili na začátku článku. Starší způsob řešení této úvodní úlohy se opírá o poznatek VI/1 z Eukleidových Základů, sice že poměr obsahů dvou stejně vysokých trojúhelníků je roven poměru jejich základů.



Obr. 12 Jiná řešení úlohy z obr. 1

Po dokreslení úsečky CF do obr. 1 a označení podle obr. 12 vlevo platí

$$\begin{aligned} S_{AFC} : S_{FDC} &= |AF| : |FD| = S_{AFB} : S_{FDB}, \\ S_{EFC} : S_{FBC} &= |EF| : |FB| = S_{EFA} : S_{FBA}. \end{aligned}$$

Odtud obdržíme soustavu rovnic

$$\frac{6+y}{x} = \frac{4}{1}, \quad \frac{y}{x+1} = \frac{6}{4},$$

jež má řešení $x = 3$ a $y = 6$. Je tedy $S_{EFDC} = x + y = 9$.

Analogický postup podle obr. 12 vpravo vede k soustavě

$$\frac{x+y+6}{5} = \frac{y}{x+1}, \quad \frac{x}{1} = \frac{6}{4}$$

s řešením $x = \frac{3}{2}$ a $y = \frac{15}{2}$.

Řešení složitějších úloh usnadňuje kombinace obou metod. Jako příklad určíme obsahy všech částí trojúhelníku ABC , které vznikly jeho rozřezáním podél cíván AD , BE a CF . Přitom předpokládáme, že trojúhelník má obsah S a $|AF| : |FB| = |BD| : |DC| = |CE| : |EA| = 1 : 2$.

Při označení podle obr. 13 vlevo zjistíme pomocí věty VI/1, že platí

$$S_{ABD} = \frac{S}{3}, \quad S_{ABE} = \frac{2S}{3}.$$

Vztah (5) má tvar

$$\frac{3}{S} + \frac{3}{2S} = \frac{1}{S_{ABK}} + \frac{1}{S}.$$

Odtud

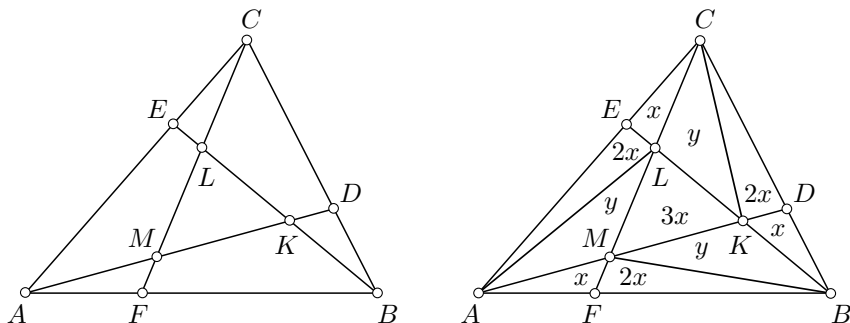
$$S_{ABK} = \frac{2}{7}S \quad \text{a} \quad S_{BDK} = S_{ABD} - S_{ABK} = \frac{S}{21}.$$

Výpočty pro obsahy trojúhelníků BCL , CEL , CAM a AFM jsou analogické, obdržíme

$$S_{AFM} = S_{BDK} = S_{CEL} = \frac{S}{21},$$

$$S_{FBKM} = S_{DCLK} = S_{EAML} = \frac{2S}{7} - \frac{S}{21} = \frac{5S}{21},$$

$$S_{KLM} = S_{BAE} - (S_{ABK} + S_{EAML}) = \frac{S}{7}.$$



Obr. 13 Rozřezání trojúhelníku ABC na sedm částí

Jiné řešení, jež obchází aplikaci věty 3, využívá symetrického zadání úlohy. Body D , E a F rozdělují strany trojúhelníku stejným způsobem. Pokud například nalezneme postup určení obsahu S_{AFM} , pak cyklickou záměnou bodů v trojicích (A, B, C) , (D, E, F) a (K, L, M) obdržíme tentýž výsledek pro S_{BDK} nebo S_{CEL} . Můžeme tedy stejné obsahy trojúhelníků AFM , BDK a CEL označit x . Po přidání úseček AL , BM a CK (obr. 13 vpravo) zvolíme pro každý z obsahů trojúhelníků MBK , KCL a LAM znak y . Trojúhelníky BMF , CKD a ALE mají stejný obsah $2x$.

Snadno ověříme, že $S_{ABD} + S_{BCE} + S_{CAF} = S$, proto je součet obsahů částí, v nichž se tyto trojúhelníky překrývají, roven obsahu jimi nepokryté části KLM trojúhelníku ABC , tedy

$$S_{KLM} = S_{AFM} + S_{BDK} + S_{CEL} = 3x.$$

Z podmínky $S_{FBL} = 2S_{AFL}$ obdržíme rovnost

$$5x + y = 2(x + y),$$

z níž plyne $y = 3x$. Sečtením obsahů všech dílů zjistíme $S = 21x$, odtud $x = \frac{S}{21}$. Triviální dopočetní ostatních obsahů vede k již uvedeným výsledkům.

Závěr

Harmonický průměr h dvou kladných čísel a a b je definován vztahem

$$\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

a tak lze větu 3 vyslovit i jako zajímavý a snadno zapamatovatelný poznatek:

Harmonický průměr obsahů trojúhelníků ABD a ABE je roven harmonickému průměru obsahu jejich průniku a obsahu trojúhelníku ABC .

Tato věta usnadňuje a urychluje řešení určitého typu úloh z matematických olympiád, což je pro řešitele výhodou. Při soutěži ušetří čas. Používání poznatku samotného při řešení úloh příliš nerozvíjí geometrické myšlení. Student se totiž aplikací naučeného vztahu vyhne důkladnější analýze načrtnutého obrázku.

Článek je v plném rozsahu použitelný pro práci v zájmové matematice. Po motivaci klasickou úlohou o žebřících mohou žáci při vhodném vedení sami nalézat další situace a řešit je, jak bylo výše uvedeno.

Literatura

- [1] Gardner, M.: Mathematical circus. MAA, Washington, 1992.
- [2] Kuřina, F.: Umění vidět v matematice. SPN, Praha, 1989.
- [3] Stengel, H., F.: Extended crossed ladders theorem. Mathematical Spectrum, roč. 35 (2002/2003), č. 1, s. 18–20.
- [4] Vallo, D., Leischner, P.: Priečky rovnobežné so základňou lichobežníka. MFI, roč. 20 (2010/2011), č. 6, s. 321–328.

Grafy relací

DAG HRUBÝ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Jedním ze základních pojmů moderní algebry je pojem binární relace. Tento pojem byl v minulosti i součástí výuky matematiky na gymnáziu, např. v učebnici *Matematika pro gymnázia, sešit 3* z roku 1978. S koncem období tzv. modernizace výuky matematiky, které u nás probíhalo v letech 1965–1985, zmizel z učiva matematiky na gymnáziu také pojem relace.

Připomeňme, že *binární relací mezi množinami* A , B nazýváme každou podmnožinu kartézského součinu $A \times B$. Je-li $A = B$, hovoříme o binární relaci na množině A .

Binární relaci mezi množinami A , B nazýváme *zobrazením množiny* A *do množiny* B , právě když ke každému prvku x z množiny A existuje právě jedno y z množiny B takové, že uspořádaná dvojice (x, y) patří do této relace.

Reálnou funkcí reálné proměnné f pak rozumíme zobrazení $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, kde $\mathbb{R}$ značí množinu reálných čísel a $M \subseteq \mathbb{R}$.

V článku se budeme věnovat grafům relací $|y| = f(x)$, kde $y = f(x)$ je funkce jedné reálné proměnné. Je zřejmé, že relace $|y| = f(x)$ platí pro ta x , která splňují $f(x) \geq 0$. Řešením nerovnice $f(x) \geq 0$ získáme intervaly, v nichž je tato funkce nezáporná. V těchto intervalech sestrojíme grafy funkcí $y = f(x)$ a také $y = -f(x)$. Sjednocení grafů těchto dvou funkcí pak tvoří graf dané binární relace. Celý postup sestrojování grafu takové relace ukážeme na několika příkladech.

Příklad 1

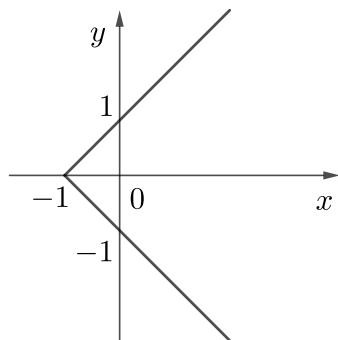
K dané funkci $y = f(x)$ sestrojte graf relace $|y| = f(x)$:

$$\text{a) } y = x + 1 \quad \text{b) } y = \sqrt{|x|} \quad \text{c) } y = \sin x$$

$$\text{d) } y = \ln x \quad \text{e) } y = e^x$$

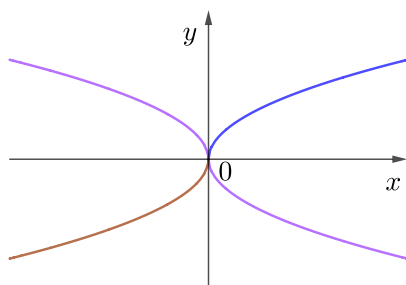
Řešení.

a) Funkci $y = x + 1$ odpovídá relace $|y| = x + 1$. Protože je $|y| \geq 0$, je také $x + 1 \geq 0$, a tedy $x \geq -1$. Pro každé vyhovující y platí $y = x + 1$ a $y = -(x + 1) = -x - 1$ (obr. 1).



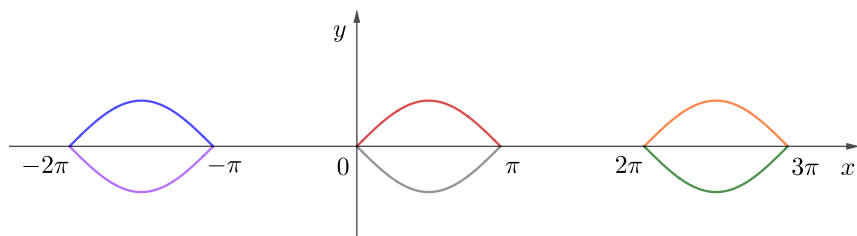
Obr. 1

b) Funkci $y = \sqrt{|x|}$ odpovídá relace $|y| = \sqrt{|x|}$. Protože je $\sqrt{|x|} \geq 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, je také relace $|y| = \sqrt{|x|}$ definovaná pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pro každé vyhovující y pak platí $y = \sqrt{|x|}$ a $y = -\sqrt{|x|}$ (obr. 2).



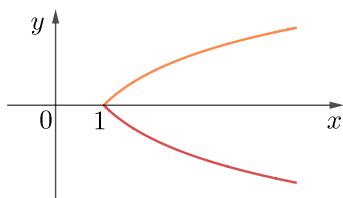
Obr. 2

c) Funkci $y = \sin x$ odpovídá relace $|y| = \sin x$. V intervalu $\langle -3\pi; 3\pi \rangle$ je funkce $y = \sin x$ nezáporná v intervalech $\langle -2\pi; -\pi \rangle$, $\langle 0; \pi \rangle$, $\langle 2\pi; 3\pi \rangle$. V těchto intervalech sestrojíme grafy funkcí $y = \sin x$, $y = -\sin x$ (obr. 3).



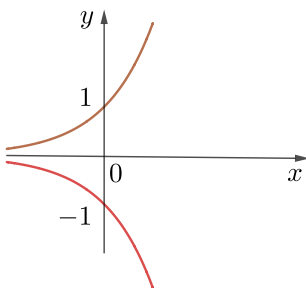
Obr. 3

d) Funkci $y = \ln x$ odpovídá relace $|y| = \ln x$. Funkce $y = \ln x$ je nezáporná v intervalu $\langle 1; +\infty \rangle$. V tomto intervalu sestrojíme grafy funkcí $y = \ln x$ a $y = -\ln x$ (obr. 4).



Obr. 4

e) Funkci $y = e^x$ odpovídá relace $|y| = e^x$. Funkce $y = e^x$ je kladná pro každé $x \in \mathbb{R}$. Pro každé vyhovující y platí $y = e^x$ a $y = -e^x$ (obr. 5).



Obr. 5

Nyní se zaměříme na relace se dvěma absolutními hodnotami.

Příklad 2

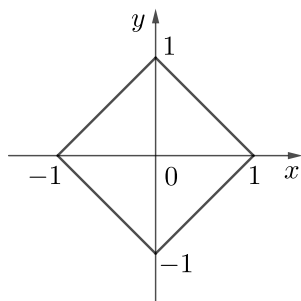
Sestrojte graf relace $|x| + |y| = 1$, resp. $|y| = 1 - |x|$.

Řešení.

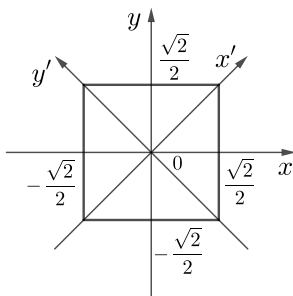
Zřejmě je $x \in \langle -1; 1 \rangle$ a $y \in \langle -1; 1 \rangle$. Uvážíme-li, jaké podmínky platí pro x a y v jednotlivých kvadrantech, dostaneme funkce: $y = -x + 1$, $y = x + 1$, $y = -x - 1$, $y = x - 1$. Nyní už snadno sestrojíme graf dané relace, viz obr. 6.

Na obr. 7 je graf relace, získaný otočením grafu z obr. 6 se středem v počátku o orientovaný úhel $+45^\circ$. Nabízí se otázka, jak zadat relaci, jejíž graf je na obr. 7. Abychom tuto otázku zodpověděli, musíme toto otočení matematicky popsat; přesněji řečeno, máme nalézt transformaci soustavy souřadnic, která je určena otočením se středem v počátku o $+45^\circ$.

Soustava souřadnic Oxy se změní na soustavu souřadnic $Ox'y'$. Podstatné je si uvědomit, že v kartézské soustavě souřadnic $Ox'y'$ bude mít relace, jejíž graf je na obr. 7, vyjádření $|x'| + |y'| = 1$.



Obr. 6



Obr. 7

Nyní už nám zbývá určit vztahy mezi x a x' a mezi y a y' . K tomu využijeme komplexní čísla. Necht' jsou dána dvě komplexní čísla $z = x + yi$ a $z' = x' + y'i$, pro která platí $|z| = |z'|$ a jejich průvodiče svírají úhel velikosti φ . Je-li $\varepsilon = \cos \varphi + i \sin \varphi$, pak platí $z' = z\varepsilon$ a $|z'| = |z\varepsilon|$. Po dosazení do rovnice $z' = z\varepsilon$ dostaneme

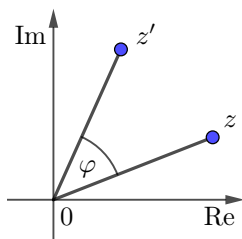
$$x' + y'i = (x + yi)(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

odkud

$$x' = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad y' = x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$

Po dosazení $\varphi = 45^\circ$ dostáváme

$$x' = x \frac{\sqrt{2}}{2} - y \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad y' = x \frac{\sqrt{2}}{2} + y \frac{\sqrt{2}}{2}.$$



Obr. 8

Pro vyjádření relace $|x'| + |y'| = 1$ v kartézské soustavě souřadnic Ox, y pak platí

$$\left| x \frac{\sqrt{2}}{2} - y \frac{\sqrt{2}}{2} \right| + \left| x \frac{\sqrt{2}}{2} + y \frac{\sqrt{2}}{2} \right| = 1,$$

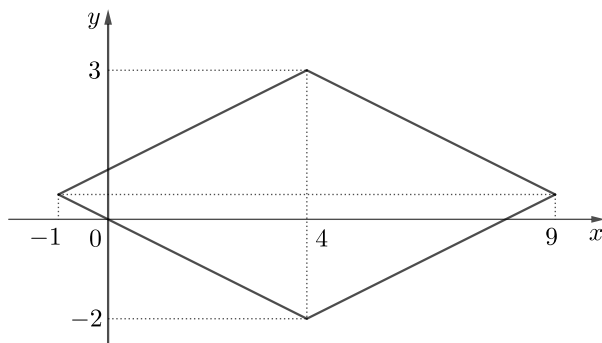
$$|x - y| + |x + y| = \sqrt{2}.$$

Příklad 3

Sestrojte graf relace $|x - 4| + |2y - 1| = 5$.

Řešení.

Podle zadání platí po úpravě $|2y - 1| = 5 - |x - 4|$, a proto $|x - 4| \leq 5$, tj. $x \in \langle -1; 9 \rangle$. Platí $0 \leq |x - 4| = 5 - |2y - 1|$, a tedy $|2y - 1| \leq 5$, tj. $y \in \langle -2; 3 \rangle$. Pro $x \in \langle -1; 4 \rangle$ máme funkce $y = \frac{1}{2}x + 1$ a $y = -\frac{1}{2}x$, pro $x \in \langle 4; 9 \rangle$ máme funkce $y = \frac{1}{2}x - 4$, $y = -\frac{1}{2}x + 5$ (obr. 9).



Obr. 9

Grafů binárních relací můžeme využít také při řešení soustav rovnic.

Příklad 4

Řešte graficky soustavu rovnic s kladným reálným parametrem r :

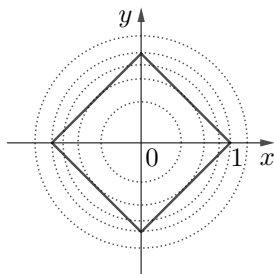
$$|x| + |y| = 1,$$

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Řešení.

Na základě znalosti grafu relace $|x| + |y| = 1$ snadno zjistíme, že kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ graf této relace neprotne nebo ho protne ve čtyřech nebo osmi

bodech. Pro řešení dané soustavy mohou nastat pouze tři možnosti: žádné řešení, čtyři řešení, osm řešení. Z grafů na obr. 10 lze snadno určit, že daná soustava má 4 řešení v případě, že $r = 1$ nebo $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Soustava nemá řešení pro $r < \frac{\sqrt{2}}{2}$ a $r > 1$. V případě, že je $r \in (\frac{\sqrt{2}}{2}; 1)$, má úloha 8 řešení.



Obr. 10

Příklad 5

Řešte graficky a početně soustavu rovnic s nezáporným reálným parametrem p :

$$\begin{aligned} |y| &= \sqrt{2x - x^2}, \\ |y| &= px + p. \end{aligned}$$

Řešení.

Soustavu lze zapsat ve tvaru $px + p = \sqrt{2x - x^2}$, který vede na kvadratickou rovnici

$$(1 + p^2)x^2 + 2(p^2 - 1)x + p^2 = 0. \quad (1)$$

Pro její diskriminant platí $D = 4 - 12p^2$. Zřejmě je $D \geq 0$ pro $|p| \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$. Protože je $p \geq 0$, platí $p \in \langle 0; \frac{\sqrt{3}}{3} \rangle$. Pro $p > \frac{\sqrt{3}}{3}$ soustava nemá řešení. Je-li $p = 0$, dostaneme kvadratickou rovnici $x^2 - 2x = 0$, která má reálné kořeny $x = 0$, $x = 2$. Po dosazení do rovnice $|y| = px + p$, dostaneme dvě řešení, a to $(0; 0)$, $(2; 0)$. Je-li $p = \frac{\sqrt{3}}{3}$, dostaneme kvadratickou rovnici $4x^2 - 4x + 1 = 0$, která má dvojnásobný kořen $x = \frac{1}{2}$. Pro odpovídající y pak platí $|y| = \frac{\sqrt{3}}{3}$. V tomto případě má soustava dvě řešení: $(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2})$. Pokud je $p \in (0; \frac{\sqrt{3}}{3})$, má rovnice (1) dva reálné kořeny:

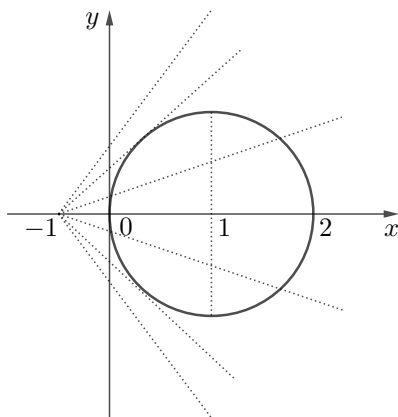
$$x_1 = \frac{1 - p^2 + \sqrt{1 - 3p^2}}{1 + p^2}, \quad x_2 = \frac{1 - p^2 - \sqrt{1 - 3p^2}}{1 + p^2}.$$

Pro odpovídající hodnoty y platí: $y_1 = px_1 + p$, $y_2 = -px_1 - p$, $y_3 = px_2 + p$, $y_4 = -px_2 - p$. Po dosazení dostáváme:

$$\begin{aligned}y_1 &= p \left(\frac{1 - p^2 + \sqrt{1 - 3p^2}}{1 + p^2} \right) + p = \frac{p(2 + \sqrt{1 - 3p^2})}{1 + p^2}, \\y_2 &= -p \left(\frac{1 - p^2 + \sqrt{1 - 3p^2}}{1 + p^2} \right) - p = -\frac{p(2 + \sqrt{1 - 3p^2})}{1 + p^2}, \\y_3 &= p \left(\frac{1 - p^2 - \sqrt{1 - 3p^2}}{1 + p^2} \right) + p = \frac{p(2 - \sqrt{1 - 3p^2})}{1 + p^2}, \\y_4 &= -p \left(\frac{1 - p^2 - \sqrt{1 - 3p^2}}{1 + p^2} \right) - p = -\frac{p(2 - \sqrt{1 - 3p^2})}{1 + p^2}.\end{aligned}$$

Daná soustava má čtyři reálná řešení: (x_1, y_1) , (x_1, y_2) , (x_2, y_3) , (x_2, y_4) .

