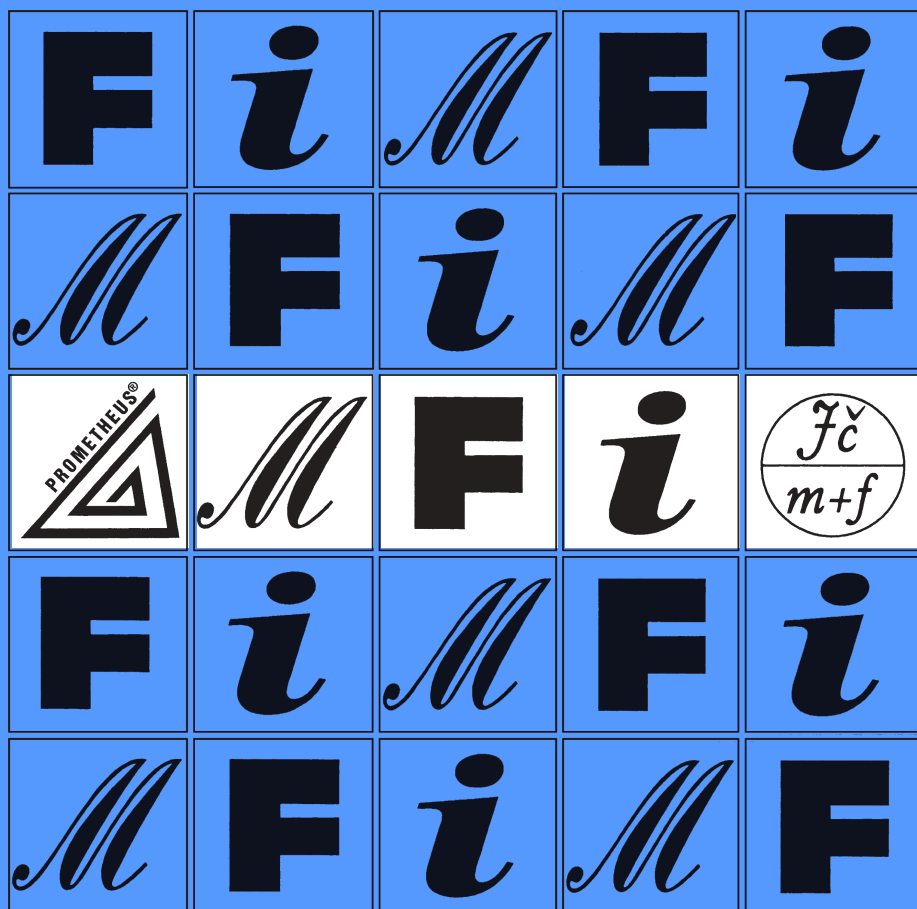


MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA

1

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXXII (2023), číslo 1

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku
Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek
Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška,
Karel Kolář, Michaela Křížová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil (předseda redakční rady),
Dana Mandíková, Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Jaromír Šimša,
Pavel Tlustý, Pavel Töpfer, Jaroslav Zhouf

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>M. Chodorová, J. Švrček:</i> Trojúhelníky vepsané do daného trojúhelníku	1
<i>L. Spíchal:</i> O konstrukci n -tých odmocnin kladných reálných čísel	9
<i>J. M. Nájares Romero:</i> Snadný důkaz obrácené věty k větě Pythagorově	20
<i>Š. Gergelitsová, T. Holan:</i> Konstrukce bez pouček	21
<i>L. Juklová, J. Švrček:</i> O jisté netriviální množině bodů v rovině	29
Zajímavé matematické úlohy	34

FYZIKA

<i>J. Kos, M. Křížová:</i> Napětí naprázdno fotovoltaického článku v závislosti na intenzitě osvětlení	38
<i>J. Erhart:</i> Měření magnetického dipólového momentu (magnetizace) permanentních magnetů	48
<i>J. Hubeňák, J. Hubeňák, jr.:</i> Měříme rychlost zvuku v kovech, v plynech i v kapalinách	56

INFORMATIKA

<i>M. Kolařík:</i> O zbohatnutí na základě rychlejšího přístupu k informacím	66
<i>P. Töpfer:</i> Krájení pizzy (Úlohy z MO kategorie P, 45. část)	72

ZPRÁVY

<i>K. Kolář:</i> WFPhC a její konference 2022)	79
--	----

Trojúhelníky vepsané do daného trojúhelníku

MARIE CHODOROVÁ – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Cílem našeho příspěvku je zkoumání některých extrémálních vlastností trojúhelníků vepsaných do daného trojúhelníku, které se týkají především jejich obsahů a obvodů.

Definice

Nechť K , L , M jsou vnitřní body po řadě stran BC , CA , AB daného trojúhelníku ABC . Trojúhelník KLM budeme nazývat *trojúhelníkem vepsaným* danému trojúhelníku ABC .

Je zřejmé, že pro daný trojúhelník ABC existuje nekonečně mnoho trojúhelníků jemu vepsaných – ve smyslu předchozí definice.

Strany vepsaného trojúhelníku KLM dělí daný trojúhelník ABC na čtyři menší trojúhelníky AML , BKM , CLK a KLM , viz např. obr. 1. Pokud K , L , M jsou speciálně po řadě středy stran BC , CA , AB daného trojúhelníku ABC , jsou strany trojúhelníku KLM středními příčkami daného trojúhelníku ABC a vepsaný trojúhelník KLM je *příčkovým trojúhelníkem* trojúhelníku ABC . Všechny čtyři menší trojúhelníky AML , BKM , CLK , KLM jsou v tomto případě (s jistým pořadím svých vrcholů) shodné, a přitom obsah (obvod) každého z nich je roven jedné čtvrtině obsahu (jedné polovině obvodu) daného trojúhelníku ABC .

Odtud bezprostředně plyne, že pro libovolný trojúhelník KLM , který je vepsán danému trojúhelníku ABC , je obsah aspoň jednoho z trojúhelníků AML , BKM , CLK , KLM menší nebo roven jedné čtvrtině obsahu trojúhelníku ABC a také, že obsah aspoň jednoho z těchto čtyř trojúhelníků je větší nebo roven jedné čtvrtině obsahu trojúhelníku ABC .

Speciálně pak platí následující tvrzení:

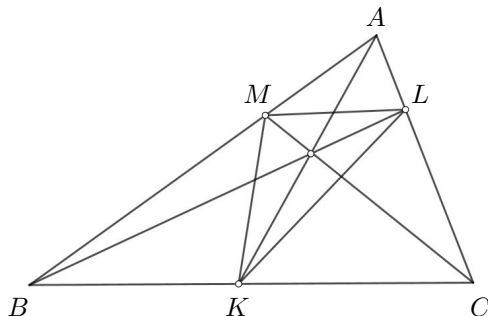
Věta

Nechť K , L , M jsou po řadě takové vnitřní body stran BC , CA , AB daného trojúhelníku ABC , že přímky AK , BL a CM se protínají v jednom společném bodě. Pak trojúhelník KLM (vepsaný trojúhelníku ABC) má obsah S_{KLM} , který není větší než jedna čtvrtina obsahu S trojúhelníku ABC , tj. platí

$$S_{KLM} \leq \frac{1}{4}S.$$

Rovnost přitom nastane, právě když body K , L , M jsou středy odpovídajících stran, tj. právě když jsou úsečky AK , BL a CM těžnicemi daného trojúhelníku.

Důkaz. Ukážeme, že pro každý trojúhelník KLM vyhovující předpokladům věty (obr. 1) je součet obsahů trojúhelníků AML , BKM , CLK větší nebo roven třem čtvrtinám obsahu trojúhelníku ABC , což je ekvivalentní s daným tvrzením.



Obr. 1

Označme

$$x = \frac{|AM|}{|AB|}, \quad y = \frac{|BK|}{|BC|}, \quad z = \frac{|CL|}{|AC|},$$

a tedy

$$1 - x = \frac{|MB|}{|AB|}, \quad 1 - y = \frac{|KC|}{|BC|}, \quad 1 - z = \frac{|LA|}{|AC|}.$$

Velikosti vnitřních úhlů trojúhelníku ABC označme obvyklým způsobem α , β , γ . Pro obsah S_{AML} trojúhelníku AML pak (s ohledem na

zavedené označení) platí

$$\begin{aligned} S_{AML} &= \frac{1}{2} \cdot |AM| \cdot |AL| \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot x \cdot |AC| \cdot (1 - z) \cdot \sin \alpha = x(1 - z)S. \end{aligned}$$

Analogicky pro obsahy trojúhelníků BKM , CLK platí

$$\begin{aligned} S_{BKM} &= \frac{1}{2} \cdot |BK| \cdot |BM| \cdot \sin \beta = y(1 - x)S, \\ S_{CLK} &= \frac{1}{2} \cdot |CL| \cdot |CK| \cdot \sin \gamma = z(1 - y)S. \end{aligned}$$

Odtud plyne

$$x(1 - z) + y(1 - x) + z(1 - y) = \frac{S_{AML} + S_{BKM} + S_{CLK}}{S}.$$

Stačí tedy dokázat nerovnost

$$V = x(1 - z) + y(1 - x) + z(1 - y) \geq \frac{3}{4}.$$

Užitím Cèvovy věty, viz např. [4], pro úsečky (cèviány) AK , BL a CM v trojúhelníku ABC obdržíme po snadné úpravě

$$1 = \frac{|AM|}{|BM|} \cdot \frac{|BK|}{|CK|} \cdot \frac{|CL|}{|AL|} = \frac{x}{1 - x} \cdot \frac{y}{1 - y} \cdot \frac{z}{1 - z},$$

a tudíž

$$xyz = (1 - x)(1 - y)(1 - z). \quad (1)$$

Odtud dále plyne

$$(xyz)^2 = x(1 - x)y(1 - y)z(1 - z). \quad (2)$$

Roznásobením součinu na pravé straně (1) a následné úpravě této rovnosti obdržíme

$$1 - V = 2xyz.$$

Pro všechna reálná čísla x , y , z jsou splněny nerovnosti

$$x(1 - x) \leq \frac{1}{4}, \quad y(1 - y) \leq \frac{1}{4}, \quad z(1 - z) \leq \frac{1}{4}, \quad (3)$$

příčemž rovnosti v nich současně nastanou, právě když platí

$$x = y = z = \frac{1}{2}, \quad (4)$$

tj. právě když K , L , M jsou po řadě středy stran BC , CA , AB . Využitím všech tří nerovností (3) na pravé straně rovnosti (2) obdržíme

$$(xyz)^2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64},$$

odkud bezprostředně plyne $2xyz \leq 1/4$. Platí tedy

$$V = 1 - 2xyz \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad (5)$$

což jsme chtěli dokázat.

Rovnost v (5) nastane, právě když platí rovnosti (4), tj. právě když uvažované čevíány jsou těžnicemi v trojúhelníku ABC .

Poznámka. S ohledem na právě dokázanou větu vidíme, že stejné tvrzení lze vyslovit, pokud body K , L , M jsou speciálně např. průsečíky os vnitřních úhlů v daném trojúhelníku ABC s protějšími stranami nebo jsou-li tyto body totožné s dotykovými body kružnice vepsané danému trojúhelníku ležícími na příslušných stranách tohoto trojúhelníku. V obou těchto případech se totiž úsečky AK , BL , CM protínají podle Čèvovy věty, viz např. [4], v jednom společném bodě (uvnitř trojúhelníku ABC), a jsou tak splněny předpoklady výše uvedené věty.

S podobnou tematikou (trojúhelníky vepsané do daného trojúhelníku) se mohli setkat soutěžící již v 8. ročníku Mezinárodní matematické olympiády (IMO), která se konala v roce 1966 v Bulharsku. Tehdy byla reprezentantům zúčastněných zemí předložena také následující úloha.

Příklad 1

Nechť K , L , M jsou po řadě libovolné vnitřní body stran BC , CA , AB trojúhelníku ABC . Dokažte, že obsah aspoň jednoho z trojúhelníků AML , BKM , CLK je menší nebo roven jedné čtvrtině obsahu trojúhelníku ABC .

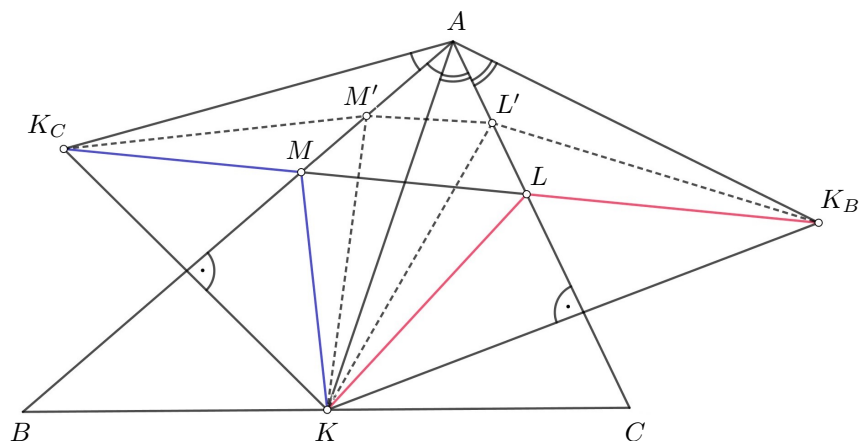
Řešení této úlohy je možno dohledat např. v publikaci [1], popř. v brožurce XV. ročník MO (1965/1966).

V další části uvádíme dva zajímavé výsledky, které se týkají obvodu trojúhelníku KLM vepsaného do daného trojúhelníku ABC , resp. obvodů tří menších trojúhelníků AML , BKM , CLK .

Příklad 2

Je dán *ostroúhlý* trojúhelník ABC . Určete (sestrojte) trojúhelník KLM , který je vepsán do trojúhelníku ABC a má přitom co nejmenší možný obvod.

Řešení. Necht' K je pevně zvolený vnitřní bod strany BC daného trojúhelníku ABC a L , M jsou po řadě vnitřními body jeho stran CA , AB .



Obr. 2

Označme K_B , K_C body, které jsou souměrně sdružené s bodem K po řadě vzhledem k přímkám AC , AB . Pro libovolné vnitřní body L' , M' stran po řadě AC , AB (obr. 2) pak s ohledem na použité osové souměrnosti platí

$$|KL'| = |K_B L'|, \quad |KM'| = |K_C M'|, \quad |AK| = |AK_B| = |AK_C|. \quad (6)$$

Pro obvod o trojúhelníku $KL'M'$ vepsaného do daného ostroúhlého trojúhelníku ABC přitom platí

$$o = |KL'| + |L'M'| + |M'K| = |K_B L'| + |L'M'| + |M'K_C|.$$

Obvod trojúhelníku $KL'M'$ je tedy roven délce lomené čáry $K_B L'M' K_C$. Tato lomená čára má pro pevně zvolený vnitřní bod K strany BC nejmenší

délku, a tedy vepsaný trojúhelník KLM má nejmenší obvod, právě když jeho vrcholy L a M jsou vnitřními body úsečky K_BK_C , tj. jsou průsečíky této úsečky po řadě se stranami BC , CA daného trojúhelníku.

Zbývá tak zjistit, pro kterou polohu vnitřního bodu K strany BC daného ostroúhlého trojúhelníku ABC má úsečka K_BK_C minimální délku.

Z obr. 2 je patrné (s ohledem na použité osově souměrnosti s osami AB , AC a také předpokladu o ostroúhlém trojúhelníku ABC), že

$$|\sphericalangle K_BAK_C| = 2 |\sphericalangle CAB| < 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ.$$

Odtud vidíme, že pro daný ostroúhlý trojúhelník ABC a libovolný vnitřní bod K jeho strany BC je K_BAK_C rovnoramenný trojúhelník s hlavním úhlem při vrcholu A velikosti $|\sphericalangle CAB|$. Mezi všemi těmito podobnými trojúhelníky má nejkratší základnu K_BK_C ten, který má nejmenší možnou délku obou ramen. Vzhledem k poslední rovnosti v (6) jsou obě ramena nejkratší, právě když je úsečka AK výškou z vrcholu A v daném trojúhelníku ABC (bod K je tak patou výšky z vrcholu A). Podobně L a M jsou po řadě patami výšek z vrcholů B a C v daném ostroúhlém trojúhelníku ABC .

ZÁVĚR. Trojúhelník KLM vepsaný do daného ostroúhlého trojúhelníku ABC , který má nejmenší možný obvod, je jeho *ortický* trojúhelník, tj. trojúhelník, jehož vrcholy K , L , M jsou patami jeho výšek po řadě z vrcholů A , B , C . (Jeho konstrukce je zřejmá.)

Příklad 3

Je dán trojúhelník ABC o obvodu 6 a jemu vepsaný trojúhelník KLM , kde K , L , M jsou po řadě vnitřní body stran BC , CA , AB . Dokažte, že aspoň jeden z trojúhelníků AML , BKM , CLK má obvod nejvýše 4.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že všechny tři uvažované trojúhelníky AML , BKM , CLK mají obvod větší než 4. Pro délky stran trojúhelníku AML (obr. 1) tak na základě použití trojúhelníkové nerovnosti platí

$$4 < |AM| + |ML| + |LA| < 2(|AM| + |LA|),$$

a tedy

$$2 < |AM| + |LA|.$$

Analogicky platí i nerovnosti

$$2 < |BK| + |MB| \quad \text{a} \quad 2 < |CL| + |KC|.$$

Sečtením posledních tří nerovností dostaneme po snadné úpravě

$$\begin{aligned} 6 &= 3 \cdot 2 < (|AM| + |MB|) + (|BK| + |KC|) + (|CL| + |LA|) = \\ &= |AB| + |BC| + |CA| = 6, \end{aligned}$$

což je spor.

Aspoň jeden z trojúhelníků AML , BKM , CLK má tedy obvod nejvýše 4, což jsme chtěli dokázat.

Závěrem uvádíme pět navazujících úloh, které jsou doplněny stručným návodem k jejich řešení. Lze je využít v rámci procvičení této tematiky.

Příklad 4

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Necht' K , L , M jsou průsečíky průměrů kružnice opsané tomuto trojúhelníku, které procházejí jeho vrcholy A , B , C , po řadě se stranami BC , CA , AB . Dokažte, že obsah trojúhelníku KLM není větší než jedna čtvrtina obsahu trojúhelníku ABC .

[Návod: Tři uvažované průměry se protínají ve středu kružnice opsané danému ostroúhlému trojúhelníku, který je vnitřním bodem tohoto trojúhelníku.]

Příklad 5

Je dáno kladné reálné číslo a . Necht' x , y , z jsou libovolná nezáporná reálná čísla, která jsou nejvýše rovná a . Dokažte, že platí nerovnost

$$x(a - z) + y(a - x) + z(a - y) \leq a^2.$$

Kdy nastane rovnost?

[Návod: Uvažujte rovnostranný trojúhelník ABC o straně délky a a libovolný jemu vepsaný trojúhelník KLM , kde K , L , M jsou po řadě body jeho stran BC , CA , AB , které (zde) mohou být totožné s vrcholy trojúhelníku ABC . Položte

$$0 \leq x = |AM| \leq a, \quad 0 \leq y = |BK| \leq a, \quad 0 \leq z = |CL| \leq a.$$

Je zřejmé, že součet obsahů tří menších trojúhelníků při vrcholech trojúhelníku ABC je pak nejvýše roven obsahu trojúhelníku ABC .

Rovnost zde nastane (s ohledem na použitou metodu), právě když z hodnot x , y , z je aspoň jedna rovna 0 a současně aspoň jedna z těchto hodnot je rovna a .]

Poznámka. Důkaz dané nerovnosti lze vést také ryze algebraickou cestou (se stejným výsledkem pro rovnost).

Příklad 6

Danému ostroúhlému trojúhelníku ABC je vepsán trojúhelník KLM tak, že jeho vrcholy dělí hranici trojúhelníku ABC na tři části, které mají stejnou délku. Dokažte, že obvod trojúhelníku KLM není menší než jedna polovina obvodu trojúhelníku ABC .

[Návod: viz např. [2] – tzv. *Zirakzadehova nerovnost*, která platí pro libovolný trojúhelník ABC a jemu vepsaný trojúhelník KLM splňující předpoklady uvedené v příkladu 6.]

Příklad 7

Nechť KLM je ortický trojúhelník libovolného ostroúhlého trojúhelníku ABC . Dokažte, že obsah trojúhelníku KLM není větší než jedna čtvrtina obsahu trojúhelníku ABC .

Příklad 8

Nechť K , L , M jsou po dotykové body kružnic vně připsaných po řadě stranám BC , CA , AB trojúhelníku ABC . Dokažte, že obsah trojúhelníku KLM není větší než jedna čtvrtina obsahu trojúhelníku ABC .

[Návod: dokažte, že v obou úlohách se úsečky AK , BL a CM protínají v jednom společném bodě (v prvním případě se jedná o ortocentrum trojúhelníku ABC , ve druhém případě se jedná o tzv. Nagelův bod trojúhelníku ABC), viz např. [4].]

Literatura

- [1] Horák, K., Müller, V., Vrba, A.: Úlohy mezinárodních matematických olympiád (1.–25. MMO). SPN, Praha, 1986.
- [2] Leng, G., Liu, Y.: Geometric inequalities. World Scientific Publishing Co., Singapore, 2016.
- [3] Niven, I.: Maxima and Minima Without Calculus. The Mathematical Association of America, Washington DC, 1981.
- [4] Švrček, J., Vanžura, J.: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha, 1988.

O konstrukci n -tých odmocnin kladných reálných čísel

LUDEK SPÍCHAL

Česká lesnická akademie, Trutnov

Ačkoliv v názvu článku není parabola zmíněna, bude to právě tato kuželosečka (popř. její zobecněná podoba), která nás jako pověstná červená nit bude provázet napříč celým textem. Připomeňme nejprve, že *regulární* (vlastní) *kuželosečky* jsou rovinné křivky vznikající průnikem kuželové plochy a roviny, která neprochází jejím vrcholem.

V článku se omezíme pouze na hyperbolu a parabolu, se nimiž se žáci středních škol seznamují jak v souvislosti s pojmem grafu funkce (lineární lomené, resp. kvadratické), tak v oblasti analytické geometrie. Přestože jde v obou zmíněných oblastech matematiky o stejné druhy křivek, odlišný způsob zavedení (explicitně určené předpisy funkcí vs. rovnice kuželoseček v analytické geometrii) může znesnadnit vytvoření komplexního pohledu na kuželosečky, a to nezávisle na konkrétním způsobu jejich určení.

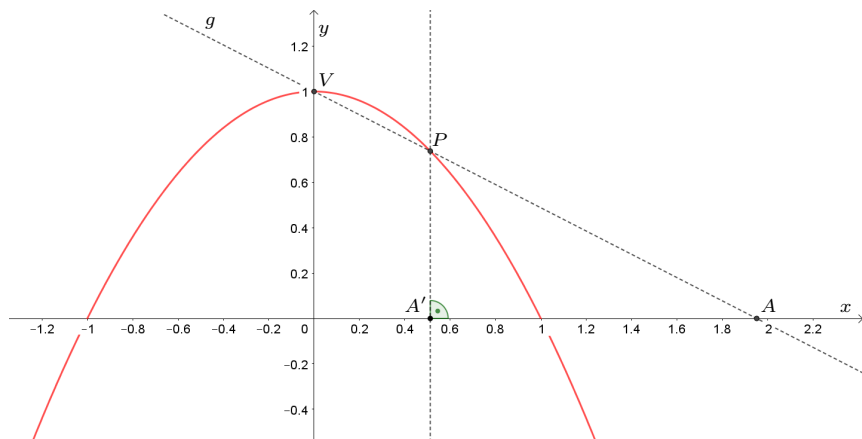
V článku si klademe za cíl ukázat na příkladu řešení konkrétního problému, kterým je konstrukce n -té odmocniny reálného čísla, kombinací obou přístupů. Výchozí kuželosečkou bude křivka určená rovnicí

$$y = 1 - x^2, \quad (1)$$

kterou budeme nazývat *jednotkovou parabolou* (obr. 1).

