MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA

4

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH

ROČNÍK 33, ČÍSLO 4

PROSINEC 2024

MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXXIII (2024), číslo 4

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Adresa redakce:
17. listopadu 12, 771 46 Olomouc   E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:
Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

Brazilská čísla a prvočísla

JAROMÍR ŠIMŠA

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

V článku se budeme věnovat námětu, který pochází z 9. *Iberoamerické matematické olympiády.* Ta se konala v září 1994 v brazilské *Fortaleze* a jedna ze soutěžních úloh tehdy měla následující zadání.

Přirozené číslo n nazveme „brazilským“, pokud ve vhodné poziční soustavě o základu z, kde $1 < z < n-1$, *má číslo n zápis složený ze stejných číslic. Dokažte, že číslo* 1994 *je brazilské, zatímco číslo* 1993 *brazilské není.*

Text úlohy doplňme prozatím pouze jedním vysvětlením: Brazilské je například číslo 2000, protože má v soustavě o základu 7 zápis složený ze čtyř pětek. Platí totiž

$$5 \cdot 7^3 + 5 \cdot 7^2 + 5 \cdot 7^1 + 5 \cdot 7^0 = 1715 + 245 + 35 + 5 = 2 \cdot 10^3.$$

Pozičně to zapisujeme rovností $(5555)_7 = 2000$, kde napravo jsme v zápise $(2000)_{10}$ jako obvykle vynechali základ $z = 10$.

Před vlastním matematickým posouzením brazilských čísel uveďme několik poznámek k jejich 30leté historii. Úlohu do soutěže v roce 2024 nenavrhla Brazílie, nýbrž Mexiko. Namísto přívlastku „brazilské“ bylo ve španělském originálu zadání uvedeno slovo „sensato“ (česky „rozumné, praktické“). Termín „brazilské“ poprvé užili autoři *Pierre Bronsztein* a *Johan Yebbou* ve své sbírce olympiádních úloh *Hypermath (120 exercises dehaut vol)*, Éditions Vuibert (2001). Její francouzské čtenáře téma brazilských úloh zaujalo natolik, že k němu vytvořili samostatnou sekci na

[0] Tento článek vznikl na základě autorova vystoupení při slavnostním zahájení ústředního kola $(111)_8$. ročníku Matematické olympiády v Českých Budějovicích na jaře 2024. Autora k němu inspiroval článek *Les nombres brésiliens*, který napsal *Bernard Schott* pro číslo 76 (duben–červen 2010) francouzského časopisu *Quadrature.*

internetovém fóru www.Les-Mathematiques.net. K výzkumu brazilských čísel se brzy připojili matematikové dalších zemí. Význam dosahovaných výsledků se časem projevil i tím, že se brazilská čísla objevila na prestižních stránkách The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, a to v jejich sekcích A125134, A053696, A085104 a A220627.

Náš výklad vlastností brazilských čísel zahájíme tím, že jejich definici z úvodní úlohy pro přehlednost a jasnost zopakujeme ve formálnější podobě.

Definice

Přirozené číslo n nazveme *brazilským*, pokud existují celá čísla c a z, které splňují nerovnosti $0 < c < z < n-1$, přičemž pro vhodné celé číslo k platí rovnost

$$n = cz^{k-1} + cz^{k-2} + \ldots + cz + c, \quad \text{zkráceně } n = (\underbrace{cc\ldots c}_{k})_z.$$

Brazilskému číslu, které je prvočíslo, budeme říkat *brazilské prvočíslo*.

Zdůrazněme, že zatímco význam nerovností $0 < c < z$ je v podané definici zřejmý (c je totiž nenulová číslice v poziční soustavě o základu z), doplňující nerovnost $z < n-1$ vylučuje případ rovnosti $z = n-1$. Kdybychom ji v definici připustili, kvůli triviální rovnosti $n = (11)_{n-1}$ bychom došli k závěru, že brazilské je každé celé číslo n větší než 2.

Snadným experimentováním (totiž výpočtem „malých“ čísel $(cc\ldots c)_z$ postupně pro $z = 2, 3, 4, \ldots$) lze ověřit, že všechna brazilská čísla menší než 150 tvoří „neúplnou“ tabulku 1 o rozměrech 15×10.[1)]

Jaké možné závěry sestavená tabulka naznačuje? Všimněme si, že ta čísla od 7 do 149, která v tabulce chybějí, jsou

$$\begin{gathered}9, 11, 17, 19, 23, 25, 29, 37, 41, 47, 49, 53, 59, 61, 67, 71, 79\\ 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 131, 137, 139, 149.\end{gathered}$$

Vidíme, že tato (ne brazilská) čísla jsou prvočísla až na čísla 9, 25 a 49, která jsou druhými mocninami prvočísel 3, 5, resp. 7. Šest prvočísel 7, 13, 31, 43, 73, 127 spolu s druhou mocninou $11^2 = 121$ však v tab. 1 nechybí (jde tedy o sedm brazilských čísel). Tato pozorování jsou ve shodě s následujícími dvěma tvrzeními, která uvedeme i s jejich důkazy.

---

1) Například číslo 80 má dokonce pět vyhovujících zápisů: $(2222)_3$, $(88)_9$, $(55)_{15}$, $(44)_{19}$, $(22)_{39}$.

							7	8	
10		12	13	14	15	16		18	
20	21	22		24		26	27	28	
30	31	32	33	34	35	36		38	39
40		42	43	44	45	46		48	
50	51	52		54	55	56	57	58	
60		62	63	64	65	66		68	69
70		72	73	74	75	76	77	78	
80	81	82		84	85	86	87	88	
90	91	92	93	94	95	96		98	99
100		102		104	105	106		108	
110	111	112		114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127	128	129
130		132	133	134	135	136		138	
140	141	142	143	144	145	146	147	148	

Tabulka 1: Brazilská čísla menší než 150

Věta 1
Všechna sudá čísla větší než 6 jsou brazilská.

Důkaz. Každé sudé $n > 6$ je tvaru $n = 2k$, kde $k \geq 4$ je sudé. Proto vyjádření

$$n = 2k = 2(k-1) + 2 = (22)_{k-1}$$

s ohledem na nerovnosti $2 < k - 1 < 2k - 1 = n - 1$ vede k závěru, že číslo n je skutečně brazilské.

Věta 2
Všechna lichá čísla větší než 5 jsou brazilská kromě některých prvočísel a některých druhých mocnin prvočísel.

Důkaz. Předpokládejme, že liché číslo $n > 5$ není ani prvočíslo, ani druhá mocnina prvočísla. Označme p nejmenší prvočinitel čísla n, takže platí

$n = pk$, kde obě čísla p, k jsou lichá a přitom $p < k$, tudíž $p < k - 1$. Nyní vyjádření

$$n = pk = p(k-1) + p = (pp)_{k-1}$$

s ohledem na nerovnosti $p < k - 1 < pk - 1 = n - 1$ znamená, že číslo n je skutečně brazilské.

Dokázané věty 1 a 2 znamenají, že k popisu všech brazilských čísel zůstává nevyřešenou „jen“ tato otázka: Která čísla p a která čísla p^2 jsou brazilská, probíhá-li p množinu všech prvočísel? Překvapivá odpověď pro čísla p^2 už je známa, její důkaz pro značnou náročnost postupu však neuvedeme.

Věta 3

Jediné prvočíslo p takové, že p^2 je brazilské číslo, je $p = 11$.

K větě 3 jen dodejme, že je součástí hlubokého výsledku norského matematika *Trygve Nagella* z roku 1921 o řešení rovnice

$$x^2 = 1 + y + y^2 + \ldots + y^{k-1}$$

v oboru celých čísel $x > 1$, $y > 1$ a $k > 2$. Nagell dokázal, že jediná dvě řešení (x, y, k) jsou trojice $(11, 3, 5)$ a $(20, 7, 4)$, které odpovídají rovnostem $11^2 = 121 = (11111)_3$ a $20^2 = 400 = (1111)_7$.

Ve zbytku našeho příspěvku se už budeme zabývat pouze brazilskými prvočísly. Nejprve představíme ta z nich, která nepřevyšují 1000, i s jejich potřebnými vyjádřeními.[2)]

$$\begin{aligned}
7 &= (111)_2 & 211 &= (111)_{14}\\
13 &= (111)_3 & 241 &= (111)_{15}\\
31 &= (111)_5 & 307 &= (111)_{17}\\
43 &= (111)_6 & 421 &= (111)_{20}\\
73 &= (111)_8 & 463 &= (111)_{21}\\
127 &= (1111111)_2 & 601 &= (111)_{24}\\
157 &= (111)_{12} & 757 &= (111)_{27}
\end{aligned}$$

[2)] Ostatní brazilská prvočísla menší než 20 000 jsou 1093, 1123, 1483, 1723, 2551, 2801, 2971, 3307, 3541, 3907, 4423, 4831, 5113, 5701, 6007, 6163, 6481, 8011, 8191, 9901, 10 303, 11 131, 12 211, 12 433, 13 807, 14 281, 17 293, 19 183, a 19 531. To naznačuje, že brazilská prvočísla nacházíme mezi všemi prvočísly 2, 3, 5, 7, 11, … poměrně vzácně. Přesněji to dále vystihneme větou 5.

Není náhoda, že ve vyjádřeních $p = (cc\dots c)_z$ všech těchto prvočísel p je číslice c rovna 1: Číslo $(cc\dots c)_z$ je totiž c-násobkem čísla $(11\dots 1)_z$, takže v případě $c > 1$ nemůže jít o prvočíslo. Brazilská jsou tedy právě prvočísla vyjádřená pro vhodné $z > 1$ zápisem $(11\dots 1)_z$ s více než dvěma jedničkami.

Největšímu zájmu matematiků se už dávno těší skupina brazilských prvočísel $(11\dots 1)_z$ s nejmenším základem $z = 2$. Jde zřejmě o prvočísla tvaru $2^k - 1$, která po více než 300 let nesou název `Mersennova`. Jejich souvislost s `dokonalými čísly` objevil už Eukleides. Druhou příčinou zájmu je skutečnost, že právě pro čísla tvaru $2^k - 1$ existují speciální rychlé metody testování jejich prvočíselnosti. Proto také všechna rekordně velká, v posledních desetiletích objevovaná prvočísla jsou Mersennova.[3)]

O množině všech brazilských prvočíslech toho dosud příliš nevíme. Svědčí o tom následující trojice zajímavých otázek, na které matematikové dosud marně hledají odpovědi.

- Je brazilských prvočísel nekonečně mnoho, jako je všech prvočísel?
- Existuje pro každý základ z větší než 1, který není druhou ani vyšší mocninou celého čísla, prvočíslo se zápisem $(11\dots 1)_z$ o více než dvou jedničkách?
- Jsou 31 a 8191 jediná dvě prvočísla, která mají ve dvou různých soustavách zápisy tvořené samými (více než dvěma) jedničkami? Platí totiž $31 = (111)_5 = (11111)_2$ a $8191 = (1111111111111)_2 = (111)_{90}$.

Něco málo o brazilských prvočíslech (kromě konečného počtu jejich příkladů) je však už známo. Uvedeme a dokážeme pro ně dvě tvrzení.

Věta 4

Je-li při některém základu $z > 1$ číslo $(11\dots 1)_z$ zapsané j jedničkami prvočíslo, pak i číslo j je prvočíslo.

Důkaz. Předpokládejme, že číslo j není prvočíslo, má tedy některého dělitele d, kde $1 < d < j$. Ze známého algoritmu písemného dělení pro čísla zapsaná v poziční soustavě o základu z pak ovšem plyne, že číslo větší než 1 zapsané d jedničkami je dělitelem většího čísla zapsaného j jedničkami, které tudíž není prvočíslo.

[3)] Z dosud známých 51 Mersennových prvočísel je od roku 2018 největší číslo $2^{82\,589\,933} - 1$, které má v desítkové soustavě 24 862 048 číslic. Oproti tomu známe pouze 10 brazilských prvočísel, která jsou zapsána samými jedničkami v desítkové soustavě; nejmenší z nich má 19 jedniček (prvočíslo 11 totiž není brazilské), největší má 8 177 207 jedniček.

Před formulací posledního výsledku upozorníme na jedno známé hlubší tvrzení z teorie čísel o tom, že nekonečná řada sestavená z převrácených hodnot všech různých prvočísel diverguje:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots=\infty.$$

Přestože dosud nevíme, zda všech brazilských prvočísel je konečně či nekonečně mnoho, součet obdobný předchozímu dokážeme odhadnout shora.

Věta 5

Pro součet převrácených hodnot všech brazilských prvočísel platí nerovnost

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{13}+\frac{1}{31}+\frac{1}{43}+\frac{1}{73}+\frac{1}{127}+\ldots<1.$$

Důkaz. Jistě stačí ukázat, že menší než 1 je součet převrácených hodnot všech čísel $(\underbrace{11\ldots1}_{k})_z$ s celočíselnými parametry $z\ge 2$ a $k\ge 3$. K tomu odhadneme nejprve součet těchto převrácených hodnot při každém pevném $z\ge 2$, jehož hodnotu označíme S_z. Užitím vzorce pro součet geometrické řady s kvocientem $1/z$ dostaneme

$$\begin{aligned}S_z&=\frac{1}{(111)_z}+\frac{1}{(1111)_z}+\frac{1}{(11111)_z}+\ldots=\\&=\frac{1}{z^2+z+1}+\frac{1}{z^3+z^2+z+1}+\frac{1}{z^4+z^3+z^2+z+1}+\ldots<\\&<\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\ldots=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right)=\frac{1}{z^2-z}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}.\end{aligned}$$

Sečtením těchto nerovností pro $z=2,3,\ldots,N$ obdržíme

$$\begin{aligned}&S_2+S_3+\ldots+S_N<\\&\qquad<\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{N-1}-\frac{1}{N}\right)=1-\frac{1}{N}<1.\end{aligned}$$

Z platnosti této nerovnosti pro každé $N\ge 2$ plyne neostrá nerovnost

$$\sum_{z=2}^{\infty}S_z\le 1.$$

Získaná nerovnost je ovšem ve skutečnosti ostrá, neboť všechny sčítané nerovnosti $S_z<\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}$ byly ostré.

O vlastnostech trojúhelníku spjatých s jeho ortocentrem

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Článek [2] se zabýval převážně důkazy věty o ortocentru trojúhelníku. V návaznosti na něj uvedeme další poznatky, které mohou být užitečné při řešení úloh z matematických soutěží.

Úvahy omezíme na ostroúhlé a tupoúhlé trojúhelníky. Ověření platnosti vyslovených vět nebo jejich úpravu pro situace, kdy je trojúhelník pravoúhlý, ponecháváme čtenáři.

Ortocentrum trojúhelníku ABC značíme V, těžiště T a kružnici mu opsanou $k(O;r)$. Dále pak P, Q, R budou paty výšek z vrcholů A, B, C a S_a, S_b, S_c středy stran BC, CA, AB. Body osově sdružené s ortocentrem podle přímek BC, CA a AB nechť jsou D, E a F. Vše v uvedeném pořadí.

Nejprve si připomeneme větu 1 dokázanou ve zmíněném článku a seznámíme se s příbuznou větou 2.

Věta 1

Obrazy ortocentra v osových souměrnostech podle stran trojúhelníku leží na kružnici trojúhelníku opsané.

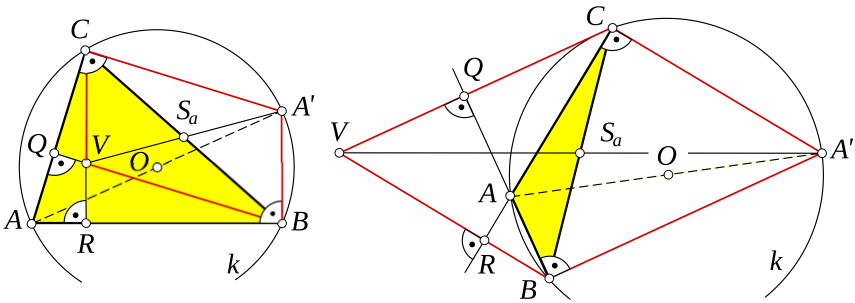
Věta 2

Obrazy ortocentra v souměrnostech podle středů stran trojúhelníku leží na kružnici trojúhelníku opsané a jsou podle jejího středu souměrně sdružené s protilehlými vrcholy trojúhelníku.

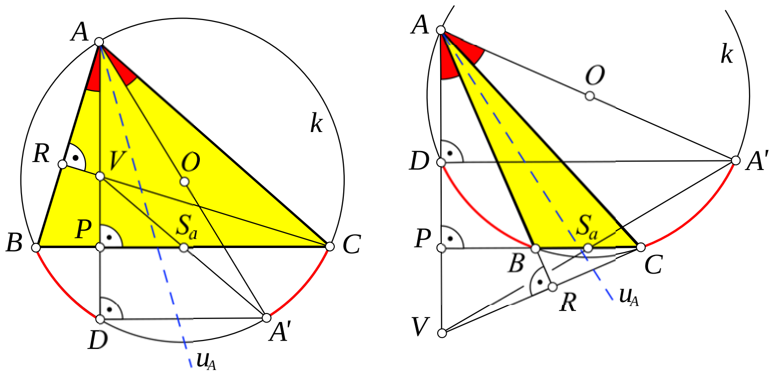
Důkaz. Označme A' obraz vrcholu A v souměrnosti podle středu O kružnice trojúhelníku ABC opsané, obr. 1. Úhly ABA' a ACA' nad průměrem AA' jsou pravé. Platí $BA' \parallel CV$, neboť obě úsečky jsou kolmé na přímku AB. Analogicky je též $CA' \parallel BV$, a tak je $CVBA'$ rovnoběžník. Ze symetrie podle průsečíku S_a jeho úhlopříček plyne věta 2.

Zabývejme se dále důsledky obou vět. Platí $BC \perp AD \perp DA'$ (Thaletova věta), neboli $A'D \parallel BC$, obr. 2. Oblouky BD a $A'C$, symetrické podle společné osy rovnoběžných tětiv BC a $A'D$, jsou shodné. Stejně tak i jejich doplňky, oblouky DC a BA'. Pro příslušné obvodové úhly platí

$$|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle A'AC| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle BAA'|. \tag{1}$$



Obr. 1 K důkazu věty 2



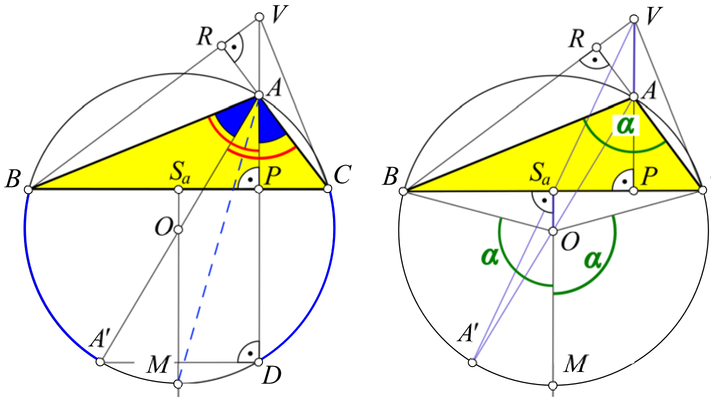
Obr. 2 Přímky AV a AO jsou souměrně sdružené podle osy úhlu BAC

Na obr. 3 vlevo je ještě znázorněna situace, kdy je úhel BAC tupý. Zjištěné vztahy vedou k následující větě 3, neboť $O \in AA'$ a $V \in AD$.

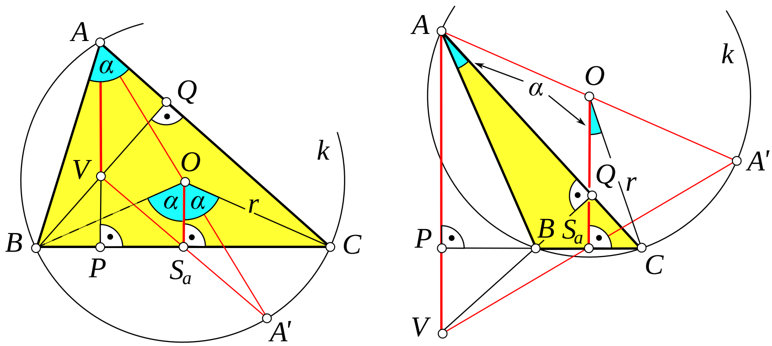
Věta 3

Je-li V ortocentrum trojúhelníku ABC a O střed jemu opsané kružnice, pak jsou přímky AV a AO souměrně sdružené podle osy úhlu BAC.

Obraťme nyní pozornost na úsečku OS_a, obr. 4 a obr. 3 vpravo. Ta je střední příčkou trojúhelníku AVA' a zároveň výškou rovnoramenného trojúhelníku BCO. Odtud a z vlastností střední příčky OS_a trojúhelníku VAA' plyne věta 4.



Obr. 3 Doplnění obrázků 2 a 4 pro tupý úhel α



Obr. 4 $OS_a \parallel AV$ a $|AV| = 2|OS_a| = 2r\cos\alpha$

Věta 4

V trojúhelníku ABC je úsečka OS_a rovnoběžná s úsečkou AV a platí

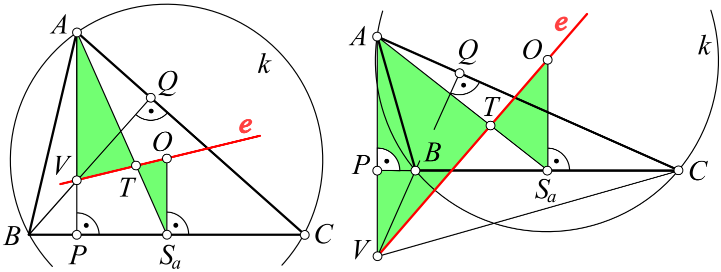
$$|AV| = 2|OS_a| = 2r|\cos\alpha|. \tag{2}$$

Lichoběžník AVS_aO má několik zajímavých vlastností. Průsečík T jeho úhlopříček je těžištěm trojúhelníku ABC, neboť leží na těžnici AS_a a z podobnosti trojúhelníků AVT, S_aOT plyne $\frac{|AT|}{|TS_a|} = \frac{|AV|}{|OS_a|} = 2$, obr. 5.

Přímka, na níž leží body A, V a T se nazývá *Eulerova přímka* a platí věta 5.

Věta 5

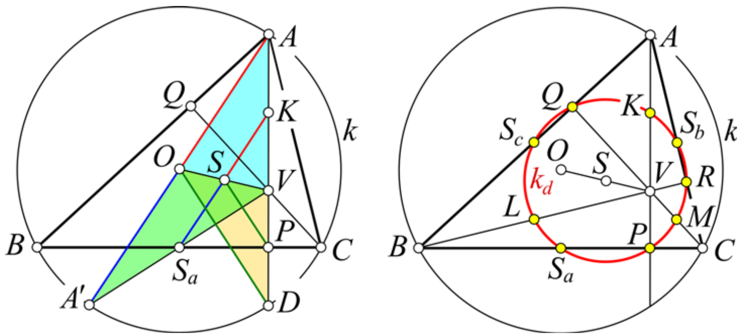
Těžiště T nerovnostranného trojúhelníku ABC leží uvnitř úsečky OV a platí $|VT| = 2|OT|$.



Obr. 5 Eulerova přímka e

Je zajímavé, že Euler dospěl k poznatku z věty 5 mimochodem a nevěnoval mu přílišnou pozornost. Jeho práce [1] z roku 1763 řeší početně problém, jak (při námi zavedeném označení) nalézt trojúhelník ABC, jsou-li dány jeho body O, T, V a střed I vepsané kružnice. Netriviálními výpočty určoval vztahy mezi vzdálenostmi daných a hledaných bodů trojúhelníku.

Zjistil, že $|VO| = \frac{3}{2}|VT|$ a $|TO| = \frac{1}{2}|VT|$. Vztahy doplnil poznámkou, že body V a T určují polohu středu O opsané kružnice, a dále se jimi nezabýval.



Obr. 6 Kružnice devíti bodů

Na úsečce OV leží ještě jeden zajímavý bod, její střed S. Je-li K střed úsečky AV, pak

$$\frac{r}{2} = |SK| = |SS_a| = |SP|. \tag{3}$$

Plyne to z vlastností středních příček SK, SS_a a SP trojúhelníků OAV, $OA'V$ a ODV (obr. 6 vlevo).

