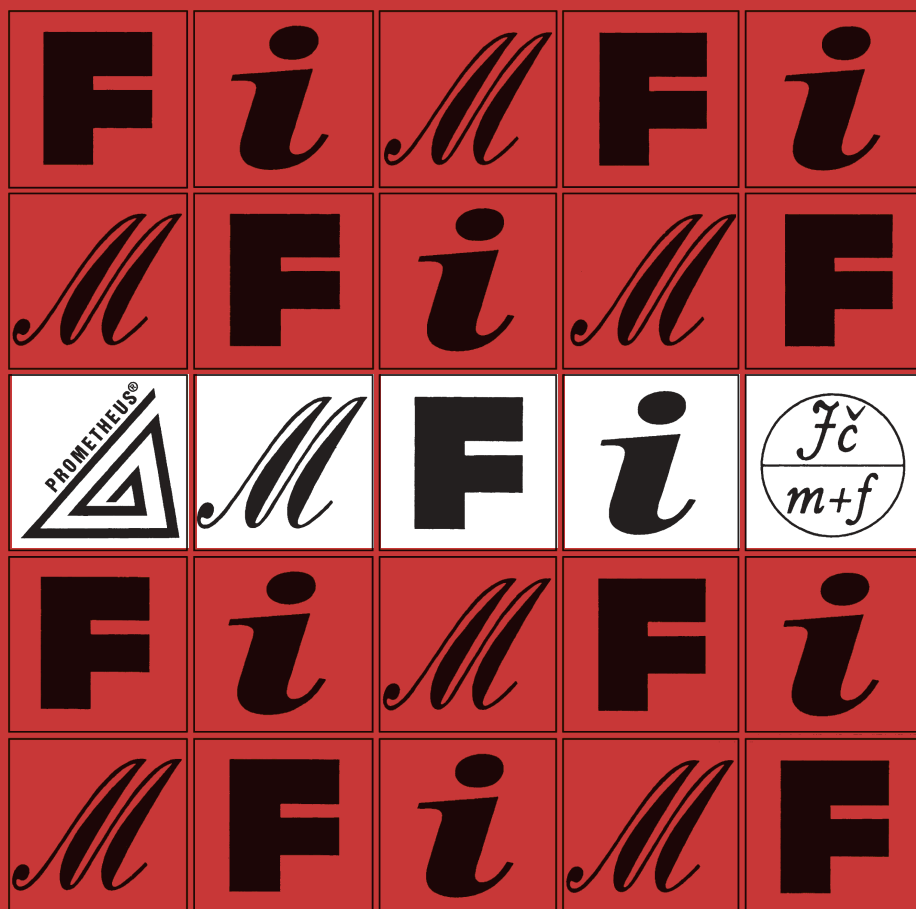


MATEMATIKA 3 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXXIV (2025), číslo 3

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku
Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek
Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška, Karel Kolář, Michaela Křížová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil, Dana Mandíková, Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel Töpfer, Jaroslav Zhouf

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>J. Polák:</i> Stereometrická analogie úlohy o čtyřech tečných kružnicích v trojúhelníku	161
<i>J. Švrček, M. Chodorová:</i> Osy úhlů v trojúhelníku	167
<i>P. Štein, S. Lukáč:</i> Využití dynamické geometrie vo výučbe obsahov rovinných útvarov	175
<i>K. Pastor:</i> Pásové uzavřené procházky jezdce po šachovnici	184
Zajímavé matematické úlohy	193

FYZIKA

<i>O. Lepil:</i> Je tepelné záření totéž co infračervené záření?	196
<i>P. Leischner:</i> O zobrazování rovinným zrcadlem	203
<i>S. Sojka, M. Mašláš:</i> Studium mionů pomocí mionového teleskopu	210

INFORMATIKA

<i>P. Töpfer:</i> Zjištění počtu možností	219
<i>E. Bartl:</i> Generativní umělá inteligence. Díl druhý: umělý neuron Warrena McCullocha a Waltera Pittse	225

ZPRÁVY

<i>J. Tkadlec:</i> 66. mezinárodní matematická olympiáda	232
<i>P. Calábek:</i> 13. ročník CPSJ	235
<i>K. Kolář, H. Němec:</i> Turnaj mladých fyziků 2025	237

Stereometrická analogie úlohy o čtyřech tečných kružnicích v trojúhelníku

JOSEF POLÁK

Fakulta aplikovaných věd ZČU v Plzni

V MFI roč. 33 (2024), č. 4 byla v rubrice Zajímavé matematické úlohy předložena čtenářům k řešení planimetrická úloha (pod číslem 298, zde úloha 1) o čtyřech tečných kružnicích v trojúhelníku. Neméně zajímavá je též stereometrická analogie této planimetrické úlohy pro trojúhelník. V tomto článku ukážeme, jak lze tuto stereometrickou úlohu pro čtyřtětň zformulovat a řešit užitím heuristické strategie analogie.

1. Heuristické strategie, princip strategie analogie

Heuristickými (objevitelskými) strategiemi se rozumí empirické (zkušební, pokusné, zkusmé) postupy a metodické návody pro řešení nestandardních matematických úloh (problémů). Založeny jsou na *heuristice*, jíž se rozumí umění (či nauka) jak objevovat (nalézat nové). Její název má původ v řeckém slově *heuréka* = „objevil jsem, našel jsem“ (tradičně připisovanému radostnému zvolání starořeckého učenice Archimeda). Počátky *klasické heuristiky* ve starověkém Řecku i celý její další historický vývoj jsou bezprostředně spojeny se vznikem a rozvojem matematiky i dalších věd. Za zakladatele *moderní heuristiky* je považován maďarský matematik (působící v USA) *George Pólya* (1887–1985). Svými četnými pracemi, zejména knižními publikacemi se zasloužil nejen o moderní pojetí a rozvoj heuristických metod, ale také o jejich popularizaci a rozšíření v akademických a vědeckých kruzích.

Jednou z nejvýznamnějších heuristických strategií podle Pólyi je *strategie analogie* (*strategie založená na analogii*), která spočívá v tom, že při formulaci a řešení náročné matematické úlohy se nejprve zformuluje a řeší vhodná jednodušší úloha a tím se získává inspirace i návod pro formulaci a řešení náročnější analogické úlohy. Velmi významným speciálním případem tohoto postupu je přechod od formulace a řešení planimetrické úlohy (pro geometrické objekty v rovině) k analogické stereometrické úloze (pro analogické objekty v prostoru).

2. Trojúhelník a čtyřstěn jako analogické matematické objekty

Dva matematické objekty jsou analogické, jestliže mají některé vlastnosti shodné nebo v jistém smyslu podobné. Typickými příklady jsou dvojice *analogických planimetrických a stereometrických útvarů*. V našem článku půjde o dvojice *trojúhelník a čtyřstěn*, jejichž četné vlastnosti jsou podobné (analogické). Trojúhelník je mnohoúhelník s nejmenším počtem vrcholů i stran. Čtyřstěn je mnohostěn s nejmenším počtem vrcholů i stěn. Z mnoha analogických vět pro trojúhelníky a čtyřstěny využijeme v našem článku zejména dvě následující existenční věty.

Věta 1 (o existenci kružnice vepsané trojúhelníku)

V každém trojúhelníku osy vnitřních úhlů se protínají právě v jednom bodu S_v a jeho vzdálenosti od všech tří přímek, v nichž leží strany trojúhelníku, jsou stejné; značíme je ρ . V trojúhelníku tak existuje právě jedna kružnice se středem S_v a poloměrem ρ , která se dotýká všech tří stran trojúhelníku; nazývá se *kružnice vepsaná trojúhelníku*.

Věta 2 (stereometrická analogie věty 1 o existenci kulové plochy vepsané čtyřstěnu) [2, 3]

V každém čtyřstěnu existuje právě jeden bod S_v , jehož vzdálenost od všech čtyř rovin stěn čtyřstěnu, jsou stejné; značíme je ρ . Ve čtyřstěnu tak existuje právě jedna kulová plocha se středem S_v a poloměrem ρ , která se dotýká všech čtyř stěn čtyřstěnu; nazývá se *kulová plocha vepsaná čtyřstěnu*.

3. Formulace výchozí planimetrické úlohy pro trojúhelník

Vyjdeme z takové formulace této úlohy, jež je vhodná pro zformulování a řešení analogické stereometrické úlohy pro čtyřstěn.

Úloha 1 (planimetrická úloha o čtyřech tečných kružnicích v trojúhelníku)

Trojúhelníku ABC je vepsána kružnice o poloměru ρ . Její tečny t_1 , t_2 , t_3 rovnoběžné po řadě se stranami trojúhelníku BC , AC , AB z něj vytínají

tři menší trojúhelníky AB_1C_1 , BA_2C_2 , CA_3B_3 , jejichž kružnice vepsané mají poloměry ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 . Dokažte, že platí

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \rho.$$

4. Formulace a řešení analogické úlohy pro čtyřstěn

Na základě analogických vlastností čtyřstěnu s vlastnostmi trojúhelníku a uvedených analogických vět 1 a 2 dospíváme k následující formulaci stereometrické úlohy 2 pro čtyřstěn, jež je analogická k planimetrické úloze 1 pro trojúhelník.

Úloha 2 (stereometrická úloha pro čtyřstěn analogická k planimetrické úloze 1 pro trojúhelník)

Čtyřstěnu $ABCD$ je vepsaná kulová plocha o poloměru ρ . Její tečné roviny τ_1 , τ_2 , τ_3 , τ_4 rovnoběžné po řadě s rovinami stěn čtyřstěnu BCD , ACD , ABD , ABC z něj vytínají 4 menší čtyřstěny $AB_1C_1D_1$, $BA_2C_2D_2$, $CA_3B_3D_3$, $DA_4B_4C_4$, jejichž kulové plochy vepsané mají poloměry ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , ρ_4 . Dokažte, že platí

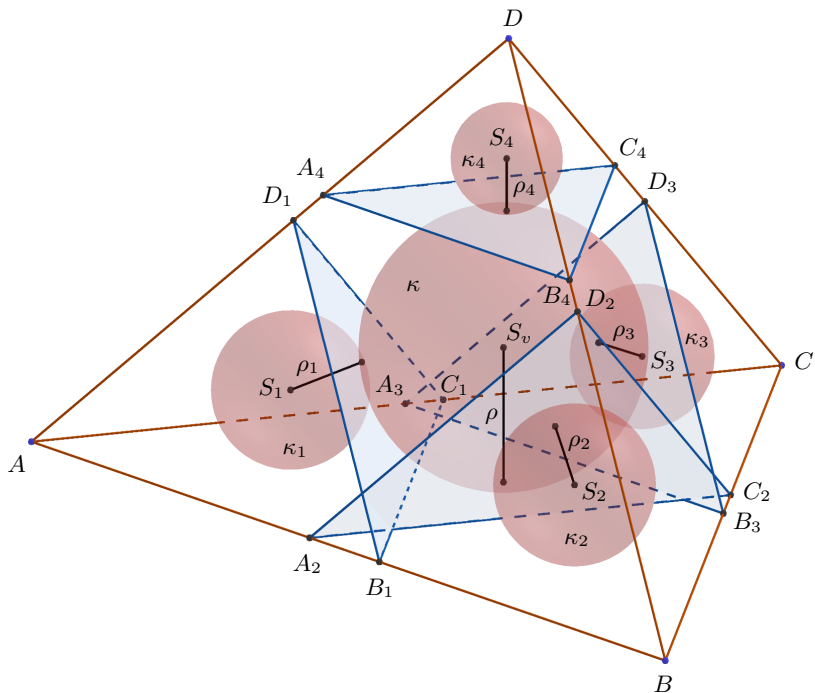
$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = 2\rho.$$

Řešení úlohy 2. Použijeme v něm tato označení (obr. 1): Pro tělesové výšky čtyřstěnu $ABCD$ vedené po řadě jeho vrcholy A , B , C , D kolmo k protilehlým stěnám označíme jejich délky v_a , v_b , v_c , v_d . Kulovou plochu o poloměru ρ vepsanou tomuto čtyřstěnu označíme κ a její střed S_ρ . Pro čtyři menší čtyřstěny $AB_1C_1D_1$, $BA_2C_2D_2$, $CA_3B_3D_3$, $DA_4B_4C_4$ tělesové výšky vedené po řadě vrcholy A , B , C , D kolmo k protilehlým stěnám označíme jejich délky v_1 , v_2 , v_3 , v_4 . Kulové plochy o poloměrech ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , ρ_4 vepsané těmto čtyřstěnům označíme po řadě κ_1 , κ_2 , κ_3 , κ_4 a jejich středy S_1 , S_2 , S_3 , S_4 .

Z vlastností kulové plochy κ vepsané čtyřstěnu $ABCD$ (viz věta 2) plyne, že vzdálenosti tečných rovin τ_1 , τ_2 , τ_3 , τ_4 od protilehlých stěn čtyřstěnu jsou rovny 2ρ . Pro velikosti výšek v_a , v_b , v_c , v_d a v_1 , v_2 , v_3 , v_4 proto platí

$$v_1 = v_a - 2\rho, \quad v_2 = v_b - 2\rho, \quad v_3 = v_c - 2\rho, \quad v_4 = v_d - 2\rho.$$

Čtyřstěny $AB_1C_1D_1$, $BA_2C_2D_2$, $CA_3B_3D_3$, $DA_4B_4C_4$ jsou stejnohlé, a tedy podobné útvaru s čtyřstěnem $ABCD$ ve stejnohlelostech (podobnostech) se středy A , B , C , D a koeficienty podobnosti (kladnými koeficienty



Obr. 1

stejnolehlosti) danými vztahy

$$k_1 = \frac{v_1}{v_a} = 1 - \frac{2\rho}{v_a}, \quad k_2 = \frac{v_2}{v_b} = 1 - \frac{2\rho}{v_b},$$

$$k_3 = \frac{v_3}{v_c} = 1 - \frac{2\rho}{v_c}, \quad k_4 = \frac{v_4}{v_d} = 1 - \frac{2\rho}{v_d}.$$

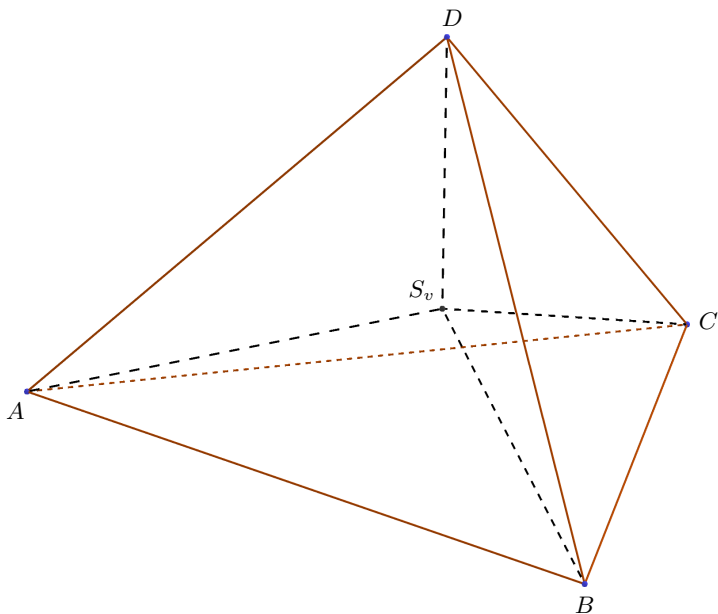
Speciálně pro $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ a ρ platí

$$\rho_1 = k_1\rho, \quad \rho_2 = k_2\rho, \quad \rho_3 = k_3\rho, \quad \rho_4 = k_4\rho.$$

Sečtením těchto tří rovností dostáváme

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = (k_1 + k_2 + k_3 + k_4)\rho. \quad (1)$$

Součet koeficientů podobnosti $k_1 + k_2 + k_3 + k_4$ v této rovnosti lze určit tak, že všechny koeficienty se upraví na jednotný tvar vyjádřený pomocí obsahů stěn čtyřstěnu $ABCD$.



Obr. 2

Podrobně tuto úpravu odvodíme pro koeficient

$$k_1 = 1 - \frac{2\rho}{v_a}.$$

Vyjdeme z rovnosti dvou vyjádření objemu V čtyřstěnu $ABCD$:

1. $V = \frac{1}{3}S_{BCD}v_a$,
2. čtyřstěn $ABCD$ rozdělíme na čtyři čtyřstěny $BCDS_v$, $CDAS_v$, $ABDS_v$, $ABCS_v$, jež mají stejnou výšku ρ (obr. 2). Objem čtyřstěnu $ABCD$ je roven součtu objemů těchto čtyř čtyřstěnů:

$$V = \frac{1}{3}S_{BCD}\rho + \frac{1}{3}S_{CDA}\rho + \frac{1}{3}S_{ABD}\rho + \frac{1}{3}S_{ABC}\rho = \frac{1}{3}S\rho,$$

kde $S = S_{BCD} + S_{CDA} + S_{ABD} + S_{ABC}$ je povrch čtyřstěnu $ABCD$.

Z rovnosti

$$\frac{1}{3}S_{BCD}v_a = \frac{1}{3}S\rho$$

plyne

$$\frac{\rho}{v_a} = \frac{S_{BCD}}{S}$$

a odtud po dosazení do rovnosti $k_1 = 1 - \frac{2\rho}{v_a}$ dostáváme

$$k_1 = 1 - \frac{2S_{BCD}}{S}. \quad (2)$$

Obdobná vyjádření koeficientů k_2, k_3, k_4 lze získat tímž postupem (pro $\rho/v_b, \rho/v_c, \rho/v_d$), resp. pouhou cyklickou záměnou z rovnosti (2):

$$k_2 = 1 - \frac{2S_{CDA}}{S}, \quad (3)$$

$$k_3 = 1 - \frac{2S_{ABD}}{S}, \quad (4)$$

$$k_4 = 1 - \frac{2S_{ABC}}{S}. \quad (5)$$

Sečtením rovností (2), (3), (4), (5) dostáváme po jednoduché úpravě

$$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 2$$

a odtud po dosazení do rovnosti (1) plyne dokazovaná rovnost

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 = 2\rho.$$

Literatura

- [1] *Gotman, E. G., Skopec, Z. A.*: Rešenije geometričeskich zadač analitičeskim metodom. Prosveščeniye, Moskva, 1979.
- [2] *Horák, S.*: Mnohostěny. Edice Škola mladých matematiků, svazek 27. Mladá fronta, Praha, 1970.
- [3] *John, J.*: Čtyřstěn v matematických soutěžích. Diplomová práce. (Vedoucí: J. Švrček.) Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc, 2021.
- [4] *Polák, J.*: Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. II. část Obecná didaktika matematiky. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2016.
- [5] *Polák, J.*: Analogie v matematice a jejich didaktické využití. Matematika–fyzika–informatika, roč. 27 (2018), č. 5, s. 321–333.