Příklad 1. Ukažme, že pomocí jednotkové paraboly je možné konstruovat převrácenou hodnotu reálného čísla $a \neq 0$, tj. nalézt hodnotu čísla $\frac{1}{a}$ (viz [1]).

Řešení. Při konstrukci převrácené hodnoty reálného čísla $|a| > 1$ (obr. 1) sestrojíme kolmici k ose x z průsečíku P jednotkové paraboly s přímkou g procházející vrcholem $V[0, 1]$ paraboly a bodem $A[a, 0]$. Kolmice protíná osu x v bodě bod A' , jehož x -ová souřadnice je, jak vzápětí ukážeme, převrácenou hodnotou čísla a , tj. $\frac{1}{a}$. Pro nenulové $|a| < 1$ bychom při konstrukci postupovali naopak, tj. od bodu A' k bodu A .



Obr. 1 Konstrukce převrácené hodnoty reálného čísla pomocí jednotkové paraboly

Přímka g určená body $V[0, 1]$ a $A[a, 0]$ má rovnici

$$g: y = 1 - \frac{x}{a}. \quad (2)$$

Souřadnici x průsečíku P získáme řešením rovnice

$$1 - x^2 = 1 - \frac{x}{a},$$

která má zřejmě jediný nenulový kořen

$$x = \frac{1}{a}.$$

V článku se budeme dále opírat o množinu křivek, které získáme zobecněním rovnice paraboly (1) ve tvaru

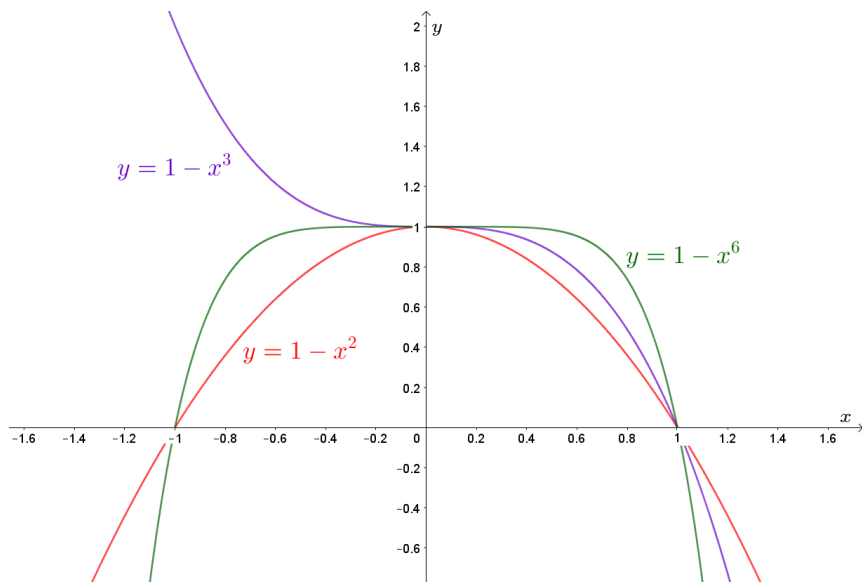
$$y = 1 - x^n, \quad (3)$$

kde $n \in \mathbb{N}$. Pro potřeby článku pro tuto třídu grafů *mocninných funkcí* zavedeme pojem *zobecněné jednotkové paraboly* (obr. 2), jednotková parabola pak bude speciálním případem rovnice (3) pro $n = 2$. Pro volbu $n = 1$ je zobecněná jednotková parabola totožná s přímkou $y = 1 - x$, která

představuje osu souměrnosti mezi zobecněnými jednotkovými parabolami určenými rovnicemi (3) a křivkami určenými rovnicemi

$$y = 1 - \sqrt[n]{x}, \quad (4)$$

které budeme nazývat *převrácené zobecněné jednotkové paraboly* (obr. 3).

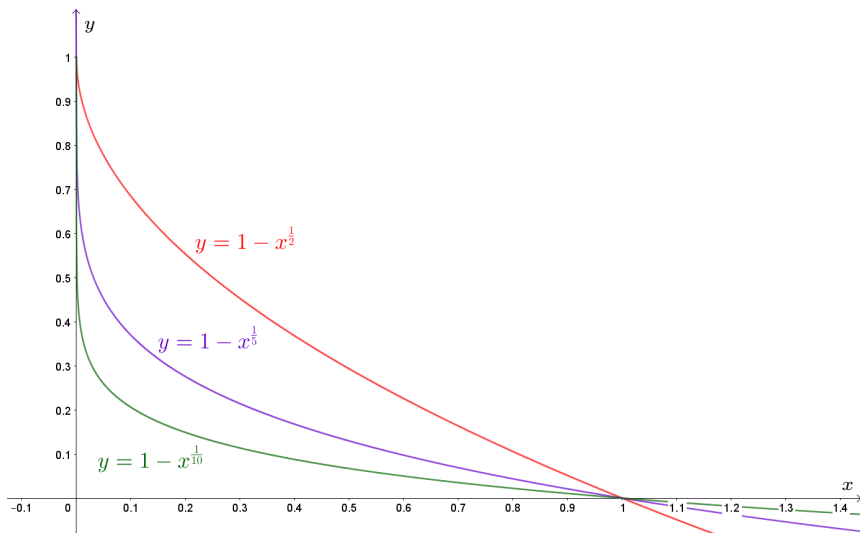


Obr. 2 Zobecněné jednotkové paraboly pro $n = 2$, $n = 3$ a $n = 6$

Cílem článku je ukázat, že výše zmíněnou konstrukci převrácené hodnoty reálného čísla a lze dále užitím křivek (3), resp. (4) rozšířit

- 1) na konstrukci n -té odmocniny z kladného reálného čísla a , tj. nalezení čísla $\sqrt[n]{a}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$,
- 2) na konstrukci $(n - 1)$ -ní odmocniny z kladného reálného čísla a^n , tj. nalezení čísla $\sqrt[n-1]{a^n}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$,

Tento cíl splníme v sekcích 2 a 3. Sekci 1 věnujeme některým jiným historicky zajímavým konstrukcím.



Obr. 3 Převrácené zobecněné jednotkové paraboly pro $n = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ a $\frac{1}{10}$

1. Vybrané konstrukce druhé a třetí odmocniny

Připomeneme nyní několik vybraných geometrických konstrukcí druhé a třetí odmocniny. Dvě známé konstrukce druhé odmocniny (Eukleidova věta o výšce, Theodorova spirála) doplníme o dvě méně známé konstrukce třetí odmocniny (Nikomedova a Descartova) [2, 3].

1.1. Eukleidova věta o výšce

Podle Eukleidovy ¹⁾ věty o výšce pro obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníku platí, že je roven obsahu obdélníku sestrojeného z obou úseků přepony. V případě, že délky úseků na přeponě jsou 1 a dané číslo a , má výška pravoúhlého trojúhelníku délku $\sqrt{a}$ (obr. 4).

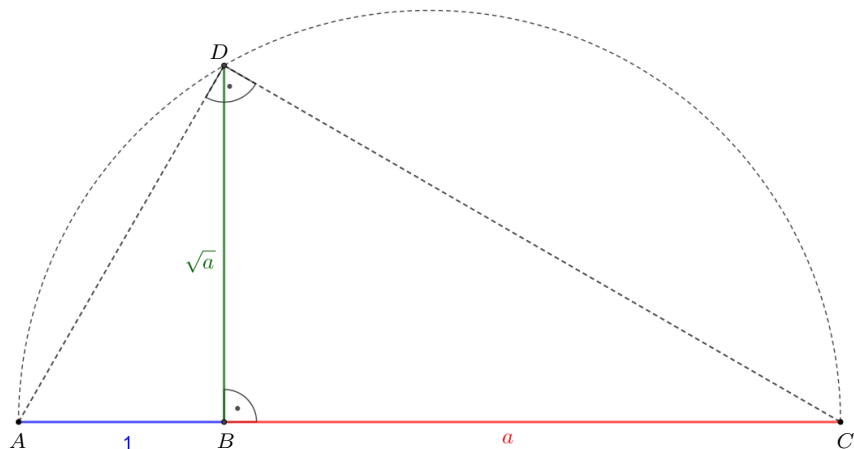
1.2. Theodorova spirála

Theodorovu ²⁾ spirálu tvoří posloupnost pravoúhlých trojúhelníků, když první z nich je současně rovnoramenný s odvěsnami o délce 1. Jednou z odvěsen každého „následujícího“ trojúhelníku je vždy přepona trojúhelníku

¹⁾Eukleidés (asi 325 př. n. l.–asi 260 př. n. l.) byl řecký matematik a geometr.

²⁾Theodóros z Kyrény (asi 340 př. n. l.–270 př. n. l.) byl řecký filosof a matematik.

„předcházejícího“, druhá odvěsna má délku 1 (obr. 5). Délky jednotlivých přepon pravoúhlých trojúhelníků tvoří posloupnost druhých odmocnin ze všech přirozených čísel $a \geq 2$.



Obr. 4 Konstrukce druhé odmocniny pomocí Eukleidovy věty o výšce

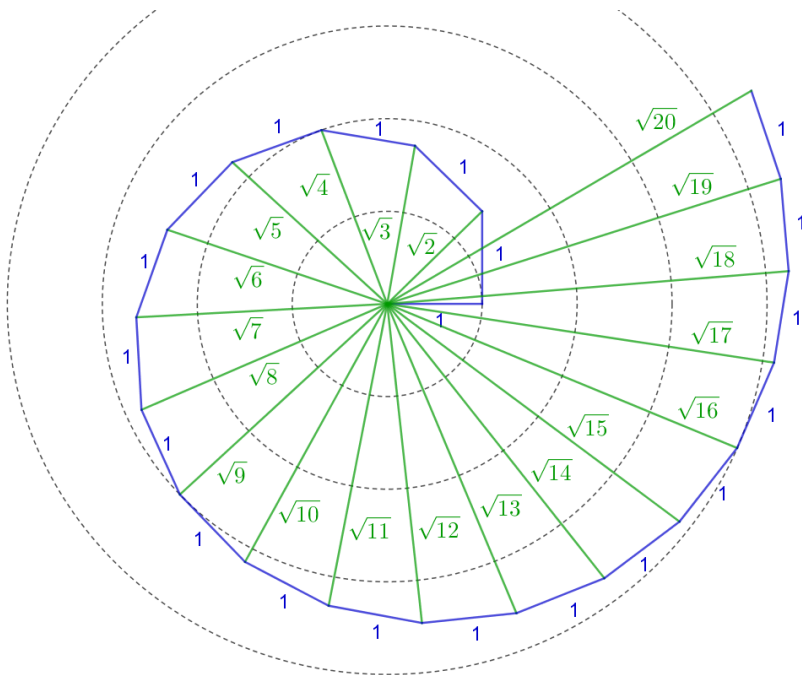
1.3. Nikomedova konstrukce třetí odmocniny

Nikomedova³⁾ konstrukce čísla $\sqrt[3]{a}$ v případě $0 < a < 4$ využívá rovno-ramenný trojúhelník ABC , který má ramena délky 1 a základnu délky $\frac{a}{4}$ (obr. 6). Nechť dále B je středem úsečky CD a E je průsečík polopřímky DA s přímkou procházející bodem C , která je rovnoběžná s úsečkou AB . Bod S leží na polopřímce BA a R je průsečík úseček DE a CS . Jestliže $|RS| = 1$, pak $|AS| = \sqrt[3]{a}$.

Zdůrazněme, že úsečku RS nelze sestrojít eukleidovsky, tj. užitím kružítka a pravítka. Při důkazu konstrukce si povšimněme, že $\triangle ABD \sim \triangle ECD$. Úsečka CE má délku $\frac{a}{2}$, neboť bod B je středem úsečky CD a úsečka AB je střední příčkou trojúhelníku ECD , tj. $|CE| = 2|AB| = \frac{a}{2}$. Dále platí, že $\triangle ECR \sim \triangle ASR$ a

$$\frac{\frac{a}{2}}{|CR|} = \frac{|AS|}{1}.$$

³⁾Nikomedes (asi 280 př. n. l.–210 př. n. l.) byl řecký matematik.



Obr. 5 Theodorova spirála

Podle Pythagorovy věty platí pro pravoúhlý trojúhelník SCM

$$(1 + |CR|)^2 = |CM|^2 + (|AM| + |AS|)^2.$$

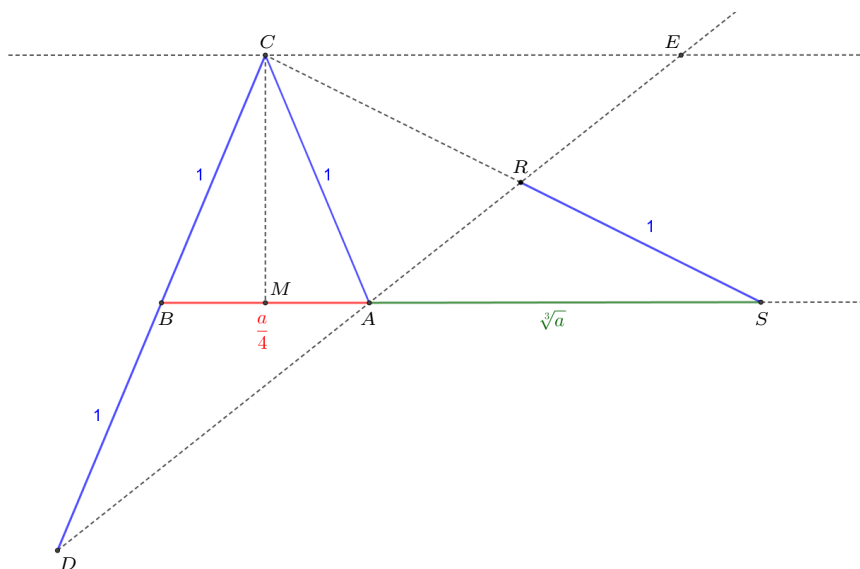
Pokud označíme $x = |AS|$ a dosadíme za $|CR| = \frac{a}{2x}$, $|CM| = \sqrt{1 - \frac{a^2}{64}}$, $|AM| = \frac{a}{8}$, pak po zjednodušení dostáváme rovnici

$$4x^4 + ax^3 - 4ax - a^2 = 0.$$

Přestože je předchozí rovnice 4. stupně, můžeme ji vyřešit z rozkladu

$$(x^3 - a)(4x + a) = 0,$$

podle kterého má rovnice právě dva reálné kořeny $x_1 = -\frac{a}{4}$, $x_2 = \sqrt[3]{a}$.



Obr. 6 Nikomedova konstrukce třetí odmocniny

1.4. Descartesova konstrukce třetí odmocniny

Descartesova ⁴⁾ konstrukce čísla $\sqrt[3]{a}$ pro dané reálné číslo $a > 0$ využívá kružnici se středem $S\left[\frac{a}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad (5)$$

soustavy Oxy (obr. 7). Ukažme, že pak $\sqrt[3]{a}$ je x -ovou souřadnicí průsečíku $P \neq O$ této kružnice a paraboly s rovnicí

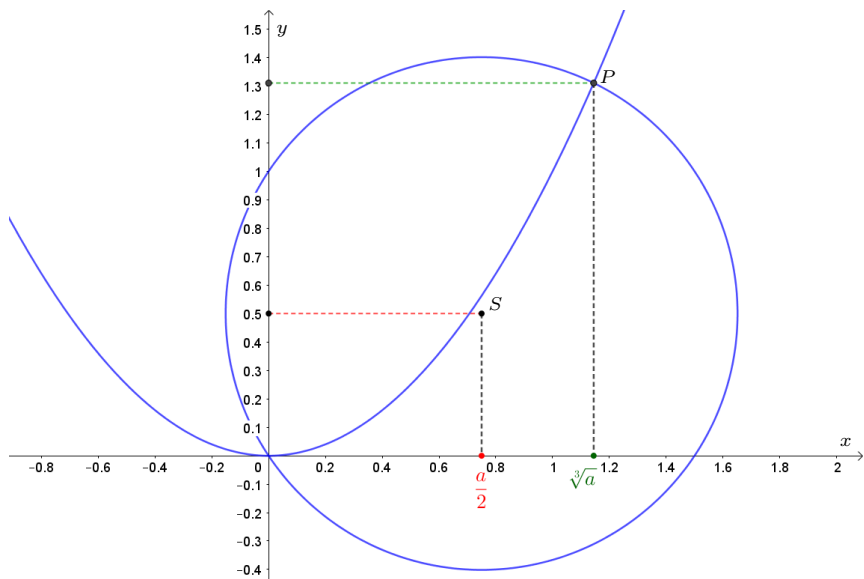
$$y = x^2. \quad (6)$$

Úpravou rovnice (5) a následným dosazením z rovnice (6) totiž dostaneme rovnici

$$x^4 - ax = 0 \quad \text{neboli} \quad x(x^3 - a) = 0, \quad (7)$$

takže reálnými kořeny rovnice (7) jsou právě čísla $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt[3]{a}$.

⁴⁾ René Descartes (1596–1650) byl francouzský filosof, matematik a fyzik.



Obr. 7 Descartesova konstrukce třetí odmocniny

2. Konstrukce n -té odmocniny kladného reálného čísla a

Jednoduchá varianta konstrukce n -té odmocniny daného kladného reálného čísla a spočívá v určení průsečíku přímky s rovnicí $y = 1 - a$ a zobecněné jednotkové paraboly s rovnicí $y = 1 - x^n$. Je zřejmé, že hledanou n -tou odmocninou je x -ová souřadnice nalezeného průsečíku.

Uvedená konstrukce předpokládá použití zobecněných jednotkových parabol na intervalu $\langle 0; \infty \rangle$. Předpokládejme nyní, že budeme uvažovat zobecněné jednotkové paraboly zobrazené na uzavřeném intervalu $\langle 0; 1 \rangle$, kde předvedeme konstrukci n -té odmocniny pro dané číslo $a > 1$ (obr. 8). Polopřímka g zapsaná rovnicí (2) protíná zobecněné jednotkové paraboly určené rovnicemi (3) v bodech, jejichž x -ové souřadnice určíme vyřešením rovnice

$$1 - x^n = -\frac{1}{a}x + 1. \quad (8)$$

Po úpravě dostáváme rovnici

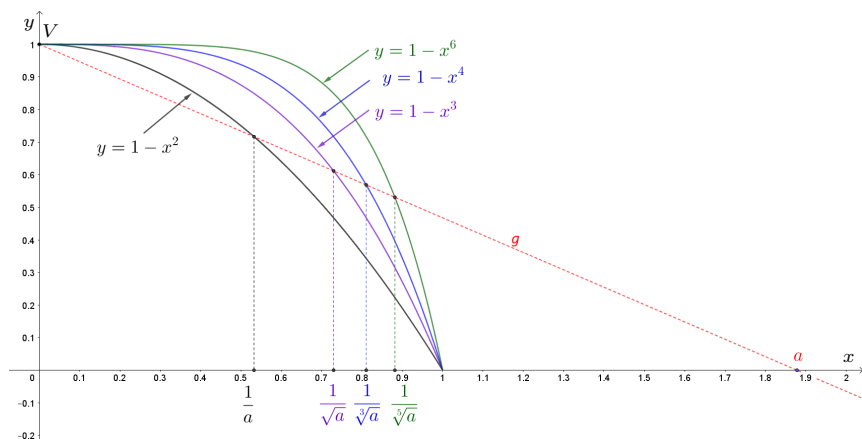
$$x \left(x^{n-1} - \frac{1}{a} \right) = 0$$

s nezápornými kořeny

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt[n-1]{a}}.$$

Průsečíky polopřímky g a zobecněných jednotkových parabol jsou tedy body

$$V[0, 1], \quad P\left[\frac{1}{\sqrt[n-1]{a}}, 1 - \frac{1}{\sqrt[n-1]{a^n}}\right].$$

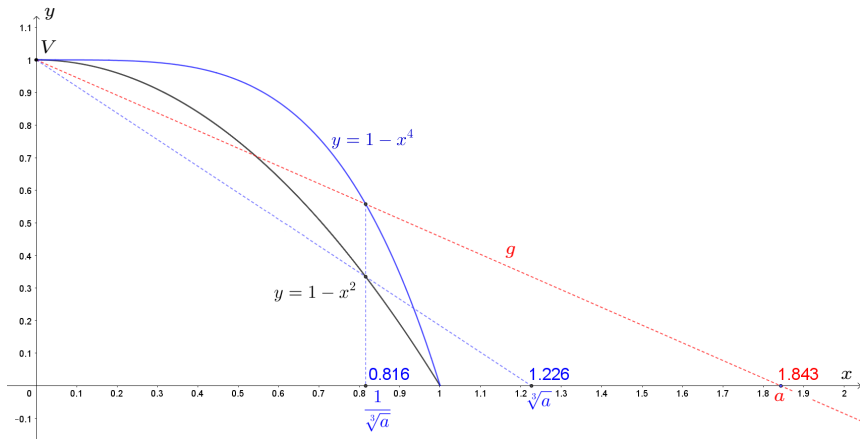


Obr. 8 Konstrukce převrácené hodnoty n -tých odmocnin reálného čísla $a > 1$ pomocí zobecněných jednotkových parabol

Výše provedený výpočet a konstrukce znázorněná na obr. 8 ukazují, že zobecněná jednotková parabola n -tého stupně umožňuje provést geometrickou konstrukci převrácené hodnoty $(n - 1)$ -ní odmocniny z kladného reálného čísla a , tj. hodnoty $\frac{1}{\sqrt[n-1]{a}}$. Zbýlá část postupu spočívající v nalezení převrácené hodnoty k číslu $\frac{1}{\sqrt[n-1]{a}}$ odpovídá řešení příkladu 1. Při konstrukci n -té odmocniny reálného čísla a bychom tedy použili zobecněnou jednotkovou parabolu stupně $n + 1$. Na obr. 9 je tak znázorněna celá konstrukce třetí odmocniny čísla $a > 1$ pomocí zobecněné jednotkové paraboly stupně 4.

Úloha 1. Určete postup konstrukce n -té odmocniny daného reálného čísla $a \in (0; 1)$ pomocí zobecněné jednotkové paraboly řádu $n + 1$.

