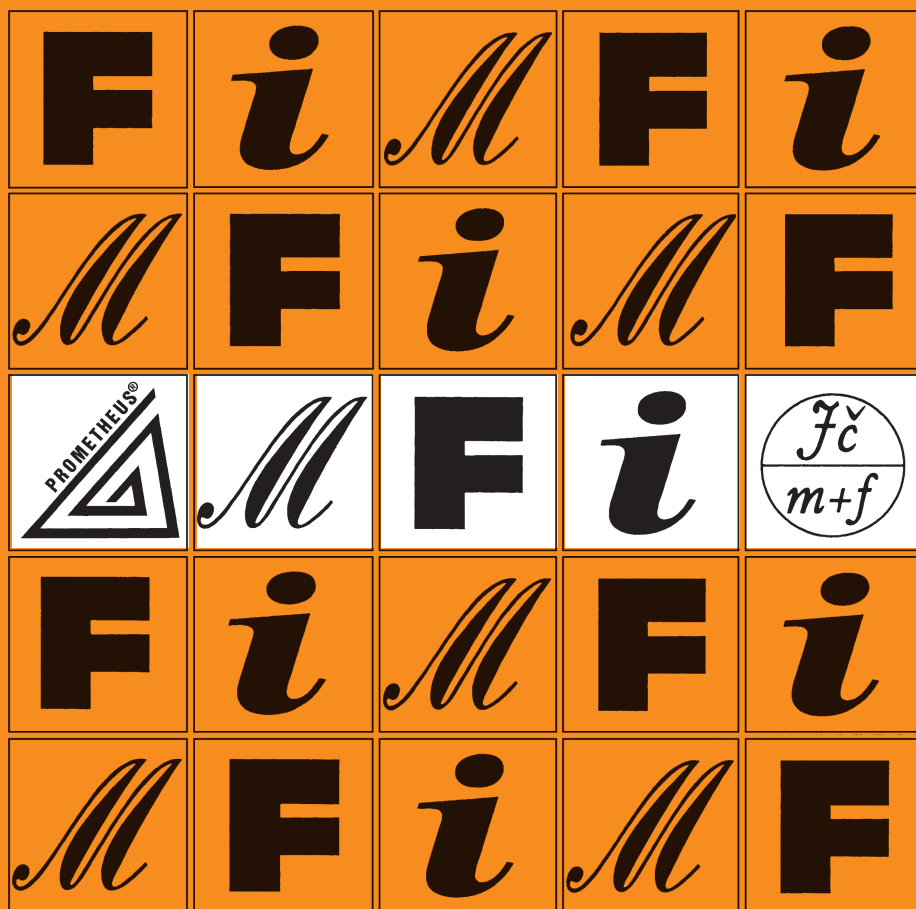


# MATEMATIKA 3 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



# MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách  
Ročník XXXIII (2024), číslo 3

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

## Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku  
Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek  
Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

## Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška,  
Karel Kolář, Michaela Křížová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil (předseda redakční rady),  
Dana Mandíková, Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Jaromír Šimša,  
Pavel Tlustý, Pavel Töpfer, Jaroslav Zhouf

## Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

## Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

## OBSAH

### MATEMATIKA

<i>M. Jukl, L. Juklová:</i> K obsahům pravoúhelníků opsaných elipse . . . . .	161
<i>J. Robová:</i> Rozvíjení znalostí žáků s podporou GeoGebry . . . . .	167
<i>V. Vaněk:</i> Číselně-teoretické úlohy v Matematickém klokanovi . . . . .	177
Zajímavé matematické úlohy . . . . .	186

### FYZIKA

<i>T. Sukeřová, K. Velmovská:</i> Stimulácia žiakov k experimentálnej činnosti prostredníctvom učebných aktivít . . . . .	190
<i>V. Štefl:</i> Skrytý význam druhého ohniska eliptické dráhy Měsíce . . . . .	197
<i>G. Kaufnerová:</i> Myšlenkové mapy a jejich aplikace ve výuce termiky na ZŠ . . . . .	204

### INFORMATIKA

<i>P. Töpfer:</i> Jedničkový obdélník (Úlohy z MO kategorie P, 48. část) . . . . .	217
<i>E. Bartl:</i> Počítačová grafika, 5. díl . . . . .	228

### ZPRÁVY

<i>P. Calábek:</i> 12. ročník CPSJ . . . . .	235
<i>L. Kopfová, D. Koževnikov:</i> 65. ročník Mezinárodní matematické olympiády . . . . .	237

## K obsahům pravoúhelníků opsaných elipse

MAREK JU KL – LENKA JUKLOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V tomto článku se budeme zabývat dvěma extrémními vlastnostmi pravoúhelníků opsaných dané elipse (v eukleidovské rovině) tak, že každá z jejich stran se dotýká dané elipsy. Zaměříme se zde na otázku, jak prostředky elementární matematiky určit, který z pravoúhelníků opsaných elipse má *největší*, resp. *nejmenší* obsah.<sup>1)</sup>

Jak známo, ke každé elipse existuje kartézská soustava souřadnic, v níž je dána rovnicí

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

kde  $a, b$  jsou kladná reálná čísla ( $a \neq b$ ; neuvažujeme speciálně kružnice).

Dále uvažujeme přímku  $t$  zadanou rovnicí ve směrnicovém tvaru

$$t: y = kx + q, \quad (2)$$

kde  $k, q$  jsou reálná čísla,  $k \geq 0$ . Protože hledáme pravoúhelník opsaný elipse, určíme  $q$  tak, aby přímka  $t$  byla tečnou elipsy (tehdy má na přímce  $t$  smysl hledat stranu takového pravoúhelníku).

Rovnici (1) upravíme do tvaru  $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$  a z rovnice (2) dosadíme za  $y$ . Dostaneme tak

$$b^2x^2 + a^2(k^2x^2 + 2kqx + q^2) - a^2b^2 = 0,$$

---

<sup>1)</sup>Pro úplnost dodejme, že elementárními prostředky lze snadno nalézt pravoúhelník elipse *vepsaný* s maximálním, resp. minimálním obsahem (viz [1]).

odkud po úpravě obdržíme následující kvadratickou rovnici o neznámé  $x$

$$(b^2 + k^2 a^2)x^2 + 2kqa^2x + a^2(q^2 - b^2) = 0. \quad (3)$$

Přímka je tečnou elipsy, právě když má s elipsou společný právě jeden bod. To nastane, právě když diskriminant  $D$  rovnice (3) je roven nule, tj. právě když

$$D = 4k^2q^2a^4 - 4(b^2 + k^2a^2)a^2(q^2 - b^2) = 0.$$

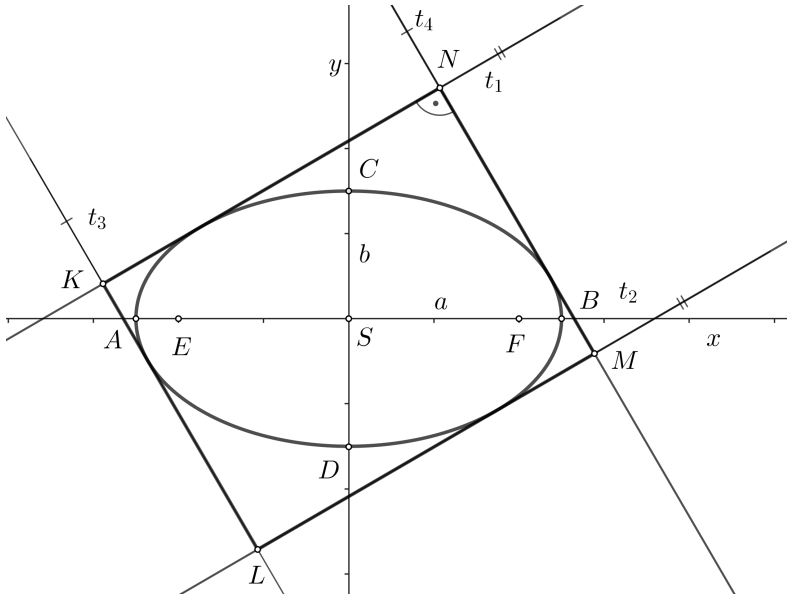
Po úpravě (s využitím nenulovosti čísel  $a, b$ ) zjistíme, že rovnost  $D = 0$  je ekvivalentní podmínce  $b^2 + k^2a^2 - q^2 = 0$ , odtud

$$q = \pm\sqrt{b^2 + k^2a^2}.$$

Získali jsme dvě tečny souměrné podle středu  $S$  elipsy (obr. 1), jejichž obecné rovnice mají tvar

$$t_1: kx - y + \sqrt{b^2 + k^2a^2} = 0,$$

$$t_2: kx - y - \sqrt{b^2 + k^2a^2} = 0.$$



Obr. 1

Určíme-li tečny směru kolmého k  $t_1, t_2$ , pak jejich průsečíky s  $t_1, t_2$  určí vrcholy opsaného pravoúhelníku. Zřejmě obecné rovnice tečen  $t_3, t_4$  kolmých k přímkám  $t_1, t_2$  mají tvar

$$x + ky + c = 0.$$

Analogickým postupem určíme  $c$  a obdržíme obecné rovnice tečen  $t_3$  a  $t_4$ :

$$t_3: x + ky - \sqrt{a^2 + k^2b^2} = 0,$$

$$t_4: x + ky + \sqrt{a^2 + k^2b^2} = 0.$$

Pro zjednodušený zápis dalších výpočtů zavedeme označení:

$$m = a^2 + k^2b^2, \quad n = b^2 + k^2a^2, \quad (4)$$

tedy  $m, n$  jsou kladná reálná čísla. Obecné rovnice tečen jsou tedy tvaru

$$t_1: kx - y + \sqrt{n} = 0,$$

$$t_2: kx - y - \sqrt{n} = 0,$$

$$t_3: x + ky - \sqrt{m} = 0,$$

$$t_4: x + ky + \sqrt{m} = 0.$$

Jsou-li přímký  $t_1, t_2$  různoběžné se souřadnicovou osou  $x$ , můžeme rovnice přímk  $t_3, t_4$  vyjádřit ve směrníkovém tvaru  $y = -\frac{1}{k}x \pm \frac{\sqrt{m}}{k}$ . Mají-li přímký  $t_1, t_2$  obecné rovnice  $y = \pm\sqrt{n}$  (tj.  $k = 0$ ), pak přímký  $t_3, t_4$  mají rovnice  $x = \pm\sqrt{m}$ . Můžeme tedy vždy označit  $t_1, t_2$  ty tečny elipsy, pro které je  $k \in \langle 0; 1 \rangle$ . Bez újmy na obecnosti lze tedy předpokládat, že  $k \in \langle 0; 1 \rangle$ .

K tomu, abychom mohli určit obsah opsaných pravoúhelníků, potřebujeme znát délky jejich stran. Vzhledem k tomu, že jejich strany leží na navzájem rovnoběžných přímkách, stačí určit ze známého vztahu (viz např. [2]) vzdálenost rovnoběžných přímk.

Pro vzdálenost  $\rho(p, q)$  rovnoběžných přímk  $p, q$  v rovině daných pořadí obecnými rovnicemi  $p: a_1x + a_2y + a_0 = 0$  a  $q: a_1x + a_2y + a'_0 = 0$  platí, jak známo

$$\rho(p, q) = \frac{|a_0 - a'_0|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.$$

Platí tedy (obr. 1)

$$\rho(t_1, t_2) = |KL| = \frac{|2\sqrt{n}|}{\sqrt{k^2 + 1}}, \quad \rho(t_3, t_4) = |LM| = \frac{|2\sqrt{m}|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

Odtud tedy již přímo můžeme určit obsah  $\mathcal{S}$  pravoúhelníku  $KLMN$ . Platí

$$\mathcal{S} = \frac{4\sqrt{mn}}{k^2 + 1}, \quad (5)$$

kde  $m, n$  jsou dány vztahy (4).

Nejprve si položíme otázku, který z opsaných pravoúhelníků má *největší* obsah.

Maximální hodnotu výrazu na pravé straně rovnosti (5) lze určit bez užití diferenciálního počtu. Stačí si totiž uvědomit, že výraz  $\sqrt{mn}$  udává tzv. *geometrický průměr* kladných reálných čísel  $m, n$ . Můžeme proto využít nerovnost mezi geometrickým a aritmetickým průměrem ve tvaru

$$\sqrt{mn} \leq \frac{m + n}{2},$$

přičemž rovnost v ní nastává, právě když  $m = n$ . V našem případě tak z (5) plyne

$$\mathcal{S} = \frac{4}{k^2 + 1} \cdot \sqrt{mn} \leq \frac{4}{k^2 + 1} \cdot \frac{m + n}{2}.$$

Dosadíme-li do pravé strany této nerovnosti za  $m, n$  ze vztahu (4), lze výraz na její pravé straně psát ve tvaru

$$2 \cdot \frac{(a^2 + b^2) + k^2(a^2 + b^2)}{k^2 + 1} = 2 \cdot \frac{(k^2 + 1)(a^2 + b^2)}{k^2 + 1} = 2(a^2 + b^2),$$

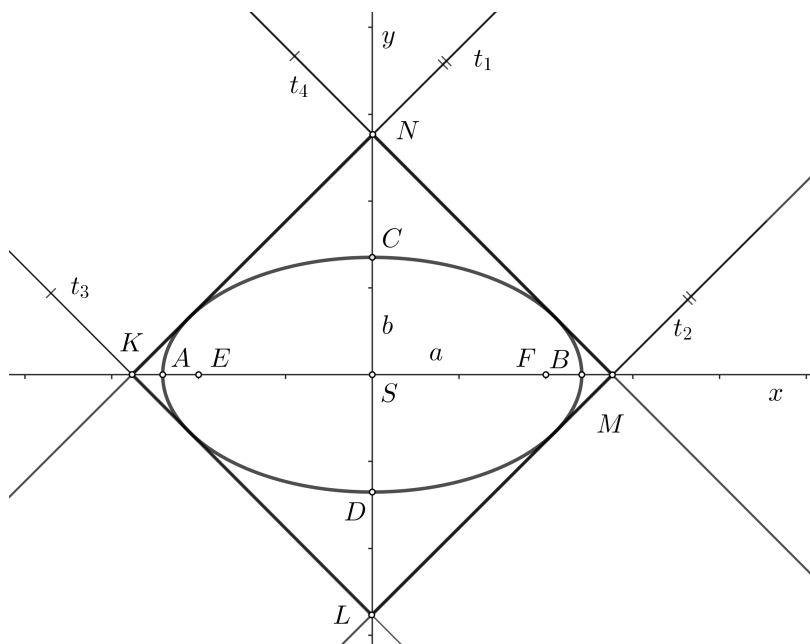
tedy pro horní odhad obsahu plyne  $\mathcal{S}_{\max} = 2(a^2 + b^2)$ .

Této hodnoty nabývá obsah  $\mathcal{S}$ , právě když  $m = n$ , neboli, po dosazení za  $m, n$  ze vztahu (4), platí  $a^2 + b^2k^2 = b^2 + a^2k^2$ , tj.  $(1 - k^2)(a^2 - b^2) = 0$ . To vzhledem k předpokladu  $k \in \langle 0; 1 \rangle$  a  $a \neq b$  nastane, právě když  $k = 1$ .

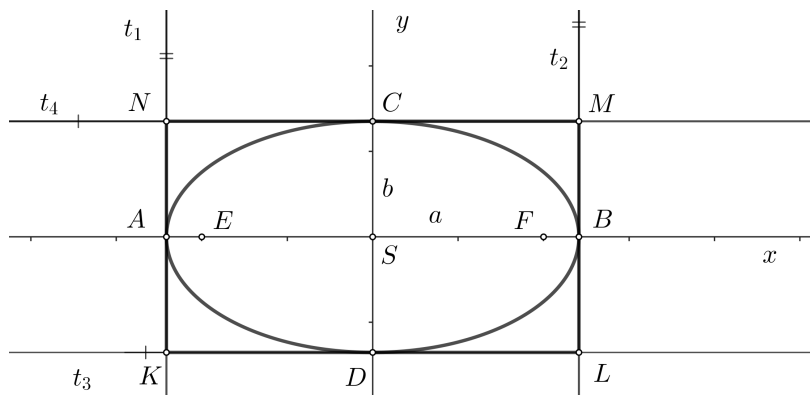
Pravoúhelník maximálního obsahu opsaný elipse je tedy čtverec s vrcholy na osách elipsy. Jak patrně, je *souměrný* podle os elipsy a jeho strany leží na přímkách o rovnicích  $x - y \pm \sqrt{a^2 + b^2} = 0$  a  $x + y \pm \sqrt{a^2 + b^2} = 0$  (obr. 2). Jeho obsah je  $\mathcal{S}_{\max} = 2(a^2 + b^2)$ .

Nyní se zabýváme druhou otázkou, tj. který z opsaných pravoúhelníků má *nejmenší* obsah. Intuitivně lze očekávat, že minimálního obsahu dosáhneme pro pravoúhelník znázorněný na obr. 3.

Dokážeme tedy, že *nejmenší* obsah má pravoúhelník se stranami rovnoběžnými s osami elipsy, tj.  $S_{\min} = 4ab$ .



Obr. 2



Obr. 3

Použijeme-li opět vztah (5), do něhož dosadíme z (4), obdržíme

$$\mathcal{S} = \frac{4}{k^2 + 1} \sqrt{(a^2 + k^2 b^2)(b^2 + k^2 a^2)}. \quad (6)$$

K tomu, abychom ověřili, že hodnota  $4ab$  je dolním odhadem obsahu opsaných pravoúhelníků, je, s ohledem na (6), nutné a stačí verifikovat ekvivalentní nerovnost

$$\sqrt{(a^2 + k^2 b^2)(b^2 + k^2 a^2)} \geq (k^2 + 1)ab.$$

S ohledem na nezápornost obou stran této nerovnosti obdržíme po jejich umocnění a jednoduché úpravě s ní ekvivalentní nerovnost

$$k^2(a^2 - b^2)^2 \geq 0. \quad (7)$$

Dále je zřejmé, že hodnoty  $4ab$  nabývá obsah  $\mathcal{S}$ , právě když v nerovnosti (7) nastane rovnost, neboli, právě když  $k^2(a^2 - b^2)^2 = 0$ . To s ohledem na předpoklad  $a \neq b$  nastane, právě když  $k = 0$ .

Pravoúhelník minimálního obsahu opsaný elipse je tedy obdélník, jehož strany leží na přímkách  $x = \pm a$  a  $y = \pm b$ . Jak patrně, je souměrný podle os elipsy a jeho strany jsou částí vrcholových tečen elipsy (obr. 3). Obsah tohoto pravoúhelníku je roven  $\mathcal{S}_{\min} = 4ab$ .

## Závěr

Hledaným pravoúhelníkem maximálního obsahu opsaným elipse (1) je čtverec s vrcholy ležícími na osách elipsy o obsahu  $\mathcal{S}_{\max}$  a pravoúhelníkem minimálního obsahu je obdélník se stranami ležícími na vrcholových tečnách elipsy o obsahu  $\mathcal{S}_{\min}$ , přičemž pro obsah  $\mathcal{S}$  platí nerovnosti

$$\mathcal{S}_{\min} = 4ab \leq \mathcal{S} \leq 2(a^2 + b^2) = \mathcal{S}_{\max}.$$

Dalším zajímavým problémem, který ponecháváme čtenářům, je například nalezení pravoúhelníků opsaných či vepsaných elipse s extrémálním obvodem.

## Literatura

- [1] *Hroník, J.*: Úlohy o maximech a minimech funkcí. ÚV Matematické olympiády a ÚV ČSM, Mladá fronta, 1967.
- [2] *Kočandrle, M.*: Matematika pro gymnázia. Analytická geometrie. JČMF. Prometheus, 2009.



# Rozvíjení znalostí žáků s podporou GeoGebry

JARMILA ROBOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

GeoGebra, program dynamické matematiky, resp. dynamické geometrie, patří k často využívaným digitálním nástrojům ve výuce matematiky od základní až po vysokou školu, a to nejen u nás, ale i v zahraničí, například [1]. K rozšíření GeoGebry u nás přispěla nejen její dostupnost pro učitele i žáky (bezplatný software, česká lokalizace) či uživatelsky přívětivé prostředí, ale zejména to, že nástroje a příkazy GeoGebry pokrývají běžně vyučovaná matematická témata základní i střední školy a podporují konstruktivistický přístup k výuce.

GeoGebra nabízí nejen rýsování geometrických objektů či zobrazování grafů funkcí, ale zejména její dynamické nástroje mohou podpořit porozumění žáků, jak dokládá řada výzkumných studií [4, 5].

Následující příklady zahrnují ilustrace výukových situací, kdy s pomocí vhodně vytvořených problémů lze formou „experimentování“ s matematickými objekty v prostředí GeoGebry dovést žáky k „objevování“ matematických vlastností a vztahů. Tyto příklady jsou věnovány učivu druhého stupně základní školy, resp. víceletého gymnázia, některé jsou zaměřeny na látku čtyřleté střední školy.

V uvedených ilustracích předpokládáme, že žáci samostatně či ve dvojicích pracují na počítači, resp. tabletu. Při řešení příkladů z tématu funkce si zobrazíme v nákresně GeoGebry souřadnicové osy  $x$ ,  $y$  a také čtvercovou síť; naopak v tématech ze syntetické geometrie obvykle zobrazení os soustavy souřadnic, resp. čtvercové sítě, vypínáme.

Následující dvě ilustrace se zaměřují na vlastnosti grafů lineárních a kvadratických funkcí.

## Ilustrace 1

Lineární funkci s předpisem  $f: y = ax + b$ , kde  $a$ ,  $b$  jsou reálná čísla<sup>1)</sup>, se žáci obvykle učí v 9. ročníku základní školy, a to jako zobecnění přímé

---

<sup>1)</sup>V některých učebnicích matematiky se uvádí  $a \neq 0$ , např. [2].

úměrnosti. S podporou GeoGebry mohou snadno zkoumat vliv koeficientů  $a$ ,  $b$  na graf a vlastnosti lineární funkce.

### Metodické poznámky

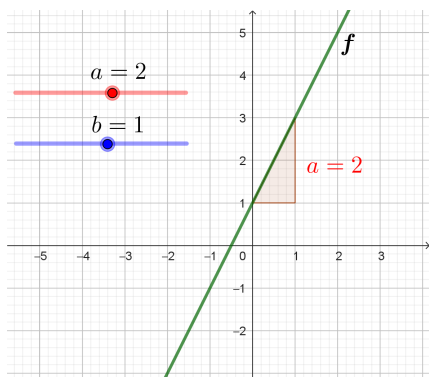
Nejdříve se žáky sestrojíme v nákresně programu posuvníky, které mají význam koeficientů  $a$  a  $b$ ; hodnoty posuvníků nastavíme například od  $-15$  do  $15$  s krokem  $0,1$ . Na posuvnících zvolíme konkrétní hodnoty  $a = 2$ ,  $b = 1$ . Než zapíšeme funkční předpis, uvědomíme si, že v programu GeoGebra zadáváme do vstupního pole předpisy lineárních či kvadratických funkcí vždy ve tvaru  $f(x) = \dots$ ,  $g(x) = \dots$ , neboť zápis  $y = \dots$  program interpretuje jako rovnici přímky u lineárních funkcí, nebo jako rovnici kuželosečky u kvadratických funkcí (to ovlivní funkčnost některých nástrojů a příkazů). Do vstupního řádku tedy zapíšeme obecný předpis  $f(x) = ax + b$  a zobrazíme graf funkce.

Žákům zadáme samostatnou práci, ve které mají v nákresně měnit pouze hodnoty posuvníku  $a$ , pozorovat, co se děje s grafem a své poznatky si zapsat. Většina z nich pravděpodobně dospěje k následujícím zjištěním: grafem lineární funkce je přímka, která pro  $a > 0$  „stoupá“ ve směru osy  $x$  a pro  $a < 0$  „klesá“ ve směru osy  $x$ ; pro  $a = 0$  je grafem přímka rovnoběžná s osou  $x$ , jedná se o graf konstantní funkce. Můžeme poté s žáky diskutovat o vlivu koeficientu  $a$  na „stoupání“, či „klesání“ přímky a představit geometrickou interpretaci koeficientu  $a$  jako „sklonu“, resp. směrnice přímky, pomocí nástroje *Spád*. Uvedený nástroj GeoGebry zobrazí pravouhý trojúhelník s přeponou na grafu-přímce; jeho horizontální odvěsna má jednotkovou délku a vertikální odvěsna má délku  $a$  jednotek<sup>2)</sup>. Vertikální odvěsna je tak geometrickou reprezentací směrnice přímky (obr. 1 a 2). Pro  $a > 0$  lze vyzorovat, že čím větší je směrnice, tím přímka rychleji „stoupá“; obdobně pro  $a < 0$  mohou žáci dospět k poznatku, že čím menší je směrnice přímky, tím přímka rychleji „klesá“. Na základě pozorování tak lze intuitivně zavést již pro žáky pochopitelné pojmy *rostoucí* a *klesající funkce*.

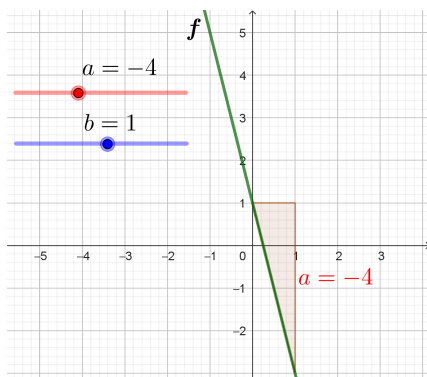
Dále požádáme žáky, aby nastavili posuvník  $a$  např. na hodnotu  $1$ , sestrojili průsečík  $B$  grafu funkce s osou  $y$  (včetně zobrazení jeho souřadnic v nákresně) a dále měnili jen hodnoty posuvníku  $b$ . Tak zkoumají vliv tohoto koeficientu na graf funkce. Obvykle několik žáků vyzoruje, že koeficient  $b$  odpovídá  $y$ -ové souřadnici průsečíku  $B$  grafu s osou  $y$  (obr. 3 a 4).