Grafem relace $|y| = \sqrt{2x - x^2}$ je kružnice se středem v bodě $S[1; 0]$ a poloměrem $r = 1$. Grafem relace $|y| = px + p$ jsou dvojice polopřímek se společným počátkem v bodě $P[-1; 0]$. Z obr. 11 lze snadno usoudit, že polopřímky kružnici buď neprotnou nebo ji protnou ve dvou nebo ve čtyřech bodech. Z toho plyne, že daná soustava má v závislosti na parametru p buď dvě nebo čtyři řešení nebo nemá řešení.



Obr. 11

Následující úlohy slouží k procvičení dané problematiky.

Úloha 1

V oboru reálných čísel řešte početně i graficky soustavu rovnic s reálným parametrem p :

$$\begin{aligned}|x| + |y| &= 1, \\ |y| &= \sqrt{x+p}.\end{aligned}$$

$[|p| > 1$ (nemá řeš.), $p = -1$ (1 řeš.), $p = 1$ (3 řeš.), $p \in (-1; \frac{3}{4})$ (2 řeš.), $p = \frac{3}{4}$ (4 řeš.), $p \in (\frac{3}{4}; 1)$ (6 řeš.)].

Úloha 2

V oboru reálných čísel řešte početně i graficky soustavu rovnic s reálným parametrem r :

$$\begin{aligned}|xy| &= 1, \\ x^2 + y^2 &= r^2.\end{aligned}$$

$[r < \sqrt{2}$ (nemá řešení), $r = \sqrt{2}$ (4 řešení), $r > \sqrt{2}$ (8 řešení)].

Úloha 3

Sestrojte graf relace $|y| = \frac{|x|}{1+x^2}$.

Úloha 4

V oboru reálných čísel řešte početně a graficky soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}|x+y| &= 3, \\ |x-y| &= 1.\end{aligned}$$

[Existují čtyři řešení: $(1; 2)$, $(2; 1)$, $(-1; -2)$, $(-2; -1)$].

Úloha 5

V oboru reálných čísel řešte početně i graficky soustavu rovnic s reálným parametrem r :

$$\begin{aligned}|x+y| &= 1, \\ x^2 + y^2 &= r^2.\end{aligned}$$

$[r < \frac{\sqrt{2}}{2}$ (nemá řešení), $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (2 řešení), $r > \frac{\sqrt{2}}{2}$ (4 řešení)].

Výše uvedený text lze využít při práci se žáky SŠ, kteří mají hlubší zájem o matematiku. Můžeme také připomenout posloupnost pojmů:

$množina \rightarrow uspořádaná\ dvojice \rightarrow kartézský\ součin \rightarrow$
 $\rightarrow relace \rightarrow zobrazení \rightarrow funkce.$

Tři speciální body ležící na jedné přímce IV

JAROSLAV ZHOUF

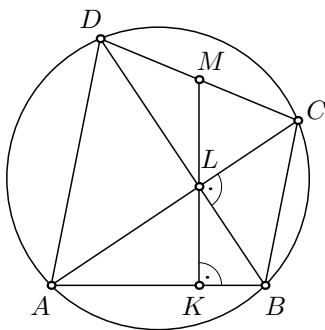
FIT ČVUT, Praha

I v tomto článku budeme pokračovat v prezentaci zajímavých trojic bodů, které leží na jedné přímce. Při důkazech některých předložených tvrzení nám budou opět pomáhat věta Menelaova a věta Cèvova uvedené v [5]. Podobně pomocnou literaturou jsou publikace [1, s. 52–58], [4, s. 28–51]. Příklady prezentované v tomto článku jsou převážně čerpány z publikací [2, s. 51–79], [3, s. 98].

Další trojice bodů ležících na jedné přímce

Příklad 1

Tětivový čtyřúhelník $ABCD$ má navzájem kolmé úhlopříčky AC , BD , jejich průsečík označme L . Je-li K pata kolmice z bodu L na stranu AB a M střed strany CD , pak body K , L , M leží na jedné přímce. Dokažte.



Obr. 1

Řešení. Sledujme obr. 1. Úsečka KL je výška pravoúhlého trojúhelníku ABL , proto jsou úhly KLB a BAL shodné. Úhly BAC a BDC jsou obvodové úhly k tětivě BC , takže jsou shodné. Jelikož je bod M středem

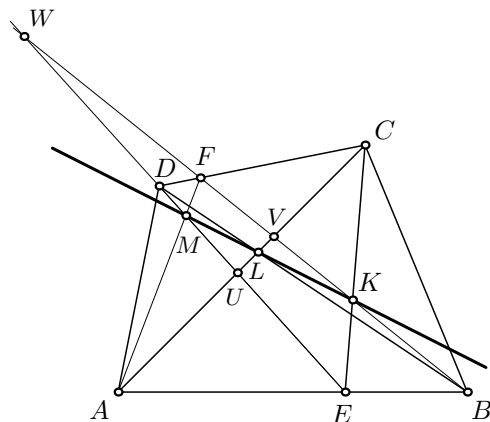
strany CD a trojúhelník CLD je pravoúhlý, je $|DM| = |LM|$. Trojúhelník DML je tudíž rovnoramenný se shodnými úhly MDL a MLD .

Z těchto úvah vyplývá, že jsou úhly KLB a MLD shodné, takže body K, L, M leží na jedné přímce.

Příklad 2 (jedna z variací Pappovy úlohy)

Ve čtyřúhelníku $ABCD$ jsou uvnitř stran AB, CD zvoleny postupně body E, F . Průsečík přímek EC, BF označme K , průsečík přímek AC, BD označme L a průsečík přímek AF, ED označme M . Dokažte, že body K, L, M leží na jedné přímce.

Řešení. Uvažujme trojúhelník UVW , kde bod U je průsečíkem přímek AC, ED , bod V průsečíkem přímek AC, BF a W průsečíkem přímek ED, BF (obr. 2a).



Obr. 2a

Využijeme pětkrát Menelaovu větu pro trojúhelník UVW a pro přímky BD, EC, AF, CD, AB , tedy

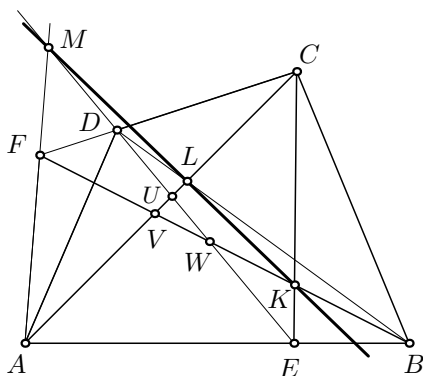
$$\begin{aligned} \frac{|UD|}{|WD|} \cdot \frac{|WB|}{|VB|} \cdot \frac{|VL|}{|UL|} &= 1, & \frac{|UE|}{|WE|} \cdot \frac{|WK|}{|VK|} \cdot \frac{|VC|}{|UC|} &= 1, \\ \frac{|UM|}{|WM|} \cdot \frac{|WF|}{|VF|} \cdot \frac{|VA|}{|UA|} &= 1, & \frac{|WD|}{|UD|} \cdot \frac{|VF|}{|WF|} \cdot \frac{|UC|}{|VC|} &= 1, \\ & & \frac{|WE|}{|UE|} \cdot \frac{|VB|}{|WB|} \cdot \frac{|UA|}{|VA|} &= 1. \end{aligned}$$

Vynásobením všech pěti rovností dostaneme

$$\frac{|UM|}{|WM|} \cdot \frac{|WK|}{|VK|} \cdot \frac{|VL|}{|UL|} = 1,$$

což podle Menelaovy věty znamená, že body K, L, M leží na jedné přímce.

Poznámka. Zde uvedený příklad je jednou z možných poloh zadaných bodů A, B, C, D, E, F . Další možnou polohu těchto bodů ukazuje obr. 2b.



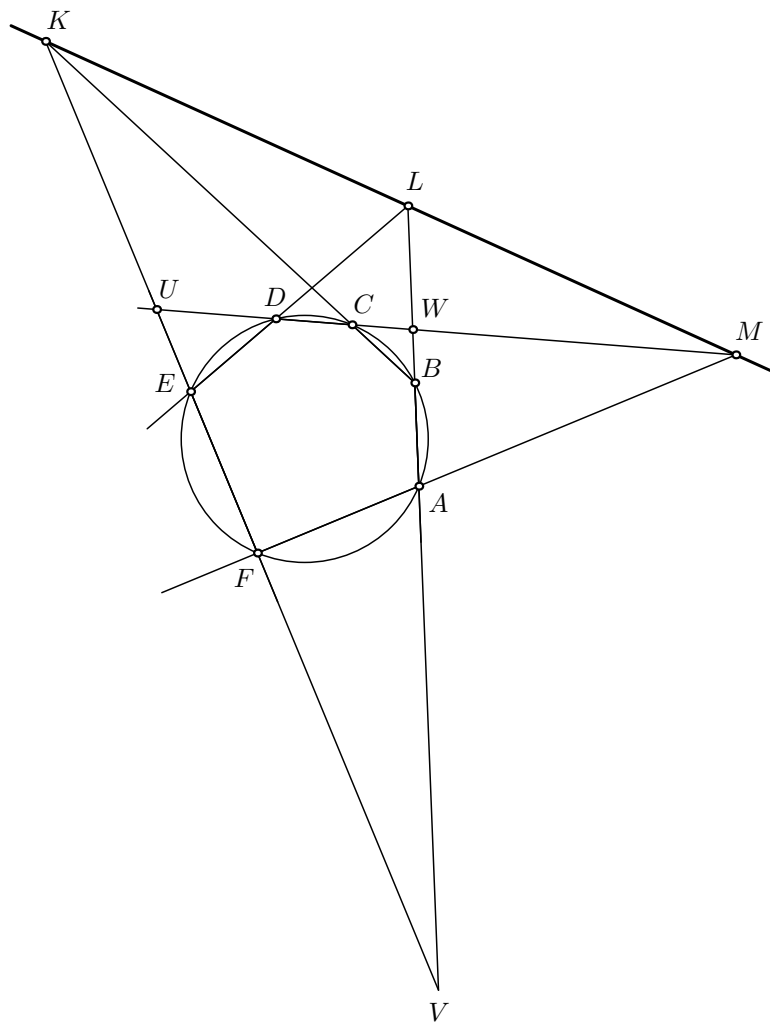
Obr. 2b

Příklad 3 (Pascalova věta)

Šestiúhelník $ABCDEF$ je vepsaný do kružnice. Přímky, na nichž leží strany BC, EF , se protínají v bodě K , přímky, na nichž leží strany AB, DE , se protínají v bodě L a přímky, na nichž leží strany AF, CD , se protínají v bodě M . Dokažte, že body K, L, M leží na jedné přímce.

Řešení. Označme U průsečík přímek CD, EF , dále V průsečík přímek AB, EF a W průsečík přímek AB, CD (obr. 3). Nyní použijeme třikrát Menelaovu větu pro trojúhelník UVW a postupně pro přímky BC, DE, AF . Vzniknou rovnosti

$$\begin{aligned} \frac{|VB|}{|WB|} \cdot \frac{|WC|}{|UC|} \cdot \frac{|UK|}{|VK|} &= 1, & \frac{|VL|}{|WL|} \cdot \frac{|WD|}{|UD|} \cdot \frac{|UE|}{|VE|} &= 1, \\ \frac{|VA|}{|WA|} \cdot \frac{|WM|}{|UM|} \cdot \frac{|UF|}{|VF|} &= 1. \end{aligned}$$



Obr. 3

Tyto tři rovnosti vzájemně vynásobíme a činitele v čitateli i jmenovateli vhodně přeuspořádáme do tvaru, kde budeme moci využít mocnosti bodu ke kružnici. Tedy dostaneme

$$\frac{|UE| \cdot |UF|}{|UC| \cdot |UD|} \cdot \frac{|VA| \cdot |VB|}{|VE| \cdot |VF|} \cdot \frac{|WC| \cdot |WD|}{|WA| \cdot |WB|} \cdot \frac{|VL|}{|WL|} \cdot \frac{|WM|}{|UM|} \cdot \frac{|UK|}{|VK|} = 1.$$

První zlomek na levé straně je roven jedné, neboť v jeho čitateli i jmenovateli je dvěma způsoby zapsána mocnost bodu U vzhledem k dané kružnici opsané šestiúhelníku. Stejně tak druhý i třetí zlomek na levé straně jsou rovny jedné. Zbyla nám tedy rovnost

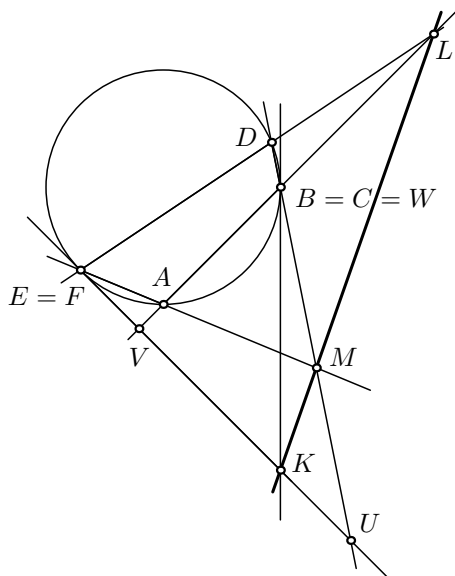
$$\frac{|VL|}{|WL|} \cdot \frac{|WM|}{|UM|} \cdot \frac{|UK|}{|VK|} = 1,$$

která vyjadřuje podle Menelaovy věty pro trojúhelník UVW , že body K , L , M leží na jedné přímce.

Příklad 4 (Pascalova věta zredukovaná na čtyřúhelník)

Čtyřúhelník $ABDE$ je vepsaný do kružnice. Tečny v bodech B a E se protínají v bodě K , přímky AB , DE se protínají v bodě L a přímky AE , BD se protínají v bodě M . Dokažte, že body K , L , M leží na jedné přímce.

Řešení. Uvažujme příklad 3, kde se mluví o šestiúhelníku $ABCDEF$ vepsaném do kružnice. Necháme-li splynout body B , C a body E , F , dostaneme čtyřúhelník $ABDE$. Místo přímky BC vznikne tečna ke kružnici v bodě B a místo přímky EF vznikne tečna v bodě E (obr. 4).

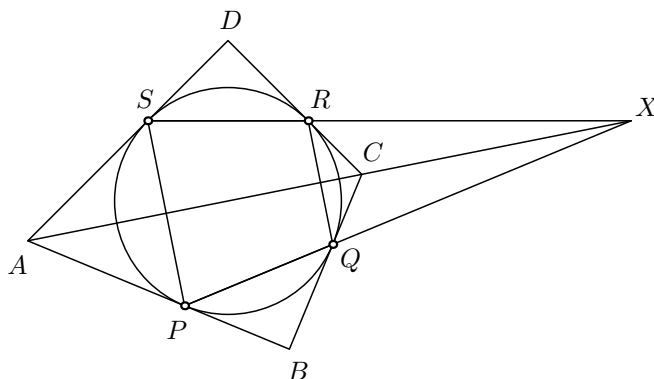


Obr. 4

Analogicky dostaneme body U, V, W a můžeme aplikovat Menelaovu větu pro trojúhelník UVW a příslušné přímky. Poté celý důkaz dokončíme jako v příkladu 3.

Příklad 5

Čtyřúhelníku $ABCD$ je vepsána kružnice, body dotyku stran tohoto čtyřúhelníku s kružnicí tvoří čtyřúhelník $PQRS$ podle obr. 5, pak přímky PQ, RS jsou buď rovnoběžné, nebo se protínají v bodě X . Ve druhém případě leží body A, C, X na jedné přímce. Dokažte.



Obr. 5

Řešení. Budeme se zabývat pouze druhým případem, tedy dokážeme, že body A, C, X leží na jedné přímce. Použijeme nejprve Menelaovu větu pro trojúhelník ABC a přímku PQ . Platí

$$\frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{|BQ|}{|CQ|} \cdot \frac{|CX|}{|AX|} = 1,$$

odkud za přispění rovnosti $|BP| = |BQ|$ dostaneme

$$\frac{|AX|}{|CX|} = \frac{|AP|}{|CQ|}.$$

Tuto rovnost využijeme v následujících rovnostech. A využije postupně i rovnosti $|DR| = |DS|$, $|AP| = |AS|$, $|CR| = |CQ|$.

Nyní dokážeme, že body S, R, X leží na jedné přímce. Použijeme k tomu rovnosti

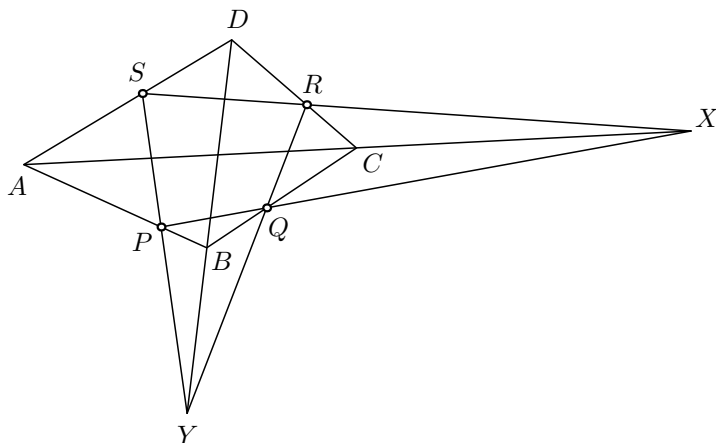
$$\frac{|AX|}{|CX|} \cdot \frac{|CR|}{|DR|} \cdot \frac{|DS|}{|AS|} = \frac{|AP|}{|CQ|} \cdot \frac{|CR|}{|AS|} = \frac{|CR|}{|CQ|} = 1.$$

A to je tvrzení Menelaovy věty pro trojúhelník ACD a přímku SR . Tím je dokázáno, že body S, R, X leží na jedné přímce.

Poznámka. V příkladu 5 analogicky platí, že i průsečík přímek QR a PS leží na jedné přímce společně s body B, D , nebo že jsou přímky QR a PS rovnoběžné. Dokonce platí ještě obecnější tvrzení než v příkladu 5, to si nyní uvedeme.

Příklad 6

Je dán čtyřúhelník $ABCD$, na jeho stranách jsou zvoleny body P, Q, R, S podle obr. 6. Jestliže průsečík X přímek PQ a RS leží společně s body A, C na jedné přímce, leží také průsečík Y přímek QR a PS společně s body B, D na jedné přímce. Dokažte.



Obr. 6

Řešení. Podle Menelaovy věty pro trojúhelník ABC a přímku PQ můžeme psát

$$\frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{|BQ|}{|CQ|} \cdot \frac{|CX|}{|AX|} = 1,$$

odkud

$$\frac{|CX|}{|AX|} = \frac{|BP|}{|AP|} \cdot \frac{|CQ|}{|BQ|}.$$

Stejně tak podle Menelaovy věty pro trojúhelník ACD a přímku SR můžeme psát

$$\frac{|DR|}{|CR|} \cdot \frac{|AS|}{|DS|} \cdot \frac{|CX|}{|AX|} = 1,$$

odkud

$$\frac{|AX|}{|CX|} = \frac{|DR|}{|CR|} \cdot \frac{|AS|}{|DS|}.$$

Z obou rovností vyplývá rovnost

$$\frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{|BQ|}{|CQ|} = \frac{|DR|}{|CR|} \cdot \frac{|AS|}{|DS|},$$

a tedy

$$|AP| \cdot |BQ| \cdot |CR| \cdot |DS| = |AS| \cdot |BP| \cdot |CQ| \cdot |DR|.$$

Ještě napíšeme Menelaovu větu pro trojúhelník ABD a přímku PS

$$\frac{|DS|}{|AS|} \cdot \frac{|AP|}{|BP|} \cdot \frac{|BY|}{|DY|} = 1,$$

odkud

$$\frac{|BY|}{|DY|} = \frac{|AS|}{|DS|} \cdot \frac{|BP|}{|AP|}.$$

Nyní dokážeme, že body Q, R, Y leží na jedné přímce. Použijeme k tomu rovnosti získané výše, takže platí

$$\begin{aligned} \frac{|CQ|}{|BQ|} \cdot \frac{|DR|}{|CR|} \cdot \frac{|BY|}{|DY|} &= \frac{|CQ|}{|BQ|} \cdot \frac{|DR|}{|CR|} \cdot \left(\frac{|AS|}{|DS|} \cdot \frac{|BP|}{|AP|} \right) = \\ &= \left(\frac{|BP|}{|AP|} \cdot \frac{|CQ|}{|BQ|} \right) \cdot \left(\frac{|DR|}{|CR|} \cdot \frac{|AS|}{|DS|} \right) = \frac{|CX|}{|AX|} \cdot \frac{|AX|}{|CX|} = 1. \end{aligned}$$

To je tvrzení Menelaovy věty pro trojúhelník BCD a přímku QR . Tím je dokázáno, že body Q, R, Y leží na jedné přímce.

Úlohy k samostatnému řešení

Úloha 1

Dokažte tvrzení z příkl. 2 pro polohu bodů A, B, C, D, E, F na obr. 2b.