Úloha 2. Uvažujme bod $A[a, 0]$, kde $a \in (0; 1)$. Kolmice vztyčená v bodě A protne zobecněnou jednotkovou parabolu určenou rovnicemi (3) v bodě P . Příмка $g = \overleftrightarrow{PV}$, kde $V[0, 1]$ je vrchol zobecněné jednotkové paraboly, protne osu x v bodě $B[b, 0]$. Určete vzájemný vztah mezi čísly a, b .
(Řešení: $b = \frac{1}{a^{n-1}}$)



Obr. 9 Konstrukce třetí odmocniny čísla $a > 1$ pomocí jednotkové paraboly a zobecněné jednotkové paraboly stupně 4

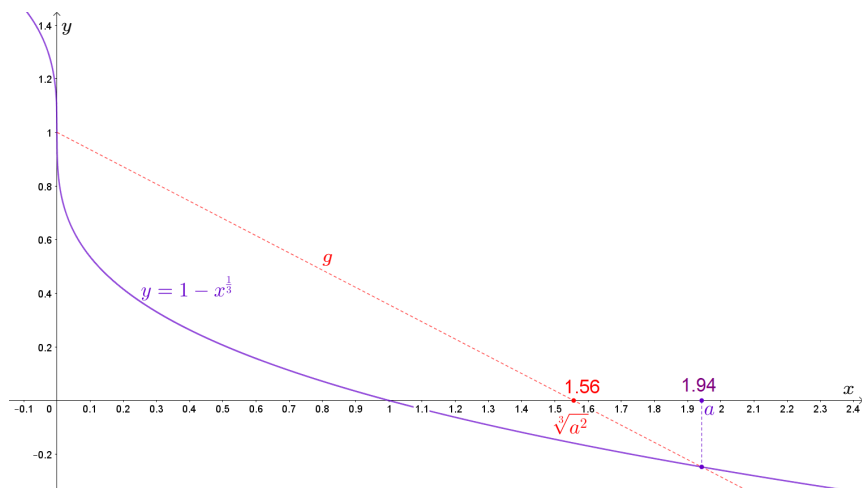
3. Konstrukce odmocnin pomocí převrácených zobecněných jednotkových parabol

Zmíníme se ještě stručně o konstrukcích, které využívají grafy převrácených zobecněných jednotkových parabol zavedených rovnicemi (4).

Příklad 2. Ukažme konstrukci n -té odmocniny kladného reálného čísla a^{n-1} , tj. $\sqrt[n]{a^{n-1}}$ pomocí převrácené jednotkové paraboly daného stupně n .

Nástin řešení. Kolmice vztyčená v bodě $A[a, 0]$ protne křivku určenou rovnicí (4) v bodě $P[a, 1 - \sqrt[n]{a}]$. Příмка $g = PV$, kde $V[0, 1]$, určená rovnicí $g: \sqrt[n]{a}x + ay - a = 0$ protne osu x v bodě $A'[\sqrt[n]{a^{n-1}}, 0]$.

Úloha 3. Necht' příмка $g = AV$, kde $A[a, 0]$ a $V[0, 1]$, protne graf převrácené zobecněné jednotkové paraboly určené rovnicí (4) v bodě P . Ukažte, že x -ová souřadnice bodu P je rovna číslu $\sqrt[n-1]{a^n}$ (viz obr. 10 pro $n = 3$).



Obr. 10 Konstrukce třetí odmocniny reálného čísla a^2 v případě $a > 1$ pomocí převrácené zobecněné jednotkové paraboly stupně 3

Závěr

Možnost využití zobecněných jednotkových parabol při grafickém určování odmocnin reálných čísel vyplývá ze skutečnosti, že odmocňování lze považovat za částečně inverzní operaci k umocňování. Slovo částečně je v tomto případě zásadní, neboť definiční obory těchto dvou funkcí nejsou obecně vždy shodné (např. odmocniny sudého stupně záporných čísel v oboru reálných čísel neexistují).

Poděkování. Autor děkuje touto cestou recenzentovi za cenné rady a podněty při úpravě a vylepšení obsahu tohoto článku.

Literatura

- [1] Spíchal, L.: Jednotková parabola, zlatý řez a parabolické π . Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 96 (2021), č. 1, s. 8–17.
- [2] Nikomedova konstrukce třetí odmocniny. Dostupné na: <https://demonstrations.wolfram.com/NicomedessGeometricConstructionOfPrincipalCubeRoot/>
- [3] Descartesova konstrukce třetí odmocniny. Dostupné na: <https://demonstrations.wolfram.com/DescartessMethodOfEvaluatingThePrincipalCubeRoot/>

Snadný důkaz obrácené věty k větě Pythagorově

JOSÉ MARCIAL NÁJARES ROMERO

ZŠ Gutova, Praha 10

Věta Pythagorova (a věta k ní obrácená) jsou obsahem učiva matematiky již na základní škole. Cílem této poznámky je uvedení alternativního důkazu obrácené věty k větě Pythagorově, který využívá matematické prostředky výhradně na úrovni ZŠ. Vznik tohoto článku byl inspirován příspěvkem [1]. Délky stran libovolného trojúhelníku ABC označme obvyklým způsobem $a = |BC|$, $b = |AC|$ a $c = |AB|$.

Obrácená věta k větě Pythagorově (viz např. [1, věta 6])

Platí-li pro délky a , b , c stran trojúhelníku ABC rovnost $a^2 + b^2 = c^2$, pak je tento trojúhelník pravoúhlý s přeponou c a odvěsnami a , b .

V článku [1] je důkaz obrácené věty k větě Pythagorově rozdělen do dvou částí. V první části je dokázáno, že splňuje-li trojice kladných reálných čísel a , b , c tzv. pythagorejskou rovnost, *existuje* trojúhelník ABC , kde $|BC| = a$, $|CA| = b$ a $|AB| = c$. Ve druhé části je pak užitím kosinové věty dokázáno, že uvažovaný trojúhelník ABC je pravoúhlý s přeponou AB .

Nebudeme zde znovu uvádět první část důkazu, ale zaměříme se pouze na alternativní, přitom snadný důkaz druhé části, tj. na důkaz skutečnosti, že tento trojúhelník je pravoúhlý.

Uvažujme nyní pravoúhlý trojúhelník DEF s pravým úhlem při vrcholu F , v němž $|EF| = a$ a $|FD| = b$. Pro délku jeho přepony $|DE| = f$ pak podle Pythagorovy věty platí $a^2 + b^2 = f^2$. Podle výše uvedeného předpokladu však pro délky a , b , c stran uvažovaného trojúhelníku ABC platí také $a^2 + b^2 = c^2$, což znamená, že $f^2 = c^2$, resp. $|DE| = f = c = |AB|$.

Oba trojúhelníky ABC a DEF jsou tedy podle věty *sss* shodné, a proto je také trojúhelník ABC pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C .

Literatura

- [1] Chodorová, M., Švrček, J.: K základním větám o pravoúhlém trojúhelníku. MFI, roč. 31 (2022), č. 3, s. 161–167.
- [2] Odvárko, O., Kadleček, J.: Matematika pro 7. ročník základní školy (3. vydání). Prometheus, Praha, 2012.

Konstrukce bez pouček

ŠÁRKA GERGELITSOVÁ – TOMÁŠ HOLAN

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Jedním z typů úloh, které v geometrii řešíme, jsou konstrukční úlohy. Ve škole to jsou zejména úlohy řešené pravítkem a kružítkem, tedy úlohy planimetrické, eukleidovské. S pomocí didaktického softwaru můžeme ale řešit i úlohy prostorové. Jednu takovou sadu úloh v článku ukážeme.

Konstrukční úlohy v prostoru

Konstrukční trojrozměrné úlohy v učebnicích stereometrie nebývají, přestože by mohly studenty zaujmout a přispět k jejich motivaci. Některé konstrukční úlohy můžeme díky znalosti zobrazovacích metod řešit při deskriptivní geometrii pomocí pravítka a kružítko. Okruh studentů schopných tyto úlohy vyřešit ale můžeme snadno rozšířit tím, že k řešení využijeme vhodný didaktický software. Konstrukce (a obrázky) v tomto textu jsou vytvořené v GeoGebra.

1. Jeden typ konstrukce mnohostěnů

Zadání: Sestrojte pravidelný mnohostěn o daném počtu stěn, je-li dána jeho hlavní tělesová úhlopříčka (tj. úhlopříčka, která spojuje dvojici protilehlých vrcholů tělesa).

Poznámka. V pravidelném čtyřstěnu tělesová úhlopříčka neexistuje. Proto v tomto případě upravíme formulaci zadání a budeme hledat pravidelný čtyřstěn $ABCD$ daný průměrem jemu opsané kulové plochy, který prochází daným vrcholem A hledaného mnohostěnu.

Tělesovou úhlopříčkou (či průměrem opsané kulové plochy procházejícím vrcholem) bude hledaný mnohostěn určen jednoznačně až na otočení kolem dané přímky. Úlohu budeme považovat za vyřešenou po sestrojení libovolné stěny požadovaného pravidelného n -úhelníku, protože další vrcholy sestrojíme na opsané kulové ploše pomocí shodnosti trojúhelníků.

Řešení zobrazíme v trojrozměrném náhledu. Za konstrukční kroky budeme považovat takové trojrozměrné konstrukce zvoleného softwaru, které

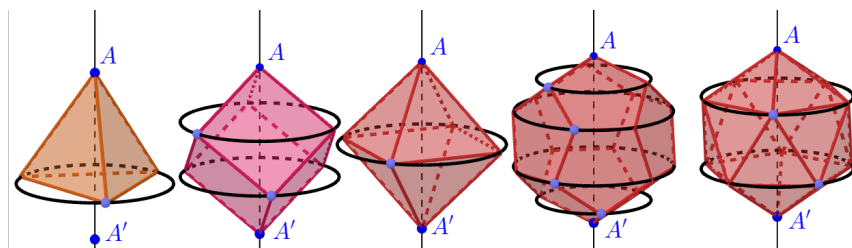
jsou obdobou rovinných rýsovacích nástrojů:

- sestrojení kolmice a rovnoběžky v rovině,
- sestrojení kolmé a rovnoběžné roviny,
- sestrojení kulové plochy s daným středem a procházející daným bodem.

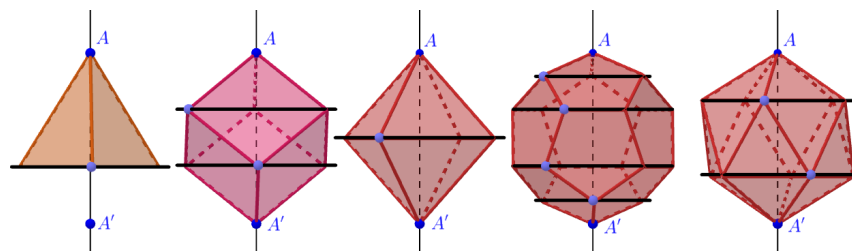
Kromě těchto nástrojů použijeme pro přehlednost celé konstrukce (jako jeden krok) i přímý nástroj, který má GeoGebra mezi základními příkazy: konstrukci pravidelného trojúhelníku, čtverce či pětiúhelníku v rovině. To proto, abychom zabránili přeplnění trojrozměrné scény eukleidovskými postupy.

Ukážeme, že s výše uvedenými nástroji již k vyřešení úlohy nepotřebujeme žádné pokročilé znalosti z trojrozměrné geometrie, postačí všimnout si těch správných vztahů.

Podívejme se na danou úlohu ve všech pěti případech.



Obr. 1 Pětice pravidelných mnohostěnů s vyznačenými kružnicemi, na nichž leží vrcholy tělesa



Obr. 2 Pohled kolmo na zadanou přímku AA'

Nelze si nevšimnout, že zbývající vrcholy mnohostěnu (kromě daných bodů A , A') leží symetricky na kružnicích v rovinách kolmých k dané přímce. Pokud dokážeme určit, v jakém poměru dělí roviny kružnic danou

úsečku AA' , bude úloha vyřešena: Sestrojíme jednu kružnici, na ní zvolíme vrchol mnohostěnu a sestrojíme patřičný n -úhelník jedné stěny.

Úlohu postupně vyřešíme pro jednotlivé mnohostěny. Začneme nejsnazší úlohou.

1.1. Pravidelný osmistěn

Zbývající 4 vrcholy pravidelného osmistěnu leží ve vrcholech čtverce na kružnici, která je průsečnicí opsané kulové plochy a roviny souměrnosti úsečky AA' . Tím jsme získali všechny vrcholy tělesa.

1.2. Pravidelný čtyřstěn

K vyřešení úlohy pomůže uvědomit si, že střed opsané kulové plochy je těžištěm pravidelného čtyřstěnu. Bude jistě užitečné zamyslet se nad zobecněním pojmu těžiště od trojúhelníku v rovině ke čtyřstěnu v prostoru. Můžeme předem vyzkoumat (nebo odhadnout) jeho polohu: leží ve čtvrtině těžnice.

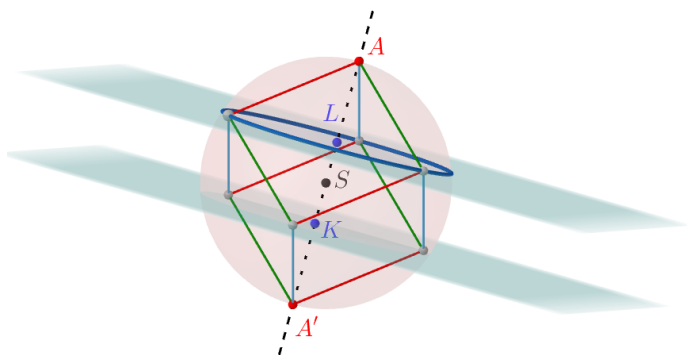
Tento poznatek stačí k vyřešení úlohy: Zbývající vrcholy pravidelného čtyřstěnu leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníku. Výška na tuto stěnu splývá v pravidelném čtyřstěnu s těžnicí, která prochází těžištěm tělesa (a tedy i opsané kulové plochy) i těžištěm stěny. Průměr AA' kulové plochy je proto bodem $S = T$ a patou výšky na stěnu BCD dělen v poměru $3 : 1 : 2$. Rovina hledané stěny dělí úsečku AA' v poměru $2 : 1$.

1.3. Krychle

Zbývajících šest vrcholů krychle tvoří vrcholy dvou rovnostranných trojúhelníků v rovinách kolmých k dané tělesové úhlopříčce. Určíme, v jakém poměru dělí tyto roviny danou úhlopříčku.

Víme, že každá hrana krychle patří do jednoho ze tří směrů. Všechny hrany krychle svírají s tělesovou úhlopříčkou stejný úhel, jejich kolmý průmět na úhlopříčku je tedy shodný, a tudíž rovina, v níž leží vrcholy hran vycházejících z daného vrcholu A , je kolmá k dané úhlopříčce AA' a dělí ji na třetiny.

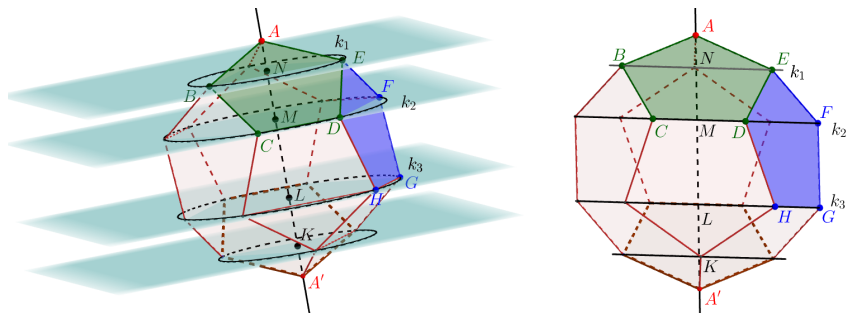
Zvolíme libovolný vrchol na kružnici, která je průsečnicí této roviny s opsanou kulovou plochou a v rovině sestrojíme rovnostranný trojúhelník. Zbýlé tři vrcholy jsou středově souměrné s právě sestrojenými vrcholy podle středu krychle (opsané kulové plochy).



Obr. 3 Roviny vedené vrcholy krychle dělí tělesovou úhlopříčku na třetiny

1.4. Pravidelný dvanáctistěn

Žádný z postupů, který jsme viděli v předešlých konstrukcích, tentokrát nemůžeme použít. Hrany pravidelného dvanáctistěnu svírají s danou úhlopříčkou zjevně různé úhly a ve čtyřech po dvou souměrných rovinách kolmých k dané úhlopříčce leží jednak trojice, jednak šestice dalších vrcholů tělesa. Návod k řešení dávají stěny tělesa – pravidelné pětiúhelníky.



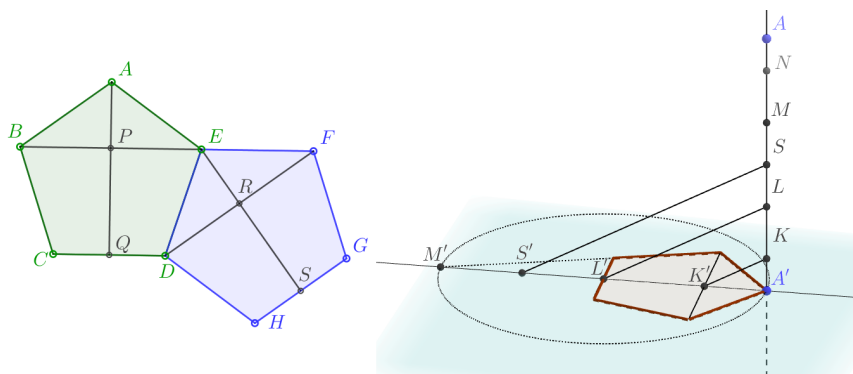
Obr. 4 Dva pohledy na sousední pětiúhelníkové stěny pravidelného dvanáctistěnu

Poměry, v nichž dělí zmíněné roviny danou tělesovou úhlopříčku, jsou určeny poměry vzdáleností v jednotlivých pětiúhelníkových stěn:

Poměr 1: Poměr vzdálenosti úhlopříčky BE od vrcholu A a vzdálenosti strany CD od vrcholu A v pětiúhelníku $ABCDE$ (tj. $|AP| : |AQ|$ na obr. 5) je shodný s poměrem průmětů těchto vzdáleností na úhlo-

příčku AA' , tedy s poměrem vzdáleností příslušných kolmých rovin od vrcholu A .

Poměr 2: Podobně poměr vzdálenosti úhlopříčky DF od vrcholu E a vzdálenosti strany HG od vrcholu E v pětiúhelníku $EFGHD$ (tj. $|ER| : |ES|$ na obr. 5) je shodný s poměrem průmětů těchto vzdáleností na úhlopříčku AA' , tedy s poměrem vzdáleností rovin kružnic k_1, k_2 (obr. 4) ku vzdálenosti rovin kružnic k_1, k_3 .



Obr. 5 Poměry délek v pětiúhelnících a konstrukce bodů na přímce AA' využitím podobnosti

Oba poměry jsou analogické poměry vzdáleností v pravidelném pětiúhelníku, jsou si tedy rovny. Při značení podle obr. 4 tedy také platí: $|AN| : |NM| = |NM| : |ML|$.

Poměr $|AP| : |PQ|$ vzdáleností v pravidelném pětiúhelníku (obr. 5) je známý poměr zlatého řezu. Pokud s ním nejsme obeznámeni (což by bylo jistě škoda), pro další postup konstrukce to nevádí, postupné poměry sestavíme pomocí pravidelného pětiúhelníku (pro jehož konstrukci má GeoGebra přímý nástroj) opakovaně, byť zbytečně krkolomně. Z vlastností zlatého řezu ale víme, že $|AP| : |PQ| = |PQ| : |AQ|$ a konstrukci rychle dokončíme. Danou úhlopříčku rozdělíme v určeném poměru pomocí podobnosti. Díky souměrnosti podle jejího středu S stačí sestavit body K, L . Na obr. 5 jsme ve vhodné rovině (zde v rovině kolmé k AA') procházející daným bodem A' sestavili pomocí konstrukcí v pravidelném pětiúhelníku body K', L', M' , pro které platí $|A'K'| : |K'L'| = |K'L'| : |A'L'| = |K'L'| : |L'M'|$. Podobností, v níž středu S' úsečky $L'M'$ odpovídá střed S tělesa, jsme pak sestavili body K, L . Dále sestavíme bodem K

rovinu kolmou k AA' , kružnici, která je její průsečnicí s opsanou kulovou plochou, a na ní zvolíme vrchol dvanáctistěnu.

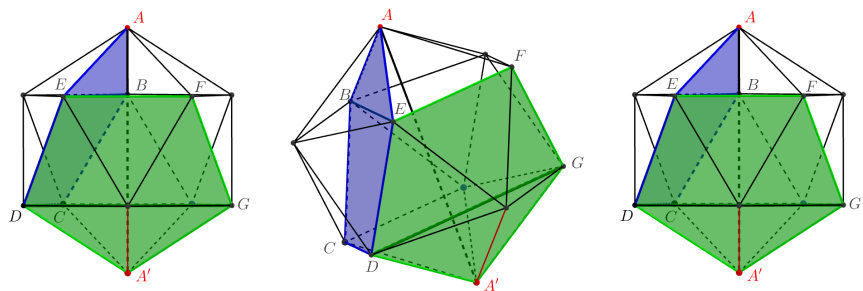
Vidíme, že z rovnosti uvedených poměrů vzdáleností v pětiúhelníkových stěn a z vlastnosti zlatého řezu plyne $|KL| : |A'L| = |KL| : |LM|$, tedy $|A'L| = |LM|$. Symetricky dle středu S také $|LM| = |MA|$. Proto body L, M – a tedy roviny, na nichž leží šestice vrcholů tělesa – dělí tělesovou úhlopříčku AA' na třetiny.

Pro další postup konstrukce vrcholu tělesa se nabízí několik nástrojů: přímá konstrukce pětiúhelníku v určené rovině či postupné sestrojování dalších vrcholů tělesa jednak otáčením již sestrojených vrcholů, jednak vynášením délek (pomocí kulových ploch nebo kružnic v rovinách stěn tělesa).

1.5. Pravidelný dvacetistěn

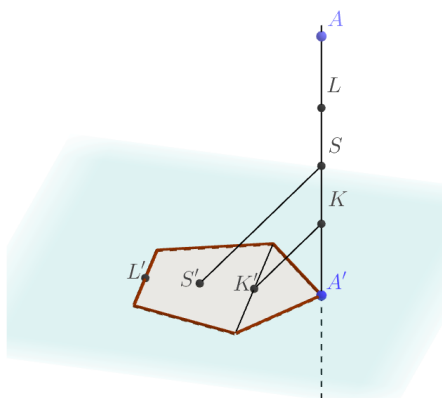
Stěny pravidelného dvacetistěnu jsou rovnostranné trojúhelníky. Zdá se tedy, že opět žádný z dříve použitých postupů nedává návod, jak těleso sestrojít. Zbývající vrcholy tělesa leží symetricky ve dvou rovinách kolmých k úhlopříčce, jejich vzdálenosti ale neznáme a trojúhelníky stěn leží mezi těmito rovinami.

Po chvíli pozorování však i zde najdeme pravidelné pětiúhelníky. Nejsou to stěny, ale řezy tělesa rovinami vedenými jeho vrcholy tak, že odřezávají jeden vrchol. Na obr. 6 vidíme dva takové navazující pětiúhelníky $ABCDE$ a $A'DEFG$. Díky nim odvodíme, že poměry, v nichž kolmé roviny vedené vrcholy dělí danou úhlopříčku (průsečíky K, L na obr. 7), opět vycházejí z poměru zlatého řezu mezi vzdálenostmi v pravidelném pětiúhelníku. Ze shodnosti pětiúhelníků $ABCDE, A'DEFG$ plyne $|A'K| : |KL| = |KL| : |A'L| = |AL| : |KL|$.