Osy úhlů v trojúhelníku

JAROSLAV ŠVRČEK – MARIE CHODOROVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Porovnáme-li naše učebnice pro výuku geometrie (planimetrie) na středních školách (speciálně pak gymnázií) s podobnými používanými učebnicemi ve většině evropských zemích, zjistíme, že v zahraničí je věnováno důležitým vlastnostem os vnitřních a vnějších úhlů v trojúhelníku mnohem více prostoru, viz např. [1, 2] a jinde.

Tento článek vznikl s cílem přiblížit našim čtenářům tři důležité, přitom méně akcentované vlastnosti os vnitřních a vnějších úhlů v libovolném trojúhelníku. Ty jsou doplněny vybranými aplikacemi.

Věta 1 (o ose vnitřního úhlu)

Osa vnitřního úhlu v trojúhelníku dělí jeho protilehlou stranu v poměru délek jí přilehlých stran.

Důkaz (užitím sinové věty) uvedeme pro osu vnitřního úhlu při vrcholu A trojúhelníku ABC .

Označme D průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu A v trojúhelníku ABC s jeho stranou BC . Dále nechť $\alpha = |\sphericalangle BAC|$ a $\varphi = |\sphericalangle ADB|$.

Užitím sinové věty v trojúhelníku ABD dostaneme

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \varphi}. \quad (1)$$

Podobně v trojúhelníku ACD platí

$$\frac{|CD|}{|AC|} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin(180^\circ - \varphi)} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \varphi}. \quad (2)$$

Porovnáním levých stran rovností (1) a (2) obdržíme

$$\frac{|BD|}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AC|},$$

neboli $|BD| : |CD| = |AB| : |AC|$, což jsme chtěli dokázat.

Analogicky lze postupovat i v případě obou zbývajících os vnitřních úhlů.

Jiný důkaz (užitím podobnosti trojúhelníků). Označme E takový bod na polopřímce BA , který leží za bodem A , pro nějž platí $|AE| = |AC|$ (obr. 1). Trojúhelník ACE je tedy rovnoramenný se základnou CE , tj. platí $|\sphericalangle ACE| = |\sphericalangle AEC|$. Odtud plyne

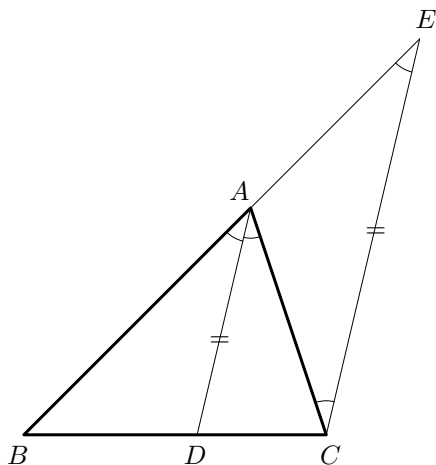
$$|\sphericalangle ACE| + |\sphericalangle AEC| = |\sphericalangle BAC| = \alpha,$$

a proto

$$\frac{\alpha}{2} = |\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle ACE| = |\sphericalangle AEC|.$$

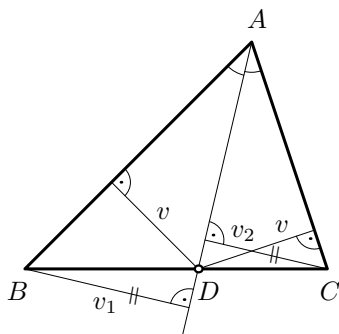
Přímky AD a EC jsou tedy rovnoběžné, a proto trojúhelníky BCE a BDA jsou (podle věty *uu*) podobné. Platí tedy

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|BA|}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AC|} \iff |BD| : |DC| = |AB| : |AC|.$$



Obr. 1

Jiný důkaz (užitím obsahů trojúhelníků, viz obr. 2). Označme S_{ABD} , resp. S_{ACD} , obsah trojúhelníku ABD , resp. ACD . Průsečík D osy vnitřního úhlu při vrcholu A má přitom stejnou vzdálenost od ramen AB a AC úhlu BAC , kterou označíme v . Tuto velikost v mají tudíž výšky z vrcholu D v trojúhelnících ABC a ACD ke stranám AB a AC . Označme v_1 , v_2 po řadě délky výšek z vrcholů B , C ke společné straně AD obou uvažovaných trojúhelníků a dále $c = |AB|$, $b = |AC|$.



Obr. 2

Pak platí (obr. 2)

$$\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\frac{1}{2}|AD| \cdot v_1}{\frac{1}{2}|AD| \cdot v_2} = \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}|AB| \cdot v}{\frac{1}{2}|AC| \cdot v} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{c}{b}.$$

Odtud již přímo obdržíme

$$|BD| : |CD| = |AB| : |AC| = c : b,$$

což představuje stejný výsledek jako v předešlých dvou důkazech.

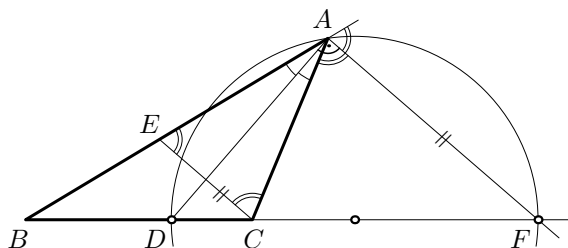
Uvažujme nyní osu vnějšího úhlu u některého z vrcholů trojúhelníku ABC (např. u vrcholu A). Předpokládejme dále, že protilehlá strana BC není základnou rovnoramenného trojúhelníku ABC (v opačném případě by osa vnějšího úhlu u tohoto vrcholu byla rovnoběžná s touto stranou). V takovém případě průsečík D osy vnějšího úhlu při vrcholu A protíná buď polopřímku BC za bodem C (tj. $b < c$), nebo polopřímku CB za bodem B (tj. $b > c$).

Následující tvrzení vyslovíme pouze pro *první* z obou případů. Stejně tvrzení, které platí i ve druhém případě, ponecháváme pozornosti čtenářů.

Věta 2 (o ose vnějšího úhlu)

Nechť F je průsečík osy vnějšího úhlu při vrcholu A v trojúhelníku ABC s polopřímku BC . Pak platí $|BF| : |CF| = |AB| : |AC| = c : b$.

Důkaz. Uvažujme vnitřní bod E strany AB trojúhelníku ABC , pro který platí $|AE| = |AC|$. Takový bod E existuje, neboť $c = |AB| > |AC| = b$ (vnitřní úhel při vrcholu C je zde totiž větší než vnitřní úhel při vrcholu B), viz obr. 3.



Obr. 3

Z obr. 3 vidíme, že trojúhelníky BFA a BCE jsou podle věty *uu* podobné, proto (využitím rovnosti $|AE| = |AC|$) platí

$$\frac{|BF|}{|CF|} = \frac{|AB|}{|AE|} = \frac{|AB|}{|AC|} \iff |BF| : |CF| = |AB| : |AC| = c : b,$$

což jsme chtěli dokázat.

Poznámka 1. Snadno lze dokázat, že osy vnitřního a vnějšího úhlu u libovolného vrcholu trojúhelníku ABC jsou navzájem kolmé. Středry K , L , M kružnic vně připsaných stranám trojúhelníku ABC leží (po dvou) na osách vnějších úhlů trojúhelníku ABC u jednotlivých jeho vrcholů, přičemž body A , B , C jsou paty výšek ostroúhlého trojúhelníku KLM .

Poznámka 2. Tvzení obou předešlých vět lze využít ke snadné konstrukci tzv. Apolloniovy kružnice v rovině (viz např. [4]), tj. množiny všech bodů A roviny, které mají od dvou bodů B , C ($B \neq C$) této roviny daný poměr vzdáleností. Např. pro poměr $c : b$, kde $c > b$, stačí uvnitř úsečky, resp. na polopřímce BC za bodem C , sestrojit body D , resp. F , pro něž platí

$$|BD| : |CD| = |BF| : |CF| = |AB| : |AC| = c : b.$$

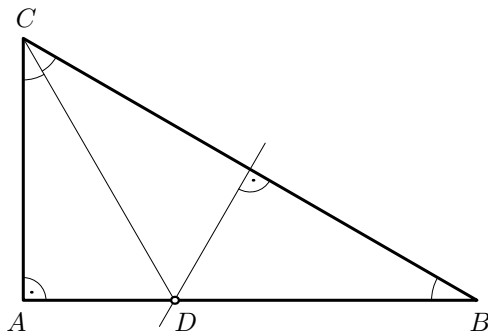
Tyto body jsou průsečíky po řadě osy vnitřního a vnějšího úhlu BAC s přímkou BC . Vzhledem k tomu, že obě osy úhlů jsou navzájem kolmé, leží všechny hledané body A na Thaletově kružnici sestrojené nad průměrem DF (včetně obou krajních bodů průměru DF), viz obr. 3.

V další části uvedeme některé vybrané aplikace výše uvedených tvrzení.

Příklad 1

Je dán pravoúhlý trojúhelník s vnitřními úhly $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$. Dokažte, že osa jeho přepony protíná delší odvěsnu v bodě, který ji dělí v poměru $1 : 2$.

Řešení. Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou BC , jehož vnitřní úhly při vrcholech B a C mají po řadě velikosti 30° a 60° . Označme D průsečík osy jeho přepony BC s (delší) odvěsnou AB (obr. 4). Vzhledem k tomu, že bod D leží na ose strany (úsečky) BC , je BCD rovnoramenný trojúhelník se základnou BC , v němž $|\sphericalangle BCD| = 30^\circ$, a CD je tedy osou úhlu při vrcholu C v tomto trojúhelníku. Podle věty 1 potom ale platí $|AD| : |BD| = |AC| : |BC| = 1 : 2$, což jsme chtěli dokázat.



Obr. 4

V čísle 1 minulého (33.) ročníku časopisu MFI byla zveřejněna tři odlišná řešení následující zajímavé matematické úlohy. Zde uvádíme čtvrté řešení této úlohy, které se opírá o aplikaci výše uvedené věty 1.

Příklad 2 (MFI 32/3, úloha č. 287, J. Švrček)

Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou BC . Osa vnitřního úhlu při vrcholu B protíná výšku AR a odvěsnu AC daného trojúhelníku po řadě v bodech P a Q . Dokažte, že $|CQ| = 2|PR|$.

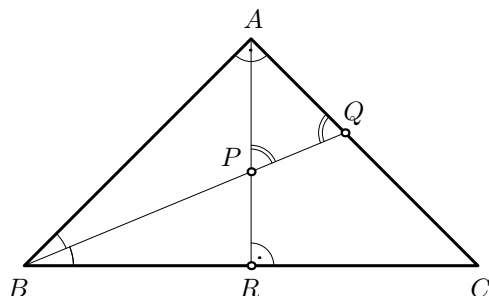
Řešení. V pravoúhlém trojúhelníku ABQ s přeponou BQ (obr. 5) platí

$$|\sphericalangle AQB| = 90^\circ - 22,5^\circ = 67,5^\circ = |\sphericalangle AQP|.$$

Protože přímka AR je současně osou pravého úhlu CAB , platí pro velikost vnějšího úhlu APQ při vrcholu P v trojúhelníku ABP

$$|\sphericalangle APQ| = |\sphericalangle ABP| + |\sphericalangle BAP| = 22,5^\circ + 45^\circ = 67,5^\circ = |\sphericalangle AQP|.$$

Tento úhel je ale současně vnitřním úhlem v rovnoramenném trojúhelníku APQ se shodnými rameny AP a AQ .



Obr. 5

V pravoúhlém trojúhelníku ABR , kde R je střed přepony BC v pravoúhlém rovnoramenném trojúhelníku ABC , pdle věty 1 platí

$$\frac{|PR|}{|AP|} = \frac{|BR|}{|AB|}. \quad (3)$$

Podobně v daném pravoúhlém trojúhelníku ABC (s osou BQ vnitřního úhlu při vrcholu B) platí

$$\frac{|AQ|}{|CQ|} = \frac{|AB|}{|BC|}. \quad (4)$$

S ohledem na rovnost $|AP| = |AQ|$ platí pro součin vztahů (3) a (4)

$$\frac{|PR|}{|CQ|} = \frac{|PR|}{|AP|} \cdot \frac{|AQ|}{|CQ|} = \frac{|BR|}{|AB|} \cdot \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BR|}{|BC|} = \frac{1}{2}.$$

Odtud již bezprostředně plyne $|CQ| = 2|PR|$, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 3 (MFI 33/3, úloha č. 295, J. Kalinowski)

Nechť D je bod strany BC rovnostranného trojúhelníku ABC , kde $|BD| = 2|CD|$. Označme E patu kolmice z vrcholu B k přímkce AD a F ($F \neq A$) průsečík přímky AD s kružnicí opsanou uvažovanému trojúhelníku. Dokažte, že trojúhelníky BDE a CDF mají stejné obsahy.

Řešení této úlohy můžete nalézt v MFI 34, č. 1, v rubrice zajímavé matematické úlohy.

Věta 3

Přímka procházející vrcholem C trojúhelníku ABC protíná kružnici jemu opsanou v bodě S , který je středem jejího oblouku¹⁾ AB neobsahující-

¹⁾Tento bod řešitelé MO často označují jako „Švrčkův bod“.

cím vrchol A , právě když je tato přímka osou vnitřního úhlu při vrcholu C v tomto trojúhelníku.

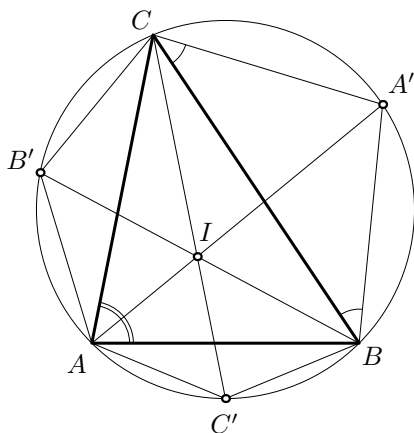
Důkaz.

a) Necht' S je průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C daného trojúhelníku ABC s kružnicí jemu opsanou. Protože platí $|\sphericalangle ACS| = |\sphericalangle BCS|$, jsou tětivy AS a BS této kružnice shodné, a tudíž S je středem jejího oblouku neobsahujícího vrchol C .

b) Snadné zdůvodnění obrácené věty přenecháváme laskavému čtenáři.

Příklad 4

Stranám trojúhelníku ABC jsou vně připsány rovnoramenné trojúhelníky ABC' , BCA' , CAB' se základnami AB , BC , CA tak, že při obvyklém označení velikostí vnitřních úhlů daného trojúhelníku je $|\sphericalangle BCA'| = \frac{1}{2}\alpha$, $|\sphericalangle CAB'| = \frac{1}{2}\beta$, a $|\sphericalangle ABC'| = \frac{1}{2}\gamma$. Dokažte, že přímky AA' , BB' , CC' se protínají v jednom bodě.



Obr. 6

Řešení. V rovnoramenném trojúhelníku BCA' (obr. 5) je podle zadání velikost vnitřního úhlu při jeho hlavním vrcholu A' rovna

$$|\sphericalangle BA'C| = 180^\circ - 2 \cdot |\sphericalangle BCA'| = 180^\circ - 2 \cdot \frac{1}{2}\alpha = 180^\circ - \alpha,$$

což znamená, že čtyřúhelník $ABA'C$ je tětivový. Všechny čtyři jeho vrcholy tedy leží na *kružnici opsané* danému trojúhelníku ABC . Analogicky

lze ukázat, že na této kružnici leží také hlavní vrcholy B' a C' rovnoramenných trojúhelníků CAB' a ABC' . Body A' , B' , C' jsou přitom po řadě středy kružnicových oblouků BC , CA , AB , na nichž *neleží* třetí vrchol uvažovaného trojúhelníku ABC . Přímký AA' , BB' , CC' jsou (podle věty 3) osami vnitřních úhlů po řadě při vrcholech A , B , C v trojúhelníku ABC . Ty se však protínají v jednom společném bodě I , kterým je střed kružnice vepsané daného trojúhelníku ABC . Tím je důkaz ukončen.

Příklad 5

V rovině je dán ostroúhlý trojúhelník KLM . Sestrojte trojúhelník ABC , jehož středy vně připsaných kružnic jsou totožné s vrcholy trojúhelníku KLM .

[*Návod.* Z poznámky 1 za větou 2 plyne, že vrcholy hledaného trojúhelníku ABC tvoří paty výšek daného ostroúhlého trojúhelníku KLM . Trojúhelník ABC je tzv. *ortický* trojúhelník daného trojúhelníku KLM .]

Příklad 6

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Označme M střed strany AB a K průsečík osy úsečky DM s úhlopříčkou AC . Dokažte, že $AK \perp DK$.

Řešení této úlohy užitím věty 3 lze dohledat v článku [3] – jiné řešení příkladu 2 na str. 17.

Závěrem uvádíme pro čtenáře ještě jednu úlohu na použití Apolloniovy kružnice, viz poznámka 2 za větou 2. Ta se objevila mezi tzv. přípravnými úlohami v kategorii A již v 19. ročníku MO. Její řešení lze najít v příslušné ročence MO nebo na stránkách <http://www.matemickaolympiada.cz>.

Příklad 7

V rovině jsou dány dvě neshodné úsečky AB a CD . Sestrojte všechny body X této roviny, pro něž jsou trojúhelníky ABX a CDX podobné.