Úloha 2

Je dáno 6 bodů A, B, C, D, K, M takových, že se přímky AM, BK, CD protínají v jednom bodě a přímky AB, CK, DM se protínají v jednom bodě. Dokažte, že se v jednom bodě protínají také přímky AC, BD, KM .

Úloha 3

Dokažte tvrzení z příkladu 3 pro případ, že v šestiúhelníku $ABCDEF$ splynou body B, C a také splynou body D, E , takže vznikne čtyřúhelník $ABDF$.

Úloha 4

Na kružnici se středem S je pět bodů A, B, C, D, E v tomto pořadí. Body jsou umístěny tak, že $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle ADE| = 45^\circ$. Dokažte, že body E, S, B leží na jedné přímce.

Návody k řešení zadaných úloh

Úloha 1: Postup důkazu je totožný jako v příkladu 2.

Úloha 2: Řešení úlohy lze provést pomocí řešení příkl. 2 s pomocí obr. 2a.

Úloha 3: Důkaz je analogický jako v příkladu 4.

Úloha 4: Obvodový úhel nad tětivou AB má velikost 45° , proto středový úhel nad touto tětivou má velikost 90° . Stejně tvrzení platí pro tětivu AE .

Tento článek opět navázal na ten předchozí. I zde jsme představili několik zajímavých trojic bodů v rovině, které leží na jedné přímce. Další zajímavé trojice bodů představíme v navazujících článcích.

Literatura

- [1] Boček, L., Zhouf, J.: Planimetrie. 2. rozšířené vydání, PedF UK, Praha, 2012.
- [2] Coxeter, H. S. M., Greitzer, S. L.: Geometry revisited. The Mathematical Association of America, 1967.
- [3] Honsberger, R.: Mathematical Chestnuts from Around the World. The Mathematical Association of America, 2001.
- [4] Švrček, J., Vanžura J.: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha, 1988.
- [5] Zhouf, J.: Tři speciální body ležící na jedné přímce II. Matematika–fyzika–informatika, roč. 30 (2021), č. 4, s. 261–271.

Trojúhelníkové puzzle

JANA SLEZÁKOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Svět didaktických her odráží realitu dnešního světa, pomáhá hledat strategie řešení, řešit krizové situace, učí děti zdravě riskovat. Cílem tohoto článku je seznámit učitele matematiky všech typů a stupňů škol s hmatovou hrou *Trojúhelníkové puzzle*. Hra je určena především pro nevidomé a slabozraké žáky, může však sloužit učitelům matematiky základních škol a nižších ročníků víceletých gymnázií při výuce geometrie. *Trojúhelníkové puzzle* je vhodným doplňkem ve výuce geometrie, neboť podporuje rozvoj manipulativních činností, napomáhá tvořivosti, podněcuje kreativitu. Hmatová hra umožňuje žákům intaktním (běžným, standardním), ale i žákům se speciálními vzdělávacími potřebami, lépe porozumět základním vztahům a vlastnostem geometrických útvarů v rovině. Pomáhá rozvíjet geometrické a kombinační myšlení, podporuje rozvoj rovinné i prostorové představivosti.

Je velice obtížné podat nerozporný a úplný přehled didaktických her. Pod pojmem hra někteří autoři uvádějí všechny tvořivé simulace reálného světa spojené s edukační činností. Lze říci, že hra je všechno, co poskytuje žákovi uspokojení a možnost aspoň částečné seberealizace, co mu nabízí volnější, alternativní aktivity, které jsou pro něj přirozenější, zajímavější a citově bohatší. V literatuře najdeme různé definice didaktické hry. Didaktická hra je spontánní činnost dětí, která sleduje (pro žáky ne vždy zjevným způsobem) didaktické cíle.

Každý učitel, který se rozhodne zařadit do výuky didaktické hry, by si měl nejprve vytvořit jistý přehled těchto aktivit. To mu bezesporu pomůže k tomu, aby byl schopen individuálně zařadit hru, která bude pro konkrétní učivo a pro splnění daných výchovně vzdělávacích cílů nejvhodnější. V publikaci [1] se uvádí, že vytvořit si představu o bohatství didaktických her je pro učitele velmi prospěšné – postupně si vytvoří vlastní repertoár her, které odpovídají jeho vyučovacímu stylu.

Geometrie je velmi důležitá ve výuce a uvažování dětí všech věkových kategorií. V publikaci [2] se uvádí, že vývoj dětí na základních školách do značné míry závisí na vnímání prostoru. Proto je velmi důležité povzbuzovat a podporovat geometrii v kurikulárních aktivitách také pro děti se

zrakovým postižením. Pro nevidomé dítě je obvykle velmi obtížné vypořádat se s prostorem a jeho zákonitostmi, také učitelé a vychovatelé často zanedbávají geometrii mezi školními předměty a považují ji za nesplnitelnou výzvu. Lze to řešit vytvořením nástrojů pro podporu výuky a poskytnutím znalostí a strategií pro výuku geometrie studentům se zrakovým postižením [3].

Hmatovou hru *Trojúhelníkové puzzle* lze zařadit do skupiny *her s geometrickými náměty*, které slouží k rozvoji prostorové a geometrické představivosti, obrazotvornosti, odhadu, orientace v rovině a v prostoru, tvořivosti, kombinačního myšlení. Hra žáky učí taktice a strategickému myšlení. Do skupiny her s geometrickými náměty spadají hry k poznávání geometrických těles a tvarů, nejrozličnější geometrické hlavolamy, hry k procvičování osově souměrnosti. Součástí těchto her jsou činnosti jako modelování, skládání, stavba z krychlí, stříhání, lepení, kreslení a práce se sítěmi různých těles [4].

V **RVP ZV** v tematickém okruhu Geometrie v rovině a v prostoru žáci určují a znázorňují geometrické útvary a geometricky modelují reálné situace, hledají podobnosti a odlišnosti útvarů, které se vyskytují všude kolem nás, uvědomují si vzájemné polohy objektů v rovině (resp. v prostoru), učí se porovnávat, odhadovat, měřit délku, velikost úhlu, obvod a obsah (resp. povrch a objem), zdokonalovat svůj grafický projev. Zkoumání tvaru a prostoru vede žáky k řešení polohových a metrických úloh a problémů, které vycházejí z běžných životních situací.

Současná hodnota matematického vzdělávání je založena především na kvalitním obsahu výuky, na důležitosti metodického zpracování. Na tom, jakým způsobem jsou učitelé schopni naučit řešit žáky problémové situace a úlohy z běžného života, pochopit a analyzovat problém. Správně odhadnout rozumovou vyspělost žáka, posilovat ho ve vlastní schopnosti logického uvažování. Učitelé by měli být ve výuce matematiky schopni rozvíjet jednotlivé kompetence, žáky správně motivovat.

Hmatová hra *Trojúhelníkové puzzle* rozvíjí kompetence pracovní, neboť žáka vede, aby dokázal s herním materiálem účelně manipulovat. Je důležité, aby učitel u složitějších her dokázal odhadnout, jestli žák potřebuje znát všechna pravidla od začátku a najednou [5]. Hra je koncipovaná tak, aby sloužila nejen žákům nevidomým a slabozrakým, ale umožnila rozvoj žáků intaktních a těch, kteří nemají dostatečně vyvinutou prostorovou představivost. Předloženou hru je možné zařadit do skupiny hlavolamů, které především podporují rozvoj kompetence k řešení problémů. Mnoho

her, které učitelé při výuce používají, má svá hrací pole, pravidla, hrací figurky. Hraní her umožňuje plno obrazových informací a gest, které si žák neuvědomuje, avšak nenásilnou formou se je naučí. Také vytrvalost podněcuje rozvoj kompetence k řešení problémů. Opakováním hry se žák učí hledat další varianty řešení, učí se využívat předchozí znalosti a zkušenosti.

Trojúhelníkové puzzle rozvíjí rovněž kompetenci k učení. Především se jedná o klasifikaci a charakteristiku základních geometrických útvarů – rovnostranný trojúhelník, rovnoramenný lichoběžník, kosodélník. Podporuje rozvoj manipulativních činností, napomáhá lepšímu propojení a systematizaci informací nejen v tvůrčích činnostech, ale i v praktickém životě.

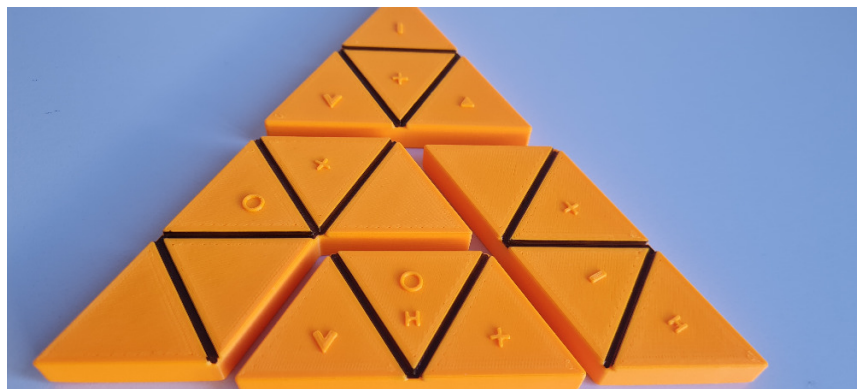
Popis a ukázka

Trojúhelníkové puzzle je hra, která obsahuje základní šablonu ve tvaru rovnostranného trojúhelníku, do které se bez překrytí vkládají vždy 3 nebo 4 menší moduly. Úkolem hráče je umístit vybrané moduly tak, aby vyplnily bez překrytí celou šablonu. Sada obsahuje celkem 11 modulů, které se skládají z různých geometrických tvarů (rovnostranný trojúhelník, rovnoramenný lichoběžník, kosodélník, kosočtverec), ale i nekonvexních mnohoúhelníků sestavených ze shodných rovnostranných trojúhelníků se společnou aspoň jednou celou stranou, přičemž vnitřní úhly jsou vždy celočíselnými násobky 60° . Moduly vzniknou formálně sjednocením (aspoň dvou) shodných rovnostranných trojúhelníků. Přitom délka strany každého jednotlivého rovnostranného trojúhelníku je čtvrtinou délky strany šablony.

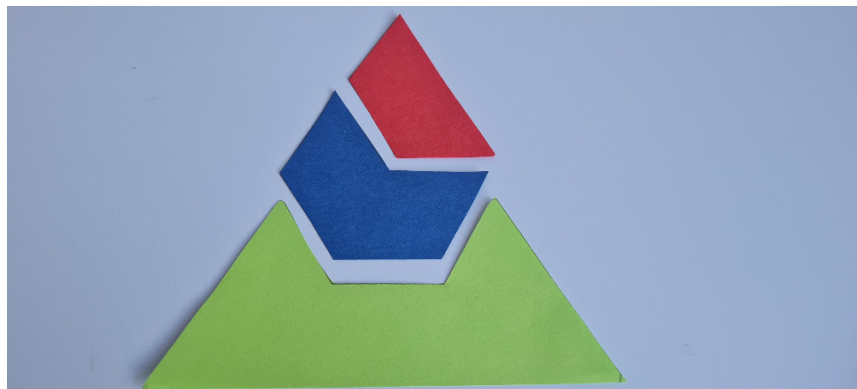


Hra má celkem sedm variant řešení. Každý modul je doplněn o hmatový bod – drobný reliéf, který ukazuje nevidomým žákům cestu ke správnému řešení. Celkem je uvedeno sedm různých hmatových bodů – znaků v podobě kruhu, kružnice, trojúhelníku, znaménka plus, velkého tiskacího pís-

mena H, velkého tiskacího písmena V, velkého tiskacího písmena I. Označení pomocí hmatových bodů navede nevidomého žáka k výběru správného počtu modulů. Následně pak žák složí 3 nebo 4 moduly tak, aby byl zaplněn celý prostor trojúhelníkové šablony.



Na konkrétních modulech lze najít různý počet hmatových bodů. To proto, že jeden modul může být použitý pro více variant řešení. Jednotkové moduly jsou ohrazené černou konturou, která slouží žákům slabozrakým při rozeznávání a přiřazování geometrických tvarů. Hmatovou hru je možné použít i bez základní šablony. Součástí hry je také návod s výsledky řešení.



Tato hra podporuje logické uvažování, prostorovou představivost, ale i manuální zručnost, napomáhá k rozvoji hmatového vnímání základních geometrických útvarů, dále rozvíjí intelekt, podněcuje trpělivost a kreati-

vitě. Je vhodná pro všechny věkové kategorie. Trojúhelníkové puzzle přináší radost, zábavu a ukazují propojení kombinačního myšlení se světem geometrie.



Trojúhelníkové puzzle je možné objednat přímo na Katedře experimentální fyziky, kontaktní osoba RNDr. Jana Slezáková, Ph.D., autorka hmatové hry (jana.slezakova@upol.cz).

Poděkování patří Přírodovědecké fakultě Univerzity Palackého, jmenovitě Martinu Ochmannovi za zajištění výroby hmatové hry formou 3D tisku a další cenné podněty. Dále děkuji Christu Kírkellovskému za grafický návrh.

Literatura

- [1] Maňák, J., Švec, V.: Výukové metody. Paido, Brno, 2003.
- [2] Kennedy, L. M., Kennedy, T. S.: Guiding Children's Learning of Mathematics. Wadsworth Publishing Company, Belmont, California, 1994.
- [3] Klingenberg, O. G.: Conceptual Understanding of Shape and Space by Braille-Reading Norwegian Students in Elementary School. The Journal of Visual Impairment & Blindness, roč. 106 (2012), č. 8, s. 453–465.
- [4] Kárová, V.: Didaktické hry ve vyučování matematice v 1.–5. ročníku základní a obecné školy. Západočeská univerzita, Plzeň, 1997.
- [5] Vávrová, A.: Hry pro rozvoj nadání ve výuce. NIDV, Praha, 2019.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 31. 3. 2023 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 281

Nechť d_k značí počet jednomístných dělitelů libovolného přirozeného čísla k .

a) Dokažte, že pro každé kladné celé číslo n platí

$$\frac{d_{n+1} + d_{n+2} + \dots + d_{n+20}}{20} < 3.$$

b) Dokažte, že existuje kladné celé číslo n , pro které platí

$$\frac{d_{n+1} + d_{n+2} + \dots + d_{n+19}}{19} > 3.$$

Josef Tkadlec

Úloha 282

Je dán třetivový čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami. Označme P průsečík kolmice z vrcholu A k přímce CD s přímkou BD . Dokažte, že body P a B mají od vrcholu A stejnou vzdálenost.

Vojtěch Zlámal

Dále uvádíme řešení úloh 277 a 278, jejichž zadání jsme zveřejnili ve druhém čísle letošního (31.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 277

K danému celému číslu $D > 1$ určíme celé číslo $n > 1$ tak, aby platilo

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) < D \leq 1 + 2 + \dots + n.$$

Rozhodněte, zda pak lze z libovolné n -prvkové množiny po sobě jdoucích celých čísel vybrat neprázdnou podmnožinu prvků s takovým součtem, který je dělitelný číslem D .

Jaromír Šimša

Vzhledem k tomu, že redakce neobdržela žádné úplné řešení této úlohy, necháváme tento problém pro čtenáře nadále otevřený. Svá řešení můžete dodatečně zaslat do redakce MFI ve stejném termínu jako řešení úloh 281 a 282.

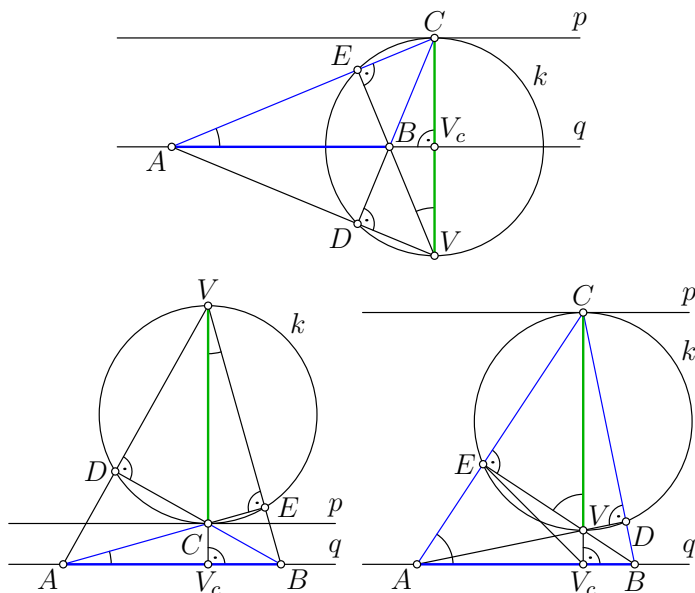
Úloha 278

Jsou dány dvě rovnoběžné přímky p a q . Na přímce p je dán bod C a na přímce q uvažujme úsečku AB dané délky d . V trojúhelníku ABC označme D, E po řadě paty výšek z vrcholů A, B .

- Dokažte, že přímka p je tečnou kružnice opsané trojúhelníku CDE .
- Sestrojte úsečku AB tak, aby kružnice opsaná trojúhelníku CDE měla průměr d .

Ján Mazák

Řešení. Označme dále V_c patu výšky z vrcholu C trojúhelníku ABC a V průsečík jeho výšek. Pokud je trojúhelník tupouhlý s tupým úhlem při vrcholech A nebo B , můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že tupý úhel je při vrcholu B , protože jinak nám stačí zaměnit A s B a D s E , viz obrázek nahoře. Pokud je tupý úhel u vrcholu C , viz obrázek vlevo dole, pokud jsou všechny úhly trojúhelníku ABC ostré, viz obrázek vpravo dole.



Úhly CEV a CDV jsou pravé, podle Thaletovy věty tak je CV průměrem kružnice k opsané trojúhelníku CDE . Úsečka CV leží na výšce trojúhelníku ABC ke straně AB . Je tak k ní kolmá, tedy je kolmá i na přímkou q a s ní rovnoběžnou přímkou p . Přímka p procházející bodem C je tak kolmá na průměr CV kružnice k opsané trojúhelníku CDE a je tedy její tečnou, což jsme měli dokázat v části a).

Trojúhelníky CEV a CV_cA se shodují ve vnitřním úhlu při vrcholu C a pravých úhlech při vrcholech E a V_c , jsou tedy podobné a mají tak shodný i třetí vnitřní úhel u vrcholů V a A . Ze shodnosti úhlů BAE a CVE plyne, že pravoúhlé trojúhelníky ABE a VCE s pravými úhly u vrcholu E jsou podobné. Pokud je průměr $|CV|$ kružnice k roven $d = |AB|$, jsou trojúhelníky ABE a VCE shodné, platí tak $|EB| = |EC|$ a pravoúhlý trojúhelník BCE s pravým úhlem při vrcholu E je rovnoramenný. Naopak, pokud je tento trojúhelník rovnoramenný, jsou trojúhelníky ABE a VCE shodné, tedy $|AB| = |VC|$ a kružnice k tak má poloměr d . Pravoúhlý trojúhelník BCE bude rovnoramenný, právě když velikost jeho vnitřního úhlu BCE bude 45° , tedy právě když velikost vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu C bude 45° nebo 135° (v závislosti na tom, zda bod E je či není bodem úsečky AC).

Odtud již plyne konstrukce požadované úsečky AB . Na přímkou p sestrojíme úsečku $A'B'$ délky d a množinu ℓ bodů, ze kterých je tato úsečka vidět pod úhlem 45° nebo 135° . Tuto množinu tvoří dvě kružnice, jejichž středy jsou zbývající vrcholy čtverce s úhlopříčkou AB . Průsečík ℓ s přímkou q označíme C' . Úsečku AB pak dostaneme posunutím úsečky $A'B'$ podle vektoru $C'C$. Počet řešení úlohy pak závisí na tom, kolik existuje průsečíků množiny ℓ s přímkou p . Tento průsečík buď neexistuje, nebo existují jeden, dva, tři, nebo čtyři průsečíky. Jelikož body A a B můžeme vzájemně zaměnit, existuje tak žádné, 2, 4, 6 nebo 8 řešení dané úlohy. Snadno dopočteme, že

- i) pokud vzdálenost přímek p a q je větší než $d(\sqrt{2} + 1)/2$, nemá úloha žádné řešení,
- ii) pokud je vzdálenost přímek p a q rovna tomuto číslu, má úloha právě dvě řešení,
- iii) pokud je vzdálenost přímek p a q mezi čísly $d(\sqrt{2} + 1)/2$ a $d(\sqrt{2} - 1)/2$, má úloha právě čtyři řešení,
- iv) pokud je rovna číslu $d(\sqrt{2} - 1)/2$, má úloha šest řešení a
- v) pokud je vzdálenost p a q menší než toto číslo, má úloha osm řešení.

Poznámka 1. Nástin jiné konstrukce trojúhelníku ABC . Velikost vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu C je 45° nebo 135° , Pravoúhlé trojúhelníky ADC a BEC jsou tak rovnoramenné a velikost aspoň jednoho z úhlů CAV a CBV je 45° (zbývající má velikost buď 45° , nebo 135° , nebo se jeden z bodů A , B shoduje s bodem V a nemá smysl hovořit o druhém úhlu). Odtud již plyne konstrukce. Sestrojíme obě kružnice k s průměrem CV délky d , které se dotýkají přímky p v bodě C . Sestrojíme množinu bodů, ze kterých je úsečka CV vidět pod úhlem 45° (dvakrát dva kružnicové oblouky). Jejich průsečík s přímkou q označíme A nebo B , a druhý z těchto bodů pak bude ležet na přímce p „směrem k CV “ ve vzdálenosti d od prvního.