Obr. 6 Tři pohledy na sousedící pětiúhelníkové řezy v pravidelném dvacetistěnu

A diagram of a rhombicuboctahedron, a polyhedron with 14 faces (8 squares and 6 hexagons) and 26 vertices. The polyhedron is shown in a perspective view, with some faces shaded in light blue. A vertical axis passes through the center, with vertices A and A' marked at the top and bottom respectively. Points L and K are marked on the axis, with L above K . Dashed lines represent hidden edges of the polyhedron.

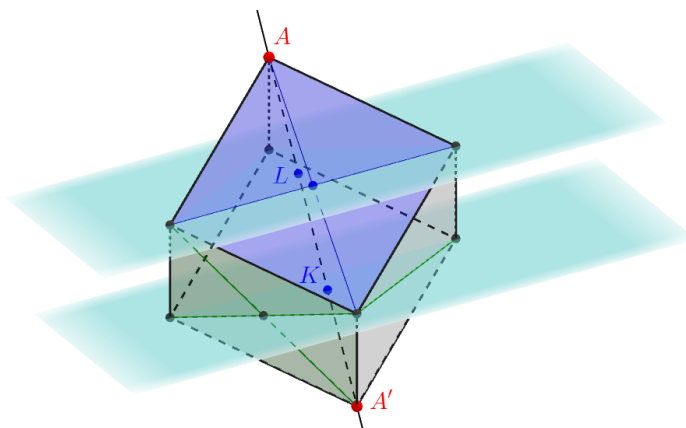


1.6. Poznámka ke krychli

2. Závěr – radost z objevování

2.1. Jedna dávná úloha

Matematika – fizyka – informatika **32** (1) 2023



Obr. 8 Roviny vedené vrcholy půlí stěny krychle

Do krychle vepíšeme dvě tělesa:

a) kolmý válec, jehož osa splývá s tělesovou úhlopříčkou krychle a jehož kruhové hrany podstav se dotýkají každá tří stěn krychle v jejich středech;

b) dvojkužel, jenž má vrcholy v krajních bodech tělesové úhlopříčky a jehož kruhová podstavná hrana se dotýká všech šesti hran krychle. Určete poměr objemu válce a dvojkužele.

[Řešení je ve 3. čísle téhož ročníku [2].]

2.2. Dvanáctistěn a krychle – další vztahy

Při konstrukci krychle i pravidelného dvanáctistěnu jsme zjistili, že roviny obsahující další vrcholy tělesa dělí danou tělesovou úhlopříčku na třetiny.

Dokážete „vepsat“ krychli do pravidelného dvanáctistěnu?

A těžší úloha: Zkuste „opsat“ dané krychli pravidelný dvanáctistěn se společnou opsanou kulovou plochou.

2.3. Další konstrukční úlohy

V systému GeoTest [4] je připraveno asi 100 prostorových konstrukčních úloh různé obtížnosti, které mohou studenti řešit samostatně, bez podpory učitele, protože systém automaticky vyhodnotí správnost provedeného řešení. Společné řešení a objevování prostorových vztahů ve škole při hodině ale asi bude pro studenty zajímavější a bude je k řešení více motivovat. Zejména, pokud jde o úlohy, k jejichž vyřešení stačí jen pozorovat a všimnout si užitečných vztahů.

Literatura

- [1] Úlohy. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, sv. 33 (1904), č. 1, s. 114–116. Dostupné z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/123658>
- [2] Úlohy. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, sv. 33 (1904), č. 3, s. 338–368. Dostupné z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/123974>
- [3] *Gergelitsová, Š., Holan, T.*: Trable a radosti s geometrií ve škole (Plenary Talk). Proceedings of the Czech-Slovak Conference on Geometry and Graphics 2020, 7.–10. 9. 2020, Pardubice. Slovak University of Technology, Bratislava, s. 17–24.
- [4] GeoTest [online] Dostupné z: <https://geotest.geometry.cz>

O jisté netriviální množině bodů v rovině

LENKA JUKLOVÁ – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

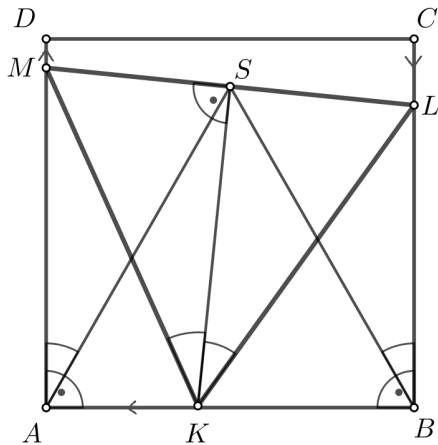
Cílem tohoto příspěvku je zkoumání jedné netriviální množiny bodů v rovině, kterou je množina těžišť všech rovnostranných trojúhelníků vepsaných do daného čtverce tak, že všechny tři vrcholy každého z těchto rovnostranných trojúhelníků leží na hranici daného čtverce.

Podnět k řešení uvedeného problému vzešel z praktické ukázky *T. Chehlarové* z Bulharské akademie věd, která prezentovala výsledky projektu „Integrace manipulativních digitálních prostředků do výuky matematiky“ na workshopu Innovative Mathematics Learning Software for Migrant Students, kterou pořádala v říjnu 2019 Univerzita Konstantína Filozofa v Nitře, viz [1].

Snadno je vidět, že pro fixovanou polohu bodu K na hranici daného čtverce $ABCD$ sestrojíme zbývající dva vrcholy K, L hledaného rovnostranného trojúhelníku KLM užitím otočení $\mathcal{R}(K, +60^\circ)$, v němž obrazem vrcholu L je bod M ($M \neq K$), který získáme jako průsečík hranice obrazu

$A'B'C'D'$ čtverce $ABCD$ v tomto otočení s hranicí čtverce $ABCD$. Bod L je pak obrazem nalezeného bodu M v otočení $\mathcal{R}'(K, -60^\circ)$.

Uvažujme nyní bod K na straně AB čtverce $ABCD$ tak, že vrcholy L , M rovnostranného trojúhelníku KLM leží po řadě na stranách BC , DA . Střed jeho strany LM označíme S (obr. 1).



Obr. 1

Vzhledem k tomu, že

$$|\sphericalangle KAM| + |\sphericalangle KSM| = |\sphericalangle BKS| + |\sphericalangle BLS| = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ,$$

jsou oba čtyřúhelníky $AKSM$ a $BKSL$ tětíkové. Platí tedy

$$|\sphericalangle SAM| = |\sphericalangle SKM| = 30^\circ = |\sphericalangle SKL| = |\sphericalangle SBL|,$$

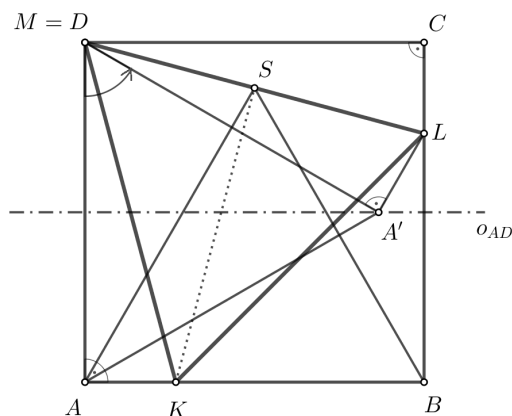
tudíž

$$|\sphericalangle ABS| = |\sphericalangle BAS| = |\sphericalangle ASB| = 60^\circ,$$

tj. trojúhelník ABS je rovnostranný. Bod S je tedy pro všechny přípustné (takto uvažované) polohy bodů K , L , M ležících po řadě na stranách AB , BC , DA určen jednoznačně jako *třetí vrchol rovnostranného trojúhelníku* ABS (obr. 1).

Označme a délku strany čtverce $ABCD$ a uvažujme dále změnu polohy bodu K na úsečce AB tak, aby body L , M ležely po řadě na úsečkách

BC , DA . S ohledem na symetrii čtverce $ABCD$ podle osy jeho strany AB stačí sledovat změnu polohy bodu K od středu strany AB směrem k vrcholu A (obr. 1). V tomto případě se (v závislosti na popsané změně polohy bodu K) mění i poloha bodů L a M tak, že bod M se „pohybuje“ na straně AD směrem k vrcholu D a bod L se současně „pohybuje“ na straně BC směrem k vrcholu B . V mezním případě pak $M = D$ (obr. 2). Zde určíme velikost odpovídajícího úhlu ADK . Bod A' je obrazem bodu A v otočení $S = (D, +60^\circ)$, tj. trojúhelník $AA'D$ je rovnostranný a $A' \in o_{AD}$, kde o_{AD} je osa strany AD .



Obr. 2

Dále platí:

(i) $\triangle AKD \cong \triangle A'LD$ (otočení S),

(ii) $\triangle A'LD \cong \triangle CLD$ (Ssu).

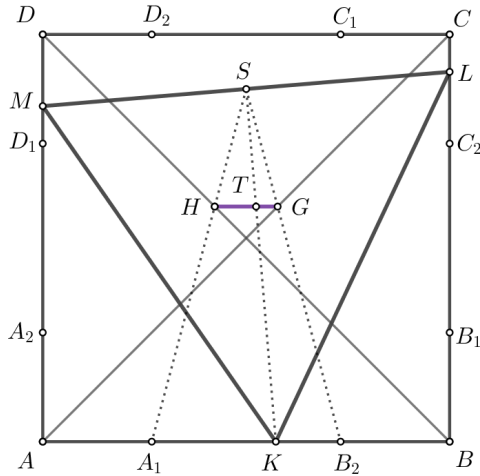
Platí tedy $|\sphericalangle CDA'| = 30^\circ$, tj.

$$|\sphericalangle ADK| = |\sphericalangle A'DL| = |\sphericalangle CDL| = \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 15^\circ,$$

a proto $|AK| = |AL'| = |CL| = a \operatorname{tg} 15^\circ$.

S ohledem na symetrii čtverce $ABCD$ podle os jeho stran a užitím principu cyklické záměny vidíme, že každou stranu čtverce $ABCD$ můžeme tedy rozdělit (symetricky vzhledem k jejímu středu) na tři úseky, přičemž oba krajní (shodné) úseky mají délku $a \operatorname{tg} 15^\circ$, tj. platí

$$|AA_1| = |B_2B| = |BB_1| = \dots = |A_2A| = a \operatorname{tg} 15^\circ,$$

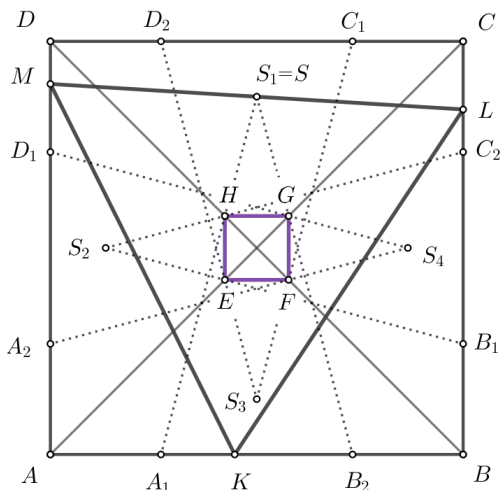
$$|A_1 B_2| = |B_1 C_2| = |C_1 D_2| = |D_1 A_2| = (1 - 2 \operatorname{tg} 15^\circ) a.$$


Dále je zřejmé, že pokud některý z vrcholů rovnostranného trojúhelníku KLM leží na prostředním úseku jedné ze stran čtverce $ABCD$, leží oba zbývající vrcholy (po jednom) na vzdálenějších kratších úsecích přilehlých (sousedních) stran k této straně.

Z obr. 3 je patrné, že těžiště T rovnostranného trojúhelníku KLM je obrazem vrcholu K ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem $\frac{1}{3}$. Pohybuje-li se bod K na úsečce A_1B_2 (na straně AB čtverce), obr. 3, pak úsečka HG , která je obrazem úsečky A_1B_2 ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem $\frac{1}{3}$ je množinou těžišť všech rovnostranných trojúhelníků KLM , které splňují podmínky úlohy a jeden jejich vrchol leží na úsečce A_1B_2 .

Matematika – fizyka – informatika **32** (1) 2023

káme množinu těžišť všech vepsaných rovnostranných trojúhelníků KLM . Touto množinou je čtverec $EFGH$. Strany čtverce $EFGH$ jsou obrazy prostředních úseků každé strany čtverce $ABCD$ ve výše popsáných čtyřech stejnolehlostech (jejich středy jsou postupně body $S_1 = S$, S_2 , S_3 , S_4 , koeficienty $\frac{1}{3}$, obr. 4). Každý vrchol čtverce $EFGH$ je obrazem bodů ve dvou různých stejnolehlostech, např. bod H je obrazem bodu A_1 ve stejnolehlosti se středem S_1 a současně obrazem bodu C_2 ve stejnolehlosti se středem S_2 .



Obr. 4

Naopak také platí: Ke každému bodu hranice čtverce $EFGH$ najdeme (obrácením naznačeného postupu) odpovídající trojúhelník KLM splňující podmínky úlohy.

ZÁVĚR: Množinou těžišť všech rovnostranných trojúhelníků KLM vepsaných do daného čtverce $ABCD$ tak, že všechny tři vrcholy každého z těchto rovnostranných trojúhelníků leží na hranici daného čtverce, je hranice čtverce $EFGH$, viz obr. 4.

Literatura

- [1] *Chehlarova, T.*: Virtualen uchilishten kabinet po matematika. Dostupné z <https://cabinet.bg/content/bg/html/d18313.html>

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 30. 6. 2023 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 283

Určete nejmenší přirozené číslo n , které dává současně při dělení třemi zbytek 2, při dělení čtyřmi zbytek 3, při dělení pěti zbytek 4 a při dělení číslem 2023 zbytek 1.

Jaroslav Švrček

Úloha 284

Jsou dány dva různé body A, B a přímka p rovnoběžná s úsečkou AB . Na přímce p najděte všechny body C , pro které je hodnota součinu $|AC| \cdot |BC|$ co nejmenší.

Pavel Calábek

Dále uvádíme řešení úloh 279 a 280, jejichž zadání jsme zveřejnili ve třetím čísle loňského (32.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 279

Dokažte, že pro všechna reálná čísla $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c \geq 1$, $d \geq 2$ platí nerovnost

$$4\sqrt{a^2 - 1} + 2\sqrt{b^2 - 4} + 4\sqrt{c^2 - 1} + 2\sqrt{d^2 - 4} \leq (a + c)(b + d)$$

a určete, pro které hodnoty přirozených čísel a^2, b^2, c^2, d^2 nastane rovnost.

Jaroslav Zhouf

Řešení. Nejprve dokážeme nerovnost

$$2\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{b^2 - 4} \leq ab. \quad (1)$$

Obě strany této nerovnosti jsou nezáporná čísla, tato nerovnost je tak ekvivalentní nerovnosti mezi jejich druhými mocninami

$$4(a^2 - 1) + 4\sqrt{(a^2 - 1)(b^2 - 4)} + b^2 - 4 \leq a^2b^2,$$

neboli po úpravě

$$4\sqrt{(a^2 - 1)(b^2 - 4)} \leq (a^2 - 1)(b^2 - 4) + 4.$$

Odtud snadno vidíme, že tato nerovnost je ekvivalentní s platnou nerovností

$$0 \leq (\sqrt{(a^2 - 1)(b^2 - 4)} - 2)^2,$$

přičemž rovnost nastane, právě když

$$(a^2 - 1)(b^2 - 4) = 4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 = 4 \cdot 1, \quad (2)$$

kde vpravo jsou všechny rozklady čísla 4 na součin dvou přirozených čísel. Pro přirozená čísla $a^2 \geq 1$, $b^2 \geq 4$ tak rovnost nastane, právě když

$$(a^2, b^2) \in \{(2, 8), (3, 6), (5, 5)\}. \quad (3)$$

Podobným způsobem jako nerovnost (1) dokážeme i nerovnosti

$$\sqrt{b^2 - 4} + 2\sqrt{c^2 - 1} \leq bc,$$

$$2\sqrt{c^2 - 1} + \sqrt{d^2 - 4} \leq cd,$$

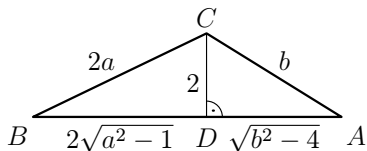
$$\sqrt{d^2 - 4} + 2\sqrt{c^2 - 1} \leq da.$$

Sečtením nerovností (1) a těchto tří nerovností již dostaneme dokazovanou nerovnost

$$4\sqrt{a^2 - 1} + 2\sqrt{b^2 - 4} + 4\sqrt{c^2 - 1} + 2\sqrt{d^2 - 4} \leq \\ \leq ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d).$$

Rovnost v ní nastane, právě když nastane ve všech čtyřech uvažovaných nerovnostech, tedy právě když $4 = (a^2 - 1)(b^2 - 4) = (b^2 - 4)(c^2 - 1) = (c^2 - 1)(d^2 - 4) = (d^2 - 4)(a^2 - 1)$. Odtud již snadno dostaneme, že vzhledem k podmínkám úlohy nutně platí $c = a$, $d = b$. Aby všechny požadované druhé mocniny byly přirozenými čísly, musí dále platit (3).

Poznámka 1. Nerovnost (1) můžeme interpretovat i geometricky. Uvažujme trojúhelník ABC s úhly při vrcholech A a B o velikostech nejvýše 90° . Označme D patu jeho výšky z vrcholu C a předpokládejme, že $|BC| = 2a$, $|AC| = b$ a $|DC| = 2$ (takový (případně degenerovaný) trojúhelník vzhledem k podmínkám $a \geq 1$, $b \geq 2$ jistě existuje). Podle Pythagorovy věty snadno dopočteme $|BD| = 2\sqrt{a^2 - 1}$, $|AD| = \sqrt{b^2 - 4}$.



Z dvojího vyjádření obsahu trojúhelníku ABC a omezenosti funkce sinus platí

$$\begin{aligned} 2\sqrt{a^2 - 1} + \sqrt{b^2 - 4} &= \frac{1}{2} |BA| \cdot |CD| = \\ &= \frac{1}{2} |BC| \cdot |AC| \sin |\sphericalangle BCA| = ab \sin |\sphericalangle BCA| \leq ab. \end{aligned}$$

Rovnost nastane, právě když trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C , což je podle obrácené věty k Eukleidově větě o výšce ekvivalentní podmínce (2).

Poznámka 2. Řešitelé s vesměs všemi neúplnými řešeními správně dokázali nerovnost pro reálná čísla, neuvědomili si však, že mají také hledat přirozená čísla, pro která nastává rovnost.

Správná řešení zaslali *Anastasia Bredikhina, Michal Janík a Samuel Rosiar*, všichni z GJK v Praze 6, *Tereza Černá* z G v Praze 9, *Litoměřická, Lenka Poljaková* z GJŠ v Přerově, *Jakub Štepo* z G v Kladně a *Ondřej Trinkewitz* z G a SPŠE ve Frenštátě pod Radhoštěm.

Neúplná řešení zaslali *Adam Červenka, Martin Dufek, Alena Janáčková, Jakub Koňárek, Lukáš Kycl, Štěpán Mikéska, Petr Slonek a Filip Smíšek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Erik Ježek* ze SSPŠ a G v Praze 5, *Jan Sláva* z MG v Praze 6 a *Lukáš Wendzel* z G a SPŠEI ve Frenštátě p. Radhoštěm.

Úloha 280

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x(x^2 + 1) &= y^3 + 1, \\ y(y^2 + 1) &= z^3 + 1, \\ z(z^2 + 1) &= x^3 + 1. \end{aligned}$$

Jaroslav Švrček

Řešení. Obě funkce $f(x) = x(x^2 + 1) = x^3 + x$ a $g(x) = x^3 + 1$ jsou zřejmě rostoucí, jelikož tuto vlastnost mají obě funkce $y = x^3$ a $y = x$.

Předpokládejme, že daná soustava má řešení x, y, z . Jelikož se jedná o cyklickou soustavu rovnic, můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že číslo x je největší, tedy $x = \max\{x, y, z\}$. Jelikož funkce f je rostoucí, platí tak

$$f(x) = g(y) = \max\{f(x) = g(y), f(y) = g(z), f(z) = g(x)\}.$$

Funkce g je ovšem rostoucí, proto $y = \max\{x, y, z\}$. Podobným způsobem pak dokážeme, že i $z = \max\{x, y, z\}$. Proto nutně platí $x = y = z$ a dosazením do libovolné rovnice dané soustavy dostaneme její jediné řešení $x = y = z = 1$.

Jiné řešení. Pokud by se některá neznámá, bez újmy na obecnosti například x , rovnala 0, z první rovnice dané soustavy by platilo $y = -1$. Dosazením do druhé rovnice pak dostáváme $z = -\sqrt[3]{3}$. Jelikož $-3 - \sqrt[3]{3} < 0 < 1$, dostáváme spor se třetí rovnicí dané soustavy, proto $xyz \neq 0$. Odtud ovšem

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq \frac{3}{4}y^2 > 0.$$

Užitím vzorce pro rozdíl třetích mocnin dostáváme, že soustava je ekvivalentní se soustavou

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 1 - x,$$

$$(y - z)(y^2 + yz + z^2) = 1 - y,$$

$$(z - x)(z^2 + zx + x^2) = 1 - z.$$

Podobně jako v prvním odstavci ukážeme, že druhé činitele na levých stranách rovnic jsou kladné. Daná soustava rovnic má zřejmě řešení $x = y = z = 1$. Předpokládejme, že má i jiné řešení, potom alespoň jedna jeho složka, bez újmy na obecnosti x , je různá od 1. Pokud $x > 1$, z první rovnice upravené soustavy plyne $x - y < 0$, tedy $y > x > 1$. Ze druhé rovnice pak $y - z < 0$, tedy $z > y > x > 1$, což je ve sporu se třetí rovnicí. Podobně dovedeme ke sporu i případ $x < 1$, proto daná soustava má jediné řešení $x = y = z = 1$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anastasia Bredikhina*, *Michal Janík* a *Samuel Rosiar*, všichni z GJK v Praze 6, *Tereza Černá* z G v Praze 9, *Litoměřická*, *Adam Červenka*, *Martin Dufek*, *Anna Hronová*, *Alena Janáčková*, *Jakub Koňárek*, *Lukáš Kycl*, *Štěpán Mikéska*, *Petr Slonek* a *Filip Smíšek*, všichni z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Erik Ježek* ze SSPŠ a G v Praze 5, *Lenka Poljaková* z GJŠ v Přerově. *Pavla Sankotová* z G v Plzni, *Mikulášské nám.* a *Jan Slíva* z MG v Praze 6, *Jakub Štepo* z G v Kladně. *Ondřej Trinkewitz* z G a SPŠE ve Frenštátě pod Radhoštěm a *Lukáš Wendzel* z G a SPŠEI ve Frenštátě p. Radhoštěm.

Neúplná řešení zaslali *František Jáchym* z Volyně a *Jáchym Kouba* z GJŠ v Přerově.