Literatura

- [1] Cateni, L., Fortini, R., Bernardi, C.: Nuova geometria 1 e 2 (per il liceo classico e per il liceo artistico), 6. vydání, Firenze, 1995.
- [2] Guzicki, W.: Geometria i trygonometria (rozszerzony program matematyki w liceum). Wydawnictwo szkolne Omega, Kraków, 2021.
- [3] Juklová, L., Švrček, J.: Pět pěkných příkladů pro pravidelný pětiúhelník. Matematika–fyzika–informatika, roč. 31 (2022), č. 1, s. 5–20.
- [4] Švrček, J., Vanžura, J.: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha, 1988.

Využitie dynamickej geometrie vo výučbe obsahov rovinných útvarov

PATRIK ŠTEIN – STANISLAV LUKÁČ

Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice, SLOVENSKO

Využitie digitálnych technológií v rôznych oblastiach je v dnešnom svete už snáď samozrejmosťou. Účinky digitálnych technológií na zvýšenie efektívnosti vyučovania môžu byť rozmanité, počnúc od zvýšenia záujmu žiakov o učenie sa až po zlepšenie učebných výsledkov žiakov. Systémy dynamickej geometrie ponúkajú experimentovanie s geometrickými objektmi a poskytujú žiakom príležitosť preskúmať rôzne konkrétne útvary a rôzne geometrické situácie. Možnostiam využitia systémov dynamickej geometrie vo vyučovaní matematiky sa venovali viacerí autori [2, 5, 6]. V článku je stručne opísaný obsah interaktívnej knihy vytvorenej v prostredí programu GeoGebra na podporu výučby obsahov geometrických útvarov na základnej škole a načrtnutý spôsob jej využitia vo výučbe. Pri tvorbe knihy boli aplety na odvodenie vzorcov na výpočet obsahu útvarov doplnené o ďalšie úlohy a testové otázky s cieľom zlepšiť porozumenie odvodzovaných vzorcov. V poslednej časti článku sú opísané skúsenosti z využitia pripravených učebných materiálov vo vyučovaní matematiky, ktorej súčasťou je aj hodnotiaci pohľad na učenie sa žiakov a dosiahnuté učebné výsledky.

Vypracovanie a využívanie interaktívnych učebných materiálov

Pokročilé nástroje programov dynamickej geometrie umožňujú ušetriť čas pri riešení problémov, ktorý by sa nemal využiť na zvýšenie počtu riešených problémov, ale na dôkladnejšiu analýzu procesu ich riešenia, zovšeobecňovanie objavených vzťahov a organizovanie diskusie medzi žiakmi podnecujúcej zamyslieť sa nad osvojovanými pojmami a vzťahmi [4]. Pri výbere digitálneho prostredia na tvorbu interaktívnych učebných aktivít sme sa zamerali na program GeoGebra, ktorý je najrozšírenejším voľne dostupným softvérom pre podporu vyučovania matematiky a je medzi učiteľmi značne obľúbený. Na zvýšenie motivácie učiteľov pre začlenenie systémov dynamickej geometrie do výučby matematiky môže mať priaz-

nivý vplyv aj skutočnosť, že na portáli programu GeoGebra je dostupných množstvo rozmanitých učebných materiálov od jednoduchších apletov až po rozsiahle knihy obsahujúce viacero kapitol. V súlade s podmienkami a technickým vybavením učební môžu byť digitálne učebné materiály využité pre samostatné žiacke skúmanie alebo pre interaktívne demonštrácie vedené učiteľom využiteľné vo všetkých fázach vyučovacieho procesu.

Opisovaná kniha na výučbu obsahu rovinných útvarov obsahuje kapitoly venované obsahom jednotlivých typov rovinných útvarov a záverečnú časť zameranú na aplikovanie osvojených poznatkov pri riešení úloh.

Rozvíjanie predstavy o obsahu geometrických útvarov

S obsahmi geometrických útvarov sa žiaci stretávajú už v treťom ročníku základnej školy, kedy nazerajú na obsah ako na isté „vnútro“ útvaru, ktoré má nejakú veľkosť, ale v tomto ročníku sa ešte neoperuje s číselnými hodnotami. Neskôr sa s obsahom štvorca a obdĺžnika žiaci stretnú pri riešení úloh vo štvrtom ročníku, kedy sú útvary umiestnené vo štvorčekovej sieti a žiaci majú porovnávať veľkosti útvarov. Väčšia pozornosť je venovaná výpočtu obvodu štvorcov a obdĺžnikov. Prvé predstavy o obsahu útvarov vytvárajú propedeutiku pre neskoršie budovanie pojmu obsah útvaru.

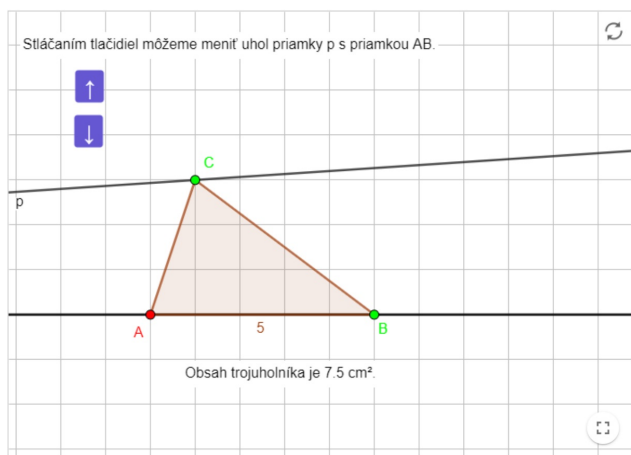
Výpočet obsahov základných typov rovinných útvarov je podľa inovovaného ŠVP pre 2. stupeň ZŠ (ekvivalent RVP v ČR) rozdelený do viacerých ročníkov. V piatom a šiestom ročníku sa realizuje postupný prechod od obsahov štvorcov a obdĺžnikov s celočíselnými rozmermi zakreslených v štvorčekovej sieti k výpočtu obsahov týchto útvarov s rozmermi vyjadrenými desatinnými číslami. Žiak sa naučí využiť výpočet obsahu štvorcov a obdĺžnikov pri výpočte obsahu obrazcov v štvorčekovej sieti zložených zo štvorcov a obdĺžnikov sčítaním ich obsahov. Rozvíja sa predstava o plošnej miere, ako počtu štvorcov s danými rozmermi obsiahnutých v útware, ktorá slúži ako príprava pre prácu s rôznymi jednotkami obsahu. V ôsmom ročníku sa majú žiaci naučiť vypočítať obsah rovnobežníka, trojuholníka a lichobežníka. Podľa obsahového štandardu by mali byť žiaci privedení k objaveniu postupu výpočtu obsahov týchto útvarov pomocou skôr osvojených vzťahov na výpočet obsahov jednoduchších útvarov.

Výučba obsahu trojuholníka

V článku je stručne predstavené spracovanie interaktívneho učebného materiálu pre výučbu obsahu trojuholníka a naznačené jeho využitie vo vyučovacom procese. Odpovedajúca časť knihy je dostupná prostredníctvom URL (<https://www.geogebra.org/m/dsugq7bu#material/zmgv4hxt>). Pri

plánovaní postupu výučby sme sa snažili skombinovať rôzne učebné aktivity za účelom dosiahnutia porozumenia vzorca na výpočet obsahu trojuholníka a rozvíjania schopností žiakov aplikovať ho pri riešení úloh. Overenie interaktívneho učebného materiálu bolo realizované na základnej škole v Košiciach v ôsmom ročníku v triede so 16 žiakmi. Prvé dve hodiny boli venované práci s interaktívnym učebným materiálom v počítačovej učebni. Po troch týždňoch, z ktorých tvorili väčšinu vianočné prázdniny, bola zaradená tretia hodina zameraná na prácu s pracovným listom.

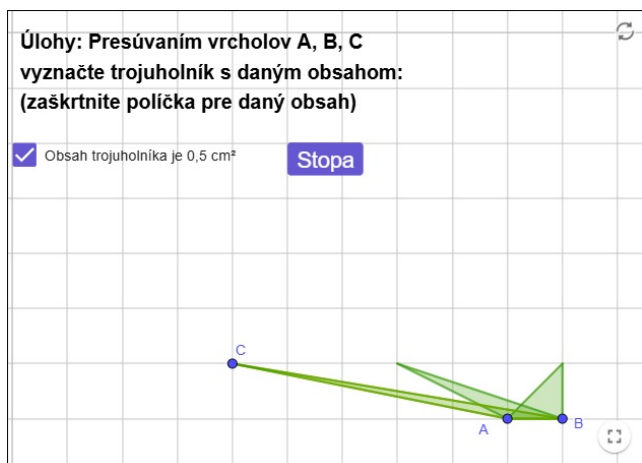
Na úvod výučby odporúčame zaradiť interaktívnu aktivitu z vytvorenej knihy na skúmanie obsahu všeobecného trojuholníka. V aplete je zostrojený trojuholník ABC a žiaci majú posúvaním vrcholov B , C skúmať, od čoho závisí obsah trojuholníka ABC . Pri posúvaní vrcholu B je pozorovateľná zmena obsahu trojuholníka. Vrchol C by žiaci najprv posúvali po priamke rôznobežnej s priamkou AB . Po zatlačení tlačidla so šípku môžu žiaci meniť odchýlku priamky p od priamky AB . Pri experimentovaní s apletom by žiaci mali pozorovať, že pri zmenšovaní odchýlky priamky p od priamky AB sa posúvaním bodu C po priamke p mení obsah trojuholníka ABC postupne o stále menšie hodnoty. V hraničnom prípade, keď priamka p bude rovnobežná s priamkou AB , ostáva obsah trojuholníka ABC konštantný.



Obr. 1 Skúmanie obsahu rôznych trojuholníkov

V nasledujúcej aktivite by mali žiaci nadviazať na svoje skúsenosti získané pri práci s opisovaným apletom. V štvorčekovej sieti by mali žiaci

zakresliť vo vyčlenenej oblasti čo najviac rôznych trojuholníkov s daným obsahom (7 cm^2 a $0,5 \text{ cm}^2$). Táto úloha bola uvedená ako vhodný námet na samostatné žiacke skúmanie v publikácii [1]. Po zvolení konkrétneho obsahu trojuholníka sa druhá možnosť kvôli kontrole riešenia skryje. Žiaci by presúvaním vrcholov načrtnutého trojuholníka mali vytvoriť trojuholník so zvoleným obsahom. Po úspešnom vytvorení prvého trojuholníka sa trojuholník prefarbí na zeleno. Učiteľ by mal žiakov pri riešení úlohy vyzvať, aby našli viacero riešení. Po každom zostrojení trojuholníka s daným obsahom by mali žiaci zatlačiť tlačidlo Stopa. Od žiakov sa očakáva, že využijú nové skúsenosti a rôzne riešenia získajú posúvaním vrcholu trojuholníka po priamke rovnobežnej s protíahlou stranou trojuholníka. Na obr. 2 sú znázornené tri rôzne trojuholníky s rovnakým obsahom.

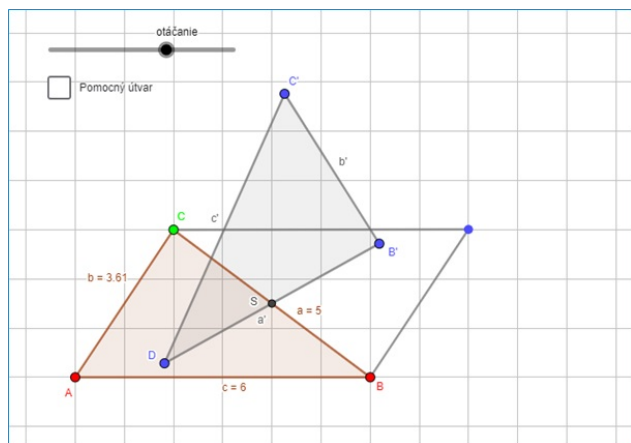


Obr. 2 Vyznačenie trojuholníkov s rovnakým obsahom

Po týchto dvoch aktivitách by učiteľ mal vyvolať diskusiu medzi žiakmi. Najprv by mohli žiaci prezentovať svoje riešenia z predchádzajúcej aktivity. Z prezentovaných riešení by učiteľ mohol zistiť, či žiaci porozumeli, že ostrouhlé aj tupouhlé trojuholníky s rovnakou dĺžkou strany AB a s rovnakou výškou na túto stranu majú rovnaký obsah.

Po zhrnutí získaných výsledkov by nasledovala aktivita na odvodenie vzorca na výpočet obsahu trojuholníka. Pri odvodzovaní vzorca by žiaci využili aplet zobrazený na obr. 3. Pri otáčaní trojuholníka ABC okolo stredu strany BC by žiaci mohli pozorovať, ako sa doplní trojuholník

ABC na rovnobežník s dvojnásobným obsahom. Vzorcú na obsah rovnobežníka je venovaná predchádzajúca časť interaktívnej knihy. Aplet slúži na upevnenie a ujasnenie predstavy o odvodení vzorca na výpočet obsahu trojuholníka.



Obr. 3 Dynamická vizualizácia k odvodeniu vzorca na výpočet obsahu trojuholníka

Pri overení interaktívneho učebného materiálu žiaci pracovali v počítačovej učebni, pričom každý žiak pracoval samostatne. Interaktívny učebný materiál bol spustený vo forme GeoGebra Classroom, kde bolo umožnené zaznamenávať postup práce žiakov s učebným materiálom. Pre neustálu kontrolu mal učiteľ možnosť sledovať riešenia jednotlivých žiakov na svojom počítači. Žiaci vypracovávali úlohy postupne, aby bola zachovaná nadväznosť pri nadobúdaní nových vedomostí. Využitím učiteľského prístupu v GeoGebra Classroom bolo možné kontrolovať a regulovať prácu žiakov: pozastaviť ich prácu v prípade vysvetlenia otázok alebo viesť diskusiu o spôsobe riešenia úlohy, ukázať alebo vysvetliť situácie súvisiace s riešením úloh pomocou premietania obrazovky učiteľského počítača na stenu učebne.

Na vyhodnotenie a ďalšie rozvíjanie osvojených vedomostí a zručností slúžila tretia vyučovacia hodina, ktorá prebiehala v tradičnej učebni. Obsahom tejto vyučovacej hodiny bolo riešenie úloh na výpočet obsahov útvarov a na zostrojovanie útvarov s daným obsahom v štvorčekovej sieti. Žiaci samostatne riešili úlohy v pripravenom pracovnom liste.

Analýza žiackych riešení, diskusia

Šesť úloh zadaných formou pracovného listu samostatne riešilo 16 žiakov. Riešenie úloh od žiakov vyžadovalo preukázať nadobudnuté vedomosti a zručnosti získané skúmaním náčrtov útvarov na papieri a prácou s interaktívnym učebným materiálom. Od žiakov sa očakávalo využívanie transformácií jednoduchších útvarov pri vytváraní útvarov s požadovanými vlastnosťami. V posledných dvoch úlohách mali žiaci odrezávaním niektorých častí útvaru alebo poskladaním jednoduchších typov útvarov vytvoriť päťuholník (šesťuholník) s požadovaným obsahom.

Z pracovného listu sme vybrali na ukážku dve úlohy s poradovými číslami 2, 5.

Úloha 2

V štvorčekovej sieti je zostrojený obdĺžnik s obsahom 12 štvorčekov. Pod tento obdĺžnik vytvor kosodĺžnik a lichobežník tiež s obsahom 12 štvorčekov. V každom útware vyznač potrebné údaje na výpočet obsahu.

Úloha 5

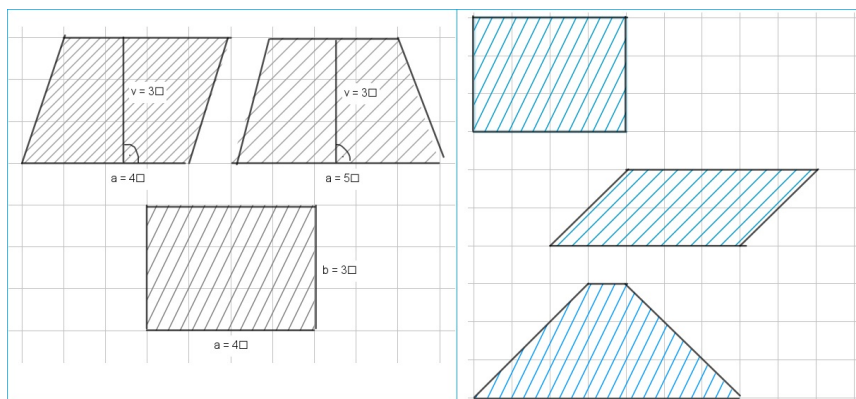
Dvoma „rezmi“ vytvor z daného obdĺžnika $ABCD$ päťuholník, ktorý má obsah 21 štvorčekov.

V nasledujúcej tabuľke je prehľadne zobrazené hodnotenie žiackych riešení vybraných úloh. V úlohe 2 boli za čiastočne správne považované žiacke riešenia obsahujúce správne načrtnutý jeden z požadovaných útvarov. Vzhľadom na skutočnosť, že úloha 5 nebola poslednou úlohou v pracovnom liste, hodnotenie Neriešená znamená, že traja žiaci úlohu nevedeli vyriešiť. Dôvodom nízkej úspešnosti žiakov pri riešení úlohy 5 bolo vyžadovanie viacerých vlastností hľadaného útvaru, pričom niektorým žiakom sa nepodarilo dodržať všetky podmienky zo zadania úlohy.