---

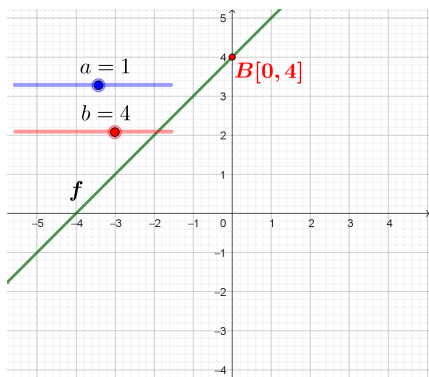
<sup>2)</sup>Pro  $a < 0$  odpovídá délka vertikální odvěsny absolutní hodnotě koeficientu  $a$ .



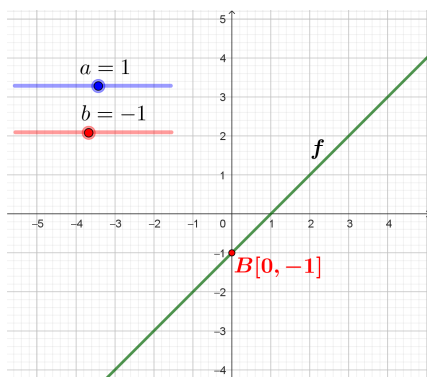
Obr. 1



Obr. 2



Obr. 3



Obr. 4

Na závěr můžeme žáky požádat, aby se pokusili změnami koeficientů  $a$ ,  $b$  získat graf-přímku, která je rovnoběžná s osou  $y$ . Poté, po neúspěšných pokusech, s nimi můžeme rozebrat, proč to nelze.

## Ilustrace 2

Obdobným způsobem jako v ilustraci 1 můžeme nechat žáky zkoumat vlastnosti grafu kvadratické funkce zadané předpisem  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , kde čísla  $a$ ,  $b$ ,  $c$  jsou reálná,  $a \neq 0$ .

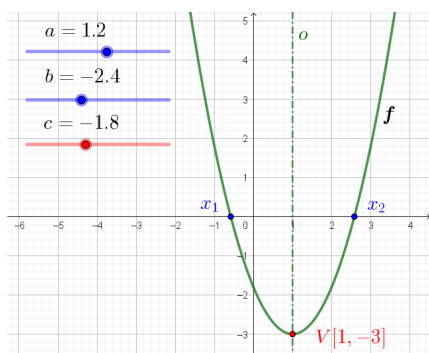
### Metodické poznámky

V prostředí GeoGebry nejdříve se žáky sestrojíme tři posuvníky pro koeficienty  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ; rozmezí jejich hodnot nastavíme např. od  $-10$  do  $10$

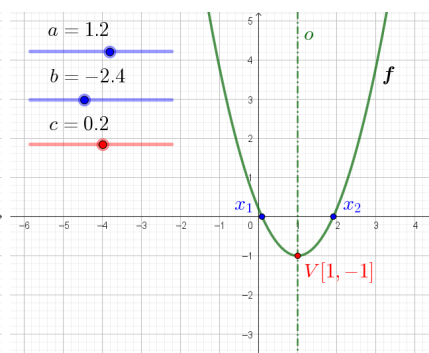
s krokem 0,1. Před zadáním předpisu funkce zvolíme na posuvnících hodnoty  $a = 1$ ,  $b = c = 0$ , poté zadáme předpis uvedený výše do vstupního řádku a v nákrešně získáme graf – parabolu, která prochází počátkem a je souměrná podle osy  $y$ .

Žáci dostanou za úkol měnit hodnoty pouze na posuvníku  $a$ , čímž mohou zkoumat vliv tohoto koeficientu na graf, případně i na vlastnosti kvadratické funkce. Na základě zkušeností lze říci, že většina z nich dospěje ke zjištění, která lze shrnout následovně: pro  $a > 0$  je graf-parabola „rozevřen nahoru“, s rostoucím kladným koeficientem  $a$  se parabola více přimyká k ose  $y$ ; pro  $a < 0$  je parabola „rozevřena dolů“ a se zmenšujícím se záporným  $a$  se parabola opět více přimyká k ose  $y$ . Současně mají žáci možnost si ujasnit, proč je z definice kvadratické funkce vyloučena hodnota  $a = 0$ , neboť pro tuto hodnotu je grafem přímka, tj. jedná se o graf lineární funkce.

Před zkoumáním vlivu koeficientu  $c$  je vhodné nastavit posuvníky na  $a = 1$ ,  $b = 0$  a poté měnit pouze hodnoty  $c$ . I zde žáci mohou vyzorovat, že pro  $c > 0$  se graf posouvá nahoru ve směru kladné poloosy  $y$ ; pro  $c < 0$  se graf naopak posouvá dolů ve směru záporné poloosy  $y$ . Pro  $c = 0$  leží bod  $[0, 0]$  na parabole. Dále pomocí příkazu *Extrem(f)* vyznačíme na parabole vrchol  $V$  a zaměříme pozornost žáků na jeho  $x$ -ovou souřadnici. Žáci snadno zjistí, že měníme-li pouze hodnoty posuvníku  $c$ , tak se vrchol  $V$  pohybuje po ose o souměrnosti paraboly, tj. po ose  $y$ . Z toho je zřejmé, že  $x$ -ová souřadnice vrcholu se nemění, tedy nezávisí na hodnotě  $c$ . To mohou žáci prověřit tím, že například nastaví  $a = 1,2$ ,  $b = -2,4$  a opět mění jen hodnoty  $c$  na posuvníku (obr. 5, obr. 6).



Obr. 5



Obr. 6

Uvedené zjištění lze použít k určení souřadnic vrcholu  $V$  paraboly, a to pomocí  $x$ -ových souřadnic průsečíků paraboly s osou  $x$ ; označíme je  $x_1, x_2$  (obr. 5 a obr. 6). Žáci přitom využijí znalost řešení kvadratické rovnice, neboť uvedená čísla  $x_1$  a  $x_2$  jsou současně kořeny příslušné kvadratické rovnice  $ax^2 + bx + c = 0$ , kde  $a, b, c$  jsou hodnoty nastavené na posuvnicích. Pro její kořeny platí

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

To, že  $x$ -ová souřadnice vrcholu  $V$  je stejná pro pevně dané hodnoty  $a, b$  a měnící se  $c$ , platí i pro hodnotu  $c = 1, 2$ , kdy má parabola s osou  $x$  jediný společný bod  $V$ . Příslušná kvadratická rovnice má pak jeden (dvojnásobný) kořen a pro její diskriminant  $D$  platí  $D = b^2 - 4ac = 0$ . Po dosazení 0 za diskriminant do vzorce pro kořeny získáme  $x$ -ovou souřadnici bodu  $V$  jako

$$x_{1,2} = x = \frac{-b}{2a}.$$

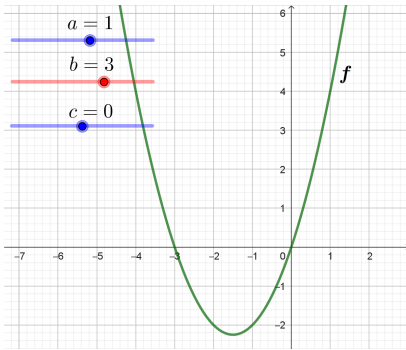
Souřadnici  $y$  vrcholu  $V$  určíme z předpisu funkce  $f$  dosazením výrazu  $\frac{-b}{2a}$  za  $x$ :

$$y = a \left( \frac{-b}{2a} \right)^2 + b \left( \frac{-b}{2a} \right) + c = c - \frac{b^2}{4a}.$$

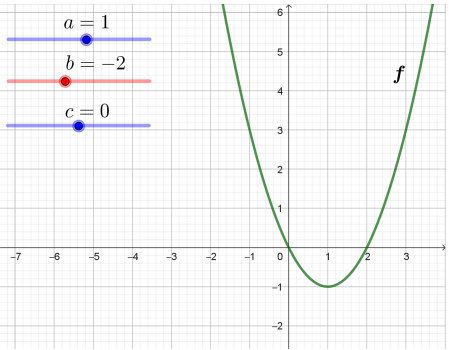
Souřadnice vrcholu  $V$  paraboly jsou  $\left[ \frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a} \right]$ .

Jako poslední budou žáci zkoumat vliv koeficientu  $b$  při nastavených hodnotách  $a = 1, c = 0$ . Ještě před změnou hodnot  $b$  se můžeme žáků zeptat, jak odhadují vliv změn koeficientu  $b$  na graf kvadratické funkce. Poměrně častá odpověď je, že parabola se bude posouvat podél osy  $x$ . Žáci však poté sami v prostředí GeoGebry rychle zjistí, že tomu tak není (obr. 7, kde  $b = 3$ ; obr. 8, kde  $b = -2$ ), neboť parabola mění své umístění nejen z hlediska osy  $x$ , ale i osy  $y$ .

Pro posouzení toho, jaký je tedy vliv koeficientu  $b$  na graf funkce, žákům doporučíme, aby si příkazem *Extrem(f)* zapsaným do vstupního pole GeoGebry opět zobrazili vrchol  $V$  paraboly, zapnuli jeho stopu a měnili hodnoty parametru  $b$ . Velmi rychle dospějí k poznatku, že při změně  $b$  se vrchol  $V$  pohybuje po křivce, která je zřejmě také parabolou (obr. 9). Zdůvodnění zjištěného poznatku však pro žáky není snadné, obvykle potřebují pomoc učitele, aby je pomocí návodných otázek dovedl k následujícímu vysvětlení.



Obr. 7

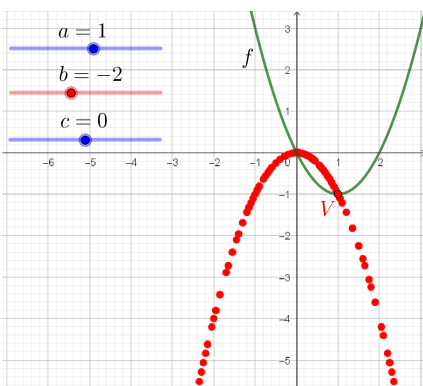


Obr. 8

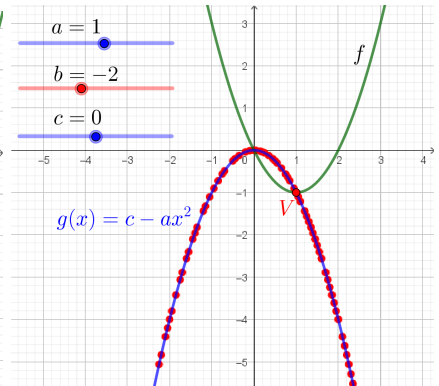
Vrchol  $V$  paraboly, která je grafem funkce  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ , má souřadnice

$$x = \frac{-b}{2a}, \quad y = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Je zřejmé, že  $y$ -ová souřadnice vrcholu  $V$  paraboly vyjadřuje „kvadratickou závislost“ na proměnné  $b$ . Vyjádříme-li  $b$  z  $x$ -ové souřadnice bodu  $V$  jako  $b = -2ax$  a poté výraz  $-2ax$  dosadíme za  $b$  do  $y$ -ové souřadnice bodu  $V$ , získáme vztah  $y = c - ax^2$ . Předpis této „nové“ kvadratické funkce ve tvaru  $g(x) = c - ax^2$  můžeme opět zadat do vstupního pole GeoGebry, zobrazit její graf a změnami hodnot  $b$  ověřit, že jsme předpis určili správně, tj. že stopy bodu  $V$  leží na grafu funkce  $g$  (obr. 10).



Obr. 9



Obr. 10

Následující dvě ilustrace využití GeoGebry k rozvíjení žákovských poznatků jsou zaměřeny na geometrii, a to na hledání množin bodů dané vlastnosti v rovině. V těchto ilustracích jde o objevení hypotézy samotnými žáky (který geometrický útvar je hledanou množinou) a její prověření prostředky GeoGebry. Důkaz uvedených množin bodů dané vlastnosti lze nalézt například v učebnicích [2] a [3].

### Ilustrace 3

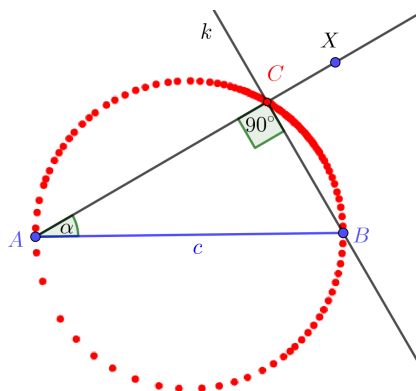
K množinám bodů dané vlastnosti, které se probírají na druhém stupni základní školy, patří Thaletova kružnice. I v tomto případě můžeme žáky dovést s pomocí GeoGebry k objevení hypotézy, že množinou všech bodů roviny, které jsou vrcholy pravých úhlů v trojúhelnících se společnou přeponou  $AB$ , je kružnice s průměrem  $AB$  bez bodů  $A$ ,  $B$ .

#### *Metodické poznámky*

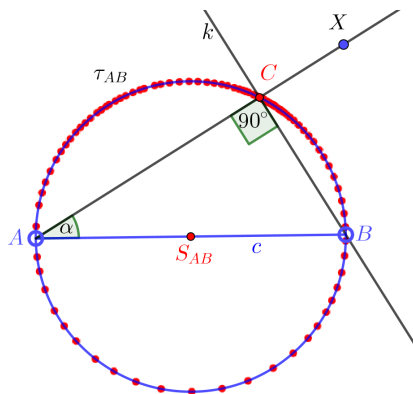
Nejdříve společně se žáky vytvoříme v GeoGebře dynamickou konstrukci, která jim umožní objevení hypotézy. Je důležité, aby žáci pochopili podstatu této konstrukce trojúhelníku; ta musí být realizována tak, aby bylo možné v konstrukci tažením některého objektu v nákrese získávat různé pravoúhlé trojúhelníky se společnou přeponou  $AB$  a pravým úhlem proti přeponě  $AB$ .

V rámci diskuze moderované učitelem by si žáci měli ujasnit, že mají sestrojít pravoúhlý trojúhelník  $ABC$  s přeponou  $AB$ , avšak známé jsou jen dva prvky trojúhelníku: strana  $AB$ ,  $\gamma = 90^\circ$ . Proto je potřeba zvolit třetí prvek trojúhelníku. Žáci by měli přijít na to, že zvolí-li například úhel  $\alpha$  u vrcholu  $A$  tím, že sestrojí polopřímku  $AX$ , kde  $X \notin \overleftrightarrow{AB}$ , tak trojúhelník již umí sestrojít. Hledaný vrchol  $C$  leží na polopřímce  $AX$  a současně na kolmici  $k$  z bodu  $B$  k polopřímce  $AX$ . Tato konstrukce umožňuje změnou polohy bodu  $X$  (a tedy změnou velikosti úhlu  $\alpha$ ) měnit umístění polopřímky  $AX$  a získávat tak další pravoúhlé trojúhelníky nad přeponou  $AB$ . Díky tomu po zapnutí stopy bodu  $C$  žáci z vykreslované stopy rychle dospějí k hypotéze, že hledanou množinou bodů je kružnice s průměrem  $AB$  (obr. 11).

Získanou hypotézu mohou žáci prověřit tím, že do konstrukce doplní kružnici  $\tau_{AB}$  s průměrem  $AB$  a ověří změnou polohy bodu  $X$ , že stopy bodu  $C$  leží na této kružnici (obr. 12). K tomu, že do nalezené množiny nepatří body  $A$ ,  $B$ , je třeba žáky dovést doplňujícími otázkami; poté obvykle žáci vypořádají, že pro  $C = A$ , nebo  $C = B$ , trojúhelník  $ABC$  zanikne.



Obr. 11



Obr. 12

#### Ilustrace 4

Thaletova kružnice, které byla věnována předchozí ilustrace, je speciálním případem množiny všech bodů v rovině, z nichž je daná úsečka  $AB$  vidět pod daným úhlem  $\gamma$ . S tímto zobecněním se žáci seznamují až na střední škole v návaznosti na učivo o obvodových a středových úhlech. Pokud žáci již znají dynamickou konstrukci množiny bodů z ilustrace 3, potom pro ně nebude obtížné vymyslet dynamickou konstrukci pro množinu bodů, z nichž je vidět úsečka pod úhlem  $\gamma$ .

#### Metodické poznámky

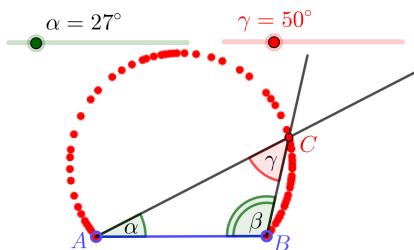
Nejdříve žákům připomeneme dynamickou konstrukci Thaletovy kružnice, ve které byl také trojúhelník zadán jen dvěma prvky (úsečkou  $AB$  a pravým úhlem u vrcholu  $C$ ). Nyní potřebujeme sestrojít trojúhelník  $ABC$ , ve kterém známe stranu  $AB$  a úhel  $\gamma$ ,  $\gamma \in (0^\circ, 180^\circ)$ . To by mělo žákům pomoci, aby si uvědomili, že je vhodné zvolit úhel  $\alpha$ . Úhel  $\beta$  je tím určen jednoznačně, tj.  $\beta = 180^\circ - \gamma - \alpha$ ; trojúhelník  $ABC$  pak mohou žáci sestrojít podle věty *usu*.

Dynamičnost konstrukce zařídíme pomocí posuvníku pro úhel  $\alpha$ , to umožní vykreslovat další trojúhelníky se stranou  $AB$ , které mají u vrcholu  $C$  požadovaný úhel  $\gamma$ . Vzhledem k tomu, že tento rys ještě využijeme ke zkoumání vlastností objevené množiny, je vhodné na začátku konstrukce také doplnit posuvník s názvem  $\gamma$ . Po sestrojení strany  $AB$  použijí žáci ke konstrukci ramene úhlu  $\alpha$  nástroj *Úhel dané velikosti*, kde do pole pro velikost úhlu zadají název posuvníku  $\alpha$  (tím se bude velikost tohoto úhlu

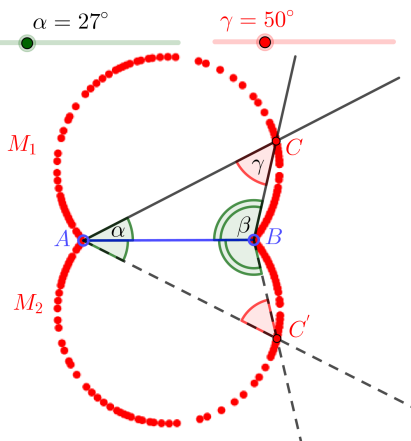


odečítat z posuvníku  $\alpha$ ). Rameno úhlu  $\beta$  sestrojíme stejným způsobem, avšak do pole pro velikost úhlu  $\beta$  vložíme výraz  $180^\circ - \gamma - \alpha$ . Vrchol  $C$  sestrojíme jako průsečík ramen úhlů  $\alpha, \beta$ , na kterých neleží  $AB$ . Po zapnutí stopy bodu  $C$  se při změně hodnot  $\alpha$  vykreslují body náležející do hledané množiny (posuvník  $\gamma$  je stále nastaven na zadanou velikost úhlu).

Na základě toho žáci mají příležitost zjistit, že se jedná o kružnicový oblouk (obr. 13); vzhledem k souměrnosti situace podle osy  $AB$  jde o sjednocení dvou kružnicových oblouků  $M_1$  a  $M_2$  bez bodů  $A, B$  (obr. 14).

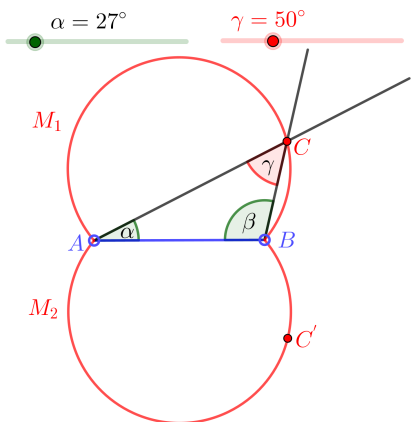


Obr. 13

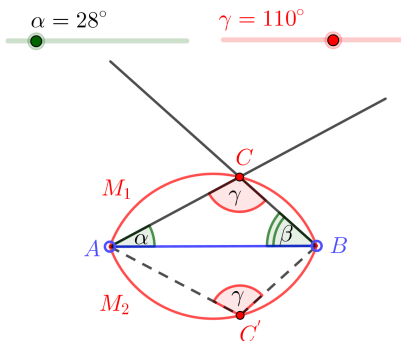


Obr. 14

Pokud využijeme nástroj GeoGebry *Množina bodů*, sestrojíme tím hledanou množinu bez využití stopy bodu  $C$ . Po aktivaci nástroje *Množina bodů* nejdříve ukazovátkem klikneme na sestrojený bod  $C$ , resp. jeho obraz  $C'$  v osové souměrnosti dle osy  $AB$ , a poté klikneme na posuvník  $\alpha$ ; tím zobrazíme hledanou množinu bodů (obr. 15). To nám umožní zkoumat vlastnosti nalezené množiny – žáky požádáme, aby po vykreslení požadované množiny bodů měnili posuvníkem jen velikost úhlu  $\gamma$ . Řada žáků dospěje ke zjištění, že pro ostrý úhel  $\gamma$  je získaný kružnicový oblouk větší než půlkružnice, pro pravý úhel jde o půlkružnici, resp. Thaletovu kružnici, a pro tupý úhel  $\gamma$  je získaný kružnicový oblouk menší než půlkružnice (obr. 16).



Obr. 15



Obr. 16

Uvedené ilustrace představují jen několik možností, jak může učitel využívat program GeoGebra k aktivnímu zapojení žáků v hodině při získávání poznatků. První dvě uvedené ilustrace umožňují již snadno přejít ke zkoumání řešení rovnic, resp. nerovnic či soustav dvou rovnic o dvou neznámých v závislosti na koeficientech v předpisech lineárních/kvadratických funkcí, jejichž předpisy jsou dány výrazy na levé a pravé straně rovnice, resp. nerovnice.

## Literatura

- [1] *Birgin, O., Uzun Yazıcı, K.*: The effect of GeoGebra software-supported mathematics instruction on eighth-grade students' conceptual understanding and retention. *Journal of Computer Assisted Learning*, roč. 37 (2021), s. 925–939.
- [2] *Herman, J. a kol.*: Kruhy a válce – Matematika – Tercie. Prometheus, Praha, 1996.
- [3] *Moravcová, V., Hromadová, J.*: Základy planimetrie pro učitelské studium. Matfyzpress, Praha, 2021.
- [4] *Robová, J.*: Výzkumy vlivu některých typů moderních technologií na vědomosti a dovednosti žáků v matematice. *Scientia in education*, roč. 3 (2012), č. 2. s. 79–106.
- [5] *Yohannes, A., Chen, HL*: GeoGebra in mathematics education: a systematic review of journal articles published from 2010 to 2020. *Interactive Learning Environments*, roč. 31 (2023), č. 9, s. 5682–5697.

# Číselně-teoretické úlohy v Matematickém klokanovi

VLADIMÍR VANĚK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Tento příspěvek vznikl z podnětu učitelů středních škol – čtenářů MFI, kteří projeví zájem o úplná řešení úloh z mezinárodní soutěže Matematický klokan (MK). Při přípravě sad soutěžních úloh jednotlivých kategorií jsou příklady vybírány ze čtyř oblastí – logiky, algebry, geometrie a teorie čísel. Zde jsme se zaměřili na poslední z uvedených oblastí matematiky. Předkládáme čtenářům šestici úplných řešení vybraných úloh z kategorií Junior a Student z posledních šesti let.

Neklademe si za cíl uvést všechna možná řešení prezentovaných úloh. Vybrali jsme především taková řešení, která může učitel využít ve výuce v rámci konkrétního učiva.

Na závěr je uvedeno obecnější řešení posledního problému o nalezení poslední nenulové číslice čísla  $n!$  spolu s odvozením užitečného vzorce pro její rychlé určení. V rámci zachování terminologické korektnosti ještě uvádíme, že z důvodu jednoduššího vyjadřování budeme v textu chápat operace s číslicemi jako operace s hodnotami jednomístných čísel, reprezentovaných těmito číslicemi.

## **Příklad 1** (MK 2021, Student)

Je dáno sedmimístné číslo  $N$  s navzájem různými číslicemi, přičemž všechny dělí toto číslo. Které číslice číslo  $N$  neobsahuje?

- (A) 0, 7, 9    (B) 0, 5, 7    (C) 0, 4, 5    (D) 0, 5, 9    (E) 0, 4, 8

*Řešení:* Je zřejmé, že číslo  $N$  neobsahuje nulu. Neobsahuje ani pětku, protože v sedmimístném čísle s různými číslicemi bude jistě obsažena některá sudá číslice. Pak by totiž  $N$  bylo dělitelné pěti a dvěma, tedy deseti a poslední číslice by byla nula, což není možné.

Součet zbývajících osmi číslic je  $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 40$ . Odtud vidíme, že se v  $N$  musí vyskytovat devítka. V opačném případě by zde musela být trojka, ale ciferný součet všech sedmi číslic bez devíti  $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 = 31$  není dělitelný třemi, a není tedy splněno kritérium dělitelnosti třemi.

Jestliže číslo  $N$  obsahuje devítku, je i ciferný součet jeho zbývajících šesti číslic dělitelný devíti. Hledáme tedy přirozený násobek devíti menší než 31. Z možností 9, 18 a 27 vyhovuje pouze 27, neboť v ostatních případech bychom museli vynechat číslici reprezentující dvojčístné číslo. Hledaná poslední číslice, kterou číslo  $N$  nesmí obsahovat je  $31 - 27 = 4$ .

*Závěr:* Dané sedmimístné číslo nemůže obsahovat číslice 0, 4, 5.

**Příklad 2** (MK 2019, Junior)

Uvažujme osm po sobě jdoucích trojmístných čísel. Každé z nich je dělitelné svou poslední číslicí. Určete ciferný součet nejmenšího z těchto osmi čísel.