Pavel Calábek

Napětí naprázdno fotovoltaického článku v závislosti na intenzitě ozáření

JIŘÍ KOS – MICHAELA KRÍŽOVÁ

Přírodovědecká fakulta, Univerzita Hradec Králové

Moderní technologie se čím dál více uplatňují ve výuce na základních i středních školách. Běžnou součástí výuky jsou počítače, projektory, interaktivní tabule, mobilní telefony, ..., nicméně vývoj tohoto odvětví je natolik rychlý, že výše uvedené technologie nepostačují k tomu, aby byl absolvent našeho školství skutečně dobře vybaven potřebnými kompetencemi. Proto je velmi důležité žákům poskytnout možnost s technologiemi aktivně pracovat. Snažili jsme se navrhnout několik námětů na úlohy, které si mohou žáci samostatně v rámci výuky fyziky proměřit, data zpracovat a učinit závěry svých měření. Využili jsme 3D tiskárnu, senzory Vernier, robotickou stavebnici VEX IQ i jednodeskový počítač Arduino. Veškeré náměty jsou podrobně zpracovány v diplomové práci [1]. U každé takto připravené úlohy je uvedena teoretická část, kterou si žáci prostudují před laboratorní úlohou, poté zadání vlastní laboratorní práce (úkol, pomůcky, podrobný postup) a možné výsledky měření. Nedílnou součástí námětů jsou metodické pokyny pro učitele. Každý námět obsahuje pět ikon prezentujících úvodní informace o něm (část fyziky, metody a formy výuky...). Schematické značky, podrobné popisy a ilustrační obrázky umožňují lepší pochopení zadání práce. V neposlední řadě je uveden výčet a popis dodávaných materiálů včetně odkazů na konkrétní přílohy výše uvedené diplomové práce.

Materiály byly postupně upravovány tak, aby co nejvíce odpovídaly potřebám žáků. Byly vyzkoušeny v pedagogické praxi na vyšším stupni

osmiletého gymnázia v rámci dvouhodinových laboratorních cvičení, která se konají jednou měsíčně v každé třídě daného ročníku. Jelikož se třídy na cvičení dělí do skupin, bylo možné jednotlivé náměty do výuky zařadit opakovaně, a to v obměněných podobách dle připomínek žáků, které vyjádřili v následné reflexi cvičení.

V tomto článku bychom rádi jako ukázkou námětů popsali laboratorní cvičení na téma „Určení napětí naprázdno v závislosti na intenzitě ozáření“. K tomuto námětu vzniklo v rámci výše uvedené diplomové práce celkem sedm materiálů – metodický list pro učitele a šest příloh. Vzhledem k rozsahu článku není možné zahrnout veškeré vytvořené podklady, a tak zařazujeme pouze vybrané ukázky. Zájemci naleznou kompletní znění právě v diplomové práci [1].

Metodické pokyny k námětu pro učitele

a) úvodní informace



Obr. 1 Ikony ilustrující úvodní informace k úloze [1]

b) popis námětu

Cílem námětu je proměřit závislost napětí naprázdno na intenzitě ozáření.

c) potřebné pomůcky

Datalogger LabQuest 2, voltmetr Vernier, robotická stavebnice VEX IQ, improvizovaný zdroj světla Arduino, solární panel upevněný k držáku, svinovací metr.

d) výčet materiálů dodávaných k námětu

Teoretická stať, pracovní list pro žáky, možné řešení úlohy, návod pro realizaci improvizovaného zdroje světla a 3D výtisku stojanu solárního panelu, návod pro sestavení robotické stavebnice VEX.

e) komentář autora

Úloha sestává z většího počtu měření, a tak je možné ji realizovat ve větších skupinkách žáků.

Součástí úlohy je práce s jednodeskovým počítačem Arduino. Pro stanovení výsledků měření byl využit odečet okamžitých hodnot přímo z dataloggeru. V ostatních úlohách je zařazen i jiný způsob.

Žáci jsou v protokolu vyzváni k tomu, aby zdroj světla považovali za bodový. Je vhodné s nimi prodiskutovat, proč je toto zjednodušení přípustné. Byť se jedná o plošný zdroj, úkolem žáků není stanovovat jednotlivé radiometrické veličiny, pouze zjišťují, zda se intenzita ozáření při oddalování od zdroje snižuje. To platí pro bodové i plošné zdroje.

Úlohu by bylo možné upravit tak, aby žáci neproměřovali pouze napětí naprázdno, ale i celou voltampérovou charakteristiku. Na druhou stranu se však už jedná o učivo přesahující gymnaziální znalosti, a tak byla úloha koncipována do podoby, v jaké se aktuálně nachází.

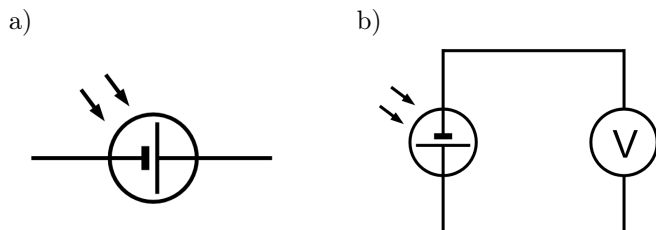
Pro autorovo měření byl použit solární panel o velikosti $6\text{ cm} \times 8\text{ cm}$, jmenovitém napětí 3 V, maximálním proudu 300 mA a výkonu 0,6 W.

Zadání laboratorní úlohy pro žáky

Teoretická část (viz [2, 3, 4, 5, 6])

a) solární baterie

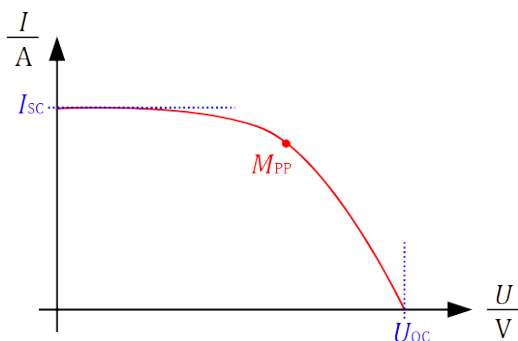
Fotovoltaický článek (fotočlánek) je polovodičová součástka, která slouží k přeměně energie dopadajícího záření na energii elektrickou. Schématická značka fotočlátku je uvedena na obr. 2a.



Obr. 2 Schématická značka fotočlátku a obvod pro určení napětí naprázdno (převzato z [1], upraveno)

Jednotlivé fotočláanky se liší průběhem své voltampérovou charakteristiky (příklad charakteristiky je na obr. 3), přičemž tvar charakteristiky ovlivňují nejrůznější faktory (teplota, intenzita dopadajícího světla, ...). Jedním z parametrů V-A charakteristiky je i napětí naprázdno (na obr. 3 označeno jako U_{OC}), což je napětí, při kterém obvodem neprochází žádný

elektrický proud. Aby obvodem neprocházela žádná síla, je třeba, aby zapojený spotřebič měl nekonečně velký odpor. Realizovat nekonečně velký odpor je samozřejmě nemožné, nicméně dost dobře tuto podmínku splňuje voltmetr, jelikož vnitřní odpory běžných multimetrů se pohybují řádově okolo 10 MΩ (schéma takového obvodu představuje obr. 2b).



Obr. 3 Příklad vltampérové charakteristiky fotočlánku (převzato ze [2], upraveno)

Fotočlánky pak za účelem zvyšování elektromotorických napětí a proudu v obvodu spojujeme do tzv. solárních baterií. Pod pojmem solární baterie tedy rozumíme spojení několika fotovoltaiických článků.

b) radiometrie

Světlo je elektromagnetické záření o vlnových délkách 390 nm až 760 nm. Toto záření přenáší do prostoru zářivou energii Q_e . V radiometrii pak ale pracujeme s dalšími fyzikálními veličinami.

Jednou z těchto veličin je veličina nesoucí název zářivý tok Φ_e , která představuje výkon zářivé energie, která prošla určitou plochou za nějaký časový interval.

Zářivost bodového zdroje I_e označujeme podíl zářivého toku, který zdroj vysílá do malého prostorového úhlu $\Delta\Omega$, a tohoto úhlu, tj.

$$I_e = \frac{\Delta\Phi_e}{\Delta\Omega}. \quad (1)$$

Intenzitou ozáření E_e rozumíme podíl zářivého toku, který dopadá na elementární plochu ΔS , a této plochy. Pokud je plocha kolmá ke směru

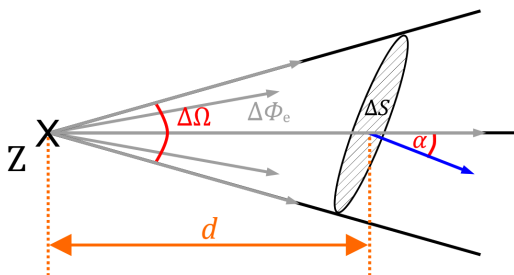
šíření, pak

$$E_e = \frac{\Delta\Phi_e}{\Delta S}. \quad (2)$$

Mezi intenzitou ozáření a zářivostí zdroje platí vztah

$$E_e = \frac{I_e}{d^2} \cos \alpha, \quad (3)$$

kde α představuje úhel svíraný dopadajícím zářením a normálou uvažované plochy, d je pak vzdálenost zdroje a ozařované plochy. Význam jednotlivých veličin ilustruje obr. 4. U zdrojů, jejichž rozměry nejsou zanedbatelné



Obr. 4 K objasnění některých radiometrických veličin převzato ze [2], upraveno)

vůči vzdálenosti, výše uvedené vztahy neplatí. Musíme totiž na takový zdroj hledět jako na zdroj plošný.

Úkol

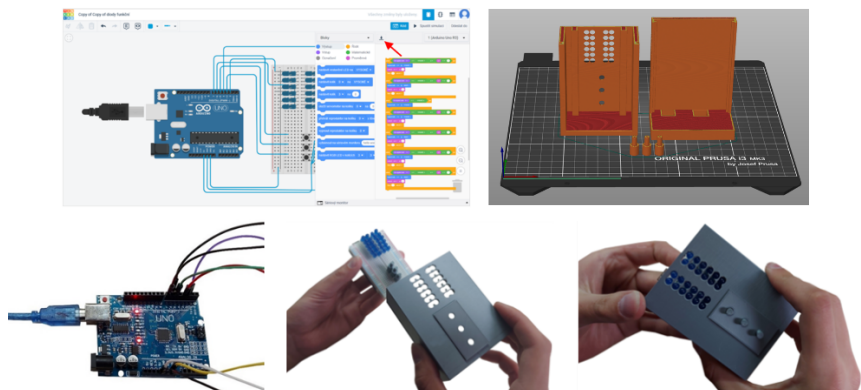
Pomocí sestavené soupravy stanovte závislost velikosti napětí naprázdno na různé intenzitě ozáření.

Pomůcky

Datalogger LabQuest 2, voltmetr Vernier, robotická stavebnice VEX IQ, improvizovaný zdroj světla Arduino, solární panel upevněný k držáku, svinovací metr.

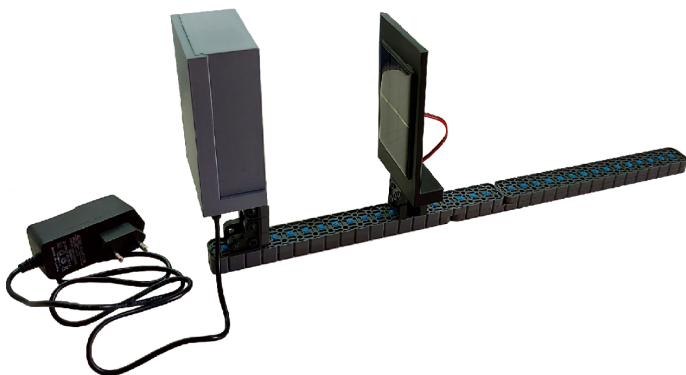
Postup

1. Dle návodu sestavte za pomoci jednodeskového počítače Arduino improvizovaný zdroj světla s krytem vytištěným na 3D tiskárně (návod tvoří přílohy 25, 26 a 27 diplomové práce [1], na obr. 5 jsou uvedeny vybrané snímky z tohoto návodu).



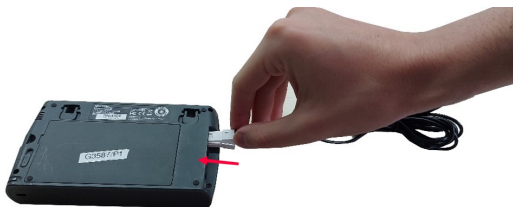
Obr. 5 Vybrané snímky z návodu pro sestavení improvizovaného zdroje světla (převzato z [1], upraveno)

2. S pomocí obrázkového návodu sestavte optickou lavici (vzdálenost povrchu solárního panelu od svítivých diod by měla být 9,5 cm). Návod tvoří přílohu 28 diplomové práce [1], na obr. 6 je uvedena finální podoba optické lavice.



Obr. 6 Požadovaná podoba optické lavice [1]

3. K výstupům ze solárního článku připojte voltmetr firmy Vernier (viz obr. 7). Ten pak propojte s dataloggerem (výsledkem měření budou pouze hodnoty napětí, a tak je odečteme přímo z displeje, nebudeme potřebovat propojení s počítačem).



Obr. 7 Připojení voltmetru k dataloggeru (převzato z [1], upraveno)

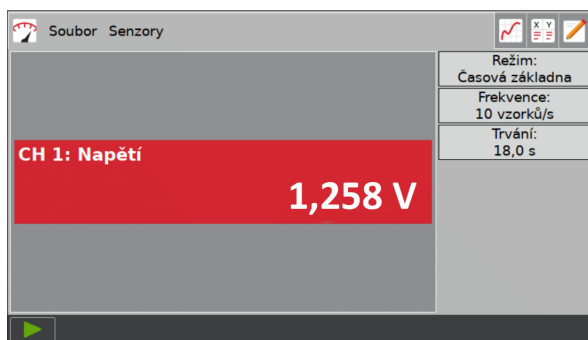
4. Datalogger zapněte a vyčkejte, dokud nenaběhne jeho operační systém.
5. Zapojte improvizovaný zdroj světla do zásuvky.
6. Solární panel zakryjte a proveďte nulování senzoru Vernier. Nulování provedete tak, že pokleпáte na číselnou hodnotu napětí, která se právě ukazuje na displeji. Po pokleпání se objeví podokno možností, ve kterém vyberete položku *Nulovat*.
7. Odkryjte solární panel.
8. Na improvizovaném zdroji stisknete první tlačítko, čímž rozsvítíte dvě řady diod. Na dataloggeru odečtete hodnotu napětí naprázdno a poznamenejte si ji.
9. Postupně rozsvíte i další řady diod (respektive zvyšujte intenzitu ozáření), pokaždé proměřte napětí naprázdno a vhodně si jej poznamenejte.
10. Ponechte rozsvícené všechny diody a postupně zvětšujte vzdálenost panelu od zdroje světla o 6 cm, dokud nedojdete na konec optické lavice (posunu o 6 cm odpovídá posun o 5 zdířek na optické lavici). V každé poloze opět stanovte hodnotu napětí.
11. Zpracujte výsledky měření:
 - Okomentujte, jak se měnilo napětí naprázdno při zvyšování intenzity ozáření.
 - Sestavte bodový graf závislosti napětí naprázdno na vzdálenosti solárního panelu od improvizovaného zdroje světla, naměřené hodnoty proložte vhodnou regresní křivkou.

- Na základě sestaveného grafu vyvoďte, jak se mění intenzita ozáření se zvyšující se vzdáleností (zdroj světla považujte za bodový – jedná se o hrubé zjednodušení, ale pro naše úvahy je dostatečné).

12. Zformulujte závěr měření.

Naměřené hodnoty a jejich zpracování, možné interpretace výsledků

Během měření ve vzdálenosti $d = 9,5$ cm solárního panelu od zdroje světla byla při rozsvícení dvou řad svítivých diod stanovena hodnota napětí naprázdno $U_I = 1,063$ V (viz obr. 8).



Obr. 8 Ukázka měření napětí naprázdno (převzato z [1], upraveno)

Při rozsvícení dalších dvou řad diod pak hodnota napětí vzrostla na $U_{II} = 1,187$ V. V posledním případě byly v provozu veškeré diody, přičemž hodnota napětí naprázdno byla rovna $U_{III} = 1,258$ V.

Ve druhé části úlohy byla při rozsvícení všech řad diod stanovena závislost napětí naprázdno U na vzdálenosti d . Tuto závislost představuje tabulka 1.

V první části laboratorního cvičení bylo určeno, že v závislosti na zvyšující se intenzitě ozáření roste napětí naprázdno. Proměřená závislost ve druhé části cvičení pak ukazuje, že s rostoucí vzdáleností klesá napětí naprázdno, z čehož lze usoudit, že se zvyšující se vzdáleností klesá intenzita ozáření.

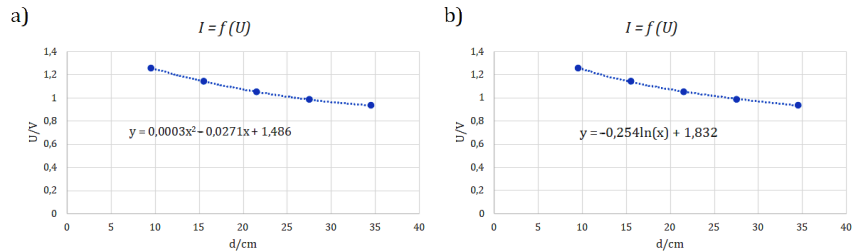
Je nasnadě konstatovat, že výše uvedené interpretace do jisté míry nemusí naplňovat očekávání středoškolské fyziky, neboť nevedou k získání

funkčního předpisu regresní funkce tak, jak bývá v laboratorních cvičeních z fyziky zvykem. Pro zpracování dat lze tedy uvážit užití tabulkového procesoru a pokusit se funkční závislost stanovit.

číslo měření i	$\frac{d_i}{\text{cm}}$	$\frac{U_i}{\text{V}}$
1	9,5	1,258
2	15,5	1,144
3	21,5	1,052
4	27,5	0,987
5	34,5	0,936

Tabulka 1 Závislost napětí naprázdno U na vzdálenosti d [1]

Při hledání regresní funkce samozřejmě platí, že naměřená data lze dost dobře proložit polynomickou funkcí dostatečného stupně (tak jako ve všech dalších fyzikálních měřeních). V případě našich dat dokonce vyplývá, že bychom mohli využít polynom pouze druhého stupně (viz obr. 9a). Je však otázkou, nakolik tato křivka odpovídá skutečné závislosti. Z některých zdrojů (např. [7]) lze usuzovat, že by závislost měla být logaritmická (viz obr. 9b). Hledání funkčního předpisu může být určitě velmi zajímavým problémem, o kterém lze s žáky v hodinách diskutovat, a tak rozšířit jejich zkušenosti s regresní analýzou.



Obr. 9 Graf závislosti napětí naprázdno U na vzdálenosti d (převzato z [1], upraveno)

Závěr

Moderní technologie neoddiskutovatelně patří do výchovně-vzdělávacího systému 21. století, a to i do fyzikálního vzdělávání. Doufáme, že si uvedená úloha získala své čtenáře a že i motivovala některé vyučující fyziky k tomu, aby nahlédli do citované diplomové práce a některé moderní technologie do svých hodin zkusili zařadit.

Literatura

- [1] *Kos, J.*: Využití moderních technologií ve výuce fyziky na SŠ [online]. Diplomová práce. Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta, Hradec Králové, 2022. Dostupné z: <https://theses.cz/id/z68et0/>.
- [2] *Kos, J.*: Inovace Fyzikálního praktika 2 [online]. Bakalářská práce. Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta, Hradec Králové, 2020. Dostupné z: <https://theses.cz/id/o545xt/>.
- [3] *Nečásek, S., Janeček, J. a Rambousek, J.*: Elektronické a elektroakustické součástky: Jejich volba a použití. Praha, Nakladatelství technické literatury, n. p., 1985.
- [4] *Němeček, O.*: Teplotní charakteristiky fotovoltaických panelů [online]. Diplomová práce. Západočeská Univerzita v Plzni, Fakulta elektrotechnická, Plzeň, 2017. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/11025/26879>.
- [5] *Baumruk, V.*: Učební text k přednášce UFY102: Fotometrie a radiometrie [online]. MFF UK, Praha [cit. 2022-03-03]. Dostupné z: http://fu.mff.cuni.cz/biomolecules/media/files/courses/Fotometrie_a_radiometrie.pdf.
- [6] *Halliday, D., Resnick, R. a Walker, J.*: Fyzika. 2. vyd. Brno, VUTIUUM, 2013.
- [7] *Honsberg, Ch. a Bowden, S.*: Effect of Light Intensity. PVCEducation [online], [cit. 2022-11-06]. Dostupné z: <https://www.pveducation.org/pvcdrom/solar-cell-operation/effect-of-light-intensity%20>.

Měření magnetického dipólového momentu (magnetizace) permanentních magnetů

JIŘÍ ERHART

Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci

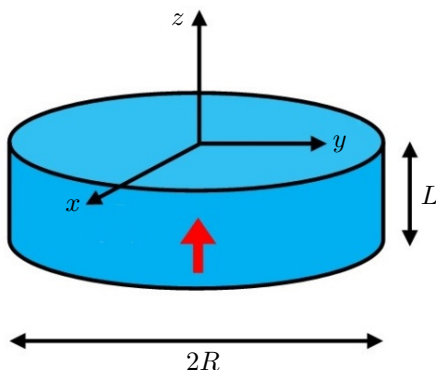
V článku jsou permanentní magnety symetrických tvarů použity pro určení remanentní magnetizace (magnetické polarizace) tří typů tvrdých feritů (Ferit, FeNdB a SmCo magnety). Metoda je založena na měření průběhu magnetické indukce na ose magnetu ve tvaru čtvercové desky a válce, který se dá analyticky odvodit jako součin remanentní magnetické indukce a tvarového faktoru zahrnujícího rozměry magnetky a vzdálenost od jejího povrchu. Remanentní magnetická indukce se z naměřených dat určí fitováním závislosti metodou lineární regrese.

Feromagnetické látky jeví spontánní uspořádání elementárních magnetických dipólových momentů. Mezi takové látky patří např. čisté kovy nikl (Ni), železo (Fe) nebo kobalt (Co) a potom řada slitin těchto kovů – dnes nejvíce používané jsou barnatý nebo strontnatý ferit, neodymové (FeNdB), samarium kobaltové (SmCo) a AlNiCo magnety. Elementární magnetické dipóly v permanentním magnetu se makroskopicky projevují magnetickým dipólovým momentem celého magnetu. Objemovou hustotu magnetického dipólového momentu charakterizuje magnetická polarizace látky, udávaná v jednotkách tesla (T). Tyto elementární dipólové momenty spontánně existují ve feromagnetické látce pod tzv. Curieovou teplotou, která proto zásadně omezuje teplotní rozsah jejich použití. Magnetickou polarizaci lze určovat na základě odpudivé magnetické síly mezi magnetkami pravidelných tvarů (viz např. [1] pro síly mezi válcovými FeNdB magnety), nebo na základě měření průběhu magnetické indukce v okolí homogenně magnetizovaných magnetek symetrických tvarů.