Jiná možnost odvození rovností (3) vychází z postřehu, že úsečka KS_a je střední příčkou trojúhelníku $AA'V$ a zároveň úhlopříčkou rovnoběžníku $VKOS_a$. Má tedy délku r a prochází bodem S, jenž je navíc středem kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku KS_aP.

Zobecněním vztahů (3) je věta 6 o *kružnici devíti bodů* onačované též jako *Feuerbachova kružnice*.

Věta 6

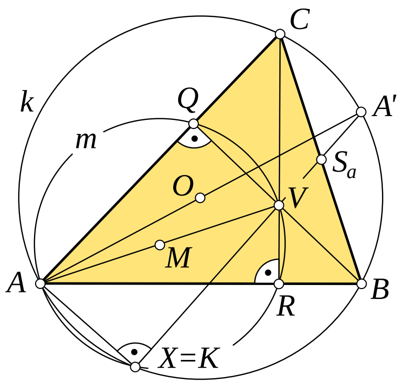
V trojúhelníku ABC leží na kružnici, jež má střed S uprostřed úsečky OV a poloměr $\frac{r}{2}$, středy stran trojúhelníku, paty jeho výšek a středy úseček AV, BV, CV.

Cílem článku bylo představit známé vlastnosti trojúhelníku v méně uváděných souvislostech. Vycházeli jsme z minimálních poznatků, aby se text dal použít i pro práci s mladšími studenty. Proto jsme např. záměrně nepracovali se stejnolehlostí, pomocí níž se věty 5 a 6 často dokazují.

Závěrem ukážeme využití uvedených poznatků na dvou vyřešených příkladech a přidáme několik úloh k samostatnému procvičení.

Příklad 1

Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s výškami BQ a CR. Kružnice k a m opsané trojúhelníkům ABC a AQR se protínají v bodech A, K. Dokažte, že přímka KV prochází středem S_a strany BC.



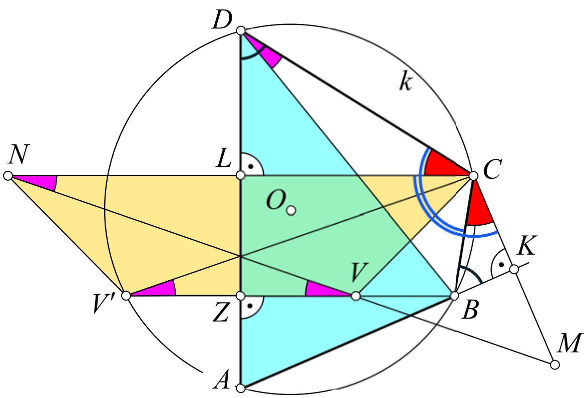
Obr. 7 K příkladu 1

Řešení. Z věty 2 víme, že obraz A' vrcholu A v souměrnosti podle středu O kružnice k leží na přímce $p = VS_a$, obr. 7. Průsečík této přímky (různý od bodu A) s kružnicí k označíme X a dokážeme, že $X = K$.

Platí $|\sphericalangle AXV| = |\sphericalangle AXA'| = 90°$. Čtyřúhelník $ARVQ$ je tětivový, neboť $|\sphericalangle ARV| + |\sphericalangle AQV| = 180°$. Opsaná kružnice m má průměr AV a je do ní vepsán i trojúhelník AVX. Odtud $X \in k \cap m$, $K = X \in p$. Přímka KV tedy prochází středem S_a strany BC.

Příklad 2

Ve čtyřúhelníku $ABCD$, který je vepsán do kružnice k a má ostré úhly při vrcholech A a D, jsou body M a N souměrně sdružené s vrcholem C podle přímek AB a AD. Dokažte, že ortocentrum trojúhelníku ABD leží na přímce MN.



Obr. 8 K příkladu 2

Řešení. Nechť BZ je výška trojúhelníku ABD, V její průsečík s přímkou MN a V' bod souměrně sdružený s bodem V podle přímky AD, obr. 8. Středy úseček CM a CN nechť jsou K a L (v daném pořadí).

S odvoláním na větu 1 stačí ověřit, že $V' \in k$. Dokážeme tedy, že je úsečka BC z bodů V' a D (ležících v téže polorovině s hraniční přímkou BC) vidět pod stejným úhlem.

Vnější úhel CBK tětivového čtyřúhelníku $ABCD$ je shodný s jeho protilehlým úhlem LDC, a tak jsou pravoúhlé trojúhelníky BCK a DCL podobné. Odtud

$$|\sphericalangle DCL| = |\sphericalangle BCK| \quad \text{a} \quad \frac{|CD|}{|CB|} = \frac{|CL|}{|CK|}.$$

Obě rovnosti ekvivalentně upravíme. Každý z obou úhlů nahradíme jeho geometrickým součtem s úhlem NCB a poslední zlomek rozšíříme dvěma.

$$|\sphericalangle DCB| = |\sphericalangle NCM| \quad \text{a} \quad \frac{|CD|}{|CB|} = \frac{2|CL|}{2|CK|} = \frac{|CN|}{|CM|}. \tag{4}$$

Ze vztahů (4) plyne podobnost trojúhelníků DBC a NMC podle věty *sus*. Užijeme ji spolu s lichoběžníkem $CNV'V$ souměrným podle přímky AD k dokončení důkazu; $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle MNC| = |\sphericalangle NVV'| = |\sphericalangle BV'C|$, a tak $V' \in k$.

Úlohy k samostatnému procvičení

1. V rovině jsou dány body C, U, V takové, že $|CV| = 3$ cm, $|VU| = 3{,}5$ cm a $|CU| = 4{,}5$ cm. Sestrojte ostroúhlý trojúhelník ABC tak, aby byl V průsečík jeho výšek a bod U souměrně sdružený s bodem A podle středu kružnice opsané trojúhelníku ABC. (51MO C-II-4)
2. Uvnitř strany AB ostroúhlého trojúhelníku ABC leží bod X takový, že $|AX| = |AC|$. Osa úhlu BAC protíná stranu BC v bodě U. Dokažte, že $AO \perp UX$.
3. V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ jsou V_a, V_b, V_c a V_d po řadě ortocentra trojúhelníků BCD, ACD, ABD a ABC. Dokažte, že $V_aV_bV_cV_d$ je čtyřúhelník shodný se čtyřúhelníkem $ABCD$ a má s ním rovnoběžné strany.
   (Pomocí vět 3 a 4 dokažte, že $|BM| = |BN|$.)
4. Ostroúhlý trojúhelník ABC má $\beta = 60°$. Přímka TO protíná jeho strany v bodech M a N. Dokažte, že je trojúhelník BMN rovnostranný.
5. Určete velikosti úhlů ostroúhlého trojúhelníku ABC, jehož osa AU úhlu BAC je shodná se stranou AC a je kolmá na přímku OV.
   (Využijte věty 3 a 4, $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$, $\gamma = 75°$.)

Literatura

[1] *Euler, L.*: E325, Solutio facilis problematum quorundam geometrycorum difficillimorum. eulerarchive.maa.org/backup/E325.html

[2] *Leischner, P.*: Ortocentrum trojúhelníku. Matematika–fyzika–informatika, roč. 33 (2024), č. 2, s. 100–107.

[3] *Sergjejev, P., Saveljeva, A.*: Vokrug ortotreyugolnika. Kvant, roč. 2019, č. 7, s. 26–31.

[4] *Švrček, J.*: Vybrané kapitoly z geometrie trojúhelníku. Karolinum, Praha, 1998.

O testových úlohách s nejednoznačným řešením

MIROSLAV KOLAŘÍK – ALŽBĚTA KOLAŘÍKOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc – Pedagogická fakulta UP, Olomouc

Budeme se zabývat úlohami s nejednoznačným řešením a jejich vhodným a nevhodným využitím. Představíme některé převzaté úlohy s příklady možných variant řešení. Podrobněji se budeme věnovat problematice doplňování posloupnosti čísel. Seznámíme zde čtenáře s pojmem kolmogorovská složitost, která může sloužit jako kritérium pro hodnocení obtížnosti úloh s doplňováním posloupnosti čísel, přičemž náročnost doplnění souvisí zejména s počtem a pravidelností jejích členů. Nakonec detailně rozvedeme, jak doplnit zdánlivě jednoznačnou posloupnost čísel 1, 2, 3, 4, 5.

Cílem článku je zaměřit se na problematiku nejednoznačně zadaných úloh a také ukázat, že u každé konečné posloupnosti čísel lze libovolně doplnit její další člen.

Vybrané příklady úloh s nejednoznačným řešením

Z [1] bylo převzato zadání následujících sedm konkrétních úloh. Po zadání každé úlohy vždy následuje stručné a logicky správné zdůvodnění několika vybraných možných řešení. Podobných úloh lze najít nebo vymyslet celou řadu, pro potřeby tohoto článku nám však tento výběr dostatečně postačuje.

Zdůrazněme, že následujících sedm převzatých úloh se autorům článku nelíbí, především proto, že je v [1] deklarována jejich jednoznačnost. Právě jednoznačnost autoři rozporují, neboť uvádějí více možných řešení. Autorům také vadí nejasné či nepřesné zadání a celkové nedidaktické zpracování. Přesto jsou tyto úlohy záměrně ponechány v původní podobě[1)], zejména proto, že se jim podobné úkoly poměrně často vyskytují. Je téměř jisté, že učitelé na tento typ úloh opakovaně narazí a měli by jej proto umět identifikovat a správně zařadit.

[1)] Některé úlohy byly mírně modifikovány.

1. Doplňte chybějící číslo na místo otazníku.

3 8 ? 21

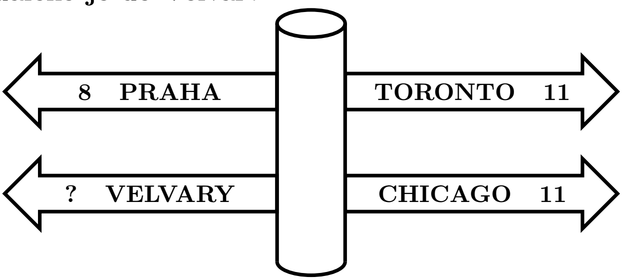
První řešení: -10
Součet prvních dvou čísel vyjde stejně jako součet druhých dvou čísel.

Druhé řešení: 12
Součet dvou po sobě jdoucích čísel spolu s číslem 1 dá následující číslo, tedy $3 + 8 + 1 = 12$ a $8 + 12 + 1 = 21$.

Třetí řešení: 14
Rozdíl mezi druhým a prvním číslem je 5, mezi třetím a druhým číslem je rozdíl 6 a mezi čtvrtým a třetím číslem je rozdíl 7.

Čtvrté řešení: 16
Rozdíl první dvojice čísel vyjde 5, stejně jako rozdíl druhé dvojice čísel, tedy $8 - 3 = 5$ a $21 - 16 = 5$.

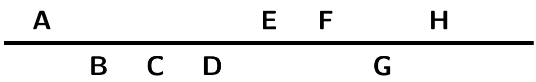
2. Jak daleko je do Velvar?



Řešení: 8
Česká města mají přiřazenu hodnotu 8, zahraniční města mají přiřazenu hodnotu 11.

Jiné řešení: 11
Každá samohláska v názvu města má hodnotu 1, každá souhláska má hodnotu 2. Vzdálenost je pak určena součtem všech hodnot jednotlivých písmen v názvu města.

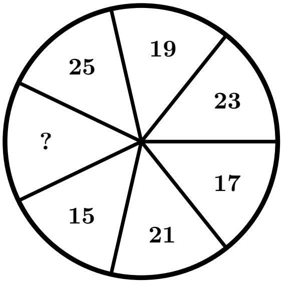
3. Kam patří písmeno I – nad linku, nebo pod linku?



Řešení: Písmeno I *patří nad linku.*
Nad linku patří všechna písmena sestávající výhradně z rovných čar. Pod linku patří ostatní písmena.

Jiné řešení: Písmeno I *patří pod linku.*
Pod linku patří všechna písmena, která lze napsat jedním tahem. Nad linku patří ostatní písmena.

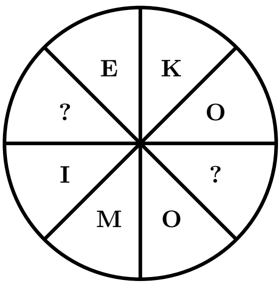
4. Které číslo patří na místo otazníku?



Řešení: 21
Čteme-li v protisměru pohybu hodinových ručiček každé druhé číslo počínaje patnáctkou, obdržíme posloupnost 15, 17, 19, 21. Zbývající čísla 21, 23, 25 tvoří také rostoucí posloupnost, kde každý následující člen je vždy o 2 větší než jemu předcházející člen.

Jiné řešení: 19
Čteme-li v protisměru pohybu hodinových ručiček každé druhé číslo počínaje otazníkem, obdržíme posloupnost 19, 21, 23, 25. Zbývající čísla 15, 17, 19 tvoří také rostoucí posloupnost, kde každý následující člen je vždy o 2 větší než jemu předcházející člen.

5. Doplňte dvě chybějící písmena.



Poznámka 1. Je nevhodné označit dvě neznámé, které mohou být odlišné, stejným symbolem (otazníkem). Pro potřeby popisu řešení označíme otazník umístěný mezi dvěmi písmeny O symbolem x a otazník umístěný mezi písmeny I a E symbolem y.

Řešení: $x = N$, $y = E$
Doplníme písmena tak, aby vzniklo slovo EKONOMIE.

Jiné řešení: $x = H$, $y = S$ *a dále například:* $x = K$, $y = C$ *nebo* $x = L$, $y = L$
Doplníme písmena tak, aby vznikla dvě existující slova: KOHO a MISE, případně: OKO a MICEK nebo KOLO a MILE.

6. Určete, které slovo nepatří mezi ostatní slova.

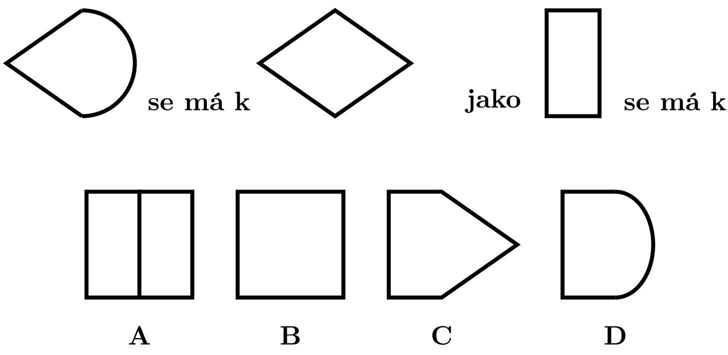
ABRAHÁM EFEKT OPICE MNICH LANO

První řešení: LANO
U všech ostatních slov je vždy druhé písmeno abecedně ihned po prvním písmenu.

Druhé řešení: EFEKT
Jen slovo EFEKT je abstraktní, všechna ostatní slova jsou konkrétní.

Třetí řešení: ABRAHÁM
Jen slovo ABRAHÁM obsahuje nějaké diakritické znaménko (konkrétně čárku v písmenu Á).

7. Který z obrázků doplníte?



Řešení: C
Levá polovina se ponechá stejně. Na pravou polovinu se zkopírují dvě úsečky ve tvaru „>“.

Jiné řešení: B, resp. A
Levá polovina se ponechá stejně. Na pravou polovinu se umístí zkopírovaná levá strana otočená o 180° (prostřední úsečka se neponechá, resp. ponechá).

Kde se s nejednoznačně zadanými úlohami můžeme setkat? Kdy je to žádoucí a kdy nežádoucí?

Nejednoznačně zadané úlohy se typicky vyskytují v šifrovacích hrách, kde hráči musí uhodnout, jaký šifrovací princip autor zvolil, a s jeho znalostí získat kýžené heslo. V České republice se pořádá značné množství šifrovacích her, kterých se účastní tisíce hráčů. U těchto her hráči s rizikem nejednoznačnosti zadání musejí počítat. I přesto se často po hrách ve zpětných vazbách vyskytuje kritika u šifer, které by šlo logicky řešit i jinak, než autoři zamýšleli, a jsou chváleny šifry, kde je správný postup potvrzován a slepých cest není mnoho. Podobně se tyto úlohy vyskytují také v rámci tzv. rekreační matematiky a jsou oblíbené třeba při hrách na dětských táborech. V těchto případech poskytuje široká paleta zajímavých úloh značné množství originálních postupů, vedoucích k vyřešení šifry. Dešifrování pak podporuje trpělivost, fantazii, pečlivost a samozřejmě logické myšlení. To vše jsou žádoucí efekty, kvůli kterým má smysl šifry a podobné úkoly řešit.

Pokud se s nejednoznačně zadanou úlohou setkají žáci ve škole, měl by mít učitel důkladně rozmyšleno, jak postupovat. Učitel může takové úlohy zařadit do výuky záměrně a nejednoznačnost řešení na nich demonstrovat. Občas se ale s nezamýšleným a přitom správným řešením může potkat i nechtěně. V takovém případě by měl učitel uznat i jiná než zamýšlená řešení, dovede-li žák svůj postup logicky správně zdůvodnit.

Při přípravě úloh, které jsou opravovány podle šablony, je nutné eliminovat všechny nejednoznačně zadané úlohy. Učitel by měl následně projít s žáky správná řešení a umožnit jim doptat se na případné nejasnosti. Pokud by se stalo, že by nějaká úloha mohla být vyřešena správným postupem, ale s jiným výsledkem než učitel očekával, je samozřejmě potřeba takové řešení uznat a pozitivně jej ohodnotit. Kdyby učitel správné řešení neukazoval, mohlo by se stát, že nějaké žáky nechtěně poškodí. Proto je důležité na demonstraci správných řešení vymezit předem dostatek času.

Problematičtější je, že se úlohy s více možnostmi řešení vyskytují v situacích, kdy na výsledku záleží mnohem více. Problém nastává, pokud je uznávána pouze jedna správná možnost. Z výše uvedených příkladů je zřejmé, že se takovéto úlohy velmi často objevují v IQ testech. Někdo, kdo našel správné řešení, ale jiné než bodované, tak neoprávněně přichází o body, v důsledku čehož mu je naměřena menší hodnota IQ. Nejednoznačně zadané úlohy lze potkat také na Logické olympiádě, což je soutěž, jejíž popularita v poslední době značně roste [2]. Dodejme, že úlohy Logické olympiády nejsou zveřejňovány[2)] a nemohou tak být podrobeny kontrole, pochvale a kritice.

Velmi nežádoucí je, aby se úlohy s více možnými správnými odpověďmi dostaly do testů v rámci různých přijímacích řízení, například na střední školu, na vysokou školu nebo do nového zaměstnání. Takovým úlohám je třeba se vyhnout, neboť případná „dohra“ může dojít až k soudu, viz [4].

Nyní ukážeme příklad slovní úlohy převzaté z oficiálních SCIO testů pro žáky pátých tříd ZŠ, která není vhodná do testu na přijímací řízení, zejména, je-li deklarováno, že každá úloha má právě jedno správné řešení.

Příklad se stromky. Při prohlídce sadu zjistil sadař, že každý čtvrtý stromek uschl. Za každý suchý vysadil dva nové, tedy 276 nových stromků. Kolik stromků bylo pak celkem v sadu?

A) 552 B) 690 C) 728 D) 828 E) 1104

Největším problémem u této úlohy je to, že není zcela jasné, jestli vůbec byly nějaké stromky odstraněny. Pokud ano, pak se nabízí řešení: $3 \cdot 138 + 276 = 690$. Pokud tam stromky zůstaly, pak obdržíme výsledek: $4 \cdot 138 + 276 = 828$. Totiž tvrzení: „za každý suchý vysadil dva nové,“ lze přirozeně interpretovat tak, že každé dva nové stromky byly vysázeny za nějakým suchým stromkem, přičemž suché stromky tam zůstaly. A je tu nejednoznačné řešení. Přísně vzato problematických míst lze najít více. Například z ničeho nevyplývá, že původní počet stromků musí být přesně dělitelný čtyřmi. Do úvahy tak připadá i původní počet neuschlých stromků zvětšený o 1, 2, nebo 3 stromky. Tedy kromě hodnoty 414, lze brát v potaz i hodnoty 415, 416 a 417, neboť ve všech těchto případech, pokud každý čtvrtý stromek uschl, uschlo právě 138 stromků a bylo vysazeno 276 nových stromků. Problém tkví i v tom, že bylo použito slovo

[2)] Na rozdíl od významné soutěže Matematický klokan [3], kde jsou zveřejňována všechna zadání a správná řešení.

suchý místo slova uschlý. Tato slova mají totiž různý význam. Stromek se může stát suchým, třeba kvůli tomu, že uschne po dešti. V takovém případě jej ale není nutno odstraňovat ze sadu. A naopak po dešti nejsou ani uschlé stromky suché…

Jak tedy zadání pozměnit, aby se eliminovala diskuze kolem možných správných řešení? Například následovně.

Příklad se stromky po úpravě. Při prohlídce sadu zjistil sadař, že přesně každý čtvrtý stromek uschl. Každý uschlý stromek odstranil a vysadil místo něj dva nové, celkem 276 nových stromků. Kolik stromků bylo pak celkem v sadu?

A) 552 B) 690 C) 728 D) 828 E) 1104

Studium matematiky (mimo jiné) učí jednoznačnému a srozumitelnému vyjadřování, což je užitečné i v jiných předmětech a v praktickém životě. S tímto tvrzením úzce souvisí další příklad pocházející od společnosti Cermat, která v současné době připravuje testy pro jednotné přijímací zkoušky i pro státní maturity. V roce 2018 byl odvolán její tehdejší ředitel právě kvůli nejednoznačným úlohám v testech. Uvedeme příklad z testu pro přijímací řízení na osmiletá gymnázia [5].

Příklad s hláskami. Které z následujících slov obsahuje kořen skládající se ze čtyř hlásek?

A) objevili B) zabručel C) rozběhla D) nevydržela

Podle klíče řešení je správná odpověď B, ale také možnost C splňuje zadání, protože nepočítáme písmena, ale hlásky, které vyslovujeme. Tedy: [za**bruč**el], [ros**bjeh**la]. Cermat chybu uznal po upozornění učitelů.

Několik poznámek k doplňování posloupností čísel

V úlohách, kde je třeba logicky doplnit konečnou posloupnost čísel následující hodnotou, je třeba najít pravidlo, které určuje, jak jsou tato čísla seřazena. Nejednoznačnost řešení může snadno vzniknout, pokud není jasné, jaký druh pravidla má být nalezen. Prohlásit přitom, že nějaké řešení je lepší než jiné, je někdy značně diskutabilní. Upozorněme na to, že pokud mají zadané posloupnosti málo čísel (řekněme méně než šest), pak je lze relativně jednoduše libovolně doplňovat. Mnohem těžší bývá jednoduše doplnit posloupnost sestávající z více čísel (řekněme, že jich má alespoň dvacet). K tomu dodejme, že náročnost doplňování může být nahlížena pomocí tzv. kolmogorovské složitosti, což je pojem z oboru teoretické informatiky. V podstatě jde o to, jak efektivně můžeme popsat nebo reprezentovat určitá data pomocí algoritmu. Kolmogorovská složitost je míra složitosti informace obsažené v datech, založená na délce nejkratšího možného programu, který může daná data vygenerovat. Kratší program znamená nižší kolmogorovskou složitost, což znamená, že jsou data jednodušší nebo méně nepravidelná. Naopak delší program signalizuje větší složitost.[3)] Tento koncept je pojmenován po sovětském matematikovi Andreji Nikolajevičovi Kolmogorovi a také je úzce spjat s Gregorym Johnem Chaitinem a Rayem Solomonoffem. Více o kolmogorovské složitosti například viz [7].

Kolmogorovská složitost může být snadno spojena s doplňováním posloupností čísel. Máme-li posloupnost, kterou chceme doplnit, můžeme se pokusit najít nejkratší program (algoritmus), který by tuto posloupnost vygeneroval a měl přitom co možná nejnižší možnou kolmogorovskou složitost. Má-li posloupnost nízkou kolmogorovskou složitost, může to znamenat, že je pravidelná a snadno se doplní její další člen. Naopak složitější nebo náhodnější posloupnost typicky vyžaduje delší program a má tak vyšší kolmogorovskou složitost. V této souvislosti by se úspěšné doplnění dané posloupnosti mohlo interpretovat jako nalezení efektivního způsobu reprezentace posloupnosti pomocí algoritmu s nízkou kolmogorovskou složitostí.