Úloha 2		
Správne	Čiastočne správne	Neprávne
9	6	1
Úloha 5		
Správne	Neprávne	Neriešená
5	8	3

Tab. 1 Úspešnosť žiakov pri riešení úloh 2 a 5

V úlohe 2 bolo možné pozorovať dva rôzne postupy riešenia. Prvý (najčastejší) postup vychádzal z metódy využívanej v interaktívnom učebnom materiáli založenej na transformácii útvarov. Títo žiaci sa pri riešení úlohy 2 snažili transformovať daný obdĺžnik na zložitejší útvar s rovnakým obsahom. Náčrt kosodĺžnika a lichobežníka vychádzajúci z daného obdĺžnika spočíval v „odrezaní“ a presúvaní prípadne preklopení pravouhlého trojuholníka (pozri obrázok 4 vľavo). Pre druhý postup bolo charakteristické skúšanie viacerých možností spojené s manuálnym počítaním obsahu (štvorček po štvorčeku). Niektorí žiaci posúvali v štvorčekovej sieti stranu rovnobežníka (lichobežníka) a snažili sa ho prispôbiť tak, aby mal požadovaný obsah. Chyby v žiackych riešeniach najčastejšie pramenili z nesprávne určených údajov potrebných pre výpočet obsahu útvarov alebo pomýlení sa pri výpočtoch obsahu. Na ukážku sme vybrali čiastočne správne žiacke riešenie (pozri obrázok 4 vpravo). Obrázky vyjadrujú žiacke riešenia, ale pre väčšiu prehľadnosť boli pretvorené v digitálnom prostredí.

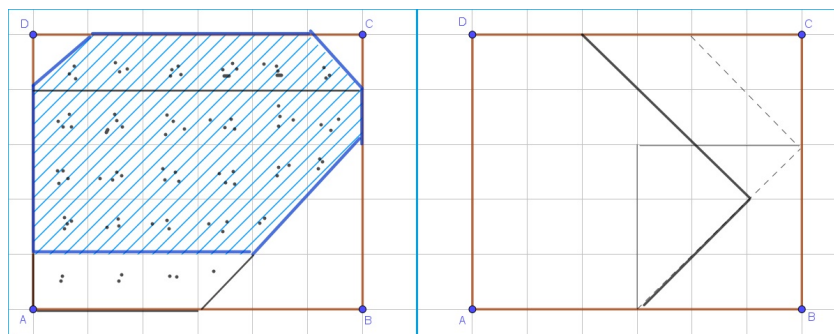


Obr. 4 Ukážky žiackych riešení úlohy 2: správne riešenie vľavo, čiastočne správne riešenie vpravo

Úloha 5 vychádzala z postupu riešenia úloh uvedených v závere interaktívneho učebného materiálu, v ktorých mali žiaci manipulovať s rovinnými geometrickými útvarmi a rozdeľovať ich (oddeliť menší geometrický útvar) tak, aby boli splnené dané podmienky. V úlohe 5 bolo požadované splniť tri podmienky: využiť dva priame rezy, vytvoriť päťuholník a dosiahnuť, aby mal získaný útvar daný obsah. Očakávaný postup pri riešení tejto úlohy vychádza z úvahy o súčte obsahov dvoch útvarov, ktoré je potrebné

oddeliť od daného obdĺžnika. Podmienka vykonania dvoch rezov využitím priamok určených vrcholmi v mrežových bodoch zvyšuje náročnosť úlohy. Podmienka, ktorá hovorí o počte strán výsledného útvaru, mala žiakov viesť k uvažovaniu, ako robiť tieto rezy a ako sa pritom mení počet strán získaného geometrického útvaru. Nižšia úspešnosť žiakov pri riešení úlohy 5 súvisí aj s ťažkosťami žiakov pri dodržaní všetkých troch podmienok. Príčinou opisovaného javu môže byť aj skutočnosť, že vyučovanie geometrie je viac zamerané na rozvoj statických reprodukčných predstáv a zanedbáva sa predstava pohybu [3]. Najväčšou prekážkou pri riešení úlohy bolo najšť dva rezy, ktoré umožnia z obdĺžnika vytvoriť päťuholník. Niektorí žiaci síce dodržali podmienku o obsahu útvaru, ale vytvorili šesťuholník alebo využili viac ako dva rezy.

Pri riešení úlohy 5 žiaci využívali najčastejšie dva postupy. V prvom postupe sa snažili najprv oddeľovať útvary a až potom počítali obsah získaného útvaru. Pri tomto postupe sa nemuselo podariť žiakovi vytvoriť päťuholník (pozri obrázok 5 vľavo). Útvar zobrazený na tomto obrázku má požadovaný obsah, ale nespĺňa ďalšie podmienky zo zadania úlohy. Druhý postup začínal úvahou o obsahu útvaru, ktorý je potrebné oddeliť od daného obdĺžnika. Takto postupoval žiak, ktorého riešenie je zobrazené na obrázku 5 vpravo. Žiak najprv vyznačil štvorec s obsahom 9 štvorciek, ktorý je potrebné oddeliť od obdĺžnika. Potom polovicu štvorca oddelil a v ďalšom kroku sa snažil oddeliť útvar s obsahom 4,5 štvorciek takým spôsobom, aby výsledným útvarom bol päťuholník.



Obr. 5 Ukážka žiackych riešení úlohy 5 nespĺňajúcich všetky podmienky

Väčšina správnych žiackych riešení viedla k vytvoreniu symetrického útvaru. Prekvapilo nás, že ani jeden žiak nenašiel jednoduchšie riešenie za-

ložené na odrezaní jedného radu štvorčiekov pozdĺž jednej strany obdĺžnika v prvom kroku riešenia úlohy. Pozorované nedostatky a chyby v žiackych riešeniach úloh poukázali, že bolo vhodné venovať viac času upevneniu a prehĺbeniu vedomostí a zručností.

Vyučovanie pomocou digitálnych technológií predstavuje pre súčasnú generáciu žiakov spojenie medzi vyučovacím predmetom a reálnym životom. Prostredie dynamickej geometrie prináša nové spôsoby vykonávania učebných činností a umožňuje žiakom získavať nové skúsenosti. Významný potenciál dynamickej geometrie je aj v podpore bádateľských prístupov k vyučovaniu matematiky založených na manipulácii s objektmi.

V článku je opísaná interaktívna kniha vytvorená so zámerom podporiť porozumenie geometrického konceptu vzorcov na výpočet obsahov základných typov útvarov a rozvíjať geometrickú predstavivosť žiakov. Aj keď sa žiaci dopúšťali viacerých druhov chýb pri využívaní osvojených vedomostí pri riešení úloh, deväť žiakov vedelo aspoň v jednej úlohe správne využiť transformácie útvarov pri výpočte obsahu alebo pri vytváraní útvarov s požadovaným obsahom. Miera vplyvu interaktívneho učebného materiálu na geometrické predstavy a znalosti žiakov závisí okrem didaktického spracovania učebného materiálu a spôsobu jeho využitia učiteľom aj od ďalších faktorov, medzi ktoré patria predchádzajúce vedomosti žiakov a úroveň rozvoja ich geometrického myslenia.

Literatúra

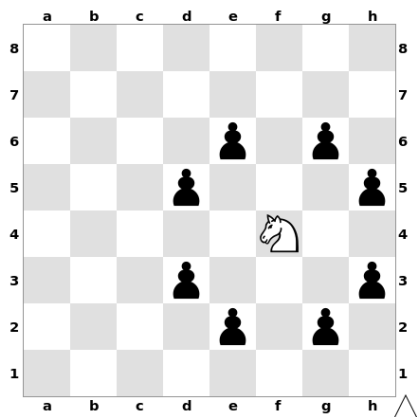
- [1] *Kopka, J.*: Zkoumání ve školské matematice. Katolícka univerzita v Ružomberku, Ružomberok, 2006.
- [2] *Koreňová, L.*: Digitálne technológie v školskej matematike. KEC FMFI UK, Bratislava, 2015.
- [3] *Molnár, J.*: Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii. Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc, 2009.
- [4] *Robová, J.*: Výzkumy vlivu některých typů technologií na vědomosti a dovednosti žáků v matematice. *Scientia in Education*, roč. 3 (2012), č. 2, s. 79–106.
- [5] *Robová, J.*: Rozvíjení znalostí žáků pomocí GeoGebry. *Matematika–Fyzika–Informatika*, roč. 33 (2024), č. 3, s. 167–176.
- [6] *Vaníček, J.*: Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie. Univerzita Karlova, Praha, 2009.

Pásově uzavřené procházky jezdce po šachovnici

KAREL PASTOR

Pedagogická fakulta UP, Olomouc

Jezdcova procházka po šachovnici je zajímavým kombinatorickým problémem a lze ji považovat i za vhodný nástroj pro naplňování cílů vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. Žáci (základních a středních škol) nebo i studenti (vysokých škol) přitom nemusí znát kompletní šachová pravidla, ale stačí, když si osvojí tah jezdce. Připomeňme, že pohyb šachového jezdce po šachovnici se realizuje tak, že se přemístí o dvě pole rovně a potom jedno pole do strany. Je tak možné říct, že šachový jezdec se při svém tahu pohybuje podle písmene L. Na šachovnici na obr. 1 by se šachový jezdec z pole f4 mohl svým tahem přemístit na libovolné z polí, na kterých stojí černí pěšci.



Obr. 1 Tah šachového jezdce

Jezdcovou procházkou rozumíme úlohu navštívit šachovým jezdce všechna pole šachovnice právě jednou v souladu s jeho pohybem podle šachových pravidel. Pokud se šachový jezdec ze svého posledního navštíveného pole může svým tahem dostat na pole začátku své procházky, hovoříme

o uzavřené jezdcově procházce. V opačném případě pak mluvíme o *otevřené jezdcově procházce*. Šachové partie se hrají na šachovnici 8×8 , nicméně o jezdcovu procházku se je možné pokusit na libovolné šachovnici obdélníkového tvaru. Obr. 2 ukazuje jednu z možných otevřených jezdcových procházek na šachovnici 5×5 .

7	18	13	24	1
12	25	8	19	14
17	6	23	2	9
22	11	4	15	20
5	16	21	10	3

Obr. 2 Otevřená jezdcova procházka 5×5

Realizovat otevřenou jezdcovu procházku je samozřejmě jednodušší než uzavřenou jezdcovu procházku. Pro žáky a studenty může být alternativní (snazší) úlohou k jezdcově procházce po celé šachovnici úloha zaplnit tahy šachového jezdce co nejvíce polí zvolené šachovnice.

30	1	46	61	18	13	34	59
47	62	31	14	33	60	17	12
2	29	64	45	16	19	58	35
63	48	15	32	57	36	11	20
28	3	44	49	24	7	38	55
43	50	25	6	37	56	21	10
4	27	52	41	8	23	54	39
51	42	5	26	53	40	9	22

Obr. 3 Uzavřená jezdcova procházka 8×8

V našem článku se budeme dále věnovat uzavřeným jezdcovým procházkám. Ukažme nejprve příklad jezdcovy procházky na klasické šachovnici 8×8 podle Leonharda Eulera z roku 1759 (obr. 3). Postup je možné odvodit na základě vybarvených polí a žáci jej mohou snadno modifikovat. Eule-

rova procházka může být vzhledem ke svému snadno zapamatovatelnému algoritmu zajímavá i pro mladší žáky [1].

Na šachovnici 8×8 existuje 13 267 364 410 532 neorientovaných uzavřených jezdcových procházek, viz [2]. Neorientovaná znamená, že u uvažované jezdcovy procházky nezáleží ani na počátečním poli procházky, ani na jejím směru.

Uzavřenou jezdcovu procházku lze provést i na dalších šachovnicích obdélníkového tvaru. Schwenkova věta, viz [3], podává jejich kompletní výčet.

Věta (Schwenkova)

Pro všechna přirozená $m \leq n$ existuje na šachovnici $m \times n$ uzavřená jezdcova procházka právě tehdy, když není splněna žádná z následujících podmínek:

- (i) m a n jsou obě lichá čísla,
- (ii) $m = 1, 2$ nebo 4 ,
- (iii) $m = 3$ a $n = 4, 6$ nebo 8 .

Ze Schwenkovy věty plyne, že např. na šachovnici 11×11 uzavřená jezdcova procházka neexistuje, ale na šachovnici 12×12 ano. Pokud budeme žákům předkládat úlohu provést uzavřenou jezdcovu procházku na šachovnici obdélníkového tvaru, je dobré vědět nejen o její existenci, ale i o možné realizaci. Cílem našeho článku je na základě důkazu Schwenkovy věty [3] podat příslušný návod. Zaměříme se však jen na šachovnice $3 \times n$, kde $3 \leq n$. Pro tyto případy je možné zmíněný konstrukční důkaz [3] výrazně zjednodušit. Uzavřeným jezdcovým procházkám na šachovnicích těchto rozměrů budeme říkat pásové uzavřené procházky jezdce po šachovnici.

Podle Schwenkovy věty jsou možné dva typy pásové uzavřených procházek jezdce po šachovnici. Jednak ve tvaru $3 \times (4k + 2)$, kde $k \geq 2$, a jednak ve tvaru $3 \times 4k$, kde $k \geq 3$.

Jako základní stavební kameny pásové uzavřených procházek jezdce po šachovnici je možné zvolit libovolné uzavřené jezdcovy procházky na šachovnicích 3×10 a 3×12 , zvolme [4] např. procházky z obr. 4 a 5.

29	2	27	18	5	20	23	12	7	10
26	17	30	3	24	15	6	9	22	13
1	28	25	16	19	4	21	14	11	8

Obr. 4 Uzavřená jezdcova procházka 3×10

1	4	35	16	19	6	31	8	11	22	25	28
34	17	2	5	32	9	14	21	30	27	12	23
3	36	33	18	15	20	7	10	13	24	29	26

Obr. 5 Uzavřená jezdcova procházka 3×12

Nástrojem pro prodloužení uzavřené jezdcovy procházky ze šachovnice $3 \times n$, kde $3 \leq n$, na šachovnici $3 \times (n + 4)$ pro zvolené procházky 3×10 a 3×12 z obr. 4 a 5 bude otevřená jezdcova procházka na šachovnici 3×4 znázorněná na obr. 6.

3	6	11	8
12	9	2	5
1	4	7	10

Obr. 6 Otevřená jezdcova procházka 3×4 (varianta 1)

Pro vytvoření uzavřené jezdcovy procházky na šachovnici 3×14 začneme uzavřenou jezdcovou procházkou na šachovnici 3×10 z obr. 4, dostaneme se do pravého horního rohu této šachovnice (pole označené číslem 10), poté se přemístíme do levého dolního bodu připojené šachovnice 3×4 (pole označené číslem 1), pokračujeme otevřenou jezdcovou procházkou až do pole označené číslem 12, následně se vrátíme na šachovnici 3×10 na pole označené číslem 11 a procházku dokončíme. Adekvátním způsobem procházení pole obou připojených šachovnic přechíslovujeme. Celý postup je ukázán postupně na obr. 7a, 7b a 7c, přičemž propojení šachovnic 3×10 a 3×4 je naznačeno pomocí oranžově vyznačených čísel 10, 1 a zeleně vyznačených čísel 12, 11.

29	2	27	18	5	20	23	12	7	10	3	6	11	8
26	17	30	3	24	15	6	9	22	13	12	9	2	5
1	28	25	16	19	4	21	14	11	8	1	4	7	10

Obr. 7a Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×14 – připojení šachovnic

29	2	27	18	5	20	23	12	7	10	3	6	11	8
26	17	30	3	24	15	6	9	22	13	12	9	2	5
1	28	25	16	19	4	21	14	11	8	1	4	7	10

Obr. 7b Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×14 – propojení šachovnic

41	2	39	30	5	32	35	24	7	10	13	16	21	18
38	29	42	3	36	27	6	9	34	25	22	19	12	15
1	40	37	28	31	4	33	26	23	8	11	14	17	20

Obr. 7c Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×14 – přečíslování šachovnic

Pro vytvoření uzavřené jezdcovy procházky na šachovnici 3×16 můžeme postupovat obdobně jako při vytváření uzavřené jezdcovy procházky na šachovnici 3×14 . Začneme uzavřenou jezdcovou procházkou na šachovnici 3×12 z obr. 6, dostaneme se do pravého horního rohu této šachovnice (pole označené číslem 28), poté se přemístíme do levého dolního bodu připojené šachovnici 3×4 (pole označené číslem 1), pokračujeme otevřenou jezdcovou procházkou až do pole označené číslem 12, následně se vrátíme na šachovnici 3×12 na pole označené číslem 29 a procházku dokončíme. Adekvátním způsobem procházená pole obou připojených šachovnic přečíslováme. Celý postup je ukázán na obr. 8a, 8b a 8c, přičemž propojení šachovnic 3×12 a 3×4 je naznačeno pomocí oranžově vyznačených čísel 28, 1 a zeleně vyznačených čísel 12, 29.

1	4	35	16	19	6	31	8	11	22	25	28	3	6	11	8
34	17	2	5	32	9	14	21	30	27	12	23	12	9	2	5
3	36	33	18	15	20	7	10	13	24	29	26	1	4	7	10

Obr. 8a Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×16 – připojení šachovnic

1	4	35	16	19	6	31	8	11	22	25	28	3	6	11	8
34	17	2	5	32	9	14	21	30	27	12	23	12	9	2	5
3	36	33	18	15	20	7	10	13	24	29	26	1	4	7	10

Obr. 8b Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×16 – propojení šachovnic

1	4	47	16	19	6	43	8	11	22	25	28	31	34	39	36
46	17	2	5	44	9	14	21	42	27	12	23	40	37	30	33
3	48	45	18	15	20	7	10	13	24	41	26	29	32	35	38

Obr. 8c Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×16 – přechíslování

Pokud bychom chtěli vytvořit uzavřenou procházku 3×18 , mohli bychom použít již vytvořené procházky 3×14 , která je na obrázku 7c a jako nástroj prodloužení využít otevřenou jezdcovu procházku na šachovnici 3×4 znázorněnou na obr. 9.

1	4	7	10
12	9	2	5
3	6	11	8

Obr. 9 Otevřená jezdcova procházka 3×4 (varianta 2)

Prodloužení lze provést analogicky jako v předchozích případech: postup je znázorněn na obr. 10a, 10b a 10c. Rozdíl je pouze v tom, že k propojení obou procházek dochází tentokrát z levého dolního rohu šachovnice 3×14 , a nikoliv z jejího pravého horního rohu. Proto jsme jako nástroj prodloužení zvolili otevřenou jezdcovu procházku 3×4 na obr. 9, která začíná v levém horním rohu.