Poznámka 2. Mnoho řešitelů neprovedlo úplnou diskusi velikostí vnitřních úhlů trojúhelníku ABC a dospělo většinou k závěru, že velikost vnitřního úhlu trojúhelníku u vrcholu C je jen 45° . Jejich řešení tak byla hodnocena jako částečná.

Správná řešení zaslali *Anastasia Bredikhina*, *Michal Janík* a *Samuel Rosiar*, všichni z GJK v Praze 6, *Tereza Černá* z G v Praze 9, *Litoměřická*, *Anna Hronová*, a *Alena Janáčková*, obě z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Erik Ježek* ze SSPŠ a G v Praze 5, *Pavla Sankotová* z G v Plzni, Mikulášské nám. a *Jakub Štepo* z G v Kladně.

Neúplné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *František Jáchim* z Volyně, *Adam Červenka*, *Martin Dufek*, *Štěpán Mikéska*, *Jakub Koňárek*, *Lukáš Kycl*, *Petr Slonek* a *Filip Smíšek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Lenka Poljaková* z GJŠ v Přerově, *Ondřej Trinkewitz* z G a SPŠE ve Frenštátě pod Radhoštěm a *Lukáš Wendzel* z G a SPŠEI ve Frenštátě p. Radhoštěm.

Pavel Calábek

Několik poznámek k učivu o Sluneční soustavě

LEONTÝNA ŠLÉGROVÁ, JAN ŠLÉGR

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

Úvod

Výuka astrofyziky na střední škole není jednoduchá disciplína. Je čím dál obtížnější najít na ni čas. Podle průzkumu [1] se např. na nadpoloviční většině oslovených gymnázií učí fyzika pouze ve třech ročnících čtyřletého studia, přestože ještě před deseti let tomu bylo naopak. Pouze asi na pětině gymnázií je astrofyzika vykládána jako součást běžné výuky, jinak se zařazuje do volitelného fyzikálního semináře, případně se nevyučuje vůbec. Zejména pro fyzikální semináře je vhodné mít k dispozici úlohy, které lze využít ve výuce. To není problém např. při výkladu měření v astrofyzice, ve výkladu Sluneční soustavy však na první pohled tolik možností není a výklad tak sklouzává k pamětnému učení izolovaných faktů o planetách. V poslední době však v časopise MFI vyšlo několik článků Vladimíra Štefla, které popisují úlohy použitelné ve výuce (např. [2], [3] nebo [4]).

Dalším problémem je, že učivo o Sluneční soustavě obsahuje celou řadu terminologických nejasností. Jedná se již o samotný název, kde se můžeme setkat s tím, že se zapisuje jako *sluneční soustava* (tento zápis je možné najít v Pravidlech českého pravopisu). Česká astronomická společnost naopak doporučuje psát název s velkými písmeny S, tedy *Sluneční soustava*. Tento zápis budeme používat v článku.

Nepřesné a často protichůdné informace se také vyskytují v rozdělení těles ve Sluneční soustavě, tedy v rozdělení na planety, trpasličí planety a malá tělesa Sluneční soustavy. Hovořit lze také o nejasnostech při zařazení tělesa mezi planety či meteoroidy.

V tomto článku stručně shrnujeme základní informace o složení Sluneční soustavy v souladu s doporučeními Mezinárodní astronomické unie a uvádíme několik úloh, kterými lze podpořit výklad učiva o Sluneční soustavě.

Složení Sluneční soustavy – její počátek

Jak již název napovídá, Sluneční soustava je soustavou naší jediné hvězdy, tedy Slunce. Její počátek je tak zřejmý a leží ve Slunci. Při výkladu Sluneční soustavy je však důležité zdůraznit, že samo centrální těleso se, podobně jako všechna tělesa ve Sluneční soustavě, pohybuje. Pokud se totiž budeme bavit o těžišti Sluneční soustavy, tzv. barycentru, zjistíme, že se jeho poloha mění v závislosti na poloze velmi hmotných planet, tj. zejména Jupiteru, Saturnu, Uranu a Neptunu. Při oběhu planet dochází k posunu hmotného středu Sluneční soustavy a tím i k pohybu Slunce, které kolem barycentra obíhá spolu s planetami.

Aby žáci získali lepší představu, jak polohu barycentra ovlivňuje poloha planet, je vhodné do výuky zařadit (pokud to čas dovolí) úlohy na toto téma. Může se jednat například o tyto:

Úloha 1

Polohu barycentra Sluneční soustavy nejvíce ovlivňuje poloha Jupiteru. Určete, kde se nachází barycentrum Sluneční soustavy, pokud uvažujeme, že je složena pouze z těles Slunce ($\odot$) a Jupiter (J). Slunce má hmotnost přibližně $2,0 \cdot 10^{30}$ kg, hmotnost Jupiteru je 317,9krát vyšší než je hmotnost Země, která je přibližně $6,0 \cdot 10^{24}$ kg. Vzdálenost Jupiteru od Slunce je přibližně 5,2 au¹⁾.

Řešení.

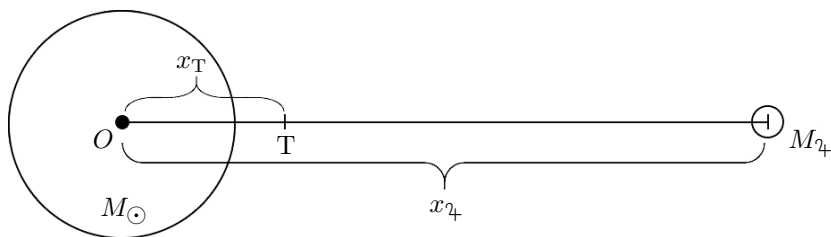
$$M_{\odot} = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}, \quad M_{\text{J}} = 317,9 \cdot 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad x_{\text{J}} = 5,2 \text{ au}, \quad x_{\text{T}} = ? \text{ m}$$

Barycentrum, neboli těžiště dvou těles je možné určit z momentové věty. Pokud osu otáčení, vzhledem ke které budeme určovat moment síly, umístíme do středu Slunce, bude mít momentová věta tvar (obr. 1)

$$(M_{\odot} + M_{\text{J}}) g x_{\text{T}} = M_{\text{J}} g x_{\text{J}}.$$

¹⁾ Astronomická jednotka by se podle rezoluce 27. valného shromáždění Mezinárodní astronomické unie měla značit au, nikoli AU.

Na levé straně rovnice je celkový moment síly vzhledem k ose otáčení, která je umístěna ve středu Slunce, ten je roven součtu momentů síly Slunce a Jupiteru vzhledem k ose otáčení procházející středem Slunce. Moment síly Slunce vzhledem k ose procházející Sluncem je nulový, proto je na pravé straně rovnice jen moment síly Jupiteru.



Obr. 1 K určení polohy barycentra

Vzdálenost barycentra od středu Slunce z momentové věty můžeme vyjádřit jako

$$x_T = \frac{M_J x_J}{M_{\odot} + M_J} = \frac{317,9 \cdot 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg} \cdot 5,2 \text{ au}}{2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg} + 317,9 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}}.$$

Vzdálenost barycentra od středu Slunce je tak

$$x_T \doteq 0,0050 \text{ au} \doteq 7,4 \cdot 10^8 \text{ m}.$$

Barycentrum tedy leží přibližně 7 % poloměru Slunce nad jeho povrchem.

Úloha 2

Určete, jak se změní poloha barycentra, pokud budeme uvažovat, že se všechny čtyři obří planety nachází v jedné přímce na svých oběžných drahách. Slunce má hmotnost přibližně $2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$, hmotnost Jupiteru je 317,9krát vyšší než je hmotnost Země, hmotnost Saturnu (η) přibližně 95,2krát vyšší než hmotnost Země, hmotnost Uranu (δ) přibližně 14,6krát vyšší a hmotnost Neptunu (ζ) přibližně 17,2krát vyšší než je hmotnost Země, která je přibližně $6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. Vzdálenost Jupiteru od Slunce je přibližně 5,2 au, vzdálenost Saturnu přibližně 9,5 au, vzdálenost Uranu přibližně 19,2 au a vzdálenost Neptunu od Slunce je přibližně 30,1 au.

Řešení.

$$M_{\odot} = 2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}, \quad M_{\text{J}} = 317,9 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad M_{\text{H}} = 85,2 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg},$$

$$M_{\text{S}} = 14,6 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}, \quad M_{\text{V}} = 17,2 \cdot 6 \cdot 10^{24} \text{ kg},$$

$$x_{\text{J}} = 5,2 \text{ au}, \quad x_{\text{H}} = 9,5 \text{ au}, \quad x_{\text{S}} = 19,2 \text{ au}, \quad x_{\text{V}} = 30,1 \text{ au}, \quad x_{\text{T}} = ? \text{ m}.$$

Opět sestavíme momentovou větu pro případ, kdy se osa, kolem které se soustava otáčí, nachází ve středu Slunce:

$$(M_{\odot} + M_{\text{J}} + M_{\odot} + M_{\text{S}} + M_{\text{V}})gx_{\text{T}} = g(M_{\text{J}}x_{\text{J}} + M_{\odot}x_{\odot} + M_{\text{S}}x_{\text{S}} + M_{\text{V}}x_{\text{V}})$$

Na levé straně rovnice je celkový moment síly vzhledem k ose otáčení, která je umístěna ve středu Slunce, ten je roven součtu momentů síly Slunce a Jupiteru vzhledem k ose otáčení procházející středem Slunce. Moment síly Slunce vzhledem k ose procházející Sluncem je nulový, proto je na pravé straně rovnice jen moment síly Jupiteru. Vzdálenost barycentra od středu Slunce můžeme vyjádřit z momentové věty:

$$x_{\text{T}} = \frac{M_{\text{J}}x_{\text{J}} + M_{\text{H}}x_{\text{H}} + M_{\text{S}}x_{\text{S}} + M_{\text{V}}x_{\text{V}}}{M_{\odot} + M_{\text{J}} + M_{\text{H}} + M_{\text{S}} + M_{\text{V}}}.$$

Po dosazení hodnot je vzdálenost barycentra od středu Slunce

$$x_{\text{T}} \doteq 0,0098 \text{ au} \doteq 1,5 \cdot 10^9 \text{ m}.$$

Barycentrum tedy leží mimo povrch Slunce, ve více než dvojnásobné vzdálenosti od středu Slunce, než je jeho poloměr.

Obdobně je možné určit i v jaké největší vzdálenosti od středu Slunce se může barycentrum Sluneční soustavy nacházet, pokud budeme uvažovat hypotetickou situaci, kdy se všechny planety nacházejí v jedné přímce. Můžeme si vyhledat střední vzdálenosti planet od středu Slunce a jejich hmotnosti a sestavit momentovou větu, pokud osu otáčení umístíme například do středu Slunce.

Situace popsané v předchozích úlohách jsou pouze hypotetické, mohou však žákům poskytnout představu, v jakém intervalu vzdáleností od středu Slunce se poloha barycentra může pohybovat. Zajímavá může pro žáky být také následná práce s informacemi, kdy si žáci např. můžou ze znalosti oběžných dob planet dopočítat jejich nejmenší společný násobek, aby zjistili, jak často mohou situace předestřené v úlohách nastat. Situace popsaná v druhé úloze, kdy jsou všechny plynní obři v jedné přímce, může například nastat jednou za přibližně 1,21 triliard let (tj. $1,21 \cdot 10^{21}$ let).

Složení Sluneční soustavy – její konec

Vzhledem k tomu, že hustota hmoty ani záření není rovnoměrná a ohraničená, existuje pro vymezení konce Sluneční soustavy několik možností. Logické by bylo vytyčit hranici Sluneční soustavy oběžnou drahou Nepetuna, tedy do vzdálenosti asi 30 au od Slunce. Druhou možností je konec Sluneční soustavy umístit za nejvzdálenější dráhy dlouhoperiodických komet, tedy do cca 50 000 au. Také se uvádí, že hranicí Sluneční soustavy může být hranice magnetického vlivu Slunce. Oblast tohoto vlivu se nazývá *heliosféra* a její hranice potom heliopauza. Heliosféra sahá cca 110 až 160 au od Slunce. Poslední možností, kterou zde uvádíme je předpokládaný dosah gravitačního působení Slunce, tedy cca 150 000 au.

Rozdělení těles ve Sluneční soustavě

Sluneční soustava se skládá z velkého množství těles. Kromě Slunce, naší jediné hvězdy, obsahuje osm planet, množství jejich měsíců, v současné době pět trpasličích planet a poté mnoho planetek, komet a meteoroidů. Dále bychom zde mohli nalézt molekuly, ionty, atomy a částice slunečního větru, částice mezihvězdného prostoru, fotony ze Slunce, planet a z jiných hvězd v různém stádiu vývoje, neutrína a jejich antičástice a také elektrické, magnetické a gravitační pole.

Větší tělesa ve Sluneční soustavě můžeme rozdělit na planety, trpasličí planety a malá tělesa. Toto rozdělení bylo odsouhlaseno na 26. valném shromáždění Mezinárodní astronomické unie v roce 2006 v Praze, kde byla přijata i nová definice planety a vytvořena nová skupina trpasličích planet.

Bylo definováno, že planeta je nebeské těleso, které obíhá okolo Slunce, má dostatečnou hmotnost, aby jeho vlastní gravitace překonala vnitřní síly pevného tělesa tak, aby dosáhlo tvaru odpovídajícího hydrostatické rovnováze a toto těleso také muselo v minulosti vyčistit okolí své dráhy.

Podle této definice je ve Sluneční soustavě osm planet – Merkur, Venuše, Země, Mars, Jupiter, Saturn, Uran a Neptun. K nové definici v tomto znění bylo přistoupeno z důvodu nejednoznačnosti té předchozí. V minulosti bylo za planetu považováno Pluto a po svém objevu na začátku 19. století i Ceres. Tento objekt byl za planetu považován až do roku 1850, kdy byl překlasifikován na planetku. Když bylo v roce 2003 objeveno transneptunické těleso Eris, které má rozměry větší než Pluto, stalo se také planetou. Z důvodu narůstajícího počtu planet, kdy hrozilo, že budou objevena i další tělesa, která by po vzoru Pluta byla rovněž zařazena mezi planety, bylo nutné definici upřesnit a počet planet snížit.

Pro tělesa, která sice obíhají okolo Slunce a mají dostatečnou hmotnost, aby jejich gravitace překonala vnitřní síly pevného tělesa, aby dosáhla tvaru odpovídajícího hydrostatické rovnováze, ale na rozdíl od planet nevyčistila okolí své dráhy a zároveň se nejedná o měsíce, byla stanovena nová kategorie – trpasličí planeta. Do této skupiny v současné době spadá pět těles – Ceres, Eris, Haumea, Makemake a Pluto. Několik dalších těles je však považováno za kandidáty, jmenovitě – Sedna, Quaoar, Orcus, Ixion, Varuna a AW 197. Vzhledem k tomu, že si astronomové uvědomovali historický význam Pluta, byla pro něho později vytvořena samostatná kategorie plutoid. Toto těleso oproti definici trpasličí planety obsahuje dodatek, že musí okolo Slunce obíhat ve větší vzdálenosti než je dráha Neptuna. Jedná se tedy o transneptunická tělesa. Do této kategorie kromě Pluta spadají i Eris, Haumea a Makemake.

Ostatní větší tělesa, která se nacházejí ve Sluneční soustavě, jsou řazena mezi malá tělesa Sluneční soustavy. Do této skupiny můžeme zařadit planetky, meteoroidy a komety.

Definice planetky není stanovena tak striktně jako definice planety a trpasličí planety. Planetka je těleso, které nespadá mezi planety ani trpasličí planety. Jde o pozůstatky po formování Sluneční soustavy či o úlomky větších těles. Velikost těchto těles je větší než velikost meteoroidů, pohybuje se od stovek metrů po stovky kilometrů. Obdobně jako planety či trpasličí planety obíhají kolem barycentra Sluneční soustavy, výstřednost jejich drah je však rozmanitější. Nejvíce planetek bylo pozorováno v hlavním pásu mezi drahami Marsu a Jupiteru. Další velké planetky se pak nacházejí za drahou Neptuna. V současnosti je známo přes milion planetek a počet nově objevených se stále zvyšuje.

Zajímavou aplikací mechaniky prvního ročníku, kterou lze trochu rozbít jinak spíše teoretický výklad, může být následující úloha:

Úloha 3

Jaká může být maximální rotační perioda planetky, při které se ještě neroztrhne odstředivou silou?

Řešení. Podmínka rovnováhy pro hmotu v planetce je rovnost velikosti únikové rychlosti $v_p = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$ a velikosti rychlosti obvodové $v = \omega_{\text{krit}} r$. Platí

$$\sqrt{\frac{2GM}{r}} = \omega_{\text{krit}} r.$$

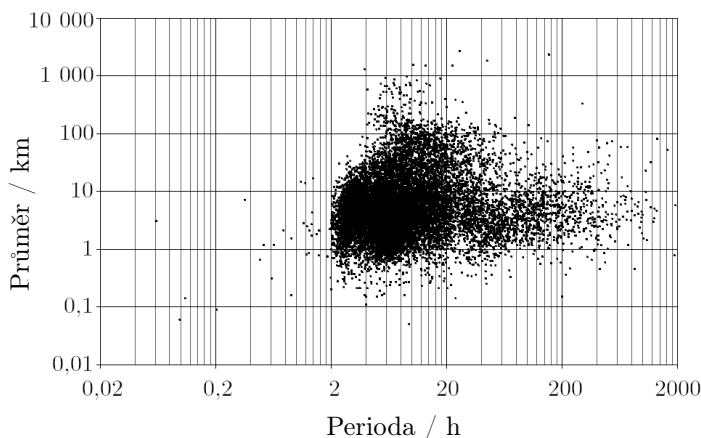
Úpravou pro ω_{krit} získáme:

$$\omega_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{2GM}{r^3}}.$$

Pokud uvážíme, že objem planetky je přímo úměrný r^3 , poté můžeme předpokládat, že je podíl M/r^3 úměrný hustotě planetky ϱ

$$\omega_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{2GM}{r^3}} \sim \sqrt{\varrho}.$$

Určili jsme, že úhlová rychlost planetky ω_{krit} , a podle vztahu $\omega_{\text{krit}} = \frac{2\pi}{T}$ ani perioda planetky T , nezávisí na rozměrech tělesa, ale T je přímo úměrná $\frac{1}{\sqrt{\varrho}}$. Pokud se podíváme na obr. 2 zjistíme, že většina planetek (bez ohledu na průměr) má skutečně velmi podobnou periodu rotace.



Obr. 2 Rotační periody planetek (upraveno podle [5])

Při výkladu o meteoroidech je důležité žákům vysvětlit i pojmy jako meteor, bolid, meteorit a tektit. Meteoroid je podle definice IAU z roku 2017 pevné přírodní těleso, jehož velikost je přibližně 30 mikrometrů až přibližně 1 metr. Toto těleso se pohybuje v meziplanetárním prostoru nebo z něj pochází. Meteoroidy vznikají většinou srážkami větších těles, ať už komet či větších planetek. Pokud se meteoroid dostane do blízkosti většího tělesa, například planety, může její gravitační působení změnit dráhu meteoroidu a může tak dojít k jeho vniku do atmosféry. Pokud k této

situaci dochází na Zemi, částice vzduchu v atmosféře meteoroid rozžhavlí a pokud se jedná o malé těleso, vypaří se. Světlo vzniklé při tomto jevu je velmi slabé a nebylo by vidět, v okolí tělesa však vzniká válec ionizovaného vzduchu, který při rekombinaci atomů září. Tento světelný jev nazýváme meteor. Tato meteorická stopa mívá průměr několik desítek až stovek metrů a výjimečně bývá viditelná i několik minut po průletu. Pokud meteor září jasněji než Venuše na noční obloze, nazýváme ho bolid. Pokud meteoroid při průletu atmosférou nezanikne, dopadá na Zemi v podobě meteoritu. Podle složení můžeme meteority rozdělit na aerolity (kamenné meteority), siderity (železné meteority) a siderolity (přechodný typ mezi kamenným a železným meteoritem). Podle odhadů na Zemi ročně dopadá 5 000 až 17 000 tun meteoritů. Přes 90 % meteoritů, které jsou nalezeny bezprostředně po dopadu, jsou kamenné, z dodatečně nalezených je však většina železných. Siderity se totiž daleko snáze odlišují od okolního terénu. Kamenné meteority navíc postupem času zvětrávají a rozpadají se. Železné meteority jsou oproti tomu odolné a je možné je nalézt i staletí po dopadu. Při dopadu meteoritů můžeme pozorovat jamky, jámy, či meteorické krátery. Roztavením a rozhozením hornin v okolí vznikají tektity. Mezi ty patří i vltavíny, které vznikly při pádu meteoritu v Bavorsku před 14,8 miliony let. Tyto teoretické informace lze podpořit např. následující úlohou.

Úloha 4

Na Wikipedii [6] se píše, že rychlost tělesa při vstupu do atmosféry Země je obvykle přes $20 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$, přičemž nejvyšší rychlost může být přibližně $71 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Proč tomu tak je?