Pro jasnější představu uvedeme dvě konkrétní posloupností o 20 členech:

(a) $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1,$

(b) $-245, 378, 40, -92, 167, -432, 289, -156, 453, -78, 214, -321, 87, -499, -1235, -267, 189, 392, -50, -464.$

Najít algoritmus, který by postupně generoval posloupnost čísel z bodu (a) je triviální. Stačí vzít posloupnost $(-1)^{n+1}$, kde n je přirozené číslo. První člen této posloupnosti je tedy $(-1)^{1+1} = 1$, druhý je $(-1)^{2+1} = -1$, třetí je $(-1)^{3+1} = 1$ atd. Dopočítat 21. číslo je přímočaré: $(-1)^{21+1} = 1$. Na druhou stranu najít algoritmus, který by postupně generoval všech dvacet čísel z bodu (b), je značně netriviální. Nejkratší by bylo patrně přímé vypsání oněch dvaceti čísel. Jak (a proč) by ale vypadalo v pořadí další, 21. číslo?

[3)] Přesná hodnota složitosti různých dat je určena také tím, jaký programovací jazyk je předem zvolen, ovšem volba jazyka má jen omezený vliv.

Jak doplnit posloupnost 1, 2, 3, 4, 5?

Podíváme se, jak na doplnění posloupnosti 1, 2, 3, 4, 5 nahlížejí matematici. Jak dále uvidíme, žádné doplňování posloupnosti čísel není jednoznačné. Vždy lze nalézt nekonečně mnoho způsobů, jak danou posloupnost doplnit a daný způsob doplnění logicky zdůvodnit.

Pro dokreslení této situace se nyní podíváme na tři přístupy, které z matematického pohledu zdůvodňují, že posloupnost čísel 1, 2, 3, 4, 5 může být doplněna libovolným reálným číslem, například číslem π.

První možností je tvrdit, že posloupnost je periodická a vypadá takto:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \pi,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \pi,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \pi,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \pi,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Druhým zdůvodněním je představení vzorce pro výpočet n-tého členu posloupnosti, například ve tvaru

$$a_n = n + \lfloor n/6 \rfloor \cdot (\pi - n),$$

kde $\lfloor n/6 \rfloor$ značí tzv. dolní celou část čísla $n/6$. Protože je $\lfloor n/6 \rfloor = 0$, pro každé $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a $\lfloor 6/6 \rfloor = 1$, vypadá prvních šest členů posloupnosti takto: 1, 2, 3, 4, 5, π. Čtenář si snadno rozmyslí, že místo hodnoty π může vzorec obsahovat proměnnou x, která může nabývat libovolné reálné hodnoty a dokonce může být i číslem komplexním. Po prvních pěti přirozených číslech tak může na základě jednoduchého vzorce následovat libovolná číselná hodnota x.

Třetí pohled se týká problematiky prokládání polynomu danými body. To je v našem případě možné provést s využitím nějaké známé interpolační metody, tedy hledáním vhodného interpolačního polynomu, který prochází body o souřadnicích $[1, 1]$, $[2, 2]$, $[3, 3]$, $[4, 4]$, $[5, 5]$ a $[6, \pi]$. Známý a zdarma přístupný software WolframAlpha [6] ho najde během okamžiku, viz obr. 1.

Dodejme, že pro námi uvažované (krátké) konečné posloupnosti půjde tímto způsobem vždy nalézt jednoznačně určené řešení, které lze relativně snadno algoritmicky vypočítat. Z tohoto úhlu pohledu tedy následovník několika prvních členů číselné posloupnosti může být libovolné námi zvolené číslo a doplnění každé konečné posloupnosti čísel tak má nekonečně mnoho řešení.

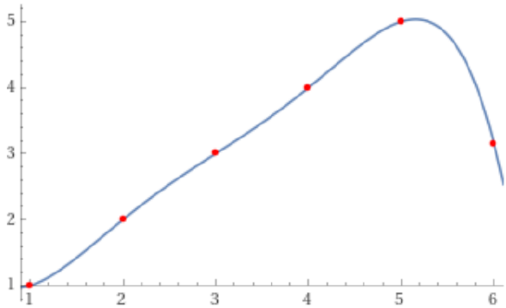
Nejednoznačnost představuje výzvu pro řešitele i pro tvůrce úloh. Zaměřili jsme se na to, kde se můžeme s nejednoznačnými úlohami setkat a odůvodnili jsme, kdy je to vhodné a kdy naopak ne. Za vhodné považujeme využití v oblasti tzv. rekreační matematiky, naopak v testech, kde je deklarováno jediné správné řešení, jsou úlohy s nejednoznačným řešením nevhodné.

interpolating polynomial	{1, 2, 3, 4, 5, π}

Interpolating polynomial

$$\frac{\pi x^5}{120} - \frac{x^5}{20} - \frac{\pi x^4}{8} + \frac{3x^4}{4} + \frac{17\pi x^3}{24} - \frac{17x^3}{4} - \frac{15\pi x^2}{8} + \frac{45x^2}{4} + \frac{137\pi x}{60} - \frac{127x}{10} - \pi + 6$$

Plot of the interpolating polynomial



Obr. 1

Literatura

[1] *Butler, E., Pirie, M.*: Testy IQ. Svoboda – Libertas, Praha, 1993.

[2] Logická olympiáda. [online]. [cit. 2024-02-22]. Dostupné z: https://www.logickaolympiada.cz/.

[3] Matematický klokan. [online]. [cit. 2024-02-22]. Dostupné z: https://matematickyklokan.net/.

[4] *Mačí, J.*: Verdikt, který tu ještě nebyl. Spor o maturitu vyhrál u soudu poprvé student. Seznam Zprávy. [online]. [cit. 2024-02-22]. Dostupné z: https://bit.ly/3URJNA7.

[5] 2. řádný termín – osmileté obory gymnázií 2018. Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání. [online]. Dostupné z: urlhttps://bit.ly/3P4yGQv [cit. 2024-02-22].

[6] WolframAlpha: Computational Intelligence. [online]. Dostupné z: https://www.wolframalpha.com/. [cit. 2024-02-22].

[7] *Li, M., Vitányi, P.*: An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications. 4. vyd., Springer, New York, 2019.

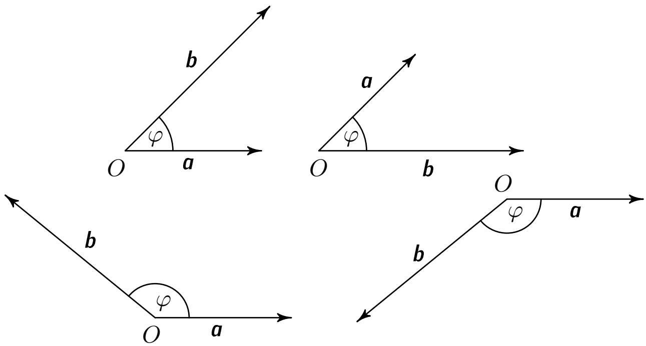
Odchylka dvou vektorů

MILOSLAV ZÁVODNÝ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V tomto příspěvku uvedeme snadné odvození formule pro výpočet odchylky dvou nenulových vektorů[1)] v rovině pomocí skalárního součinu.

Na rozdíl od odchylky dvou přímek v rovině, která je charakterizována jako úhel ψ, pro který platí $0^\circ \leq \psi \leq 90^\circ$, je odchylka dvou nenulových vektorů v rovině definována jako velikost konvexního úhlu φ, který oba vektory svírají, tj. platí $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ (obr. 1).



Obr. 1 Odchylka φ vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$

Uvažujme umístění vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ se společným počátkem ve středu kartézské souřadnicové soustavy Oxy v této rovině (obr. 2).

Nechť $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$, přičemž

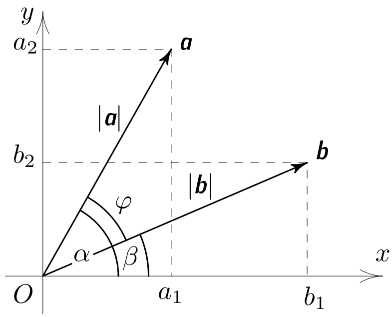
$$a_1 = |\boldsymbol{a}| \cos\alpha, \quad a_2 = |\boldsymbol{a}| \sin\alpha, \quad b_1 = |\boldsymbol{b}| \cos\beta, \quad b_2 = |\boldsymbol{b}| \sin\beta,$$
$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}, \quad |\boldsymbol{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2},$$

jak je patrné z obr. 2.

Využitím goniometrického vzorce pro kosinus φ, kde $\varphi = \alpha - \beta$, máme (viz obr. 2)

$$\cos\varphi = \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|} \cdot \frac{b_1}{|\boldsymbol{b}|} + \frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|} \cdot \frac{b_2}{|\boldsymbol{b}|}.$$

[1)] Někdy též úhel dvou vektorů.



Obr. 2 Vektory v kartézské souřadnicové soustavě

Odchylka φ vektorů $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ je tak dána vztahem

$$\cos\varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Výraz $a_1 b_1 + a_2 b_2$ se nazývá *skalární součin* vektorů $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a značí se $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$. Platí tedy

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}.$$

Skutečnost, že pro vypočtenou odchylku vektorů platí $0° \leq \varphi \leq 180°$, garantuje Cauchyho–Schwarzova nerovnost, podle níž pro libovolné dvojice reálných čísel (a_1, a_2), (b_1, b_2) platí $(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$. Pro nenulové vektory $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ dostaneme po úpravě

$$\frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \leq 1,$$

tedy

$$-1 \leq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}} = \cos\varphi \leq 1,$$

a proto $0° \leq \varphi \leq 180°$.

Příklad 1

Vypočtěte odchylku vektorů:

1) $\boldsymbol{a} = (1; \sqrt{3})$, $\boldsymbol{b} = (-3; 0)$; 2) $\boldsymbol{u} = (1; 3)$, $\boldsymbol{v} = (2; 1)$.

Řešení.

1) $\cos\varphi_1 = -\frac{1}{2}$, tedy $\varphi_1 = 120°$. 2) $\cos\varphi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tedy $\varphi_2 = 45°$.

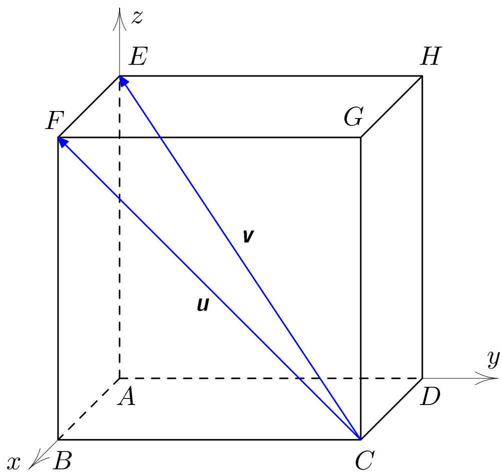
Poznámka. Protože vektor lze reprezentovat jeho libovolným umístěním, mohou mít vhodně zvolená umístění dvou vektorů vždy společný bod. Jejich směry jsou různoběžkami, nebo rovnoběžkami, určujícími rovinu, v níž oba vektory leží. Tedy i dva vektory v prostoru můžeme považovat za vektory ležící v rovině.

V případě trojrozměrných vektorů $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$, kde $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$, je jejich skalární součin definován výrazem $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. Pro jejich odchylku φ pak platí

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}.$$

Příklad 2

Je dán kvádr $ABCDEFGH$, viz obr. 3. Vypočtěte odchylku vektorů $\boldsymbol{u} = CF$, $\boldsymbol{v} = CE$, jestliže $A[0;0;0]$, $B[2;0;0]$, $D[0;4;0]$ a $|AE| = 4$.



Obr. 3

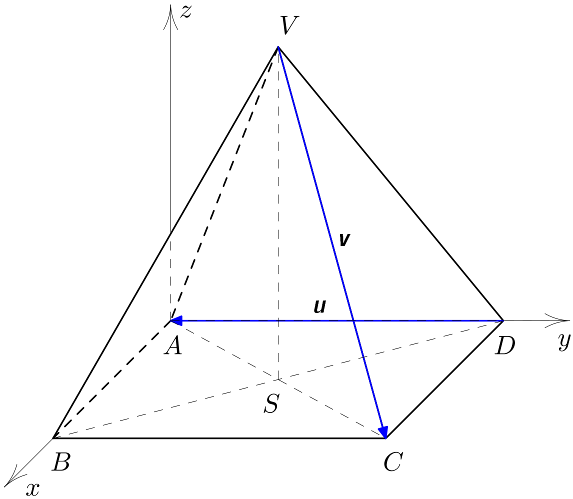
Řešení. Zřejmě $C[2;4;0]$, $E[0;0;4]$, $F[2;0;4]$, tudíž $\boldsymbol{u} = F - C = (0;-4;4)$ a $\boldsymbol{v} = E - C = (-2;-4;4)$. Skalární součin $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 32$, $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{v}| = 6$. Pro odchylku φ vektorů $\boldsymbol{u} = CF$ a $\boldsymbol{v} = CE$ dostáváme

$$\cos\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

odkud $\varphi \doteq 19°28'$.

Příklad 3

Je dán pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$, jehož výška je rovna délce hrany jeho podstavy. Vypočtěte odchylku vektorů $\boldsymbol{u} = DA$ a $\boldsymbol{v} = VC$.



Obr. 4

Řešení. Umístíme jehlan $ABCDV$ do kartézské souřadnicové soustavy, viz obr. 4. Délku hrany podstavy označme $2x$, potom $A[0,0,0]$, $B[2x,0,0]$, $C[2x,2x,0]$, $D[0,2x,0]$, $S[x,x,0]$, $V[x,x,2x]$, $\boldsymbol{u} = A - D = (0,-2x,0)$ a $\boldsymbol{v} = C - V = (x,x,-2x)$. Skalární součin $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = -2x^2$, $|\boldsymbol{u}| = 2x$, $|\boldsymbol{v}| = x\sqrt{6}$. Pro odchylku φ vektorů $\boldsymbol{u} = DA$ a $\boldsymbol{v} = VC$ dostaneme

$$\cos\varphi = \frac{-2x^2}{2x \cdot x \cdot \sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{6},$$

odkud $\varphi \doteq 114°5'$.[2)]

Literatura

[1] *Kočandrle, M.*, *Boček, L.*: Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie. JČMF, Prometheus, Praha, 2010.

[2)] Odchylka vektorů $\boldsymbol{u} = DA = CB$ a $-\boldsymbol{v} = CV$ je však $\varphi \doteq 65°55'$. Tu lze získat také pomocí kosinové věty z rovnoramenného trojúhelníku BCV, viz obr. 4.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 3. 2025 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi zveřejníme.

Úloha 297

Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo n platí nerovnost

$$\frac{1}{1^2\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2^2}+\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)^2}<1.$$

Pavel Calábek

Úloha 298

Trojúhelníku ABC je vepsána kružnice o poloměru ϱ. Její tečny rovnoběžné po řadě se stranami a, b, c trojúhelníku z něj vytínají tři menší trojúhelníky, jejichž kružnice vepsané mají poloměry ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c. Dokažte, že platí

$$\varrho=\varrho_a+\varrho_b+\varrho_c.$$

Josef Polák

Dále uvádíme řešení úloh 293 a 294, jejichž zadání jsme zveřejnili ve druhém čísle letošního (33.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 293

a) Kuchař rozřezal kilogramový bochník sýra na šest dílů vážících alespoň 50 g. Dokažte, že z nich může několik vybrat a rozdělit je na dva talíře tak, aby se hmotnosti sýra v obou talířích lišily méně než 15 g.

b) Na kolik dílů vážících aspoň 1 g musí kuchař tento bochník rozdělit, aby z nich bylo možno několik rozdělit na dva talíře tak, že hmotnosti sýra v obou talířích se liší méně než 1 g? Najděte nejmenší takový počet.

Pavel Calábek

Řešení.

a) Z šesti dílů sýra může kuchař vytvořit $2^6 - 2 = 62$ různých podmnožin, které obsahují jeden až pět dílů, podle zadání o celkových hmotnostech od 50 g do 950 g, tedy v rozsahu 900 g. Tento rozsah kuchař rozdělí na 61 stejných úseků. Jelikož $15 \cdot 61 = 915$, existují podle Dirichletova principu dvě různé podmnožiny, jejichž hmotnosti se nacházejí ve stejném úseku, tedy liší nejvýše o $900/61$ g < 15 g. Pokud z těchto dvou různých podmnožin kuchař odebere případné totožné díly sýra, rozdíl jejich hmotností se nezmění a v každé z nich zbude aspoň jeden díl, protože v opačném případě by jedna z nich byla podmnožinou druhé a jejich hmotnosti by se lišily aspoň o hmotnost jednoho dílu sýra, tedy o 50 g. Když pak kuchař zbývající díly sýra z obou (zmenšených) podmnožin položí dva talíře, jejich hmotnosti se budou lišit o méně než požadovaných 15 g.

b) Stejnou úvahou jako v části a) ukážeme, že pokud kuchař rozdělí bochník sýra na deset dílů, budou existovat jejich dvě různé podmnožiny o jednom až devíti prvcích, které se liší nejvýše o

$$(1000 - 2 \cdot 1)/(2^{10} - 2)\ \mathrm{g} = 998/1022\ \mathrm{g} < 1\ \mathrm{g}.$$

Po odstranění společných dílů z nich pak kuchař vytvoří požadované dva talíře. Jestliže se nám podaří ukázat, že z 9 dílů o požadovaných hmotnostech se to vždy nemusí podařit, dokážeme, že nejmenší hledaný počet dílů je deset. Kuchaři se např. může podařit odkrojit z bochníku osm dílů o hmotnostech $2^0 \cdot 1{,}5$ g $= 1{,}5$ g, $2^1 \cdot 1{,}5$ g $= 3$ g, $2^2 \cdot 1{,}5$ g $= 6$ g, …, $2^7 \cdot 1{,}5$ g $= 192$ g, zbude mu díl o hmotnosti 617,5 g, která je o 235 g větší než součet hmotností ostatních dílů. Tento zbývající díl se jistě na vyhovujícím talíři nemůže objevit. Z jednoznačnosti zápisu čísel ve dvojkové soustavě dále plyne, že neexistují dvě různé podmnožiny prvních osmi dílů se stejnými hmotnostmi, tedy se liší aspoň o 1,5 g.

Správná řešení zaslali *Radim Aulický*, G Praha 6, Nad Alejí, *Alexis Théodore Dachary*, LSG Letohrad, *Miroslav Holeček*, MG Plzeň, *Erik Ježek*, SSPŠ a G Praha 5, *Tereza Kubínová*, G Praha 9, Litoměřická, *Václav Kučera*, SChŠ, ZŠ a G Cheb, *Veronika Menšíková*, AG Praha 2, Korunní, *Helena Muchová* a *Jakub Trčka*, oba GJK Praha 6, *Lucian Poljak* a *Štěpán Pospíšil*, oba GJŠ Přerov, *Petr Starý*, G České Budějovice, Jírovcova a *Patrik Štencel*, MG Opava.

Neúplná řešení zaslali *Mykhailo Dektyar*, GJN Praha 1, *Richard Dobíšek*, MG Praha 6 a *Marek Valkovič*, G Zlín, Lesní čtvrť.

Úloha 294

V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D a E průsečíky os stran AC a AB po řadě s přímkami AB a AC. Dále označme F a G body souměrně sdružené podle bodu A po řadě s vrcholy B a C. Dokažte, že body D, E, F a G leží na téže kružnici.

Patrik Bak

Řešení. Jelikož vnitřní úhel u vrcholu A trojúhelníku ABC je ostrý, leží body D a E po řadě na polopřímkách AB a AC, přitom body F a G leží na polopřímkách opačných. Označme α velikost vnitřního úhlu trojúhelníku ABC u vrcholu A a b, c po řadě délky jeho stran AC, AB. Dále nechť jsou S_b a S_c po řadě středy těchto stran. Z pravoúhlých trojúhelníků AS_bD a AS_cE plyne

$$|AD| = \frac{|AS_b|}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}b}{\cos\alpha},$$

podobně

$$|AE| = \frac{\frac{1}{2}c}{\cos\alpha}.$$

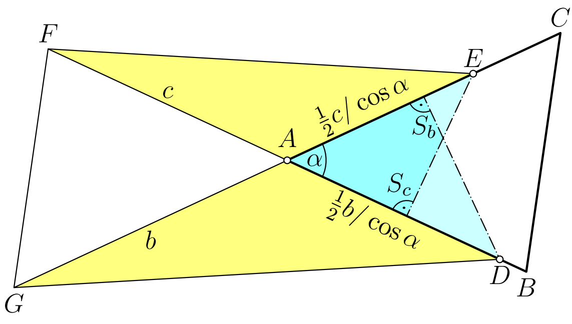
Ze středové souměrnosti se středem A dále dostáváme

$$|AF| = |AB| = c \quad \text{a} \quad |AG| = |AC| = b.$$

Proto

$$|AE| \cdot |AG| = \frac{bc}{2\cos\alpha} = |AD| \cdot |AF|.$$

Rovnost těchto součinů je podle věty o mocnosti bodu A ke kružnici postačující (i nutnou) podmínkou k dokazovanému tvrzení, tedy že body D, E, F a G leží na téže kružnici.



Poznámka 1. Místo věty o mocnosti bodu ke kružnici můžeme také dokončit důkaz následujícím způsobem. Trojúhelníky ADG a AEF mají shodný vnitřní úhel u vrcholu A (o velikosti $180° - \alpha$) a stejný poměr stran

$$\frac{|AG|}{|AD|} = 2\cos\alpha = \frac{|AF|}{|AE|}.$$

Jsou tak podobné, mají shodné vnitřní úhly a úsečka FG je vidět z bodů D a E (ležících v polorovině FGA) pod stejným úhlem, což opět dokazuje tvrzení – nyní pod le věty o obvodovém úhlu.

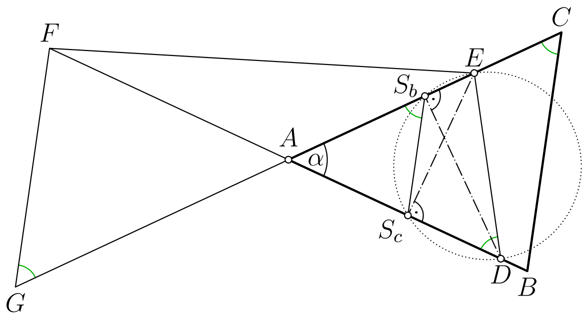
Poznámka 2. Můžeme také ukázat, že poloměr r' kružnice opsané čtyřúhelníku $DEFG$ závisí pouze na poloměru r kružnice opsané trojúhelníku ABC a velikosti úhlu α. Podle kosinové věty v trojúhelníku AGD platí

$$\begin{aligned}|DG|^2 &= |AD|^2 + |AG|^2 - 2|AD| \cdot |AG| \cos(180° - \alpha) = \\ &= \frac{b^2}{4\cos^2\alpha} + b^2 + b^2 = b^2\left(2 + \frac{4}{\cos^2\alpha}\right).\end{aligned}$$

Trojúhelníky ABC a AFG jsou ze středové souměrnosti vzhledem k vrcholu A shodné, velikost vnitřního úhlu GFA je tak shodná s velikostí vnitřního úhlu ABC. Podle (zobecněné) sinové věty platí

$$r' = \frac{|DG|}{2\sin|\sphericalangle GFD|} = \frac{b}{2\sin|\sphericalangle ABC|}\sqrt{2 + \frac{4}{\cos^2\alpha}} = r\sqrt{2 + \frac{4}{\cos^2\alpha}}.$$

Jiné řešení. Stejně jako v předchozím řešení označme S_b a S_c po řadě středy stran AC a AB. Ze středové souměrnost určující body F a G plyne, že trojúhelníky AFG a ABC jsou shodné. Tedy jsou shodné i jejich vnitřní úhly AGF a ACB. Ostroúhlý trojúhelník ABC je stejnolehlý s trojúhelníkem AS_cSb, body D a E tak leží po řadě na polopřímkách S_cB a S_bC a souhlasné úhly ACB a AS_bS_c jsou shodné. Úhly DS_bE a DS_cE jsou podle zadání pravé, podle Thaletovy věty tak leží body S_b a S_c na (polo)kružnici s průměrem DE. Čtyřúhelník DES_bS_c je tak tětivový a součet velikostí jeho vnitřních úhlů u vrcholů D a S_b je 180°, úhly AS_bS_c a EDA jsou proto shodné. Tedy úhly FGE a FDE jsou shodné, což vzhledem k tomu, že body G a D leží v polorovině EFA, stačí podle věty o obvodovém úhlu k platnosti dokazovaného tvrzení, tedy že body D, E, F, G leží na téže kružnici.