- (A) 10                      (B) 11                      (C) 12                      (D) 13                      (E) 14

*Řešení:* Hledáme nejmenší trojmístné číslo ve tvaru  $\overline{abc}$ . Stejně jako v předchozí úloze zřejmě platí  $c \neq 0$ . Odtud osm po sobě jdoucích čísel může končit (v tomto pořadí) číslicemi

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}, \text{ nebo } \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Platí-li  $c \mid \overline{abc}$ , pak  $c \mid (\overline{abc} - c)$ , neboli  $c \mid \overline{ab0}$  pro všechna  $c$  z jedné z výše uvedených množin. Hledané číslo má být nejmenší možné, proto se zaměříme na první z nich  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

Pokud má být  $\overline{ab0}$  dělitelné osmi, pak je dělitelné i dvěma a čtyřmi, proto můžeme tato dvě čísla vynechat. Obdobně není třeba uvažovat ani šestku, postačí nám dělitelnost třemi. Celkem  $\overline{ab0} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 840$ .

*Závěr:* Nejmenší hledané číslo splňující podmínky zadání je tedy  $\overline{abc} = 841$ , jehož ciferný součet je 13.

**Příklad 3** (MK 2019, Student)

Součinem šesti po sobě jdoucích čísel je dvanáctimístné číslo ve tvaru

$$N = abb\ cdd\ cdd\ abb,$$

kde  $a, b, c$  a  $d$  je opět v nějakém pořadí čtveřice po sobě jdoucích čísel. Určete hodnotu  $d$ .

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 3                      (D) 4                      (E) 5

*Řešení:* Víme, že  $a, b, c, d \in M$ , kde  $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ . V každé šestici po sobě jdoucích čísel jsou jistě tři čísla sudá, dvě čísla dělitelná třemi a minimálně jedno číslo dělitelné pěti. Jejich součin je tudíž dělitelný deseti, proto má číslo  $N$  na pozici jednotek nulu ( $b = 0$ ). Jestliže  $a, b, c, d$

je opět v nějakém pořadí čtveřice po sobě jdoucích čísel, z nichž jedno je 0, pak je 0 prvním číslem z této čtveřice a zbývající čísla  $a, c, d \in \{1, 2, 3\}$  a platí

$$a + c + d = 6.$$

Součin čísel, z nichž dvě jsou dělitelná třemi, je jistě dělitelný devíti. Navíc z tvaru čísla  $N$  je zřejmé, že jeho ciferný součet je sudý a pro  $b = 0$  platí

$$2a + 2c + 4d = 9k,$$

kde  $k$  je sudé číslo ( $k = 2r$ ). Pak

$$2a + 2c + 4d = 18r \quad \text{a} \quad a + c + d = 6,$$

odkud plyne

$$d = 9r - 6.$$

Pouze pro  $r = 1$  je  $d \in M$ , a proto  $d = 3$ .

Nad rámec zadání pak z dělitelnosti čísla  $N$  osmi a faktu, že  $a, c \in \{1, 2\}$ , plyne  $a = 2$  a  $c = 1$ .

*Závěr:* Správná odpověď je tudíž (C), tj.  $d = 3$ .

#### **Příklad 4** (MK 2019, Junior)

Číslo  $3a$  má právě čtyři dělitele a číslo  $5a$  má právě 6 dělitelů. Určete první číslici zleva čísla  $2019a$ .

- (A) 1            (B) 3            (C) 8            (D) 9            (E) nelze určit

*Řešení:* Výhodu pro řešení mají studenti, kteří se již setkali s Gaussovou větou o počtu dělitelů přirozeného čísla. V opačném případě lze pro malý počet dělitelů tvar čísla  $3a$  odhadnout.

#### **Věta 1** (Gaussova)

Má-li přirozené číslo  $n$  kanonický rozklad

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k},$$

pak počet všech dělitelů čísla  $n$  je roven součinu

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1).$$

Číslo, které má právě čtyři dělitele, musí být ve tvaru  $p_1 \cdot p_2$ , nebo  $p^3$ , kde  $p_1$  a  $p_2$  jsou dvě navzájem různá prvočísla.

- Pro  $3a = p_1 \cdot p_2$  lze bez újmy na obecnosti psát  $p_1 = 3$  a  $p_2 = a \neq 3$ . Potom  $5a = 5p_2$ . Pokud ovšem  $p_2 = 5$ , má číslo  $5a = 25$  pouze tři dělitele. Pro  $p_2 \neq 5$  má číslo  $5a$  čtyři dělitele. V obou případech nejsou podmínky zadání splněny.
- Pro  $3a = p^3$ , lze psát  $p = 3$  a  $p^2 = 9 = a$ . Odtud  $5a = 45 = 3^2 \cdot 5$  a dle výše zmíněné věty je počet dělitelů  $3 \cdot 2 = 6$ . Podmínky zadání jsou splněny.

Nyní již víme, že  $a = 9$  a  $2019 \cdot 9 = 18171$ .

*Závěr:* První číslicí čísla  $2019a$  je jednička.

### Příklad 5 (MK 2024, Junior)

Číslem  $n!$  rozumíme součin  $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ , např.  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ . Na obrázku vidíte prvočíselný rozklad některého čísla  $n!$ , v němž jsou jednotlivá prvočísla uspořádána vzestupně. Bohužel jsou některá čísla nečitelná. Určete exponent prvočísla 17.

2 · 3 · 5 · 7 · 11 · 13<sup>4</sup> · 17 ·  · 43 · 47

- (A) 1                      (B) 2                      (C) 3                      (D) 4                      (E) 5

*Řešení:* Z obrázku lze vyčíst dvě velmi důležité informace. Největším prvočíslem v kanonickém rozkladu je 47 a číslo 13 se zde vyskytuje právě čtyřikrát. Druhá informace nám určí minimální i maximální hodnotu čísla  $n$ .

$$52 = 4 \cdot 13 \leq n < 5 \cdot 13 = 65.$$

Další omezení čísla  $n$  plyne z první informace. Číslo  $n$  musí být ostře menší, než nejbližší prvočíslu větší než 47, tedy 53. (Pokud by bylo větší, muselo by se v kanonickém zápisu objevit.)

Obě podmínky jsou splněny pouze pro  $n = 52$ . Číslo, které je na obrázku zapsáno je  $52!$ , v jehož prvočíselném rozkladu najdeme pouze tři násobky čísla 17 (17, 34, 51).

*Závěr:* Exponent u prvočísla 17 je 3.

### Příklad 6 (MK 2018, Student)

Archimédés správně vypočítal a napsal na tabuli číslo  $15!$ . Naneštěstí se mu, jak vidíte, dvě číslice rozmazaly. Které?

1 ■ 0 7 6 7 4 3 6 ■ 0 0 0

- (A) 2 a 0                      (B) 4 a 8                      (C) 7 a 4                      (D) 9 a 2                      (E) 3 a 8

*Řešení:* Podívejme se nejprve na jedno z možných (žákovských) řešení. Pracné vyčíslení  $15!$  uvažovat nebudeme.

Určíme, kolik nul má  $15!$  za poslední nenulovou číslicí. Počet nul na posledních pozicích je určen mocninou čísla 5 v kanonickém rozkladu čísla  $15!$ . Víme, že v kanonickém rozkladu je vždy větší počet menších prvočísel než větších. Tedy pokud se zde objevuje určitá mocnina pěti, vždy k ní najdeme alespoň stejnou mocninu dvou. Upravme  $15!$  na tvar:

$$\begin{aligned} 15! &= 15 \cdot 14 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = \\ &= (15 \cdot 10 \cdot 5) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14) = \\ &= (5^3 \cdot 3!) \cdot (2^3 \cdot 3) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14) = \\ &= 10^3 \cdot 3! \cdot 3 \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14). \end{aligned}$$

Vidíme, že exponent u čísla 10 je 3, proto na konci čísla  $15!$  budou právě tři nuly a pravá rozmazaná číslice bude první nenulová, tedy můžeme vyloučit distraktor (A). Stačí tak najít číslici na pozici jednotek čísla

$$\frac{15!}{10^3} = 3! \cdot 3 \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14).$$

Nyní nás již nezajímají číslice na jiných pozicích. Zaveďme relaci ekvivalence „ $\sim$ “: „mít stejnou poslední nenulovou číslicí“.

Označme  $C_n!$  poslední nenulovou číslicí na pozici jednotek čísla  $n!$ , pak

$$\begin{aligned} C_{15}! &\sim 3! \cdot 3 \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot (11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14) \sim \\ &\sim 3! \cdot 3 \cdot (4\underline{2} \cdot 7\underline{2}) \cdot (13\underline{2} \cdot 18\underline{2}) \sim \\ &\sim 6 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) \sim 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \sim 288. \end{aligned}$$

V posledních úpravách jsme využili skutečnosti, že číslice na pozici jednotek je určena součinem posledních číslic jednotlivých činitelů. Poslední nenulovou číslicí  $15!$  je osmička.

Ze dvou zbývajících nabízených odpovědí, můžeme navíc vyřadit (B), protože jistě  $9 \mid 15!$  a jen 3 a 8 doplní uvedené číslo tak, aby jeho ciferný součet byl dělitelný 9.

*Závěr:* Rozmazané číslice jsou tedy v pořadí zleva doprava 3 a 8.

Podívejme se ještě na problém obecněji. Naším úkolem je najít poslední nenulovou číslicí  $n!$  a počet nul za ní.

V předchozí úloze jsme ukázali, že pro počet nul za poslední nenulovou číslicí čísla  $n!$  je postačující znát mocninu pěti v jeho kanonickém zápisu. Pokud je  $n$  velké číslo, lze využít tzv. Legendreovy věty.

**Věta 2** (Legendreova)

Nechť  $v_p(n!)$  je pro libovolné prvočíslo  $p$  a přirozené číslo  $n$  nejvyšší mocninou prvočísla  $p$ , které dělí  $n$ , pak platí

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor,$$

kde výrazem  $\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$  rozumíme dolní celou část podílu  $\frac{n}{p^i}$ .

Např. hledáme-li exponent prvočísla 5 v kanonickém rozkladu  $127!$ , pak

$$\begin{aligned} v_p(127!) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{127}{5^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{127}{5^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{127}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{127}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{127}{5^4} \right\rfloor + \dots = \\ &= 25 + 3 + 1 + 0 + \dots = 29. \end{aligned}$$

V prvočíselném rozkladu  $127!$  je tedy  $5^{29}$ , a proto v dekadickém zápisu čísla  $127!$  je na konci 29 nul.

Pro nalezení posledního nenulového čísla  $n!$  budeme postupovat obdobně jako v předchozí „klokanské“ úloze. Nejprve zapišme všechny činitele dělitelné pěti a ostatní čísla seskupíme do čtveřic:

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = \\ &= 5 \cdot 10 \cdot \dots \cdot \left(5 \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot \dots = \\ &= 5^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} \cdot \left(1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor\right) \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot \dots = \\ &= 5^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} \cdot \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor! \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9) \cdot \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Každá závorka obsahuje součin čtyř po sobě jdoucích čísel, z nichž ani jedno není dělitelné pěti. Každou čtveřici v závorce můžeme zapsat takto:

$$(5k+1) \cdot (5k+2) \cdot (5k+3) \cdot (5k+4).$$

Algebraickými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} (5k+1) \cdot (5k+2) \cdot (5k+3) \cdot (5k+4) &= \\ &= 5^4 \cdot (k^4 + k^2) + 10 \cdot (5^3 k^3 + 5^2 k^2 + 25k) + 24, \quad \text{kde } k \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$



Součet  $k^4 + k^2 = k^2(k^2 + 1)$  jako součin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel je pro libovolné  $k \in \mathbb{N}_0$  sudé číslo, proto

$$10 \mid [5^4 \cdot (k^4 + k^2) + 10 \cdot (5^3 k^3 + 5^2 k^2 + 25k)]$$

a součin čtyř po sobě jdoucích čísel v kterékoli závorce končí číslicí čtyři (v textu podtržena). Je tedy dělitelný dvěma. Těchto závorek se součinem čtyř čísel je právě  $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ , proto lze psát:

$$n! = 5^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} \cdot \lfloor \frac{n}{5} \rfloor! \cdot 2^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} \cdot \underbrace{(\text{číslo končící dvojkou}) \cdot \dots \cdot (\text{číslo končící dvojkou})}_{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor\text{-krát}} \cdot m.$$

Číslo  $m$  je rovno součinu čísel, které nenáleží žádné čtveřici v závorce. V tomto součinu je počet činitelů roven zbytku po dělení čísla  $n$  pěti.

Hledaná poslední nenulová číslice  $n!$  je tedy stejná, jako poslední číslice čísla

$$\lfloor \frac{n}{5} \rfloor! \cdot (\text{číslo končící dvojkou}) \cdot \dots \cdot (\text{číslo končící dvojkou}) \cdot m$$

a v souladu s výše uvedeným značením můžeme psát

$$C_{n!} \sim \lfloor \frac{n}{5} \rfloor! \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}_{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor\text{-krát}} \cdot m = \lfloor \frac{n}{5} \rfloor! \cdot 2^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} \cdot m. \quad (2)$$

Zbývá určit poslední číslici čísla  $m$ , které může nabývat pěti možných tvarů.

1.  $m = 5k + 1$  pro  $n \equiv 1 \pmod{5}$
2.  $m = (5k + 1) \cdot (5k + 2)$  pro  $n \equiv 2 \pmod{5}$
3.  $m = (5k + 1) \cdot (5k + 2) \cdot (5k + 3)$  pro  $n \equiv 3 \pmod{5}$

Zbývající dva případy nemusíme uvažovat, neboť pokud  $n \equiv 4 \pmod{5}$ , nebo  $5 \mid n$ , pak po úpravě rovnice (1), budou všichni činitelé součástí některé čtveřice, proto  $m = 1$ .

V první případě je  $m$  jedno číslo ve tvaru  $5k + 1$  a navíc  $m = n$ . Pro libovolné  $k \in \mathbb{N}_0$  je poslední číslicí čísla  $m$  jednička (ta ale v součinu hodnotu poslední číslice neovlivní), nebo šestka.

V druhém případě je  $m$  součinem dvou čísel tvaru  $(5k + 1) \cdot (5k + 2)$  a můžeme psát

$$m = (5k + 1) \cdot (5k + 2) = 5k(5k + 3) + 2.$$

- Je-li  $k$  sudé, pak  $k = 2l$  a  $m = 10l(10l + 3) + 2$ .
- Je-li  $k$  liché, pak  $k = 2l + 1$  a  $m = 10(2l + 1)(5l + 4) + 2$ .

Pro libovolné  $k$  je tedy číslicí na pozici jednotek dvojka.

Ve třetím případě je  $m$  součinem tří čísel  $(5k + 1) \cdot (5k + 2) \cdot (5k + 3)$  a můžeme psát

$$m = (5k + 1) \cdot (5k + 2) \cdot (5k + 3) = 5(25k^3 + 11k) + 150k^2 + 6.$$

Výraz  $(25k^3 + 11k)$  je sudý pro libovolné  $k \in \mathbb{N}_0$ , a proto je vždy poslední číslicí šestka.

Z výše uvedeného vyplývá, že číslo  $m$  může mít na pozici jednotek pouze 1, 2, nebo 6. Pro zjednodušení výsledného vztahu pro výpočet poslední nenulové číslice a vzhledem k předchozím řádkům si uvědomme:

- Pokud je  $n$  číslo ve tvaru  $n = 5k + 3$ , je poslední číslice čísla  $m$  šestka, a platí  $6 = 3!$ .
- Pokud je  $n$  číslo ve tvaru  $n = 5k + 2$ , je poslední číslice čísla  $m$  dvojka, a platí  $2 = 2!$ .
- Pokud je  $n$  číslo ve tvaru  $n = 5k + 1$ , pak platí  $n = m$ , a poslední číslice čísla  $m$  je jednička pro sudá  $k$ , neboli  $1 = 1!$  (ta poslední číslicí neovlivní), nebo šestka pro lichá  $k \geq 1$ . V tomto okamžiku je nutné si uvědomit, že pokud násobíme šesti libovolné sudé číslo  $c$ , má výsledek na pozici jednotek stejnou číslici jako  $c$ . V takovém případě se tedy chová šestka jako jednička. Tohoto faktu můžeme využít, protože ve výrazu (2) se pro  $n \geq 6$  v součinu vždy objeví sudý činitel. V opačném případě je  $n = m = 1$ .

Lze tedy obecně psát

$$C_n! \sim \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor! \cdot 2^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} \cdot r!, \quad \text{kde } r \text{ je zbytek po dělení } n \text{ číslem } 5.$$

Můžeme proto vyslovit následující větu.

### Věta 3

Nechť  $n$  je libovolné přirozené číslo, pak pro poslední nenulovou číslici  $C_n!$  čísla  $n!$  platí

$$C_n! \sim \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor! \cdot 2^{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor} \cdot r!,$$

kde  $r$  je zbytek po dělení  $n$  číslem 5.

Ukážeme si to na konkrétním příkladě. Hledáme-li např. poslední nenulovou číslici  $127!$ , pak podle předchozí věty platí

$$C_{127!} \sim \left\lfloor \frac{127}{5} \right\rfloor! \cdot 2^{\lfloor \frac{127}{5} \rfloor} \cdot 2! \sim 25! \cdot 2^{25} \cdot 2!.$$

Pro nalezení poslední nenulové číslice  $25!$  opět využijeme odvozený vztah:

$$C_{25!} = 5! \cdot 2^5 \cdot 0!.$$

Dosazením dostáváme

$$\begin{aligned} C_{127!} &\sim 5! \cdot 2^5 \cdot 0! \cdot 2^{25} \cdot 2! \sim \\ &\sim 120 \cdot 2^{31} \sim 2 \cdot (2^4)^7 \cdot 2^3 \sim 2 \cdot 6^7 \cdot 8 \sim \\ &\sim 2 \cdot 6 \cdot 8 \sim 96 \sim 6. \end{aligned}$$

Ve druhé úpravě jsme využili ekvivalenci  $C_{120} \sim C_2$ , ve třetí úpravě ekvivalenci  $C_{24} \sim C_6$  a ve čtvrté úpravě poznatku, že libovolná přirozená mocnina šesti má poslední číslici 6.

*Závěr:* Poslední nenulová číslice čísla  $127!$  je 6.

## Literatura

- [1] *Nocar, D., Vaněk, V.:* Matematický klokan pro žáky základních škol I. MFI, roč. 31 (2022), č. 3, s. 178–188.
- [2] *Matematický klokan* [online]. Olomouc, 2022 [cit. 22.4.2024]. Dostupné z: <http://www.matematickyklokan.net/>
- [3] *Mazumdar, T., Sehgal, R., Ben, A., Khim, J.:* Rightmost Non-zero Digit of  $n!$  [online]. San Francisco, 2024 [cit. 1.4.2024]. Dostupné z: <https://brilliant.org/wiki/rightmost-non-zero-digit-of-n/>
- [4] *Švrček, J., Calábek, P., Vaněk, V.:* Péče o matematické talenty v České republice. Vydavatelství UP, Olomouc, 2008.
- [5] *Vaněk, V., Calábek, V., Nocar, D.:* České stopy v Matematickém klokanovi. MFI, roč. 27 (2018), č. 5, s. 334–346.

# Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 12. 2024 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi zveřejníme.

## Úloha 295

Nechť  $D$  je bod strany  $BC$  rovnostranného trojúhelníku  $ABC$ , kde  $|BD| = 2|CD|$ . Označme  $E$  patu kolmice z vrcholu  $B$  k přímkce  $AD$  a  $F$  ( $F \neq A$ ) průsečík přímky  $AD$  s kružnicí opsanou uvažovanému trojúhelníku. Dokažte, že trojúhelníky  $BDE$  a  $CDF$  mají stejné obsahy.

*Józef Kalinowski (Polsko)*

## Úloha 296

Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$V = \max\{3a + b, 8a^2\} + \max\{3b + a, 8b^2\},$$

kde  $a, b$  jsou reálná čísla, jejichž součet je roven 1.

*Jaroslav Švrček*

Dále uvádíme řešení úloh 291 a 292, jejichž zadání jsme zveřejnili v prvním čísle letošního (33.) ročníku našeho časopisu.

## Úloha 291

Pro trojmístné číslo uvažujeme tři součiny všech dvojic číslic tohoto čísla. Určete počet trojmístných čísel, v nichž je aspoň jeden uvedený součin roven aritmetickému průměru zbylých dvou součinů.

*Jaroslav Zhouf*

*Řešení.* Označme  $a, b, c$  číslice hledaného čísla a předpokládejme, že platí  $a \leq b \leq c$ . Jelikož jsou to číslice trojmístného čísla, alespoň jedna z nich je nenulová, tedy  $c > 0$ . Dále platí  $ab \leq ac \leq bc$ . Jelikož aritmetický průměr dvou čísel leží mezi nimi, hledáme takové číslice, pro něž platí

$$ac = \frac{ab + bc}{2}.$$

Tuto rovnici upravíme do tvaru

$$(2c - b)(2a - b) = b^2, \quad (1)$$

přítom  $b$  považujeme za parametr. Vzhledem k tomu, že  $2c - b \geq c > 0$  a  $b^2 \geq 0$  platí  $2a - b \geq 0$ , přitom oba činitele  $2c - b$  a  $2a - b$  jsou celá čísla a platí  $2c - b \geq 2a - b$ .

Pro  $b = 0$  dostáváme  $ac = 0$ , což vzhledem k podmínce  $c > 0$  znamená  $a = 0$  a  $c$  je libovolná nenulová číslice. Z těchto tří číslic lze sestavit právě devět vyhovujících trojmístných čísel  $\overline{c00}$ .

Pro  $b \neq 0$  rovnici (1) řeší čísla  $2c - b = 2a - b = b$ , tedy  $a = b = c$ , ze kterých lze sestavit 9 vyhovujících čísel  $\overline{bbb}$ .

Dále hledíme řešení rovnice (1), pro která je  $2c - b > 2a - b$ , tedy  $c > b > a$ , odkud  $b < 9$ . Pro zbývající liché číslice  $b$  má číslo  $b^2$  jediný rozklad na dva různé činitele, a to  $2c - b = b^2$  a  $2a - b = 1$ . Protože  $c$  je číslice, platí  $b + b^2 = 2c \leq 18$ , odkud plyne  $b < 4$ .

- Pro  $b = 1$  dostáváme  $(2c - 1)(2a - 1) = 1$ . Oba činitele jsou přirozená čísla, musí být rovny jedné, což je ve sporu s  $c > a$ .
- Pro  $b = 3$  dostáváme  $(2c - 3)(2a - 3) = 9$ . Pro  $c > a$  to znamená  $2c - 3 = 9$  a  $2a - 3 = 1$ , tedy  $(a, b, c) = (2, 3, 6)$ . Z těchto tří různých (nenulových) číslic lze sestavit 6 vyhovujících trojmístných čísel.

Pro sudé číslice  $b > 0$  rovnici (1) upravíme na tvar

$$(c - \frac{1}{2}b)(a - \frac{1}{2}b) = \frac{1}{4}b^2,$$

s činiteli  $c - \frac{1}{2}b$ ,  $a - \frac{1}{2}b$ , které jsou opět celými čísly.

- Pro  $b = 2$  to znamená  $(c - 1)(a - 1) = 1$ , tedy  $c - 1 = a - 1 = 1$ , ale to je spor s podmínkou  $c > a$ .
- Pro  $b = 4$  to znamená  $(c - 2)(a - 2) = 4$ . Pro  $c > a$  nutně  $c - 2 = 4$  a  $a - 2 = 1$ , tedy  $(a, b, c) = (3, 4, 6)$ . Z těchto tří různých nenulových číslic lze sestavit 6 vyhovujících trojmístných čísel.
- Pro  $b = 6$  to znamená  $(c - 3)(a - 3) = 9$ . Pro  $c > a$  nutně  $c - 3 = 9$  a  $a - 3 = 1$ , ovšem první rovnost nemůže platit pro žádnou číslici  $c$ .
- Pro  $b = 8$  to znamená  $(c - 4)(a - 4) = 16$ . Pro  $c > a$  nutně  $c - 4 \geq 8$ , tato nerovnost nemůže platit pro žádnou číslici  $c$ .

*Závěr.* Úloze vyhovuje celkem  $9 + 9 + 6 + 6 = 30$  trojmístných čísel.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Tomáš Dejmeš*, *G Kolín*, *Jana Fišerová* a *Nikola Hrabal*, oba *G Olomouc*.

Hejčín, *Mikuláš Hořenek*, WG Ostrava, *Tereza Kubínová*, G Praha 9, Litoměřická, *Václav Kučera*, SChŠ, ZŠ a G, Cheb, *Lukáš Nohejl*, GLJ, Hořešov, *Jan Paloncý*, G Šumperk, *Mikoláš Palouda*, G Český Krumlov, *Jiří Preč*, GJAK Uherský Brod, *David Schmidt*, GUB Jablonec nad Nisou, *Petr Starý*, G České Budějovice, *Jírovcova*, *Piotr Szatan*, II LO v Tarnovských Horách (Polsko), *Jan Pavel Škoda*, OG G a ZŠ Babice, *Jakub Toupal*, G Plzeň, Mikulášské nám., *Adam Vášek*, GJB Beroun, *Martin Vořechovský*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše a *Petr Zaoral*, G Teplice.

Neúplná řešení zaslali *Martin Bryja*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše a *Petr Karlík*, G Praha 10, Voděradská.