Homogenně magnetizovaná tělesa permanentních magnetů (tzv. tvrdých feritů) symetrických tvarů jako je válec nebo pravoúhlá deska mají průběhy magnetické indukce na ose symetrie, která je současně i směrem magnetizace, vyjádřené pomocí analytických vztahů. Podle [2] jsou tyto

vztahy vždy ve tvaru součinu remanentní indukce B_r a bezrozměrného tvarového faktoru f (kromě válce a desky jsou v [2] odvozeny vztahy také pro prstenec a kouli):

Disk (válec) – poloměr R , výška L , magnetizace ve směru výšky L (viz červená šipka)



Obr. 1 Homogenně magnetizovaný válec se souřadným systémem pro určení magnetické indukce v jeho okolí (magnetizace viz červená šipka)

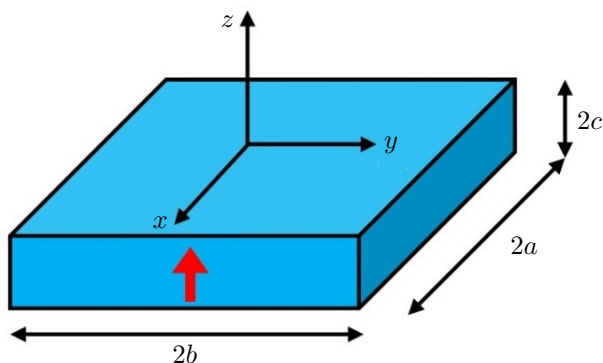
$$B(z) = B_r f(R, L, z), \quad (1a)$$

$$f(R, L, z) = \frac{1}{2} \left[\frac{z+L}{\sqrt{R^2 + (z+L)^2}} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right]. \quad (1b)$$

Pravoúhlá deska – rozměry $2a$, $2b$, $2c$, magnetizace ve směru rozměru c :

$$B(z) = B_r f(a, b, c, z), \quad (2a)$$

$$f(a, b, c, z) = \frac{1}{\pi} \left\{ \arctg \left(\frac{ab}{z\sqrt{z^2 + a^2 + b^2}} \right) - \right. \\ \left. - \arctg \left[\frac{ab}{(z+2c)\sqrt{(z+2c)^2 + a^2 + b^2}} \right] \right\}. \quad (2b)$$



Obr. 2 Homogenně magnetizovaná pravoúhlá deska se souřadným systémem pro určení magnetické indukce v jejím okolí (magnetizace viz červená šipka)

Souřadnice z se ve všech uvedených vztazích měří od svrchní strany povrchu magnetu na jeho ose z . Z hlediska měření je navíc velmi výhodné, že je vektor magnetické indukce od symetrických tvarů permanentních magnetů orientován ve směru osy symetrie v libovolné vzdálenosti od magnetu a nemusí se tedy během měření měnit orientace Hallovy sondy.

Vzhledem ke struktuře vztahů (1) a (2) je možné určovat remanentní indukci pomocí změření magnetické indukce permanentního magnetu homogenně magnetizovaného ve směru osy symetrie. Hodnoty magnetické indukce naměřené pomocí teslametru lze potom lineární regresí zpracovat jako lineární závislost indukce $B(z)$ na tvarovém faktoru f pro konkrétní tvar magnetu. Je však třeba zajistit velmi přesné měření vzdálenosti Hallovy sondy od povrchu magnetu, zvláště pak v rozsahu malých vzdáleností, kde se magnetická indukce nejvýrazněji mění. Pro měření tedy konstruujeme přípravek s úchylkoměrem umožňujícím určení vzdálenosti po krocích o velikosti 0,05 mm, stačí s rozsahem do 20–30 mm. Pro přesné zpracování průběhu magnetické indukce v okolí magnetky a fit remanentní indukce B_r nezapomeneme připočíst vzdálenost $z_0 = 0,5$ mm Hallova senzoru od magnetky, danou tloušťkou plastového pouzdra Hallovy sondy (viz např. [3]).

Pokud si budete chtít sestavit Hallovu sondu z dostupných součástek sami, je možné využít návodu z publikace [4]. V obchodech s elektrosoučástkami lze běžně zakoupit lineární proporcionální Hallův senzor pro měření magnetického pole i další potřebné součástky.

Postup měření

Magnetky jsou upevněny v ochranných plastových obalech, kde mají magnetické póly orientované stejným směrem pro všechny vzorky a neumožňují tak jejich náhodné vzájemné přitáhnutí nebo mechanické poškození při manipulaci. Nepřibližujeme však jednotlivé vzorky magnetek silou k sobě, silnější magnetické materiály (FeNdB) totiž mohou demagnetizovat nebo přemagnetizovat ty slabší!

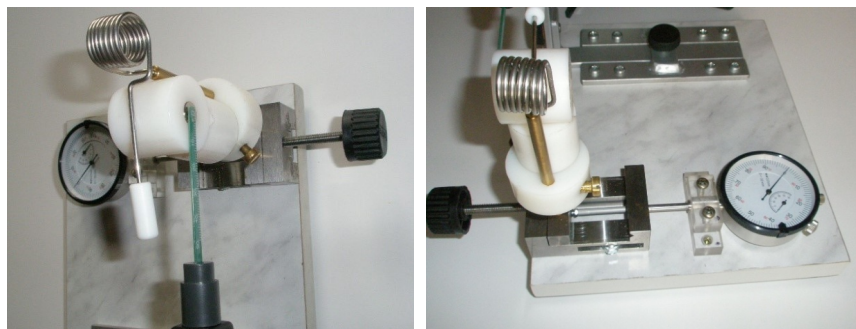
Do aparatury vložíme magnetku v ochranném plastovém pouzdře a připevníme Hallovu sondu na držák. V našem případě byl použit teslametr Extech MF100 s jednosměrnou příčnou Hallovou sondou, která je umístěna na konci plastového raménka. Pozice sondy je vyznačena na ramínku, zevně je vidět plastový obal Hallova senzoru, který senzor chrání před mechanickým poškozením. Sonda měří pouze složku vektoru magnetické indukce kolmou na sondu. Je třeba co nejpečlivěji umístit Hallovu sondu do pozice na ose magnetky. Použitý teslametr Extech MF100 má dva měřicí rozsahy (0–300 mT s citlivostí 0,01 mT a 0–3 000 mT s citlivostí 0,1 mT), přesnost měření je 5 % z odečtené hodnoty plus 10 jednotek v nejmenším řádu odečítané hodnoty (tj. 5 % rdg + 10 dgt).



Obr. 3 Zařízení pro upevnění magnetky, připevnění raménka Hallovy sondy, posuv vzorku nastavovacím šroubem, úchylkoměr pro měření vzdáleností a vzorky magnetek v plastových ochranných obalech

Přiblížíme sondu s Hallovým senzorem na dotyk k magnetce tak, aby rameno sondy bylo volné bez prohnutí, a na úchylkoměru nastavíme nulovou hodnotu – viz detail uspořádání držáku na obr. 4. Mezi Hallovým

senzorem a magnetkou je stále ještě vzdálenost daná tloušťkou plastového pouzdra Hallovy sondy $z_0 = 0,5$ mm. Pokud by bylo raménko sondy prohnuté (deformované), tak by se při vzdalování magnetky upevněné na posuvu sonda stále dotýkala magnetky, neměnila by se jejich vzájemná vzdálenost, a tedy ani hodnota magnetické indukce.



Obr. 4 Detail upevnění Hallovy sondy teslametru (vlevo) a magnetky v plastovém ochranném obalu na posuvu pro měření vzdáleností magnetky od Hallovy sondy úchylkoměrem (vpravo)

Magnetka je pevně spojena s posuvem (v našem případě jde o malý mechanický stoleček původně určený pro upevnění materiálů pro obráběcí stroje). Hodnota vzdálenosti magnetky od ramínka sondy je odečítána přes hrot úchylkoměru tlačící na pohyblivou čelist posuvu. Postupně tak měníme vzdálenost Hallovy sondy od povrchu magnetky, odečítáme jejich vzájemnou vzdálenost z a na teslametru hodnotu magnetické indukce $B(z)$. Pro malé vzdálenosti postupujeme s jemnějším krokem, postupně potom krok posuvu zvětšujeme tak, aby změny indukce $B(z)$ byly dobře měřitelné. Mechanický posuv a úchylkoměr mají však určitý „mrtvý chod“ a kvůli jeho redukci tedy postupujeme vždy jen jedním směrem posuvu k větší vzdálenosti magnetky a sondy, nikdy se nevracíme zpět. Doporučené kroky posuvu jsou uvedeny v následující tabulce:

Rozsah posuvu / mm	Krok / mm
0,05–2,00	0,05
2,0–10,0	0,1
10–20	1

Do grafu vynášíme závislost $B(z)$ na bezrozměrném tvarovém faktoru f pro daný tvar magnetu, lineární regresí stanovíme hodnotu remanentní indukce B_r a její chybu. Nezapomeneme použít lineární regresi pro závislost procházející počátkem souřadného systému, tedy pro nulovou hodnotu tvarového faktoru f je nulová hodnota magnetické indukce $B(z)$. Určenou hodnotu magnetické polarizace porovnáme s hodnotou remanentní magnetické indukce pro různé magnetické materiály magnetek udávané výrobcí nebo dodavateli magnetek [5]:

FeNdB magnety – materiál N38, $B_r = (1,22\text{--}1,26)$ T,

SmCo magnety – materiál YXG-28, $B_r = (1,03\text{--}1,08)$ T,

Feritové magnety – materiál F30, $B_r = (0,37\text{--}0,40)$ T.

Příklad měření

Použili jsme čtvercové magnety o rozměrech (10 mm × 10 mm) a různých tloušťkách: 4 mm a 5 mm pro FeNdB magnety a 3 mm pro SmCo magnety. Válcové magnety měly všechny průměr 10 mm a tloušťky 2 mm a 5 mm pro FeNdB magnety, 4 mm pro SmCo magnety a 10 mm pro feritový magnet. Všechny vzorky byly umístěny v ochranném silonovém pouzdře válcového tvaru.

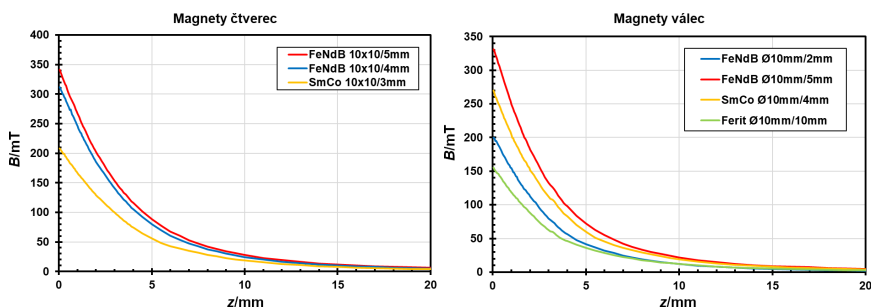
Výsledky:

Čtvercové magnety (obr. 5 a 6):

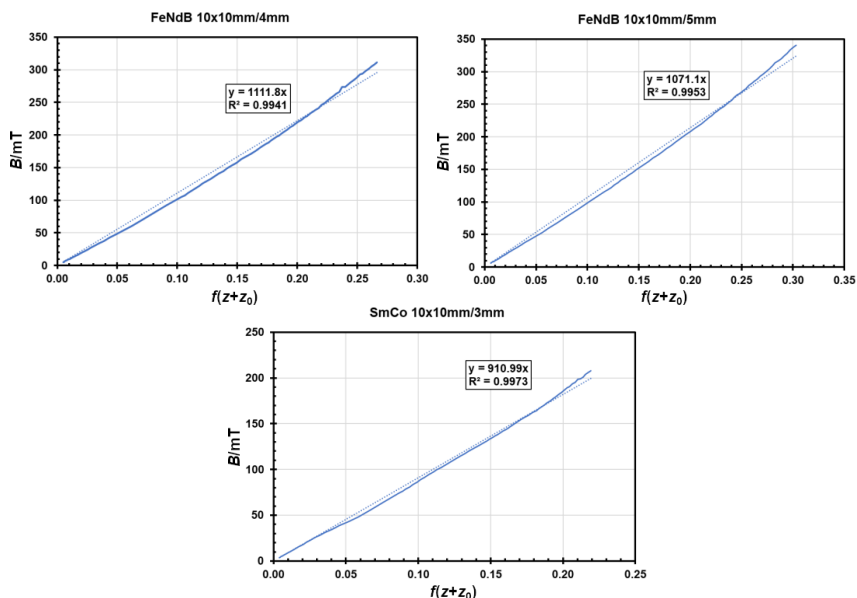
FeNdB, 10 mm × 10 mm × 5 mm, $B_r = 1111(7)$ mT;

FeNdB, 10 mm × 10 mm × 4 mm, $B_r = 1171(7)$ mT;

SmCo, 10 mm × 10 mm × 3 mm, $B_r = 910(3)$ mT.



Obr. 5 Průběhy magnetické indukce na ose čtvercových a válcových magnetek



Obr. 6 Fitování průběhů magnetické indukce na ose čtvercových magnetek s korekcí na tloušťku z_0 pouzdra Hallovy sondy

Válcové magnetky (obr. 5 a 7):

FeNdB, $\varnothing$ 10 mm / 2 mm, $B_r = 1070(7)$ mT;

FeNdB, $\varnothing$ 10 mm / 5 mm, $B_r = 992(8)$ mT;

SmCo, $\varnothing$ 10 mm / 4 mm, $B_r = 908(5)$ mT;

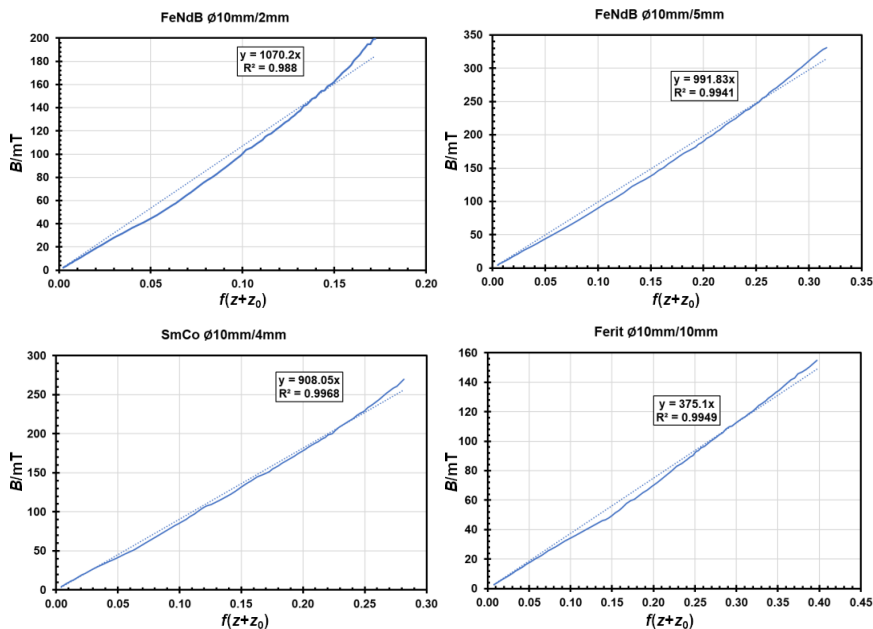
Ferit, $\varnothing$ 10 mm / 10 mm, $B_r = 375(3)$ mT.

Rozdíly v hodnotách remanentní magnetizace můžou pocházet z různých šarží stejného materiálu a od různých výrobců – např. materiálův data výrobců zpravidla uvádějí rozpětí hodnot. Uvedená chyba měření také pochází pouze z rozptylu naměřených hodnot magnetické indukce kolem fitovací křivky. Do celkové chyby určení remanentní indukce je třeba započíst ještě chybu jednotlivých hodnot magnetické indukce měřených Hallovou sondou, která činí 5 % z měřené hodnoty a je tak podstatně větší než rozptyl zjištěný fitem lineární regrese. Celková chyba měření tak činí zhruba 6 % z určené hodnoty B_r , tedy po zprůměrování hodnot z různých tvarů magnetek pro stejný materiál dostáváme:

FeNdB, $B_r = 1086(65)$ mT;

SmCo, $B_r = 909(55)$ mT;

Ferit, $B_r = 375(22)$ mT.



Obr. 7 Fitování průběhů magnetické indukce na ose válcových magnetek s korekcí na tloušťku z_0 pouzdra Hallovy sondy

Naměřené hodnoty se tak nacházejí v rozsahu hodnot udávaných výrobcí a prodejci magnetů pro SmCo a Feritové magnety, pro FeNdB magnety jsou mírně menší patrně vlivem průměrování přes různé tvary magnetek (tenké čtvercové desky magnetizované ve směru tloušťky a válce magnetizované ve směru osy). Kvalita magnetizace (velikost a homogenita) může být totiž tvarem ovlivněna.

Literatura

- [1] Erhart, J., Šimek, L.: Měříme magnetickou polarizaci permanentních magnetů. MFI, roč. 19 (2010), s. 595–601.
- [2] Camacho, J. M., Sosa, V.: Alternative method to calculate the magnetic field of permanent magnets with azimuthal symmetry, Revista Mexicana de Física E, roč. 59 (2013), s. 8–17. Dostupné z: <https://www.scielo.org.mx/pdf/rmfe/v59n1/v59n1a2.pdf>.

- [3] DRV5055 Ratiometric Linear Hall Effect Sensor [on-line]. Texas Instruments, Technical documentation (2021). Dostupné z: <https://www.ti.com/product/DRV5055>.
- [4] Connors, M.: Measurement and Analysis of the Field of Disc Magnets, The Physics Teacher, roč. 40 (2002), s. 308–311. Dostupné z: <https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.1516388>.
- [5] Fyzikální údaje magnetů [on-line]. Dostupné z: <https://www.unimagnet.cz/fyzikalni-udaje-neodymovych-magnetu/>.

Měříme rychlost zvuku v kovech, v plynech i v kapalinách

JOSEF HUBEŇÁK – JIŘÍ HUBEŇÁK, jr.

Přírodovědecká fakulta, Univerzita Hradec Králové,
Gymnázium Boženy Němcové Hradec Králové

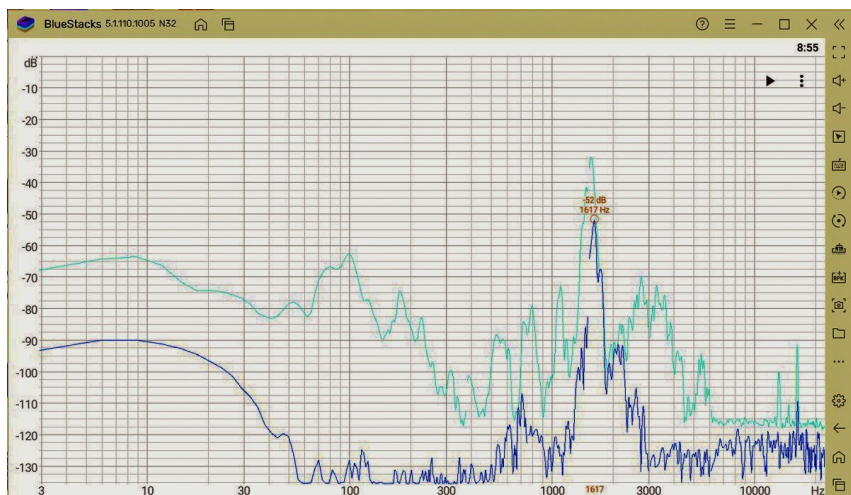
S mobilem, metrem, kalafunou a svěrákem můžeme měřit rychlost zvuku pro ocel, mosaz, hliník i plast. Hodnoty se od tabelovaných liší o jednotky procent. V laboratoři lze uskutečnit rezonanční měření v několik decimetrů dlouhém kovovém vzorku, ve sloupci plynu i v kapalině.

Měření v kovu a plastu s aplikací Spectroid

Mobilní aplikace *Spectroid* je volně dostupná a její předností je okamžité určení dominantní frekvence v záznamu zvuku (obr. 1).

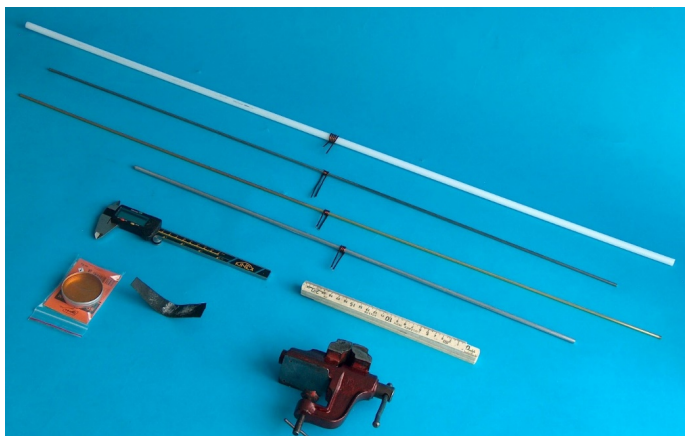
Snímek displeje mobilu byl pro potřeby tisku barevně invertován. Horní křivka (v originále červená) značí závislost hlasitosti na frekvenci pro celý signál, spodní (v originále žlutá) se týká jen dominující frekvence. Zde čteme 1 617 Hz.

Poznámka. Aplikaci Spectroid použila pro měření ve své diplomové práci O. Smetanová (viz [1]). Přesnost aplikace v intervalu 500 Hz až 3 000 Hz je velmi dobrá, odchylky od skutečné frekvence jsou menší než 1 %. Pokud si na PC nebo notebook instalujeme emulátor Androidu BLUESTACKS 5, máme Spectroid na velkém displeji i na dataprojektoru.



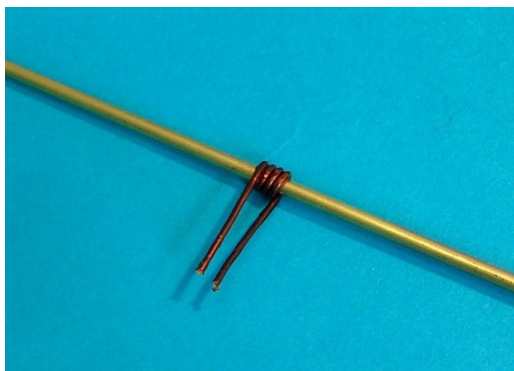
Obr. 1 Měření frekvence aplikací Spectroid

Vybaven mobilem a uvedenou aplikací může kdokoliv i v domácích podmínkách si měřit rychlost šíření zvuku v kovu. Další potřeby k experimentu a měření jsou na obr. 2: čtyři vzorky materiálu (plast s obchodním označením POM C, nerezová ocel, mosaz a hliník), posuvné měřítko a skládací metr, kalafuna na pájení a kousek kůže posypaný kalafunou, svěrák.



Obr. 2 Potřeby pro měření rychlosti šíření zvuku

Pro upnutí do svěráku je vzorek uprostřed ovinut několika závitů měděného drátu; takové upnutí nebrání vzniku podélných kmitů a stojatého vlnění s uzlem uprostřed a kmitnami na koncích vzorku.



Obr. 3 Úprava upnutí středu vzorku

K rozezvučení vzorku použijeme kousek kůže posypané kalafunou. Vhodný přítlak a rychlost posuvu od středu ke konci tyče najdeme po několika pokusech a pak už stačí spustit a zastavit aplikaci *Spectroid*. Výhodou tohoto měření je jednoduché vybavení. Problém je se vzorky, resp. s materiálem, délkou a průměrem vzorku. Vyhovující délky jsou 60 cm až 80 cm, průměr do 10 mm.

Materiál	délka l/m	frekvence f/Hz	rychlost zvuku $v/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$
ocel nerezová	0,877	2 883	5 056
mosaz	0,955	1 852	3 537
hliník	0,636	3 938	5 009
Plast POM C	1,028	686	1 410

Tabulka 1 Měření rychlosti zvuku s aplikací *Spectroid*

Získané hodnoty jsou velmi blízké hodnotám uvedeným v tabulkách pro střední školy [2, 3].