Řešení. Pokud by se jednalo o asteroid (planetku) se zanedbatelnou rychlostí, Země si těleso gravitačně přitáhne a dopadová rychlost tělesa by byla rovna únikové rychlosti ze Země. Proč tomu tak je?

$$v_p = \sqrt{\frac{2GM_Z}{R_Z}}.$$

Po dosazení hmotnosti Země $M_Z = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ a zemského poloměru $R_Z = 6\,378 \text{ km}$, získáme

$$v_p = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{6\,378 \cdot 10^3 \text{ m}}},$$

$$v_p \doteq 11 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Kdyby se jednalo o úlomek komety, měl by tento úlomek stejnou rychlost, jako kometa. Maximální rychlost komety prolétající kolem Země určíme ze vztahu

$$v_p = \sqrt{\frac{2GM_\odot}{r}},$$

kde $M_\odot$ je hmotnost Slunce ($M_\odot \doteq 2,0 \cdot 10^{30}$ kg) a r je vzdálenost komety v blízkosti Země od Slunce, což je 1 au $\doteq 1,5 \cdot 10^{11}$ m. Po dosazení získáme

$$v_p = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}}{1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}}} \doteq 42 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Proč by tedy maximální rychlost vstupu úlomku do atmosféry měla být $71 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$? Je tomu tak proto, že Země se kolem Slunce pohybuje rychlostí $29 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ (tuto skutečnost můžete jednoduše ověřit). Proto, pokud úlomek do atmosféry vletí ve směru rotace Země, získáme

$$v = 42 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} + 29 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 71 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pokud úlomek do atmosféry vletí v opačném směru, proti směru rotace Země, získáme:

$$v = 42 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} - 29 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} = 13 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Dalšími tělesy, která se řadí mezi malá tělesa ve Sluneční soustavě patří komety. Tato tělesa se obvykle pohybují po eliptických drahách s velkou výstředností kolem Slunce. Při přiblížení ke Slunci komety výrazně mění svůj vzhled, na opačné straně než se Slunce vzniká ohon, který má velikost až 10^7 km. Příčinou jeho vzniku je Slunce, to zahřívá jádra komet a kolem nich tak vznikají řídké atmosféry. Tyto tzv. komy mají poloměr asi 10^4 km. Jádra komet mají rozměr v řádu kilometrů a jejich hmotnost se pohybuje mezi 10^{13} až 10^{15} kg.

Zajímavá může být pro žáky informace, že i když většina těles ve Sluneční soustavě obíhá ve stejném, prográdním směru (při pohledu ze severního pólu Slunce proti směru hodinových ručiček), existují tělesa, která obíhají v opačném, retrográdním směru. Tato retrográdní rotace naznačuje, že se tělesa na oběžnou dráhu Slunce dostala až v době, kdy už byla Sluneční soustava plně vytvořena a gravitační síla Slunce tělesa zachytila a ta začala obíhat v opačném směru. K podobné situaci došlo i v případě měsíců planet, která obíhají v opačném směru. Příkladem retrográdních

oběžnic jsou některé komety (např. Halleyova kometa), některé měsíce planety Jupiter, Saturn či Neptun, nebo měsíc trpasličí planety Pluto Charón. Zajímavým faktem také je, že i když všechny planety obíhají v prográdním směru, planeta Venuše má retrográdní rotaci, která je zřejmě způsobena srážkou s hmotným tělesem, ke které v minulosti došlo. Vzhledem k nepřírozenosti této rotace vzhledem ke směru oběhu je den na planetě delší než její rok. Rovněž planeta Uran rotuje v retrográdním směru, ovšem pouze těsně, sklon její rotační osy je 98° . Uran se tak na své oběžné dráze okolo Slunce valí podobně jako bowlingová koule po dráze. Tento pohyb způsobuje, že sluneční svit dopadá na severní a jižní polokouli střídavě – po 42 let je vždy jeden z pólů ve stínu.

Závěr

V tomto článku jsme chtěli jednak poukázat na některé terminologické speciality rozdělení těles ve Sluneční soustavě a jednak uvést typové úlohy, které mohou být použity ve výuce fyziky Sluneční soustavy a také uvést některé zajímavosti, které mohou pomoci učitelům ve výkladu.

Literatura

- [1] Dvořák, L., Dvořáková, I., Koudelková, V. (eds.): K problematice fyzikálního vzdělávání na ZŠ a SŠ v ČR před revizemi RVP. Podkladová studie k revizi rámcových vzdělávacích programů. Národní ústav pro vzdělávání a Fyzikální pedagogická společnost, pobočný spolek Jednoty českých matematiků a fyziků. Praha, 2018. Dostupné online: <http://www.nuv.cz/file/3514/>.
- [2] Štefl, V.: Komety ve výuce fyziky na středních školách. MFI, roč. 26, č. 2 (2017), s. 107–119. Dostupné z: <http://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/326>.
- [3] Štefl, V.: Keplerovy zákony ve výuce fyziky na střední škole. MFI, roč. 27, č. 4 (2018), s. 278–288. Dostupné z: <http://mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/326>.
- [4] Štefl, V.: Nejkrásnější planeta sluneční soustavy Saturn v úlohách. MFI, roč. 23, č. 1 (2014), s. 27–40. Dostupné z: <http://mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/109>.
- [5] Wikipedia contributors: List of fast rotators (minor planets). In: Wikipedia. [cit. 202-7-28]. Dostupné z: [https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=List_of_fast_rotators_\(minor_planets\)&oldid=1100939442](https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=List_of_fast_rotators_(minor_planets)&oldid=1100939442).
- [6] Wikipedia contributors: Meteorit [online]. In: Wikipedia [cit. 2021-9-29]. Dostupné z: <https://cs.wikipedia.org/wiki/Meteorit>.

Fyzikální úlohy Evropské experimentální olympiády EOES

JAN KŘÍŽ, FILIP STUDNIČKA, LEONTÝNA ŠLÉGROVÁ, JAN ŠLÉGR

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

Evropská olympiáda experimentální vědy (EOES – z angl. *European Olympiad of Experimental Science*) je přírodovědná vědecká soutěž s důrazem na týmovou spolupráci pro šestnáctileté a mladší studenty ze zemí Evropské unie. EOES poskytuje mladým studentům příležitost ukázat své vědecké schopnosti a podněcuje nadané studenty přírodních věd k rozvoji, a tím podporuje jejich budoucí vědeckou kariéru. Úlohy EOES jsou založeny na praktickém experimentování, jsou intelektuálně náročné a vyžadují týmovou práci. Specifikem soutěže je to, že integruje tři přírodovědné disciplíny – biologii, chemii a fyziku – do jednoho logického celku. Tradičně jsou úlohy problémově orientované, kontextové a propojené s reálným světem. Do řešení se zapojují všichni členové týmu, což podporuje jejich schopnost kooperativního řešení problémů. Tyto problémy obvykle vyžadují kreativní interpretaci experimentálních dat včetně často překvapivých a vysoce kladně hodnocených alternativních řešení. Soutěž navazuje na podobnou soutěž EUSO, které se tradičně účastnilo 25 států EU. Každý stát vysílá po dvou studentských týmech spolu s trojicí oborových expertů – členů mezinárodní jury. Celkem se tedy jedná o 150 studentů a cca 75 vědců a pedagogů, kteří každoročně v některé ze zemí Evropské unie tráví týden aktivitami rozvíjejícími talent budoucích vědeckých nadějí.

Dalším specifikem soutěže je, že se snaží být motivační, a proto každý zúčastněný tým získá některou z medailí. O počtu zlatých medailí rozhoduje mezinárodní jury, ale počet zlatých medailí by neměl přesahovat 10 % soutěžních týmů, počet zlatých a stříbrných dohromady by měl být přibližně 40 % a počet bronzových týmů musí být větší nebo roven polovině všech soutěžních týmů.

Soutěž pod názvem EOES poprvé proběhla v roce 2021, a to v distribuované formě. Maďarští organizátoři připravili soutěžní experimenty a

rozeslali je do všech soutěžních zemí. V každé zemi se pak oba soutěžní týmy sjely na jedno místo, kde úlohy řešily. Diskuse úloh mezinárodní jury, jakožto i následné moderace výsledků probíhaly pomocí prostředků dálkové komunikace. Naši studenti se v této soutěži rozhodně neztratili a získali jednu zlatou a jednu bronzovou medaili.

Během příprav EOES 2021 byli osloveni představitelé České republiky vzhledem k pokročilým přípravám ČR na původně plánovaný 18. ročník EUSO (připravené úlohy a logistika) s žádostí o uspořádání EOES v roce 2022. Soutěž proběhla pod záštitou MŠMT a rektorů Univerzity Karlovy a Univerzity Hradec Králové.

Hradec Králové se ukázal jako ideální lokalita s dvěma univerzitami (UHK a UK). Tomuto ověřenému univerzitnímu „společenství“ se již v roce 2011 podařilo zorganizovat vysoce úspěšně hodnocené EUSO, a to opět v situaci ohrožující kontinuitu jinak mimořádně inovativní a úspěšné soutěže. Česká republika, (mj. spoluzakladatel Mezinárodní fyzikální, biologické i chemické olympiády) si tímto způsobem v minulých letech vydobyla velký kredit.

EOES 2022

Když se v roce 2011 konala v České republice soutěž EUSO (viz náš předchozí článek [2]), tématem první úlohy bylo české pivo a tématem druhé úlohy kontaktní čočky. V roce 2022 uplynulo 200 let od narození *Johana Gregora Mendela*, objevitele zákonů dědičnosti, proto jedno z témat bylo jasné. V biologické části úlohy tedy soutěžící zkoumali zákony genetiky, v chemii deoxyribonukleovou kyselinu a antivirotika z dílny prof. Holého. Fyzikální část úloh, která měla být s tímto tématem propojená, se zaměřila na slavný difrakční rentgenový snímek pořízený v roce 1953 *Rosalindou Franklinovou* a jejím studentem *Raymondem Goslingem*, který prokázal, že molekula DNA má tvar dvoušroubovice.

Co se týče druhé úlohy, zde jsme využili faktu, že Česká republika je jedním z největších producentů kyseliny hyaluronové na světě. Jedná se o lineární polysacharid o vysoké molekulové hmotnosti, který se běžně vyskytuje v lidském organismu, ale má i různá lékařská využití: Pro své lubrikační vlastnosti se např. používá jako náhradní výplň opotřebovaných kloubů, v oftalmologických operacích a podobně. Jak víme z televizních reklam, používá se i v různých krémech proti vráskám (mechanismus účinku by měl pravděpodobně spočívat v hydrataci, protože kyselina hyaluronová velmi dobře váže vodu).

Úloha 1: DNA

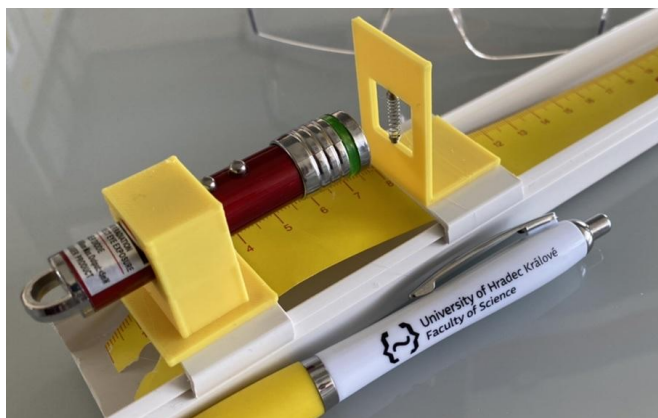
V biologické části úlohy soutěžící zkoumali několik vzorků DNA a hledali mutace, které mají lepší imunitní odpověď proti různým nemocem jako COVID-19 a cystická fibróza, a to pomocí gelové elektroforézy.

Po krátkém rozmýšlení, jakou experimentální úlohu navázat na DNA, jsme se rozhodli pro difrakční experimenty. Protože téma difrakce bylo pro soutěžící zcela nové (na rozdíl od úlohy 2, viz dále), bylo nejdříve v zadání nutné vyložit základní pojmy vlnové optiky a interference světla.

V první části úlohy měřili soutěžící průměr lidského vlasu, který byl uchycen v držáku. Pro maximum a minimum při difrakci na válcové překážce platí v prvním přiblížení

$$d \sin \theta_{\min} = k\lambda,$$
$$d \sin \theta_{\max} = (2k - 1) \frac{\lambda}{2},$$

kde k je řád maxima (minima), λ vlnová délka použitého záření a d průměr překážky. Vztahy lze odvodit buď z úvah o interferenci paprsků, nebo využít Babinetův princip – vztahy pro maxima a minima jsou opačné než pro případ štěrbin. Soutěžící měřili polohu minim, protože ta jsou stejně daleko od sebe (naopak nulté maximum je trochu širší než maxima vyšších řádů).

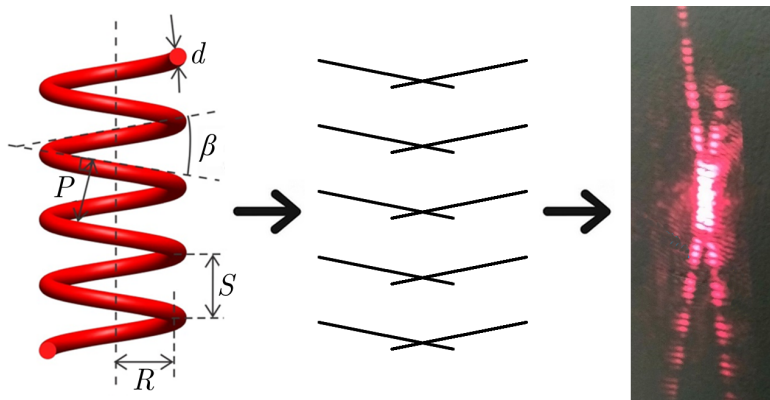


Obr. 1 Držák laseru a pružiny na optické lavici

Pro měření byla zkonstruována optická lavice (obr. 1), které obsahovala držák laserového ukazovátka, vzorku (vlasu nebo pružinky) a stínítka. Základem optické lavice je elektrikářská lišta, která umožňuje prvky posunovat a poskytuje potřebnou mechanickou pevnost. Když se v České republice podobná soutěž konala v roce 2011, tématem byly kontaktní čočky. Optická lavice pro paprskovou optiku byla konstruována obdobně, jen držáky bylo zapotřebí ohýbat z plechu [2]. V letošním roce byly držáky navrženy pomocí CAD systému a vytištěny na 3D tiskárně.

Typický výsledek tloušťky vlasu byl $d = 75(3) \mu\text{m}$ a výsledky se mezi jednotlivými skupinami příliš nelišily (všechny skupiny měly jako vzorek vlas od stejného člověka).

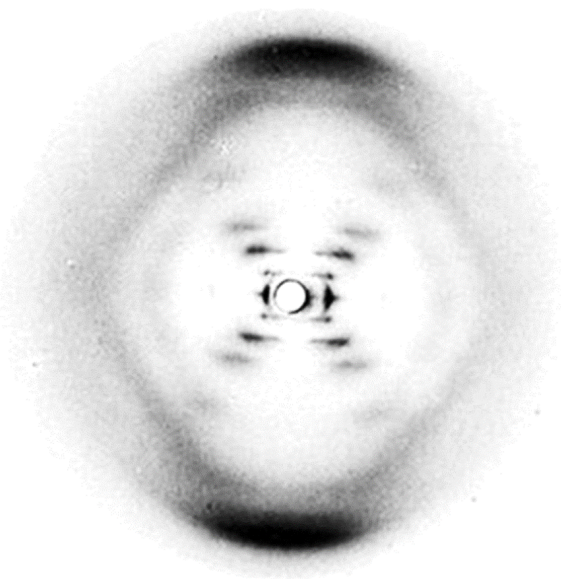
Druhá část úlohy se týkala difrakce na šroubovici, kterou reprezentovala pružinka uchycená v držáku (obr. 1). Pružinka se chová jako dvojice zkřížených mřížek vzájemně posunutých o úhel β . Na stínítku vznikne difrakční obrazec ve tvaru písmene X (obr. 2), přičemž oba segmenty svírají právě úhel β . Na difrakčním obrazci jsou patrné dvě struktury: hrubá a jemná. Větší, hrubá struktura má svůj původ v menší prostorové struktuře a lze z ní určit průměr drátu d , ze kterého je pružina namotána. Menší, jemná struktura vzniká difrakcí na větší prostorové struktuře a lze z ní určit vzdálenost jednotlivých závitů P (obr. 2).



Obr. 2 Difrakce na šroubovici

Soutěžící určovali obě tyto veličiny a dostali se k typickým výsledkům $d = 0,20(2) \text{ mm}$ a $P = 1,2(1) \text{ mm}$, které jsou v souladu s hodnotami určenými z makrofotografie pružinky při přípravě úlohy.

V poslední části úlohy pracovali soutěžící s původním historickým snímkem (Plate 51). Bylo zadáno měřítko snímku, na kterém za pomoci posuvného měřítka odměřovali vzdálenost minim (na obr. 3 se jako tmavé proužky objevují interferenční minima jemné struktury), ze kterých následně určovali úhel β a vzdálenost závitů dvojšroubovice DNA. Soutěžící se dostali k typickým výsledkům $P = 3,9(2)$ nm, $\beta = 79(1)^\circ$.



Obr. 3 Rentgenový difrakční snímek molekuly DNA

Na závěr museli soutěžící zodpovědět otázku, proč je zapotřebí ke studiu struktury DNA použít rentgenové záření (jinými slovy, proč není možné použít světlo). Vzhledem k tomu, že se jedná o mezinárodní soutěž, kde jsou odpovědní archy přeloženy do národních jazyků, museli si vystačit s matematickými symboly a značkami fyzikálních veličin. I tak jsme ale získali i několik vysvětlení v litevštině, kyperské turečtině a dalších jazycích.

Pro labužníky v řadách čtenářů dodáváme dvě věci: výsledný difrakční obrazec je jednou z mnoha fyzikálních situací, kde vystrkuje růžky Besselova funkce (viz [3]). Dvojšroubovice se pak na snímku projeví tím, že chybí každé čtvrté minimum.

Úloha 2: Kyselina hyaluronová

V chemické části úlohy byla měřena viskozita kyseliny hyaluronové. Jedná se o klasickou úlohu, kdy v kapalině padá kulička, na kterou působí směrem dolů tíhová síla a proti směru pohybu odporová síla, jejíž velikost lze vypočítat ze Stokesova vzorce. Kulička velmi rychle dosáhne mezní rychlosti, přičemž platí

$$mg = 6\pi\eta Rv,$$

kde m je hmotnost kuličky, R její poloměr, v mezní rychlost a η hledaná dynamická viskozita. Vzhledem k tomu, že mezní rychlost je konstantní, bylo možné ji velmi jednoduše vypočítat z času, za který kulička urazila danou vzdálenost v injekční stříkačce se vzorkem. Pro kyselinu hyaluronovou se nejdelším řetězcem (o molekulové hmotnosti 1 610 kilodaltonů) byl tento čas téměř tři minuty, což vedlo k výsledné viskozitě v desítkách Pa·s, tedy přibližně o řád více než v případě glycerolu a o čtyři řády více, než je tomu u vody.

První část fyzikální úlohy byla zaměřena na způsob, jakým kyselina hyaluronová váže vodu. Pro toto měření nebyla použita přímo kyselina hyaluronová, ale materiálový model, který váže vodu podobným způsobem, ale rychleji. Jednalo se o gelovou kuličku používanou v květinářství. Tyto kuličky se vyrábějí z polyakrylamidu, který vytváří síťovanou strukturu schopnou navázat velké množství vody (až stonásobky hmotnosti v suchém stavu). Soutěžící v pravidelných intervalech měřili průměr a hmotnost kuličky. Z původního průměru 1,9 mm a hmotnosti 0,002 g se po vložení do vody kulička zvětšila na 9,5 mm a 0,42 g, a to exponenciálně. Ze začátku totiž váže vodu velmi ochotně, ale čím více vody ve struktuře je, tím pomaleji se tam váže další. Poločas tohoto děje byl soutěžícími určen jako přibližně tři čtvrtě hodiny.¹⁾

Druhá část úlohy se již měřila se vzorkem vodného roztoku kyseliny hyaluronové, kde bylo kapkovou metodou měřeno povrchové napětí. Podstata kapkové metody spočívá v tom, že pokud budeme opatrně vytlačovat

¹⁾Ve fyzice jsou exponenciální děje poměrně časté: setkáváme se s radioaktivním rozpadem, Lambertovým–Beerovým zákonem, poklesem amplitudy oscilátorů, poklesem tlaku v atmosféře, vybíjením kondenzátoru. Stejnými zákony se řídí i časový vývoj výšky pěny na hladině piva. S ději, kde je exponenciela „na druhou stranu“, se setkáme např. při nabíjení kondenzátoru, což je fyzikálně stejný děj jako výše popsané vázání vody. Základem domácí laboratorní práce může být nárůst náboje na akumulátoru mobilního telefonu při jeho nabíjení.

kapalinu z injekční stříkačky, vznikající kapka se bude postupně zaškrcovat, jako když kape kohoutek. V okamžiku těsně před odtržením kapky platí

$$mg = \sigma 2\pi r,$$

kde σ je hledané povrchové napětí, m hmotnost kapky a $2\pi r$ obvod otvoru hrdla injekční stříkačky. Soutěžící opakovaně kapali padesát kapek vody a kyseliny hyaluronové na Petriho misku umístěnou na digitálních vahách, poloměr r byl zadán. Pro vodu byly typické výsledky jako $\sigma = 76,4(7) \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$, pro kyselinu hyaluronovou $\sigma = 64,6(8) \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$. Kyselina hyaluronová, která má větší viskozitu, tak má menší povrchové napětí, což bylo pro některé soutěžící překvapivé (tyto dvě veličiny ale nemusí být nutně korelovány).