### Úloha 292

Určete všechny dvojice  $(x, y)$  reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$\begin{aligned}\sin(x + y) &= \cos(x - y), \\ \cos(x + y) &= \sin(x - y).\end{aligned}$$

*Jaroslav Švrček*

*Řešení.* Při řešení této soustavy užijeme následující součtovou formuli: Pro libovolná reálná čísla  $\alpha$  a  $\beta$  platí

$$\begin{aligned}\sin \alpha - \cos \beta &= \\ &= \sin \alpha - \sin\left(\beta + \frac{1}{2}\pi\right) = 2 \sin \frac{\alpha - \left(\beta + \frac{1}{2}\pi\right)}{2} \cos \frac{\alpha + \left(\beta + \frac{1}{2}\pi\right)}{2} = \\ &= 2 \sin\left(\frac{1}{2}(\alpha - \beta) - \frac{1}{4}\pi\right) \cos\left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta) + \frac{1}{4}\pi\right).\end{aligned}$$

První rovnici upravíme do tvaru

$$0 = \sin(x + y) - \cos(x - y) = 2 \sin\left(y - \frac{1}{4}\pi\right) \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right),$$

zatímco druhou

$$\begin{aligned}0 &= \sin(x - y) - \cos(x + y) = \\ &= 2 \sin\left(-y - \frac{1}{4}\pi\right) \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = -2 \sin\left(y + \frac{1}{4}\pi\right) \cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right).\end{aligned}$$

Odtud plyne, že:

- a) buď  $\cos\left(x + \frac{1}{4}\pi\right) = 0$ , tedy  $x + \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi + k\pi$  pro libovolné celé číslo  $k$  a dvojice

$$(x, y) = \left(\frac{1}{4}\pi + k\pi, y\right)$$

je řešením dané soustavy pro libovolné celé číslo  $k$  a libovolné reálné číslo  $y$ ,

b) nebo současně  $\sin(y - \frac{1}{4}\pi) = 0$  a  $\sin(y + \frac{1}{4}\pi) = 0$ . Z první rovnice existuje celé číslo  $l$  tak, že  $y - \frac{1}{4}\pi = l\pi$ , tedy  $y = l\pi + \frac{1}{4}\pi$ . Dosazením do druhé rovnice ovšem dostaneme

$$\sin(y + \frac{1}{4}\pi) = \sin(l\pi + \frac{1}{2}\pi) = \cos l\pi = (-1)^l \neq 0.$$

V tomto případě neexistuje žádné reálné řešení.

*Závěr.* Řešeními dané soustavy rovnic jsou všechny dvojice reálných čísel

$$(x, y) = (\frac{1}{4}\pi + k\pi, y),$$

kde  $k$  je libovolné celé číslo a  $y$  libovolné reálné číslo.

*Poznámka.* Všechny úpravy byly ekvivalentní, zkouška tak není nezbytnou součástí řešení.

Správná řešení zaslali *František Jáchim* z Volyně, *Martin Bryja*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Tomáš Dejmek*, G Kolín, *Jana Fišerová* a *Nikola Hrabal*, oba G Olomouc-Hejčín, *Petr Karlík*, G Praha 10, Voděradská. *Tereza Kubínová*, G Praha 9, Litoměřická, *Lukáš Nohejl*, GLJ, Holešov, *Jan Paloncý*, G Šumperk, *Mikoláš Palouda*, G Český Krumlov, *Jiří Preč*, GJAK Uherský Brod, *Michal Roček*, SPŠ a VOŠ Liberec, *Petr Starý*, G České Budějovice, Jírovcova, *Piotr Szatan*, II LO v Tarnovských Horách (Polsko), *Jan Pavel Škoda*, OG G a ZŠ Babice, *Adam Vášek*, GJB Beroun a *Petr Zaoral*, G Teplice.

Neúplné řešení zaslal *Karol Gajdoš* z Trnavy.

*Pavel Calábek*

## Stimulácia žiakov k experimentálnej činnosti prostredníctvom učebných aktivít

TATIANA SUKELOVÁ, KLÁRA VELMOVSKÁ

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, Bratislava

Experimentálna činnosť je neoddeliteľnou súčasťou vyučovania fyziky. V cieľoch predmetu fyzika na Slovensku [1] je uvedené, že „žiaci aplikujú empirické metódy práce – pozorovanie, experimentovanie, meranie a spracovanie nameraných hodnôt fyzikálnych veličín pri skúmaní fyzikálnych javov“. Vo vyučovacom procese považujeme za dôležitý prvok to, aby sa žiaci so záujmom podieľali na experimentálnej činnosti. Preto sa v práci zameriavame na podnecovanie žiakov k experimentálnej činnosti prostredníctvom stimulov. Žiaci sú na vyučovaní vystavení rôznym stimulom, či už želaným, alebo neželaným. Opakujúcim používaním rovnakého stimulu žiaci strácajú pozornosť a ich záujem o učenie klesá. Je potrebné stimuly obmieňať, vymýšľať nové a striedať stimuly s rôznou podnetnosťou [2]. Preto sme doposiaľ zostavili súbor štyroch stimulov, ktorých podstatou je stimulovať žiakov k experimentálnej činnosti. Pri aplikácii týchto stimulov do vyučovacieho procesu na dostupnom výbere základných a stredných škôl nás zaujíma názor učiteľov, ktorí budú stimuly do vyučovania zavádzať. Zaujímajú nás kritéria, podľa ktorých učitelia budú voliť daný stimul a na základe toho budeme schopní zostaviť súbor vlastností, funkcií, ktoré by mala obsahovať aktivita podnecujúca žiakov k experimentovaniu. Doposiaľ nami vytvorený súbor stimulov tvoria pojmové komiksy, hranie rolí, únikové miestnosti, fyzikálna hra.



## Podnecovanie experimentálnej činnosti

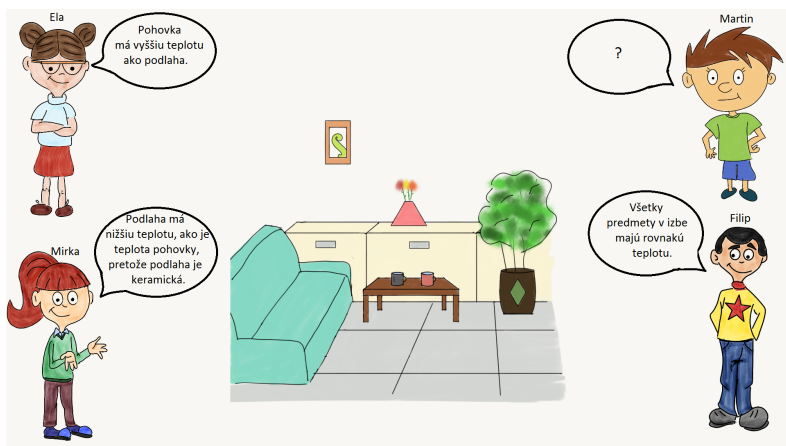
Z výsledkov štúdie [3], zaoberajúcej sa vplyvom aktivít spojených s fyzikálnym experimentovaním na zvýšenie záujmu žiakov o štúdium fyziky, vyplynulo, že takéto aktivity sprevádzané náročnými otázkami môžu zvýšiť záujem žiakov o učenie a rozvoj logického myslenia.

Predpokladom úspešnej implementácie experimentovania na hodinách fyziky je pripravenosť učiteľov, primerané materiálne vybavenie laboratórií, ale i dostatok vhodných stimulov pre žiakov. Podnecovanie žiakov k aktivite autori prepájajú s aktivizačnými metódami [4, 5, 6]. Kotrba a Lacina [7] spomínajú ako postupovať pri vytváraní aktivizačných metód. Ako prvé uvádzajú stanoviť si jasný cieľ, ktorý by sa mal dosiahnuť pomocou metódy. Následne je vhodné si vytvoriť náplň, nejaký scenár, obsah, príbeh, ktorý bude podkladom. Lehenová [2] tvrdí „aby podnet získal pozornosť človeka, musí spĺňať určité kritéria: sila podnetu, kontrast medzi podnetmi, prerušované pôsobenie podnetov, zmena a novosť podnetov a javov, potreby a záujmu“. Teda je potrebné podnety obmieňať, vymýšľať nové podnety, ale zároveň aj sriedať menej podnetné aktivity s tými viac podnecujúcimi. My sa zaujíname o tie, v ktorých vidíme potenciál na stimulovanie žiakov k experimentálnej činnosti, preto sme zostavili súbor štyroch stimulov, ktorým sa v texte venujeme.

## Pojmové komiksy

Pojmové komiksy majú mnoho využití vo vyučovacom procese, ako rozvíjať logické myslenie, sprístupňovať učivo formou približujúcou sa žiakom a rozvíjať diskusiu v triede. Autori Keogh a Naylor [8] definujú pojmové komiksy ako ilustrácie, ktoré poskytujú množstvo rôznych uhlov pohľadov na vedu v každodenných situáciách. Keogh a Naylor tvorili pojmové komiksy, aby podnecovali vedecké myslenie, a tak dochádzalo ku konfliktu názorov a vyvolávali diskusiu.

V zbierke [9, 10] sú zahrnuté fyzikálne témy zo 6. až 9. ročníka základnej školy. S touto zbierkou pojmových komiksov sme realizovali prieskum zameraný na podnecovanie diskusie. Na obr. 1 je ukážka pojmového komiksu. Z prieskumu vyplynuli súvisiace zistenia. Pojmové komiksy nemajú využitie len na rozvíjanie myšlienok žiakov, ale aj ako stimul k experimentálnej činnosti. Pri pozorovaní vyučovacích hodín v 7. ročníku ZŠ sa vyskytli situácie, v ktorých žiaci mali potrebu dokazovať tvrdenia postáv v pojmovom komikse.



Obr. 1 Pojmový komiks na tému Teplo

Pojmové komiksy ako jeden z prvkov súboru stimulov sme zaradili do výskumu týkajúceho sa podnecovania žiakov k experimentálnej činnosti. Počiatkové zistenia uvádzame v kapitole *Výsledky pilotného testovania* spolu s ostatnými použitými stimulmi.

## Hranie rolí

Hranie rolí (role-play) nie je často aplikované do vyučovacieho procesu. Kalhous a Obst [11] zaradili hranie rolí medzi inscenačné vyučovacie metódy, ale podľa nášho názoru hranie rolí sa nemusí spájať len s dramatizáciou, s vystupovaním žiakov na pomyselnom javisku, ale môže byť spájané s prezentovaním myšlienok žiakov v role inej postavy. Žiak môže prebrať rolu vedca, lekára, novinára alebo iného odborníka na danú tému v priebehu vyučovania.

V pilotnom testovaní sme aktivitu hrania rolí pripravili tak, aby žiaci prevzali na seba rolu vedca, odborníka vo svojom odbore. Hlavnou témou bola otázka *Môže uzavretá sústava počas chemickej reakcie zmeniť svoju hmotnosť?* Tému sme rozdelili do podtém a každá skupina pracovala na danej podtému. Ukážka jednej z podtém týkajúcej sa Zákona zachovania hmotnosti sa nachádza na obr. 2.

Úlohou žiakov bolo odpovedať na hlavnú tému a aj ju dokázať. Žiakom sme nepovedali, že to majú dokázať experimentom. Z pozorovania vyplývalo, že starší žiaci sa ťažšie vžívajú do role ako mladší žiaci. Tým, že žiaci nerobili experimenty na hodinách fyziky, tak presun od myšlienkového

### Podtéma: Zákon zachovania hmotnosti

Zákon zachovania hmotnosti v roku 1748 ako prvý definoval ruský chemik Michail Vasilievič Lomonosov a nezávisle od neho v roku 1774 francúzsky chemik Antoine Laurent Lavoisier.



Znenie zákona:

*V uzavretej sústave sa súčet hmotnosti látok, ktoré vstupujú do reakcie, rovná súčtu hmotnosti látok, ktoré reakciou vznikajú.*

Nie vždy to však vieme vážením dokázať – vtedy ak vzniknú plynne produkty, ktoré uniknú, tie nevieme odvážiť, ak ich nezachytíme.

Lomonosov ako prvý vystihol, že pri chemických reakciách platí aj zákon zachovania energie. Po ňom preskúmali a dokázali platnosť zákona hmotnosti a energie viacerí vedci.

Príklady:

Pri horení dreva – hmotnosť dreva (teda reaktantu) nebude rovnaká ako hmotnosť popola (produktu), pretože vznikli ako produkty ešte aj plynne látky (dym).



Obr. 2 Zákon zachovania hmotnosti

experimentu k reálnemu experimentu si vyžadoval podnet od učiteľky. Hranie rolí si vyžaduje prax a opakované používanie, aby sa postupne odstránili nedostatky a tým sa zlepšil aj plynulosť priebehu hrania rolí.

## Únikové miestnosti

Únikové miestnosti (escape rooms) nabrali na popularite počas pandémie Covid-19 najmä v online priestore. Nicholson [12] definuje únikové miestnosti ako tímové hry naživo, v ktorých hráči odhaľujú stopy, riešia puzzle a uskutočňujú úlohy v jednej alebo viacerých miestnostiach, a tak dosiahnu špecifický cieľ v limitovanom čase. Na začiatku učiteľ vysvetlí pravidlá hry pre hráčov a prezradí im príbeh. Únikové miestnosti vyžadujú tímovú prácu, komunikáciu, manažovanie úloh, kritické myslenie, pozornosť pre detaily a druhotné myslenie.

Pilotné testovanie prebiehalo tak, že sme aktivitu Únikovej miestnosti porovnávali s aktivitou Pokusy zadané otázkou. V závere únikovej miestnosti, keď žiaci prejdú rôznymi úlohami a hádankami (obr. 3) v online priestore je pokus a po jeho realizácii žiaci „odomknú“ únikovú miestnosť získaním kľúča. Na základe našich zistení v aktivite *Úniková miestnosť* žiaci videli podstatu realizácie pokusu, na rozdiel od aktivity Pokusy zadané otázkou. Žiakov na únikovej miestnosti lákalo vyriešenie záhady. Ma-

nipulácia s aplikáciou bola pre žiakov nenáročná, plynulá a ľahko sa im prechádzalo z jednej aplikácie na inú.

The image displays three educational puzzles. At the top is a crossword puzzle with words like 'SERN', 'ZLTA', 'DUNK', 'UHOLOPADU', 'ZIAROVKA', and 'SOSP'. Below it is a word search puzzle with the word 'SPEKTRUM' hidden. The bottom puzzle is a multiple-choice question: 'Ako sa správa lúč prechádzajúci ohniskom po prechode spojnu šošovkou?' with four options (A, B, C, D) regarding the angle of refraction. Below the question is an image of the Earth from space and a text passage about light rays from the Sun.

**Ako sa správa lúč prechádzajúci ohniskom po prechode spojnu šošovkou?**

A Lúč je po prechode spojnu šošovkou rovnobežny s optickou osou.

B Lúč po prechode spojnu šošovkou prechádza ohniskom šošovky.

C Lúč sa po prechode spojnu šošovkou neláme.

D Lúč po prechode spojnu šošovkou prechádza optickým stredom šošovky.

SINKO je od nás veľmi ďaleko a v porovnaní s našou Zemou je veľmi veľké. Zdrojom svetla je celá obrovská plocha slnečného kotúča. Slnečné lúče dopadajúce na povrch Zeme sa nám javia ako \_\_\_\_\_ lúče. Veľkosť plochy osvetlenej slnečným svetlom sa pri vzdalovaní od tienidla s otvorom \_\_\_\_\_. Svetelné lúče \_\_\_\_\_ sú rozbiehavé a osvetlená plocha na štvorcovom papieri sa zväčšuje so vzdalovaním štvorcového papiera od žiarovky. \_\_\_\_\_ je prirodzeným a žiarovka je \_\_\_\_\_ zdrojom svetla. Lúče dopadajúce zo Slnka a zo žiarovky sa šíria \_\_\_\_\_.

Obr. 3 Úlohy: Krížovka, Milionár, Doplňovačka

## Fyzikálna hra

Stolové hry sa využívajú na podporu výučby fyziky [13], na hodnotenie vedomostí žiakov pomocou skupinových stolových hier [14]. Vytvárajú sa za rôznymi účelmi. My sme vytvorili fyzikálnu hru na princípe hry *Tipni si*, ale s fyzikálnou podstatou, v ktorej skupiny žiakov odpovedajú na vopred pripravené otázky z danej fyzikálnej témy. Správnu odpoveďou na otázky získavajú tri nápovede, zadanie a 3 pomôcky v danom poradí (obr. 4). Pravidlá hry sú jednoznačné, a to pri nesprávnej odpovedi na otázku žiaci nezískavajú žiadnu nápoveď, zadanie ani pomôcku, musia čakať na ďalšie kolo s otázkou. Žiaci, ak sú si istí ako zrealizujú pokus a dokážu zadanie, môžu z hry odísť a pokus zrealizovať. Ak sa im to nepodarí, do hry sa môžu opätovne vrátiť a pokračovať v odpovedaní na otázky.

**Topenie ľadu v rôznych tkaninách.**

Pomôcky: rôzne hrubé ponožky, kocky ľadu.

A. Hinty/nápovede:

1. Ako to, že je bežecké oblečenie také tenké, ale človeku nie je chladno pri behu v zime?
2. Oblečený snehuliak v kožuchu.

B. Zadanie: Dokáž, že oblečenie nezohrieva telesá.

C. Pomôcky:

1. Ľad
2. Hrubé ponožky
3. Tenšie ponožky

Obr. 4 Znenie nápovedí, zadania a pomôcok

Fyzikálnu hru sme v pilotnom testovaní porovnávali so štandardne zadaným pokusom. Fyzikálna hra bola náročnejšia v tom, že žiaci nezískali presný postup pokusu, ale iba nápovede, zadania a pomôcky. Z výsledkov prieskumu vyplynulo, že žiaci boli viac spokojní so svojím výkonom vo fyzikálnej hre a aj vyhotovenie pokusu bolo pre nich zaujímavejšie pri fyzikálnej hre.

## Výsledky pilotného testovania

Pilotné testovanie sme uskutočnili na dvoch školách (137 žiakov). Z našich zistení vyplynuli nasledujúce závery:

- Pojmové komiksy sú nenáročné na prípravu pre učiteľa, ak použije pojmové komiksy z našej zbierky. Väčšina práce je presmerovaná na žiakov. Žiaci musia nájsť riešenie pojmového komiksu, vybrať si pomôcky

a zrealizovať pokus. Pri pojmových komiksoch musí učiteľ žiakom zdôrazňovať, že je potrebné ich tvrdenie dokázať.

- Hranie rolí je náročné na prípravu pre učiteľa, ak učiteľ nemá materiály, z ktorých môže čerpať a podľa ktorých môže postupovať. Ak učiteľ nepoužije nami pripravené materiály, tak je potrebné, aby zvolil hlavnú tému a tú rozdelil do podtém. Úlohou žiakov je nájsť v materiáloch nezrovnalosť, opraviť ju a dokázať pokusom. Žiaci by sa mali vžiť do role vedcov, čo pomáha žiakom sa odosobniť, pozrieť sa na problém z iného uhla, ale nenastane to automaticky. Od žiakov to vyžaduje skúsenosti s takýmto typom úloh a dostatočné inštrukcie zo strany učiteľa.
- Únikové miestnosti sú náročnejšie na prípravu pre učiteľa. Učiteľ musí mať vopred pripravené pomôcky, na ktorých sú kľúče k riešeniam a mobily alebo tablety, pretože sa úniková miestnosť nachádza v online priestore. Pre žiakov boli únikové miestnosti vítanou zmenou, pretože bežne na hodinách nepoužívali tablety.
- Fyzikálna hra je náročná z organizačného hľadiska v porovnaní s ostatnými nami navrhnutými stimulmi. S tým by mohol učiteľovi pomôcť rovesnícky mentoring, v ktorom učiteľ poverí mentorov organizáciou hry.

## Záver

Žiaci by mali vedieť analyzovať problémové situácie, sformulovať problémy a ich riešenia pomocou nastolenia hypotéz, vedieť zdôvodniť a preveriť správnosť riešenia pomocou vhodne zvoleného experimentu. Existujú rôzne spôsoby, ako žiakov podnietiť k experimentálnej činnosti. V texte uvádzame opis štyroch stimulov – pojmové komiksy, hranie rolí, únikové miestnosti a fyzikálna hra. Na záver uvádzame zistenia z pilotného výskumu.

## Literatúra

- [1] *ŠPÚ (Štátny pedagogický ústav): Štátny vzdelávací program: fyzika – nižšie stredné vzdelávanie. ŠPÚ, Bratislava, 2015.*
- [2] *Lehenová, A.: Vybrané kapitoly z pedagogickej a školskej psychológie, 1. diel. Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity, 2012.*
- [3] *Nugroho, S., Waslam: Physics experiment activities to stimulate interest in learning physics and reasoning in high school students. Journal of Physics: Conference Series, vol. 1567(2) (2020), 022069.*

- [4] *Skalková, J.*: Obecná didaktika. Grada, Praha, 2007.
- [5] *Zelina, M.*: Aktivizácia a motivácia žiakov na vyučovaní. Metodické centrum, Banská Bystrica, 2002.
- [6] *Maňák, J., Švec, V.*: Výukové metody. Paido, Brno, 2003.
- [7] *Kotrba, T., Lacina, L.*: Praktické využití aktivizačních metod ve výuce. Společnost pro odbornou literaturu, Brno, 2007.
- [8] *Keogh, B., Naylor, S.*: Concept Cartoons in Science Education. Millgate House Publishers, 2000.
- [9] *Sukeřová, T.*: Concept cartoons vo vyučovaní fyziky. Bachelor thesis, Comenius University, FMFI, Bratislava, 2019.
- [10] *Sukeřová, T.*: Podnecovanie diskusie zaradením pojmových komiksov [Master's thesis, Comenius University]. FMFI, Bratislava, 2021.
- [11] *Kalhous, Z. a kol.*: Školní didaktika. Portál, Praha, 2002.
- [12] *Nicholson, S.*: Peeking Behind the Locked Door: A Survey of Escape Room Facilities. 2015. <https://scottnicholson.com/pubs/erfacwhite.pdf>
- [13] *Cardinot, A., McCauley, V., Fairfield, J.*: Designing physics board games: a practical guide for educators. Physics Education, 57(3) (2022), s. 1–12.
- [14] *Dziob, D.*: Board Game in Physics Classes—a Proposal for a New Method of Student Assessment. ResSciEduc, 50, 2020, s. 845–862.

# Skrytý význam druhého ohniska eliptické dráhy Měsíce

VLADIMÍR ŠTEFL

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

První Keplerův zákon [1] uvádí, že v jednom ze dvou ohnisek eliptické dráhy se nachází centrum přitažlivosti. Co se však nalézá v druhém ohnisku? Většinou se spokojujeme s odpovědí, že jde pouze o geometrický bod, který nemá žádný fyzikální význam. To se týká pouze případu ideálních sférických kosmických těles, v reálných situacích u nepravidelných těles tato představa není správná.

Keplerovy zákony neplatí pouze pro planety obíhající kolem Slunce, ale pro libovolné soustavy těles v poli centrálních gravitačních sil, tedy také pro měsíce oklopující planety Sluneční soustavy. Poměrně početná skupina z nich se vyznačuje jednostranně vázanou rotací, periody jejich rotací kolem vlastních os jsou shodné s dobami oběhů. Jsou to měsíce Marsu Phobos a Deimos, měsíce Jupiteru Io, Europa, Ganymed a Callisto, Amalthea, měsíce Saturnu Tethys, Dione, Rhea, Japetus a Titan, měsíce Uranu Miranda, Ariel, Titania, Oberon či měsíce Neptunu Triton a Proteus. Nejdelší osy elipsoidů těles měsíců směřují k prázdnému druhému ohnisku jejich eliptických drah. To leží uvnitř mateřských planet, proto zvláštní fyzikální význam situace u zmiňovaných měsíců nemá.

Jiné to je u soustavy Země-Měsíc, kterou rozebereme podrobněji. Vzhledem k poměru hmotností Země a Měsíce 81,3 : 1 se barycentrum nalézá v tělese Země. Zjednodušeně proto uvádíme, že Měsíc obíhá kolem Země. V prvním přiblížení se pohybuje po eliptické dráze s numerickou excentricitou  $e = 0,0549$ . Soustava je unikátní v tom, že druhé ohnisko leží mimo Zemi, více než tři průměry od ní, vzdálenost ohnisek měsíční dráhy činí 42 207 km. Pro úplnost připomínáme, že perioda rotace Měsíce je souhlasná s dobou jeho oběhu po dráze kolem Země.

Výklad fyzikální stránky začneme nejprve interpretací astronomického pozorování složitého pohybu Měsíce v historii. Italský fyzik a astronom Galileo Galilei (1564–1642; obr. 1) zjistil při sledování Měsíce dalekohledem, že není přesně natočen k Zemi stále stejnou stranou, v dopise [2] napsal: „...otáčí se nyní trochu doprava a pak trochu doleva.“ Galileo tak objevil v pohybu Měsíce tzv. optickou libraci, v soudobé terminologii libraci v délce. Pozoroval více než 50 % povrchu našeho souputníka, dnes víme že to je zhruba 59 %. Popsaný jev nijak zvlášť výrazně neprezentoval, neboť měl zřejmě s jeho výkladem určité problémy. Galileova principiální koncepce rovnoměrného pohybu nebeských těles po kruhových drahách nebyla v souladu se vznikem librace v délce.

Její vysvětlení podal Johannes Hevelius (1611–1687; obr. 2) roku 1647 v [3]. Objasnili jev jako důsledek nerovnoměrného pohybu Měsíce po eliptické dráze a jeho rovnoměrné rotace kolem vlastní osy.

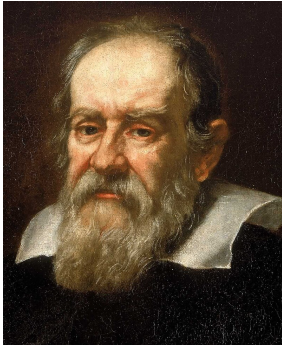
Na základě zpracování dlouhodobého pozorování Měsíce publikoval Giovanni Domenico Cassini (1625–1712; obr. 3) r. 1693 své tři empirické zákony, týkající se zákonitostí optické librace Měsíce [4]:

1. Měsíc rotuje od západu k východu kolem své polární osy rovnoměrně s periodou rotace souhlasnou s dobou oběhu kolem Země.