Poznámka 3. Autor vytvořil úlohu pomocí svého programu `GeoGen`.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, *Radim Aulický*, G Praha 6, Nad Alejí, *Albert Bakoč*, GChD Praha 5, *Alexis Théodore Dachary*, LSG Letohrad, *Barbora Herynková* a *Jakub Trčka*, oba GJK Praha 6, *Mikuláš Hořenek*, WG Ostrava, *Lukáš Komín*, G Praha 4, Opatov, *Tereza Kubínová*, G Praha 9, Litoměřická, *Veronika Menšíková*, AG Praha 2, Korunní, *Jiří Preč*, GJAK Uherský Brod, *Petr Starý*, G České Budějovice, Jírovcova, *Patrik Štencel*, MG Opava a *Martin Vořechovský*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše.

Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

Pavel Calábek

FYZIKA

Sto let korpuskulárně vlnového dualismu

OLDŘICH LEPIL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Začátek 20. století přinesl několik klíčových objevů a poznatků, které tvoří základní pilíře tzv. moderní fyziky, k jejímž vrcholům patří vznik *kvantové fyziky*. Připomeňme si některé z nich. Především je to *Planckova kvantová teorie* z roku 1900. Německý fyzik *Max Planck* (1858–1947) vyřešil problém spektrálního vyzařování těles a dospěl k závěru, že těleso může vyzařovat svoji energii jen v určitých dávkách – *kvantech*, jejichž velikost je úměrná frekvenci f vysílaného záření. Tak dospěla fyzika k pojmu *foton*. Planck určil hodnotu po něm pojmenované konstanty h a energii E fotonu vyjádřil vztahem

$$E = hf.$$

O několik let později, v roce 1905, *Albert Einstein* (1879–1955) publikoval *speciální teorii relativity*, která zahrnuje vztah vyjadřující ekvivalenci energie E tělesa a jeho relativistické hmotnosti m

$$E = mc^2,$$

kde c je rychlost světla.

Tyto jednoduše formulované zákonitosti umožňují nalézt odpověď na otázku, zda elektromagnetické záření je vlnění nebo proud částic – *korpuskulí*. Odpovědí by byl s definitivní platností rozřešen letitý problém, kterým se fyzika zabývala již od dob Newtonových a Huygensových.

Pokud bychom záření považovali za proud částic, můžeme každému fotonu záření přisoudit hybnost

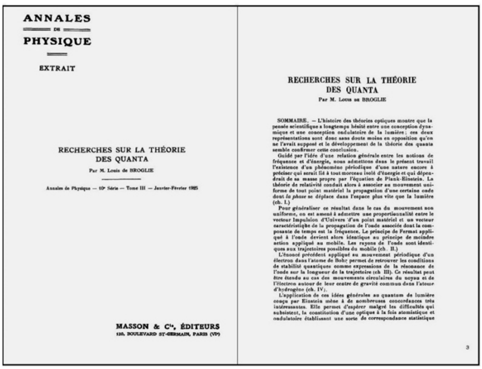
$$p = mc = \frac{E}{c} = h\frac{f}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Mezi hybností částice a vlnovou délkou λ příslušející částici platí tedy vztah

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Praktickým potvrzením správnosti tohoto závěru pro světlo je geniální *Einsteinova teorie fotoelektrického jevu.* Idea tzv. *korpuskulárně vlnového dualismu* byla na světě.

Francouzského fyzika *Louise de Broglieho* (1892–1987), který se zabýval studiem rentgenového záření, napadla v té době těžko pochopitelná myšlenka, zda obdobné duální vlastnosti nemají také další hmotné a prostorově ohraničené objekty. Příkladem takového objektu může být v té době již dobře prostudovaná elementární částice – *elektron.* Tuto revoluční myšlenku de Broglie ve svých 32 letech podrobněji rozpracoval v disertační práci s názvem *Recherches sur la théorie des Quanta* (Výzkum v teorii kvant) [1], kterou obhájil v roce 1924. Práce byla počátkem následujícího roku publikována ve vědeckém časopisu *Annales de Physique* [2] (obr. 1). Před sto lety tak de Broglie formuloval poznatek, který nejprve nebyl vědeckou veřejností s pochopením přijat. Stal se však dalším pilířem, na němž pevně stojí nejdůležitější oblast kvantové fyziky *kvantová mechanika.* De Broglieův objev byl v roce 1929 oceněn Nobelovou cenou za fyziku.



ANNALES
DE
PHYSIQUE

EXTRAIT

RECHERCHES SUR LA THÉORIE
DES QUANTA
Par M. Louis de BROGLIE

Annales de Physique — 10e Série — Tome III — Janvier-Février 1925

MASSON & Cie, ÉDITEURS
120, BOULEVARD ST-GERMAIN, PARIS (VIe)

RECHERCHES SUR LA THÉORIE
DES QUANTA
Par M. Louis de BROGLIE

SOMMAIRE. — L'histoire des théories optiques montre que la pensée scientifique a longtemps hésité entre une conception dynamique et une conception ondulatoire de la lumière ; ces deux représentations sont donc sans doute moins en opposition qu'on ne l'avait supposé et le développement de la théorie des quanta semble confirmer cette conclusion.

Guidé par l'idée d'une relation générale entre les notions de fréquence et d'énergie, nous admettons dans le présent travail l'existence d'un phénomène périodique d'une nature encore à préciser qui serait lié à tout morceau isolé d'énergie et qui dépendrait de sa masse propre par l'équation de Plank-Einstein. La théorie de relativité conduit alors à associer au mouvement uniforme de tout point matériel la propagation d'une certaine onde dont *la phase* se déplace dans l'espace plus vite que la lumière (ch. I.)

Pour généraliser ce résultat dans le cas du mouvement non uniforme, on est amené à admettre une proportionnalité entre le vecteur Impulsion d'Univers d'un point matériel et un vecteur caractéristique de la propagation de l'onde associée dont la composante de temps est la fréquence. Le principe de Fermat appliqué à l'onde devient alors identique au principe de moindre action appliqué au mobile. Les rayons de l'onde sont identiques aux trajectoires possibles du mobile (ch. II.)

L'énoncé précédent appliqué au mouvement périodique d'un électron dans l'atome de Bohr permet de retrouver les conditions de stabilité quantiques comme expressions de la résonance de l'onde sur la longueur de la trajectoire (ch III). Ce résultat peut être étendu au cas des mouvements circulaires du noyau et de l'électron autour de leur centre de gravité commun dans l'atome d'hydrogène (ch. IV).

L'application de ces idées générales au quantum de lumière conçu par Einstein mène à de nombreuses concordances très intéressantes. Elle permet d'espérer malgré les difficultés qui subsistent, la constitution d'une optique à la fois atomistique et ondulatoire établissant une sorte de correspondance statistique

3

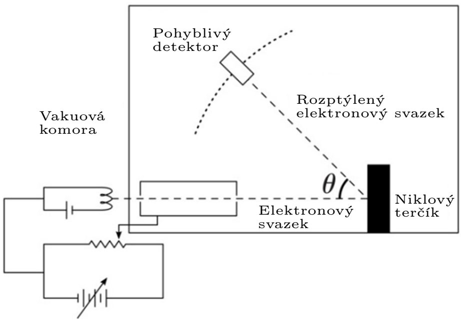
Obr. 1 Práce Louise de Broglieho (zdroj: Wikipedie)

Podle de Brogliho každému tělesu o hmotnosti m, které se pohybuje rychlostí v a má tedy hybnost o velikosti $p = mv$, můžeme přisoudit také vlnění o vlnové délce

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}.$$

Zásadním problémem de Broglieovy hypotézy však je, jak prokázat existenci toto vlnění, označovaného také jako *de Broglieovy vlny*. Nemají totiž obdobu v žádném dosud známém druhu vlnění a neexistuje zdroj, který by toto vlnění vyzařoval. Je přirozené, že nejvhodnější je opřít se o poznatky, k nimž fyzika dospěla při zkoumání interakce fotonů s elektrony. Sem patří např. *Comptonův jev*, který v roce 1923 objevil americký fyzik *Arthur Holly Compton* (1892–1962) při studiu interakce rentgenového záření s relativně volnými elektrony ve struktuře uhlíku. Comptonovy experimenty prokázaly, že interakce fotonů s elektrony probíhá, zjednodušeně řečeno, jako pružný ráz dvou srovnatelných objektů.

Za přímé potvrzení de Broglieho hypotézy je však považován experiment, který v roce 1927 provedli američtí fyzikové *Clinton J. Davisson* (1881–1958) a *Lester Germer* (1896–1971). Experimentálně zkoumali odraz elektronů, které dopadaly kolmo na terčík v podobě monokrystalu niklu (schéma aparatury je na obr. 2).



Obr. 2 Schéma Davissonova–Germerova experimentu (zdroj: Wikipedie)

Podle představ klasické fyziky by se elektrony měly od terčíku odrážet podle zákona odrazu. Ve skutečnosti však elektrony byly zjištěny i v jiných směrech. Nejvíce jich bylo registrováno ve směrech, které odpovídaly interferenčním maximům vznikajícím při difrakci de Broglieových vln na krystalové mřížce niklu. Výsledkem je zjištění, že intenzita proudu elektronů rozptýlených do různých směrů vykazuje periodické kolísání, jaké vzniká např. při odrazu světla na tenké vrstvě. To znamená, že při interakci částic s látkou dochází k typickým jevům charakteristickým pro vlnění, k *interferenci* a *difrakci*.

Měření ukázala, že ostré maximum dosahuje proud elektronů při úhlu rozptylu $\theta = 50°$. Elektrony o hmotnosti $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg byly urychlovány napětím 54,0 V. Měly tedy kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{p^2}{2m_e} \doteq 54{,}0 \text{ eV}$$

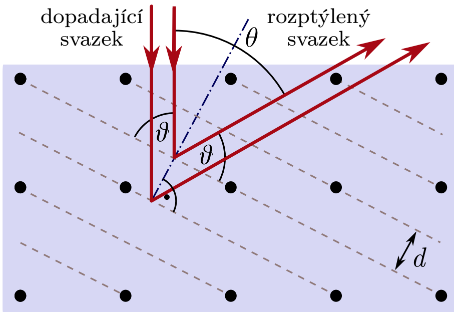
a hybnost

$$p = \sqrt{2mE_k} \doteq \sqrt{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 54 \cdot 1{,}60 \cdot 10^{-19}} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \doteq \\ \doteq 3{,}97 \cdot 10^{-24} \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Této hybnosti elektronu odpovídá vlnová délka de Broglieovy vlny

$$\lambda = \frac{h}{p} \doteq \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{3{,}97 \cdot 10^{-24}} \text{ m} \doteq 1{,}67 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0{,}167 \text{ nm}.$$

K analýze výsledku experimentu byly použity poznatky získané britským fyzikem *W. L. Braggem* (1890–1971) při studiu difrakce rentgenového záření na krystalech (obr. 3).



Obr. 3 K difrakci rentgenového záření na krystalech (podrobněji viz [4])

Interferenční maxima odraženého rentgenového záření lze určit pomocí tzv. *Braggovy rovnice*. Pro analogický případ interakce elektronů s krystalem byla použita ve tvaru

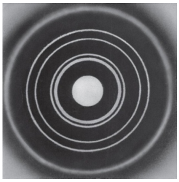
$$n\lambda = 2d \sin \vartheta = 2d \sin(90° - \theta/2).$$

Vzdálenost rovin atomů v krystalové mřížce niklu $d = 9{,}09 \cdot 10^{-11}$ m, takže pro řád interferenčního maxima $n = 1$ vychází hodnota vlnové délky de Broglieovy vlny

$$\lambda = 2 \cdot 9{,}09 \cdot 10^{-11} \sin(90° - 25°) \text{ m} = 1{,}65 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0{,}165 \text{ nm}.$$

Výsledek Davissonova a Germerova experimentu je tak v dobré shodě s de Broglieovou hypotézou.

Ještě výrazněji prokazuje vlnové vlastnosti elektronu experiment anglického fyzika *G. P. Thomsona* (1892–1975), rovněž z roku 1927. Nechal procházet úzký svazek elektronů tenkou zlatou fólii o tloušťce řádově 10^{-7} m a na fotografické desce postavené kolmo ke směru elektronového paprsku zachytil prošlé elektrony. Po vyvolání desky se ukázalo, že elektrony vytvořily typický difrakční obrazec ve tvaru soustředných kroužků (obr. 4).



Obr. 4 Ohybový obrazec elektronů [3]

Když bylo dalšími experimenty a výpočty prokázáno, že tyto vlnové jevy byly skutečně vytvořeny elektrony, nebylo již o správnosti de Broglieovy myšlenky korpuskulárně vlnových vlastností objektů mikrosvěta pochyb.

Velikostí vlnové délky de Broglieovy vlny lze zdůvodnit, proč byla difrakce pozorována teprve při interakci elektronu s krystalickou strukturou ozařovaného materiálu, a proč projevy korpuskulárně vlnového dualismu tak dlouho unikaly pozornosti fyziků. Když uvážíme makroskopický objekt např. v podobě střely o hmotnosti 20 g, která se pohybuje rychlostí $50\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, pak mu přísluší vlnová délka de Broglieovy vlny

$$\lambda = \frac{h}{mv} \doteq \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 10^{-2} \cdot 50}\ \mathrm{m} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{m}.$$

To je však zcela mimo pozorovací možnosti, které má fyzika k dispozici, a pohyb tělesa beze zbytku popíšeme *pohybovou rovnicí* klasické mechaniky. Teprve u mikroobjektů je vlnová délka dosažitelná přístroji a lze ji prokázat. Pro popis jejich pohybu je pak třeba použít prostředky kvantové mechaniky, např. v podobě *Schrödingerovy rovnice*, která je analogií 2. Newtonova pohybového zákona v kvantové mechanice.

Důležitým problémem korpuskulárně vlnového dualismu je jeho interpretace. Poznatky z vlnové optiky vedou k představě, že při interakci vlnění s překážkou vznikne difrakční obrazec prakticky okamžitě, když světlo ozáří stínítko. De Broglieovy vlny však interpretujeme odlišně, jako jev odpovídající pravděpodobnostnímu charakteru dějů v mikrosvětě. Určují pravděpodobnost, s níž se částice bude nacházet v určitém místě prostoru, a umožňují popsat pohyb částice ovlivněný vnějším působením. Difrakční obrazec tak nevytvoří jediný elektron, ale velké množství elektronů, které s určitou pravděpodobností dopadají na různá místa plochy stínítka.

Literatura

[1] *de Broglie, L.*: Recherches sur la théorie des Quanta. Physique [physics]. Migration – université en cours d'affectation, 1924. Dostupné z: https://theses.hal.science/tel-00006807/document.

[2] *de Broglie, L.*: Recherches sur la théorie des Quanta. Ann. Phys., roč. 10 (1925), č. 3, 22–128. Dostupné z: https://doi.org/10.1051/anphys/192510030022.

[3] *Svoboda, E. a kol.*: Přehled středoškolské fyziky. Prometheus, Praha, 2024.

[4] https://math.stackexchange.com/questions/3595481/davisson-germer-experiment-using-braggs-law

Rozvoj schopnosti študentov učiteľstva fyziky plánovať vyučovaciu hodinu

BARBORA GEJDOŠOVÁ, KLÁRA VELMOVSKÁ

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave, SLOVENSKO

Ak chceme, aby žiaci na základných a stredných školách mali záujem o fyziku, aby mali chuť bádať a zaujímať sa o fungovanie sveta, tak je dôležité zamerať sa aj na učiteľov fyziky. Výchovno-vzdelávacie pôsobenie učiteľa má na žiakov veľký vplyv. Predstaviť danú tému vyučovacej hodiny žiakom pútavo, zvoliť vhodné metódy, formy, či pomôcky, je potrebné si vopred premyslieť a naplánovať. Rokmi praxe môžu učitelia nadobudnúť mnohé zručnosti, vďaka ktorým je plánovanie vyučovacích hodín pre nich jednoduchšie. Začínajúci učitelia, ktorí chcú viesť kvalitné vyučovacie hodiny fyziky, si musia vopred dôkladne naplánovať vyučovací proces. Teoretické znalosti, ale aj praktické zručnosti ohľadom plánovania vyučovacích hodín získavajú budúci učitelia už počas štúdia na univerzite. Počas štúdia si študenti učiteľstva fyziky majú osvojiť základné didaktické poznatky a vedomosti o plánovaní a projektovaní vyučovacích hodín, naučiť sa spôsoby navodzovania, realizácie, riadenia a hodnotenia poznávacieho a učebného procesu žiakov vo fyzike [1]. Pokladáme za potrebné, aby sa študenti naučili robiť čo najkvalitnejšie prípravy, aby ich vedeli vhodne formulovať aj do písomnej podoby a aby ich vedeli zrealizovať na požadovanej úrovni.

V predkladanom príspevku sa zameriavame na študentov učiteľstva fyziky a analyzujeme ich prípravy na vyučovacie hodiny. Predstavíme prieskum, ktorým sme zisťovali vplyv kvalitnej spätnej väzby na kvalitu študentských príprav na vyučovacie hodiny fyziky.

Prípravy na vyučovacie hodiny

Dôvody užitočnosti príprav na vyučovaciu hodinu uvádza *Jensen* [2]: V príprave si učiteľ vymedzí ciele vyučovacej hodiny, stanoví si, koľko času chce venovať jednotlivým prvkom vyučovacej hodiny, vypíše zoznam a poradie aktivít, ktoré chce so žiakmi uskutočniť. Pri plánovaní vyučovacej hodiny je podľa *Kyriacou* [3] potrebné, aby príprava na vyučovaciu hodinu mala jednoznačne, vhodne a primerane zvolené vyučovacie ciele, obsah, metódy a štruktúru vyučovania. Vyučovacia hodina by mala zmysluplne nadväzovať na predchádzajúcu hodinu a mala by byť prepojená aj s nasledujúcou vyučovacou hodinou. Materiál a pomôcky na vyučovanie by mali byť včas pripravené a skontrolovaný ich stav. Vyučovanie by malo byť naplánované tak, aby vyvolávalo a udržiavalo záujem žiakov.

V tejto práci sa venujeme prípravám na vyučovacie hodiny fyziky, ktoré sú vytvorené študentami učiteľstva fyziky. Pod študentskou prípravou na vyučovaciu hodinu fyziky rozumieme písomne spísanú prípravu študentom učiteľstva fyziky, ktorá je stručná, ale obsahuje všetky podstatné časti. Vytvorená príprava má byť napísaná jednoznačne, aby podľa nej vedel vyučovaciu hodinu odučiť aj iný učiteľ fyziky. „Začínajúci, či menej skúsení učitelia by si mali písať podrobnejšie písomné prípravy na vyučovaciu hodinu…“ [4].

Na základe štúdia literatúry, rád expertov v danej téme a vlastných skúseností sme vytvorili hodnotiacu rubriku na hodnotenie študentských príprav na vyučovacie hodiny fyziky [5], ktorú uvádzame v prílohe. Hodnotiaca rubrika je podľa *Davidsonovej* [6] tabuľka, ktorá popisuje, jednotlivé úrovne výkonu na základe určitého kritéria záujmu. Overili sem jej reliabilitu pomocou metódy posúdenia hodnotiacej rubriky viacerými externými hodnotiteľmi (*inter raterreliability*) [7]. Vďaka tejto rubrike vieme priradiť jednotlivým študentským prípravám na vyučovacie hodiny fyziky bodové skóre. Maximum bodov, ktoré môžu získať, je 43.

Poskytovanie kvalitnej spätnej väzby

Pokiaľ chceme, aby sa študenti zlepšovali, tak užitočnou metódou je poskytovanie kvalitnej spätnej väzby. *Demkanin* [8] tvrdí, že „poskytovanie spätnej väzby žiakom je jednou z najdôležitejších a často aj najťažších úloh učiteľa.“ Použitie konkrétnej spätnej väzby sa javí ako priamy a účinný spôsob formovania osobnosti a zvyšovania výkonnosti jednotlivca [9]. Kvalitná spätná väzba v našom prípade reflektuje kritériá z hodnotiacej rubriky.

Prieskum zameraný na zisťovanie vplyvu spätnej väzby na kvalitu študentských príprav na vyučovacie hodiny fyziky

Zamerali sme sa na schopnosť plánovať vyučovaciu hodinu fyziky študentmi učiteľstva fyziky. Najskôr sme zisťovali, aké sú aktuálne schopnosti študentov pripravovať písomné prípravy na vyučovacie hodiny fyziky, čo im robí najväčší a čo najmenší problém. Ďalšou úlohou výskumu bolo zistenie vplyvu poskytovanej kvalitnej spätnej väzby na vypracované písomné prípravy študentov na vyučovacie hodiny fyziky. Zaujímalo nás, či študenti po poskytnutí kvalitnej spätnej väzby získajú vyššie bodové skóre za ohodnotenú prípravu a či nárast bodového skóre bude štatisticky významný.

Položili sme si nasledovnú výskumnú otázku, na ktorú sme hľadali odpoveď.

– Pomáha kvalitná spätná väzba študentom v zlepšovaní kvality vypracovaných príprav na vyučovacie hodiny fyziky?

Pre pedagogický výskum sme stanovili nasledovnú hypotézu:

H: *Študenti, ktorým bude systematicky poskytovaná kvalitná spätná väzba na ich vytvorené písomné prípravy na vyučovacie hodiny fyziky budú vytvárať kvalitnejšie písomné prípravy ako študenti, ktorým takáto spätná väzba nebude poskytovaná.*

Výskumná vzorka

Experimentálna výskumná vzorka, na ktorej sme zisťovali vplyv kvalitnej spätnej väzby na vytvorené prípravy, sa skladala z dvoch častí študentov učiteľstva na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave. Prvú časť tvorilo 18 študentov prvého ročníka externého doplňujúceho pedagogického štúdia a rozširujúceho štúdia. V prípade študentov rozširujúceho štúdia išlo o učiteľov, ktorí chcú získať kvalifikačný predpoklad na vyučovanie ďalšieho aprobačného predmetu – fyzika. Študenti doplňujúceho pedagogického štúdia chcú získať kvalifikačný predpoklad na výkon pracovnej činnosti učiteľa na II. stupni základných škôl a na stredných školách. Ohodnotili sme 18 študentských príprav na rôzne témy z fyziky určené pre základnú alebo strednú školu.

Druhú časť výskumnej vzorky tvorili študenti 1. ročníka magisterského štúdia učiteľstva fyziky. Do výskumu bol zapojený celý ročník, čo predstavuje 10 študentov.

Prieskum s experimentálnou vzorkou prebiehal v akademickom roku 2023/2024 a s kontrolnou vzorkou v akademickom roku 2024/2025. Prvú časť kontrolnej vzorky tvorili 9 študenti 1. ročníka magisterského štúdia, druhú časť tvorili 11 študenti prvého ročníka externého doplňujúceho pedagogického štúdia a rozširujúceho štúdia.

Výskumné prostredie

Najskôr sme potrebovali zistiť, aké kvalitné prípravy na vyučovacie hodiny fyziky vedia študenti pripraviť. Každej študentskej príprave sme pridelili bodové ohodnotenie podľa kritérií v zostavenej hodnotiacej rubrike. Podľa tejto hodnotiacej rubriky sme vedeli jednotlivé študentské prípravy kvantifikovať. Študenti v experimentálnej vzorke získali ku každej písomnej príprave kvalitnú spätnú väzbu. Pokiaľ študenti získali za niektorú kategóriu menej bodov ako maximum, tak sme im podľa hodnotiacej rubriky napísali, v čom boli nedostatky. Následne sme im zadali nové zadanie na pripravenie ďalšej prípravy na inú vyučovaciu hodinu fyziky a celý tento proces sme opakovali. Prvá časť výskumnej vzorky vytvorila 2 prípravy, druhá časť výskumnej vzorky pripravila 3 prípravy na vyučovacie hodiny fyziky. Po každej písomnej príprave získali od nás kvalitnú spätnú väzbu.