Měření rychlosti šíření zvuku v kovech ještě jednou

Rychlost šíření podélného vlnění a tedy i zvuku byla teoreticky řešena již Newtonem

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$



Obr. 4 Sestava měření v kovu

Přímé měření, kdy je potřeba zjistit dráhu a čas, bylo možné až v 19. století, kdy dlouhá kovová potrubí a světelný signál umožnily takové měření. Do školní laboratoře se s takovým měřením nevejdeme. Řešením mohou být dva piezoelektrické snímače. Z široké nabídky piezoelektrických snímačů byl vybrán typ USC18T. Má odolné duralové pouzdro a maximální přípustný budicí signál s amplitudou 60 V. Jeho rezonanční frekvence je 40 kHz a to je dostatečně daleko od frekvencí použitých pro měření. Jeden použijeme jako vysílač – budič kmitů a druhý jako snímač. Oba jsou gumovou páskou přitisknuty k čelům vzorku kovu. Pro měření byl připraven vzorek – hliníková válcová tyčka o průměru 12 mm a délce 13 cm.

Zdrojem signálu je RC oscilátor BM 365 U a maximum signálu na snímači je měřeno digitálním multimetrem Voltcraft VC 890. Snímek displeje na obr. 5 je dokumentem objektivně získaných dat.



Obr. 5 Snímek displeje při rezonanci frekvenci

Rezonance bylo dosaženo na frekvenci 19,61 kHz a maximum napětí je 1,2349 V. Pro měření bylo vždy na výstupu BM 365 konstantní napětí 10 V. Při opakovaných měřeních se rezonanční napětí měnilo o několik desetin voltu a příčinou, jak se ukázalo, bylo posunutí osy budiče nebo snímače vůči ose duralové tyčky.

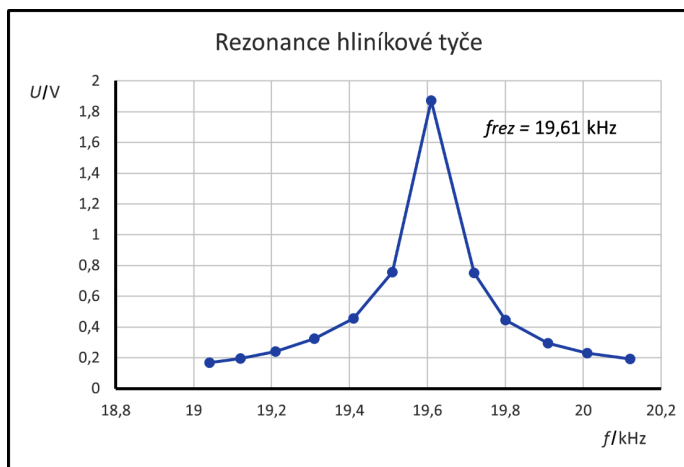
f/kHz	19,04	19,12	19,21	19,31	19,41	19,51
U/V	0,167	0,1941	0,240	0,324	0,456	0,757
f/kHz	19,61	19,72	19,80	19,91	20,01	20,12
U/V	1,872	0,750	0,445	0,294	0,231	0,191

Tabulka 2 Měření rezonance v hliníkovém vzorku

Nalezení rezonanční frekvence je poměrně obtížné kvůli velmi úzké rezonanční křivce – viz graf na obr. 6.

Z grafu je možné přibližně odečíst pološířku rezonanční křivky – asi 0,2 kHz; rezonance je velmi ostrá a hliníková tyčka kmitá podélně s malým tlumením. Výpočet rychlosti šíření je velmi snadný. Délka tyčky

$$l = \frac{\lambda}{2} = 13,0 \text{ cm},$$



Obr. 6 Rezonanční křivka

rychlost zvuku

$$v = f_r \lambda = f_r \cdot 2l = 19,61 \cdot 10^3 \cdot 0,26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 5,0986 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1},$$

zaokrouhleno

$$v = 5,1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Výsledek odpovídá tabelovaným hodnotám.

Měření rychlosti šíření zvuku v kapalině

Pro rychlost šíření podélných kmitů v kapalinách platí vztah podobný Newtonovu vzorci pro pevné látky:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Jeho odvození najdeme např. v knize B. Vybírala [4]. Pro kapaliny platí

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

kde K je tzv. modul objemové pružnosti kapaliny a jde o převrácenou hodnotu stlačitelnosti kapaliny

$$K = \frac{1}{\chi}, \quad \chi = -\frac{\Delta V}{V \Delta p}.$$

První měření ve vodě uskutečnili v roce 1827 Charles Sturm a Jean-Daniel Colladon na Ženevském jezeře. Vzdálenost, kterou urazil zvuk zvonu ponořeného do vody, byla 13 487 m a podobné měření je pro laboratoř neproveditelné. Se dvěma piezoelektrickými snímači a trubicí naplněnou vodou je možné využít rezonanční měření stejně jako v plynu nebo v kovu. Opět byl použit piezosenzor USC18T (obr. 7).

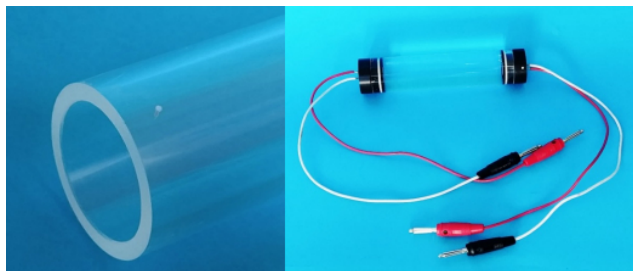


Obr. 7 Snímač USC 18T a zátku se snímačem

Pro měření bylo třeba uzavřít sloupec kapaliny do průhledné plastové trubice. Průhledné proto, aby bylo možné eliminovat přítomnost vzduchových bublin. Řešením je trubice z organického skla; vnější průměr 30 mm, tloušťka stěny 3 mm. Snímače jsou zalepeny do zátek tak, aby kuželová část a kmitající čelo byly volné – epoxid byl nanesen jen na válcový povrch snímače. Dokonalé utěsnění zátky zaručuje O-kroužek. Pro odvod bublinek vzduchu je trubice na jednom konci opatřena odvzdušňovacím kanálkem o průměru 0,6 mm. Ten je umístěn tak, aby při zasunutí zátky na doraz byl kanálek uzavřen O-kroužkem.

Signál s napětím 10 V byl nedostatečný, proto byl použit navíc elektronkový zesilovač Tesla (obr. 9) a napětí bylo zesíleno na 60 V. Rezonance byla i za těchto podmínek nevýrazná.

Výsledek měření: délka sloupce vody $l = 0,103$ m, $f_r = 7,5$ kHz, rychlost šíření $v = 1\,545$ m · s⁻¹, teplota vody $t = 28$ °C.



Obr. 8 Detail odvzdušňovacího kanálku a sestava připravená k měření



Obr. 9 Elektronkový zesilovač Tesla

Při použití delší trubice se sloupcem vody o délce $l = 0,238$ m bylo možné zjistit rezonanční frekvenci sluchem: $f_r = 3\,056$ Hz. Z tohoto měření vychází rychlost šíření $v = 1\,454$ m · s⁻¹, teplota vody $t = 26$ °C.

Pro měření v etanolu byla použita trubice s délkou sloupce kapaliny $l = 0,188$ m, rezonance byla na frekvenci $f_r = 3\,300$ Hz. Výsledek: v etanolu se zvuk šíří rychlostí $v = 1\,241$ m · s⁻¹, teplota etanolu $t = 26$ °C.

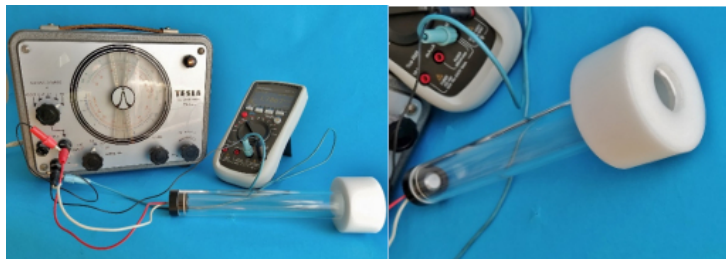
Hodnocení rezonančního měření v kapalině

Při buzení piezoelektrického měniče signálem s napětím 60 V dostáváme na snímači signál s napětím přibližně 0,3 V a při rezonanci se napětí zvýší o 10 % až 20 %. I když výsledky odpovídají tabelovaným hodnotám, je toto měření problematické a pro školní laboratoř nevhodné.

Měření rychlosti zvuku v plynech

Pro měření v plynech byla připravena trubice na jedné straně uzavřená membránou z plastové fólie a na druhé zátkou s piezosenzorem, který byl použit jako budič (obr. 10). Aby po naplnění a uzavření zátkou nevznikal

uvnitř přetlak, má trubice také vyvrtán kanálek.



Obr. 10 Sestava pro plyny, detail uzavření membránou

Délka sloupce plynu od zátky k membráně $l = 19,7$ cm. Rezonanci sloupce plynu hledáme poslechem těsně u membrány. Budič je napájen signálem s napětím 10 V. Při rezonanci je délka trubice rovna n -násobku poloviny vlnové délky a platí

$$l = n \frac{\lambda_n}{2}$$

Pro vlnovou délku použijeme vztah $\lambda_n = v/f_n$, pro výpočet rychlosti použijeme vzorec

$$v = 2l \frac{f_n}{n}.$$

Pořadové číslo rezonance n	Rezonanční frekvence f_r/Hz	Rychlost šíření $v/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$
1	854	336
2	1 658	326
3	2 642	347
4	3 496	344
5	4 359	345

Tabulka 3 Měření ve vzduchu, teplota 22 °C

Průměr $\bar{v} = 340 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, směrodatná odchylka průměru $s = 3,4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Porovnejme rychlost zvuku ve vzduchu získanou měřením s výpočtem rychlosti pro danou teplotu. Vypočtená rychlost pro teplotu 22 °C je $345 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

Trubicí lze snadno plnit plynem s hustotou menší nebo větší než hustota vzduchu. Pro další měření byl použit metan; zdrojem byl plynový vaříč.

Pořadové číslo rezonance n	Rezonanční frekvence f/Hz	Rychlost šíření $v/(\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$
1	1 027	405
2	2 141	422
3	3 158	415
4	4 195	413

Tabulka 4 Metan, teplota 22°C

Porovnejme rychlost zvuku v metanu získanou měřením s rychlostí vypočtenou pro normální atmosférický tlak. Pro metan vypočteme rychlost šíření zvuku ze vzorce

$$v = \sqrt{\kappa \frac{p}{\varrho}}$$

Pro hodnoty $\kappa = 1,31$, $p = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ a $\varrho = 0,72 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ dostáváme $v = 430 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Průměr z měřených rychlostí $\bar{v} = 414 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a směrodatná odchylka průměru je $s = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Závěr

Rezonanční měření rychlosti šíření zvuku je osvědčenou úlohou z akustiky a setkáme se s ním v klasické literatuře, např. [5]. Digitální multimetr a vhodná aplikace v mobilu umožní modernizovat tuto úlohu a dát do rukou studentů současnou techniku.

Literatura

- [1] *Smetanová, O.*: Jednoduchá fyzikální měření s tabletem nebo chytrým telefonem. Diplomová práce, Univerzita Palackého, Olomouc, 2019. Dostupné z: <https://theses.cz/id/w14x06/>.
- [2] *Mikulčák, J. a kol.*: Matematické, fyzikální a chemické tabulky a vzorce pro střední školy. Prometheus, Praha, 2003.
- [3] *Mikulčák, J. a kol.*: Matematické, fyzikální a chemické tabulky pro střední školy. SPN, Praha, 1988.
- [4] *Vybíral, B.*: Kmitání a vlnění. Gaudeamus, UHK, 2014.
- [5] *Strouhal, Č.*: Akustika. Edice Sborník českých matematiků, Praha, 1902.

O zbohatnutí na základě rychlejšího přístupu k informacím

MIROSLAV KOLAŘÍK

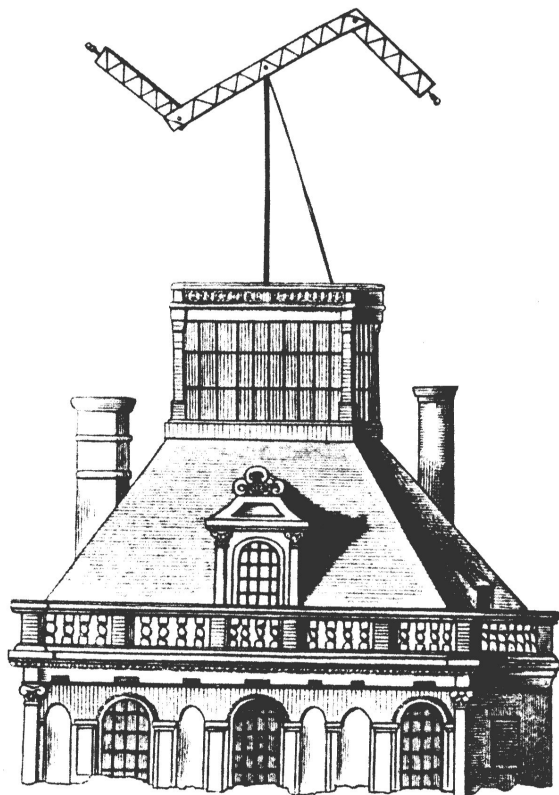
Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Popíšeme dva příběhy, které spolu pojí hlavní myšlenky a burzovní prostředí, ačkoli jsou od sebe časově vzdáleny o více jak 170 let. Společným jmenovatelem je zbohatnutí určité malé skupiny lidí na základě rychlejšího přístupu k informacím. První příběh souvisí s francouzskou vizuální telegrafní sítí a je úzce spjatý s prvním velmi dobře zdokumentovaným virem v síti. Druhý příběh souvisí s vysokofrekvenčním obchodováním a popisuje, jak šlo vybudováním nové datové linky, která byla o několik milisekund rychlejší než ty stávající, vydělat několik miliard amerických dolarů. Oba příběhy jsou zajímavé a obsahují ponaučení, které jistě ocení každý učitel informatiky, který má zájem zatraktivnit svou výuku.

Chappův telegraf

Koncem 18. stol. postupně vyvinul francouzský vynálezce Claude Chappé vizuální komunikační prostředek, později po něm pojmenovaný Chappův telegraf. Jednalo se o systém telegrafních stanic, pomocí kterých byly na velké vzdálenosti přenášeny důležité vládní informace a to mnohem rychleji, než to dokázal cválající kůň. Každá stanice měla signální zařízení, pracovní místnost a odpočívárnu, která byla využívána při špatném počasí a zejména v noci za tmy. Signální zařízení sestávalo ze semaforu se dvěma tyčemi připevněnými na příčném rameni. Celek byl spolu s přidánými železnými závažími vyvážený mechanický systém, který byl pomocí pře-

nosového propojení kabelů a kladek ovládan z pracovní místnosti dvěma táhly, viz obr. 1 převzatý z [1].



Obr. 1. Jedna z mnoha Chappeových telegrafních stanic

Na každé stanici ovládali signální zařízení dva telegrafní operátoři, kteří se v poledne střídali. Byli zodpovědní pouze za přenos signálu, aniž by rozuměli významu přenášené zprávy. S využitím tajné kódové knihy měli kódování a dekódování zpráv na starost výhradně ředitelé klíčových stanic umístěných na křižovatkách a v důležitých městech.

Jednotlivé stanice byly od sebe vzdáleny přibližně 10 až 18 km, přičemž byly vybaveny dvěma vhodnými dalekohledy pro pozorování sousedních stanic. Kromě šesti servisních signálů bylo možno přenášet dalších 92 signálů (viz obr. 2 převzatý z [2]), pomocí kterých vzniklo $92^2 = 8464$ kó-

dových slov¹⁾, která byla zapsána do tajné kódové knihy, ke které měli přístup ředitelé Chappeových stanic.

↗	↖	↘	↙	┌	┐	└	┘	↖	↗	↘	↙	┌	┐	└	┘
1	2	3	4	5	6	7	8	47	48	49	50	51	52		
↗	↖	↘	↙	┌	┐	└	┘	↖	↗	↘	↙	┌	┐	└	┘
9	10	11	12	13	14	15	16	53	54	55	56	57	58		
↗	↖	↘	↙	┌	┐	└	┘	↖	↗	↘	↙	┌	┐	└	┘
17	18	19	20	21	22	23	24	59	60	61	62	63	64		
↗	↖	↘	↙	┌	┐	└	┘	↖	↗	↘	↙	┌	┐	└	┘
25	26	27	28	29	30	31	32	65	66	67	68	69	70		
↗	↖	↘	↙	┌	┐	└	┘	↖	↗	↘	↙	┌	┐	└	┘
33	34	35	36	37	38	39	40	71	72	73	74	75	76		
↗	↖	↘	↙	┌	┐	└	┘	↖	↗	↘	↙	┌	┐	└	┘
41	42	43	44	45	46			77	78	79	80	81	82		
								↖	↗	↘	↙	┌	┐	└	┘
								83	84	85	86	87	88		
								↖	↗	↘	↙	┌	┐	└	┘
								89	90	91	92				

Obr. 2. Ukázka 92 poloh signalizační části Chappeova telegrafu

Doplňme ještě, že v roce 1844 křižovalo francouzské území 534 stanic, které vizuálně spojovaly důležitá města na trasách dlouhých přes 5 000 km. Následující rok byla mezi Paříží a Rouen instalována první elektrická telegrafní linka využívající Morseovu abecedu, která postupně nahradila celou Chappeovu telegrafní síť.

První hackerský útok

V letech 1834 až 1836 byl Chappeův telegraf používán za účelem zisku. Koncept vymyslel bývalý ředitel lyonského telegrafu Pierre Renaud. Ten kontaktoval bratry Françoise a Louise Blancovy, kteří pravidelně obchodovali na burze v Bordeaux. Využili Chappeův telegraf tak, aby se dozvěděli o významném pohybu akcií na pařížské burze dříve, než se tato informace standardně dostala do banky v Bordeaux. Jelikož se burza v Bordeaux

¹⁾Každé kódové slovo definovaly dva po sobě jdoucí signály, které odkazovaly na jednu z 92 stran kódové knihy a na právě jeden z 92 řádků uvedených na dané straně. Samozřejmě byla zajištěna i možnost, jak posílat jednotlivá písmena abecedy i některé nejčastěji používané kombinace písmen.

řídila cenami pařížské burzy, věděli tak dopředu, zda je výhodné vybrané akcie nakoupit, nebo prodat.

K velkému jmění přišli díky zneužití způsobu, jak se Chappeův telegrafní systém vypořádával s chybami. Když telegrafní operátor udělal chybu, poslal ihned servisní kód s významem smazat. Zpráva se spolu s chybou šířila od stanice ke stanici, až na konec linky, kde ji tamní ředitel dekodoval, přičemž rutinně vymazal všechny znaky, které bezprostředně předcházely signálu o chybě. Podplacený ředitel tak mohl do zprávy snadno začlenit předem domluvený krátký virový kód a hned za ním servisní kód pro jeho smazání. Vzhledem k tomu, že ramena telegrafu mohl sledovat prakticky kdokoli, nebyl pro bývalého ředitele lyonského telegrafu Pierre Renauda problém danou sekvencí s virem rozpoznat a zařídit se podle ní.

Bratři Blancovi s Pierrem Renaudem museli vyřešit ještě jeden problém. Telegrafní linka totiž nevedla přímo z Paříže do Bordeaux. Zastavovala se ve stanici v Tours, kde probíhalo dekódování zpráv a jejich následné posílání do Bordeaux. Virus vyslaný z Paříže by se tak do Bordeaux nedostal, neboť by byl v Tours vyřazen. Vzhledem k tomu, že poštovnímu jezdcí trvalo tři dny doručit dopis s informacemi o aktuálních cenách na pařížské burze na burzu v Bordeaux, stačilo jim postupovat následovně. Nejprve bratři Blancovi podplatili ředitele a telegrafního operátora v Tours. V Paříži pak chodil denně jejich komplic na burzu a soustředil se na předem domluvené akcie. Když došlo ke změně jejich ceny o více než tři procenta, poslal komplic manželce vedoucího v Tours balíček: ponožky, pokud cena významně klesla a rukavice, pokud cena významně vzrostla. Balíčky nebudily podezření o nekalé činnosti, protože manželka ředitele v Tours provozovala galanterii a takové věci běžně prodávala. Ihned po obdržení balíčku zařadil ředitel odpovídající posloupnost do zprávy a telegrafní operátor ji odeslal. V Bordeaux pak v pronajatém pokoji s výhledem na místní Chappeovu stanici na tuto posloupnost trpělivě čekal Pierre Renaud, který všechny potřebné kódy dobře znal. Příslušnou relevantní informaci poté předal bratrům Blancovým, kteří tak získali dvoudenní náskok před ostatními. V klidu tak vybrané akcie buď výhodně nakoupili, nebo výhodně prodali.

Neobvykle velké štěstí bratrů Blancových vedlo k podezření, přesto jejich postup nebyl odhalen. Na podvod se přišlo až po smrti telegrafního operátora v Tours, který těsně před úmrtím vše sdělil svému kamarádovi, kterému doporučil, aby nastoupil na jeho místo. Ředitel jej však na pozici telegrafního operátora nepřijal a on vše prozradil policii. Bratři Blancovi

byli obžalováni a postaveni před soud. Nakonec ale byli zproštěni viny, protože v té době žádný zákon nezakazoval soukromé využití Chappeeovy sítě, přestože byla síť do té doby využívána výhradně vládou. Ředitel z Tours dostal výpověď. Skutečným hackerem v tomto případě byl bývalý lyonský ředitel, který sledoval ramena telegrafu z bezpečné vzdálenosti, celý plán vymyslel a zašel s ním za bratry Blancovými. Bylo to od něj mazané nebo podlé?

Budování nového spojení optickým kabelem

Ve druhém příběhu se přesuneme do 21. století. Podstatné v něm je, že od roku 2007 začaly místo lidí realizovat burzovní obchody zejména počítače. Od té doby začaly hrát při obchodování velkou roli už i milisekundy. Signálu tehdy trvalo dorazit z Chicaga do New Yorku přibližně 16 milisekund. Jistý obchodník, pan Spivey, si prostudoval mapy a zjistil, že datová trasa vedená přes Alleghenské pohoří, tedy přes horský masiv tvořený z velmi tvrdého vápence, by byla o cca 3 milisekundy rychlejší a hodlal na tomto faktu vydělat hodně peněz. V nejvyšší možné míře utajení začal tuto novou trasu budovat. V mezích zákona naplánoval co nejpřímější spojení. K realizaci tohoto projektu, jehož náklady Spivey odhadl na 300 miliónů dolarů, přemluvil Jima Barksdalea – bývalého generálního ředitele Netscape Communication. Do projektu se zapojil i Barksdaleův syn, který nenápadně vyřídil zhruba 400 potřebných dohod s dotčenými obcemi a okresy, přes něž měla nová optická linka vést. Nakonec se jim podařilo celý projekt udržet v tajnosti a vybudovat linku měřící účtyhodných 1 330 km. S jejím pronájmem pak neměli žádný větší problém a vydělávali na ní několik miliard dolarů ročně. Mezi kupci byli zejména významní a bohatí makléři zaměřující se na vysokofrekvenční obchodování.²⁾

Stručně o vysokofrekvenčním obchodování a současném hardwarovém řešení

Vysokofrekvenční obchodování (HFT, high-frequency trading) je algoritmické obchodování, jehož nejtypičtějším znakem je velmi vysoká frekvence pokynů pro obchodování na burze. Zisk je po malých částkách realizován z obrovského množství enormně rychlých nákupů (nejčastěji obchodovaných aktiv) a jejich bezprostředních prodejů. Aby někdo mohl na

²⁾Nejedná se zdaleka o jediný případ tohoto druhu, kvůli několika milisekundám se vyplatilo i položení nových kabelů na dna moří a oceánů.