Třetí část úlohy zkoumala lubrikační vlastnosti kyseliny hyaluronové. Pro tyto účely byla navržena nakloněná rovina, kterou je možné zafixovat v různých úhlech. Jedná se o dva elementy vytištěné na 3D tiskárně a spojené závitovou tyčí (obr. 4).



Obr. 4 Nakloněná rovina

Zároveň bylo na 3D tiskárně vytištěno zkušební tělísko. Spodní strana, která byla při tisku na podložce, je hladká, kdežto horní strana je hrubá, protože vrstvy tiskového materiálu nebyly natlačeny na tiskovou podložku. Bylo tak možné naměřit součinitel smykového tření hladké a hrubé strany. Těsně před tím, než se dá tělísko po nakloněné rovině do pohybu, platí

$$mg \sin \alpha_{\max} = f mg \cos \alpha_{\max} \Rightarrow f = \frac{\sin \alpha_{\max}}{\cos \alpha_{\max}} = \tan \alpha_{\max}.$$

Pro hrubou stranu byl určen součinitel smykového tření kolem 0,21. Tato hodnota je srovnatelná se spodní hranicí součinitele dřeva na dřevě.²⁾ Hladká strana má pak na nakloněné rovině součinitel smykového tření přibližně 0,16.

Následně bylo na nakloněnou rovinu nakapáno několik kapek kyseliny hyaluronové a pokus byl opakován. Při tomto měření došlo k poklesu součinitele smykového tření přibližně o dvě třetiny.

Závěr

Domnívali jsme se, že první úloha bude pro soutěžící náročnější, protože o difrakci světla zatím ve škole neslyšeli, a naopak teorii nutnou pro druhou úlohu studovali v prvním a druhém ročníku střední školy. Zpětná vazba od soutěžících však byla přesně opačná: Kapání, natírání nakloněné roviny a vůbec všeliké patlání kyseliny hyaluronové jim přišlo náročnější než měření interferenčních maxim a minim na stínítku v úloze číslo jedna. Celkově však byla fyzikální část úloh hodnocena kladně.

V tomto článku jsme popsali úlohy, které mohou být využity ve výuce středoškolské fyziky. Pokud na škole nejsou k dispozici sady pro měření součinitele smykového tření, lze je vyrobit na 3D tiskárně. Podobně měření průměru lidského vlasu může být pěknou laboratorní prací, která účinně podpoří výklad difrakce.

Literatura

- [1] European Olympiad of Experimental Science [on-line, cit. dne 2022-06-12]. Dostupné z <https://www.eoes.science/>.
- [2] Kabrhel, P., Kříž, J., Šlégr, J.: Fyzikální úlohy z mezinárodní přírodovědné olympiády EUSO 2011. Matematika–fyzika–informatika, roč. 21 (2011/2012), s. 475.
- [3] Watson, J. D., Crick, F. H. C.: Molecular Structure of Nucleic Acids: A Structure for Deoxyribose Nucleic Acid. Nature, vol. 171 (1953), s. 737–738. Dostupné z: <https://doi.org/10.1038/171737a0>.

²⁾Podle doc. Obdržálka z MFF UK lze smykové tření definovat následovně: „Když dřevo dře vo dřevo.“

Informatické hádanky

PETR OSIČKA, PETR KRAJČA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Hádanky jsou již dlouho součástí matematiky i informatiky. Některé z nich se již stali součástí folkloru dané oblasti, jiné se objevují při pracovních pohovorech (například v Google) či v odborných magazínech. Řešení hádanek je příjemnou zábavou, při které lze dobře procvičit myšlení, u hádanek informatických myšlení algoritmické.

1. Dělení parlamentu

Víme, že každý poslanec má v parlamentu přesně tři nepřátele. Přitom předpokládáme, že nepřátelství je symetrické. Tedy považuje-li poslanec A poslance B za svého nepřítele, pak i poslanec B považuje poslance A za svého nepřítele. Lze parlament rozdělit na dva kluby tak, aby každý poslanec měl klub, do kterého patří, nejvýše jednoho nepřítele? Zápornou odpověď odůvodněte důkazem, u kladné odpovědi uveďte, jak by se takové rozdělení zkonstruovalo.

Odpověď na otázku je ano. Rozdělení poslanců na kluby lze totiž zkonstruovat následujícím způsobem.

1. Libovolně rozdělíme poslance do klubů. Nemáme žádné další požadavky, jeden z klubů může být dokonce prázdný.
2. Dokud existuje poslanec, který má více než jednoho nepřítele ve svém klubu, přesuneme jej do opačného klubu.

Vidíme, že pokud algoritmus skončí, rozdělí poslance do klubů podle našich požadavků. Ty totiž přesně odpovídají podmínce z kroku 2 algoritmu. Stačí tedy ukázat, že algoritmus končí.

Na první pohled se zdá, že můžeme poslance přesouvat libovolně krát. Může se totiž stát, že přesuneme poslance do opačného klubu a později za ním přesuneme i některé jeho nepřátele. Nemůžeme na první pohled vyloučit situaci, že pokud původního poslance přesuneme zpět, budeme muset později přesunout zpět i jeho nepřátele. Celá situace by se pak mohla opakovat a algoritmus by nikdy neskončil.

Ve skutečnosti se dá dokázat, že přesunů mezi kluby se provede pouze konečně mnoho. Označme p počet nepřátelských dvojic poslanců, kteří se nachází ve stejném klubu. A nyní klíčová myšlenka:

Přesunem poslance v kroku 2 se p zmenší.

Je to proto, že před přesunem má poslanec ve svém klubu více nepřátel než po přesunu. Současně je ale číslo p omezeno, triviálně například vidíme

$$0 \leq p \leq n^2.$$

Řešení dnešní hádanky je ve skutečnosti algoritmem pro optimalizační úlohu nalezení maximálního řezu grafu. V této úloze hledáme rozklad množiny vrcholů grafu na dvě množiny tak, aby byl počet hran mezi uzly z různých množin maximální.

2. Nerozbitné skleničky

Východoněmecký podnik vyrábí velmi odolné skleničky. Pro účely propagace potřebuje zjistit nejvyšší patro své 100 patrové budovy, ze kterého se z okna vyhozená sklenička dole na ulici nerozbije. K dispozici nám dá 2 skleničky a přístup do budovy, takže můžeme skleničky vyhodit z námi zvoleného patra. Vyhození jedné skleničky a zjištění toho, jestli se rozbila, chápeme jako jeden pokus. Jaký je minimální počet pokusů, které v nejhorším případě potřebujeme, chceme-li úlohu vyřešit?

Úloha je jednodušší, pokud máme k dispozici jenom jednu skleničku. Abychom našli požadované patro, musíme skleničku postupně vyhazovat z 1., 2., 3., ..., 100. patra. Rozbije-li se v patře k , je hledané patro $k - 1$. Odpověď na naši otázku je 100, protože v nejhorším případě se sklenička nerozbije ani ve stém patře.

Druhou skleničku můžeme využít k urychlení hledání. Po krátkém zamýšlení zjistíme, že nemůžeme při hledání našeho patra použít analogie půlení intervalů ani jiný jednoduchý trik. Pomůže nám až pohled z druhé strany. Označíme si $H(k)$ maximální výšku budovy, pro kterou zvládneme požadované patro nalézt s použitím k pokusů. Máme-li k dispozici obě

skleničky, provedeme pokus v patře k . Pokud se sklenička rozbije, zbude nám $k - 1$ pokusů pro patra $1, 2, \dots, k - 1$, tak jako v případě s jednou skleničkou. Pokud se naopak sklenička nerozbije a zůstává nám ještě $k - 1$ pokusů i obě skleničky, můžeme prozkoumat dalších $H(k - 1)$ pater. Pro $H(k)$ tedy dostaneme rekurenci

$$H(k) = k + H(k - 1); \quad H(1) = 1,$$

jejímž rozbalením dostaneme uzavřenou formu

$$\begin{aligned} H(k) &= k + H(k - 1) \\ &= k + (k - 1) + (k - 2) + \dots + 1 \\ &= k(k + 1)/2. \end{aligned}$$

Nyní zbývá nalézt nejmenší k takové, aby platilo

$$100 \leq \frac{k(k + 1)}{2}.$$

Snadno ověříme, že hledané k je 14.

Dokud máme obě skleničky, provádíme pokusy postupně v patrech

$$14, 27, 39, 50, 60, 69, 77, 84, 90, 95, 99, 100.$$

Po rozbití skleničky pokračujeme od patra nad tím, ve kterém jsme provedli poslední pokus bez rozbití.

3. Sto tisíc telefonních čísel

Představte si, že jste zaměstnanec nebo zaměstnankyně telekomunikačního operátora a máte soubor obsahující sto tisíc šestimístních telefonních čísel, která jsou přiřazena jednotlivým zákazníkům. Vaším úkolem je čísla seřadit a vypsát. Ale aby tento úkol nebyl úplně jednoduchý, předpokládejte, že z důvodů úspor má váš nejlepší počítač jen 256 KB¹⁾ paměti RAM.²⁾

¹⁾Předpokládáme, že 1 KB = 1024 B.

²⁾V relativně nedávné minulosti, řekjme jí třeba osmdesátá léta, počítače s takto velkou pamětí nebyly nic neobvyklého.

3.1. Přímocará řešení

Ze zadání víme, že jednotlivá telefonní čísla budou šestimístná. Můžeme tedy uvažovat, že každé telefonní číslo je celé číslo z intervalu 0 až 999.999 (včetně). Nabízí se proto pro uložení telefonních čísel použít třicetidvou-bitový typ `int`. Stačí tedy načíst jednotlivá čísla do pole hodnot typu `int` a seřadit nějakým vhodným algoritmem jako je *QuickSort*.

Toto řešení je sice přímocará a jednoduché, ale v námi nastavených podmínkách nebude fungovat. Do 256 kB paměti se nám vejde jen 65535 hodnot typu `int`, a to nám nezůstane ani místo pro samotný program, ani pro operační systém.

Další možností by bylo řadit data s využitím vnější paměti. Takové řešení by již fungovalo, ale nebylo by patrně příliš rychlé, ani elegantní, a proto se jím nebudeme dále zabývat.

3.2. Lepší řešení

Při hledání vhodnějšího řešení můžeme využít toho, že v seznamu čísel bude každé telefonní číslo nanejvýš jednou. Můžeme si proto udělat seznam úplně všech čísel z intervalu $[0; 999.999]$ a poznačit si, která čísla jsou již zákazníkům přiřazena. Když tento seznam následně projdeme od začátku do konce a vypíšeme jen přiřazená čísla, získáme seřazenou posloupnost přesně, jak potřebujeme.

Jak ale vytvořit takový seznam? Opět můžeme využít skutečnost, že každé číslo na vstupu bude nanejvýš jednou a pro reprezentaci seznamu můžeme použít bitmapu. V této bitmapě každý bit bude představovat příznak, zda dané telefonní číslo bylo přiřazeno, nebo ne.

Výsledné řešení by mohlo vypadat následovně. Nejdříve si vytvoříme prázdné pole, které bude v paměti zabírat přesně jeden milion bitů, tj. 125 tis. bytů (nebo 31.250 slov o velikosti 32 bitů). Toto pole inicializujeme nulami.

```
1  int32_t numbers[1000000 / 32];
2  for (int i = 0; i < 1000000 / 32; i++)
3      numbers[i] = 0;
```

Všimněme si, že v tomto případě nám 256 kB paměti bude dostačovat. Výhodou i nevýhodou může být, že bez ohledu na to, kolik hodnot je na vstupu, vždy alokujeme stejné množství paměti.

Dále předpokládejme, že máme funkci `get_number`, která postupně na-

čítá a vrací hodnoty ze vstupu. V momentě, kdy narazí na konec vstupu, vrátí zápornou hodnotu. Zpracování vstupu bude v takovém případě vy-
padat následovně.

```
1  int32_t n;  
2  while ((n = get_number()) >= 0) {  
3      numbers[n / 32] |= 1 << (n % 32);  
4  }
```

Nejdříve se načte do proměnné `n` hodnota ze vstupu, a pokud je nezá-
porná, vyznačí se příslušný bit v poli `numbers`. Hodnota `numbers[n / 32]`
říká, ve kterém slově budeme nastavovat příslušný bit, výraz `1 << (n % 32)`
udává, který bit se v daném slově nastaví na jedna a operace `|=` se postará
o samotné nastavení příslušného bitu.

Posledním krokem je vypsání seřazené posloupnosti čísel. To provedeme
v podobném duchu. Projdeme všechna čísla od 0 do 999.999 (včetně) a
podíváme se, zda pro ně byl v poli `numbers` nastaven odpovídající bit
na 1.

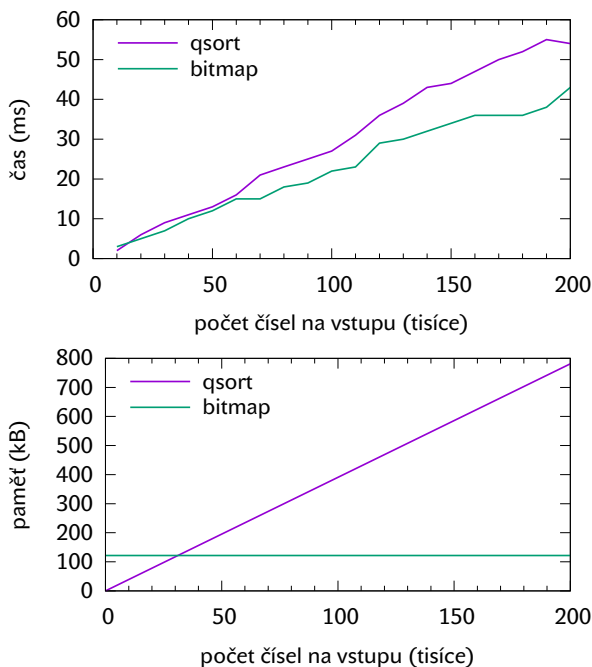
```
1  for (int i = 0; i < 1000000; i++) {  
2      if (numbers[i / 32] & (1 << (i % 32)))  
3          printf("%i\\n", i);  
4  }
```

Všimněme si, že pro výběr bitů používáme podobný postup jako v pří-
padě jejich nastavení v předchozím kroku. K testování, zda je příslušný
bit nastaven, slouží operátor `&`, který představuje bitový součin dvou hod-
not. Jinými slovy, pokud je příslušný bit nastaven na jedna, bude hodnota
výrazu `numbers[i / 32] & (1 << (i % 32))` nenulová, a tudíž to bude
interpretováno jako splnění podmínky. V opačném případě nebude pod-
mínka splněna.

3.3. Srovnání s přímočarým řešením

Dalo by se namítnout, že s dnešními počítači, které mají mnoho gi-
gabytů RAM a k tomu virtuální paměť, omezení na množství paměti,
které v této hádance máme, je příliš vykonstruované. Udělali jsme proto
experiment a srovnali jsme čas nutný k seřazení posloupnosti čísel po-
mocí QuickSortu a pomocí bitmapy. Výsledky ukazuje obr. 1 (nahore).
Pro menší množství čísel je mírně lepší QuickSort, ale s rostoucím počtem
čísel postupně ztrácí na řešení vycházející z bitmapy.

Druhá námitka by mohla směřovat k tomu, že navržené řešení má tendenci plýtvat s pamětí. Alokovat za všech okolností bitmapu o velikosti 1.000.000 bitů může vypadat jako rozmařilost. Je ale potřeba brát v potaz, že uložení celých čísel má také svou nezanedbatelnou režii. Jak vypadají nároky na paměť u obou algoritmů ukazují obr. 1 (dole).



Obr. 1 Srovnání náročnosti obou přístupů z pohledu rychlosti (nahore) a nároků na paměť (dole).

Jednoduchou úvahou se dá dobrat k tomu, že pokud počet řazených hodnot k je větší než $\frac{1}{32}H$, kde H je počet všech možných hodnot, je z pohledu spotřebované paměti výhodnější bitmapa.

Z toho se dá usuzovat, že běžné řešení (např. QuickSort) nemusí být za všech okolností to nejefektivnější.

Zbylé hádanky jsou převzaty z knihy [1].

Literatura

- [1] *Levitin, A., Levitin, M.: Algorithmic puzzles. Oxford University Press, New York, 2011.*

Úlohy pro výuku JavaScriptu z předmětu Programování 1

FILIP FRANK, MIROSLAV ZÍKA

Fakulta pedagogická ZČU v Plzni

Cíle předmětu Programování 1 pro vzdělávání

Předmět *Programování 1 pro vzdělávání* si klade za cíl seznámit studenty KVD FPE ZČU v Plzni se základy programování. Studenti jsou uvedeni do problematiky programování v programovacím jazyku JavaScript a seznámí se po teoretické i praktické stránce s elementárními základy programování se zvláštním zřetelem ke vzdělávání [1].

Tradičním problémem bývá velmi rozdílná úroveň jednotlivých studentů. Tento fakt přičítáme šířce oborů středních škol, jejichž studenti se mohou rozhodnout studovat pedagogickou fakultu (např. všeobecná gymnázia, obory potravinářské, zemědělské, elektrotechnické aj.). V průběhu seminářů je pak na vyučujícím, jakým způsobem tento problém vyřeší. Jako vhodný postup se jeví dát studentům možnost volby. Právě vzhledem k potenciálnímu užítí z předmětu získaných poznatků ve vzdělávání jsou úkoly navrženy v rámci zásad a očekávaným výstupům v RVP ZV. Studenti jsou vedeni k rozdělování programů na dílčí řešitelné části, řešení problému více způsoby [2]. Tento výstup, resp. zkušenosti s řešením, je naplňován také v předchozím předmětu *Algoritmizace pro vzdělávání*, na který je navázáno právě předmětem programování 1.

Jednou z variant řešící různorodou úroveň studentů je kooperace nadanějších, zkušenějších studentů, se slabšími. Díky tomu má vyučující šanci individuálně pomoci studentům zvládající výuku s velkými obtížemi. Studenti, kteří mají jen drobné nejasnosti, je obvykle vyřeší právě vzájemnou spoluprací. Zmíněná forma výuky navíc pomáhá fixovat poznatky studentům s vyššími zkušenostmi a současně rozvíjí jejich pedagogické kompetence.

Druhou možností, kterou dostávají nadanější studenti, je práce na seminární práci, která je součástí zápočtu. Tento způsob zajistí aktivitu nadanějších studentů. Vyučující se tak může plně věnovat ostatním studentům a zodpovídat všechny dotazy.

Pro splnění předmětu je zapotřebí splnit zápočtové testy a obhájit semestrální práci. Zápočtové testy koncipujeme tak, aby v nich studenti využili postupy osвоенé v průběhu seminářů. Při testu mohou používat internet a hledat pomocí něho způsob, jak zadané problémy v testu řešit. Tuto možnost jsme dali studentům proto, že při programování skutečného projektu budou tyto zdroje s velkou pravděpodobností stejně využívat. Jedinými pomůckami, které studenti využít nesmí, jsou komunikační platformy a příklady ze seminářů v jakékoli formě. Zákaz využití příkladů ze semináře je z důvodu, že problémy řešené v testu jsou typově podobné těm řešeným v rámci seminářů. Po získání zápočtu jsou studenti připuštěni ke zkoušce – ta se opět skládá z praktického příkladu, který vyučující následně zhodnotí. Od roku 2022 byla přidána teoretická část zkoušky, která studenti může zvýhodnit v praktické části. Čím budou studenti v teoretické části úspěšnější, tím méně bodů musí následně získat v praktické části.

Po absolvování předmětu získá student následující znalosti a dovednosti:

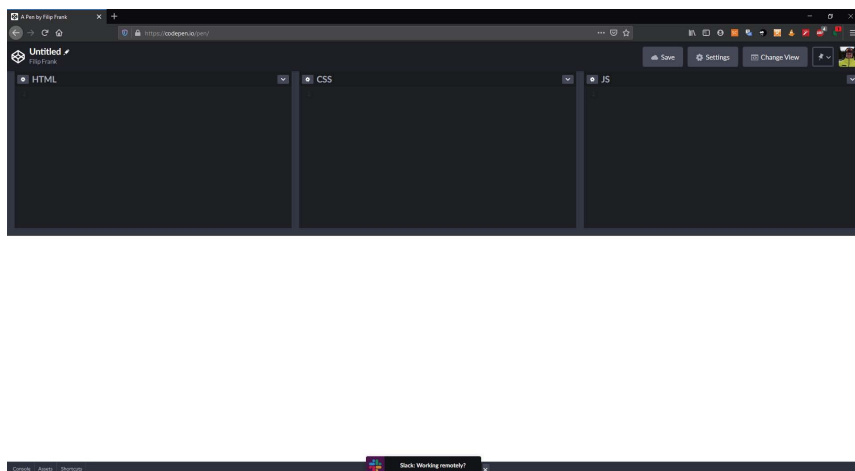
- řídí se příslušnými principy při využívání záznamu či jeho alternativy s ohledem na programovací jazyk,
- rozpozná možnosti, které nabízí použití různých typů programovacích jazyků,
- používá programovací jazyk v souladu s jeho syntaxí a sémantikou,
- řeší úlohy vztažené k vstupně/výstupním operacím (např. z klávesnice, na obrazovku, ve vztahu k souboru apod.)
- používá správné struktury programovacího jazyka spojené s logickými operátory,
- vybírá při programování správný cyklus pro řešení příslušného problému,
- odlaďuje program,
- využívá vhodné metody včetně parametrů [1].