Študenti v kontrolnej vzorke navštevovali tie isté predmety na univerzite ako študenti z experimentálnej vzorky, teda obsahová príprava na ich učiteľské povolanie bola rovnaká. Jediný rozdiel bol v poskytovanej spätnej väzbe. Študenti v kontrolnej vzorke vytvorili na začiatku semestra písomné prípravy, ktoré sme obodovali. V prvej časti kontrolnej vzorky sme študentom neposkytli žiadnu spätnú väzbu. Na konci semestra vypracovali 2. prípravu a porovnali sme posun bodového skóre 1. a 2. prípravy. Študenti v druhej časti kontrolnej vzorky pracovali podobne, ale im sme poskytli nekvalitnú spätnú väzbu – strohé vyjadrenie, ktoré nereflektovalo kritériá hodnotiacej rubriky.

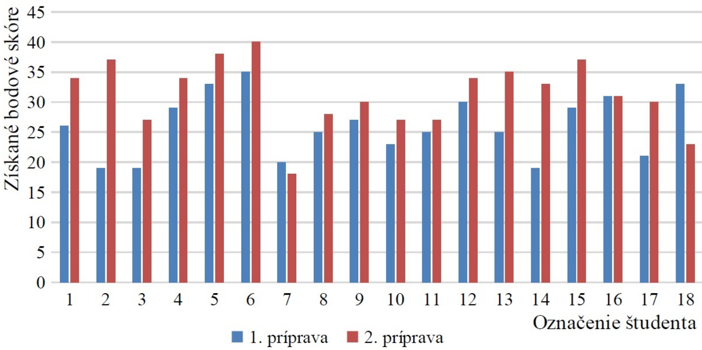
Zistenia

Za najviac problematické časti príprav sa ukázali byť pre študentov tvorenie záveru vyučovacej hodiny, určenie časového plánu, formulovanie záveru empirickej metódy a uvedenie predchádzajúcich vedomostí žiakov.

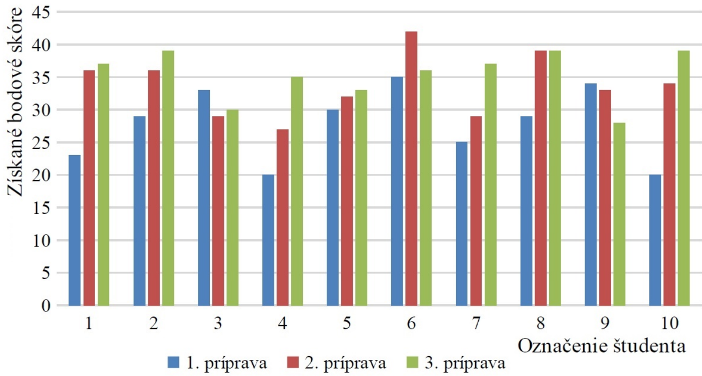
S kategóriami súlad so štátnym vzdelávacím programom, ročník/trieda a fyzikálna korektnosť mali študenti najmenšie problémy.

Experimentálna vzorka

V nasledujúcich grafoch 1 a 2 uvádzame porovnanie bodového skóre jednotlivých študentov z experimentálnej výskumnej vzorky pred a po poskytnutí kvalitnej spätnej väzby.



Graf 1 Bodové skóre prvej časti experimentálnej výskumnej vzorky pred a po poskytnutí kvalitnej spätnej väzby



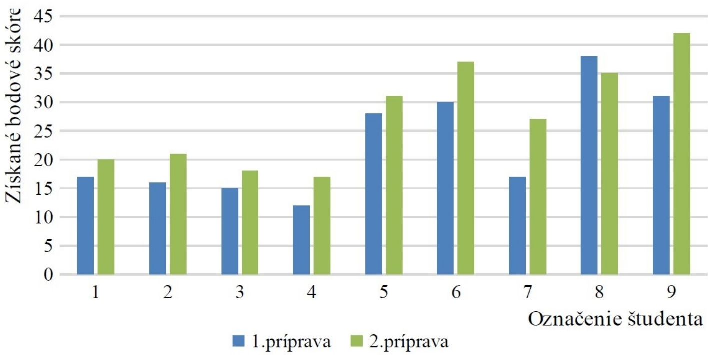
Graf 2 Bodové skóre druhej časti experimentálnej výskumnej vzorky pred a po poskytnutí prvej a druhej kvalitnej spätnej väzby

Bodové skóre, ktoré študenti získali za vytvorené prípravy na vyučovacie hodiny sme porovnali a spracovali aj štatisticky. Zistili sme, že poskytovanie kvalitnej spätnej väzby študentom pomáha pri vytváraní kvalitnejších príprav na vyučovacie hodiny fyziky. Priemerné bodové skóre sa u oboch výskumných vzoriek po každej spätnej väzbe zvýšilo. V prípade prvej časti experimentálnej výskumnej vzorky nastal štatisticky významný posun bodového skóre. V prípade druhej časti experimentálnej vzorky, po prvej spätnej väzbe nastal štatisticky výrazný posun, po poskytnutí druhej spätnej väzby nenastal štatisticky výrazný posun bodového skóre. Nakoľko študenti vopred nemali inštrukcie o tom, čo má príprava obsahovať, tak po poskytnutí prvej spätnej väzby nastalo výrazné zlepšenie. Druhá študentská príprava bola o dosť kvalitnejšia ako prvá (zlepšenie v priemere o 13,7 %). V tretej príprave sme preto už nemohli očakávať výrazné zlepšenie, aj keď na základe porovnania stredných hodnôt k zlepšeniu došlo, aj keď nie štatisticky významnému (zlepšenie o 3,7 %). V druhej časti vzorky môže byť kľúčovým faktorom aj malý počet študentov zapojených do prieskumu a štatistického spracovania.

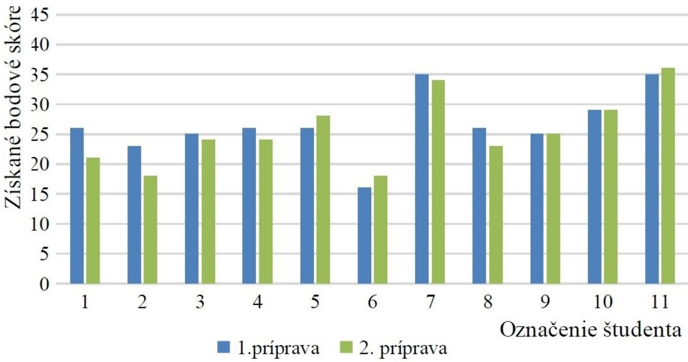
Podľa *Cohenovho d*, ktoré určuje vecnú významnosť rozdielu [10], v prvej časti experimentálnej vzorky nastal veľký rozdiel v náraste bodového skóre ($d = 0{,}99$). V druhej časti experimentálnej vzorky po 1. spätnej väzbe nastal veľký rozdiel v náraste bodového skóre ($d = 1{,}21$), po 2. spätnej väzbe nastal malý rozdiel v náraste bodového skóre ($d = 0{,}39$), čo sme už odôvodnili vyššie.

Kontrolná vzorka

V nasledujúcich grafoch 3 a 4 uvádzame porovnanie bodového skóre jednotlivých študentov z kontrolnej výskumnej vzorky na začiatku a na konci semestra.



Graf 3 Bodové skóre prvej časti kontrolnej výskumnej vzorky na začiatku a na konci semestra



Graf 4 Bodové skóre druhej časti kontrolnej výskumnej vzorky po poskytnutí nekvalitnej spätnej väzby

Nakoľko študenti kontrolnej a experimentálnej vzorky navštevovali rovnaké vyučovacie predmety a kurzy na univerzite počas semestra, v rámci ktorých sa vzdelávali a prehlbovali svoje vedomosti, tak nie je prekvapivé, že zlepšenia nastali v tvorbe príprav v oboch vzorkách. U väčšiny študentov kontrolnej vzorky pozorujeme nárast bodového skóre. Podľa Cohenovho d u študentov prvej časti kontrolnej vzorky, ktorým nebola k vytvorenej príprave poskytnutá žiadna spätná väzba nastal stredný rozdiel v náraste bodového skóre ($d = 0{,}57$). V druhej časti kontrolnej vzorky, teda u študentov, ktorým bola poskytnutá nekvalitná spätná väzba nastal podľa Cohenovho d malý nárast rozdielu bodového skóre ($d = 0{,}20$), s hodnotou h na spodnej hranici, o ktorej má zmysel uvažovať pri pozorovaní rozdielu.

Na základe uvedených zistení a porovnaní Cohenovho d pre experimentálnu a kontrolnú vzorku konštatujeme, že stanovená hypotéza sa potvrdila, študenti, ktorým bola systematicky poskytovaná kvalitná spätná väzba vytvárali kvalitnejšie prípravy na vyučovacie hodiny fyziky v porovnaní so študentmi, ktorým takáto spätná väzba nebola poskytnutá.

Záver

Jednou z dôležitých úloh učiteľa je vedieť naplánovať a pripraviť kvalitnú vyučovaciu hodinu. V tejto schopnosti sa učitelia rokmi praxe môžu zlepšovať, avšak základ na teoretickej aj praktickej úrovni by mali nadobudnúť počas štúdia na univerzite. Práve na tento aspekt učiteľskej práce sme sa zamerali v predloženom prieskume. Zisťovali sme aktuálny stav ako vedia študenti učiteľstva fyziky tvoriť prípravy na vyučovacie hodiny fyziky. Pomocou nami vytvorenej hodnotiacej rubriky sme hodnotili študentské písomné prípravy na vyučovacie hodiny fyziky. Študentom sme poskytovali kvalitnú spätnú väzbu a pozorovali jej vplyv na tvorbu príprav. Výsledky sme porovnali s kontrolnou skupinou, ktorej nebola poskytovaná kvalitná spätná väzba. Zistili sme, že poskytnutá kvalitná spätná väzba má vplyv na tvorbu študentských príprav na vyučovacie hodiny fyziky.

Literatúra

[1] FMFI UK. (2022). Charakteristika študijného programu. https://fmph.uniba.sk/studium/magisterske-studium/ucitelstvo-fyziky-v-kombinacii/

[2] *Jensen, L.*: Planning Lessons. In: Celce-Murcia, M. (ed.): Teaching English as a Second or Foreign Language, 2001, 403–408. https://docshare.tips/celce-murcia-mariam-teaching-english-as-a-second-or-foreign_58291254b6d87f829c8b4c5b.html

[3] *Kyriacou, Ch.*: Essential Teaching Skills. Nelson Thornes Ltd., 2007. https://www.slideshare.net/royalchildacademylapulapu/essential-teaching-skills

[4] *Janovič, J. a kol.*: Didaktika fyziky. Univerzita Komenského v Bratislave, 1990.

[5] *Gejdošová, B., Velmovská, K.*: Hodnotenie študentských príprav na vyučovacie hodiny fyziky. In: Tvorivý učiteľ fyziky XIII, Národný festival fyziky 2022. Slovenská fyzikálna spoločnosť, 2023. https://conf.ccvapp.upjs.sk/tuf/wp-content/uploads/sites/4/2023/12/zbornik_TUF_2022.pdf

[6] *Davidson, E. J.*: Evaluative Reasoning, Methodological Briefs: Impact Evaluation 4, UNICEF Office of Research, Florence, 2014. https://www.unicef-irc.org/publications/pdf/brief_4_evaluativereasoning_eng.pdf

[7] *Gavora, P.*: Validita a reliabilita výskumných nástrojov: princípy a reálna prax. Pedagogická orientace, 23(4) (2013), 511–534.

[8] *Demkanin, P.*: Didaktika fyziky pre študentov magisterského štúdia a učiteľov v praxi. Univerzita Komenského v Bratislave, 2018.

[9] *Earley, P. C. a kol.*: Impact of process and outcome feedback on therelation of goalsetting to taskperformance. Academy of Management Journal, 33(1) (1990), 87–105. https://www.jstor.org/stable/256353

[10] *Cohen, J.*: Statistical Power Analysis for the Behavioral Science (2. ed.). Hillsdale (NJ): Erlbaum, 1988. https://www.utstat.toronto.edu/~brunner/oldclass/378f16/readings/CohenPower.pdf

Príloha
Hodnotiaca rubrika na hodnotenie študentských príprav na vyučovaciu hodinu fyziky

	3	2	1	0
Súlad so ŠVP	Obsah vyučovacej hodiny je naplánovaný v súlade so ŠVP z fyziky a napĺňa deklarované výkony žiakov.	Obsah vyučovacej hodiny je naplánovaný v súlade so ŠVP z fyziky a čiastočne napĺňa deklarované výkony žiakov.	Obsah vyučovacej hodiny je naplánovaný v minimálnom súlade so ŠVP z fyziky a nenapĺňa takmer žiadne z deklarovaných výkonov žiakov.	Obsah vyučovacej hodiny nie je v súlade so ŠVP z fyziky a nenapĺňa deklarované výkony žiakov.
Časový plán	V príprave je uvedený časový harmonogram hodiny. Jednotlivé dĺžky aktivít sú vhodne odhadnuté.	V príprave je uvedený časový harmonogram hodiny. Jednotlivé dĺžky niektorých aktivít nie sú úplne vhodne odhadnuté.	Časový harmonogram hodiny je uvedený, ale časové intervaly na jednotlivé aktivity sú nevhodne zvolené.	Časový plán nie je uvedený.
Ročník/trieda	X	X	Je uvedený správny ročník, pre ktorý je daná príprava určená. (V prípade potreby môžu byť stručne uvedené nevyhnutné informácie ohľadom žiakov v konkrétnej triede.)	Ročník, respektíve trieda nie je uvedená alebo je uvedená nesprávne.
Ciele	Vyučovacie ciele sú uvedené na začiatku prípravy. Ciele sú vyjadrené aktívnym činnostným slovesom a z formulácie cieľov sú jednoznačné podmienky ich plnenia - podmienky výkonu a dôležitá je norma výkonu, aby ciele boli merateľné. Ciele sú zamerané na žiaka.	Vyučovacie ciele sú v príprave uvedené. Ciele sú zamerané na žiaka, ale nie sú úplne jasne zadefinované podmienky výkonu a norma výkonu.	Vyučovacie ciele sú v príprave uvedené. Ciele nie sú dostatočne jasne zadefinované alebo sú formulované príliš obšírne. Nevyplývajú z nich jednoznačné podmienky plnenia - podmienky výkonu, nie je stanovená norma výkonu. Ciele nie sú zamerané na žiaka.	Ciele vyučovacej hodiny nie sú uvedené.
Predchádzajúce vedomosti	V úvode prípravy sú uvedené témy alebo pojmy, ktoré by už žiaci mali ovládať a súvisia s aktuálnou témou.	V úvode prípravy je uvedená väčšina kľúčových tém a pojmov, ktoré by už žiaci mali ovládať v súvislosti s aktuálnou témou. Alebo je uvedených aj niekoľko tém, ktoré nevyhnutne nesúvisia s aktuálnou témou vyučovacej hodiny.	Témy alebo pojmy, ktoré by už žiaci mali ovládať sú uvedené veľmi všeobecne alebo absentuje väčšina kľúčových tém, na ktoré aktuálna téma nadväzuje.	Predchádzajúce vedomosti nie sú v príprave uvedené.
Vyučovacie formy	Z textu je jednoznačné, o akú formu práce ide pri jednotlivých aktivitách.	Pri väčšine aktivít je jasné, akou formou práce má byť aktivita realizovaná.	Pri väčšine aktivít nie je jasné, akou formou práce má byť aktivita realizovaná.	Pri žiadnej aktivite nie je jasné, akou vyučovacou formou má byť realizovaná.
Vyučovacie metódy	Vyučovacie metódy sú vhodne zvolené, je nimi možné efektívne dosiahnuť vhodne stanovené vyučovacie ciele.	Pri väčšine aktivít sú vyučovacie metódy vhodne zvolené a je nimi možné dosiahnuť stanovené vyučovacie ciele.	Pri väčšine aktivít nie sú vyučovacie metódy vhodne zvolené, aby bolo nimi možné dosiahnuť stanovené vyučovacie ciele.	Pri všetkých aktivitách sú vyučovacie metódy nevhodne zvolené vzhľadom ku efektívnosti dosahovania stanovených cieľov. Alebo z prípravy nie je jasné aké vyučovacie metódy majú byť použité.
Pomôcky	Na začiatku prípravy sú uvedené všetky pomôcky potrebné k vyučovacej hodine, ktoré je potrebné si vopred pripraviť. Pomôcky sú dostatočne presne zadefinované.	Potrebné pomôcky sú v príprave uvedené, ale nie sú uvedené na začiatku prípravy alebo nie sú dostatočne vyšpecifikované.	Nie sú uvedené všetky pomôcky potrebné na vyučovaciu hodinu.	Potrebné pomôcky na vyučovaciu hodinu nie sú uvedené.

	Formulované otázky, úlohy, aktivity pre žiakov	V príprave sú formulované otázky, úlohy alebo aktivity, ktoré bude učiteľ zadávať žiakom v priebehu vyučovacej hodiny. Otázky sú vhodne formulované, nie sú sugestívne alebo inak zavádzajúce. Úlohy a aktivity sú vhodne vybraté vzhľadom na ročník/vek žiakov a vzhľadom k danej téme a plneniu stanovených cieľov. Uvedené sú aj stručné správne odpovede.	V príprave sú formulované otázky, úlohy alebo aktivity, ktoré bude učiteľ zadávať žiakom v priebehu vyučovacej hodiny. Väčšina otázok, úloh a aktivít je dobre formulovaná, sú primerane vybraté vzhľadom na ročník/vek žiakov a vzhľadom k danej téme a čiastočne vedú k naplneniu stanovených cieľov. Väčšina správnych odpovedí nie je uvedená.	V príprave je väčšina otázok, úloh a aktivít formulovaná nevhodne, nie sú úplne vhodne zvolené vzhľadom na ročník/vek žiakov a vzhľadom k danej téme. Otázky, úlohy a aktivity nevedú k dostatočnému naplneniu stanovených cieľov. Nie sú uvedené žiadne správne odpovede.	V príprave nie sú uvedené žiadne otázky, úlohy a aktivity určené pre žiakov.
Empirická metóda poznávania	Výber	Aktivita reflektuje stanovené ciele vyučovacej hodiny a je zaujímavá pre žiakov. Sú vhodne zvolené vyučovacie metódy, ktoré podnecujú bádanie žiakov a rozvoj spôsobilostí vedeckej práce.	Aktivita dostatočne reflektuje stanovené ciele vyučovacej hodiny a je zaujímavá pre žiakov. Vyučovacie metódy nie sú zvolené najvhodnejšie, ale stále podnecujú žiakov k bádaniu a rozvoju spôsobilostí vedeckej práce.	Aktivita reflektuje stanovené ciele vyučovacej hodiny veľmi slabo. Aktivita nie je pre žiakov príliš pútavá. Vyučovacie metódy sú zvolené skôr nevhodne, teda podnecujú iba minimálne bádanie žiakov a rozvoj spôsobilostí vedeckej práce.	Aktivita nereflektuje stanovené ciele vyučovacej hodiny. Aktivita nie je pre žiakov pútavá. Zvolené vyučovacie metódy, nepodnecujú bádanie žiakov a nevedú k rozvoju spôsobilostí vedeckej práce.
	Postup	V príprave je uvedený stručný, ale jednoznačný postup realizácie aktivity.	V príprave je uvedený jednoznačný postup realizácie aktivity, ale je napísaný zbytočne obšírne.	V príprave je uvedený postup realizácie aktivity, ale nie je úplne jednoznačný. Je písaný s nedostatočnou presnosťou.	V príprave je uvedený nejednoznačný postup realizácie aktivity. Alebo nie je postup vôbec uvedený.
	Záver	Sú uvedené doplňujúce úlohy alebo otázky nadväzujúce na danú aktivitu, ktoré vedú k utvrdeniu nadobudnutých poznatkov.	Je uvedených niekoľko úloh alebo otázok, ktoré čiastočne nadväzujú na danú aktivitu, ktoré vedú k čiastočnému utvrdeniu nadobudnutých poznatkov.	Je uvedených minimum doplňujúcich úloh alebo otázok. Úlohy a otázky iba okrajovo nadväzujú na danú aktivitu a nevedú k takmer žiadnemu utvrdeniu nadobudnutých poznatkov.	Nie sú uvedené doplňujúce úlohy alebo otázky, ktoré by nadväzovali na danú aktivitu a viedli by k utvrdeniu nadobudnutých poznatkov.
	Záver vyučovacej hodiny	V závere prípravy je uvedené zhrnutie poukazujúce na najdôležitejšie pojmy, aktivity alebo zistenia z danej hodiny. Môže ísť o prehovor učiteľa, otázky kladené žiakom alebo sumarizujúcu aktivitu.	V závere prípravy je uvedené zhrnutie poukazujúce na takmer všetky najdôležitejšie pojmy, aktivity alebo zistenia z danej hodiny.	Zhrnutie v závere hodiny nepoukazuje na najdôležitejšie pojmy, aktivity alebo zistenia z danej hodiny.	V závere prípravy nie je uvedené zhrnutie poukazujúce na najdôležitejšie pojmy, aktivity alebo zistenia z danej hodiny.
	Fyzikálna korektnosť	Zadania aktivít a úloh sú fyzikálne správne. Jednotlivé časti vyučovacej hodiny na seba zmysluplne nadväzujú. Je využívaná správna odborná terminológia.	Väčšina zadaní aktivít a úloh je fyzikálne správna. Takmer všetky časti prípravy na seba zmysluplne nadväzujú. Náznaky nesprávnej odbornej terminológie.	Zadania aktivít a úloh sú čiastočne správne. Väčšina aktivít nie je zmysluplne usporiadaná, nenadväzujú na seba. Výrazné znaky nesprávnej odbornej terminológie.	Zadania aktivít a úloh sú fyzikálne nekorektné. Aktivity na seba nenadväzujú. Nie je použitá správna odborná terminológia.
	Celkový dojem	Text je prehľadný, jasne štruktúrovaný, vhodné použitie obrázkov alebo grafov k lepšej prehľadnosti. Využitie vhodnej slovnej zásoby, bez gramatických chýb a bez zložitých vetných konštrukcií. Príprava neobsahuje nadbytočné časti.	Text je prehľadný a celkovo dobre štruktúrovaný. Primerané využitie grafických prvkov. Využitie vhodnej slovnej zásoby s niekoľkými gramatickými chybami bez zbytočne komplikovaných viet. Minimum nadbytočných častí.	Prehľadnosť a štruktúra je dostatočná. Absencia obrázkov a grafov alebo ich nevhodné použitie. Výrazné znaky nevhodnej slovnej zásoby. Množstvo gramatických chýb alebo nadbytočných častí.	Text je veľmi slabo štruktúrovaný, pôsobí chaoticky alebo neprehľadne. Absencia obrázkov a grafov alebo ich nevhodné použitie. Využitie nevhodnej slovnej zásoby. Veľké množstvo gramatických chýb alebo nadbytočných častí.

INFORMATIKA

CSS preprocesor SASS

MARTIN TRNEČKA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

1. Úvod

Výuka tvorby webových stránek, zejména výuka základů tvorby webového front-endu, kterou budeme v tomto textu adresovat, je nedílnou součástí výuky informatiky na základních školách, středních školách a gymnáziích. Navíc, díky tomu, že je dnes tvorba webových stránek běžnou a často žádanou dovedností, setkáme se s ní i v řadě výběrových seminářů a zájmových kroužků.

Vzhledem k běžně vyhrazené časové dotaci obvykle není možné se této problematice ve výuce věnovat tak, aby studenti mohli tvořit své vlastní reálné projekty. Výuka je mnohdy redukována pouze na představení základní syntaxe HTML, CSS a případně jazyka JavaScript, bez hlubšího pochopení.