2. Rovina rovníku Měsíce zůstává konstantní a zachovává stejný úhel sklonu k ekliptice, tj. k rovině oběhu Země kolem Slunce.
3. Rovina vytvořená z normály k rovině ekliptiky a normály k rovině oběžné dráhy Měsíce obsahuje rotační osu Měsíce

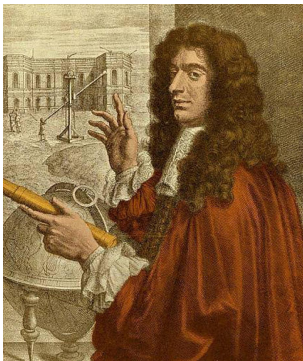
Zákony představují zjednodušený model oběžného pohybu Měsíce po eliptické dráze podléhající rovnoměrné precesi. Měsíc byl předpokládán jako rotující tuhé tělesa. Shrnuto popisují optickou libraci jako součet dvou rovnoměrných pohybů, které jsou synchronizovány s periodou rotace a precesí dráhy Měsíce. Třetí zákon je pozoruhodný tím, že tři roviny – ekliptiky, rovníku Měsíce a jeho dráhové roviny – se protínají v jedné přímce. Při tom dvě z nich jsou pohyblivé.



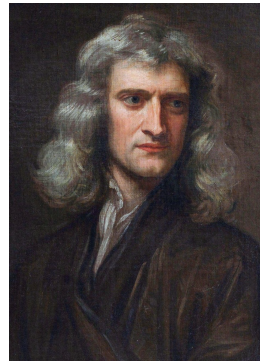
Obr. 1 (zdroj: Wikipedie)



Obr. 2 (zdroj: Wikipedie)



Obr. 3 (zdroj: Wikipedie)



Obr. 4 (zdroj: Wikipedie)

Koncem sedmnáctého století již bylo známo, že Měsíc nemá přesně sférický tvar a tudíž jeho těleso se kývá. Touto skutečností se zabýval Isaac Newton (1643–1727; obr. 4), který v třetí knize Principií [5] provedl výklad optické librace v délce a šířce. V sedmnácté větě patnácté poučce uvedl: „...stejná strana Měsíce bude vždy natočena velmi blízko směru na vzdálenější ohnisko jeho dráhy ...jedná se o libraci v délce.“ Newton dospěl k závěru, že Měsíc je stále natočen ve směru k druhému ohnisku jeho dráhy. Ve skutečnosti proces optické librace probíhá spojitě, velká osa tělesa Měsíce vykonává kývavé pohyby kolem směru k prázdnému ohnisku.

V důsledku třicáté osmé věty se Newton vyjádřil takto: „... probíhá to, že ze Země pozorujeme vždy jednu a tutéž stranu Měsíce, v jiné poloze by se těleso Měsíce nemohlo nacházet v klidu, ale neustále by se k této poloze vracelo při kývání. Ale toto kývání při působících malých silách je velmi pomalé, tak že strana, která musí být stále otočena k Zemi by mohla být otočena k druhému ohnisku měsíční dráhy (z příčin ukázaných v sedmnácté větě) bez toho, že by byla ihned navracena do směru k Zemi.“ Zde je vyjádření Newtona nejasné a nejednoznačné, hlubší interpretace podávána není. Jak by se těleso Měsíce mohlo současně natáčet do obou ohnisek od sebe vzdálených? Newton však zřetelně upozornil na existenci malého kývání Měsíce kolem jeho středu hmotnosti, což je považováno za předpověď dynamické – fyzické librace [6, 7].

Později Joseph Louis Lagrange (1736–1813; obr. 5) získal r. 1764 cenu Francouzské akademie věd za řešení problematiky pohybu Měsíce. Ve své teorii [8] upřesnil tvar jeho tělesa na trojosý elipsoid, jehož největší osa směřuje k Zemi. Odklon reálného pohybu Měsíce od Cassiniho zákonů se v jeho úvahách promítl do kývání Měsíce kolem určité střední polohy, jednalo se o fyzickou libraci.

Následně Pierre Simon Laplace (1749–1827; obr. 6) rozvíjel výklad pohybu Měsíce vytvořením již ucelené teorie fyzické librace [9]. Potvrdil závěry Lagrange a doplnil hypotézu kývání Měsíce vzhledem k rovnovážné poloze. Proces kývání rozložil na dvě složky. První z nich popisovala to, že směr hlavní osy setrvačnosti Měsíce v důsledku optické librace se odklání od směru k Zemi, přitažlivost Země má snahu ji vrátit do původní polohy. Druhá složka zachycovala okolnost, že Měsíc v době formování a evoluce změnil svůj původně sféricko-symetrický tvar. Prvotní kývání tělesa Měsíce kolem rovnovážné polohy bylo postupně zbrzdováno, až jeho perioda rotace byla rovna době oběhu kolem Země. Laplace zjistil, že doba kývání závisí na hlavních momentech setrvačnosti tělesa Měsíce.



JOSEPH LOUIS LAGRANGE.



Obr. 5 (zdroj: Wikipedie) Obr. 6 (zdroj: Wikipedie)

Přejdeme k soudobé interpretaci pohybů tělesa Měsíce. Optická librace v délce vede k sledovanému kývání až  $\pm 7^{\circ}54'$  pro pozorovatele na Zemi s periodou anomalistického<sup>1)</sup> měsíce 27,55 dne. Na vzhled Měsíce má vliv rovnoměrná rotace kolem vlastní osy, nerovnoměrný pohyb po eliptické kolem Země. Při rovnoměrné rotaci Měsíce bychom pozorovali pouze jednoduchý jev optické librace v délce. Její zásluhou se těleso Měsíc mírně natáčí k Zemi jednou východním a podruhé západním okrajem. Druhý způsob kývání, optická librace v šířce, s periodou drakonického<sup>2)</sup> měsíce 27,21 dne, se uskutečňuje proto, že rovník Měsíce svírá s ekliptikou úhel  $1^{\circ}31'$  a současně dráhový sklon Měsíce k ekliptice činí  $5^{\circ}9'$ . Tedy sklon rovníku Měsíce pro pozorovatele na Zemi se pohybuje v mezích  $\pm 6^{\circ}40'$ . Sklon měsíční dráhy k ekliptice vyvolává libraci v šířce, nevelké kývání nahoru a dolů. V průběhu pohybu Měsíce po jeho dráze nesměruje v průměru za periodu hlavní osa setrvačnosti měsíčního tělesa k hmotnému středu soustavy Země–Měsíc, nýbrž uskutečňuje kývání ve směru prázdného ohniska měsíční dráhy, jehož parametry propočítal Kondratyev [10].

Na pozadí dominantní optické librace v délce probíhá fyzická librace. Jde o malé reálné kývání tělesa Měsíce vzhledem ke středu hmotnosti. Je způsobené gravitační interakcí hlavně se Zemí, Sluncem, ale i s ostatními kosmickými tělesy. Problematika výzkumu jevu je těsně spojena s tvarem Měsíce a s jeho hlavními momenty setrvačnosti. Fyzická librace je vyvolávána a udržována odklonem výběžků tělesa od přesného směru k Zemi. Její amplituda závisí na stupni „protáhlosti“ Měsíce ve směru k Zemi, přesněji

<sup>1)</sup>Doba mezi dvěma po sobě následujícími průchody Měsíce perigeem eliptické dráhy.

<sup>2)</sup>Doba mezi dvěma po sobě následujícími průchody Měsíce výstupným uzlem dráhy.

na tzv. *mechanické eliptičnosti*, určované parametrem

$$f = \frac{B(C - B)}{A(C - A)},$$

kde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  jsou hlavní momenty setrvačnosti Měsíce. Amplituda kývání pozorovaná ze Země dosahuje  $0,2''$ , tudíž je i malá jistota určení hodnoty  $f$  z pozorování. Výzkumy vedly ke stanovení tzv. kritické hodnoty

$$f \doteq 0,60-0,73.$$

S výzkumem fyzické librace souvisí tzv. dynamická metoda určování tvaru Měsíce. Na základě znalosti rozložení hustot a tlaků ve vrstvách v nitru Měsíce jsou propočítávány hlavní momenty setrvačnosti tělesa Měsíce vstupující do parametru  $f$ . Odtud jsou následně stanovovány hodnoty polárního a rovníkového poloměru.

Soudobé představy o fyzické libraci Měsíce vycházejí z rozdílnosti středu hmotnosti s geometrickým středem tělesa. Spojnice obou směřuje k druhému ohnisku a uskutečňuje kolem něho nevelké kývání, jak jsme již konstatovali. Původní osa tělesa Měsíce směřující k Zemi byla před ztuhnutím polotekuté matérie vlivem slapových sil prodloužena. Jádro Měsíce se zformovalo v minulosti v průběhu gravitační diferenciace, střed hmotnosti Měsíce se posunul směrem k Zemi v důsledku asymetrie působících slapových sil. Došlo tak k vychýlení polohy hmotného středu Měsíce. Země svou přitažlivostí ho navracela do původního stavu.

Moderní metody studují kývavý pohyb tělesa Měsíce v prostoru rozložený do tří os. Dynamický jev fyzické librace je zkoumán prostřednictvím pozorování, jakož i teoretickými metodami výpočtu gravitačního potenciálu Měsíce. Na jeho povrchu umístěné seismografy umožňují studovat jeho vnitřní strukturu. Laserová lokace Měsíce založená na systému odražečů výrazně zpřesnila vzdálenosti. Obě uvedené metody poskytly spolehlivé parametry kývání jeho tělesa a vedly k určení hlavních momentů setrvačnosti. Zjednodušený počáteční teoretický model předpokládal rotaci tuhého tělesa Měsíce ve vnějším silovém poli, vytvářeném gravitací Země a Slunce. Tato představa neobjasnila úplně pozorování, předpokládala nulové zpoždování efektů, což však nebylo potvrzeno. Ze závěrů studia šíření seismických vln v tělese Měsíce vyplývá, že v hloubce přibližně 1 000 km se již vrstva nechová jako pevná látka nýbrž jako plastická polotekutá matérie. Tato vrstva leží na rozhraní povrchová kůra–vnější jádro. Teoretické výpočty fyzické librace Měsíce proto nyní vycházejí z modelu složeného

z uvedených dvou vrstev. V posledních letech pozorované aktivní procesy na povrchu Měsíce by mohly dosvědčovat existenci zmiňované polotekuté vrstvy.

Článek poskytuje materiál pro doplnění výkladu Keplerova eliptického zákona. Je v něm popsána stručná historie poznávání složité problematiky pohybů tělesa Měsíce, s kterou je spojena utajená a méně známá úloha druhého prázdného ohniska jeho eliptické dráhy. Připomínáme, že základní vlastnosti Měsíce a jeho význam pro Zemi byly již dříve popsány v článku [11].

## Literatura

- [1] *Kepler, J.*: Astronomia Nova AITIOΛOΓHTOΣ seu physica cœlestis, tradita commentariis de motibus stellæ Martis ex observationibus G. V. Tycho-nis Brahe. Heidelberg, 1609.
- [2] *Galilei, G.*: Lettera di Galileo Fulgenzio Micanzio Venezia 7. 11. 1637. Le opere di Galileo vol. XVII. 3595. Tipografia Barbera, Firenze, 1906.
- [3] *Heveliusz, J.*: Selenographia:sive Lunae description. Danzig, 1647.
- [4] *Cassini, G. D.*: Traité de l'origine et du progress de l'astronomie et de son usage dans la geographie et dans la navigation. Paris, 1693.
- [5] *Newton, I.*: The Principia – Mathematical Principles of Natural Philosophy. University of California Press, Berkeley, Los Angeles, London, 1999 (anglický překlad Cohen, I. B., Whitman, A).
- [6] *Kondratyev, B. P.*: Ob odnoj nětočnosti Isaaka Njutona. Kvant 40 (2009), č. 5, s. 38–41.
- [7] *Kopal, Z.*: Physics and Astronomy of the Moon. 2. vyd., Academic Press, New York and London, 1971.
- [8] *Lagrange, J. L.*: Recherches sur la libration de la Lune. Ouevres de Lagrange, vol.5, s. 5. Paris, 1766.
- [9] *Laplace, P. S.*: Traité de mécanique céleste tome 3. De L'Imprimerie de Crapelet. Chez J. B. M. Duprat, Paris, 1802.
- [10] *Kondratyev, B. P.*: The Deviation of the Lunar Center of Mass to the East of the Direction Toward the Earth. A Mechanism Based on Orbital Evolution. Astronomy Reports 62 (2018), č. 8, s. 542–550.
- [11] *Štefl, V.*: Měsíc ve školní výuce. Matematika-fyzika-informatika, roč. 24 (2015), č. 5, s. 357–370.

# Myšlenkové mapy a jejich aplikace ve výuce termiky na ZŠ

GABRIELA KAUFNEROVÁ

Fakulta pedagogická ZČU, Plzeň

První část tohoto článku se věnuje myšlenkovým mapám v obecné rovině, shrnuje pravidla pro jejich tvorbu i možnosti vytváření digitálních myšlenkových map. Druhá část se zaměřuje na možné využití myšlenkových map v jednotlivých fázích výuky termiky na základní škole na základě vlastních praktických zkušeností.

## Co jsou myšlenkové mapy?

Pojem myšlenkové mapy může znít jako něco nového, ale opak je pravdou. Už v dávných dobách je velcí myslitelé, filozofové, matematici atd. používali pro utřídění svých myšlenek. Podle Chytkové a Černého [5] mohou být nejstarším příkladem zápisy ze staré Číny, které znázorňují tradiční léčitelství ve stromové struktuře. V 60. letech minulého století byl pojem myšlenkové mapy uchopen Tony Buzanem a definován jako: *základní organizační myšlenkový nástroj* [1, s. 8].

Ve výzkumném programu americké Cornellovy univerzity se v roce 1972 Joseph D. Novak snažil porozumět úrovni znalostí žáka v přírodních vědách a změnám v jeho znalostech v průběhu vzdělávání. Napadla ho myšlenka, že pojmová mapa vytvořená žákem reprezentuje hierarchizaci a organizaci jeho kognitivní struktury. Novak vnímal pojmové mapy jako vhodný nástroj pro znázornění žakových myšlenek [4, 6].

Myšlenkové a pojmové mapy jsou zaznamenávány grafickou technikou, která umožňuje našemu mozku efektivně třídit myšlenky. Využívají celé spektrum dovedností, jako je například: slovo, obraz, číslo, logika, rytmus, barva a prostorové podvědomí. Pomáhají člověku nejenom vstřebávat informace do paměti, ale také je z ní vyvolávat. Buzanovy myšlenkové mapy jsou v podstatě stejné jako Novakovy pojmové mapy, liší se od sebe pouze v struktuře a hierarchizaci jednotlivých pojmů.

## *Tvorba myšlenkových map*

Pro tvorbu myšlenkových map nepotřebujeme podle [2] příliš mnoho věcí. Zcela postačí čistý bílý nelinkovaný papír, barevná pera či tužky, přemýšlení a představivost. Papír by měl mít minimální formát A4 (ideálně A3) a při práci by měl být vždy položený na šířku, což je vhodnější pro rozšiřování a větvení mapy do stran. Barevné tužky a pera činí mapu přehlednější, takže se v ní lze rychleji orientovat. Barevnost mapy pomáhá oddělit jednotlivá témata a zapamatovat si informace. Je zapotřebí při jejich používání dávat pozor, aby nedošlo k zahlcení mapy, která by se pak stala nepřehlednou. Používání barev je zcela na našem uvážení a záměru, ale měli bychom dodržovat používání jedné barvy pro hlavní větve i k ní příslušné podvětvě.

K vytvoření správné myšlenkové mapy je podle [2] potřeba dodržovat následujících sedm kroků.

- Tvořit začínáme *uprostřed* čistého papíru, který by měl být položený na šířku.
- Hlavní myšlenku je vhodné vyjádřit *obrázkem*.
- Je přínosné používat různé *barvy*.
- K obrázku hlavní myšlenky připojujeme *hlavní větve*, ke kterým připojujeme větve druhé úrovně. K oběma potom připojujeme větve třetí úrovně atd.
- Všechny větve zakreslujeme jako *křivky*.
- V každé úrovni křivky je vhodné používat jedno jednoduché slovo nebo slovní spojení.
- V celé mapě zakreslujeme obrázky.

Myšlenkové mapy nemusí obsahovat pouze slova a větve, ale mohou se v nich nacházet obrázky a symboly, jak bylo uvedeno výše. Pomáhají snadněji si zapamatovat informace, zvýraznit nejdůležitější myšlenky, vnímat mapu jako celek, rychleji se v ní orientovat či propojit související pojmy. Obrázky a symboly přitom nemusí být výtvarně dokonalé.

Jelikož se při tvorbě myšlenkové mapy nepoužívají jenom slova, linie či logika, ale také symboly barvy a obrázky, jak bylo zmíněno výše; lze říci, že při jejich tvorbě pracuje celý mozek. Práce s nimi je jednoduchá. Mohou se využívat při různých obecných činnostech, jako je například: učení, brainstormingu či plánování.

Pro začlení myšlenkových map do výuky je zapotřebí, aby si na mapy žáci postupně zvykali. Ze začátku je vhodné, aby učitel vysvětlil žákům,

co je to myšlenková mapa, jak se s ní pracuje a vytvořil s nimi několik map společně. Pokud jsou žáci zvyklí, že učitel často mění výukové metody, tak pochopení a naučení se práce s myšlenkovými mapami jim nebude trvat dlouho (několik vyučovacích hodin).

### ***Tvorba digitálních myšlenkových map***

Jelikož v dnešní době digitální technologie tvoří nedílnou součást každodenní pedagogické praxe, tak je vhodné se věnovat i myšlenkovým mapám vytvářených v počítači. Práce s nimi a jejich tvorba je mnohem snadnější a rychlejší než s myšlenkovými mapami, které jsou tvořené na papíře. Lze je i snadněji editovat a nabízejí práci s větším množstvím informací [3].

Existuje nepřeberné množství aplikací, ve kterých lze vytvářet myšlenkové mapy. Před jejich používáním je zapotřebí si několik z nich vyzkoušet a vybrat si tu, která by vyhovovala učiteli při výuce nejvíce. Prakticky se nám nejvíce osvědčila aplikace **XMind** a webová stránka **Coggle**. Myšlenkové mapy vytvořené v XMind lze používat jako podklady pro výuku. V Coggle mohou žáci pracovat při plnění zadaných úkolů ve škole i doma. Pro práci v něm žáci potřebují počítač, tablet či telefon a připojení na internet, což v dnešní době mají prakticky všichni.

### **Aplikace myšlenkových map ve výuce termiky**

Myšlenkové mapy lze charakterizovat jako vhodný nástroj pro rozvoj tvořivé činnosti u žáků. Ve fyzice se mohou především využívat pro znázornění vztahů mezi jednotlivými pojmy probíraného učiva. Myšlenkové mapy najdou uplatnění ve všech fázích výukových hodin i v domácí přípravě v podobě domácích úloh. Jejich použití v jednotlivých fázích závisí na obsahu probíraného tématu a na jeho časovém harmonogramu (tabulka 1).

<b>Motivace žáků:</b>	
Pro správný rozvoj tvořivosti je zapotřebí u žáků dosáhnout nejvyšší možné vnitřní motivace, které lze dosáhnout vhodnou motivací na začátku probíraného tématu.	
<b>Žáci a jejich aktivizace</b>	Pro navození pozitivního vztahu žáků k probíranému tématu je zapotřebí vhodně zvolit počáteční aktivitu, při které budou kladně ohodnoceni učitelem i spolužáky.
<b>Myšlenkové mapy</b>	Jedním z možných nástrojů pro zvýšení vnitřní aktivity u žáků jsou myšlenkové mapy. Lze je zadávat na úvodní hodině probíraného tematického celku, např.: <i>Zaznamenej do myšlenkové mapy vše, co si představíš pod pojmem... ?</i>

Tab. 1: Motivace

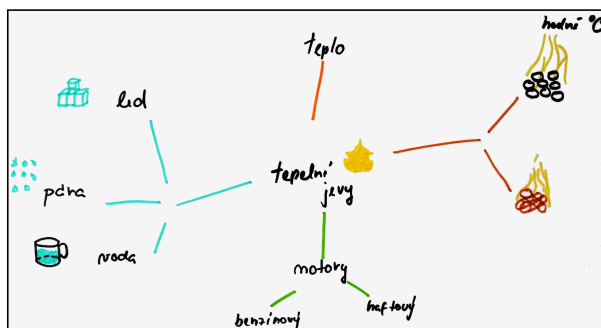


Na úvodní hodině tematického celku lze používat myšlenkové mapy jako počáteční aktivitu ve fázi motivace, protože myšlenkové mapy patří mezi nástroje, které mohou navýšit vnitřní aktivitu žáků při správném uchopením a začleněním do vyučovací hodiny.

### Příklad 1

Zaznamenej do myšlenkové mapy vše, co si představíš pod pojmem tepelné jevy?

Na úvodní hodině tematického celku Termika ve fázi motivace byly žákům rozdány papíry formátu A3 s uvedeným zadáním. Jejich úkolem bylo napsat, co si myslí, že se dozví v učivu o tepelných jevech pomocí myšlenkové mapy. Pracovali ve dvojicích, takže mohli diskutovat se sousedem v lavici. Ukázka jejich myšlenkové mapy je na obr. 1.



Obr. 1 Ukázka motivační myšlenkové mapy vytvořené žáky na úvod tématu Tepelné jevy

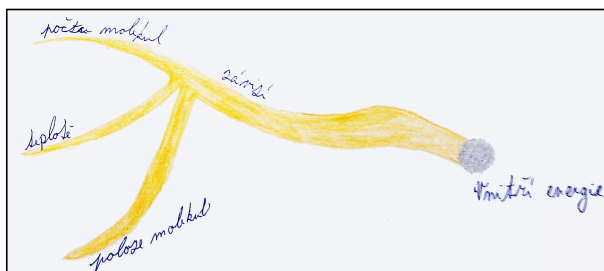
Většina žáků uvedla ve svých myšlenkových mapách, že budou probírat teplo, skupenství látek, tání, var a tepelné motory. Žáci při práci živě diskutovali v lavicích. Bylo patrné, že je vypracovávání zadané úlohy bavilo. Tu samou úlohu je možné zadat žákům znovu po probrání celého tematického celku Termika ve fázi aplikace či fixace učiva.

Ve fázi motivace lze používat i myšlenkové mapy, ve kterých si žáci zopakují starší učivo, které je nějakým způsobem provázáno s nově probíraným učivem či tematickým celkem.

### Příklad 2

Napiš, na čem závisí vnitřní energie, do myšlenkové mapy.

Myšlenková mapa na téma vnitřní energie byla žákům zadána v hodině při opakování učiva z předchozí hodiny, aby si zopakovali poznatky o vnitřní energii a aby se zároveň namotivovali na probírání nového učiva „Jak lze zvýšit vnitřní energii?“



Obr. 2 Ukázka motivační myšlenkové mapy vytvořené žáky na téma Vnitřní energie

Když žáci vypracovali myšlenkovou mapu, ve které si zapsali, na čem závisí vnitřní energie, byli seznámeni s tím, že se budeme následně zabývat novým učivem, jak lze vnitřní energii zvýšit (tab. 2).

<b>Expozice (nové učivo):</b>	
<b>Žáci a jejich aktivita</b>	Žáci zaznamenávají nové poznatky aktivní činnostmi do sešitu během vyučovací hodiny.
<b>Myšlenkové mapy</b>	Myšlenkové mapy najdou uplatnění i při probírání nového učiva, kdy je lze využít pro zápis poznámek do sešitu. Tato forma zápisu nám umožňuje znázorňovat vztahy mezi jednotlivými pojmy probíraného učiva. Díky čemuž si mohou žáci lépe zapamatovat nové učivo, provázat ho se stávajícími vědomostmi a snadněji a rychleji ho aplikovat při dalším použití.

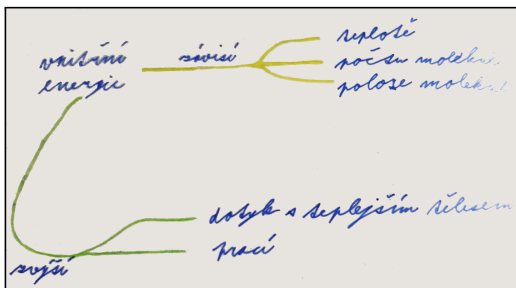
Tab. 2: Expozice (nové učivo)

U většiny hodin lze využívat myšlenkové mapy jako formu zápisu poznámek do sešitu při probírání nového učiva. Jejich velkou výhodou při psaní poznámek je, že zápis je rychlý, přehledný a rovnou žákům ukazuje vztahy mezi jednotlivými pojmy probíraného učiva.

### Příklad 3

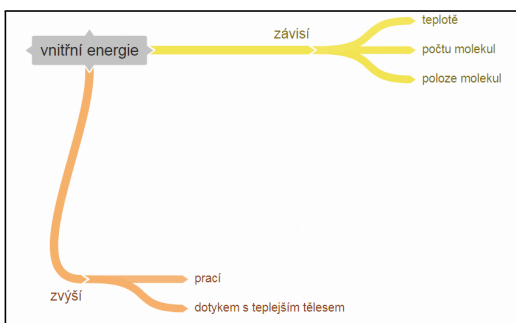
Jak lze zvýšit vnitřní energii?

Pro zapsání poznámek na nově probírané učivo: *Jak lze zvýšit vnitřní energii?*, jsme použili již vytvořenou myšlenkovou mapu na téma vnitřní energie, kterou si žáci vypracovali ve fázi motivace.



Obr. 3 Ukázka myšlenkové mapy vytvořené žáky na téma „Jak lze zvýšit vnitřní energii?“ při expozici učiva

Ve fázi expozice jsme si s žáky pomocí pokusů vysvětlovali učivo o způsobech zvyšování vnitřní energie a oni si postupně doplňovali již vytvořenou myšlenkovou mapu. Na obr. 3 vidíme zapsané poznámky jednoho z žáků pomocí myšlenkové mapy. Na konci vyučovací hodiny byla žákům zadána domácí úloha vytvořit si myšlenkovou mapu na probírané učivo znovu. Mohli ji vytvořit do sešitu či na webových stránkách Coogle.