Prostředí codepen.io

Prostředí *CodePen* umožňuje vytvářet webové stránky, přičemž okamžitě vykresluje jejich vzhled bez nutnosti znovunačtení stránky, čímž dává okamžitou zpětnou vazbu. Prostředí je rozděleno do 4 částí, jak vidíme na obr. 1.

V horní polovině obr. 1 jsou tři „boxy“ sloužící k zapsání daného kódu. Při programování pak uživatel přistupuje k jednotlivým částem izolovaně, podobně jako při linkování externího CSS nebo JavaScriptu. Výhodou zde

je, že nemusíme samotné napojení na HTML řešit, vše je již připravené. Z řad studentů se objevovaly námitky, že tímto způsobem si bez předchozích znalostí webových technologií neosvojí dříve zmíněné propojení (tj. využití tagů `link` a `script`). Zde narážíme na nevýhodu využívání JavaScriptu a další důvod volby prostředí CodePen. Naším cílem není získat znalosti z oblasti tvorby webových stránek, zejména práce s HTML a CSS. Naším cílem je JavaScript, proto si můžeme dovolit vynechat propojování a přejít rovnou k tvorbě. Ze stejného důvodu mohou i příklady ze seminářů v následující kapitole působit trochu fádně, až zastarale. Naším cílem je totiž pochopení funkce na pozadí a řešení programátorských problémů, z nichž uživatel vidí pouze výsledek. V záhlaví každého z boxů je pak šipka, která umožňuje spustit obdobu debuggeru, jenž červeně zvýrazní možné chyby v kódu.



Obr. 1 Prostředí CodePen

V dolní polovině student okamžitě vidí vykreslený výsledek svého kódu. V případě potřeby je možné autorefresh vypnout. To se může hodit při práci s cykly, kdy je nutno předejít opětovnému spuštění nedokončeného cyklu a jeho zacyklení.

Poslední z výhod prostředí CodePen je automatické ukládání. Kód práce totiž není uložen na lokálním počítači, ale webu Codepen.io, takže k němu má student kdykoli a odkudkoliv přístup. Vytvořený kód je ovšem možné exportovat do souboru `.zip` či publikovat na platformě GitHub.

Pokud bychom hledali možné nevýhody prostředí CodePen, mohly by spočívat především v problémech při zacyklení programu. V tomto případě zde totiž není žádný nástroj pro přerušení. Je potřeba počkat na prohlížečem vyvolané zastavení běhu z důvodu nadměrného využívání výkonu. Zacyklený kód navíc zpomalí celý počítač, takže je před zareagováním prohlížeče obtížné cokoli dělat. Druhou nevýhodou, se kterou jsme se však za čtyři roky setkali jen jednou, je přetížení serveru CodePen. V takovém případě je pak pro studenty problém se i přihlásit. Pokud se jim to však povede, práce už je dále plynulá.

Úlohy ze cvičení

Následující úlohy byly s drobnými obměnami používány již čtvrtým rokem ve výuce předmětu *Programování 1 pro vzdělávání*.

V následujících kapitolách si vždy představíme konkrétní úlohu, její cíl a postup řešení. Následně se budeme zabývat opakujícími se chybami, které se napříč ročníky objevují. Chyby si popíšeme a pokusíme se odhalit, na čem se zakládají.

Výsledky zde uváděné se zakládají na dlouhodobém, přímém, nestrukturovaném, zúčastněném pozorování. Švaříček tvrdí, že pro studium školní třídy je zúčastněné pozorování vhodné, protože nijak zásadně nenarušuje sociální interakce a edukační procesy ve škole. O nestrukturovaném pozorování mluvíme proto, že v průběhu let jsme sledovali, jak si studenti při práci počínají a jaké chyby dělají. Necílili jsme však na konkrétní jev. Až později se ze získaných dat daly identifikovat opakující se chyby a chování, které u studentů napříč lety pozorujeme [3].

Nahodile pak probíhaly nestrukturované rozhovory se studenty. Zde se jednalo zejména o studenty, kteří udělali opakovanou chybu, nebo naopak nechybovali tam, kde chybovali prakticky všichni. Využili jsme zde otevřené otázky, které vždy směřovali na konkrétní námi pozorovaný jev. Díky otevřeným otázkám jsme měli možnost zjistit úhel pohledu studenta na řešení úlohy, samotnou úlohu i jeho postoj k chybě a práci s ní.

Kompletní seznam úloh v předmětu Programování 1 pro vzdělávání

1. Úvod do HTML, JS a CSS

Úloha uvádí studenty do problematiky propojení HTML, JS a CSS. Studenti vytváří bloky stránky, které následně upraví kaskádovými styly. Na závěr se po stisknutí tlačítka mění obrázky na stránce pomocí JS.

2. Smilíci

Úloha je zaměřena na práci s proměnnými. Využívají se zde různé přenosy a získávání proměnných. Mimo jiné je zde možno vidět, že různé cesty vedou ke stejným výsledkům, ovšem s různou efektivitou.

3. Diktát

Úloha je zaměřena na práci se stringem, tj. textovým řetězcem. Studenti upravují uživatelem zadaný text. Z tohoto textu odstraňují zvolené části. Zároveň musí zajistit, aby se odstraněné části daly se zvýrazněním vrátit. Součástí je ošetření vstupu pomocí podmínky.

4. Hádání čísel

Úloha je zaměřena především na cyklus while. Studenti vygenerují náhodné číslo z rozsahu zadaným uživatelem a následně je pomocí modálního okna uživatelem hádána hodnota čísla. Uživatel dostává zpětnou vazbu, zda se trefil, nebo jestli jeho odhad moc velký, či malý.

5. Ovocné hrátky s polem

Úloha je zaměřena na seznámení studentů s polem. Studenti vytvoří pole a naplní jej ovocem. Uživatel musí mít možnost nechat si vypsat konkrétní položku z pole, přidávat věci do pole, mazat z něho položky nebo celé pole vypsát.

6. Auta a cykly

Úloha se zaměřuje na cyklus FOR a práci s polem, ve kterém jsou objekty. Díky objektům studenti zjistí, že funkce předdefinované v JavaScriptu nelze použít vždy. Naučí se manuálně procházet a pracovat s polem pomocí zmíněného cyklu. Zároveň budou pracovat s jednotlivými vlastnostmi objektu. Díky tomu studenti vidí výhody použití objektu oproti využití několika proměnných.

7. Úvod do canvasu a odrážecí kulička

Úloha si klade za cíl seznámit studenty s možnostmi canvasu (tj. kreslicího plátna). Začínáme na jednoduchých čarách a objektech, které studenti obarvují a pozicují. Následně přecházíme k jednoduché animaci postavené na rychlém vykreslování a mazání.

8. Náhodný graf

Úloha prohlubující předchozí úvod do canvasu ukazuje jeho možné praktické využití při reprezentaci hodnot. Pro zopakování studenti generují daný počet náhodných hodnot omezeného rozsahu, z nichž následně

určí maximum, minimum a aritmetický průměr. Každou hodnotu vykreslí do sloupcového grafu, kde označí maximum zeleně a minimum červeně. Celý graf protíná přímkou znázorňující průměrnou hodnotu.

9. Prohazování obrázků na tlačítko s možností textového vyhledávání

Jedná se o první typovou úlohu používanou u zápočtového testu. Studenti musí vytvořit obdobnou stránku, jako u příkladu *Úvod do HTML, JS a CSS*. Přidaný je třetí obrázek, v původní úloze jsou jen dva. Dále zde studenti musí vyřešit textové zadávání pro změnu na konkrétní obrázek. Textové zadávání řeší pomocí přijímaných konkrétních slov. Pod obrázky dále zobrazují historii textově zadávaných obrázků.

10. Neodbytný vrchní

Úloha vznikla jako opravný zápočtový test. První zápočtový test je postaven na úloze *Auta a cykly*, která byla změněna na účtenku. Úloha je jinak úplně stejná. Účtenka však vykazovala vysokou míru neúspěchu, proto byla přesunuta až do zkouškového testu.

Neodbytný vrchní je simulátorem pobytu v hospodě. Po usednutí se zákazníka ujme vrchní, který se neustále ptá na jeho objednávku. Toto je řešeno modálním oknem a cyklem. Vrchní skončí s dotazy až ve chvíli, kdy uživatel klikne na tlačítko Zrušit. Poté studenti řeší odchod a formu placení – buď jednotlivých položek, všeho najednou či dokonce pokus o odchod bez placení.

11. Spojnicový graf s uživatelským vstupem

Úloha je postavena na znalostech získaných u práce se sloupcovým grafem. Uživatel má možnost zadávat omezené hodnoty, které bude graf schopen vykreslit. Hodnoty se ukládají do pole vypisovaným pod generovaným spojniciovým grafem. Ze všech hodnot si studenti určí maximum, minimum a aritmetický průměr. Uživatel musí mít možnost zvolené hodnoty mazat zadáním pořadí hodnoty.

S ohledem na rozsah celého článku se budeme v tomto příspěvku zabývat pouze třemi prvními úlohami.

1. Úvod do HTML, JS a CSS

Cvičení studentům představuje jednotlivé části webu, kterými jsou v našem případě HTML, JavaScript a CSS. Studenti v úvodní úloze vnímají rozdílné úlohy jednotlivých jazyků.

Postupně jsou představeny základní tagy a jejich atributy. Studenti si nejprve připraví obsah HTML, který ale prozatím není formátován CSS ani ožívován pomocí JavaScriptu. Úvodní obrázek je nalinkován pomocí URL cesty přímo do HTML.

Dalším krokem je přidání CSS. Nejprve nastavíme veškerý zobrazovaný text na Arial a obarvíme jej na zvolenou barvu. Díky tomu se studenti mohou seznámit s rozdílem mezi CLASS a ID, kdy pochopí, že pomocí ID mohou upravit konkrétní text, i když je v rámci dané třídy. Obarvení pomocí ID použijeme u jména, které obarvíme na bílou barvu. Dále zvýrazníme tlačítka zeleným rámečkem. Rodičovský element div, který nám sdružuje všechny prvky, obarvíme zvolenou barvou a všechny jeho prvky vystředíme.



Obr. 2 Úloha Úvod do HTML, JS a CSS

Kód úlohy je k dispozici na <https://codepen.io/filip-frank/pen/wELGQv>.

Následně se přesuneme na JavaScript, který v této úloze bude velmi jednoduchý. Připravíme si funkci `pikachu()`, kterou navážeme na tlačítko se stejným nápisem. Při jeho stisku se původní obrázek změní na obrázek jmenovaného pokémona. Takřka identickou funkci si připravíme pro druhé tlačítko, kde bude jiný obrázek. Tímto způsobem můžeme přepínat mezi dvěma obrázky pomocí dvou tlačítek. Lze zde také zařadit změnu stylu. Typicky měníme barvu textu, podtržení a podobně.

Závěrem tohoto úkolu se studenti velmi okrajově seznamují s podmínkou `if`. Vzhledem k tomu, že jde o první úlohu, problematiku řešíme zejména algoritmicky a kód si v tuto chvíli spíše ukážeme. Cílem je vytvořit tlačítko **Změň**, které bude cyklicky měnit obrázky mezi sebou. Studenti sami musí přijít na logiku, že pokud bude zobrazen obrázek X, pak tlačítko změní obrázek na Y a naopak.

Pozorované chyby

V představené úloze studenti příliš nechybují, neboť se jedná zejména o práci s HTML a CSS. Úroveň první úlohy je ve všech částech (HTML, CSS i JS) velmi nízká, nejčastější chyby jsou proto spojeny spíše s překlepy. Výjimečně se objeví chyba, kdy student zaměňuje atributy CLASS a ID. V sekci s JavaScriptem se však opakuje častá chyba, kdy studenti kontrolují, zda je zobrazen obrázek X a následně při vyhodnocení dosadí obrázek X místo Y. Vidíme zde tedy, že špatně vyhodnocují podmínky a na kladné větvi se chovají, jako na záporné.

2. Smilíci (Práce s proměnnými, parametrem a následně s podmínkami)

V úkolu *Smilíci* se studenti seznamují s možnostmi JavaScriptu: jak přenášet informaci pomocí proměnné a parametru nebo jak ji získat přímo z HTML prvku. Vzhledem ke snaze, věnovat co největší čas JavaScriptu, je z řešení zcela vynecháno stylování pomocí CSS.

Na začátku studenti vytvoří HTML strukturu podle hotové předlohy. I když je HTML značkovací, ne programovací jazyk, nepovažovali jsme za vhodné dávat studentům vypracované HTML. Je důležité, aby se sami naučili propojovat různé prvky HTML, v tomto případě zejména tlačítka, s JavaScriptem sami.

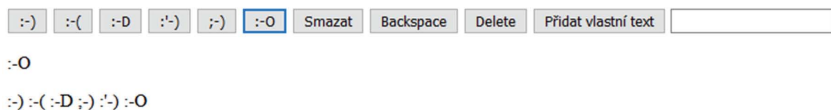
Po vytvoření struktury, bez jakéhokoli nalinkování, přichází první úkol, kdy se studenti seznámí s prací s proměnnou. Jejich úkolem je definovat si proměnnou se stringovou hodnotou požadovaného smilíka. V prvním případě se jedná o usměvavého smilíka. Po kliknutí na dané tlačítko by se měl požadovaný smilík zobrazit pod řadou tlačítek. Zároveň by se měl smilík přidat na konec řady (pod obslužnými tlačítky), čímž se nám vytváří historie stisknutých tlačítek. V tomto případě vystačíme s klasickým stringem. Studenti tak musí vyřešit, jak zobrazit nového smilíka a současně ho vhodně přidat ke dříve zobrazeným.

Studenti mají dále za úkol u tlačítek měnit způsob, jakým získávají hodnotu vypisující se pod tlačítka a do zobrazené historie. Postupně si tak vyzkouší možnost získání textu z popisku tlačítka, přenášet jej pomocí parametru funkce nebo dokonce zapisovat pouze text bez použití proměnné. Díky tomuto postupu studenti porovnávají náročnost, univerzálnost a pochopitelnost jednotlivých řešení. O nejvhodnějším způsobu je v závěru hodiny vedena diskuse. Obvykle mají studenti tendence upínat se pouze k jedné variantě, jako té nejlepší. Tradičně jí bývá přenos parametru

trem, který sice studenti považují za nejsložitější, ale zároveň v něm vidí velkou univerzálnost.

V další části úkolu pak je nutno implementovat tlačítko Smazat, které maže celou historii. Tlačítko Backspace, které maže znak po znaku historii od konce, a tlačítko Delete mazající řadu od začátku. Tato tlačítka jsou v další hodině ošetřována tak, aby v případě, že není co mazat, na tuto skutečnost upozornily.

Posledním úkolem v této úloze je možnost přidat vlastní slovo, nebo klidně jen znak. Zde musí studenti nejen znak přidat stejným způsobem, jako to dělali u smílků (tedy na konec řady i posledního stisknutého), v rozšíření musí také validovat vstup pro kontrolu, zda uživatel skutečně něco zadal. Pokud by ve vstupním poli bylo prázdno, mělo by to být opět ohlášeno.



Obr. 3 Úloha Smílků

Kód úlohy je k dispozici na <https://codepen.io/filip-frank/pen/dgGZYy>.

Pozorované chyby

V tomto úkolu často se vyskytují chyby, zejména v jeho první části se zobrazením jednoho smílků, pramení spíše ze syntaktické stránky. Problém je poměrně jednoduchý – je potřeba přenést informaci. Většinou se jedná o chyby, kdy studenti otáčejí přiřazování do proměnných. Místo smílků se do proměnné pokouší přiřazovat neexistující proměnnou do smílků (tj. dochází k prohazování levé a pravé strany přiřazování).

Více zajímavé je řešení zobrazování historie. Zde je obvyklou chybou postup, kdy studenti jednoduše zopakují přiřazení smílků do řady stejně, jako když jej jen zobrazovali. Výsledkem pak je, že místo prodlužující se řady je zobrazován jen právě stisknutý smílek. Je to proto, že je potřeba vždy vzít data z existujícího záznamu (je možné si pro ně připravit speciální proměnnou, ale není to nutné) a přidat k nim nejnovější stisknutou hodnotu. Po tomto zjištění obvykle studenti již řeší jen problém pořadí proměnných, aby byla poslední stisknutá data na konci.

V části s mazáním se studenti často zaseknou při tvorbě podmínky.

Neví, jakým způsobem kontrolovat délku historie. Obvyklé chybné pokusy jsou porovnání vůči ničemu tedy „if rada=“, porovnání vůči nule „if rada=0“ nebo vůči mezeře „if rada=“ “. Porovnání vůči prázdnému řetězci, které je v tomto případě správné, napadne jen málo studentů. Tento poznatek však bez problémů využijí ve chvíli kontroly uživatelského vstupu u finální části úlohy, v němž uživatel zadává vlastní text. Zde se již chyba neopakuje.

Velmi častou syntaktickou chybou, která se objevuje napříč celou úlohou, je přiřazení funkce k danému tlačítku. Jde o chybu, kterou si studenti jednoduše velmi často neuvedomí. V části s JavaScriptem je vše vytvořeno správně, ale chybí navázání na tlačítko pomocí atributu `onClick` (s možností přiřazování pomocí konstrukce `addEventListener` jsou studenti seznámeni později).

3. Diktát

Smyslem úlohy nazvané *Diktát* je seznámit studenty s prací se stringem, jeho vlastnostmi a možnostmi. Hlavním úkolem je vytvořit zadávací pole (textarea) pro uživatele, kam vloží či napíše svůj text a následně ho přebere do jiného html prvku. V něm bude možné z textu odstraňovat požadovaná písmena tak, aby vznikla klasická češtinářská doplňovačka. Mělo být možné také zobrazit řešení diktátu, kdy se hledané prvky zobrazí červeně a velkým písmem.

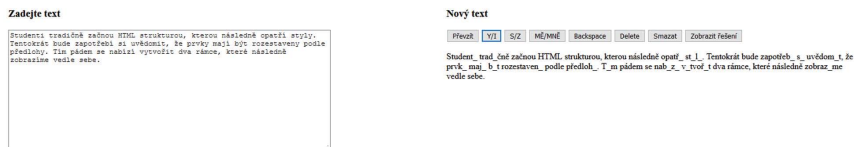
Studenti tradičně začnou HTML strukturou, kterou následně opatří styly. Tentokrát bude zapotřebí si uvědomit, že prvky mají být rozestaveny podle předlohy. Tím pádem se nabízí vytvořit dva rámce zobrazené vedle sebe.

Základní funkcí, kterou je potřeba vyřešit, je přenos textu z levé sekce do pravé, kde budou možné úpravy pomocí tlačítek. Studenti musí nejen dokázat přenést text, ale zároveň mají za úkol podle jeho délky vypsát, zda se jedná o krátký, dlouhý, nebo středně dlouhý diktát. Zde mají studenti možnost se kreativně vyjádřit v hláškách zobrazovaných v modálních oknech. Pokud by nebylo ve vstupním poli uživatelem nic zadáno a pokusil se stisknout tlačítko pro převzetí textu, musí vyskočit varovná hláška a zároveň se nesmí spustit ani procedury, které by přebíraly „nezadaný“ text.

Po vytvoření funkce pro převzetí musí studenti zpracovat odstranění požadovaných znaků či slabik. Zvolili jsme možnosti y/i, s/z, mě/mně, které bývají tradičními doplňovačkami na základních školách. Úkolem je najít požadovaný znak a nahradit jej v textu podržítkem.

Na závěr by měli studenti vytvořit tlačítko zobrazující po stisknutí správné řešení. Tato funkcionalita je poměrně jednoduchá. Vezme se původní text a v něm se najdou znaky, které byly odstraněny. Ty se pak zobrazí červeně a velkým písmem.

Zbývá tlačítka z obr. 4, tedy **Backspace**, **Delete** a **Smazat**, jsou opakováním z předchozích úloh a jejich funkcionalita je stejná. Studenti ve většině případů nemají problém zopakovat již vytvořené řešení.



Obr. 4 Úloha Diktát

Kód úlohy je k dispozici na <https://codepen.io/filip-frank/pen/qBNKjwm>.

Pozorované chyby

Při tvorbě HTML struktury studenti často chybují v rozdělení rámců. Obvykle ztrácí přehled o svém kódu a nevidí, kde rámec začíná a končí. Výsledkem je, že mají následně poměrně závažné problémy s rozestavením jednotlivých částí pomocí CSS. Jako dobré řešení se ukázalo apelovat na odsazování vnořených prvků, kdy jsou začátky a konce rámců dobře vidět.

Při převzetí textu se pak objevuje víc chyb, které ale nemají fatální dopad na celou funkčnost. Studenti správně zkontrolují, zda je něco v poli zadáno, pak ale kontrolují délku textu a zde dochází buď k překrývání intervalů, kdy diktát je jak středně dlouhý, tak krátký apod. Dochází také k vynechání jedné hodnoty, která je přesně na přelomu délky textu. Studenti například kontrolují, zda je text kratší než 150 znaků, pak je diktát krátký. Při kontrole, zda je text střední se pak ptají, zda je text delší než 150 znaků a zároveň kratší než 300. Tím pádem vynechávají délku 150. Situace se pak může opakovat, kdy místo použití ELSE pro dlouhý diktát specifikují delší než 300, čímž opět délka 300 vypadne. Studenti po demonstrování těchto chyb snadno doplňuje větší/menší nebo rovno, případně na poslední možnost využijí ELSE.