Přestože to na první pohled nemusí být patrné, nejkomplikovanější je v tomto ohledu technologie CSS, která slouží pro vizualizaci HTML elementů. Psaní správného CSS kódu vyžaduje znalosti celé řady principů, které typicky nejsou ve výuce diskutovány, například: pravidlo kaskády, specifičnost, dědičnost, box-model, atomické CSS, CSS metodiky (OOCSS, BEM, SUIT CSS, ITCSS) a mnohé další. Takováto výuka je odtržena od reality, jelikož vytvořit komplexní a dobře fungující webovou stránku bez pochopení výše uvedeného je velmi obtížné. Například bez respektování pravidla kaskády či použití CSS metodik bude výsledný CSS kód vždy nepřehledný, obtížně udržovatelný a redundantní, nemluvě o tom, že napsat takový kód zabere paradoxně více času.

Ačkoliv by zařazení uvedených principů do výuky bylo řešení, je třeba si uvědomit, že je to ve většině případů časově velmi obtížně zvládnutelné. Tyto principy si weboví vývojáři osvojují roky a jejich správná výuka vyžaduje nemalé zkušenosti. Pokud vyučující těmito zkušenostmi nedisponuje, může snadno u studentů vytvořit nesprávné programátorské návyky, které bude třeba později pracně odbourávat.

Nabízí se tedy otázka, co ukázat studentům, kteří se o danou problematiku zajímají a nespokojí se základy syntaxe CSS. Jednou z možností jsou *CSS preprocesory*. Ty přináší značné rozšíření základní syntaxe a umožňují studentům se nad tvorbou CSS kódu více zamyslet a vytvářet výrazně kvalitnější CSS kód i bez znalostí CSS metodik a dalších pokročilejších záležitostí.[1)] Navíc CSS preprocesory obsahují jednoduché programátorské konstrukce, které studenti využijí i při osvojování algoritmizace a programování. V následujícím textu si vysvětlíme vztah CSS a CSS preprocesorů, představíme CSS preprocesor SASS a ukážeme několik jednoduchých úkolů, které by spolu s výkladem potřebné teorie mohly být náplní několika vyučovacích hodin ať už běžné výuky nebo, a to je pravděpodobnější, výběrového semináře. V textu předpokládáme základní znalosti technologie CSS a HTML.

2. CSS preprocesory

Technologii CSS představil v roce 1994 norský výzkumník Håkon Wium Lie.[2)] O dva roky později, v roce 1996, se zrodil první standard této technologie, který byl zároveň prvním webovým standardem konsorcia W3C (World Wide Web Consortium), jenž dodnes standardizuje webové technologie. Zatímco možnosti, a stejně tak i potřeby, vizualizovat HTML elementy se od té doby velmi vyvinuly, samotná technologie CSS se příliš neměnila.[3)]

Ačkoliv stálost a jednoduchost CSS technologie měly své výhody, v době největšího rozvoje vizualizace webových stránek,[4)] se ukázaly jako zásadní omezení. Weboví vývojáři potřebovali pokročilejší konstrukce, jako například proměnné či funkce, které by jim usnadnili, psaní CSS kódu. Reakcí na toto ze strany W3C nevyslyšené volání byl příchod CSS preprocesorů.

1) Dodejme, že CSS preprocesory nejsou náhradou za zmíněné znalosti. Později ukážeme, že CSS preprocesory generují CSS kód. Kvalita výsledného kódu je pořád ovlivněna našimi znalostmi, ale CSS preprocesory umožňují kód lépe strukturovat, vyhnout se redundanci a vytvářet znovupoužitelné části kódu.

2) Håkon Wium Lie byl spolupracovníkem Tima Berners-Leeho, kterého netřeba představovat, a Roberta Cailliaua, kteří stojí za vznikem služby WWW.

3) Tím máme na mysli, že postupně přibývaly nové vlastnosti, ale syntaxe zápisu CSS pravidel se kromě několika drobných změn prakticky nezměnila.

4) Roky 2004–2014, tedy období vývoje dnes již neexistujícího HTML 5.

CSS preprocesory jsou nástroje, které umožňují převést (transpilovat) kód preprocesoru, zapsaný v jednoduchém programovacím jazyku (jazyk preprocesoru), do CSS kódu. Jazyk preprocesoru disponuje konstrukcemi pro řízení běhu programu, jako například podmínky a cykly, dále obsahuje funkce, umožňuje vytvářet znovupoužitelné části CSS kódu, používat plnohodnotnou dědičnost (nikoliv pouze dědičnost na úrovni HTML) a významně rozšiřuje syntaktické možnosti zápisu CSS pravidel.

Preprocesory získaly obrovskou popularitu mezi webovými vývojáři a postupem času se staly běžnou webovou technologií.[5)] Na toto později, poněkud neochotně, zareagovalo W3C a nastartovalo rozvoj, z jejich pohledu dokončené, technologie CSS jako takové.[6)] Postupně se v CSS objevily proměnné, funkce `calc()`, vnořování a další prvky, se kterými přišly preprocesory. Tímto rozvojem byl význam preprocesoru mírně oslaben. Přesto jsou dnes možnosti preprocesorů daleko nad možnostmi běžně podporovaného CSS. Navíc preprocesory umožňují generovat CSS kód, což pravděpodobně nikdy nebude pomocí běžného CSS možné.

3. Preprocesor SASS

CSS preprocesorů existuje hned několik, mezi ty nejznámější patří například SASS, LESS a Stylus. Dříve se mezi nimi vedla dlouhá válka o post nejlepšího, respektive nejpoužívanějšího, preprocesoru, kterou po letech bojů vyhrál preprocesor SASS (Syntactically Awesome Style Sheets), jenž je volně dostupný na stránce `sass-lang.com`. Vzhledem k tomu, že se dnes ostatní preprocesory prakticky nepoužívají, zaměříme se právě na něj.

3.1. Instalace

Instalace preprocesoru SASS je poměrně jednoduchá. Existuje celá řada nástrojů a rozšíření do různých editorů, které SASS obsahují, případně je možné jej nainstalovat pomocí nástroje `npm` následujícím příkazem.

```
npm install -g sass
```

5) Zajímavé je, že se ale nikdy nestaly základní technologií. Prohlížeče je nikdy nezačaly nativně podporovat.

6) Nutno dodat, že W3C mělo poměrně omezené možnosti. Kompletně změnit CSS by bylo vzhledem k rozšířenosti této technologie velmi komplikované. Navíc CSS již bylo v této době rozděleno do nezávislých modulů, což komplikuje jeho vývoj, jelikož neexistuje žádný modul popisující syntaxi CSS jako celek.

Rovněž je možné použít stránku `sass-lang.com/playground` nebo službu `codepen.io`. Ty jsou pro výukové účely nejvhodnější.

Pro úplnost dodejme, že existuje několik implementací SASS: Ruby Sass, LibSass a Dart Sass. První je již nevyvíjená, druhá je stále funkční, ale je považována za zastaralou. V nových projektech by měla být používána Dart Sass, kterou budeme v tomto textu uvažovat.

3.2. Základy SCSS

Preprocesor SASS umožňuje zapisovat kód preprocesoru pomocí dvou syntaxí: starší SASS, která se dnes již prakticky nepoužívá a novější SCSS (Sassy CSS). Stejné jméno syntaxe preprocesoru a preprocesoru často působí nedorozumění. Přestože je stále možné používat SASS syntaxi, pokud dnes někdo řekne, že používá SASS má na mysli SCSS syntaxi.

Syntaxe SCSS je plně kompatibilní se syntaxí CSS, ale navíc rozšiřuje stávající konstrukty CSS (například přidává nová at-pravidla) a přináší zcela nové konstrukty do CSS (například zanořování). Samotný jazyk CSS preprocesoru je poměrně jednoduchý a omezený programovací jazyk.[7)] Obsahuje běžné operátory, umožňuje práci s řetězci a čísly. V následující části si jej stručně představíme.

Proměnné

Jedním z hlavních přínosů CSS preprocesorů bylo zavedení proměnných, které v CSS znatelně chyběly. V SCSS se proměnné se zapisují s prefixem `$`. Ukázka následuje.

SCSS kód

```scss
$color-main: #58508d;
$color-contrast: #ffa600;

.box {
  background-color: $color-main;
  color: $color-contrast;
}

.box--inverse {
  background-color: $color-contrast;
  color: $color-main;
}
```

[7)] Nenajdeme zde nic, co bychom neviděli v jiných programovacích jazycích.

```
Vygenerovaný CSS kód

.box {
  background-color: #58508d;
  color: #ffa600;
}

.box--inverse {
  background-color: #ffa600;
  color: #58508d;
}
```

Ve výše uvedeném SCSS kódu jsme deklarovali globální proměnou. Proměnné definované v deklaračním bloku (deklarační blok je v CSS vymezen složenými závorkami) jsou lokální v daném deklaračním bloku.

Později se v CSS objevila nativní podpora proměnných. Z programátorského hlediska jsou ale tyto proměnné poněkud odlišené od proměnných v běžných programovacích jazycích. CSS proměnné jsou deklarativní. Změna jejich hodnoty změní i předchozí použití dané proměnné. Proměnné v SCSS jsou imperativní, tedy změna jejich hodnoty neovlivní jejich předchozí použití. Dalším zásadním rozdílem je, že preprocesor při transpilaci proměnné nahrazuje jejich hodnotami. V případě nativních CSS proměnných, jsou tyto proměnné uloženy ve výstupním CSS.[8)]

Komentáře

V SCSS je možné používat kromě běžných CSS komentářů (zapisovaných pomocí `/* */`) i komentáře uvozené symboly `//`. Běžné CSS komentáře budou ve výsledném CSS kódu, zatímco komentáře začínající symboly `//` budou odstraněny.[9)]

```
SCSS kód

// komentář pro preprocesor
/* komentář pro CSS */
```

```
Vygenerovaný CSS kód

/* komentář pro CSS */
```

[8)] Prohlížeč je tedy musí zpracovat. V případě použití preprocesoru má prohlížeč méně práce, což má za následek zvýšení rychlosti.

[9)] Jedná se o komentáře zdrojového kódu preprocesoru, ve výsledném CSS nemají význam.

Interpolace

Výsledek vyhodnocení SCSS kódu může být snadno předán do CSS pomocí `#{}`. Toho se využívá zejména v případě, kdy chceme CSS vlastnost určit pomocí proměnné tak, jak je ukázáno níže.

```
SCSS kód

$where: top;

.box {
  #{$where}: 1em;
}
```

```
Vygenerovaný CSS kód

.box {
  top: 1em;
}
```

Nesting

Jedním ze zásadních vylepšení CSS syntaxe, které přinesly CSS preprocesory, je *nesting* (vnořování).Ten umožňuje zanořovat CSS pravidla. Zanoření umožňuje zkrátit zápis CSS selektorů a zpřehlednit kód. Následující kód generuje (klasické) třídy pro navigační menu.

```
SCSS kód

.nav {
  height: 3em;

  ul {
    margin: 0;
    padding: 0;

    li {
      list-style-type: none;

      a {
        text-decoration: none;
      }
    }
  }
}
```

```
Vygenerovaný CSS kód

.nav {
  height: 3em;
}

.nav ul {
  margin: 0;
  padding: 0;
}

.nav ul li {
  list-style-type: none;
}

.nav ul li a {
  text-decoration: none;
}
```

Pomocí *rodičovského selektoru*, který se zapisuje symbolem `&`, je možné se odkázat na rodiče v hierarchii, která je vytvořena zanořením. Například.

```
SCSS kód

a {
  text-decoration: underline;

  &:hover {
    text-decoration: none;
  }
}
```

```
Vygenerovaný CSS kód

a {
  text-decoration: underline;
}

a:hover {
  text-decoration: none;
}
```

Při použití je rodičovský selektor nahrazen rodičem. Je tedy možné jej použít i jako hodnotu funkce.

SCSS kód

```scss
.text-normal {
  color: black;

  :not(&) {
    color: red;
  }
}
```

Vygenerovaný CSS kód

```css
.text-normal {
  color: black;
}

:not(.text-normal) {
  color: red;
}
```

Nesting je možné využít i pro zkrácení zápisu více vlastností se stejným prefixem. Syntaxe se ale v tomto případě mírně liší.

SCSS kód

```scss
body {
  font: {
    family: Arial;
    size: 1em;
    style: italic;
  }
}
```

Vygenerovaný CSS kód

```css
body {
  font-family: Arial;
  font-size: 1em;
  font-style: italic;
}
```

Pro úplnost dodejme, že je možné pomocí at-pravidla `@at-root` potlačit nesting a zpřístupnit hlavní, nezanořenou úroveň.

Dědičnost

SCSS syntaxe umožňuje používat dědičnost.[10)] Pomocí at-pravidla

[10)] Označení dědičnost je v tomto případě mírně zavádějící, ale běžně se používá.

`@extend` je možné zdědit CSS vlastnosti.

```
SCSS kód

.box {
  border-width: 1px;
  border-style: solid;
  border-color: black;
}

.box--emphasize {
  @extend .box;
  border-color: red;
}
```

```
Vygenerovaný CSS kód

.box, .box--emphasize {
  border-width: 1px;
  border-style: solid;
  border-color: black;
}

.box--emphasize {
  border-color: red;
}
```

V některých situacích je žádoucí, aby ve vygenerovaném CSS nefigurovala pravidla, ze kterých bylo děděno. K tomu je možné využít symbol `%`.[11)]

```
SCSS kód

%box {
  border-width: 1px;
  border-style: solid;
}

.box--normal {
  @extend %box;
  border-color: black;
}

.box--emphasize {
  @extend %box;
  border-color: red;
}
```

[11)] Uvedený kód je pouze demonstrační. Z pohledu BEM metodiky, která je zde použita, by bylo lepší jej řešit bez dědičnosti.

```
Vygenerovaný CSS kód

.box--emphasize, .box--normal {
  border-width: 1px;
  border-style: solid;
}

.box--normal {
  border-color: black;
}

.box--emphasize {
  border-color: red;
}
```

Mixiny

Mixiny umožňují vytvářet opakovaně použitelné části CSS kódu. Pro definici mixiny se požívá at-pravidlo `@mixin` a pro její použití `@include`.

```
SCSS kód

@mixin flex-center {
  display: flex;
  justify-content: center;
  align-items: center;
}

.box {
  @include flex-center;
}
```

```
Vygenerovaný CSS kód

.box {
  display: flex;
  justify-content: center;
  align-items: center;
}
```

Mixiny mohou mít i parametry, kterým je možné určit výchozí hodnoty. Argumenty je možné předávat pozičně, ale i jménem parametru.[12)]

12) Analogicky jako tomu je například v jazyce Python.

```
SCSS kód

@mixin flex-center($flex-direction: row) {
  display: flex;
  justify-content: center;
  align-items: center;
  flex-direction: $flex-direction;
}

.box--row {
  @include flex-center();
}

.box--column {
  @include flex-center(column);
}

.box--column {
  @include flex-center($flex-direction: column);
}
```

```
Vygenerovaný CSS kód

.box--row {
  display: flex;
  justify-content: center;
  align-items: center;
  flex-direction: row;
}

.box--column {
  display: flex;
  justify-content: center;
  align-items: center;
  flex-direction: column;
}

.box--column {
  display: flex;
  justify-content: center;
  align-items: center;
  flex-direction: column;
}
```

Mixiny mohou mít i proměnlivý počet argumentů. Příklad ukážeme později.

Funkce

Stejně jako v jiných programovacích jazycích je možné v SCSS používat funkce. Pro definici funkce se požívá at-pravidlo `@function`.[13)]

[13)] Upozorněme, že SASS neumí počítat s různými jednotkami. Pokud bychom volání

```
SCSS kód
1 $base: 1em;
2
3 @function add-m($x: 1em) {
4   @return $base + $x
5 }
6
7 .box {
8   margin: add-m(2em);
9 }
```

```
Vygenerovaný CSS kód
.box {
  margin: 3em;
}
```

V některých případech je žádoucí, aby argumenty předané mixinám a funkcím splňovaly určité podmínky. At-pravidla `@error` a `@warn` umožňují generovat chybu nebo varování při transpilaci. Pro testování zda je, či není splněna daná podmínka slouží podmínky, které si nyní ukážeme.

Konstrukce pro řízení běhu programu

SASS umožňuje využívat běžné konstrukce pro řízení běhu programu jako jsou podmínky a cykly. Pro zápis podmínek se využívají at-pravidla `@if` a `@else`. Příklad použití následuje.

```
SCSS kód
@mixin theme-colors($light-theme: true) {
  @if $light-theme {
    background-color: $light-background;
    color: $light-text;
  } @else {
    background-color: $dark-background;
    color: $dark-text;
  }
}
```

V SCSS existuje analogie ternárního operátoru.[14)]

---

funkce na řádku 8 nahradili `add-m(2em)` dojde k chybě. V CSS nativní funkce `calc()` takové omezení nemá. V SASS je možné toto omezení částečně obejít pomocí vestavěných modulů.

[14)] V ukázce se využívá toho, že pokud je v SCSS nastavena vlastnost na hodnotu

SCSS kód

```scss
$show-border: false;

.box {
  padding: 1em;
  border: if($show-border, 1px solid black, null);
}
```

Vygenerovaný CSS kód

```css
.box {
  padding: 1em;
}
```

Pro zápis cyklů se používají at-pravidla `@each`, `@for` a `@while`. Příklad `@each` cyklu, který je analogií běžného foreach cyklu, následuje.

SCSS kód

```scss
$icons: "up", "right", "bottom", "left";

@each $icon in $icons {
  .icon--#{$icon} {
    background: url($icon+".png");
    width: 2em;
    height: 2em;
  }
}
```

Vygenerovaný CSS kód

```css
.icon--up {
  background: url("up.png");
  width: 2em;
  height: 2em;
}

.icon--right {
  background: url("right.png");
  width: 2em;
  height: 2em;
}

.icon--bottom {
```

`null`, není předána do výsledného CSS.

```
  background: url("bottom.png");
  width: 2em;
  height: 2em;
}

.icon--left {
  background: url("left.png");
  width: 2em;
  height: 2em;
}
```

Použití cyklu `@for` ukážeme na slíbeném příkladu mixiny s volitelným počtem parametrů.[15)]

SCSS kód

```
@mixin sizes($width, $selectors...) {
  @for $i from 0 to length($selectors) {
    #{nth($selectors, $i + 1)} {
      width: $width * ($i+1);
    }
  }
}

@include sizes(20ch, ".small", ".medium", ".large");
```

Vygenerovaný CSS kód

```
.small {
  width: 20ch;
}

.medium {
  width: 40ch;
}

.large {
  width: 60ch;
}
```

Vestavěné moduly

SASS obsahuje několik vestavěných modulů, které implementují užitečnou funkcionalitu. Nalezneme zde například modul pro práci s barvou, řetězci, selektory nebo modul implementující základní matematické operace. Moduly se načítají pomocí at-pravidla `@use`.[16)]

[15)] Funkce `nth()` je součástí modulu `sass:list`. Moduly představíme později.
[16)] V ukázce je použito at-pravidlo `@debug`, jež vypíše výsledek SCSS výrazu do konzole.

```
SCSS kód
@use 'sass:math';

@debug math.ceil(4.2);
```

Podrobný popis všech vestavěných modulů je k dispozici v oficiální dokumentaci preprocesoru SASS.[17)]

Organizace kódu

SCSS kód je možné rozdělit do více souborů a ty následně vložit pomocí pravidel `@import`, `@forward` nebo `@use`. `@import` přidává SCSS kód k existujícímu kódu.[18)] `@forward` umožňuje načíst SCSS kód jako modulu pomocí `@use` a případně připojit namespace v podobě prefixu. Detailní rozbor použití `@forward` a `@use` již přesahuje základní znalosti SCSS.

4. Další příklady

Předchozí části textu jsme prezentovali potřebnou teorii pro používání SASS preprocesoru společně s jednoduchými ukázkami použití. Nyní si ukážeme několik dalších velmi praktických úkolů společně s jejich řešením.

4.1. Něco jednoduchého na rozehřátí

Velmi často potřebujeme vytvářenou webovou stránku parametrizovat. Příkladem, je vytvoření tříd pro vizualizaci různých bloků. Předpokládejme, že blok má následující HTML strukturu.

```
<div class="box--info">
  <h2>Lorem ipsum</h2>
  <p>Duis ante orci, molestie vitae vehicula venenatis, tincidunt ac pede.
       Curabitur sagittis hendrerit ante.</p>
</div>
```

Nyní budeme chtít vytvořit sadu tříd `.box-info`, `.box-error` a další, které budou vizualizovat tyto bloky. Bloky se budou lišit pouze barvou textu, který bude kvůli kontrastu většinou bílý a barvou pozadí. Všechny bloky budou mít vnitřní okraj nastavený na hodnotu `1em`. Následuje kód pro realizaci uvedených tříd.

17) sass-lang.com/documentation

18) Jedná se o analogii CSS at-pravidla `@import`, ale na rozdíl od něj je přidání kódu prováděno při transpilaci.

SCSS kód

```
1  $padding: 1em;
2
3  @mixin box($color: white, $bg-c: bg-c) {
4    padding: 1em;
5    color: $color;
6    background-color: $bg-c;
7
8    h2 {margin: 0;}
9    p {margin-bottom: 0;}
10 }
11
12
13 .box--info {
14   @include box($bg-c: #0284c7)
15 }
16
17 .box--error {
18   @include box($bg-c: #b91c1c)
19 }
20
21 .box--neutral {
22   @include box($color: #0284c7, $bg-c: #ffffff)
23 }
```

Ve výše uvedeném kódu je použita mixina (řádky 3–10) s parametry, která umožňuje opakované použití. V mixině je využit nesting (řádky 8 a 9) pro reset výchozí vizualizace elementů `h2` a `p`. Dále kód obsahuje globální proměnou (řádek 1) pro vnitřní okraj bloků.

Výše uvedený úkol je možné mnoha způsoby rozšířit a ukázat výhodu tohoto řešení. Například přidání rámečku k boxu případně ikonografiky je velmi jednoduché stačí modifikovat mixinu. Také se nabízí vyčlenit použité barvy na řádcích 13–23 do proměnných.

4.2. Reset a globální nastavení

Je běžné, že se zdrojové kódy opakovaně používají. Typicky při tvoření stránky stojíme před rozhodnutím, zda provedeme tzv. reset, tedy že nastavme výchozí hodnoty všem elementům. Například chceme všem elementů nastavit hodnoty `margin` a `padding` na `0`.

SCSS kód

```
$reset: true;

@if $reset {
  * {
    margin: 0;
```

```
    padding: 0;
  }
}
```

Analogicky můžeme předchozí kód změnit tak, aby zobrazoval všem elementům rámeček. To se může hodit při ladění webové stránky.

```
SCSS kód

$show-border: true;
$border: 1px solid gray;

@if $show-border {
  * {
    border: $border;
    box-sizing: border-box;
  }
}
```

4.3. Generování atomických tříd

Při tvorbě webové stránky velmi často potřebujeme vytvořit několik atomických tříd,[19] tedy tříd, které obsahují pouze jednu deklaraci ve svém deklaračním bloku. Typicky, když vytváříme stránku s několika barvami, potřebujeme atomické třídy pro barvu textu, pozadí, případně rámečku. Psát ručně takovéto třídy je zdlouhavé nemluvě o případné změně kódu.

Tento úkol je možné řešit několika způsoby. Nejlepší řešení je využít modul `map`, který umožňuje zadat data ve tvaru klíč:hodnota. Ukázka řešení následuje.

```
SCSS kód

@use "sass:map";

// barvy
$colors: ("red-700": #b91c1c,
          "red-800": #991b1b,
          "red-900": #7f1d1d);

/* generování CSS pravidel */
@each $name, $color in $colors {
  .bg-#{$name} {
    background-color: $color;
  }

  .#{$name} {
```

[19] Můžeme se setkat i s označením utility třída.

```
      color: $color;
    }
  }
```

5. Závěr

Stručně jsme představili preprocesor SASS, který významně rozšiřuje syntaxi CSS. Samotný preprocesor je velmi jednoduchý a není složité jej pochopit. Jeho začlenění do výuku umožní studentům efektivnější psaní CSS kódu. Pro úplnost ještě zmíníme zajímavou alternativu CSS preprocesorů a to stylované komponenty.[20] Zjednodušeně řečeno stylované komponenty umožňují generovat CSS kód pomocí JavaScriptu. JavaScript nahrazuje omezený kód preprocesoru, čímž získáme výrazně větší možnosti generování CSS. Dodejme, že se ale nejedná o technologii, která je stejně rozšířená jako CSS preprocesory.