Obr. 4 Ukázka domácí úlohy ve formě myšlenkové mapy na téma „Jak lze zvýšit vnitřní energii?“ (expozice)

Příklad domácí úlohy vytvořená žákem pomocí Coogle vidíme na obr. 4. Při plnění domácí úlohy žáci spíše volili pro tvorbu myšlenkové mapy aplikaci Coogle namísto kreslení do školního sešitu, protože vytvoření mapy pomocí Coogle je rychlejší.

Po delším čase, kdy jsme používali myšlenkové mapy jako formu zápisu poznámek do sešitu, byli žáci požádáni o zpětnou vazbu, zda jim více vyhovuje zapisovat si poznámky pomocí myšlenkové mapy nebo klasický způsobem jako poznámky zapsané ve větách. Přibližně polovina žáků uvedla, že by uvítala zapisovat si poznámky pomocí myšlenkové mapy, protože je to pro ně přehledné, srozumitelné, provázanější a že si učivo snadněji zapamatují. Druhá polovina žáků by naopak chtěla ponechat klasický způsob zápisu, protože jsou na tento způsob zvyklí a protože si učivo snadněji zapamatují. Při diskusi o způsobu zápisu i žáci, kteří preferují klasický způsob zápisu, uznali, že učivo je díky myšlenkovým mapám přehlednější. Žáci nakonec došli společně k závěru, že by chtěli zapisovat poznámky formou myšlenkové mapy a zároveň mít k dispozici i poznámky zapsané klasickým způsobem.

<b>Aplikace a fixace (učiva):</b>	
<b>Žáci a jejich aktivita</b>	Žáci aktivně používají získané vědomosti při plnění zadaného úkolu během vyučovací hodiny.
<b>Myšlenkové mapy</b>	Myšlenkové mapy lze používat během aplikace či fixace učiva například tvorbou myšlenkových map na již probrané učivo nebo doplňováním slepých map s chybějícími pojmy.

Tab. 3: Aplikace a fixace (učiva)

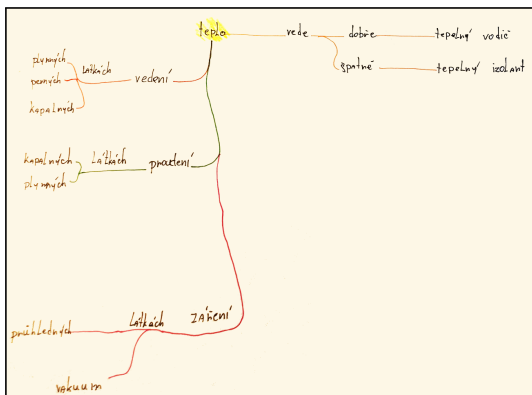
Při prohlubování či opakování učiva lze jako jednu z možných aktivit použít myšlenkovou mapu (tab. 3). Žáci mohou tvořit mapy na danou část probraného učiva či na probraný celý tematický celek.

#### **Příklad 4**

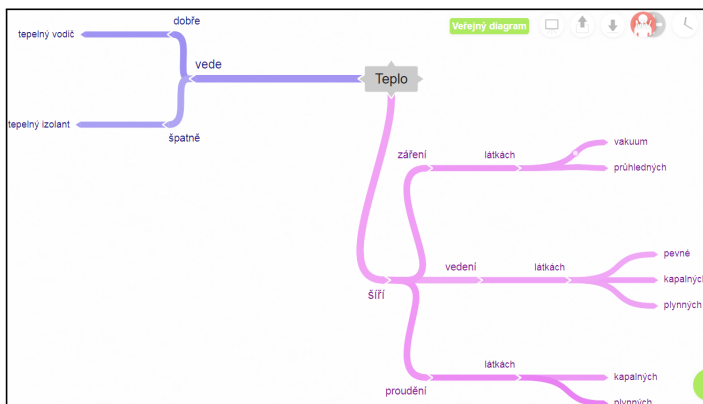
Zaznamenej do myšlenkové mapy, jakými způsoby se může šířit teplo?

Úloha byla zadána žákům v hodině věnované proudění a záření jako šíření tepla během fixace učiva a při závěrečném hodnocení jim byla ještě zadána jako domácí úloha. Mohli ji vypracovat na papír nebo vytvořit na webové stránce Coggle (obr. 5 a 6).

Souhrnné myšlenkové mapy jsou velmi užitečné při opakování učiva, protože si při jejich tvorbě žáci utřídí informace k danému učivu. Zároveň mají vše pohromadě a uspořádané. Při tvoření souhrnných map je vhodné ze začátku nechat žáky pracovat samostatně nebo ve dvojicích přiměřený čas a následně s nimi společně mapu dodělat. Myšlenková mapa na opakování učiva o teple na obr. 7 je názornou ukázkou.



Obr. 5 Ukázka domácí úlohy ve formě myšlenkové mapy na téma Šíření tepla

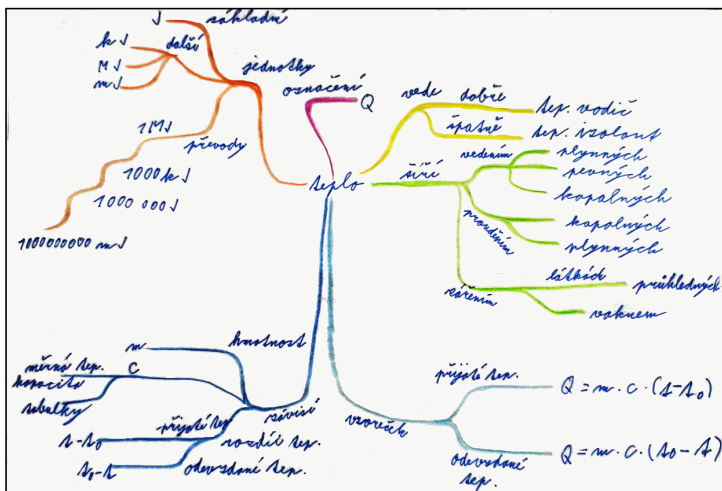


Obr. 6 Ukázka domácí úlohy ve formě myšlenkové mapy na téma Šíření tepla (aplikace a fixace)

### Příklad 5

Napiš vše, co jsi se doposud naučil/(a) o teple, pomocí myšlenkové mapy.

Při prohlubování a opakování učiva v hodinách lze používat také slepé myšlenkové mapy, do kterých žáci doplňují chybějící pojmy. Slepé mapy mohou být buď se slovy nebo beze slov pro doplnění. Mohou se aplikovat prakticky na každé probrané učivo.



Obr. 7 Ukázka domácí úlohy ve formě myšlenkové mapy na téma „Tepla“ (aplikace a fixace)

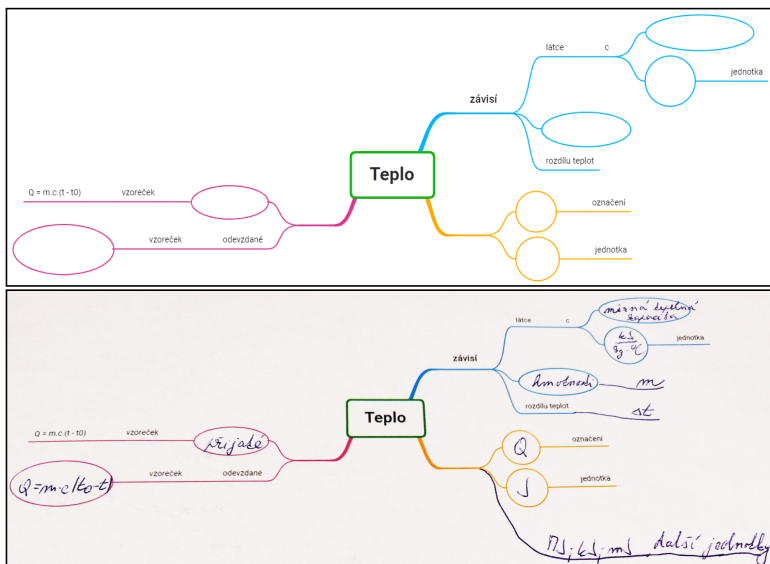
### Příklad 6

Doplň vhodná slova do prázdných bublin tak, aby myšlenková mapa dávala smysl.

Při prohlubování stávajícího či opakování staršího učiva je možnost používat slepé myšlenkové mapy beze slov jako jednu z možných aktivit. U těchto map musí žáci především zavzpomínat na již probrané učivo, rozpomenout se a správně vyplnit prázdné bubliny.

Slepé myšlenkové mapy beze slov pro doplnění byly většinou zadávány žákům neúplně, aby měli větší prostor pro svou tvořivost a aby je to nabádalo k tvorbě rozšířenější mapy. Na obr. 8 vidíme, že žák nejen mapu vyplnil, ale i doplnil o další informace týkající se tepla.

Ve fázi aplikace či fixace učiva najdou myšlenkové mapy uplatnění jako jedna z možných aktivit, při které si žáci opakují již probrané učivo jiným způsobem. Zapojují při jejich tvorbě obě dvě hemisféry, což jim pomáhá učivo si lépe zapamatovat, snadněji a rychleji ho dále používat při další činnosti, a především dojde k uvolnění přetížení jedné hemisféry. Mohou tak při plnění úloh, které jsou založené na tvorbě či doplňování myšlenkových map, dosáhnout vnitřního uspokojení a dát ve fyzice prostor své vlastní tvořivosti.



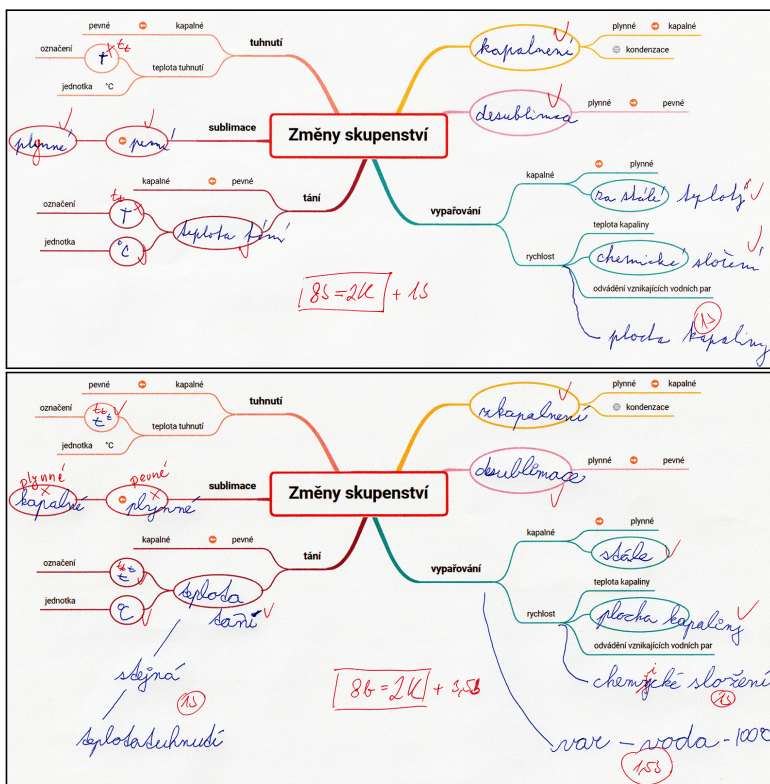
Obr. 8 Ukázka zadání a žakovského řešení domácí úlohy ve formě slepé myšlenkové mapy na téma Teplo (aplikace a fixace učiva)

Slepé mapy mohou posloužit i diagnostice znalosti žáků a jejich pochopení učiva podle obecných principů a zásad shrnutých v tab 4. Ve škole jsme pro hodnocení žakovských znalostí používali slepé myšlenkové mapy se slovy i beze slov, popř. měli žáci sami vytvořit celou myšlenkovou mapu na dané učivo. Pro jejich hodnocení jsme používali kombinovaný způsob.

Slepé myšlenkové mapy beze slov se také osvědčily při hodnocení malých pětiminutovek. Velkou výhodou bylo, že jejich vyplňování žákům nezabralo příliš mnoho času, pokud byli na test připraveni. Žákům s poruchami učení a žákům-cizincům bylo možné zadávat během testování lehčí variantu slepé myšlenkové mapy se slovy pro doplnění. Jejich používání bylo velice přínosné nejenom pro učitele, ale také pro samotné žáky, pokud se na test připravili. Zadaná slova jim pomohla zčásti či zcela doplnit slepou myšlenkovou mapu a oni tak mohli zažít pocit vnitřního uspokojení z dosaženého cíle.

Příkladem takového využití je slepá myšlenková mapa na změny skupenství (obr. 9) zadaná žákům při hlubším opakování daného učiva. Hodnocena byla stanovením počtu bodů za správně vyplněné prázdné bubliny. Tyto body se pak pomocí stanoveného klíče přepočítaly na odpovídající

známku. Na obr. 9 si lze povšimnout, že u některých pojmů chybí další bubliny pro doplnění. Záměrně se tak žákům vytváří lepší prostor pro jejich tvořivost, cílem bylo je nenápadně přimět k tomu, aby začali slepou myšlenkovou mapu vyplňovat nad rámec pouhého povinného doplnění prázdných bublin. Opustili-li žáci svoji komfortní zónu a doplnili do slepé myšlenkové mapy další informace, tak získali v rámci bodového hodnocení další body navíc. V rámci tematického celku se žákům získané body navíc sčítají a po ukončení tematického celku se jim promění na odpovídající známku dle stanoveného klíče.



Obr. 9 Žákovská řešení slepé myšlenkové mapy na téma Změny skupenství (diagnóza)



<b>Diagnóza:</b>	
Během tvořivé činnosti je zapotřebí mít vnitřní motivaci k dané činnosti a okamžitou a jednoznačnou zpětnou vazbu. Obě dvě tyto funkce ve výuce plní hodnocení. Tradiční způsob hodnocení poskytuje především motivaci vnější, ale pro tvořivou činnost je zapotřebí mít i určitou úroveň vnitřní motivace. Je důležité mít zpětnou vazbu v hodnocení. Je také zapotřebí rozlišit hodnocení tvořivé činnosti od hodnocení znalostí žáků.	
<b>Tvořivá činnost žáků</b>	<p><b>Individuální slovní hodnocení</b> Při používání individuálního slovního hodnocení se hodnotí vzniklý produkt a také postup vedoucí k tomuto produktu. Takže žáci i učitel mají okamžitou zpětnou vazbu, která je při tvořivé činnosti velice důležitá.</p> <hr/> <p><b>Formativní hodnocení</b> Formativní hodnocení je dobrým nástrojem pro komunikaci mezi učitelem a žáky. Podává učiteli informaci o tom, jak žáci rozumí učivu během jeho probírání. Pro formativní hodnocení lze používat barevné terčíky, tabulky či smajlíky.</p>
<b>Znalosti žáků</b>	<p><b>Hodnocení známkou</b> Hodnocení známkou se používá ve školách nejčastěji. Žáci i jejich rodiče jsou na tento způsob hodnocení zvyklí. Pětistupňová škála známek je přehledná, ale je po stránce obsahu značně omezená. Tento hodnoticí systém není schopen popsat posun jednotlivých žáků.</p> <hr/> <p><b>Bodové hodnocení</b> Bodové hodnocení se vyskytuje ve školách mnohem méně než hodnocení známkou. Žáci a jejich rodiče nejsou na tento druh hodnocení příliš zvyklí, i když poskytuje lepší informace o posunech žáků v časovém rozmezí. Jejich případné zakolísání ve výkonu lze dohnat snahou a nepřenáší se dál do konečného hodnocení. Bodové hodnocení vede žáky k přirozené soutěživosti a vytváří podmínky pro navýšení vnitřní motivace u žáků.</p> <hr/> <p><b>Kombinované hodnocení</b> Během kombinovaného způsobu hodnocení se používá hodnocení známkou a bodové hodnocení. Žáci jsou během probíraného tematického celku hodnoceni body. Po probírání učiva je jim podle dosažených bodů přidělena známka.</p>
<b>Myšlenkové mapy</b>	Myšlenkové mapy je vhodné hodnotit kombinovaným způsobem spolu s individuálním slovním hodnocením či formativním hodnocením.

Tabulka 4 Diagnóza

Na obr. 9 jsou k nahlédnutí dvě odevzdané práce žáků. Na horním je mapa žáka, který si nedal příliš záležet na správném označení teploty tání a tuhnutí a ani se moc nesnažil slepou myšlenkovou mapu doplnit o další informace – doplnil pouze jednu informaci navíc oproti ostatním spolužákům. Žáci v dané prověrce většinou získali 2 až 4 body navíc za vlastní tvořivost při doplňování mapy, jak je vidět na spodním části obrázku. Test žáka je v tomto případě slušně vyplněný, pouze popletl pojem sublimace, a získal navíc 3,5 bodu za doplnění dalších informací: teplota tání je stejná jako teplota tuhnutí, rychlost vypařování závisí také na chemickém složení kapaliny, součástí vypařování je var a varu u vody nastává při 100 °C.

Pokud bychom chtěli přesnější informace o znalostech žáků, lze použít myšlenkové mapy, které si žáci vytvářejí celé sami. Před zadáním takovéto písemné práce je nutné si promyslet, která slova uvedená v myšlenkové mapě budou v rámci hodnocení klíčová a která slova budou navíc za tvořivou činnost. Ze zkušenosti lze říci, že žáky vytvořené myšlenkové mapy pak nebylo vůbec jednoduché opravovat a vyhodnotit. Celý proces hodnocení zabral velké množství času. V rámci porovnání se slepými myšlenkovými mapami se jejich využití ukázalo značně neefektivní.

Slepé myšlenkové mapy se nám osvědčily jako vhodný nástroj pro ověřování znalostí žáků oproti myšlenkovým mapám, které si žáci vytvářeli sami. Jejich tvorba, použití a opravování je rychlé a snadné. Navíc pro vytvoření testu pro žáky se specifickými vzdělávacími potřebami a žáky-cizince stačí k mapě přidat jenom slova pro doplnění.

## Literatura

- [1] *Buzan, T.*: How to mind map. Thorsons, London, 2002.
- [2] *Buzan, T.*: Mentální mapování. Portál, Praha, 2007.
- [3] *Buzan, T., Buzan, B.*: Myšlenkové mapy: probuďte svou kreativitu, zlepšete svou paměť, změňte svůj život. Computer Press, Brno, 2011.
- [4] *Holubová, R.*: Pojmové mapy ve výuce fyziky [online, cit. 17. 6. 2024]. FyzWeb, Katedra didaktiky fyziky MFF UK v Praze, 2013. Dostupné z: [http://fyzweb.cz/materialy/vlachovice/2013/materialy/holubova/c-holubova-pojmove\\_mapy.pdf](http://fyzweb.cz/materialy/vlachovice/2013/materialy/holubova/c-holubova-pojmove_mapy.pdf).
- [5] *Chytková, D., Černý, M.*: Efektivní učení: techniky přemýšlení, soustředění a komunikace s využitím myšlenkových map. BizBooks, Brno, 2016.
- [6] *Valadares, J., Fonseca, F., Monteiro Soares, M. T.*: Using conceptual maps in physics classes. In: A. J. Cañas, J. D. Novak, F. M. González (Eds.): Concept Maps: Theory, Methodology, Technology. Proc. of the First Int. Conf. on Concept Mapping, Pamplona, Spain 2004 [online, cit. 17. 6. 2024]. Dostupné z: <http://cmc.ihmc.us/papers/cmc2004-210.pdf>.

# INFORMATIKA

## Jedničkový obdélník (Úlohy z MO kategorie P, 48. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Při našem putování po zajímavých úlohách Matematické olympiády kategorie P (programování) se tentokrát vydáme do velmi daleké historie a ukážeme si jednu soutěžní úlohu z krajského kola 38. ročníku MO. Tento ročník olympiády probíhal ve školním roce 1988/89, tedy ještě za socialistického Československa a navíc v době, kdy kategorie P teprve čerstvě vznikala. V té době u nás nebyly k dispozici osobní počítače, takže zadání soutěžních úloh se nezachovalo v elektronické podobě a nenačtete ho proto ani v archívu úloh na webu olympiády – tento archív začíná až 42. ročníkem MO ve školním roce 1992/93. Museli jsme proto sáhnout do starého archívu „papírového“. Zadání úlohy uvádíme bez úprav v původní historické podobě.

\* \* \* \* \*

Je dáno dvojrozměrné pole  $A$  (matice) velikosti  $n \times m$ , jehož prvky jsou pouze čísla 0 nebo 1. Navrhněte algoritmus, který v daném poli  $A$  nalezne maximální „obdélník“ obsahující samé jedničky (maximální ve smyslu „obsahující co nejvíc jedniček“). Výsledkem práce algoritmu bude čtveřice čísel  $i, j, k, l$  takových, že  $A_{i,j}$  je prvek v levém horním rohu a  $A_{k,l}$  prvek v pravém dolním rohu nalezeného maximálního obdélníku.

Naším úkolem tedy je nalézt v zadané matici nul a jedniček co největší souvislý obdélníkový výřez (podmatici), který bude tvořen pouze jedničkami. Takovému obdélníkovému výřezu budeme nadále zkráceně říkat *jedničkový obdélník*. Je to úloha poměrně snadná a nezáludná, která

nevyžaduje znalost žádných pokročilých algoritmů nebo datových struktur. Přesto ale i při řešení takto jednoduché úlohy si můžeme ukázat celou řadu užitečných postupů a programovacích technik, které nám umožní snížit časovou složitost výsledného programu. Při návrhu efektivního algoritmu bývá často výhodné využít vhodný předvýpočet – tedy nepracovat přímo se zadanými vstupními daty, ale nejprve si je nějak vhodně upravit, aby pak následný vlastní výpočet probíhal rychleji. Ukážeme si postupně několik různých způsobů, jaký předvýpočet můžeme zvolit.

V zadání úlohy není uvedeno, zda máme počítat s číslováním řádků a sloupců matice  $A$  od 0 nebo od 1. Pro postup řešení úlohy to není vůbec podstatné, naše volba se projeví pouze ve výsledku (posunutí výsledných hodnot indexů  $i, j, k, l$  o 1). V matematice jsme zvyklí na číslování řádků matice od 1 do  $n$  a sloupců od 1 do  $m$ , proto se toho budeme držet i v řešení naší úlohy. V současných programovacích jazycích rodiny C (C, C++, Java, C#) nebo ve stále užívanějším Pythonu se ovšem všechna pole indexují automaticky od 0. To nám nebude vadit, v programu si jednoduše vytvoříme pole s  $n + 1$  řádky a  $m + 1$  sloupci a obsah zkoumané matice  $A$  do něj uložíme až od řádku 1 a od sloupce 1. V řádku a ve sloupci s číslem 0 budou v našem pracovním poli uloženy samé nuly, což se nám při řešení bude dokonce občas velmi hodit.

Původní zadání úlohy se také nijak nezmiňuje o situaci, kdy úloha nemá žádné řešení. To nastane v případě, že zadaná matice  $A$  obsahuje samé nuly. Správný program nesmí v takové situaci zhavarovat, musí ji spolehlivě detekovat a vypsat vhodný výsledek. V našich programových ukázkách budeme v takovém případě místo souřadnic levého horního a pravého dolního rohu nalezeného jedničkového obdélníku vypisovat čtyři nuly.

Po úvodním rozboru situace se můžeme pustit do řešení úlohy. Začneme jako obvykle tím nejjednodušším postupem – mechanickým vyzkoušením všech možností. Budeme postupně zkoumat všechny možné obdélníkové výřezy matice  $A$ , zda jsou tvořeny samými jedničkami. Kdykoliv najdeme obdélník tvořený samými jedničkami, porovnáme jeho velikost s velikostí dosud největšího nalezeného jedničkového obdélníku a pokud je větší, uložíme si jeho velikost a souřadnice. Každý obdélníkový výřez je určen polohou svého levého horního rohu a pravého dolního rohu. Levý horní roh můžeme zvolit  $n \cdot m$  způsoby, pro každou takovou volbu zvolíme pravý dolní roh  $O(n \cdot m)$  způsoby, takže celkem projdeme  $O(n^2 \cdot m^2)$  podmatic. Každý zvolený obdélník projdeme a zkontrolujeme v čase  $O(n \cdot m)$ . Celková časová složitost tohoto primitivního řešení je tudíž  $O(n^3 \cdot m^3)$ .

```

n, m = (int(_) for _ in input("Rozměry matice: ").split())
print("Matice 0/1 po řádcích:")
a = [[0] * (m+1)]
for r in range(n):
    a.append([0] + [int(_) for _ in input().split()])

def test(a, i, j, k, l):
    # kontrola obdélníka a[i][j] - a[k][l] na samé 1
    for x in range(i, k+1):
        for y in range(j, l+1):
            if a[x][y] == 0:
                return False
    return True

def obdelnik(a):
    # zkoušení všech obdélníkových výřezů matice a
    max_p = 0
    max_i, max_j, max_k, max_l = 0, 0, 0, 0
    for i in range(1, n+1):
        for j in range(1, m+1):
            for k in range(i, n+1):
                for l in range(j, m+1):
                    plocha = (k-i+1)*(l-j+1)
                    if plocha > max_p and test(a, i, j, k, l):
                        max_p = plocha
                        max_i, max_j, max_k, max_l = i, j, k, l
    return max_i, max_j, max_k, max_l

print("Maximální jedničkový obdélník:", *obdelnik(a))

```

Výrazná neefektivita uvedeného řešení je způsobena zejména tím, že mnohé obdélníkové výřezy se různě překrývají. My ovšem každý z nich zvlášť procházíme a testujeme jeho prvky, zda se rovnají nule, i když jsme stejnou kontrolu již provedli v rámci testování jiné podmatice. Pokusíme se tedy odstranit tento problém s opakovaným testováním prvků zadané matice.