Dalším problematickým prvkem se stává samotné odstraňování požadovaných znaků. Studenti si správně vyhledají, že JavaScript má na vyhle-

dávání a nahrazení znaku funkci a bez problému ji využijí. Problém je, že funkce nalezne pouze první hledaný prvek, ale neprochází celý text. Tento problém studenti často sami ani nevyřeší, protože spoléhají na dodávané funkce. Řešení je projít si ucelené informace k funkci. Připravená funkce totiž obsahuje parametry, které umožňují procházet celý text. Druhé řešení je využití cyklu. V době řešení této úlohy však ještě cykly nebyly probrány, a tak většina studentů sáhne k řešení pomocí parametru připravené funkce.

Chybou, kterou dělá drtivá většina studentů, je také opomenutí faktu, že JavaScript je case sensitive, tedy rozlišuje velká a malá písmena. Častým problémem je, že studenti nahradí pouze malá písmena a velká zůstanou nenahrazena.

Posledním problémem je ve všech případech zobrazení řešení. Tuto problematiku vyřeší obvykle jednotky studentů v ročníku. Studenti se snaží získat původní text z upravovaného textu s podtržítky. Po několika marných pokusech se rozhodnou, že by bylo možné znovu převzít text z pole, do kterého nám zadává text uživatel. Toto řešení funguje do chvíle, než chtějí prezentovat své řešení vyučujícímu. Studenti totiž opomíjejí fakt, že s textem v poli může uživatel manipulovat. Ve chvíli, kdy vyučující text smaže a zkusí zobrazit řešení, se smaže i druhý text. Správným řešením zde je uložit text do duplicitní proměnné už při prvotním přebírání textu. V tom případě nám zůstane text původní, který můžeme zobrazit a pouze v něm zvětšit a začervenit požadované části.

Závěr

V článku jsou představeny tři úlohy z předmětu *Programování 1 pro vzdělávání*. Úlohy za sebou mají 4. rok nasazení ve výuce, a proto bylo možné představit opakované chyby, kterých se studenti při řešení dopouštějí. Úlohy reflektují velký rozptyl zkušeností studentů s programováním, přičemž při řešení úloh mohou studenti používat internet a různé zdroje, které by stejně v praxi používali. V rámci předmětu je vytvořeno celkem 8 úloh pro semináře a další 3 úlohy ke zkoušce. Další úlohy budou s ohledem na rozsah článku představeny v budoucnu.

Literatura

- [1] Programování 1 pro vzdělávání. Západočeská univerzita, Plzeň.
- [2] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Dostupné z: <https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2021/07/RVP-ZV-2021.pdf>
- [3] Švaříček, Roman, Šedová, Klára a kol.: Kvalitativní výzkum v pedagogických vědách. Portál, Praha, 2014.

40. mezinárodní konference Historie matematiky

Od 19. do 23. srpna 2022 se v Poděbradech na zámku konal v prostorách Ústavu jazykové a odborné přípravy UK již 40. ročník konference (viz <https://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/konference/index.html>). Při zahájení připomněl Jindřich Bečvář její bohatou historii; jeho prezentace je vystavena na uvedené adrese.

Konference několikrát změnila jméno a jakožto letní škola *Světónázorová výchova v matematice* se poprvé konala v roce 1980 v Branžeži díky Jaroslavu Šedivému (1934–1988). O její další život se organizačně mj. postarali Jaroslav Foltá (1933–2011), Eduard Fuchs, Dag Hrubý a Aleš Trojáněk. V poslední době o ni pečují Martina a Jindřich Bečvářovi spolu s širším okruhem kolegů a zázemí jí poskytuje v Poděbradech ve špičkově pohostinném prostředí v rámci ÚJOP UK Martin Melcer.

Bez ohledu na různá jména, která konference měla, její náplní byla a je normální (neideologizovaná) historie matematiky a jejími účastníky jsou pedagogové z různých typů středních i vysokých škol, studenti, doktorandi a další zájemci o matematiku a její vývoj. Takováto setkání lze v dnešní době provádět i „na dálku“ prostřednictvím internetu, ale možnost osobních kontaktů a výměny informací a názorů v přátelské atmosféře je nedocenitelná. A tak je konference často podnětem

k dalšímu směřování práce, pomáhá zpestřovat výuku matematiky a zvyšovat její oblibu. Přispívá tak i k hlubšímu propojení výuky předmětů, které se stále sbližují spíše formálně ve faktografické rovině nežli v oblasti hlubšího porozumění příčin a důsledků vývoje.

Na půdě konference vznikly i některé hlubší vědecké projekty, které vedly k publikaci monografií, například *The Development of Mathematics Between the World Wars*, ed. Martina Bečvářová, World Scientific Publishing Europe 2021. Konference je také neoddelitelně spjata s edicí *Dějiny Matematiky*, ve které již vyšlo 65 svazků (viz <https://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/Edice/Edice.htm>), z nichž většina je dostupná online v Digitální matematické knihovně DML-CZ (<https://dml.cz/>).

Jubilejní akci připravil výbor ve složení Jindřich Bečvář, Martina Bečvářová a Magdalena Hykšová z FD ČVUT, Zdeněk Halas z MFF UK, Martin Melcer z ÚJOP UK a Miroslava Otavová s Irenou Sýkorovou z VŠE. Konala se za podpory grantu *Nedoceněná role plzeňských premonstrátů v matematice a přírodovědě* (21-08835S GA ČR) v obvyklé přátelské atmosféře.

Konference, které se přes možný potenciální zásah covidové epidemie zúčastnilo více než 40 účastníků z České republiky, Slovenska, Polska a Itálie, byla tentokrát věnována tematicky období vývoje matematiky a jejího vyučování v našich zemích ve druhé polovině 18. století a první polovině 19. sto-

letí s obvyklými časovými a tematickými přesahy. Účastníci obdrželi bohaté konferenční materiály, obsahující některé svazky edice, propagační materiály MFF UK aj. Zvané přednášky proslovili Vojtech Bálint (*Matematika a jej vyučovanie v Maďarsku v rokoch 1750–1850*), Jindřich Bečvář (*Josef František Smetana, přírodovědec, historik a básník*), Martina Bečvářová (*Premonstrátské školy v Plzni a jejich vztah k výuce matematiky a přírodovědných předmětů*), Stanisław Domoradzki (*Matematyka w Polsce i jej nauczanie w okresie funkcjonowania Komisji Edukacji Narodowej (1773–1794)*), Zdeněk Halas (*Zárodky teorie grup v pracích J. L. Lagrange a L. Eulera*), Magdalena Hykšová (*Pravděpodobnost v učebnicích používaných v českých zemích v 1. polovině 19. století*), Martin Melcer (*Z říše hvězd české astronomie*), Miroslava Otavová (*Od Vydry k Janderovi – výuka matematiky na pražské univerzitě*), Antonín Slavík (*O Lagrangeově přístupu k matematické analýze*), Irena Sýkorová (*Pražský rodák Bernard Bolzano*) a Jiří Veselý (*Funkcionální rovnice – jiný úhel pohledu*).

Konferenční příspěvky také přednesli Eliška Beránková (*Působení Sofie Kovalevské ve Stockholmu v letech 1883–1891*), Davide Crippa (*Teaching elementary mathematics at the university of Prague: A study of Latin compendia from the second half of the 18th century*), Tomáš Lengyelfalussy a Štefan Tkačik (*Predstavenie projektu KEGA Osobnosti slovenskej matematiky a edície Osobnosti slovenskej matematiky*), Nikola Pajerová (*Diferenciální geometrie, její diskrétní verze a aplikace*) a Jaroslav Zhouf (*Jubilejní*

rok 2022 z pohledu historie Matematické olympiády).

Odborný program konference byl doplněn prohlídkou zámku a společenským večerem v jeho zahradě, kde byla též připomenuta životní jubilea Miroslavy Otavové a Jindřicha Bečváře. Součástí večera byla i obvyklá zábavná tombola.

Podrobné informace o minulých, ale i připravovaných konferencích a seminářích z historie matematiky, jsou přístupné na v prvním odstavci uvedených webových stránkách Martiny Bečvářové (FD ČVUT v Praze).

Jiří Veselý

Čtyři medaile pro české studenty na 52. mezinárodní fyzikální olympiádě



Čeští středoškoláci se na Mezinárodní fyzikální olympiádě v roce 2022 opět neztratili a získali na ní dvě stříbrné a dvě bronzové medaile. V neoficiálním pořadí států jim patří 30. místo, čemuž odpovídá 8. místo mezi zeměmi Evropské unie.

V roce 2022 proběhl už 52. ročník Mezinárodní fyzikální olympiády (MFO). Poté, co byla MFO v roce 2020 zcela zrušena kvůli pandemii onemocnění Covid19 a v roce 2021 proběhla pomocí prostředků komunikace na dálku, všichni se těšili na pre-

zenční soutěž. Nicméně organizací letošní MFO bylo pověřeno Bělorusko a rozhodnutím Mezinárodní rady MFO na svém mimořádném online zasedání dne 3. 4. 2022 byla organizace MFO Bělorusku odebrána. Pro případného náhradního organizátora by to znamenalo, že na zorganizování soutěže, které obvykle zabere několik let, bude mít pouze tři měsíce. Přesto se organizátor našel. Švýcarští kolegové pouhých několik dní po dubnovém jednání Mezinárodní rady MFO oznámili, že jsou připraveni MFO zorganizovat, ale díky velké krátkému času pouze opět pomocí prostředků komunikace na dálku. Zároveň vyzvali účastníci se stát, aby případně vytvořily větší skupinky a sjely se soutěžit na jedno místo. Česká republika byla následně oslovena kolegy z Německa, zda by měla zájem soutěžit v Německu společně s Německem, Dánskem, Estonskem a Slovinskem. Tuto nabídku ČR s vděčností přijala.

Soutěž pořádala ve dnech 9. až 17. července 2022 Švýcarská fyzikální olympiáda, odbornou část soutěže zastítíl Akademický výbor Evropské fyzikální olympiády (<https://ipho2022.com>). Česká republika soutěžila v areálu fyzikální laboratoře DESY (Deutsches Elektronen-Synchrotron) v Hamburku v Německu ve složení: *Jiří Kohl*, absolvent Biskupského gymnázia Brno, *Aleš Opl*, absolvent Gymnázia a Hudební školy hl. m. Prahy, *Hynek Jakeš*, absolvent Slovanského gymnázia Olomouc, *Ondřej Škrna*, absolvent Gymnázia Budějovická, Praha a *Josef Vácha*, absolvent Gymnázia J. Keplera, Praha. Je třeba vyzdvihnout, že veškeré pobytové náklady finančně porylo Spolkové ministerstvo školství a výzkumu společně s DESY.

Kromě dvou soutěžích půldnů připravili němečtí organizátoři pro studenty i zajímavý doprovodný program obsahující exkurzi do laboratoře DESY, přednášku *prof. Azela Lindere*na a také celodenní výlet zahrnující vyjížďku lodí do přístavu a návštěvu světa miniatur v Hamburku.

Dvě experimentální úlohy, kterými se začínalo soutěžit, byly, podobně jako tomu bylo v letech 2020 a 2021 na Evropské fyzikální olympiádě, nahrazeny úlohami simulačními. Tedy soutěžící měli k dispozici program spuštěný na počítači, do kterého zadávali vstupní parametry měření a počítač vracel výsledky. První úloha se týkala zjišťování informací o neznámé planetě, na které se soutěžící z neznámých důvodů ráno probrali. Na planetě vybudovali věž, ze které mohli pouštět z různých výšek míčky s různými poloměry a různými hustotami. Měli za úkol zjistit tíhové zrychlení na planetě, poloměr planety a hmotnost planety. Dále studovali vlastnosti atmosféry, určovali rychlost vanoucího větru, hustotu vzduchu na povrchu planety, tloušťku atmosféry, tlak na povrchu a molární hmotnost vzduchu. Na závěr ještě určovali délku dne na planetě. Tématem druhé úlohy byla válcovitá vakuová dioda. V zadání mohli měnit geometrické parametry diody (což by v reálném experimentu bylo nerealizovatelné). Na základě měření měli zjistit, jak maximální proud diodou závisí na geometrických parametrech a na napětí.

Všechny tři teoretické úlohy předložené organizátory byly extrémně náročné, vyžadovaly pokročilé znalosti fyziky a vytváření fyzikálních modelů. První úloha byla zaměřena na permanentní magnet. Soutěžící studovali

pole řetízku vytvořeného z kulových magnetů a následně i pole rovinných uspořádání kulových magnetů. Druhá úloha nemohla být aktuálnější. Jejím tématem byl vesmírný teleskop Jamese Webba a jeho optické vlastnosti. Dále se řešila termodynamika chlazení infračervených kamer v teleskopu. Třetí úloha byla vlastně souborem čtyř nezávislých úloh, jejichž společným jmenovatelem bylo škálování. Vždy byl popsán nějaký fyzikální jev a otázka zněla, jak se změní některá veličina při zadané změně veličiny jiné.

Soutěže se nakonec aktivně zúčastnilo celkem 368 studentů ze 75 států a teritorií z pěti světových kontinentů (Evropy, Asie, Austrálie, Afriky a obou částí Ameriky). Mimo 75 států soutěžilo 10 jednotlivců pod neutrální vlajkou, jednalo se o soutěžící z Ruska a Běloruska. Některé delegace měly počet soutěžících menší než pět. Mezi 75 zúčastněnými státy bylo 24 států Evropské unie, tradičně soutěžící nevyslala Malta a Irsko a překvapivě ani Finsko.

Po konečném stavu hodnocení zlatou medaili získalo 39 soutěžících, stříbrnou 71 soutěžících a bronzovou medaili 97 soutěžících. Čestné uznání bylo uděleno 95 soutěžícím. K nejlepším řešitelům patří již tradičně jednotlivci družstev těchto států: Čína, Korea, Rumunsko, USA, Vietnam, Tchaj-wan, Indie, Kazachstán, Německo a Singapur. Nejlepší ze zemí Evropské unie se stalo opět tradičně Rumunsko na 3. místě v neoficiálním pořadí států, Česká republika se v tomto pořadí států zařadila na 30. příčku (8. místo v EU). Umístění blízké se první třetině startovního pole lze považovat za úspěch.

Na prvních pěti místech v absolutním pořadí se seřadilo 5 studentů z Číny, přičemž bodový rozdíl mezi nejhorším Číňanem a nejlepším studentem ze zbytku světa (reprezentujícím USA) byl více než 5 bodů, což je vzhledem k maximálně možnému dosažitelnému skóre 50 bodů skutečně mimořádné.

Letošní výsledky jednotlivých českých řešitelů jsou tyto: Josef Vácha, stříbrná medaile, 71. místo v absolutním pořadí; Aleš Opl, stříbrná medaile, 97. místo; Jiří Kohl, bronzová medaile, 131. místo; Hynek Jakeš, bronzová medaile, 177. místo; Ondřej Škrna, 306. místo.



Reprezentace České republiky na 52. ročníku MFO v Hamburku v roce 2022. Zleva: Filip Studnička (zástupce vedoucího delegace), Josef Vácha (stříbrná medaile), Hynek Jakeš (bronzová medaile), Ondřej Škrna, Jiří Kohl (bronzová medaile), Aleš Opl (stříbrná medaile), Jan Kříž (vedoucí delegace)

Výsledky 52. MFO ukázaly, že členové českého družstva v obrovské konkurenci uspěli, byli na soutěž tedy pečlivě vybráni. Soutěžící se na soutěž dobře připravili. Bohužel stále více vyčází najevo, že se naši středoškoláci

nemohou srovnávat se svými vrstevníky z především asijských zemí. Ačkoliv všech pět českých soutěžících bez diskuse prokázalo znalosti a experimentální dovednosti na mnohem vyšší úrovni, než by odpovídalo současným středoškolským požadavkům, světová špička je dnes ještě dál.

Příští MFO proběhne v červenci 2023 v Japonsku (<https://ipho2023.jp/en/>). Česká delegace již obdržela pozvání k účasti.

Jan Kříž, Filip Studnička

Veletrh nápadů učitelů fyziky

Řadu konkrétních příkladů, jak moderně a aktivně vyučovat fyziku, přinesl 27. ročník každoroční konference Veletrh nápadů a učitelů fyziky, která letos proběhla ve dnech 26.–28. srpna 2022 na PřF UP v Olomouci ve spolupráci s Fyzikální pedagogickou společností Jednoty českých matematiků a fyziků. Konference se zúčastnilo 130 pedagogů z České republiky, Slovenska a Polska. Další ročník Veletrhu nápadů a učitelů fyziky se bude konat koncem srpna 2023 na Jihočeské univerzitě v Českých Budějovicích. Více se o této konferenci dočtete na webových stránkách <https://vnuf.upol.cz>.



Oficiální zahájení Veletrhu v pátek 26. 8. 2022



RNDr. Mgr. Zdeňka Koupilová, Ph.D.,
MFF UK Praha



Mgr. Václav Pazdera, Gymnázium, Olomouc, Čajkovského 9



RNDr. Pavel Konečný, CSc., PřF MU, Brno



Účastníci si mohli některé pokusy sami vyzkoušet



Mgr. Zdeněk Polák, Jiráskovo gymnázium, Náchod



Mgr. Jana Šestáková, Žiju fyzikou, Kokořín



RNDr. Dana Mandíková, CSc., MFF UK, Praha



Doc. PaedDr. Jiří Tesař, Ph.D., z JČU v Českých Budějovicích zve na další ročník v roce 2023 do jihočeské metropole

Foto: Christo Kirkelovski

Editor MFI

MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách

Ročník XXXI (2022)

MATEMATIKA

F. Kuřina: Matematika pro všechny nebo matematika pro každého? (s. 1) – *L. Juklová, J. Švrček:* Pět pěkných příkladů pro pravidelný pětiúhelník (s. 15) – *P. Calábek:* Mnohočleny v matematických soutěžích (s. 21) – *J. Polák:* Řešení soustav polynomických rovnic (s. 81) – *J. Kalinowski:* O jedné nerovnosti z polské MO (s. 101) – *J. Zhouf:* Tři speciální body ležící na jedné přímce III (s. 106) – *M. Chodorová, J. Švrček:* K základním větám o pravoúhlém trojúhelníku (s. 161) – *D. Hrubý:* Z historie výuky infinitesimálního počtu 2 (s. 168) – *D. Nocar, V. Vaněk:* Matematický klokan pro žáky základních škol I (s. 178) – *P. Leischner:* Zkrížené žebříky (s. 241) – *D. Hrubý:* Grafy relací (s. 253) – *J. Zhouf:* Tři speciální body ležící na jedné přímce IV (s. 261) – *J. Slezáková:* Trojúhelníkové puzzle (s. 270) – Zajímavé matematické úlohy (s. 31, 115, 188, 275)

FYZIKA

Z. Gibová: Overenie pohybovej rovnice otáčavého pohybu pomocou videomera (s. 34) – *J. Hošková Prokšová:* Rudolf Clausius (k dvoustému výročí narození) (s. 45) – *A. Kuřová, L. Richterek:* Motivační videoexperimenty ve výuce fyziky mikrosvěta (s. 51) – *O. Lepil:* K vývoji osciloskopických demonstrací dějů v elektrických obvodech (s. 118) – *M. Smutný, V. Mašín, D. Kordek, J. Záhora, A. Bezrouk:* Interaktivní e-learning – Mikroskopie (s. 126) – *O. Lepil:* Parametrické kmitání oscilátoru (s. 191) – *J. Šmahel:* Výuka fyziky s využitím žákovských mentorů (s. 201) – *V. Štefl:* Johann Gregor Mendel a pozorování slunečních skvrn (s. 207) – *L. Šlégrová, J. Šlégr:* Několik poznámek k učivu o Sluneční soustavě (s. 279) – *J. Kříž, F. Studnička, L. Šlégrová, J. Šlégr:* Fyzikální úlohy Evropské experimentální olympiády EOES (s. 289)

INFORMATIKA

P. Töpfer: Bipartitní graf (Úlohy z MO kategorie P, 43. část) (s. 58) – *E. Bartl:* Počítačová grafika, 2. díl (s. 66) – *J. Laštovička:* Programování bez proměnných (s. 74) – *J. Laštovička:* Stroje I (s. 142) – *A. Jančařík, T. Kepka:* Skupinové testování (s. 147) – *P. Töpfer:* Veletrh dortů (Úlohy z MO kategorie P, 44. část)

(s. 215) – *E. Bartl*: Počítačová grafika, 3. díl (s. 220) – *P. Osička, P. Krajča*: Informatické hádanky (s. 297) – *F. Frank, M. Zíka*: Úlohy pro výuku JavaScriptu z předmětu Programování 1 (s. 303)

ZPRÁVY

J. Švrček: Jubileum: František Kuřina — 90 let života – 60 let spolupráce (s. 154) – *P. Calábek*: Ústřední kolo 71. ročníku MO kategorie A (s. 156) – *P. Töpfer*: Ústřední kolo 71. ročníku MO kategorie P (s. 158) – *P. Calábek*: 10. ročník CPSJ (s. 231) – *J. Tkadlec*: 63. ročník Mezinárodní matematické olympiády (s. 233) – *P. Töpfer*: Informatické olympiády CEOI 2022 a IOI 2022 (s. 236) – *J. Veselý*: 40. mezinárodní konference Historie matematiky (s. 315) – *J. Kříž, F. Studnička*: Čtyři medaile pro české studenty na 52. mezinárodní fyzikální olympiádě (s. 316) – *Editor MFI*: Veletrh nápadů učitelů fyziky (s. 319)

LITERATURA

J. Cihlář: Recenze knihy F. Kuřiny *Půvab elementární geometrie* (s. 155)