Silniční síť
(Úlohy z MO kategorie P, 49. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V 35. ročníku Matematické olympiády byla do soutěže zařazena nová kategorie P (programování) se soutěžními úlohami zaměřenými na algoritmizaci a programování. Stalo se tak ve školním roce 1985/86. V té době se u nás začaly objevovat první mikropočítače, ale nebyly ještě rozšířeny natolik, aby je měl k dispozici každý student a na každé škole. V počátečních ročnících soutěže nebyly proto v kategorii P zadávány žádné praktické úlohy. Soutěžící odevzdávali řešení všech soutěžních úloh pouze v písemné formě, svoje programy psali na papír bez odladění na počítači.

V porovnání s úlohami zadávanými v MO-P v současné době, byly tehdejší soutěžní úlohy o něco snazší. To odpovídalo situaci, kdy se výuka informatiky a programování na střední školy teprve postupně zaváděla a její úroveň byla oproti dnešku podstatně nižší. Přesto ale i mezi úlo-

[20] styled-components.com

hami z prvních ročníků MO kategorie P najdeme zajímavé problémy, na jejichž řešení si můžeme ukázat mnohé užitečné principy, dodnes používané při návrhu efektivních algoritmů. S jednou takovou úlohou se nyní seznámíme. Pochází z krajského kola 37. ročníku MO (školní rok 1987/88), tedy v pořadí z třetího ročníku kategorie P. Na jejím řešení si ukážeme různé možnosti použití rekurze a metody odstraňování neefektivity při nevhodně zvoleném rekurzivním návrhu.

* * * * * * * * * * * * *

Mezi n městy očíslovanými postupně od 1 do n je vybudována jednosměrná silniční síť podle těchto pravidel:

a) z každého města vedou nejvýše dvě silnice,

b) vedou-li z města dvě silnice, pak směřují do různých měst,

c) silnice vedoucí z města i směřuje vždy do města s číslem větším než i.

Uvedená silniční síť je zadána pomocí dvou celočíselných polí a, b indexovaných od 1 do n takových, že $n > 1$ a pro všechna i, $1 \leq i \leq n$ platí následující tři podmínky:

1. $i < a[i] \leq n$ nebo $a[i] = 0$
2. $i < b[i] \leq n$ nebo $b[i] = 0$
3. $a[i] \neq b[i]$ nebo $a[i] = b[i] = 0$

Pro všechna i, $1 \leq i \leq n$, vede přímá silnice z města i do města $a[i]$, jestliže $a[i] > 0$, a z města i do města $b[i]$, jestliže $b[i] > 0$.

Sestrojte algoritmus, který určí, kolika různými způsoby se lze dostat z města 1 do města n.

* * * * * * * * * * * * *

Uvedené zadání přesně odpovídá původnímu znění soutěžní úlohy. Když si popsanou silniční síť vyjádříme v současné terminologii teorie grafů, jedná se o acyklický orientovaný graf s n vrcholy, v němž z každého vrcholu vedou nejvýše dvě hrany. Navíc máme přímo zadáno topologické uspořádání vrcholů tohoto grafu: vrcholy jsou očíslovány tak, že každá hrana grafu vede z vrcholu s nižším číslem do vrcholu s vyšším číslem. To znamená, že pokud bychom si nakreslili vrcholy s čísly od 1 do n v tomto pořadí zleva doprava, všechny hrany grafu by směřovaly zleva doprava. Naším úkolem je určit počet různých cest, které vedou z vrcholu 1 do vrcholu n.

Než začneme úlohu řešit, uvědomme si, že počet různých cest, vedoucích z města 1 do města n v silniční síti s n městy, může být velmi vysoký, dokonce až exponenciální vzhledem k hodnotě n. Představte si třeba situaci pro $n = 100$ takovou, že z města 1 vedou silnice do měst 2 a 3, z každého z nich vedou silnice do měst 4 a 5, z každého z nich vedou silnice do měst 6 a 7, a tak dále, až se dostaneme ke dvojic měst 98 a 99, z nichž vede už jen jedna silnice do cílového města 100. Nakreslete si sami obrázek, ze kterého jasně vyplývá, že cestou po silnicích z města 1 do města 100 se budeme celkem 49krát rozhodovat vždy mezi dvěma možnostmi, kam jít dále. Celkový počet různých cest v tomto případě proto dosahuje obrovské hodnoty 2^{49}.

Ukážeme si nyní několik různých způsobů řešení, které se budou lišit asymptotickou časovou složitostí algoritmu, a tedy také rychlostí výpočtu výsledného programu. Přirozeným způsobem se nabízí použít k řešení rekurzivní funkci s parametrem x, která bude určovat počet různých cest vedoucích z města 1 do města x. Pro získání požadovaného výsledku pak bude postačovat, když tuto funkci zavoláme s parametrem n. Funkce může vypadat například takto:

```
def cesty1(x):
    """ počet cest z města 1 do města x """
    if x == 1:
        return 1
    pocet = 0
    for i in range(1, x):
        if a[i] == x or b[i] == x:
            pocet += cesty1(i)
    return počet
```

Uvedená funkce *cesty1* přesně kopíruje zadání úlohy. Pro $x = 1$ funkce vrací výsledek 1, neboť z města 1 do města 1 se jistě dostaneme jedním způsobem (již tam jsme). Pro $x > 1$ najdeme všechny silnice vedoucí do města x. Podle zadání úlohy tyto silnice mohou vést jedině z měst s nižším číslem. Příslušná města vyhledáme v polích a, b a sečteme počty cest vedoucích do těchto měst z výchozího města 1. Tyto počty získáme rekurzivním voláním funkce *cesty1*.

Popsané řešení je sice naprosto správné, ale velmi neefektivní. Jeho neefektivita spočívá v tom, že rekurzivní funkce *cesty1* může být během jednoho výpočtu opakovaně mnohokrát volána se stejnou hodnotou parametru. Každé takové zavolání funkce představuje značné množství práce a velké časové nároky způsobené zejména dalšími rekurzivními voláními, přitom ale vede vždy k témuž výsledku. Mnoho stejné práce se stejným výsledkem se tedy vykonává zbytečně opakovaně. Výslednou hodnotu získáme tak, že všechny možné cesty rekurzivně postupně projdeme vždy ve směru od města n k městu 1. Již jsme si ukázali, že těchto cest může být až exponenciálně mnoho vzhledem k n, takže výše uvedená funkce *cesty1* má v nejhorším případě exponenciální asymptotickou časovou složitost. Pro vyšší hodnoty n je tudíž prakticky nepoužitelná.

K řešení úlohy můžeme přistoupit také z druhé strany a navrhnout rekurzivní funkci *cesty2* s parametrem x, která bude určovat počet různých cest vedoucích z města x do cílového města n. Výsledek úlohy pak získáme zavoláním této funkce s parametrem 1. Funkce bude podobná jako v předchozím případě. Pro parametr $x = n$ funkce vrátí výsledek 1, jelikož z města n do města n se dostaneme jediným způsobem. Pokud $x < n$, snadno určíme města, do nichž vede přímá silnice z města x – jsou to města s čísly $a[x]$, $b[x]$ (pokud jsou tyto hodnoty nenulové). Výsledkem pak je součet počtů cest vedoucích z měst $a[x]$, $b[x]$ do města n. Tyto počty získáme rekurzivním voláním funkce *cesty2*.

```
def cesty2(x):
    """ počet cest z města x do města n """
    if x == 0:
        return 0
    if x == n:
        return 1
    return cesty2(a[x]) + cesty2(b[x])
```

Funkce je o něco jednodušší než v předchozím případě, neobsahuje ve svém těle žádný cyklus. Přesto má ale stále exponenciální časovou složitost vzhledem k n. Zdůvodnění je stejné jako v první verzi řešení.

Pokud se při řešení úlohy setkáme s neefektivní rekurzivní funkcí, která je opakovaně volána se stejnou hodnotou parametru a počítá tak zbytečně vícekrát tutéž hodnotu, máme zpravidla dvě možnosti, jak tuto neefektivitu odstranit. Oba postupy si nyní ukážeme. První možností je doplnit rekurzivní funkci globálním polem, do kterého si budeme ukládat všechny hodnoty naší funkce, které již známe. Pole bude indexováno čísly jednotlivých měst (neboli hodnotou parametru při zavolání funkce). Před každým zamýšleným rekurzivním voláním v tomto poli zkontrolujeme, zda jsme potřebnou funkční hodnotu již počítali někdy dříve. Jestliže ano, použijeme hodnotu uloženou v poli a nebudeme ji opakovaně počítat rekurzí. Jestliže ne, provedeme normálně rekurzivní volání a jeho výsledek nejen použijeme k dalšímu výpočtu, ale také ho uložíme do našeho pole pro případné další využití.

Popsaný postup si nyní předvedeme naprogramovaný. Je to obecný princip, který můžeme uplatnit jak na první, tak i na druhou variantu řešení, které již máme. V prvním případě budeme do pole c na indexy měst 1 až n ukládat počty cest vedoucích z 1 do příslušného města, tzn. prvek $c[x]$ bude mít stejnou hodnotu, jakou vrací volání funkce *cesty1* s parametrem x. Seznamy v Pythonu jsou indexovány od 0, takže prvek $c[0]$ nebudeme využívat. Na ostatní indexy seznamu c vložíme na začátku výpočtu -1 jako příznak, že tuto hodnotu dosud neznáme. Počáteční hodnota $c[1] = 1$ nám umožňuje zkrátit výsledný kód funkce.

```
c = [0, 1] + [-1] * (n-1)

def cesty3(x):
    """ počet cest z města 1 do města x """
    pocet = 0
    for i in range(1, x):
        if a[i] == x or b[i] == x:
            if c[i] == -1:
                c[i] = cesty3(i)
            pocet += c[i]
    return pocet
```

V případě druhého řešení postupujeme analogicky, hodnota $c[x]$ uložená v poli c bude nyní udávat počet různých cest vedoucích z města x do města n. Pole c si opět inicializujeme samými -1 jako označení, že žádné hodnoty zatím neznáme, pouze hodnoty $c[0] = 0$ a $c[n] = 1$ nám podobně jako v předchozím řešení zkrátí výsledný kód.

```
c = [0] + [-1] * (n-1) + [1]

def cesty4(x):
    """ počet cest z města x do města n """
    if c[a[x]] == -1: c[a[x]] = cesty4(a[x])
    if c[b[x]] == -1: c[b[x]] = cesty4(b[x])
    c[x] = c[a[x]] + c[b[x]]
    return c[x]
```

Použití pomocného pole na uložení již spočítaných hodnot nic nezmění na správnosti algoritmu, výpočet probíhá stále naprosto stejným způsobem jako dříve. Velmi zásadně se ale sníží počet provedených rekurzivních volání funkce *cesty3* nebo *cesty4*. Funkce bude nyní zavolána s každou hodnotou parametru nejvýše jednou, všechna další rekurzivní volání funkce budou nahrazena vyzvednutím potřebné hodnoty z pole c. Celkový počet všech provedených rekurzivních volání funkce bude proto nejvýše n. Každé provedení těla funkce *cesty3* má lineární časovou složitost vzhledem k n, pokud již nepočítáme složitost rekurzivních volání, neboť tělo funkce obsahuje jeden cyklus délky nejvýše n. Celková časová složitost funkce *cesty3* je proto v nejhorším případě kvadratická. Naproti tomu každé provedení těla funkce *cesty4* proběhne v konstantním čase (opět bez započítání složitosti rekurzivních volání), takže toto řešení má celkově dokonce lineární časovou složitost vzhledem k n.

Na závěr ukážeme ještě jinou možnost, jak lze vyřešit problém s neefektivitou rekurzivního řešení. Místo doplnění rekurzivní funkce globálním polem na uložení již známých funkčních hodnot tentokrát rekurzi zcela opustíme a nahradíme ji cyklem. V něm budeme ve vhodném pořadí počítat příslušné hodnoty a ukládat je do pole c. Význam prvků tohoto pole přitom zůstane naprosto shodný jako v předchozím řešení. Rozdíl spočívá pouze v tom, že místo rekurzivního výpočtu shora budeme hodnoty počítat iteračně zdola. Důležité je zvolit takové správné pořadí výpočtu, abychom se v každém okamžiku odkazovali pouze na ty hodnoty, které již máme spočítané a uložené v poli. Zde nám pomůže skutečnost, že zkoumaná silniční síť představuje orientovaný graf bez cyklů, který je topologicky uspořádaný (tj. silnice v něm vedou pouze do měst s vyšším číslem).

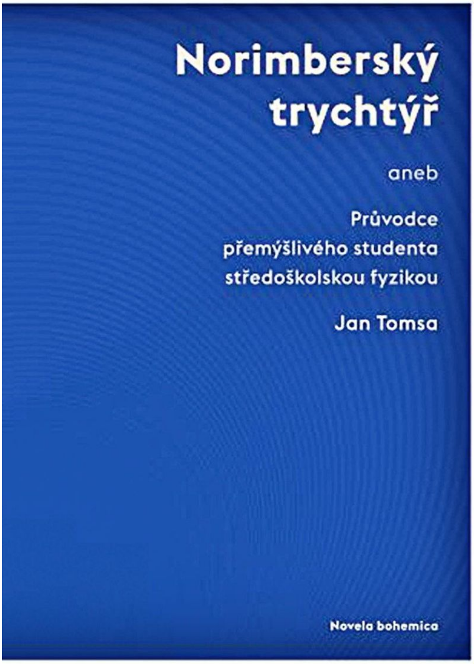
Uvedenou náhradu rekurzivní funkce cyklem lze opět aplikovat jak na předchozí řešení s rekurzivní funkcí *cesty3*, tak i na druhou variantu řešení s funkcí *cesty4*. Viděli jsme, že funkce *cesty4* je o něco šikovnější na zápis i efektivnější časově, proto tentokrát zůstaneme pouze u tohoto postupu. Hodnoty $c[x]$ budou tedy udávat počet cest počet různých cest vedoucích z města x do města n. Prvky pole c budeme počítat postupně zprava doleva, tzn. od indexu n dolů k indexu 1. Tím budeme mít zajištěno, že při výpočtu $c[x]$ budeme již znát potřebné hodnoty $c[a[x]]$, $c[b[x]]$.

```
def cesty5():
    """ počet cest z města 1 do města n """
    c = [0]*n + [1]
    for x in range(n-1, 0, -1):
        c[x] = c[a[x]] + c[b[x]]
    return c[1]
```

Výsledné řešení je velmi krátké a elegantní. Má zjevně lineární časovou složitost vzhledem k počtu měst n, neboť funkce *cesty5* osahuje jediný cyklus délky n.

LITERATURA

Recenze knihy Jana Tomsy Norimberský trychtýř, aneb Průvodce přemýšlivého studenta středoškolskou fyzikou



Čtenářům MFI je jistě dobře známá řada publikací věnovaných středoškolské fyzice. V roce 2022 nabídku rozšířila publikace [1]. I když svým názvem naráží na zázračnou metodu, jak nalít informace do hlavy, aniž by se je člověk musel učit, jde nejen o průvodce pro studenty se zájmem o fyziku (jak naznačuje podtitul), zajímavý pohled na známá témata může nabídnout i učitelům.

Cílem přitom nebylo vytvořit další učebnici fyziky, ale jde spíše o postupný pohled na vybrané problémy včetně nezbytných souvisejících částí matematiky (vektory, rovinné a prostorové úhly, derivace a integrály). Do-týká se pochopení metodiky vědeckého poznávání včetně příkladů z historie fyziky ilustrujících, jak se k našemu současnému poznání dospělo. Tím autor zároveň dokládá, že fyzika zdaleka není uzavřeným systémem, ale stále se prohlubujícím, postupném poznáváním základů světa kolem nás.

Úvodní část je věnována tomu, co vlastně fyzikou rozumíme, jaké jsou metody poznávání ve fyzice, jakou úlohu mají fyzikální modely a odpovídající zjednodušení, správné zanedbávání a zaokrouhlování. Závěrem úvodní části je připojeno desatero základních doporučení pro studenta, který by se (nejen) s touto knihou chtěl dostat k fyzice blíže (namátkou – zbavit se averze, umět položit správné otázky nebo pilně si vyrábět, ale nepoužívat taháky). Součástí „přípravných" kapitol je i pojednání o veličinách, jednotkách, konstantách i fyzikálním „pravopisu". Každá kapitola je uvedena zajímavým citátem k zamyšlení, své pochopení problematiky jednotlivých kapitol si může čtenář ověřit na cvičeních, jejichž řešení najde na konci knihy.

Z konkrétních oblastí fyziky pak v knize najdeme mechaniku (včetně Newtonových pohybových zákonů), od gravitační interakce se autor dostává k elektromagnetické interakci a silné i slabé interakci. Dále se věnuje otázkám lidského vnímání fyzikálních podnětů (ve fotometrii i v akustice).

Zvláštní kapitola je věnována základním fyzikálním zákonům, od zachování hmotnosti, přes „zákon nad zákony" (zachování energie), Fermatův princip až po „nepsaný zákon" minimální energie ve stabilním stavu. Výklad entropie začínající Popelkou přebírající hrách a kukuřici je opravdu velmi názorný. V kapitole nazvané Fyzika jako zpráva o světě se pak autor věnuje jak základním poznatkům teorie relativity, částicové fyziky mikrosvěta i kvantové fyziky. Poslední kapitola je pak věnována měření, včetně zásad, jak psát laboratorní protokol.

Jako žádný přehled, ani tato kniha nepokrývá celou středoškolskou fyziku. Celkově ale jde o autorův zdařilý výběr témat, jenž může čtenáře motivovat k hledání dalších informací. Jak autor píše v úvodu, jeho cílem bylo, abychom k načerpání vědomostí a informací přistupovali s otevřenou myslí.

Literatura

[1] *Tomsa, J.*: Norimberský trychtýř, aneb Průvodce přemýšlivého studenta středoškolskou fyzikou. Praha, Novela bohemica, 2022.

Lukáš Richterek

ZPRÁVY

Mezinárodní olympiády v informatice v roce 2024

V roce 2024 se naši žáci zúčastnili tří mezinárodních olympiád v informatice. Ještě na konci června se konal 31. ročník regionální Středoevropské olympiády v informatice CEOI 2024 (Central European Olympiad in Informatics). Tento ročník byl pro nás mimořádný tím, že pořadatelství připadlo na Českou republiku. Soutěž se konala na Fakultě informatiky Masarykovy univerzity v Brně. Zatímco pracovníci FI MU se postarali o organizační stránku akce, pracovníci z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy připravili pro CEOI soutěžní úlohy, vývojové prostředí, odevzdávací a vyhodnocovací systém.

Další mezinárodní programátorské soutěže probíhaly v červenci a v září. Nejprve to byl 4. ročník Evropské dívčí olympiády v informatice EGOI 2024 (European Girls' Olympiad in Informatics) konaný na konci července v nizozemském městě Eindhoven. Vrcholem sezóny pak byl 36. ročník celosvětové Mezinárodní olympiády v informatice IOI 2024 (International Olympiad in Informatics), který se uskutečnil na začátku září v egyptské Alexandrii.

Výběr našich reprezentantů pro všechny tyto soutěže je navázán na výsledky ústředního kola aktuálního ročníku Matematické olympiády kategorie P. Také letos jsme pozvali všechny úspěšné řešitele ústředního kola 73. ročníku MO kategorie P na tradiční výběrové soustředění, tentokrát do Brna na Fakultu informatiky Masarykovy univerzity. Při výběru reprezentačních družstev se sčítají výsledky ústředního kola MO-P a výsledky dosažené na výběrovém soustředění. Čtyři soutěžící s nejlepším celkovým hodnocením získají možnost reprezentovat Českou republiku na Mezinárodní olympiádě v informatice IOI, zatímco další čtyři úspěšné řešitele z nematuritních ročníků zveme na Středoevropskou olympiádu v informatice CEOI. Nezávisle na tom na EGOI jedou soutěžit čtyři nejlepší dívky.

Všechny tři uvedené olympiády se řídí podobnými pravidly, mají stejný charakter soutěžních úloh a stejný způsob hodnocení. Vlastní soutěž je vždy tvořena dvěma soutěžními dny. V každém soutěžním dnu soutěžící řeší tři náročné algoritmické úlohy, na jejichž vyřešení dostanou pět hodin času. Vždy večer před soutěží vedoucí všech delegací společně schválí úlohy navržené pořadatelskou zemí, podle potřeby upraví jejich formulace a přeloží je pak do mateřského jazyka svých soutěžících. Čeští účastníci tedy dostávají jak původní anglickou, tak i českou verzi zadání úloh. Každý soutěžící pracuje na přiděleném osobním počítači s nainstalovaným soutěžním prostředím, které umožňuje vyvíjet a testovat programy a odesílat je k vyhodnocení. Správnost vypracovaných programů se automaticky testuje v průběhu soutěže pomocí předem připravené sady testovacích vstupních dat, každý test je navíc omezen časovým limitem. Tím je zajištěna nejen kontrola správnosti výsledků, ale pomocí časových limitů se také odliší kvalita použitého algoritmu. Při testování každé úlohy se používají sady testovacích dat různé velikosti, takže teoreticky správné řešení založené na neefektivním algoritmu zvládne dokončit včas výpočet pouze pro některé testy – pro ty menší a jednodušší. Takové řešení je potom ohodnoceno částečným počtem bodů. Částečné body lze získat také za vyřešení některých speciálních případů, zatímco plný počet bodů přinese až řešení fungující v plné obecnosti. Krátce po odevzdání vypracovaného programu do vyhodnocovacího systému se soutěžící dozví hodnocení svého řešení a má pak ještě možnost řešení opravit a odevzdat ho znovu. Podobný systém používáme v posledních letech i u nás v Matematické olympiádě kategorie P pro hodnocení praktických úloh domácího a ústředního kola.

Postupně si nyní představíme průběh a výsledky jednotlivých letošních mezinárodních olympiád v informatice.

IOI 2024

Letošní 36. ročník Mezinárodní olympiády v informatice IOI 2024 se konal v egyptském městě Alexandrie ve dnech 1.–8. 9. 2024. Olympiády se zúčastnilo 362 soutěžících z 91 zemí celého světa, mimo soutěž navíc řešilo úlohy ještě druhé družstvo pořádající země. Oproti loňskému roku se tak počet soutěžících i počet zúčastněných zemí opět o něco zvýšil a dosáhl rekordních hodnot.

Vedením české delegace na IOI 2024 byli pověřeni Daniel Skýpala a Benjamin Swart, oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Oba vedoucí českého družstva jsou sami držiteli medailí z předchozích ročníků středoevropské a mezinárodní olympiády v informatice. Naše soutěžní družstvo mělo následující složení: *Patrik Číhal*, 4/4, individuální vzdělávání, *David Hromádka*, 7/8, gymnázium Nad Alejí, Praha 6, *Antonín Maloň*, 8/8, gymnázium, tř. Kpt. Jaroše, Brno, *Jan Slíva*, 7/8, Mensa gymnázium, Praha 6.

Účastníci olympiády byli ubytováni v univerzitním kampusu Arabské akademie pro vědu, technologii a námořní dopravu, jehož součástí je i několik hotelů. Zde se konala také soutěž i všechna jednání mezinárodní jury. Vlastní soutěž proběhla ve dvou soutěžních dnech, a to v úterý 3. 9. a ve čtvrtek 5. 9. 2024. Ve zbývajících dnech pobytu se podobně jako na CEOI konalo nejprve cvičné soutěžní kolo určené pro seznámení soutěžících s počítači a vývojovým prostředním, dále slavnostní zahájení, několik výletů a nakonec samozřejmě také slavnostní zakončení olympiády spojené s vyhlášením výsledků. V rámci výletů navštívili všichni účastníci IOI v Alexandrii řadu místních zajímavostí, jako slavnou Alexandrijskou knihovnu nebo místní pláž. Po skončení soutěže je pak za odměnu čekal celodenní výlet k egyptským pyramidám a do největšího světového muzea v Káhiře. Závěrečný ceremoniál s předáváním medailí proběhl nedaleko s majestátním výhledem na nasvícenou Sfingu a pyramidy.