41	2	39	30	5	32	35	24	7	10	13	16	21	18	1	4	7	10
38	29	42	3	36	27	6	9	34	25	22	19	12	15	12	9	2	5
1	40	37	28	31	4	33	26	23	8	11	14	17	20	3	6	11	8

Obr. 10a Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×18 – připojení šachovnic

41	2	39	30	5	32	35	24	7	10	13	16	21	18	1	4	7	10
38	29	42	3	36	27	6	9	34	25	22	19	12	15	12	9	2	5
1	40	37	28	31	4	33	26	23	8	11	14	17	20	3	6	11	8

Obr. 10b Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×18 – propojení šachovnic

53	2	51	42	5	44	47	36	7	10	13	16	33	18	21	24	27	30
50	41	54	3	48	39	6	9	46	37	34	19	12	15	32	29	22	25
1	52	49	40	43	4	45	38	35	8	11	14	17	20	23	26	31	28

Obr. 10c Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×18 – přechíslování

Všimněme si nyní posledních dvou sloupců na obrázku 8c. Pokud bychom chtěli využít uzavřené jezdcovy procházky 3×16 znázorněné na obr. 8c k vytvoření uzavřené jezdcovy procházky 3×20 obdobným prodloužením jako v předchozích případech, zvolili bychom jako nástroj prodloužení variantu 2 otevřené jezdcovy procházky 3×4 prezentovanou na obr. 9. Postup ilustrují obrázky 11a, 11b, 11c.

1	4	47	16	19	6	43	8	11	22	25	28	31	34	39	36	1	4	7	10
46	17	2	5	44	9	14	21	42	27	12	23	40	37	30	33	12	9	2	5
3	48	45	18	15	20	7	10	13	24	41	26	29	32	35	38	3	6	11	8

Obr. 11a Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×20 – připojení šachovnic

1	4	47	16	19	6	43	8	11	22	25	28	31	34	39	36	1	4	7	10
46	17	2	5	44	9	14	21	42	27	12	23	40	37	30	33	12	9	2	5
3	48	45	18	15	20	7	10	13	24	41	26	29	32	35	38	3	6	11	8

Obr. 11b Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×20 – propojení šachovnic

1	4	59	16	19	6	55	8	11	22	25	28	31	34	51	36	39	42	45	48
58	17	2	5	56	9	14	21	54	27	12	23	52	37	30	33	50	47	40	43
3	60	57	18	15	20	7	10	13	24	53	26	29	32	35	38	41	44	49	46

Obr. 11c Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×20 – přečíslování

S ohledem na předchozí příklady konstrukcí pásové uzavřených procházek jezdce po šachovnici $3 \times (n + 4)$ pomocí znalosti realizace uzavřené jezdcovy procházky na šachovnici $3 \times (n + 4)$, kde n je buď ve tvaru $3 \times (4k + 2)$, kde $k \geq 2$, nebo ve tvaru $3 \times 4k$, kde $k \geq 3$, podáme nyní obecný návod na příslušné prodloužení procházky.

Mějme tedy k dispozici uzavřenou jezdcovu procházku na šachovnici $3 \times n$. Podíváme se na pole šachovnice v pravém horním rohu. Bez ztráty na obecnosti můžeme předpokládat, že na tomto poli uzavřená jezdcova procházka nekončí a že nekončí ani v dalších dvou následujících tazích. Jsou nyní dvě možnosti:

1. Pokud z tohoto pole uzavřená jezdcova procházka pokračuje na předposlední pole šachovnice dolní řady (jako tomu bylo na obr. 4 a 5 a jak je schematicky naznačeno na obr. 12 tahem $A \rightarrow A + 1$), pak jako nástroj prodloužení využijeme otevřenou jezdcovu procházku (varianty 1) na šachovnici $3 \times n$ uvedenou na obr. 6. Z pole v pravém horním rohu šachovnice

$3 \times n$ necháme jezdcovu procházku pokračovat otevřenou jezdcovou procházkou (varianty 1) na připojené šachovnici 3×4 a po jejím absolvování se vrátíme na šachovnici $3 \times n$ na předposlední pole šachovnice $3 \times n$ dolní řady a procházku na šachovnici $3 \times (n+4)$ dokončíme původní procházkou na šachovnici $3 \times n$. Postup byl ilustrován na obrázcích 7a–7c a 8a–8c.

2. Pokud z pole šachovnice $3 \times n$ v pravém horním rohu uzavřená jezdcova procházka nepokračuje na předposlední pole šachovnice dolní řady, pak musí pokračovat na pole prostřední řady ve třetím sloupci zprava. Vzhledem k tomu, že je potřeba vyplnit tahy šachového jezdce všechna pole šachovnice, tak další tah šachového jezdce musí být proveden do pravého dolního rohu šachovnice a následně jezdec pokračuje na pole šachovnice, které je v horní řadě předposledního sloupce. K takové situaci došlo na obr. 7c a 8c, a je schematicky vyznačena na obr. 13 tahy $A \rightarrow A+1 \rightarrow A+2 \rightarrow A+3$. Nástrojem prodloužení bude v tomto případě varianta 2 otevřené jezdcovy procházky 3×4 , postup byl ukázán na obrázcích 10a–10c a 11a–11c.

		A
...		
	A+1	

Obr. 12 Pravý horní roh (možnost 1)

	A+3	A
...	A+1	
		A+2

Obr. 13 Pravý horní roh (možnost 2)

Předchozí rozvaha potvrzuje, že jako základní stavební kameny pro pásově uzavřené procházky jezdce po šachovnici je skutečně možné zvolit libovolné uzavřené jezdcovy procházky na šachovnicích 3×10 a 3×12 . U možnosti 1 prodlužujeme pomocí varianty 1 otevřené jezdcové procházky 3×4 a u možnosti 2 prodlužujeme pomocí varianty 2 otevřené jezdcové procházky 3×4 .

Dále si také všimněme, že pokud prodloužíme uzavřenou jezdcovou procházku $3 \times n$ variantou 1 otevřené jezdcovy procházky 3×4 na uzavřenou

jezdcovou procházku $3 \times (n + 4)$, tak další prodloužení na uzavřenou jezdcovou procházku $3 \times (n + 8)$ můžeme provést pomocí varianty 2 otevřené jezdcovy procházky 3×4 , avšak ne pomocí varianty 1.

A naopak, pokud prodloužíme uzavřenou jezdcovou procházku $3 \times n$ variantou 2 otevřené jezdcovy procházky 3×4 na uzavřenou jezdcovou procházku $3 \times (n + 4)$, tak další prodloužení na uzavřenou jezdcovou procházku $3 \times (n + 8)$ můžeme provést pomocí varianty 1 otevřené jezdcovy procházky 3×4 , avšak ne pomocí varianty 2.

Příklad

Jestliže bychom tedy například měli za úkol provést uzavřenou jezdcovou procházku na šachovnici 3×2026 , uvědomíme si nejprve, že

$$2026 = 10 + 2 \cdot 4 \cdot 252.$$

Poté si zvolíme libovolnou uzavřenou jezdcovou procházku 3×10 a podíváme se, o kterou ze dvou předchozích možností se jedná, a podle toho zvolíme, kterou variantou otevřené jezdcovy procházky 3×4 budeme prodlužovat nejdříve.

V případě 1. možnosti prodloužíme nejprve variantou 1 a další prodloužení provedeme variantou 2. Toto dvojí prodloužení provedeme 252krát.

V případě 2. možnosti prodloužíme nejprve variantou 2 a další prodloužení provedeme variantou 1. Toto dvojí prodloužení provedeme opět 252krát.

Literatura

- [1] *Pastor, K.*: Eulerova šachová procházka. *Elementary Mathematics Education Journal*, roč. 5 (2023), č. 2, s. 46–52. Dostupné z: https://emejournal.upol.cz/Issues/Vol5No2/Vol5No2_Pastor.pdf
- [2] *Elkies, N. D., Stanley, R. P.*: The Mathematical Knight. *The Mathematical Intelligencer*, roč. 25 (2003), č. 1, s. 22–34.
- [3] *Schwenk, A. J.*: Which Rectangular Chessboard Have a Knight's Tour? *Mathematics Magazine*, roč. 164 (1991), č. 5, s. 325–332. Dostupné z: unicamp.br.
- [4] Knight's Tour Notes. [online]. [cit. 2025-05-20]. Dostupné z: mayhematics.com.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 12. 2025 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi zveřejníme.

Úloha 303

Dokažte, že pro velikosti α, β, γ vnitřních úhlů libovolného trojúhelníku platí nerovnost

$$\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{9}{8}.$$

Kdy nastane rovnost?

Jaroslav Švrček

Úloha 304

Třída na začátku hodiny tělocviku nastupuje do řady s pravidelnými rozestupy, každý žák na svoji pevně přiřazenou značku. Horáček ale jednou přesvědčil své spolužáky, aby místo toho všichni nastoupili na značky tak, že součet vzdáleností všech žáků od aktuálně obsazené k předem přiřazené značce byl nejvyšší možný. Určete počet takových pořadí pro $2n$ žáků.

David Hruška

V následující části uvádíme řešení úloh 299 a 300, jejichž zadání jsme zveřejnili v prvním čísle tohoto (34.) ročníku našeho časopisu.

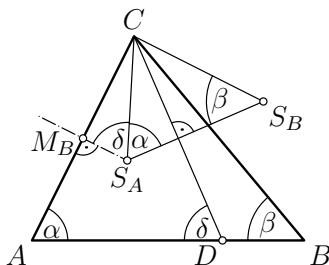
Úloha 299

Je dán trojúhelník ABC a bod D ležící na přímce AB , $D \neq A$, $D \neq B$. Označme $k_A(S_A; r_A)$, $k_B(S_B; r_B)$ po řadě kružnice opsané trojúhelníkům ADC , BDC .

- Určete polohu bodu D tak, aby obsah trojúhelníku S_AS_BC byl co nejmenší.
- Určete polohu bodu D tak, aby trojúhelníky S_AS_BC a ABC byly shodné.

Jaroslav Zhouf

Řešení. Abychom nemuseli zvlášť diskutovat všechny možnosti velikostí úhlů, všechny úhly budeme pokládat za orientované. Označme M_B střed úsečky AC . Podle věty o obvodovém a středovém úhlu je velikost úhlu CS_AA rovna dvojnásobku velikosti úhlu CDA , tuto velikost označíme δ . Trojúhelník CS_AA je rovnoramenný, velikost úhlu CS_AM_B je tedy δ . Jelikož S_AS_B je osou úsečky CD , podobnou úvahou zjistíme, že úhly CS_AS_B a CAB jsou shodné, jejich velikost označíme α . Konečně i úhly CS_BS_A a CBA jsou shodné, jejich velikost označíme β , viz obrázek.



Podle věty *uu* tak jsou trojúhelníky CS_AS_B a CAB podobné, pokud označíme b délku strany AC , je koeficient podobnosti těchto trojúhelníků roven $|CS_A|/|CA| = r_A/b$. Z pravoúhlého trojúhelníku CM_BS_A plyne $|CS_A|/|CM_B| = r_A/(b/2) = 1/\sin \delta$, tedy $r_A/b = 1/(2 \sin \delta)$.

a) Trojúhelník CS_AS_B je tak nejmenší, pokud je $\sin \delta$ největší, tedy v případě $\delta = 90^\circ$, což znamená, že D je patou výšky z vrcholu C . Vzhledem k podmínkám úlohy má tato část řešení pokud $\alpha \neq 90^\circ \neq \beta$, jinak bod D splyne s jedním z vrcholů A, B .

b) Trojúhelník CS_AS_B je shodný s trojúhelníkem CAB , jestliže $\sin \delta = 1/2$, tedy v případě $\delta = 30^\circ$, což znamená, že úsečka CD svírá se stranou AB úhel o velikosti 30° . Vzhledem k podmínkám úlohy má tato část dvě řešení pokud $\alpha, \beta \notin \{30^\circ, 150^\circ\}$, jinak bod D splyne s jedním z vrcholů A, B . V opačném případě má úloha jedno řešení (pokud jeden z úhlů padne do této množiny), nebo žádné řešení v případě rovnoramenného trojúhelníku ABC , jehož ramena AC a BC svírají se základnou AB úhel 30° .

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, *František Jáchim* z Volyně, *Dominik Derenda*, *Michał Fronczek*, *Filip Zdebik*, všichni II LO Tarnowskie Góry (Polsko), *Tereza Kubínová*, G Praha 9, Litoměřická.

Neúplné řešení zaslal *Bartosz Wieczorek*, II LO Tarnowskie Góry (Polsko).

Úloha 300

Nechť a , b , c jsou délky stran v libovolném trojúhelníku a t_a , t_b , t_c délky odpovídajících těžnic (v obvyklém značení). Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^2}{t_a^2} + \frac{b^2}{t_b^2} + \frac{c^2}{t_c^2}.$$

Jaroslav Švrček

Řešení. Podle známých vzorců pro délky těžnic trojúhelníku platí

$$t_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2, \quad t_b^2 = \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}b^2, \quad t_c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2.$$

Tyto vzorce budeme chápat jako soustavu tří rovnic o třech neznámých a^2 , b^2 , c^2 s parametry t_a^2 , t_b^2 , t_c^2 . Jejím řešením dostaneme

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{8}{9}t_b^2 + \frac{8}{9}t_c^2 - \frac{4}{9}t_a^2, \\ b^2 &= \frac{8}{9}t_c^2 + \frac{8}{9}t_a^2 - \frac{4}{9}t_b^2, \\ c^2 &= \frac{8}{9}t_a^2 + \frac{8}{9}t_b^2 - \frac{4}{9}t_c^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Dosazením do výrazu V a následnou úpravou pak získáme

$$V = \frac{8}{9} \left(\frac{t_a^2}{t_b^2} + \frac{t_b^2}{t_a^2} \right) + \frac{8}{9} \left(\frac{t_b^2}{t_c^2} + \frac{t_c^2}{t_b^2} \right) + \frac{8}{9} \left(\frac{t_c^2}{t_a^2} + \frac{t_a^2}{t_c^2} \right) - \frac{4}{3}.$$

Úpravou nerovnosti $(x-y)^2 \geq 0$ pro kladná reálná čísla x , y dostaneme $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, přičemž rovnost nastane pro $x = y$. Trojnásobným užitím této nerovnosti pro kladná reálná čísla t_a^2 , t_b^2 , t_c^2 ve výrazu V dostaneme

$$V = \frac{8}{9} \left(\frac{t_a^2}{t_b^2} + \frac{t_b^2}{t_a^2} \right) + \frac{8}{9} \left(\frac{t_b^2}{t_c^2} + \frac{t_c^2}{t_b^2} \right) + \frac{8}{9} \left(\frac{t_c^2}{t_a^2} + \frac{t_a^2}{t_c^2} \right) - \frac{4}{3} \geq \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} - \frac{4}{3} = 4,$$

přičemž rovnost zde nastane, právě když $t_a^2 = t_b^2 = t_c^2$. Po dosazení do (1) dostaneme $a^2 = b^2 = c^2 = \frac{4}{3}t_a^2$, tedy trojúhelník je rovnostranný.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Dominik Derenda*, *Michał Fronczek*, *Filip Zdebik*, všichni II LO Tarnowskie Góry (Polsko), *Tereza Kubínová*, G Praha 9, Litoměřická.

Neúplné řešení zaslali *Paweł Chwiedoruk* a *Bartosz Wieczorek*, oba II LO Tarnowskie Góry (Polsko).

Dne 17. 7. 2025 nás bohužel opustil dlouholetý řešitel této rubriky pan Jozef Mészáros z Galanty.

Pavel Calábek

Je tepelné záření totéž co infračervené záření?

OLDŘICH LEPIL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Ve školské fyzice se žák poprvé setká s pojmem *tepelné záření* v učivu termiky v souvislosti s tepelnou výměnou, při níž se vyzařováním (*sáláním*, *radiací*) přenáší energie záření do okolí zahřátých těles. Tím je v podstatě fixována představa, která spojuje tepelné záření jen s touto formou tepelné výměny. S pojmem *infračervené záření*, označovaném obvykle IR (*infrared radiation*), se žák základní školy nesetká vůbec a na střední škole je vymezen tento pojem až v optice jako elektromagnetické záření o vlnových délkách v širokém rozsahu od 1 mm do 760 nm (viz např. [1]). Ve starších učebnicích optiky se žák o infračerveném záření dozvěděl jen několik poznámek např. o jeho tepelných účincích, šíření v zakaleném prostředí apod. V souvislosti s vývojem polovodičové techniky se však významně zvětšilo praktické využití infračerveného záření. V tomto směru dominují zejména termokamery, jejichž funkci a praktické využití lze poměrně snadno demonstrovat i ve školských podmínkách (viz např. obr. 1, který je součástí prezentace P3 v elektronickém doplňku (ED) k učebnici [1], autor V. Pazdera). Tím je však zvýrazněna těsná souvislost tepelného záření a infračerveného záření, což podporuje představu o totožnosti obou záření, jak ji chápeme a často používáme v hovorovém vyjadřování. Z fyzikálního hlediska je však souvislost obou záření složitější.

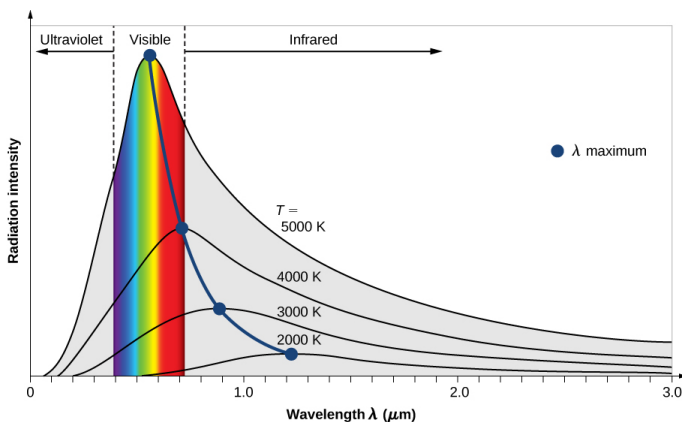
Jako tepelné záření označujeme elektromagnetické vlnění, jehož zdrojem jsou chaotické oscilace atomů a molekul látky při jejich tepelném pohybu. To znamená, že tělesa vyzařují tepelné záření při libovolné teplotě $T > 0$ K. Na teplotě tělesa závisí vlnová délka tepelného záření při níž těleso vyzařuje maximum energie. Na konci 19. století byla tato problematika středem pozornosti fyziků v souvislosti s problémy, s nimiž se fyzika setkala při studiu

vyzařování tzv. *černého tělesa*. Zásadním způsobem tento problém vyřešil na počátku 20. století *Max Planck* představou diskrétního charakteru záření tvořeného fotony a svým objevem položil základ kvantové fyziky. Klíčovou zákonitostí je *Planckův zákon vyzařování černého tělesa*, který vyjadřuje závislost *spektrální intenzity vyzařování* M_λ na teplotě T tělesa a vlnové délce λ tepelného záření ($M_\lambda = f(\lambda, T)$). Planckův zákon určuje, jaká část celkové vyzařené energie připadá na elektromagnetické vlnění o určité vlnové délce.