HFT vydělat, musí vlastnit velmi vyspělou technologii a mít velmi rychlé spojení s burzou. Následné vydělávání peněz na pomalejších obchodnících už je relativně snadné. HFT makléři monitorují trh a v okamžiku, kdy jejich systémy zachytí (nebo předem odhadnou), že někdo usiluje o koupi akcií, předběhnou jej a nakoupí před ním. Tím se navýší cena těchto akcií a oni je poté prodají s drobným ziskem. Vzhledem k tomu, že kupující udávají intervaly, ve kterých jsou za akcie ochotni zaplatit, malé navýšení ceny snadno projde. Běžní obchodníci samozřejmě chtějí, aby byl tento „parazitní“ způsob vydělávání peněz zakázán. Není divu, neboť ti nejrychlejší HFT makléři a jejich firmy vydělávají ročně více než miliardu amerických dolarů. Navrhovaným řešením je přesun kapitálových trhů na cloudové platformy, které je však třeba pro účely velmi rychlého a spravedlivého obchodování nejprve vhodně navrhnout a otestovat.

V dnešní době se některé firmy zaměřují na snížení doby při počítačovém zpracování obchodu, přičemž jim jde dokonce o pouhé nanosekundy. Čas šetří například tím, že zpracovávané informace neprocházejí přes síťovou kartu do paměti počítače, odkud si je bere ke zpracování procesor. Místo toho má síťová karta na sobě zabudovaný programovatelný čip, díky čemuž nemusí posílat datový paket do procesoru a zpátky. Zpracování datového paketu totiž vyhodnotí čip na síťové kartě tak, že se na něj přímo podívá, spustí příslušnou strategii a okamžitě odešle odpověď. Strategii může být například rozhodování na základě posledních kurzů několika různých předem vybraných aktiv, nebo třeba algoritmické hledání nesrovnalostí na trhu, jako jsou rozdílné ceny stejného aktiva na různých trzích. Rychlost je v tomto případě klíčová, neboť obchodní příležitosti tohoto typu velmi rychle zanikají. Navíc je z dané transakce obvykle zisk poměrně malý, takže je pro obchodníka důležité, aby těchto transakcí realizoval co nejvíce.

Literatura

- [1] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/eb/Chappe_telegraf.jpg?uselang=cs
- [2] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/9/9d/Chappe_code_-_c._1809.svg
- [3] *Berloquin, P.*: Hidden Codes & Grand Designs: Secret Languages From Ancient Times To Modern Day. Union Square & Co., 2010.
- [4] *Lewis, M.*: Flash Boys: A Wall Street Revolt. W. W. Norton & Company, 2015.

Krájení pizzy

(Úlohy z MO kategorie P, 45. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V dnešním dílu seriálu o zajímavých programátorských problémech z Matematické olympiády kategorie P se seznámíme s jednou praktickou úlohou z domácího kola 56. ročníku MO (školní rok 2006/07). Jedná se o úlohu poměrně snadnou a v olympiádě poněkud neobvyklou. Je to úloha optimalizační, k jejímuž vyřešení ale nepotřebujeme žádné zvláštní znalosti algoritmů. Úplně nám postačí jednoduchá logická úvaha a „hladový“ přístup k řešení problému. Ve druhé části článku se pak seznámíme s trochu obtížnější variantou úlohy, která bude na první pohled vypadat odlišně, ale k řešení použijeme prakticky stejný postup.

Nejprve se jako obvykle seznámíme s přesným zadáním úlohy. Některé jeho formulace jsme pro potřeby článku trochu upravili, aniž bychom tím ovšem změnili smysl úlohy.

* * * * *

Marco se rozhodl, že zužitkuje své kulinářské i cyklistické dovednosti a založí si firmu pro výrobu a rozvoz pizzy. Firmu plánuje provozovat tak, že vždy nejdříve bude shromažďovat objednávky a když jich bude dostatek, tak pizzy upeče, sedne na kolo a rozveze je zákazníkům. Protože Marco je lepší cyklista než kuchař, zatím ve své nabídce plánuje pouze jeden druh pizzy. Aby se ale odlišil od konkurence, přijímá objednávky i na šestinové části pizzy. Lze si u něj objednat například $1/6$, $4/6$ nebo $15/6$ pizzy. Navíc jako speciální službu zákazníkům chce Marco dodat každému zákazníkovi pizzy co nejméně rozřezané, aby si zákazník sám mohl rozhodnout, jak si dále pizzu rozdělí. Proto například $4/6$ pizzy chce dodat jako jeden kus příslušné velikosti a $15/6$ chce dodat jako dvě celé pizzy a k nim jednu polovinu pizzy. Marco chce vždy dodat co nejvíce pizz vcelku, takže uspokojení této objednávky například třemi kusy velikosti $5/6$ nepřipadá v úvahu.

Když Marco všude rozdál letáky propagující jeho novou firmu, uvědomil si, že díky jeho speciální službě zákazníkům není jednoduché zkombinovat

objednávky tak, aby mu moc kusů pizzy nezbylo. Obrátil se proto na vás, abyste mu napsali program, který by mu s problémem pomohl. Pro začátek bude stačit program, který na vstupu dostane seznam objednávek a na výstup vypíše, kolik pizz má Marco napéct.

Formát vstupu

Na vstupu se nachází n kladných celých čísel, z nichž každé popisuje jednu objednávku a udává počet objednaných šestin pizzy.

Formát výstupu

Program vypíše jedno celé číslo p , které značí nejmenší možný počet pizz, které je třeba upéct, aby šlo splnit všechny objednávky a byla dodržena výše uvedená speciální služba zákazníkům.

Příklad 1

Vstup:	Výstup:
2 2 3	2

Vysvětlení: Z jedné pizzy lze například uříznout dva kusy o velikosti $2/6$ a z druhé pizzy se uřízne kus velký $3/6$.

Příklad 2

Vstup:	Výstup:
4 5 3	3

Vysvětlení: Kvůli požadavku na dodání co nejméně rozřezaných kousků pizzy je třeba pro každou objednávku upéct celou pizzu.

* * * * *

Hned při čtení vstupních dat můžeme snadno určit, kolik budeme celkově zákazníkům doručovat celých pizz a také potřebné počty kusů jednotlivých velikostí $1/6$, $2/6$, $3/6$, $4/6$ a $5/6$. Z těchto údajů pak spočítáme výsledný počet pizz p .

Na doručovaných celých pizzách není co řešit, ty do počtu p samozřejmě musíme započítat. Dílčí kusy pizzy budeme nyní zpracovávat podle velikosti od největších k nejmenším. Pro každý kus velký $5/6$ potřebujeme zjevně upéct jednu celou pizzu. Po každém kusu velkém $5/6$ zbude jeden kousek velký $1/6$ a tyto kousky použijeme na pokrytí objednávek na kousky této velikosti. Pokud je těchto zbytků velkých $1/6$ více, než kolik vyžadují objednávky, nezbyvá nám než přebývajících kousků $1/6$ vyhodit.

Pro objednané kusy velké $4/6$ je situace podobná jako pro kusy velké $5/6$. Pro každý z nich opět potřebujeme upéct jednu další celou pizzu a zbytky velikosti $2/6$ použijeme na pokrytí objednávek na kusy velké $2/6$. Je-li takových objednávek málo, tak některé zbytky velké $2/6$ ještě rozřežeme a použijeme na pokrytí objednávek na kousky velikosti $1/6$, pokud nějaké zbývají. Zjevně je výhodnější přednostně uspokojit objednávky na velikost $2/6$ a až pak na velikost $1/6$, protože kousek veliký $1/6$ můžeme z libovolně velkého kusu odříznout vždy.

Nyní se dostáváme k objednávkám na kusy velikosti $3/6 = 1/2$. Objednávky na části pizzy velikosti $1/2$ vyřešíme tak, že vždy jednu pizzu rozdělíme na dvě poloviny. Pokud je počet takových objednávek lichý, zbude nám jedna polovina pizzy. Tu rozdělíme na jeden kousek velikosti $2/6$ a jeden kousek velikosti $1/6$, s nimiž naložíme stejně, jak jsme právě popsali.

Jestliže nám nyní ještě zbyly nějaké nevyřízené objednávky na kusy velké $2/6$ (což je $1/3$), budeme péct další pizzy a dělit je na třetiny. Případný zbytek po pokrytí všech objednávek na $2/6$ pak použijeme na zbývajících objednávkách kousků velikosti $1/6$. Pokud nakonec zůstaly ještě nevyřízené objednávky na kousky velikosti $1/6$, upečeme ještě další pizzy na jejich pokrytí.

Uvedený postup můžeme ještě značně zjednodušit. Nejprve napočítáme pizzy potřebné pro správné vyřízení objednávek na kusy velikosti $5/6$ a $4/6$ a jejich zbytky použijeme na vyřízení objednávek $1/6$ a $2/6$, jak je popsáno výše. Dále ale už stačí sečíst velikost všech objednaných kusů velikosti $3/6$ a dosud nevyřízených objednávek na kusy velikosti $2/6$ a $1/6$. Tím zjistíme, kolik dalších pizz musíme ještě upéct pro vyřízení všech těchto objednávek. Výslednou hodnotu p tedy zvýšíme o horní celou část získaného součtu.

Popsané zjednodušení si můžeme dovolit proto, že zpracování všech objednávek na kousky $3/6$ a zbývajících objednávek na kousky $2/6$ a $1/6$ je téměř bezztrátové. Pokud je objednávek na kusy $3/6$ sudý počet, pak všechny další pizzy plně využijeme na kousky $2/6$ a $1/6$ bez ohledu na to, kolik je objednáno kterých, až z úplně poslední pizzy nám může něco zbýt (nejvýše $5/6$). Pokud je objednávek na kusy $3/6$ lichý a zbývá alespoň jedna nevyřízená objednávka $1/6$, odkrojíme tuto objednanou jednu $1/6$ ze zbývajících polovin pizzy a tím převedeme situaci na předchozí případ. Maličko složitější situace nastane jedině v případě, že počet objednávek na kusy velikosti $3/6$ je lichý a již nezbývá žádná nevyřízená objednávka na kousek $1/6$. V takovém případě nám od poslední objednané poloviny

pizzy zůstane lichá polovina, z níž ukrojíme kousek velikosti $2/6$ a pro zbývající $1/6$ již nemáme využití. Zbývající objednávky kousků velikosti $2/6$ budeme již vyřizovat z dalších pizz. I v tomto případě ovšem funguje náš zjednodušený postup výpočtu a také i v tomto případě bude platit, že nám nakonec zbude nejvýše $5/6$ pizzy.

Algoritmus má lineární časovou složitost vzhledem k počtu objednávek n , neboť každou objednávku musíme zpracovat a určit počty objednaných kusů jednotlivých velikostí. Další výpočet už má časovou složitost konstantní, nezávislou na n . Prostorová složitost algoritmu je rovněž konstantní, při výpočtu nepotřebujeme žádnou datovou strukturu velikosti n , vystačíme jen s konstantním počtem pracovních proměnných.

Ukázkový program v Pythonu je jen přímým přepsáním výše uvedených úvah o dělení pizzy a je překvapivě krátký:

```
vstup = [int(_) for _ in input().split()]

obj = [0] * 6          # počty objednávek
p = 0                  # výsledný počet pizz
for x in vstup:
    p += x // 6         # počet celých pizz v objednávkách
    obj[x % 6] += 1     # počty objednaných kousků pizzy

p += obj[5] + obj[4]
obj[1] -= obj[5]
obj[2] -= obj[4]
if obj[2] < 0:
    obj[1] += 2 * obj[2]
    obj[2] = 0
if obj[1] < 0:
    obj[1] = 0

z = 3 * obj[3] + 2 * obj[2] + obj[1]
p += z // 6
if z % 6 > 0:
    p += 1

print(p)
```

Ve druhé části článku si ukážeme ještě jednu úlohu, která na první pohled sice vypadá odlišně, ale při jejím řešení použijeme naprosto shodný postup. Zatímco krájení pizz na kousky je vlastně dělením kruhů na kru-

hové výseče a probíhá tedy v dvourozměrné rovině, nyní budeme skládat krychlové krabice do přepravních palet a tím se přesuneme do trojrozměrného prostoru. Správné řešení tak od nás bude vyžadovat i trochu prostorové představivosti. Začneme jako obvykle zadáním problému.

* * * * *

Továrna expeduje své výrobky v krabicích tvaru krychle. Používá šest velikostí krabic o hraně délky 20 cm, 40 cm, 60 cm, 80 cm, 100 cm a 120 cm. Zabalené výrobky se odvázejí v přepravních paletách, které mají tvar krychle o hraně 120 cm. Vstupem programu je šest nezáporných celých čísel, která představují počty jednotlivých druhů krabic připravených na odvoz, a to v pořadí od nejmenších krabic po největší. Určete, jaký minimální počet palet je třeba použít k odvozu všech těchto krabic s výrobky. Krabice se při ukládání do palet nesmějí nijak deformovat. Výsledkem výpočtu bude jedno celé číslo představující počet potřebných palet.

Příklad

Vstup:

3 0 0 2 0 1

Výstup:

3

Vysvětlení: Chceme odvézt 3 krabice o hraně 20 cm, 2 krabice o hraně 80 cm a 1 krabici o hraně 120 cm, žádné krabice zbývajících tří velikostí se neodvázejí.

K odvozu těchto krabic jsou zapotřebí tři palety. Největší krabice zcela zaplní samostatnou paletu, všechny zbývající krabice by se z hlediska svého objemu vešly do jedné další palety, ale protože se nesmějí deformovat, musíme použít ještě dvě palety.

* * * * *

Řešení tohoto problému do značné míry kopíruje postup, který jsme si popsali při rozboru předchozí úlohy s krájením pizzy. Krabice budeme opět zpracovávat v pořadí od největších k nejmenším, počty těchto přepravovaných krabic označíme postupně p_6, p_5, p_4, p_3, p_2 a p_1 . V proměnné p budeme počítat minimální nezbytné množství přepravních palet.

Pro každou krabici velikosti 120 cm jistě potřebujeme samostatnou paletu, kterou tato krabice zcela zaplní. Pro každou krabici velikosti 100 cm potřebujeme také novou paletu. Když do ní krabici vložíme, zůstane při jejích třech sousedních stěnách volný prostor, který můžeme využít jedině

na nejmenší krabice velikosti 20 cm. Těchto malých krabice se tam vejde 91. U jedné stěny totiž bude $6 \times 6 = 36$ krabic, kvůli společné hraně u druhé stěny zbývá místo na $6 \times 5 = 30$ krabic, konečně u třetí stěny vzhledem ke společným hranám s oběma předchozími stěnami umístíme ještě dalších $5 \times 5 = 25$ krabic. Tuto „volnou kapacitu“ v existujících paletách využitelnou pro krabice velikosti 20 cm si označíme x_1 .

Podobné je to s krabicemi velikosti 80 cm. Pro každou z nich potřebujeme založit novou paletu a v ní nám zbude volný prostor pro 19 krabic velikosti 40 cm. Žádnou větší krabici tam umístit nemůžeme. Naopak místo kterékoliv krabice velikosti 40 cm můžeme dát 8 malých krabic velikosti 20 cm, což možná časem uděláme v závislosti na konkrétních vstupních datech. Přednostně se ale budeme snažit umístit do existujících palet větší krabice 40 cm. Když už nebudeme žádné mít, nezaplněný prostor vždy můžeme využít pro případné zbývající krabice 20 cm. Zavedeme si označení x_2 pro volnou kapacitu v existujících paletách využitelnou pro krabice velikosti 40 cm. Zatím tedy máme $p_6 + p_5 + p_4$ nezbytných palet, do nichž jsme umístili všechny krabice velikosti 120 cm, 100 cm a 80 cm. V těchto paletách nám zůstal volný prostor pro x_2 krabic velikosti 40 cm a ještě pro dalších x_1 krabic velikosti 20 cm.

Nejvíce práce budeme mít s krabicemi velikosti 60 cm. Ty můžeme krásně skládat do palet vždy po osmi, osm těchto krabic paletu zcela zaplní. Pokud ale počet x_3 není dělitelný osmi, zůstane nám nakonec jedna částečně zaplněná paleta. V ní bude volný prostor, do kterého se snažíme přednostně umístit co nejvíce krabic velikosti 40 cm a pak zbytek místa vyplnit krabicemi velikosti 20 cm. V tuto chvíli nemůžeme udělat nic lepšího, než si předem určit v závislosti na hodnotě zbytku p_3 po dělení osmi, jak se nám navýší volná kapacita x_1 a x_2 díky této poslední ne zcela zaplněné paletě. Určení těchto hodnot vyžaduje trochu prostorové představivosti, konkrétní číselné hodnoty najdete v přiloženém programu v seznamu x .

Zbytek řešení je pak již snadný. Porovnáme počet p_2 přepravovaných krabic velikosti 40 cm s volnou kapacitou x_2 a je-li vyšší, umístíme co největší počet krabic 40 cm do existujících palet. Pokud je hodnota p_2 nižší než x_2 , umístíme do stávajících palet všechny krabice 40 cm a zbývající nevyužitý prostor v paletách $x_2 - p_2$ dáme k dispozici pro krabice 20 cm. To znamená, že volnou kapacitu x_1 můžeme zvýšit o $(x_2 - p_2) \times 8$. Následně porovnáme počet p_1 přepravovaných krabic velikosti 20 cm s volnou kapacitou x_1 a je-li vyšší, opět umístíme co největší počet krabic 20 cm do existujících palet. Je-li hodnota p_1 nižší než x_1 , umístíme do stávajících

palet všechny krabice 20 cm. Nakonec se podíváme, zda nám zbyly ještě nějaké neumístěné krabice velikosti 40 cm nebo 20 cm. Pokud ano, spočítáme jejich celkový objem a z něj už snadno odvodíme počet palet, které pro tyto krabice musíme ještě přidat.

Popsaný algoritmus má konstantní časovou i prostorovou složitost. Nepotřebujeme v něm provádět žádné cykly, jejichž počet opakování by závisel na počtu přepravovaných krabic, nepotřebujeme ani žádnou datovou strukturu této velikosti. Ukázkový program v jazyce Python je jen přímou implementací popsaného postupu řešení. Podobně jako u úlohy s dělením pizzy je velmi jednoduchý a krátký.

```
p1, p2, p3, p4, p5, p6 = [int(_) for _ in input().split()]
# v pořadí krabice velikosti
# 20 cm, 40 cm, 60 cm, 80 cm, 100 cm, 120 cm

p = p6 + p5 + p4 + p3 // 8 # potřebný počet přepravních palet
if p3 % 8 > 0:
    p += 1

x = ((0,0),(37,19),(42,15),(47,11),(36,9),(41,5),(30,3),(19,1))
# navýšení volné kapacity (x1,x2) v závislosti na hodnotě p3 % 8

x1 = p5 * 91 + x[p3 % 8][0]
# volná kapacita pro krabice velikosti 20 cm
x2 = p4 * 19 + x[p3 % 8][1]
# volná kapacita pro krabice velikosti 40 cm

if p2 >= x2:
    p2 -= x2
else:
    p2, x1 = 0, x1 + (x2 - p2) * 8
if p1 >= x1:
    p1 -= x1
else:
    p1 = 0

z = p2 * 8 + p1
p += z // 216 # do palety se vejde 216 krabic velikosti 20 cm
if z % 216 > 0:
    p += 1

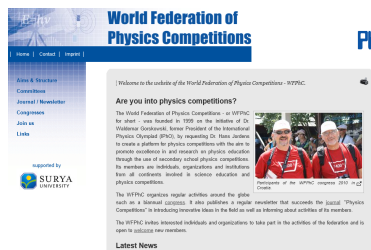
print(p)
```


ZPRÁVY

WFPhC a její konference 2022



WFPhC je zkratkou pro *World Federation of Physics Competitions*, česky *Světovou federaci fyzikálních soutěží*. Založena byla již v roce 1999 a dnes sdružuje zhruba 100 národních a mezinárodních soutěží z padesáti států. Velká část zapojených organizací má nějakou návaznost na Mezinárodní fyzikální olympiádu (IPhO – International Physics Olympiad) či Turnaj mladých fyziků (IYPT – International Young Physics Tournament). Jsou zde ale zastoupené i další fyzikální soutěže. Domácí webové stránky WFPhC jsou v současnosti <http://wettbewerb-alt.ipn.uni-kiel.de/ipho/wfphc/>.



Webová stránka WFPhC

Českou republiku v organizaci zastupují česká Fyzikální olympiáda, Tur-

naj mladých fyziků a Fyzikální korespondenční seminář se svými přidruženými soutěžemi (Fyziklání, Fyziklání Online, Fyzikální Náboj).

Dříve WFPhC vydávala pravidelně recenzovaný časopis, v posledních letech vychází zpravodaj s články o soutěžích. Historické články (v angličtině) můžete nalézt na <http://wettbewerb-alt.ipn.uni-kiel.de/ipho/wfphc/journal.html>.

Konference WFPhC 2022

Jednou z hlavních aktivit WFPhC je konference, která je obvykle pořádána jednou za dva roky v různých místech, například v Indonésii, Nizozemsku či naposledy v roce 2018 ve Vídni v Rakousku.



Z konference WFPhC r. 2018 ve Vídni

V roce 2020 nemohla být konference uskutečněna kvůli pandemii Covid-19, a tak byla nejdříve odložena a nakonec i přesunuta do on-line prostoru. Konference proběhla 27. září 2022 od 9.00 do 16.30 prostřednictvím platformy Zoom. Součástí programu bylo

7 příspěvků o soutěžích, jejich historii, podpoře žáků a studentů v jejich rozvoji i to, jak soutěže ovlivnila koronavirová pandemie.



V rámci konference 2018 ve Vídni bylo možné si vyzkoušet i některé experimentální úlohy z vrcholných kol soutěží

Závěrem konference proběhla valná hromada, na které bylo zvoleno nové vedení WFPhC, přičemž došlo k větší

obměně vedení, v němž posílilo zastoupení střední Evropy. Do hlavních pozic byli zvoleni:

- prezident: Martin Plesch (Slovensko, prezident IYPT),
- viceprezident: Dina Izadi (Írán),
- viceprezident: Stefan Petersen (Německo),
- tajemník: Sandu Golcea (Rumunsko),
- pokladník: Karel Kolář (ČR).

Význam organizace

Byť se může zdát, že organizace v dnešní době není tak aktivní jako dříve a že z našeho národního hlediska nejde o organizaci, která by měla přímý dopad na naši scénu, ale v rámci mezinárodního prostředí jde o jedinečnou organizaci, v jejímž rámci mohou organizátoři sdílet své zkušenosti. V případě potřeby je navíc jedinou zastřešující organizací, která by mohla mluvit za takto vysoké počty soutěží, kterých se účastní minimálně stovky tisíc, ale pravděpodobně i více účastníků ročně.



Předávání ceny WFPhC pro zasloužilé organizátory fyzikálních soutěží, z konference 2018 ve Vídni

Karel Kolář