Každá ze šesti soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body, takže celkem bylo možné získat až 600 bodů. To se letos podařilo jedinému soutěžícímu, absolutním vítězem soutěže se stal čínský soutěžící Kangyang Zhou. Na základě přesně stanovených pravidel se na IOI podle dosažených bodů rozdělují medaile. Některou z medailí obdrží nejvýše polovina účastníků soutěže, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se rozdělují v poměru 1 : 2 : 3 s ohledem na to, aby soutěžící se stejným bodovým ziskem získali stejnou medaili. Způsob rozdělení medailí je na IOI stanoven striktními pravidly, na rozdíl od CEOI ho nemohou členové mezinárodního výboru ani vedoucí národních delegací nijak ovlivnit. Na letošní IOI bylo uděleno celkem 186 medailí, z toho 34 zlatých, 61 stříbrných a 91 bronzových. Navíc bylo uděleno 42 čestných uznání (HM – honourable mentions). Ocenění HM dostává na IOI takový soutěžící, který nezískal žádnou medaili, ale v jednom ze dvou soutěžních dnů se umístil v první polovině výsledkové listiny. Získal by tedy medaili, pokud by se podle platných pravidel udělovaly medaile zvlášť za každý soutěžní den.

Výsledky našich soutěžících:

52. *Antonín Maloň*, 329,14 bodů, stříbrná medaile,
154. *Jan Slíva*, 236,50 bodů, bronzová medaile,
172. *Patrik Číhal*, 223,00 bodů, bronzová medaile,
179. *David Hromádka*, 215,31 bodů, čestné uznání HM.

Zisk jedné stříbrné medaile, dvou bronzových medailí a jednoho čestného uznání představuje pro Českou republiku velmi pěkný výsledek, srovnatelný s našimi výsledky z předchozích let. Mezinárodní olympiáda v informatice je výhradně soutěží jednotlivců a oficiální pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlašováno. Není tedy ani stanoveno, zda by se mělo určovat podle počtu medailí, podle celkového počtu bodů získaných soutěžícími dané země nebo třeba podle součtu jejich dosažených umístění. Naše letošní výsledky nás každopádně řadí do lepší poloviny v celkovém pořadí zúčastněných zemí. Slovenské družstvo dopadlo letos podobně jako naše – získalo jednu zlatou medaili, jednu bronzovou medaili a jedno čestné uznání. Na rozdíl od minulých let letos žádná země nezískala čtyři zlaté medaile. Nejúspěšnější zemí se třemi zlatými medailemi a jednou stříbrnou medailí se stalo USA. Ze zemí středoevropského regionu bylo nejlepší Polsko se dvěma zlatými a dvěma stříbrnými medailemi.

Podrobnosti o soutěži najdete na adrese https://www.ioi2024.eg/, kompletní výsledková listina je k dispozici na stránce se statistikami http://stats.ioinformatics.org/results/2024. Příští ročník Mezinárodní olympiády v informatice bude hostit v roce 2025 Bolívie. Následující ročníky se budou konat v Uzbekistánu a poté v Německu.

CEOI 2024

Středoevropská soutěž CEOI 2024 se konala ve dnech 23.– 29. 6. 2025 v Brně. Byla to již čtvrtá středoevropská olympiáda pořádaná u nás v České republice, předchozí naše ročníky proběhly v letech 1999, 2007 a 2015 a vždy se také konaly na Fakultě informatiky Masarykovy univerzity v Brně. Letošní CEOI bylo historicky největší, zúčastnilo se jí celkem 60 soutěžících ze 13 zemí. Vedle osmi tradičních účastnických středoevropských států (Česká republika, Chorvatsko, Maďarsko, Německo, Polsko, Rumunsko, Slovensko, Slovinsko), které se pravidelně střídají v pořádání olympiády, přijeli jako hosté soutěžící z dalších pěti zemí (Ázerbájdžán, Izrael, Rakousko, Švýcarsko a Ukrajina). Kromě toho jako obvykle soutěžilo ještě druhé družstvo pořadatelské země. Za Českou republiku se tak oficiálně zúčastnilo nejen družstvo vybrané podle našich obvyklých pravidel pro CEOI (tedy nejlepší nematuranti, kteří se letos nedostali na IOI), ale také naše družstvo dívek připravujících se k účasti na EGOI. Navíc jsme mimo soutěž a mimo výsledkovou listinu pozvali do Brna na CEOI ještě i naše nejlepší družstvo vybrané pro účast na letošní celosvětové olympiádě IOI. Pro něj i pro naše dívčí družstvo tak CEOI posloužila jako přípravné soustředění.

Dvě oficiální česká reprezentační družstva soutěžící na CEOI 2024 měla následující složení: *Richard Dobíšek*, 7/8, Mensa gymnázium, Praha 6, *Adam Houdek*, 8. roč. ZŠ, SOŠ a ZŠ Březová, *Erik Ježek*, 2/4, Smíchovská SPŠ a G, Praha 5, *Jan Václavek*, 6/8, gymnázium, tř. Kpt. Jaroše, Brno, *Anna-Kristina Migel*, 1/4, Smíchovská SPŠ a G, Praha 5, *Lucie Roskovská*, 7/8, gymnázium Elišky Krásnohorské, Praha 4, *Svatava Šimečková*, 6/8, gymnázium, tř. Kpt. Jaroše, Brno, *Anh Linh Tran*, 7/8, gymnázium, tř. Kpt. Jaroše, Brno.

Třetí mimosoutěžní družstvo tvořili: *Patrik Číhal*, 4/4, individuální vzdělávání, *David Hromádka*, 7/8, gymnázium Nad Alejí, Praha 6, *Antonín Maloň*, 8/8, gymnázium, tř. Kpt. Jaroše, Brno, *Jan Slíva*, 7/8, Mensa gymnázium, Praha 6.

Vedoucími českých družstev na CEOI byli jmenováni prof. Mgr. *Zdeněk Dvořák*, Ph.D. a doc. RNDr. *Pavel Töpfer*, CSc., oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Všichni účastníci CEOI byli ubytováni v areálu vysokoškolských kolejí Masarykovy univerzity ve Vinařské ulici. Na Fakultě informatiky se konala nejen vlastní soutěž, ale také všechna jednání mezinárodní jury, překlady soutěžních úloh, slavnostní zahájení i zakončení. Během neděle 23. 6. 2024 se všechna reprezentační družstva postupně sjela do Brna. Hned v pondělí proběhlo zahájení a poté následovalo „zkušební kolo“, které slouží k seznámení soutěžících s počítači a s vývojovým prostředím, v němž budou při soutěži pracovat. Tentýž den stihli soutěžící také prohlídku města a vedoucí delegací první společné jednání a přípravu úloh pro první soutěžní den.

V úterý 25. 6. se konal první soutěžní den, po jehož skončení účastníci vyslechli rozbor úloh a následně si mohli odpočinout při sledování krátkých studentských filmů vytvořených na hostitelské fakultě. Středa byla volným dnem mezi oběma soutěžními částmi. Pořadatelé pro nás připravili celodenní výlet, který zahrnoval návštěvu výstavního pavilonu Anthropos, plavbu lodí po brněnské přehradě a návštěvu středověkého hradu Veveří. Ve čtvrtek 27. 6. se soutěžilo podruhé a odpoledne po skončení soutěže i následně v pátek dopoledne měli žáci možnost podniknout různé akce podle vlastního zájmu se svými průvodci. V pátek po obědě byla na fakultě olympiáda zakončena slavnostním vyhlášením výsledků a v sobotu se všechna reprezentační družstva rozjela do svých domovů.

V soutěži bylo možné získat celkem 600 bodů za šest úloh hodnocených maximálně po 100 bodech. To se sice nikomu ze soutěžících nepodařilo, ale dva nejlepší účastníci vyřešili stoprocentně pět ze šesti soutěžních úloh. O celkové vítězství v letošním ročníku CEOI se podělili István Ádám Molnár z Maďarska a Yoav Shamay z Izraele se shodným ziskem 565 bodů. Úspěšnější polovina soutěžících dostává na CEOI medaili, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se rozdělují v přibližném poměru 1 : 2 : 3. Celkově bylo na CEOI 2024 uděleno 28 medailí, z toho 5 zlatých, 9 stříbrných a 14 bronzových. Nejúspěšnějšími zeměmi se staly Maďarsko se dvěma zlatými, jednou stříbrnou a jednou bronzovou medailí, Izrael se dvěma zlatými a jednou stříbrnou medailí a Polsko s jednou zlatou, jednou stříbrnou a dvěma bronzovými medailemi. Středoevropská olympiáda v informatice je ovšem soutěží jednotlivců a žádné oficiální pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlašováno.

Našim účastníkům se příliš nedařilo, všichni se umístili ve druhé polovině celkového pořadí a zůstali tedy bez medaile. Slovenské družstvo bylo tentokrát úspěšnější než naše, získalo tři bronzové medaile.

Výsledky našich soutěžících:

33. *Svatava Šimečková*, 235,76 bodu,
35. *Adam Houdek*, 208,00 bodu,
43. *Richard Dobíšek*, 153,19 bodu,
47. *Lucie Roskovská*, 124,85 bodu,
48. *Jan Václavek*, 118,41 bodu,
49. *Anna-Kristina Migel*, 115,27 b.,
52. *Erik Ježek*, 87,49 bodu,
56. *Anh Linh Tran*, 56,85 bodu.

Uvedený výsledek odpovídá skutečnosti, že na rozdíl od mnoha jiných zemí posíláme na CEOI soutěžit mladší žáky, kteří se v příslušném roce ještě nedostali na IOI. Tento postup se nám ovšem dlouhodobě osvědčil, naši mladší soutěžící takto získají na CEOI svoje první mezinárodní zkušenosti a často se pak stává, že v následujícím školním roce velmi dobře uspějí na celosvětové IOI.

Veškeré informace o soutěži, texty soutěžních úloh i podrobné výsledky všech soutěžících můžete nalézt na Internetu na adrese `https://ceoi2024.fi.muni.cz/`. Příští Středoevropskou olympiádu v informatice CEOI 2025 uspořádá Rumunsko.

EGOI 2024

EGOI
European Girls' Olympiad in Informatics
21 – 27 July 2024
The Netherlands

V pořadí 4. ročník Evropské dívčí olympiády v informatice EGOI 2024 (European Girls' Olympiad in Informatics) se konal v termínu 21.– 27. 7. 2024 v menším nizozemském městě Veldhoven, které leží nedaleko většího a známějšího Eindhovenu. Soutěž probíhala v prostorách hotelu Koningshof a Technické univerzity v Eindhovenu, která byla již v minulosti pořadatelem 7. ročníku IOI v roce 1995. Kromě vlastní soutěže probíhající tradičně ve dvou dnech čekal na účastníky EGOI také den plný exkurzí a zábavy a obvyklé slavnostní ceremoniály na univerzitě. Většinu času ovšem účastníci strávili v prostorách obrovského hotelu, který v minulosti sloužil jako klášter.

Na letošní olympiádě EGOI soutěžily dívky z 56 zemí, a to nejen z Evropy, jak napovídá název akce, ale jako hosté i z mnoha dalších zemí celého světa. Počet zúčastněných zemí se tak oproti předchozímu ročníku zvýšil o čtyři. Z některých zemí přijelo neúplné družstvo, takže celkem se na letošní EGOI sešlo 195 soutěžících, z toho 130 z Evropy.

Letos podruhé se Evropské dívčí olympiády v informatice zúčastnilo i české čtyřčlenné družstvo. Bylo vybráno na základě výsledků dosažených na výběrovém soustředění reprezentantů pro IOI a CEOI, kam jsme pozvali také nejlepší řešitelky ústředního a krajského kola 73. ročníku Matematické olympiády kategorie P. Na EGOI nás reprezentovaly: *Lenka Poljaková*, 8/8, gymnázium Jakuba Škody, Přerov, *Lucie Roskovská*, 7/8, gymnázium Elišky Krásnohorské, Praha 4, *Svatava Šimečková*, 6/8, gymnázium, tř. Kpt. Jaroše, Brno, *Anh Linh Tran*, 7/8, gymnázium, tř. Kpt. Jaroše, Brno. Tři z nich (tedy s výjimkou Lenky Poljakové) se zúčastnily již loňského ročníku soutěže EGOI 2023 ve Švédsku.

Vedoucími české delegace byli *Adam Červenka* a *Štěpán Mikéska*, oba z Fakulty informatiky Masarykovy univerzity v Brně. Oba vedoucí českého družstva jsou sami bývalými vítězi ústředního kola MO kategorie P a úspěšnými účastníky předchozích ročníků mezinárodních olympiád v informatice a matematice. Realizace cesty českých reprezentantů na EGOI 2024 byla možná díky sponzorskému daru od společnosti Second Foundation.

Soutěž proběhla podle pravidel převzatých z celosvětové informatické olympiády IOI, jediným rozdílem bylo zadání čtyř úloh v každém soutěžním dnu namísto obvyklých tří na IOI. Každá úloha byla hodnocena 100 body, takže celkem bylo možné v soutěži získat až 800 bodů. Mezi nejlepší řešitelky soutěže bylo rozděleno 15 zlatých, 31 stříbrných a 46 bronzových medailí. Celkovou vítězkou EGOI 2024 se stala Eliška Macáková ze Slovenska se 712 body. Nejúspěšnější zemí na EGOI bylo letos Polsko, jehož soutěžící vybojovaly čtyři zlaté medaile. České dívky získaly jednu stříbrnou medaili, zatímco slovenské jednu zlatou a jednu stříbrnou medaili.

Výsledky našich dívek:

17. *Svatava Šimečková*, 507 bodů, stříbrná medaile,
95. *Lucie Roskovská*, 302 bodů,
143. *Lenka Poljaková*, 169 bodů,
173. *Anh Linh Tran*, 94 bodů.

Na webu `https://wiki.egoi2024.nl` se můžete seznámit s dalšími informace o soutěži, s kompletními výsledky i s texty všech zadaných soutěžních úloh. Webová stránka `https://egoi.org/` obsahuje souhrnné informace o všech dosavadních ročnících soutěže

Pavel Töpfer

41. mezinárodní konference Historie matematiky

Ve dnech 19. až 23. srpna 2024 se v malebném lázeňském městě Poděbrady konala 41. mezinárodní konference Historie matematiky. V programovém a organizačním výboru zasedli akademici z FD ČVUT, MFF UK, ÚJOP UK a VŠE. Hlavními organizátory byli doc. RNDr. Jindřich Bečvář, CSc., a prof. RNDr. Martina Bečvářová, Ph.D. Tato událost přilákala přibližně 50 účastníků ze střední Evropy, kteří se zde setkali, aby diskutovali o nejnovějších výzkumech a objevech v oblasti historie matematiky.

Jedním z vrcholů konference bylo představení pětisvazkové monografie *Premonstráti v Plzni*, jež je výsledkem tříletého výzkumného projektu *Nedoceněná role plzeňských premonstrátů v matematice a přírodovědě*. Každý účastník konference obdržel tuto rozsáhlou publikaci jako součást konferenčních materiálů. Monografie se zaměřuje na dosud nedoceněnou roli plzeňských premonstrátských škol ve vývoji matematiky a přírodních věd v našich zemích, zejména v 19. století. Analyzuje tuto problematiku v širších historicko-politicko-kulturních souvislostech, čímž přináší nový pohled na význam těchto institucí.

Významným bodem programu byla přednáška Martiny Bečvářové a Jindřicha Bečváře, která monografii *Premonstráti v Plzni* podrobně představila. Byly uvedeny všechny svazky a připomenuta základní fakta o řádu premonstrátů a jeho dvou významných kanoniích v českých zemích – Strahov a Teplá.

Přednáška také zahrnovala přehled knižních publikací významných premonstrátů Josefa Vojtěcha Sedláčka a Josefa Františka Smetany. Bečvář srovnal jejich životní osudy, názorový vývoj, politické postoje, všestranné aktivity a úspěchy, společenské styky a vztahy s českou vlasteneckou společností. Zmínil také jejich básnickou činnost, vztah k humoru a hudbě, a dokonce i jejich zdravotní problémy.

Součástí nabitého programu byly čtyři plenární přednášky, které pronesli Danuta Ciesielska, Zdeněk Halas, Stanisław Domoradzki a Miloš Hauptman.

Danuta Ciesielska představila téma *Quaternions in Polish publications and lecture courses until 1914*. Ciesielska detailně popsala historii zavedení kvaternionů, počínaje výsledky Leonarda Eulera, přes nepublikované práce Carla Friedricha Gausse až po formální definici, kterou v roce 1843 v Dublinu představil William Rowan Hamilton.

Další zajímavou přednáškou byla prezentace Zdeňka Halase na téma *Matematika v Boethiově traktátu O základech hudby*. Přednáška se věnovala základním východiskům antické hudební teorie a charakterizovala Boethiův způsob matematické práce.

Miloš Hauptman v přednášce nazvané *I filatelie je věda* zdůraznil, že filatelie není jen o sbírání, ale také o studiu těchto předmětů, znalosti tiskových technik a různých druhů papíru.

Další významnou přednáškou byla prezentace Stanisława Domoradzkého na téma *The formation of the historical environment in Krakow in the 20th century*. Domoradzki připomněl 660. výročí založení Studium Generale králem Kazimírem Velikým a zdůraznil zájem o historii matematiky v Krakově.

Na konferenci dále zaznělo mnoho zajímavých příspěvků od různých autorů.

Helena Durnová přispěla přednáškou na téma *České národní obrození a Bernard Bolzano*.

Michaela Dvořáková se věnovala *Terminologii v učebnicích geometrie pro střední školy v 19. a 20. století*, kde analyzovala vývoj a změny v terminologii používané v těchto učebnicích.

David Hamr představil příspěvek *Ve službách přesnosti – mechanické časomíry ve sbírkách Národního technického muzea*.

Magdalena Hykšová zaujala posluchače přednáškou o *Vícekriteriálním rozhodování*,

Tomáš Lengyelfalusy a Štefan Tkačik pohovořili o *Osobnostech slovenskej matematiky II – životné vzory pre budúce generácie*.

Martin Melcer se zmiňoval o *vzdělání nejen ve školních lavicích aneb o úsvitu populárně naučné literatury*.

Přednáška Jindřicha Michalika se věnovala *Hledání optimálních strategií pro kombinatorické hry*, přičemž autor představil i vlastní kombinatorickou hru.

Miroslava Otavová poutavě přiblížila *Františka Josefa Gerstnera a zrození pražské polytechniky*.

Pavlína Šteflová seznámila posluchače s *Bolzanovým Vědoslovím a jeho významem v dnešní didaktice*.

Katka Urbánková se ve svém příspěvku *Soddyho kružnice* zaměřila na význam a aplikace Soddyho kružnic.

Karel Vašíček v přednášce *Newton a Principie* mluvil o vydávání matematických publikací.

Marie Vestenická netradiční formou představila *Geometrii náhody*.

Nikola Pajerová provedla posluchače *Od Delaunayovy triangulace, přes diferenciální geometrii až k metrologii*.

Michal Řepík zajímavě hovořil o *Astronomických přístrojích Mikuláše Koperníka*.

S Antonínem Slavíkem se účastníci díky dobovým záznamům mohli vydat za *Matematiky do Karlových Varů*.

Aritmetika Martiana Capelly (Jak mnoho nepochopení ovlivnilo promyšlený koncept) bylo zajímavým obohacením od Adély Svobodové.

Irena Sýkorová ve svém příspěvku *Ohlédnutí za jednou neurčitou rovnicí* mluvila o metodách řešení Pellovy rovnice v indické matematice.

Přednášky 41. mezinárodní konference Historie matematiky v Poděbradech přispěly k dalšímu rozvoji této vědní disciplíny, nicméně konference byla nejen příležitostí k výměně vědeckých poznatků, ale také k navázání nových kontaktů a spoluprací mezi institucemi z různých koutů Evropy. Aktivními účastníky byli především odborníci ze Slovenska a Polska.

Všichni ocenili vysokou úroveň organizace a bohatý doprovodný program, který zahrnoval i prohlídky historických památek Poděbrad.

Za hladký průběh, zajištění prostor a v neposlední řadě také za večerní pozorování oblohy patří velké poděkování Martinu Melcerovi z Ústavu jazykové a odborné přípravy Univerzity Karlovy v Poděbradech.

Michaela Dvořáková
Pavlína Šteflová

MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách

Ročník XXXIII (2024)

MATEMATIKA

M. Chodorová, J. Švrček: O konvexních pětiúhelnících (s. 17) – *L. Juklová, J. Švrček*: Tětivové a tečnové pětiúhelníky (s. 86) – *M. Jukl, L. Juklová*: K obsahům pravoúhelníků opsaných elipse (s. 161) – *M. Kolařík, A. Kolaříková*: O testových úlohách s nejednoznačným řešením (s. 254) – *F. Kuřina, J. Cachová*: Didaktická struktura geometrie (s. 1) – *P. Leischner*: Ortocentrum trojúhelníku (s. 100) – *P. Leischner*: O vlastnostech trojúhelníku spjatých s jeho ortocentrem (s. 247) – *J. Robová*: Rozvíjení znalostí žáků s podporou GeoGebry (s. 167) – *J. Šimša*: Brazilská čísla a prvočísla (s. 241) – *M. Škorpilová*: Obsahy rovinných útvarů (s. 93) – *P. Tlustý, I. Krech*: O kostkových hazardních hrách (s. 81) – *V. Vaněk*: Číselně-teoretické úlohy v Matematickém klokanovi (s. 177) – *M. Závodný*: Odchylka dvou vektorů (s. 264) – Zajímavé matematické úlohy (s. 24, 108, 186, 268)

FYZIKA

D. Dvořák, I. Fikáčková: O jedné zajímavé aplikaci druhého termodynamického zákona (s. 111) – *B. Gejdošová, K. Velmovská*: Rozvoj schopnosti študentov učiteľstva fyziky plánovať vyučovaciu hodinu (s. 278) – *J. Hošková Prokšová*: Sir William Thomson (ke dvoustému výročí narození) (s. 129) – *G. Kaufnerová*: Myšlenkové mapy a jejich aplikace ve výuce termiky na ZŠ (s. 204) – *Č. Kodejška*: Nepřímé měření výstupního napětí Van de Graaffova generátoru (s. 121) – *J. Kos, M. Křížová*: Strategie 2030+ v přípravě budoucích učitelů fyziky (s. 39) – *O. Lepil*: 60 let modernizačních snah ve výuce fyziky (s. 29) – *O. Lepil*: Sto let korpuskulárně vlnového dualismu (s. 273) – *T. Sukeľová, K. Velmovská*: Stimulácia žiakov k experimentálnej činnosti prostredníctvom učebných aktivít (s. 190) – *V. Štefl*: Skrytý význam druhého ohniska eliptické dráhy Měsíce (s. 197)

INFORMATIKA

E. Bartl: Počítačová grafika, 4. díl (s. 144) – *E. Bartl*: Počítačová grafika, 5. díl (s. 228) – *Š. Gergelitsová, T. Holan*: Dělení kostky na vlastní oči (s. 135) – *M. Kolařík*: O programovacím jazyku PROLOG (s. 52) – *P. Töpfer*: Vlastnické vztahy (Úlohy z MO kategorie P, 47. část) (s. 72) – *P. Töpfer*: Jedničkový obdélník (Úlohy z MO kategorie P, 48. část) (s. 217) – *P. Töpfer*: Silniční síť (Úlohy z MO kategorie P, 49. část) (s. 305) – *M. Trnečka*: CSS preprocesor SASS (s. 288)

LITERATURA

J. Molnár: Bonaventura Cavalieri: Geometrie vyložená novým způsobem za pomocí nedělitelných spojitého (s. 79) – *L. Richterek*: Recenze knihy Jana Tomsy Norimberský trychtýř, aneb Průvodce přemýšlivého studenta středoškolskou fyzikou (s. 311)

ZPRÁVY

P. Calábek: Ústřední kolo 73. ročníku MO kategorie A (s. 151) – *P. Calábek*: Český úspěch na 13. Evropské dívčí matematické olympiádě (s. 153) – *P. Calábek*: 12. ročník CPSJ (s. 235) – *M. Dvořáková, P. Šteflová*: 41. mezinárodní konference Historie matematiky (s. 319) – *K. Kolář*: Přehlídka popularizace fyziky 2023 (s. 80) – *L. Kopfová, D. Koževnikov*: 65. ročník Mezinárodní matematické olympiády (s. 237) – *L. Richterek*: Celostátní kolo FO 2024 (s. 155) – *P. Töpfer*: Ústřední kolo 73. ročníku MO kategorie P (s. 158) – *P. Töpfer*: Mezinárodní olympiády v informatice v roce 2024 (s. 313)