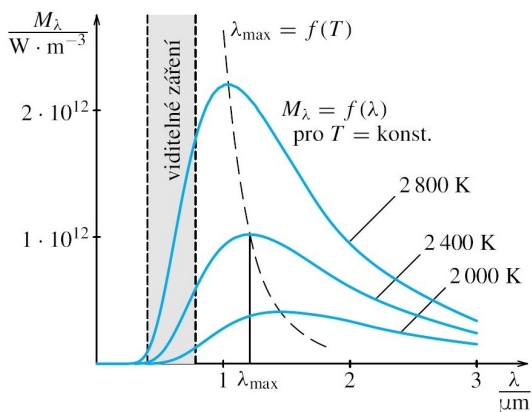


Obr. 1

Středoškolská fyzika se omezuje jen na kvalitativní interpretaci Planckova zákona. Výklad obvykle vychází z grafu rozložení vyzařované energie tepelného záření ve spektru tělesa o určité teplotě, čili z grafu veličiny M_λ . K tomu lze využít grafy dostupné na webu (viz např. obr. 2). V jednoduché podobě je tento graf také v rozšiřujícím učivu v ED k učebnici [1] (obr. 3).



Obr. 2



Obr. 3

Z těchto grafů je zřejmé, že tělesa s nižší teplotou přibližně do 2000 K prakticky vyzařují jen infračervené záření. Teplota 2 800 K odpovídá teplotě wolframového vlákna klasické žárovky, která vlastně rovněž vyzařuje převážně infračervené záření a jen v menší míře světlo. Při vyšších teplotách pak tělesa vyzařují kromě viditelného záření (světla)¹⁾ také ultrafialové záření. Při vysoké teplotě 5 000 K je maximum intenzity vyzařování sice uprostřed světelného spektra, ale značnou část energie tepelného záření představuje ultrafialové záření.

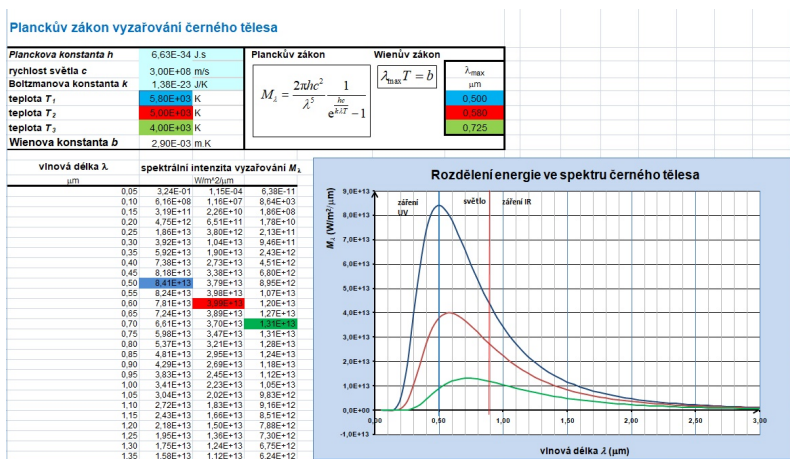
Matematická formulace Planckova zákona je poměrně jednoduchá a tak se nabízí možnost, posoudit vlastnosti zdrojů tepelného záření konstrukcí grafů Planckova zákona pro konkrétní teploty těchto zdrojů. Planckův zákon se uvádí obvykle ve tvaru

$$M_{\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1},$$

kde je h Planckova konstanta, c rychlost světla ve vakuu, k Boltzmannova konstanta ($k \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$), λ vlnová délka tepelného záření a T je teplota zdroje záření, který má ideální vlastnost černého tělesa. Na základě tohoto vztahu byl vytvořen jednoduchý program v Excelu, který je součástí

¹⁾V anglické literatuře se používají termíny *visible light* a *nonvisible light* (např. právě pro infračervené záření), jejichž ekvivalenty často najdeme i v českých textech. To neodpovídá terminologii používané v našich učebnicích. V české terminologii používáme jen obecný termín *záření*, jehož viditelnou složkou je *světlo*. Český překlad *viditelné světlo* postrádá z tohoto hlediska věcný smysl. Neviditelné světlo je pak evidentní nesmysl.

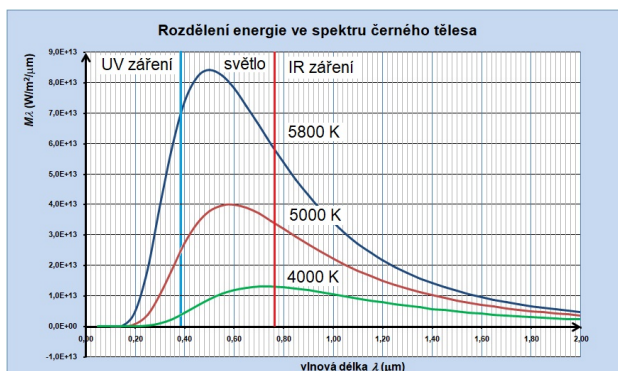
příspěvku a najdete ho na adrese https://mfi.upol.cz/files/34/3403/mfi_3403_f1_lepil_planck.xlsx (obr. 4). Program je předdefinován pro tři teploty a změnou těchto hodnot lze získat grafy i pro jiné zdroje záření s rozsahem spektra do vlnové délky 4 μm . V počátečním nastavení jsou to teploty 4000 K, 5000 K a 5800 K (přibližná teplota povrchu Slunce). Výsledný graf je na obr. 5. Obdobným způsobem můžeme vytvořit graf, který je součástí ED (obr. 6). Program zahrnuje také vztah pro *Wienův posunovací zákon*, kterým určíme vlnovou délku λ_{max} , při níž těleso o teplotě T vyzařuje maximum energie: $\lambda_{\text{max}} = b/T$, kde b je Wienova konstanta ($b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$).



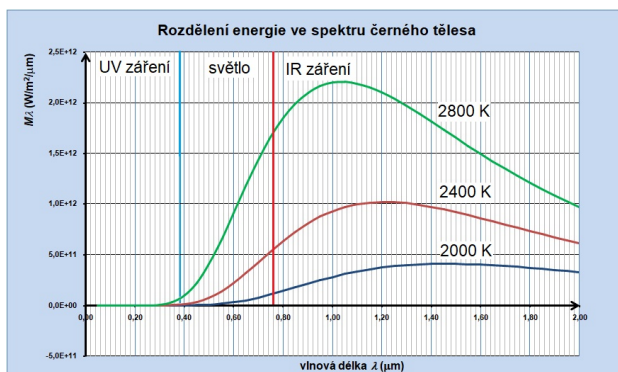
Obr. 4

Teplnému záření odpovídá široké spektrum vlnových délek spektra elektromagnetického záření, sahající od rentgenového a gama záření až k mikrovlnám o vlnové délce řádově 10^{-3} m . Infračervené záření tedy představuje jen *část spektra tepelného záření*, která je ohraničena světlem (760 nm) na jedné straně a mikrovlnným zářením na dlouhovlnné části spektra.

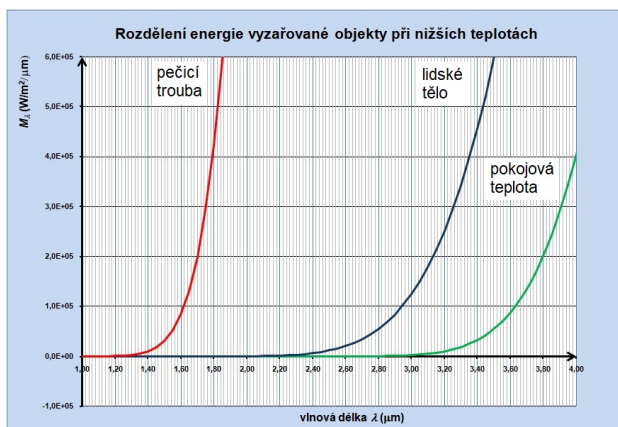
Poznatek, že tepelné záření nelze jednoduše ztotožnit s infračerveným zářením, můžeme názorně ukázat na grafech Planckova zákona pro tělesa s nízkou teplotou a naopak s velmi vysokou teplotou (budeme předpokládat, že tato tělesa jsou ideální černá tělesa). Na obr. 7 je graf pro tři objekty s nižší teplotou, které vyzařují jen infračervené záření. Je to těleso s pokojovou teplotou (21 °C), lidské tělo (37 °C) a pečí trouba (180 °C).



Obr. 5

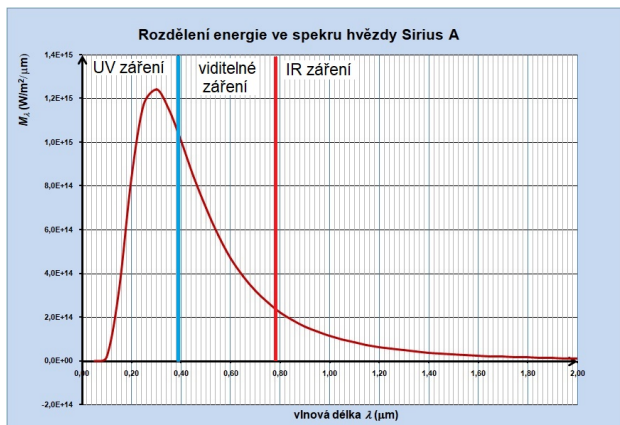


Obr. 6



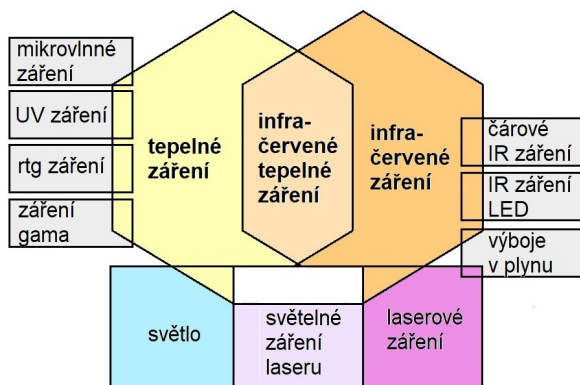
Obr. 7

Na obr. 8 je graf pro nejjasnější hvězdu naší oblohy Sirius A, která má povrchovou teplotu 9940 K. Vidíme, že tepelné záření Siria z větší části představuje ultrafialové záření a jen asi 17 % vyzářené energie připadá na infračervené záření.



Obr. 8

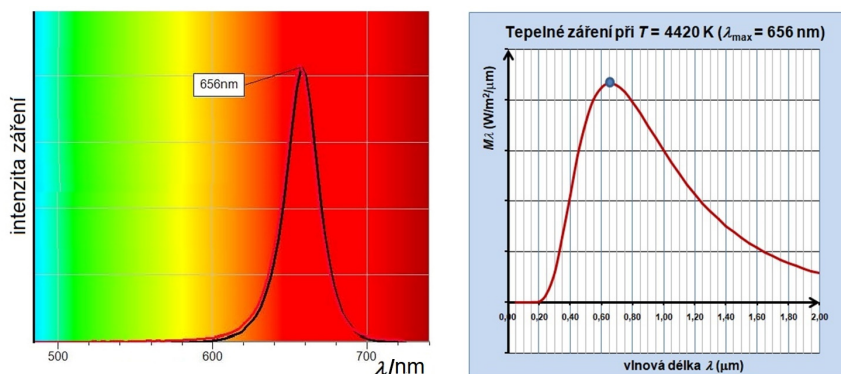
I když zdrojem infračerveného záření jsou nejčastěji tělesa produkující tepelné záření, může toto záření vznikat také jinými fyzikálními procesy, než je tepelný pohyb částic. Přehledně je to znázorněno diagramem na obr. 9.



Obr. 9

Příkladem může být elektroluminiscenční dioda IR LED na bázi arsenidu gallia (GaAs). Je to v podstatě polovodičová dioda, v jejímž přechodu

PN dochází k rekombinaci nosičů náboje a to je spojeno s vyzařováním infračerveného záření určité vlnové délky (konkrétně např. 940 nm). IR diody našly široké praktické využití např. v dálkových ovladačích, v zařízeních pro noční vidění, v čtečkách čárových kódů, v bezpečnostních systémech apod. Rozdíl mezi tepelným zářením a zářením elektroluminiscenční diody je dobře patrný na záznamu spektra červené LED diody, vyzařující světlo o vlnové délce 656 nm. Tomu by odpovídalo tepelné záření černého tělesa s teplotou 4 420 K. Rozdíl je dobře patrný na obr. 10. Vlevo je záznam spektra diody (autor V. Pazdera) a vpravo graf Planckova zákona pro uvedenou teplotu.



Obr. 10

Jiným příkladem jsou lasery generující infračervené záření na základě stimulované emise částic aktivního prostředí laseru. Na rozdíl od tepelného záření se širokým spektrem vlnových délek, je záření laseru monochromatické, čímž se zásadně liší od tepelného záření.

Odpověď na otázku v názvu příspěvku tedy je: Infračervené záření nelze jednoduše ztotožnit s tepelným zářením. Je to jen jedna složka tepelného záření a přesněji bychom ji měli označit slovním spojením *infračervené tepelné záření*. V řadě technických aplikací se používá infračervené záření generované změnami energie částic s nábojem v atomech, popř. ve struktuře látkového prostředí a *není to tepelné záření*.

Literatura

- [1] Lepil, O.: Fyzika pro gymnázia. Optika. 7. vydání, Prometheus, Praha, 2023.

O zobrazování rovinným zrcadlem

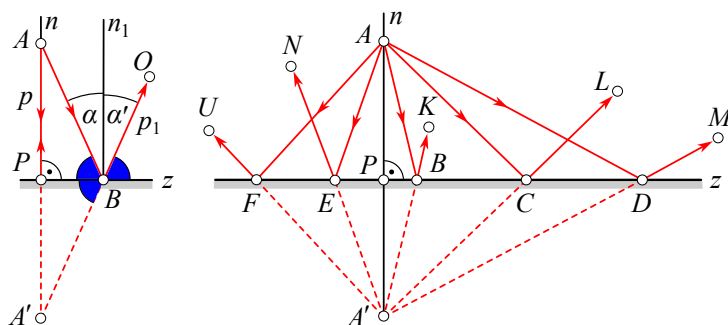
PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

S rovinným zrcadlem se žáci seznamují v 7. ročníku ZŠ a později i na střední škole. Při výuce se občas může objevit zdánlivý nesoulad mezi teorií a praxí. Uvedeme, jak se téma pravděpodobně vyučuje a co lze k lepšímu porozumění doplnit.

1. Konstrukce obrazu bodu umístěného před zrcadlem

Obvykle vycházíme ze zákona odrazu a situace na obr. 1 vlevo. Kolmý paprsek p z bodu A , se v bodě P roviny zrcadla odráží do protisměru. Jiný paprsek p_1 dopadá na zrcadlo pod úhlem α a odráží se v bodě $B \in z$ pod úhlem $\alpha' = \alpha$. Oba úhly měříme od normály k rovině zrcadla v místě dopadu a odražený paprsek zůstává v rovině dopadu dané normálou a bodem A .



Obr. 1 Zobrazení bodu A zrcadlem, nákres v rovině dopadu

Odražené paprsky p_1 a p se rozbíhají. Zdánlivý obraz A' bodu A se nachází v průsečíku jejich prodloužení. Snadno lze ověřit, že $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle A'BP|$. Ze shodnosti pravoúhlých trojúhelníků ABP a $A'BP$ podle věty *usu* pak plyne, že jsou body A' , A souměrně sdružené podle průsečnice z roviny dopadu s reflexní rovinou σ .

Obrazem útvaru M je množina

The figure consists of two diagrams illustrating the principle of least time. The left diagram shows a light ray path from point A to point C' via a point Q on a vertical interface z_1 . A yellow path is highlighted, showing the ray from A to Q and then from Q to C'. Points B, U, and C are also marked on the left side of the interface, and B', A', and C' are marked on the right side. Red arrows indicate the ray paths, and dashed red lines show the virtual paths. The right diagram shows multiple rays originating from point O and passing through points B, D, E, and C on a vertical interface z_1 to points B', D', E', and C' on the other side. Red arrows indicate the ray paths, and dashed red lines show the virtual paths.

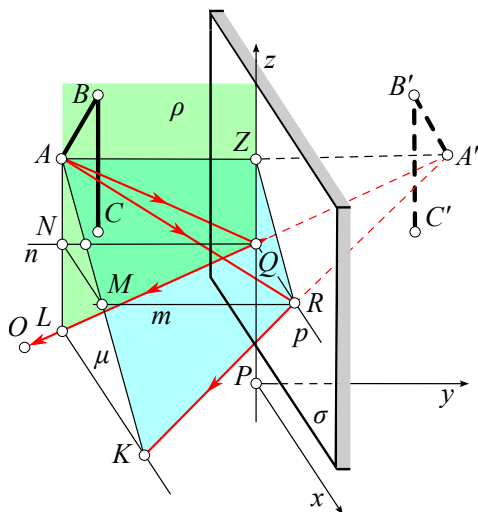
Obr. 3 Zobrazování číslice 1 rovinným zrcadlem

mené čáry¹⁾ jež má tvar číslice 1. Na internetu jej nalezneme v různých provedeních. Jedno z nich je překresleno na obr. 3 vlevo. Co asi odpoví učitel, když se žák zeptá, zda paprsky AUA a AQO procházejí neprůhlednou vrstvou BC ? Jejich zakreslení lze považovat za chybné, ale můžeme je i korektně zdůvodnit.