Jednou možností zrychlení výpočtu je použít tzv. prefixové součty. S prefixovými součty se v programování setkáváme zejména u úloh pracujících s číselnými posloupnostmi, kde  $i$ -tý prefixový součet posloupnosti předsta-

vuje součet prvních  $i$  členů posloupnosti. V úlohách s maticemi obvykle využíváme dvourozměrnou variantu prefixových součtů. K původní matici  $A$  si vytvoříme druhou matici  $B$  stejné velikosti, v níž prvek  $B_{x,y}$  bude udávat součet všech čísel ležících v matici  $A$  v obdélníku s levým horním rohem na pozici 1, 1 a pravým dolním rohem na pozici  $x, y$ . Ukážeme si to na jednoduchém příkladu:

matice A						matice B					
1	1	0	0	1	1	1	2	2	2	3	4
0	1	1	0	1	1	1	3	4	4	6	8
1	1	1	1	1	0	2	5	7	8	11	13
1	0	0	1	1	1	3	6	8	10	14	17
1	1	1	1	1	0	4	8	11	14	19	22

Nejprve popíšeme, jak lze popsanou matici dvourozměrných prefixových součtů  $B$  efektivně sestrojít. Všechny prvky v řádku 0 a ve sloupci 0 budou z technických důvodů opět nulové. Prvky matice  $B$  budeme počítat postupně po řádcích od 1 do  $n$ , každý řádek procházíme vždy zleva doprava po sloupcích od 1 do  $m$ . Hodnotu  $B_{x,y}$  určíme podle vztahu

$$B_{x,y} = A_{x,y} + B_{x-1,y} + B_{x,y-1} - B_{x-1,y-1}.$$

Vzhledem ke zvolenému pořadí výpočtu se tak v každém okamžiku odkazujeme pouze na hodnoty matice  $B$ , které jsme již spočítali dříve. Pokud některý z uvedených prvků matice  $B$  neexistuje, nahradíme jeho hodnotu ve vzorci nulou. V programu k tomu využijeme skutečnost, že prvky matice ležící v řádku 0 a ve sloupci 0 mají hodnotu 0. Nakreslete si sami schéma matice a vyznačte si v něm oblasti, s nimiž ve vzorci pracujeme. Uvedený vztah je založen na tzv. principu inkluze a exkluze, který známe z diskrétní matematiky. Po sečtení

$$A_{x,y} + B_{x-1,y} + B_{x,y-1}$$

jsme oblast  $B_{x-1,y-1}$  započítali do součtu  $B_{x,y}$  dvakrát, a proto ji musíme zase jednou odečíst. Každý prvek matice  $B$  jsme spočítali v konstantním čase, takže sestrojení celé matice  $B$  má asymptotickou časovou složitost  $O(n \cdot m)$ .

Budeme-li mít k dispozici popsanou matici  $B$ , s její pomocí dokážeme zkontrolovat každý obdélníkový výřez matice  $A$  v konstantním čase. Vy-  
užijeme při tom skutečnost, že součet všech prvků obdélníkového výřezu

matice s hodnotami 0 nebo 1 je roven počtu jedniček obsažených v tomto výřezu. Obdélník proto obsahuje samé jedničky právě tehdy, když je součet všech jeho prvků roven jeho velikosti. Uvažujme obdélníkový výřez s levým horním rohem  $A_{i,j}$  a pravým dolním rohem  $A_{k,l}$ . Součet všech jeho prvků snadno spočítáme jako

$$B_{k,l} - B_{k,j-1} - B_{i-1,l} + B_{i-1,j-1}.$$

Opět jsme zde využili již zmíněný princip inkluze a exkluze a dvakrát odečtenou oblast  $B_{i-1,j-1}$  jsme zase zpátky jednou přičetli. Obdélník je tvořen samými jedničkami, pokud je součet jeho prvků roven jeho velikosti, tedy hodnotě  $(k - i + 1) \cdot (l - j + 1)$ .

Stejně jako v prvním řešení postupně projdeme všech  $O(n^2 \cdot m^2)$  obdélníkových výřezů zadané matice  $A$ . Každý z nich tentokrát ale zkontrolujeme v konstantním čase, takže celková časová složitost takto vylepšeného řešení je  $O(n^2 \cdot m^2)$ . Do výsledné asymptotické časové složitosti je třeba započítat ještě složitost výpočtu pomocné matice  $B$ , ale ta je pouze  $O(n \cdot m)$  a výslednou složitost tedy nijak neovlivní.

Ukázkový program je přímou implementací popsaného postupu. Pro zjednodušení kódu a paměťovou úsporu zde dvourozměrné prefixové součty prvků zadané matice  $A$  ukládáme přímo do matice  $A$ , protože původní zadané hodnoty matice  $A$  nebudeme již v dalším výpočtu potřebovat.

```
n, m = (int(_) for _ in input("Rozměry matice: ").split())
print("Matice 0/1 po řádcích:")
a = [[0] * (m+1)]
for r in range(n):
    a.append([0] + [int(_) for _ in input().split()])

def soucet(a):
    # dvourozměrné prefixové součty matice a
    for x in range(1, n+1):
        for y in range(1, m+1):
            a[x][y] += a[x-1][y] + a[x][y-1] - a[x-1][y-1]

def obdelnik(a):
    # zkoušení všech obdélníkových výřezů matice a
    max_p = 0
    max_i, max_j, max_k, max_l = 0, 0, 0, 0
```

```

for i in range(1, n+1):
    for j in range(1, m+1):
        for k in range(i, n+1):
            for l in range(j, m+1):
                plocha = (k-i+1) * (l-j+1)
                pocet1 = a[k][l] - a[k][j-1] - a[i-1][l] \
                    + a[i-1][j-1]
                if plocha > max_p and pocet1 == plocha:
                    max_p = plocha
                    max_i, max_j, max_k, max_l = i, j, k, l
return max_i, max_j, max_k, max_l

```

```
soucet(a)
```

```
print("Maximální jedničkový obdélník:", *obdelnik(a))
```

Nyní si předvedeme jiný postup řešení s odlišným předvýpočtem, který nás dovede k ještě rychlejšímu programu. V úvodním pomocném výpočtu si spočítáme délky souvislých sloupců jedniček v matici  $A$  a uložíme si je do matice  $B$ . Jestliže  $A_{x,y} = 0$ , položíme také  $B_{x,y} = 0$ . V opačném případě bude hodnota  $B_{x,y} = t$  znamenat, že prvek  $A_{x,y}$  a dalších přesně  $t - 1$  prvků matice  $A$  pod ním mají hodnotu 1. Uvedený předvýpočet můžeme demonstrovat na následujícím příkladu:

matice A	matice B
1 1 0 0 1 1	1 3 0 0 5 2
0 1 1 0 1 1	0 2 2 0 4 1
1 1 1 1 1 0	3 1 1 3 3 0
1 0 0 1 1 1	2 0 0 2 2 1
1 1 1 1 1 0	1 1 1 1 1 0

Matici  $B$  sestrojíme po jednotlivých sloupcích. Každý sloupec matice  $A$  procházíme zdola nahoru, nula se do matice  $B$  jednoduše opíše, zatímco jednička se při přenosu do matice  $B$  zvýší o hodnotu, která leží v matici  $B$  bezprostředně pod ní. Každý prvek matice  $B$  takto spočítáme v konstantním čase, takže sestrojení celé matice  $B$  má asymptotickou časovou složitost  $O(n \cdot m)$ .

Zbývá ukázat, jak nyní vyřešíme zadanou úlohu pomocí hodnot uložených v matici  $B$ . V matici  $B$  je nenulový prvek právě na těch místech,



kde je v matici  $A$  jednička. Chceme tedy projít všechny obdélníkové výřezy matice  $B$  tvořené pouze nenulovými prvky a vybrat z nich ten největší. Podobně jako v předchozích dvou řešeních budeme zkoumat všechny možné pozice levého horního rohu obdélníku, kterých je  $n \cdot m$ . Pro každý levý horní roh ale nebudeme zkoušet všechny možné pravé dolní rohy, nýbrž pravé horní rohy. Těch je jenom  $O(m)$ , protože řádková souřadnice pravého horního rohu je již určena volbou levého horního rohu. Prvek  $B_{i,j}$  může být levým horním rohem jedničkového obdélníku pouze tehdy, když  $B_{i,j} > 0$ . Prvek  $B_{i,l}$  může být pravým horním rohem jedničkového obdélníku s levým horním rohem  $B_{i,j}$ , jsou-li kladná všechna čísla  $B_{i,y}$  pro  $y = j, j + 1, \dots, l$ .

Velikost maximálního obdélníku, který je v původní matici  $A$  tvořen samými jedničkami a který má levý horní roh  $A_{i,j}$  a pravý horní roh  $A_{i,l}$ , nyní již snadno určíme pomocí hodnot uložených v matici  $B$ . Tento obdélník má šířku  $l - j + 1$  určenou polohou obou jeho horních rohů. Jeho výška je určena minimem z hodnot  $B_{i,y}$  pro  $y = j, j + 1, \dots, l$ , neboť přesně tak byly hodnoty matice  $B$  definovány.

Již jsme ukázali, že počet způsobů volby obou horních rohů jedničkového obdélníku je  $O(n \cdot m^2)$ . Kdybychom pro každou takovou volbu hledali minimum z hodnot  $B_{i,y}$  zvlášť, museli bychom k tomu provést až  $O(m)$  operací a celková časová složitost by se tím zhoršila na  $O(n \cdot m^3)$ . Potřebný výpočet minima, neboli určování výšky maximálního jedničkového obdélníku, můžeme ovšem provádět průběžně zároveň s volbou indexu  $l$ . Tím dosáhneme výsledné asymptotické časové složitosti celého řešení  $O(n \cdot m^2)$ .

V ukázkové programové implementaci právě popsaného řešení jsme opět provedli předvýpočet přímo v zadané matici  $A$ . Ušetříme tak dodatečnou paměť potřebnou na pomocnou druhou matici  $B$ . Původní hodnoty matice  $A$  nebudeme již v dalším výpočtu potřebovat a navíc by ani nebylo těžké obnovit je, kdybychom snad chtěli (stačilo by nahradit všechny nenulové prvky matice jedničkami).

```
n, m = (int(_) for _ in input("Rozměry matice: ").split())
print("Matice 0/1 po řádcích:")
a = [[0] * (m+1)]
for r in range(n):
    a.append([0] + [int(_) for _ in input().split()])

def soucet(a):
    # sloupcové počty jedniček pod prvkem v matici a
```

```

for y in range(1, m+1):
    for x in range(n-1, 0, -1):
        if a[x][y] == 1:
            a[x][y] += a[x+1][y]

def obdelnik(a):
    # zkoušení všech obdélníkových výřezů matice a
    max_p = 0
    max_i, max_j, max_k, max_l = 0, 0, 0, 0
    for i in range(1, n+1):
        for j in range(1, m+1):
            vyska = a[i][j]
            for l in range(j, m+1):
                if a[i][l] == 0: break
                vyska = min(vyska, a[i][l])
                plocha = (l-j+1) * vyska
                if plocha > max_p:
                    max_p = plocha
                    k = i + vyska - 1
                    max_i, max_j, max_k, max_l = i, j, k, l
    return max_i, max_j, max_k, max_l

soucet(a)
print("Maximální jedničkový obdélník:", *obdelnik(a))

```

Právě popsaný předvýpočet délek souvislých sloupců jedniček v matici  $A$  bychom mohli samozřejmě provést také symetricky na řádky matice. Pokud v celém řešení zaměníme řádky a sloupce, dostaneme analogický postup s asymptotickou časovou složitostí  $O(n^2 \cdot m)$ . Z obou variant si můžeme vybrat tu časově výhodnější podle toho, zda je větší  $n$  nebo  $m$ , tj. zda má zadaná matice  $A$  více řádků nebo sloupců. Tímto doplněním získáme ještě o něco lepší řešení s časovou složitostí  $O(n \cdot m \cdot \min(n, m))$ .

S postupným vylepšováním řešení ale stále ještě nejsme u konce. Možná vás překvapí, že naše úloha má ještě rychlejší řešení. K vyhledávání jedničkových obdélníků v matici ovšem musíme přistoupit trochu jiným způsobem – místo zkoušení jejich rohů budeme teď vyhledávat jejich strany.

Maximální obdélník tvořený samými jedničkami se vyznačuje tím, že každá jeho strana sousedí s nějakou nulou (nebo je na okraji celé matice). V opačném případě by totiž takový jedničkový obdélník nebyl maximální,

jeho stranu by bylo možné posunout směrem „ven“ a tím obdélník zvětšit. Chceme-li tedy nalézt levou stranu maximálního jedničkového obdélníku, stačí vyhledávat v matici  $A$  jedničky, které zleva sousedí s nulou.

Než si popíšeme celý algoritmus, připravíme si opět vhodný předvýpočet. Bude podobný jako v předchozím řešení, kde jsme si ke každé jedničce v matici  $A$  spočítali, kolik dalších jedniček leží bezprostředně pod ní. Tyto údaje jsme si uložili do matice  $B$ . Tentokrát použijeme úplně stejnou matici  $B$  a kromě ní si zavedeme ještě druhou pomocnou matici  $C$ , v níž si obdobným způsobem pro každou jedničku spočítáme, kolik jedniček leží ve sloupci matice  $A$  souvisle nad ní. Opět si to předvedeme na stejném konkrétním příkladu:

matice A	matice B	matice C
1 1 0 0 1 1	1 3 0 0 5 2	1 1 0 0 1 1
0 1 1 0 1 1	0 2 2 0 4 1	0 2 1 0 2 2
1 1 1 1 1 0	3 1 1 3 3 0	1 3 2 1 3 0
1 0 0 1 1 1	2 0 0 2 2 1	2 0 0 2 4 1
1 1 1 1 1 0	1 1 1 1 1 0	3 1 1 3 5 0

Matici  $C$  sestrojíme po jednotlivých sloupcích analogicky, jako jsme to dělali v předchozím řešení s maticí  $B$ . Každý sloupec matice  $A$  procházíme shora dolů, nula se do matice  $C$  jednoduše opíše, zatímco jednička se při přenosu do matice  $C$  zvýší o hodnotu, která leží v matici  $C$  bezprostředně nad ní. Každý prvek matice  $C$  tak spočítáme v konstantním čase, takže sestrojení obou matic  $B$  a  $C$  má asymptotickou časovou složitost  $O(n \cdot m)$ .

Zbývá popsat vlastní algoritmus řešení úlohy. Budeme procházet matici  $A$  postupně po řádcích zleva doprava a budeme hledat situaci, kde se nacházejí vedle sebe na řádku 0 a hned za ní 1. Na levém okraji maximální jedničkové podmatice nutně musí ležet prvek  $A_{i,j} = 1$  s takovou vlastností. Budeme od něj postupovat po řádku matice směrem doprava, dokud nenarazíme na nulu nebo na pravý okraj matice. Pro každý prvek  $A_{i,l} = 1$ , přes který budeme takto procházet, určíme maximální jedničkový obdélník s levým okrajem ve sloupci  $j$  a pravým okrajem ve sloupci  $l$ . Výšku takového obdélníku směrem dolů i nahoru spočítáme pomocí hodnot připravených v maticích  $B$  a  $C$ . Při tomto výpočtu postupujeme obdobně jako v předchozím řešení.

Asymptotická časová složitost tohoto našeho řešení je překvapivě pouze  $O(n \cdot m)$ . Již jsme ukázali, že počáteční výpočet pomocných matic  $B$  a  $C$

má složitost  $O(n \cdot m)$ . Následné hledání maximální jedničkové podmatice je pak sice tvořeno třemi do sebe vnořenými cykly, ale oba vnitřní cykly společně provádějí pouze jeden průchod řádkem matice délky  $m$ , zatímco vnější cyklus prochází přes řádky matice a má tedy délku  $n$ . Když na řádku procházíme souvislý úsek sousedících jedniček, nemůžeme při tom minout žádnou jedničku sousedící zleva s nulou. Až po skončení tohoto úseku budeme na řádku hledat další jedničku následující po nule.

Závěrečná programová ukázka je přímou implementací posledního uvedeného algoritmu. Stejně jako v předchozím programu ani zde matici  $B$  ve skutečnosti nepotřebujeme a její hodnoty si můžeme uložit přímo do původní matice  $A$ . Pro údaje z druhé pomocné matice, kterou jsme v rozboru algoritmu označili jako  $C$ , již ale druhou datovou strukturu potřebovat budeme.

```
n, m = (int(_) for _ in input("Rozměry matice: ").split())
print("Matice 0/1 po řádcích:")
a = [[0] * (m+1)]
for r in range(n):
    a.append([0] + [int(_) for _ in input().split()])

def soucet_pod(a):
    # sloupcové počty jedniček pod prvkem v matici a
    for y in range(1, m+1):
        for x in range(n-1, 0, -1):
            if a[x][y] == 1:
                a[x][y] += a[x+1][y]

def soucet_nad(a):
    # sloupcové počty jedniček nad prvkem v matici a
    c = [[0] * (m+1)]
    for x in range(1, n+1):
        c.append([a[x][y] for y in range(m+1)])
    for y in range(1, m+1):
        for x in range(2, n+1):
            if c[x][y] == 1:
                c[x][y] += c[x-1][y]
    return c
```

```

def obdelnik(a, c):
    # zkoušení všech obdélníkových výřezů matice a
    max_p = 0
    max_i, max_j, max_k, max_l = 0, 0, 0, 0
    for i in range(1, n+1):
        j = 1
        while j <= m:
            if a[i][j-1] == 0 and a[i][j] > 0:
                vyska_pod = a[i][j]
                vyska_nad = c[i][j]
                l = j
                while l <= m and a[i][l] > 0:
                    vyska_pod = min(vyska_pod, a[i][l])
                    vyska_nad = min(vyska_nad, c[i][l])
                    plocha = (l-j+1) * \
                        (vyska_pod + vyska_nad - 1)
                    if plocha > max_p:
                        max_p = plocha
                        max_i = i - vyska_nad + 1
                        max_j = j
                        max_k = i + vyska_pod - 1
                        max_l = l
                    l += 1
                j = 1
            j += 1
    return max_i, max_j, max_k, max_l

c = soucet_nad(a)
soucet_pod(a)
print("Maximální jedničkový obdélník:", *obdelnik(a, c))

```

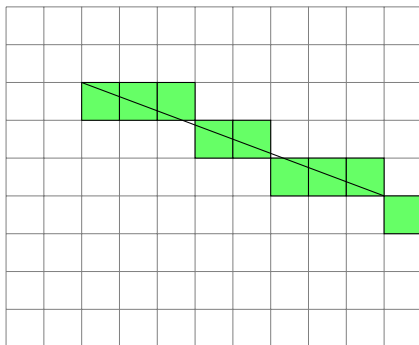
# Počítačová grafika, 5. díl

EDUARD BARTL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Článek navazuje na předchozí díly věnující se počítačové grafice. Stejně jako minulý díl se zabývá rasterizací úsečky, konkrétně je vysvětlen takzvaný Bresenhamův algoritmus. Článek může sloužit jako pomůcka pro středoškolské učitele informatiky a výpočetní techniky.

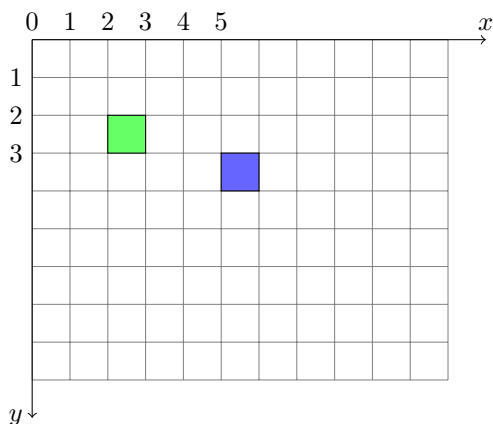
Na úvod připomeňme, že rasterizaci objektů rozumíme kreslení těchto objektů do rastru zobrazovacího zařízení. K dispozici máme matematický popis daného geometrického objektu, v našem případě se jedná o úsečku. Tento objekt je tvořen nekonečným množstvím bezrozměrných geometrických bodů a naším úkolem je ho co nejvěrněji zobrazit v rastru, který je však tvořen pouze konečným množstvím fyzických pixelů (obr. 1). Rasterizační algoritmy by měly navíc pracovat co nejefektivněji, tedy co nejrychleji a s využitím co nejmenšího množství paměti.



Obr. 1 Rasterizace úsečky

Připomeňme dále, že počátek souřadnicového systému umísťujeme do levého horního rohu zobrazovacího zařízení a že kladná polovina osy  $x$  směřuje zleva doprava a kladná polovina osy  $y$  shora dolů. Předpokládáme, že pixely mají jednotkovou velikost. Logický pixel (viz [1]) umístíme do levého horního vrcholu pixelu – souřadnice daného fyzického pixelu jsou

proto dány souřadnicemi jeho levého horního vrcholu, jak ukazuje obr. 2.



Obr. 2 Zelený pixel má souřadnice  $\langle 2, 2 \rangle$ , modrý pixel má souřadnice  $\langle 5, 3 \rangle$ .

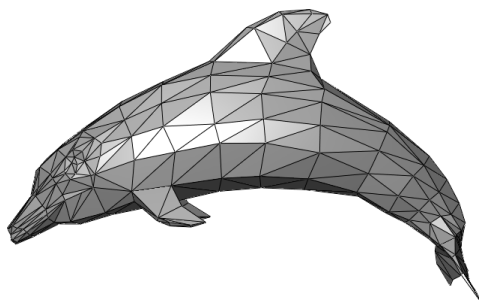
Algoritmus DDA, představený v předchozím dílu [2] seriálu, je velmi jednoduchý. Tato jednoduchost je jistě výhodná – algoritmus je snadno pochopitelný a je snadné ho naprogramovat. Má však jednu podstatnou nevýhodu, nepracuje totiž s celými čísly. Výpočty s celými čísly probíhají na počítači velmi rychle. Vysoká rychlost je důležitá v situacích, kdy se modelují složité scény (zejména trojrozměrné) ve vysokém rozlišení. Dokonce i z jednoduchého obr. 3 je patrné, že při jeho tvorbě bylo rasterizováno velké množství úseček. Využívání celočíselné aritmetiky je tedy jedním ze základních požadavků na kvalitní rasterizační algoritmy.

V tomto díle seriálu si představíme takzvaný *Bresenhamův algoritmus*, který celočíselnou aritmetiku používá. Autorem tohoto algoritmu je americký informatik Jack Elton Bresenham (narozen roku 1937).

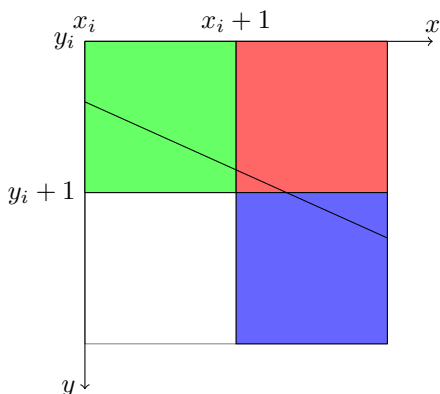
Stejně jako v případě algoritmu DDA budeme pracovat se směrnicovou rovnicí přímky:

$$y = kx + q,$$

kde  $k$  je takzvaná *směrnice* určující sklon přímky a  $q$  určuje průsečík přímky s osou  $y$ . Opět se omezíme na případ, kdy  $k < 1$ ; to znamená, řídící osou bude osa  $x$ . Předpokládejme, že v  $i$ -tém kroku výpočtu obarvíme pixel o souřadnicích  $\langle x_i, y_i \rangle$ ; tento pixel je znázorněn na obr. 4 zelenou barvou.



Obr. 3 Model delfína reprezentovaný pomocí trojúhelníkové sítě (zdroj Wikipedia)

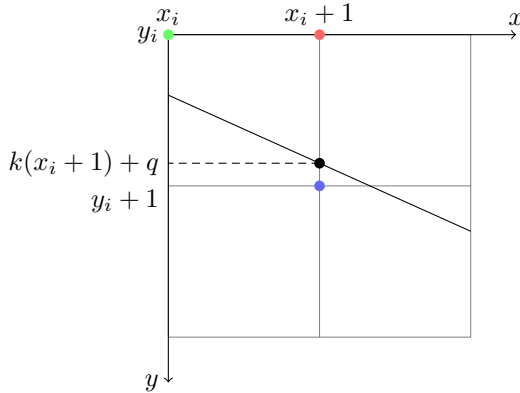


Obr. 4 Výběr pixelů v Bresenhamově algoritmu (barevné čtverce znázorňují fyzické pixely)

Z obrázku je zřejmé, že v následujícím kroku obarvíme buď pixel, který leží bezprostředně napravo (označen je červenou barvou), nebo pixel, který leží napravo dole (označený modrou barvou). Základní myšlenka Bresenhamova algoritmu spočívá v tom, že v jednotlivých krocích ve skutečnosti nepotřebujeme znát přesné souřadnice bodů na přímce (jako tomu bylo u algoritmu DDA), které jsou obecně neceločíselné. Místo toho budeme neustále zvyšovat  $x$ -ovou souřadnici obarvovaných pixelů o jedničku a vhodným způsobem se budeme rozhodovat, jestli  $y$ -ovou souřadnici necháme nezměněnou (vybraným bude červený pixel), nebo ji zvýšíme o jedničku (vybereme modrý pixel). Ve zbytku této sekce se tedy budeme zabývat především tím, jak vybrat správný pixel.



Z obr. 4 je zřejmé, že červený pixel má souřadnice  $\langle x_i + 1, y_i \rangle$ , modrý pixel má souřadnice  $\langle x_i + 1, y_i + 1 \rangle$ . Příslušné logické pixely jsou ukázány na obr. 5 jako červený a modrý bod.



Obr. 5 Výběr pixelů v Bresenhamově algoritmu (barevné body znázorňují logické pixely)

Výběr pixelu v následujícím kroku provedeme podle toho, jestli je odpovídajícímu bodu na přímce (to znamená bodu na přímce, který má  $x$ -ovou souřadnici rovnou  $x_i + 1$ ; na obr. 5 je tento bod zobrazen černou barvou) blíže červený nebo modrý bod. Vzdálenost červeného bodu od černého budeme značit jako  $d_1$ , vzdálenost modrého bodu od černého pak budeme značit jako  $d_2$ , viz opět obr. 5. Pro tyto vzdálenosti platí:

$$d_1 = k(x_i + 1) + q - y_i,$$

$$d_2 = y_i + 1 - k(x_i + 1) - q.$$

Rozhodnutí, zdali je černému bodu blíže červený nebo modrý, učiníme na základě rozdílu těchto vzdáleností  $\Delta d = d_1 - d_2$ . Pro tento rozdíl můžeme psát

$$\Delta d = d_1 - d_2 = 2k(x_i + 1) - 2y_i + 2q - 1. \quad (1)$$

Pokud bude platit  $\Delta d < 0$ , pak bude černému bodu blíže červený. Jestliže však bude platit  $\Delta d > 0$ , bude černému bodu blíže modrý. K rozhodnutí tedy bude stačit znát pouze znaménko hodnoty  $\Delta d$ , velikost této hodnoty nás v konečném důsledku zajímat nebude, což představuje značné zjednodušení.