Jedná-li se o situaci v rovině $\rho = ABC$ včetně polohy oka, neprojde světlo vrstvou BC a oko $O \in \rho$ vidí z „jedničky“ jen úsečku $B'C'$ (obr. 3 vpravo). Víme již, že obraz je s předmětem souměrně sdružený podle z , a tak umíme do obrázku dokreslit i to, co paprsky roviny ρ nezobrazí.

Rozumnější interpretace levé části obr. 3 spočívá v tom, že rozšíříme představu do prostoru a obrázek pokládáme za „pohled z boku“. Přesněji řečeno, zakreslení paprsků lze považovat za správné, chápeme-li je jako kolmé průměty paprsků z předmětového prostoru do roviny ρ .

Žákům asi postačí, když si takový pohled ve směru kolmém na rovinu ρ dokážou představit. Přesné zdůvodnění požaduje ukázat, že pro čáru AQO na obr. 4, která je kolmým průmětem kteréhokoliv paprsku ARK s bodem odrazu $R \neq Q$ na přímce $p \perp ABC$ sestrojené v bodě Q , platí zákon odrazu.



Obr. 4 Prostorový pohled na zobrazení číslice 1 rovinným zrcadlem

¹⁾Termíny *lomená čára*, *bod*, *úsečka*, *rovina* apod. v takovýchto situacích neoznačují ideální matematické objekty, ale jejich modely, trojrozměrná tělesa s potřebnými fyzikálními vlastnostmi.

Na obr. 4 je kvůli lepší orientaci zakreslena kartézská soustava souřadnic $Pxyz$. Předmět ABC i jeho obraz $A'B'C'$ leží v rovině $\rho = yz$ kolmé na reflexní rovinu $\sigma = xz$, rovina $\mu \parallel \sigma$ prochází bodem A . Je stejně vzdálena od σ jako bod A' . Paprsek AR protne po odrazu rovinu μ v bodě K , jehož kolmý průmět do roviny ρ je označen L . Přímkou $m = RM$ a $n = QN$ jsou normály k rovině σ , a tedy i k μ .

Tvrzení, že kolmý průmět AQL paprsku ARK splňuje zákon odrazu, je zřejmé z faktu, že bod Q je středem přepony LA' pravoúhlého trojúhelníku $A'LA$. Je tudíž i středem mu opsané kružnice a z rovnosti $|QA| = |QL|$ plyne, že normála n půlí úhel AQL .

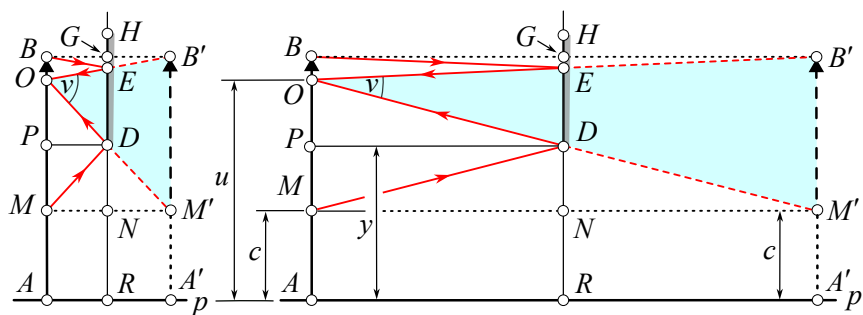
Následující příklad bývá často v různých variantách uváděn. Podrobně jej vyřešíme, protože je úvodem k níže popsanému paradoxu.

Příklad 1

Jana má výšku $v = 166$ cm, šířku $d = 44$ cm, oči 156 cm nad zemí a stojí před svisle umístěným zrcadlem ve vzdálenosti $a = 0,5$ m. Zrcadlo tvaru obdélníku je (bez rámu) vysoké 40 cm, široké 30 cm, dolní okraj se nachází 134 cm nad podlahou.

- Co ze své postavy vidí?
- Jak se změní předchozí výsledky, nachází-li se Jana 2 m před zrcadlem?
- Jaké budou minimální rozměry zrcadla a jak vysoko bude umístěno, má-li se v něm vidět celá?

Řešení. Na obr. 5 představuje úsečka AB Janu, bod O její oko, H a D po řadě horní a dolní okraj zrcadla. Položme ještě $u = |AO| = 156$ cm, $y = |RD| = 134$ cm a $c = |A'M'| = |AM|$. Červeně jsou vyznačeny paprsky ohraničující obraz Jany v zrcadle.



Obr. 5 Zobrazení úsečky AB pro dvě různé vzdálenosti od zrcadla

- Zrcadlo má výšku $n = |DH| = 40$ cm a šířku $m = 30$ cm. Zřejmé

platí $|RH| = y + n = 174 \text{ cm} > v$, a proto zrcadlo Janě zobrazí i část prostoru nad ní. Určíme navíc výšku $|EH|$ nevyužité plochy zrcadla nad její hlavou. Paprsek z bodu B se odráží v místě E , stejně vzdáleném od podlahy jako střed základny OB rovnoramenného trojúhelníku BOE . Je tedy

$$|RE| = \frac{u + v}{2} = 161 \text{ cm}$$

a

$$|EH| = |RH| - |RE| = 13 \text{ cm}.$$

Délku c nezobrazené části Janiny postavy nalezneme analogicky s využitím trojúhelníku OMD :

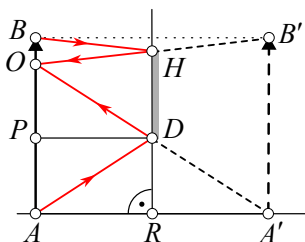
$$y = \frac{u + c}{2} \Rightarrow c = 2y - u. \quad (1)$$

Jana se v zrcadle vidí od výšky $c = 2 \cdot 134 - 156 = 112 \text{ cm}$, tzn. přibližně od pasu nahoru. Patrně se zobrazí v celé své šířce. Než to ověříme, povšimněme si trojúhelníku $OM'B'$ na obr. 5. Délka jeho střední příčky DE , je polovinou výšky obrazu: $|M'B'| = 2|DE|$.

Ve vodorovném směru je situace analogická. Má-li se Jana v zrcadle vidět do šířky celá, musí platit $d \leq 2m$, což je pro zadané hodnoty splněno.

b) Z předchozích výpočtů i situací nakreslených na obr. 5 je zřejmé, že rozměry obrazu nezávisí na vzdálenosti předmětu od zrcadla. Je sice pravda, že Jana uvidí z větší vzdálenosti svůj obraz menší, to je však jen důsledek perspektivy. Zmenšuje se zorný úhel ν , ale pozorovaný objekt velikost nemění.

c) Pomocí dosavadních úvah, resp. z obr. 6, snadno zjistíme, že minimální výška a šířka zrcadla jsou $n_{\min} = \frac{v}{2} = 83 \text{ cm}$ a $m_{\min} = \frac{d}{2} = 22 \text{ cm}$.



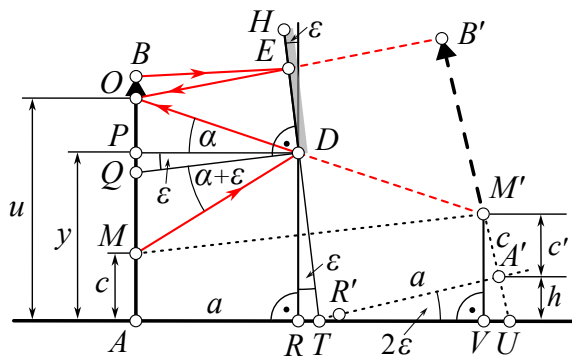
Obr. 6 Zobrazení celé úsečky AB v zrcadle minimálních rozměrů

Poloha dolního konce zrcadla je dána hodnotou $y = |RD| = \frac{u}{2} = 78 \text{ cm}$, jak plyne z trojúhelníku $AA'O$.

3. Paradox zrcadlového obrazu vzdalující se osoby

Pro situaci z příkladu (1) nezávisí poměr $|B'M'| : |B'A'|$ na vzdálenosti předmětu AB od zrcadla. Kdysi mi při výuce studentka tvrdila, že to není pravda. Když doma od zrcadla poodstoupí, vidí ze své postavy více.

Nezbylo, než problém podrobněji prozkoumat. Ukázalo se, že zrcadla na stěnách většinou nevisí svisle, neboť jejich horní okraj má díky závěsné skobě určitý odstup od stěny. Proto se vertikální úsečka nezobrazí svisle a obrazem vodorovné podlahy AR je nakloněná rovina, jejíž povrch je na obr. 7 znázorněn polopřímkou TA' , kde bod T znázorňuje průsečnici reflexní roviny s rovinou podlahy. Když se Jana reprezentovaná úsečkou AB od zrcadla vzdaluje, vzdaluje se od něj i její obraz $A'B'$ a přitom se posouvá po nakloněné rovině TA' nahoru. Díky tomu pak Jana může vidět z větší vzdálenosti větší část své své postavy.



Obr. 7 Zobrazení úsečky AB v nakloněném zrcadle

Příklad 2

Zrcadlo o šířce $m = 35$ cm a výšce $n = 50$ cm visí na svislé stěně. Dolním okrajem se o stěnu opírá ve výšce $y = 150$ cm, horní má od stěny vzdálenost $b = 2,5$ cm. Šířka rámu zrcadla je zanedbatelná. Jana má výšku 166 cm a oči 156 cm nad zemí.

a) Od jaké výšky se Jana v zrcadle vidí, stojí-li ve vzdálenosti a od něj?

Řešte obecně a pak vyčíslete pro hodnoty $a_1 = 0,5$ m a $a_2 = 3$ m.

b) Z jaké vzdálenosti od zrcadla se v něm Jana uvidí od výšky 90 cm?

Řešení. Použijeme označení na obr. 7. Pro úhlovou odchylku ε zrcadla od svislé roviny zjistíme, že $\sin \varepsilon = b/n = 0,05000$, $\varepsilon = 2,8660^\circ = 0,05002$ a

$\tan \varepsilon = 0,050\,06$. S přesností na tři platné číslice tedy platí

$$\sin \varepsilon = \tan \varepsilon = \varepsilon \quad \text{a} \quad \sin 2\varepsilon = \tan 2\varepsilon = 2\varepsilon. \quad (2)$$

a) Délku $c = |A'M'| = |AM|$ určíme nejprve přibližnou metodou. Hodnota ε je dostatečně malá, a proto se nedopustíme velké chyby když zanedbáme odklon obrazu $A'B'$ od svislého směru a při označení podle obr. 7 položíme $|TR'| = |TR| = y\varepsilon$, $|A'U| = h = 2\varepsilon|TA'| = 2\varepsilon(|TR'| + |R'A'|) = 2\varepsilon(y\varepsilon + a)$ a $c' = c$.

Z postřehu, že úsečka RD je při zanedbání vzdálenosti RT střední příčkou lichoběžníku $OAVM'$, plyne $2|RD| = |AO| + |VM'|$ neboli

$$2y = u + 2\varepsilon(y\varepsilon + a) + c. \quad (3)$$

Odtud určíme

$$c = 2y(1 - \varepsilon^2) - 2\varepsilon a - u \quad (4)$$

nebo při zanedbání hodnoty ε^2 (malé veličiny druhého řádu)

$$c = 2y - u - 2\varepsilon a. \quad (5)$$

Povšimněme si souvislost s (1). Hodnotu c ze vztahu pro svislé zrcadlo pouze zmenšíme o výšku místa, v němž se nachází obraz A' bodu A . Kdybychom vzali toto tvrzení jako výchozí předpoklad, nemuseli jsme vztah (5) tak složitě odvozovat.

Vyčíslením zjistíme $c_1 = 139$ cm pro $a_1 = 0,5$ m, $c_2 = 114$ cm pro $a_2 = 3$ m. Závislost je lineární, zvětší-li Jana svou vzdálenost o 1 m, posune se její obraz o 10 cm výše.

K přesnějšímu výpočtu délky c vyjdeme z chodu paprsků na obr. 7. Pomocí pravoúhlých trojúhelníků MDP a DOP zjistíme

$$c = y - |PM|, \quad |PM| = a \tan(\alpha + 2\varepsilon) \quad \text{a} \quad \alpha = \arctan \frac{u - y}{a}. \quad (6)$$

Po dosazení daných hodnot vypočteme $c_1 = 138,9$ cm a $c_2 = 113,9$ cm. Výsledky zjištěné podle přibližného vztahu (5) jsou s přesností na tři platné číslice stejné.

b) Vzdálenost a , z níž se Jana v zrcadle uvidí od výšky $c = 90$ cm je obtížné vypočítat z přesných vztahů (6). Pomocí (5) však snadno nalezneme

$$a = \frac{1}{2\varepsilon}(2y - u - c) = 540 \text{ cm}.$$

Je to hodnota většinou již těžko dosažitelná v běžných obytných místnostech. Navíc by Jana viděla svůj obraz ve vzdálenosti 11,8 m, což by jí znesnadnilo pozorování detailů.

Zpětně můžeme pro $a = 540$ cm vyčíst c užitím rovností (6). Vyjde $c = 89,7$ cm, což se od původně zadané hodnoty liší jen o 3 mm.

Závěr

Zobrazování zrcadlem je zajímavé a didakticky dobře zpracované téma, viz například [1] a [2]. Proto nebylo cílem článku učivo rozšiřovat nebo jeho metodiku měnit. Spíše šlo o to poskytnout čtenáři několik námětů k zamyšlení nebo příležitostnému využití při výuce.

Literatura

- [1] Němec, P.: Zobrazení rovinným zrcadlem Fyzika 7 ZŠ, video, dostupné na <https://www.bing.com/videos/riverview/relatedvideo?q=rovinn%c3%a9+zrcadlo+youtube&mid=4D4E2CEF6A66A6A9606C4D4E2CEF6A66A6A9606C&FORM=VIRE>.
- [2] Lepil, O.: Fyzika pro gymnázia. Optika. 7. vydání, Prometheus, Praha, 2023.

Studium mionů pomocí mionového teleskopu

SAMUEL SOJKA – MIROSLAV MAŠLÁN

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Kosmické záření je nedílnou součástí našich životů, jelikož každý okamžik skrze nás s největší pravděpodobností zrovna prochází některá z částic, která má prvopočátek hluboko ve vesmíru. Ačkoliv to naše životy nijak neovlivní, je možné vsudypřítomnost těchto částic využít k řadě vědeckých účelů. Přestože od prvního objevení těchto částic uplynulo již přes 100 let, stále objevujeme nové vlastnosti a způsoby využití těchto částic. Ať už se jedná o studium vesmíru, rozmanité aplikace v astrofyzice, či pro různé metody tomografie, kosmické záření je nedílnou součástí rozvoje fyziky v posledním století.

Bakalářská práce [1] nesoucí stejný název jako tento článek se zabývá konstrukcí zařízení, které je schopné kosmické záření detekovat. Přesněji je sestrojeno a optimalizováno tak, že detekuje primárně miony, což jsou částice vznikající při rozpadu vesmírných pionů. Miony nás zajímají z toho důvodu, že díky jejich vlastnostem dokáží dobře pronikat skrze olověnou vrstvu, kterou odstíníme ostatní kosmické záření a veškeré šumy. V druhé části práce jsou získaná data zpracována a vyhodnocena, čímž je mimo jiné potvrzen barometrický jev, který v první polovině 20. století objevili fyzikové L. V. Mysovskij a L. Tuwim.

Práce byla původně zamýšlena především jako experimentální, nicméně po celou dobu se nabízela také myšlenka využít teleskop jako didaktickou pomůcku, která by mohla studentům středních škol přiblížit nejen astrofyziku a astronomii, ale i přístrojovou a experimentální fyziku. Zároveň by mohl sloužit jako prostředek pro rozvoj dovedností v oblasti zpracování dat. Podobnou problematikou se zabývá například projekt CZELTA [2], avšak na rozdíl od něj umožňuje námi navržený teleskop realizovat detekci i samostatně, přímo v podmínkách školní laboratoře.

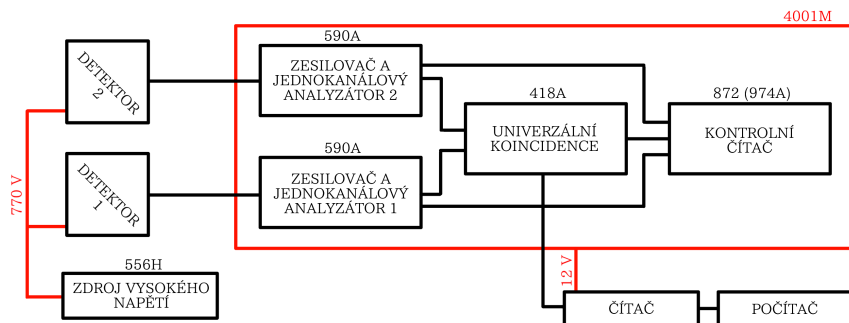
Konstrukce teleskopu

Mionový teleskop – ač nejde o teleskop v pravém slova smyslu – byl zkonstruován ze dvou scintilačních detektorů, mezi něž byla vložena olověná vrstva. Jeho princip je poměrně jednoduchý. Sekundární kosmické částice, vznikající při srážkách primárních kosmických paprsků s atomy v zemské atmosféře, se obvykle rozdělují na měkkou a tvrdou složku. Měkkou složku tvoří částice, které lze snadno odstínit vhodným materiálem, například olovem. Tvrdá složka naopak většinou takovou vrstvou projde. Miony patří právě do této tvrdé složky a v našich nadmořských výškách jsou zároveň nejčastější. Díky tomu je lze odlišit od ostatních sekundárních částic s vysokou úspěšností právě tímto způsobem.