V dalším výkladu budeme pracovat se součinem  $\Delta x \cdot \Delta d$ , který se zpravidla nazývá *predikce* a budeme ho značit symbolem  $p_i$ :

$$p_i = \Delta x \cdot \Delta d.$$

Za hodnotu  $\Delta d$  můžeme dosadit výraz (1) a provést několik jednoduchých úprav:

$$\begin{aligned} p_i &= \Delta x \cdot (2k(x_i + 1) - 2y_i + 2q - 1) \\ &= \Delta x \cdot 2k(x_i + 1) - \Delta x \cdot 2y_i + \Delta x \cdot 2q - \Delta x \\ &= \Delta x \cdot 2 \frac{\Delta y}{\Delta x} (x_i + 1) - \Delta x \cdot 2y_i + \Delta x \cdot 2q - \Delta x \\ &= 2\Delta y x_i - 2\Delta x y_i + 2\Delta y + \Delta x(2q - 1). \end{aligned}$$

Poznamenejme, že součet posledních dvou členů

$$2\Delta y + \Delta x(2q - 1)$$

je pro danou přímku neměnný; je stejný ve všech krocích výpočtu, protože závisí pouze na hodnotách  $\Delta y$ ,  $\Delta x$  a  $q$ . Označíme ho písmenem  $c$ , můžeme tedy psát

$$p_i = 2\Delta y x_i - 2\Delta x y_i + c. \quad (2)$$

Predikce  $p_{i+1}$  v následujícím kroku odvodíme z predikce  $p_i$  jednoduše tak, že každý výskyt indexu  $i$  ve výrazu (2) nahradíme indexem  $i + 1$ :

$$p_{i+1} = 2\Delta y x_{i+1} - 2\Delta x y_{i+1} + c.$$

Dále vypočteme rozdíl predikcí  $p_{i+1} - p_i$ , konstantní člen  $c$  se samozřejmě odečte. Po několika úpravách tak získáme:

$$\begin{aligned} p_{i+1} - p_i &= 2\Delta y x_{i+1} - 2\Delta x y_{i+1} - 2\Delta y x_i + 2\Delta x y_i \\ &= 2\Delta y(x_{i+1} - x_i) - 2\Delta x(y_{i+1} - y_i) \\ &= 2\Delta y - 2\Delta x(y_{i+1} - y_i). \end{aligned}$$

Predikci  $p_{i+1}$  tak můžeme vypočítat z předchozí predikce  $p_i$  pomocí následujícího vzorce:

$$p_{i+1} = p_i + 2\Delta y - 2\Delta x(y_{i+1} - y_i). \quad (3)$$

Vraťme se nyní k problému rozhodnutí, který pixel vybereme. Ze vztahů, které jsme výše odvodili, vidíme, že existují dvě možnosti:

1. Jestliže pro predikci v daném kroku platí

$$p_i \leq 0,$$

pak musí být i  $\Delta d \leq 0$ .<sup>1)</sup> To znamená, že černému bodu je blíže bod červený,<sup>2)</sup> v dalším kroku tedy  $y$ -ovou souřadnici nezvýšíme. Platí tedy

$$y_{i+1} = y_i.$$

Tuto skutečnost pak zaneseme do vzorce (3) pro výpočet predikce  $p_{i+1}$ , který se tak výrazně zjednoduší:

$$\begin{aligned} p_{i+1} &= p_i + 2\Delta y - 2\Delta x(y_i - y_i) \\ &= p_i + 2\Delta y. \end{aligned}$$

2. Jestliže je naopak

$$p_i > 0,$$

pak je také  $\Delta d > 0$ . To znamená, černému bodu je blíže modrý a musíme tedy zvýšit  $y$ -ovou souřadnici:

$$y_{i+1} = y_i + 1.$$

Dosazením této rovnosti do vztahu (3) pak získáme vzorec pro výpočet predikce  $p_{i+1}$ :

$$p_{i+1} = p_i + 2\Delta y - 2\Delta x.$$

Vidíme tedy, že rozhodnutí, který pixel obarvíme, činíme pouze na základě znaménka predikce  $p_i$ . Úpravu této predikce provádíme tak, že k ní přičteme hodnotu  $2\Delta y$  a v případě, že  $p_i > 0$ , od takto upravené hodnoty odečteme  $2\Delta x$ . Algoritmus 2 tedy pracuje pouze s celými čísly a je proto výrazně rychlejší než algoritmus DDA. Poznamenejme, že počáteční hodnota predikce se nastaví na  $2\Delta y - \Delta x$ ; není obtížné odvodit, proč je to právě tato hodnota.

---

<sup>1)</sup>Připomeňme, že predikce  $p_i$  je definována jako součin  $\Delta x \Delta d$ ; navíc  $\Delta x = x_B - x_A$  je v našem nastavení vždy kladné číslo.

<sup>2)</sup>Přesněji řečeno, černému bodu je blíže červený *nebo* jsou oba body, jak červený tak modrý, od černého stejně vzdálené.

---

**Algoritmus 1** Bresenhamův algoritmus

---

**Vstup:** Body  $A = \langle x_A, y_A \rangle$  a  $B = \langle x_B, y_B \rangle$ ; všechny souřadnice jsou celočíselné.

**Výstup:** Souřadnice pixelů, které rasterizují úsečku danou koncovými body  $A$  a  $B$ .

$$c_1 = 2\Delta y$$

$$c_2 = -2\Delta x$$

$$p = 2\Delta y - \Delta x$$

$$\langle x, y \rangle = \langle x_A, y_A \rangle$$

**while**  $x \leq x_B$  **do**

  obarvi pixel o souřadnicích  $\langle x, y \rangle$

$$x = x + 1$$

$$p = p + c_1$$

**if**  $p > 0$  **then**

$$y = y + 1$$

$$p = p + c_2$$

**end if**

**end while**

---

Další díl seriálu budeme naposledy věnovat rasterizačním algoritmům. Ukážeme si, jakým způsobem efektivně rasterizovat složitější geometrické objekty než je úsečka. Konkrétně se zaměříme na vykreslování kružnice a elipsy.

## Literatura

- [1] *Bartl, E.*: Počítačová grafika I. Matematika-fyzika-informatika, roč. 29 (2020), č. 2, s. 138–148.
- [2] *Bartl, E.*: Počítačová grafika IV. Matematika-fyzika-informatika, roč. 33 (2020), č. 2, s. 144–150.
- [3] *Felkel, P., Sochor, J., Žára, J., Beneš, B.*: Moderní počítačová grafika. 2. vydání. Computer Press, 2005.
- [4] *Gonzalez, R. C., Woods, R. E.*: Digital Image Processing. 4. vydání. Pearson Prentice Hall, 2018.
- [5] *Huges, J. F. a kol.*: Computer Graphics. Principles and Practice. 3. vydání. Addison-Wesley, 2014.
- [6] *Martíšek, D.*: Matematické principy grafických systémů. Littera, 2002.

# ZPRÁVY

## 12. ročník CPSJ

Ve dnech 19. až 22. května 2024 se v Karlově pod Pradědem konal již 12. ročník Česko-polsko-slovenské matematické soutěže juniorů (CPSJ). Vznik této soutěže iniciovali polští kolegové, kteří chtěli vítěze své Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów (OMG) nechat nasát atmosféru mezinárodní matematické soutěže.<sup>3)</sup>

Český reprezentační výběr byl sestaven na základě výsledků krajských kol kategorií A a C 73. ročníku Matematické olympiády a dále následného výběrového soustředění z žáků, kteří navštěvují nejvýše první ročník středních škol (kvinty osmiletých gymnázií). Účast v reprezentaci si vybojovali: *Martin Bryja* (5/8), *Jakub Hladký* (5/8), *Arne Štoudek* (4/8) a *Petr Vokřínek* (4/8), všichni Gymnázium Brno, tř. Kapitána Jaroše, *Lukáš Komín* (5/8), Gymnázium Opatov, Praha 4 a *Jakub Trčka* (1/4), Gymnázium Jana Keplera, Praha 6. Vedoucí české delegace byli *RNDr. Pavel Calábek*, *Ph.D.* a *RNDr. Jaroslav Švrček*, *CSc.*, oba z PřF UP v Olomouci.

<sup>3)</sup>Na vysvětlenou – v Česku a na Slovensku existuje jedna matematická olympiáda, kterou řeší žáci v pěti věkových kategoriích na základních školách (a nižších ročních osmiletých gymnáziích) a ve třech kategoriích na středních školách, přitom celostátním kolem končí pouze nejvyšší kategorie A, ostatní končí krajským či okresním kolem. V Polsku dlouhou dobu existovala matematická olympiáda, která se řešila v jedné kategorii, určená převážně žákům jejich středních škol (bývalá tříletá polská licea). Pro žáky druhého stupně základních škol (bývalá čtyřletá gymnázia) později vznikla jiná matematická soutěž, OMG, opět řešená v jedné kategorii a ukončená celostátním (čtvrtým) kolem. Po proběhlé školské reformě (licea nyní čtyřletá a gymnázia se spojila se základními školami) byla tato soutěž přejmenována na Olimpiada Matematyczna Juniorów.

Všichni účastníci se sešli v neděli 19. 5. na hotelu Karlov v Karlově pod Pradědem. V pondělí na ně čekala soutěž jednotlivců, po dobu 3,5 hodiny řešili 5 příkladů. Zadání příkladů obdrželi soutěžící jak v mateřském jazyce, tak i v angličtině, řešení mohli odevzdávat ve svém mateřském jazyce. Po odpočinkovém programu a prezentaci svých řešení byli navečer soutěžící rozlosováni do šesti tříčlenných družstev, v každém bylo po jednom českém, polském a slovenském účastníkovi.

Druhý den tyto týmy řešily po dobu pěti hodin úlohy soutěže družstev, kdy dostaly sadu šesti příkladů, po dvou v češtině, polštině a slovenštině a řešení těchto příkladů měli žáci odevzdat v jiném jazyce, přičemž vznikly všechny kombinace různých jazyků. Soutěžící si tak vyzkoušeli týmovou komunikaci, kdy zbývajícím členům svých družstev měli objasnit zadání a poté i svá řešení.

Výsledky **soutěže jednotlivců**, i **soutěže družstev** můžete najít na stránkách **Matematické olympiády**. Vzorová řešení úloh (v polštině) soutěže **jednotlivců** i **družstev** najdete na stránkách polské matematické olympiády (OM).

Na závěr uvádíme zadání všech soutěžních úloh.

### Soutěž jednotlivců

(20. 5. 2024)

1. Na počátku jsou na tabuli napsána čísla 1 a 2. V jednom kroku vybereme kladné reálné číslo  $x$  a dvojici čísel  $(a, b)$  napsaných na tabuli nahradíme dvojicí

$$\left(a + \frac{x}{b}, b + \frac{x}{a}\right).$$

Může (po konečném počtu kroků) nastat situace, že na tabuli budou napsána čísla 2 a 3?

(Polsko, *Lukasz Bożyk*)

2. Pro kolik (neprázdných) podmnožin množiny  $\{1, 2, 3, 4, \dots, 11\}$  je součin jejich prvků třetí mocninou přirozeného čísla?

(Česko, *Tomáš Bárta*)

3. V konvexním čtyřúhelníku  $ABCD$  platí  $|AB| = |BD| = |DC|$  a  $AB \perp BD \perp DC$ . Označme  $M$  střed jeho strany  $BC$ . Dokažte, že platí

$$|\sphericalangle BAM| + |\sphericalangle DCA| = 45^\circ.$$

(Česko, *Jaroslav Švrček*)

4. Pro celá čísla  $a, b, c$  platí  $a+b+c = 1$  a  $ab+bc+ca < abc$ . Dokažte, že

$$ab+bc+ca < 2abc.$$

(Polsko, *Konrad Majewski*)

5. Pro přirozené číslo  $n$  označme  $S(n)$  součet číslic jeho desítkového zápisu. Najděte nejmenší přirozené číslo  $n$  splňující  $4S(n) = 3S(2n)$ .

(Slovensko, *Eliška Macáková*)

### Soutěž družstev

(21. 5. 2024)

1. Označme  $G$  těžiště trojúhelníku  $ABC$ . Nechť  $D$  je čtvrtý vrchol rovnoběžníku  $AGDB$ . Dokažte, že  $BG \parallel CD$ . (Slovensko, *Patrik Bak*)

2. Mezi trojicemi  $(a, b, c)$  přirozených čísel splňujících

$$(a + 14\sqrt{3})(b - 14c\sqrt{3}) = 2024$$

určete tu s největší hodnotou  $a$ .

(Slovensko, *Mária Dományová*)

3. Wyznaczy miary kątów wewnętrznych we wszystkich trójkątach równoramiennych, które można podzielić na dwa trójkąty równoramienne o rozłącznych wnątrzach.

(Česko, *Jaroslav Švrček*)

4. Ile jest dodatnich liczb całkowitych  $n$  mniejszych od 2024 i podzielnych przez  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1$ ? Symbol  $\lfloor x \rfloor$  oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od  $x$ .

Na przykład  $n = 8$  spełnia dany warunek, gdyż  $8$  jest podzielne przez  $\lfloor \sqrt{8} \rfloor - 1 = 2 - 1 = 1$ , ale  $n = 9$  go nie spełnia, gdyż  $9$  nie jest podzielne przez  $\lfloor \sqrt{9} \rfloor - 1 = 2$ .

(Slovensko, *Patrik Bak*)

5. Existuje celé číslo  $n \geq 1$  také, že keď cifry čísla  $2^n$ , zapísaného v desiatkovej sústave, napíšeme v opačnom poradí, dostaneme inú celočíselnú mocninu dvojky?

(Polsko, *Tomasz Przybyłowski*)

6. V každom políčku obdĺžnikovej tabuľky je kladné celé číslo. Pre každé políčko tabuľky platí, že číslo v ňom je rovné celkovému počtu rôznych hodnôt v políčkach, ktoré sú s ním v rovnakom riadku alebo stĺpci (vrátane seba samého). Nájdite všetky tabuľky s takouto vlastnosťou.

(Polsko, *Lukasz Bożyk*)

Príští, trináciť ročník soutěže se uskuteční v květnu 2025 v Polsku.

*Pavel Calábek*

## 65. ročník Mezinárodní matematické olympiády



Letošní 65. ročník Mezinárodní matematické olympiády (IMO) se uskutečnil 11.–22. července v anglickém městě Bath. Původně se měla soutěž konat v ukrajinském Kyjevě, z důvodu ruské invaze však byla přesunuta a role pořádající země se chopila Anglie, která ji naposledy organizovala v roce 2019. Místní organizační tým tak musel v poměrně krátkém čase naplánovat celou akci, což určitě nebyl lehký úkol. Díky cenným zkušenostem z IMO před pěti lety a finanční podpoře hlavního sponzora, společnosti XTX Markets, se jim to ale podařilo.



Český tým při slavnostním zahájení

Mezinárodní matematické olympiády se letos zúčastnilo celkem 609 soutěžících ze 108 zemí, kteří strávili něco přes týden na půdě University of Bath. Prvně ale do Spojeného království dorazili vedoucí jednotlivých delegací. Ti se setkali v nedalekém Bristolu, kde z 31 návrhů zařazených do tzv. shortlistu vybrali šest soutěžních úloh. O tři dny později se na cestu vydal i zbytek české výpravy, sestávající ze šesti soutěžících a pedagogické vedoucí. Na letošním IMO české družstvo reprezentovali: *Anastasia Bredichina* (7/8 G Jana Keplera, Praha 6), *Tereza Černá* (8/8 G Litoměřická, Praha 9), *David Hromádka* (7/8 G Nad Alejí, Praha 6), *Pavel Hyánek* (6/8 G Brno, třída Kapitána Jaroše), *Erik Ježek* (2/4 Smíchovská SPŠ a G, Praha 5) a *Veronika Menšíková* (6/8 Arcibiskupské G, Praha 2, Korunní). Vedoucím pak byl *Danil Koževnikov* z University of Edinburgh a pedagogickou vedoucí *Lenka Kopfová* z MFF UK v Praze.

Ubytování, volnočasové aktivity i samotná soutěž byly situovány na půdě kampusu univerzity v Bathu. Letošní zahájení IMO bylo, k radosti většiny zúčastněných, výrazně stručnější než obvykle. Krátký proslov pronesl akorát dlouholetý předseda výboru IMO profesor Geoff Smith, jenž pobídl všechny přítomné k vzájemné komunikaci a toleranci. Dále popřál, aby všichni přítomní alespoň na dobu konání soutěže hodí všechny politické neshody za hlavu a prostě si užijí týden ve společnosti lidí, kteří sdílí jejich nadšení matematikou.

Další, a patrně nejdůležitější položkou programu byla samotná soutěž, která proběhla 16. a 17. července. Soutěžící měli oba dny 4,5 hodiny na vyře-

šení tří obtížných úloh, přičemž za každou z nich bylo možné získat až 7 bodů.

Po dvou náročných počítačacích dnech měli soutěžící možnost vyrazit na různé exkurze. Česká výprava navštívila Stonehenge a Buckinghamský palác, zatímco vedoucí a koordinátoři opravovali a hodnotili účastnická řešení. Kromě zmíněných exkurzí se soutěžící mohli zapojit do všemožných kratších volnočasových aktivit na kampusu univerzity nebo si poslechnout některé z bohatého výběru přednášek. Mezi pozvanými přednášejícími byly velmi inspirativní osobnosti, za zmínku stojí např. dva laureáti Fieldsovy medaile Terence Tao a Maryna Viazovska, dále Grant Sanderson, zakladatel matematického YouTube kanálu 3Blue1Brown, či vědecký Thang Luong z Google DeepMindu, který hovořil o projektu AlphaGeometry (jehož cílem je vycvičit AI model na řešení geometrických úloh na úrovni IMO).

Po dvou náročných dnech opravování a koordinování se všichni účastníci opět setkali v budově divadla v Bathu na slavnostním zakončení, kde byly také vyhlášeny finální výsledky. Připomeňme, že standardně si zhruba polovina soutěžících domů odveze medaili, přičemž počty zlatých, stříbrných a bronzových medailí se drží přibližně poměru 1 : 2 : 3. Pro letošní ročník to znamenalo, že na získání zlata, stříbra a bronzu bylo potřeba postupně dosáhnout alespoň 29, 22 a 16 bodů.

Českému družstvu se podařilo vybojovat dvě stříbra, dva bronzové a dvě čestná uznání (HM) a v neoficiálním hodnocení zemí skončilo na 49. místě. Stříbrné medaile získali *Erik Ježek*, 24 bodů, a *David Hromádka*, 23 bodů. Bronzové medaile získali *Pavel Hyá-*

*nek* a *Veronika Menšíková*, oba 16 bodů. *Anastasia Bredichina* se ziskem 15 bodů skončila těsně pod hranici bronzové medaile, ale odvezla si čestné uznání za úplné vyřešení jedné úlohy (ve skutečnosti úloh dvou), čestné uznání získala i *Tereza Černá*.

Výsledky našich soutěží v jednotlivých úlohách:

Úloha	1	2	3	4	5	6
100. Erik Ježek	6	3	0	7	7	1
125. David Hromádka	7	2	0	7	7	0
283. Pavel Hyánek	7	2	0	7	0	0
283. Veronika Menšíková	7	1	0	7	1	0
327. Anastasia Bredichina	7	0	0	7	1	0
457. Tereza Černá	2	0	0	7	0	0

Absolutním vítězem se stal *Haojia Shi* z Číny, který jako jediný dosáhl plného počtu bodů. Poznamenejme, že *Matej Bachníček* ze Slovenska vybojoval zlatou medaili a 29. místo v celkovém pořadí. Na první příčce v neoficiální soutěži zemí skončil tým USA. Podrobnější výsledky letošního ročníku lze najít na oficiálních stránkách [IMO 2024](#).



Český tým s medailemi

Na závěr uvádíme zadání úloh z obou soutěžních dnů. Poukážeme



také na kontroverzní úlohu číslo pět se šnekem Turbo. Tato kombinatorika, jež je zadáním i řešením velmi přístupná dokonce žákům základní školy, v mnohých vyvolala poněkud rozporné názory. Důkazem její netradičnosti budiž, že ji půlka čínskému týmu nevyřešila, což se u středně obtížných úloh na IMO stává jen velmi zřídka. Také poznamenejme, že v posledních letech se rapidně rozvíjí pokusy o vyřešení úloh z IMO pomocí AI. Letos by umělá inteligence vytrénovaná Googlem vyřešila čtyři ze šesti úloh (vše až na dvě kombinatoriky), čímž by dosáhla na stříbrnou medaili. Více informací lze najít v článku <https://deepmind.google/discover/blog/ai-solves-imo-problems-at-silver-medal-level/>.

### První soutěžní den

(16. 7. 2024)

1. Určete všechna reálná čísla  $\alpha$  taková, že pro každé kladné celé  $n$  je číslo

$$[\alpha] + [2\alpha] + \dots + [n\alpha]$$

násobkem  $n$ .

(Zápisem  $[z]$  rozumíme největší celé číslo které nepřevyšuje  $z$ . Platí například  $[-\pi] = -4$  a  $[2] = [2,9] = 2$ .)  
(Kolumbie)

2. Určete všechny dvojice kladných celých čísel  $(a, b)$ , pro něž existují kladná celá  $g$  a  $N$  taková, že rovnost

$$\text{nsd}(a^n + b, b^n + a) = g$$

platí pro všechna celá čísla  $n \geq N$ . (Zápisem  $\text{nsd}(x, y)$  rozumíme největšího společného dělitele celých čísel  $x$  a  $y$ .)  
(Indonésie)

3. Mějme nekonečnou posloupnost kladných celých čísel  $a_1, a_2, a_3, \dots$  a kladné celé číslo  $N$ . Předpokládejme, že pro všechna  $n > N$  je  $a_n$  rovno počtu výskytů čísla  $a_{n-1}$  mezi čísly  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ . Dokažte, že alespoň jedna z posloupností  $a_1, a_3, a_5, \dots$  nebo  $a_2, a_4, a_6, \dots$  je eventuálně periodická.

(O posloupnosti  $b_1, b_2, b_3, \dots$  řekneme, že je eventuálně periodická, pokud existují kladná celá  $p$  a  $M$  taková, že rovnost  $b_{m+p} = b_m$  platí pro všechna  $m \geq M$ .)  
(Austrálie)

### Druhý soutěžní den

(17. 7. 2024)

4. Je dán trojúhelník  $ABC$ , ve kterém platí  $|AB| < |AC| < |BC|$ . Buď  $\omega$  kružnice vepsaná  $ABC$  se středem  $I$ . Necht'  $X$  je bod na přímce  $BC$  různý od  $C$  takový, že rovnoběžka s  $AC$  skrz  $X$  je tečnou  $\omega$ . Analogicky, necht'  $Y$  je bod na přímce  $BC$  různý od  $B$  takový, že rovnoběžka s  $AB$  skrz  $Y$  je tečnou  $\omega$ . Příмка  $AI$  protíná kružnici opsanou  $ABC$  podruhé v bodě  $P \neq A$ . Označme  $K$  a  $L$  středy úseček  $AC$  a  $AB$ . Dokažte, že platí

$$|\sphericalangle KIL| + |\sphericalangle YPX| = 180^\circ.$$

(Polsko)

5. Šnek Turbo hraje hru v tabulce s 2024 řádky a 2023 sloupci. Ve 2022 políčkách tabulky jsou schované příšerky. Na začátku, Turbo neví jak přesně jsou příšerky rozmístěny, ví ovšem, že každý řádek kromě prvního a posledního obsahuje právě jednu příšerku a každý sloupec obsahuje nejvýše jednu příšerku. Turbo se snaží v několika pokusech dostat z prvního

řádku do posledního. V každém pokusu si Turbo může zvolit libovolné počáteční políčko v prvním řádku, načez se může opakovaně posunout z políčka, kde se nachází, na políčko sousedící s ním stranou. (Každé políčko tak může navštívit i vícekrát). Vstoupí-li Turbo na políčko s příšerkou, jeho pokus tím končí a teleportuje se zpátky do prvního řádku. Příšerky se nehýbou a Turbo si pamatuje, zda se na políčku, které navštívil, nachází příšerka. Pokud dosáhne libovolného políčka z posledního řádku, jeho pokus skončí, stejně jako celá hra. Určete nejmenší hodnotu  $n$  pro níž má Turbo strategii, která zaručí, že se dostane do posledního řádku po nejvýše  $n$  pokusech, nehladě na to, jak jsou příšerky rozmístěny.

(Hong Kong)

6. Necht  $\mathbb{Q}$  značí množinu racionálních čísel. O funkci  $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  řekneme, že je *lázeňská*, pokud splňuje následující podmínku: Pro všechna  $x, y \in \mathbb{Q}$  platí alespoň jedna z rovností

$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$

nebo

$$f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Dokažte, že existuje celé číslo  $c$  takové, že pro každou lázeňskou funkci  $f$  existuje nejvýše  $c$  různých racionálních hodnot vyjádřitelných ve tvaru  $f(r) + f(-r)$  pro nějaké racionální číslo  $r$  a nalezněte nejmenší možnou hodnotu  $c$ . (Japonsko)

Příští (66.) ročník IMO se uskuteční v červenci 2025 v Austrálii (Sunshine Coast, Queensland).

Lenka Kopfová, Danil Koževnikov



Český tým: v horní řadě zleva: Lenka Kopfová, Erik Ježek, David Hromádka, Danil Koževnikov, Pavel Hyánek, průvodkyně Viktoriia Matviuk, dolní řada: Veronika Menšíková, Tereza Černá, Anastasia Bredichina