Teleskop tedy detekuje částice schopné proniknout olověným stíněním. Klíčová je také volba dvou detektorů. Pokud bychom použili pouze jeden detektor, nad nímž by se nacházela olověná vrstva, podařilo by se sice odstínit nechtěné částice přicházející shora, ale měření by výrazně rušily šumy a částice přicházející z jiných směrů. Nejjednodušší a zároveň účinné řešení spočívá v použití dvou detektorů, mezi nimiž je umístěna olověná deska tak, aby zakrývala všechny možné dráhy mezi libovolnými body obou detektorů. Díky tomu nemůže žádná částice projít oběma detektory, aniž by zároveň nepronikla olověným stíněním. Použití dvou detektorů navíc omezuje prostorový úhel, z něhož mohou detekované částice přicházet, což

snižuje jejich celkový počet. Jelikož porovnáváme relativní rozdíly v určitých situacích a za různých podmínek, snížení absolutní četnosti nám nevadí.

Abychom mohli s takovouto sestavou pracovat, musíme najít způsob, kterým ověříme, že částice skutečně prošla oběma detektory, a nejednalo se o dvě různé částice. Ačkoliv tuto skutečnost nemůžeme nikdy úplně vyloučit, nejlepším řešením je využití koincidenční jednotky, která zaregistruje signál pouze v případě, kdy přijme signál od obou detektorů v rámci definovaného časového okna. Jako ochranný prvek před zaregistrováním dvou různých částic jsou mezi detektory a koincidenční jednotkou umístěny zesilovače s jednobokými analyzátory. Slouží k odfiltrování slabých signálů ze scintilačních detektorů, které typicky odpovídají částicím s nízkou energií – a právě těch je v šumu pozadí nejvíce. Výskyt dvou takových částic ve stejném okamžiku není nepravděpodobný, což by mohlo vést k falešné detekci. Výhodou je, že detekované miony mají vysokou energii, a tudíž bez problémů projdou tímto filtrem. Zesilovačem je signál poté zesílen pro jeho lepší zpracování koincidenční jednotkou. Pro lepší pochopení konstrukce přikládáme na obr. 1 schéma základních funkčních bloků teleskopu.

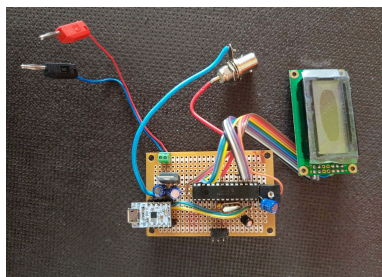


Obr. 1 Blokové schéma mionového detektoru

Jak můžeme vidět, signál z koincidenční jednotky je poté vyslán do čítače – speciálně navrženého zařízení schopného tyto signály zpracovávat a zaznamenávat do počítače. Čítač zde funguje jako výstupní periferie celého teleskopu. Je tvořen mimo jiné mikropočítačem AVR32DB28, což nám umožňuje funkci čítače dle potřeby přizpůsobovat a upravovat. V našem experimentálním režimu byl čítač nastaven tak, aby každou hodinu zaznamenal do počítače počet detekovaných signálů za danou hodinu spolu s číslem odpovídajícím počtu hodin uplynulých od spuštění měření. Veli-

kou výhodou zařízení je i možnost online komunikace s teleskopem – za předpokladu vhodného softwarového vybavení připojeného počítače – což výrazně usnadňuje obsluhu a dohled nad měřením. Fotografie čítače můžeme vidět na obr. 2, jeho schéma a podrobnější popis je dostupný z [1].

Kromě námi navrženého čítače byl použit také kontrolní čítač, jehož hlavním úkolem byla kontrola správné funkce jak samotného teleskopu, tak našeho čítače. Jeho výhodou byla možnost čítat impulzy z více kanálů. Díky tomu bylo možné sledovat nejen počet částic, které prošly koincidenční jednotkou, ale také počet částic, které prošly jednotlivými detektory, což nám dalo jistý vhled do efektivity našeho filtrování.



Obr. 2 Čítač s převodníkem

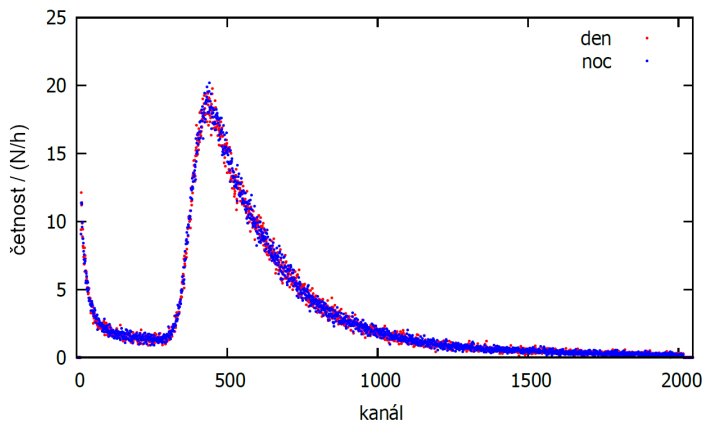
Po dokončení konstrukce byl celý teleskop umístěn na zátěžový trojpatrový průmyslový vozík, který umožňuje teleskop přemísťovat. Díky tomu jsme byli schopni provést měření v různých patrech Přírodovědecké fakulty UP a ověřit, zda je železobetonová konstrukce budovy schopna odstínit část toku mionů. Finální verzi sestrojeného teleskopu můžeme vidět na obr. 3.



Obr. 3 Mionový teleskop

Vyhodnocení získaných dat

Po zhotovení a optimalizaci teleskopu bylo započato první dlouhodobé měření. Z dat získaných během testování teleskopu vyvstala otázka, zda je četnost detekovaných mionů závislá na denní době – přesněji řečeno, jestli se jejich tok liší přes den a během noci. První dlouhodobé měření trvalo asi týden a bylo zaměřeno právě na zodpovězení této otázky. Výsledkem měření je graf, který můžeme vidět na obr. 4, jenž zobrazuje průměrnou četnost detekovaných mionů v závislosti na intenzitě příchozího signálu.



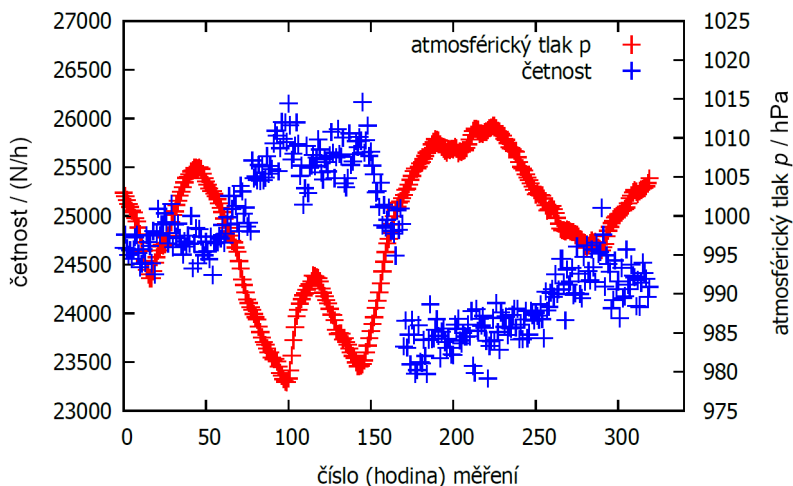
Obr. 4 Energetické spektrum registrovaných mionů – porovnání den/noc

Jak můžeme vidět, už toto měření nám ukazuje, že závislost na části dne nelze pozorovat. Celkový počet detekovaných mionů se lišil o pouhých 0,8 %, a při opakovaném měření se tento relativní rozdíl snížil na 0,3 %.

Za zmínku stojí také využití energetického spektra pro zobrazení získaných dat. Ačkoliv toto zobrazení poskytuje určitý vhled do chování detekovaných mionů, ukázalo se – jak bylo podrobněji diskutováno v práci [1] – že na základě odezvy použitých scintilačních detektorů nelze zpětně spolehlivě určit energii jednotlivých mionů, z hlediska jejich energie je tak můžeme porovnávat jen omezeně, relativně k jinému měření.

Druhé dlouhodobé měření mělo za cíl jednak ověřit předchozí závěry týkající se závislosti četnosti detekovaných mionů na denní době, jednak porovnat získaná data s meteorologickými údaji z oblasti měření. Výsledky ukázaly výraznou nepřímou závislost mezi četností mionů a atmosférickým tlakem, což odpovídá známému barometrickému jevu. Zaznamenali jsme však i určitou závislost na teplotě.

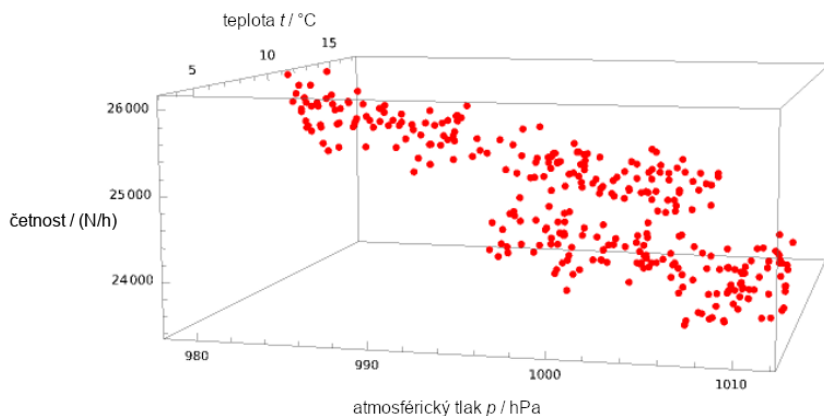
Po tomto zjištění proběhla řada měření, ve kterých jsme porovnávali získanou četnost právě s těmito dvěma meteorologickými údaji. Zároveň jsme celý teleskop přemísťovali mezi patry budovy Přírodovědecké fakulty, abychom mohli ověřit i stínící efekt železobetonové konstrukce. Výsledkem tohoto snažení je série grafů, které ukazují časový průběh četnosti detekovaných mionů a tlaku či teploty, což nám umožňuje vizualizovat očekávanou závislost. Jeden z těchto grafů můžeme vidět na obr. 5.



Obr. 5 Graf časového průběhu četnosti detekovaných mionů na tlaku – sklepy

Vzhledem k tomu, že teplota a tlak jsou vzájemně provázány stavovou rovnicí ideálního plynu, bylo nutné ověřit, že pozorovaná závislost četnosti mionů na teplotě není pouze zprostředkovaným důsledkem její korelace s tlakem. Za tímto účelem byly vytvořeny trojrozměrné grafy, které umožňují současné zobrazení četnosti mionů, teploty a atmosférického tlaku. Příklady takto převedeného grafu z dat na obr. 5 můžeme vidět na obr. 6.

Za celkový výsledek všech měření by se daly považovat hodnoty, získané pomocí lineární regrese, tzn. proložení trojrozměrných grafů rovinou a poté odečtením parametrů její obecné rovnice. Výsledné hodnoty pro měření na jednotlivých patrech můžeme vidět v tab. 1. Parametr a pro nás není tolik důležitý, jelikož pouze ukazuje absolutní polohu roviny. Parametr β nám vyjadřuje závislost četnosti na atmosférickém tlaku a parametr γ nám vyjadřuje závislost četnosti na teplotě.



Obr. 6 Graf závislosti četnosti detekovaných mionů na teplotě a tlaku – sklep

Pozorní čtenáři si mohou všimnout, že na obr. 6 jsou data „rozdělena“ do dvou rovin. Tento jev se nám nepodařilo jednoznačně vysvětlit, avšak všimli jsme si, že se vyskytuje v místech, kde nastává prudká změna atmosférického tlaku. Máme podezření, že se tak děje v důsledku změny funkce scintilačních detektorů při změně jejich teplot, avšak na toto chování jsme narazili až při konci našich měření, tudíž nebyl čas tuto hypotézu ověřit. Jak je ale vidět, toto rozdělení zachovává stejný sklon roviny a mění jen její absolutní pozici, tudíž parametr a , který pro nás není zásadní.

Tabulka 1: Porovnání získaných parametrů pro všechna hlavní měření

Parametry fitu	Sklep	4. podlaží	Dlouhodobé měření	6. podlaží
$a/(\text{N} \cdot \text{h}^{-1})$	93 300(2 000)	65 200(2 700)	57 400(2 300)	72 000(13 000)
$\beta/(\text{N} \cdot \text{hPa}^{-1} \cdot \text{h}^{-1})$	-68,9(2,0)	-31,7(2,7)	-23,2(2,3)	-29(12)
$\gamma/(\text{N} \cdot ^\circ\text{C}^{-1} \cdot \text{h}^{-1})$	10(6)	16(5)	73(8)	0(23)

Jak můžeme z tab. 1 vyčíst, podařilo se nám ověřit existenci barometrického jevu. Závislost na teplotě je ve většině měření také zaznamenatelná, ale při měření v 6. podlaží se nám potvrdit nepodařila, tudíž nelze vyslovit jednoznačný závěr. Je avšak možné, že teplotní závislost odráží spíše změnu funkce scintilačních detektorů při rozdílné teplotě. Stínící schopnost železobetonové konstrukce byla v práci [1] taktéž potvrzena.

Využití ve výuce fyziky

Fyzika mikrosvěta pro mnoho žáků základních a středních škol často nepatří mezi nejoblíbenější části fyziky. Důvodů může být více, ale jedním z hlavních je nepochybně nedostatek dostupných školních pokusů, které by tuto oblast přiblížily prostřednictvím přímé zkušenosti. Většina školních experimentů má spíše modelový a demonstrační charakter, ale často postrádají motivační potenciál vycházející z práce s reálnými daty nebo jevy. Mnoha žákům se proto může fyzika mikrosvěta může jevit jako vzdálená, abstraktní nebo příliš obtížná. Využívání reálných, byť zjednodušených experimentů ve výuce se proto jeví jako velmi vhodné.

Přesná kopie našeho mionového detektoru rozhodně není něco, o co by se nutně měli středoškolští učitelé běžně pokoušet. Scintilační detektory spolu s použitou elektronikou a zátěžovým vozíkem nejsou běžnou součástí vybavení školních fyzikálních kabinetů a pořizovací náklady celého zařízení jsou z pohledu výuky zbytečně vysoké. Při úvodní rešerši této problematiky jsme však narazili na projekt Cosmic Watch [3], který nabízí detailní návody na sestavení obdobného mionového detektoru, ovšem za cenu v řádu „pouhých“ tisíců korun. Na webových stránkách projektu je volně dostupný ke stažení veškerý potřebný software a seznam součástí nutných k sestavení vlastního mionového teleskopu. Ačkoliv konstrukce není úplně triviální, podrobný popis jednotlivých kroků ji činí zvládnutelnou i pro motivované zájemce. Takový projekt by mohl být zajímavou výzvou pro zapálené učitele fyziky, kteří chtějí přiblížit moderní částicovou fyziku svým studentům prostřednictvím reálného experimentu.

Otázkou zůstává, jak efektivně zapojit žáky do experimentální činnosti. Prvním krokem by mělo být jasné vymezení cílů experimentu. Pro mladší žáky může být vhodné zaměřit se na ověření stínícího účinku školní budovy, čímž se přirozeně upevňuje jeden z principů radiační ochrany. U starších žáků lze uvažovat i o experimentálním ověření barometrického jevu, což by však vzhledem k náročnosti interpretace mohlo být vhodné spíše pro odborné semináře nebo volitelné předměty. V obou případech je však zásadní práce se získanými daty. A právě to představuje jednu z klíčových výhod tohoto typu experimentu – na rozdíl od většiny běžných školních pokusů, kde žáci měří přímo výsledek, zde musí zpracovávat rozsáhlejší množství dat. To přirozeně vede k využití počítačů a propojení fyziky s informatikou, plně v souladu s požadavky nových RVP i současným pojetím fyziky jako školního předmětu. Na druhé straně je třeba přiznat, že právě tato výhoda je zároveň i nevýhodou – experiment je časově náročný

a vyžaduje více vyučovacích hodin, které by se mu musely obětovat. Klíčové proto je najít vhodnou organizační formu, jak jej do výuky zařadit – například jako dlouhodobý projekt, mezioborovou aktivitu nebo součást badatelských seminářů. Přes tyto praktické obtíže je zjevné, že ve výuce chybí větší množství experimentů zaměřených na fyziku mikrosvěta a zde prezentovaný princip může představovat jeden z možných způsobů, jak tuto mezeru alespoň částečně zaplnit.

Literatura

- [1] *Sojka, S.*: Studium mionů pomocí mionového teleskopu. Bakalářská práce, PřF UP, Olomouc, 2024. Online. Dostupné z: <https://theses.cz/id/tt8wz4/>
- [2] *ČVUT. CZELTA*. 2014. Online. [cit. 2024-07-19]. Dostupné z: <http://czelta.utef.cvut.cz/publicweb/>
- [3] *Przewłocki, P., Frankiewicz, K.*: CosmicWatch [online]. 2017 [cit. 2024-04-04]. Dostupné z: <http://cosmicwatch.lns.mit.edu/about>



V pondělí 23. 6. 2025 proběhla na PřF UP v Olomouci tradiční Celostátní přehlídka studentských prací z didaktiky fyziky, které se zúčastnilo celkem 11 studentů VŠ. Více informací na stránce https://exfyz.upol.cz/didaktika/soutez_2025/.

Zjištění počtu možností

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V článku si ukážeme, jak lze navrhnout efektivní algoritmus pro řešení úloh typu *Kolika různými způsoby lze něco udělat?* Postup řešení si představeme na třech zdánlivě zcela rozdílných úlohách: kolika různými způsoby můžeme dojet z jednoho bodu silniční sítě do druhého, kolika různými způsoby lze vydláždit pěšinu pomocí dlaždic zadaných rozměrů, kolik existuje různých binárních stromů dané velikosti. Jak uvidíme, základní princip řešení všech těchto úloh bude shodný – použijeme metodu dynamického programování.

Dynamické programování je programovací technika používaná tehdy, když zadanou úlohu pro vstupní data velikosti N sice neumíme bezprostředně vyřešit, ale její řešení dokážeme poměrně snadno sestavit z výsledků úloh stejného charakteru, ale pracujících s menšími vstupními daty. Pro velmi malá vstupní data (např. pro $N = 1$) bývá řešení úlohy triviální. Vyřešíme tedy nejprve tuto triviální úlohu pro $N = 1$, pomocí jejího řešení pak o něco větší úlohu pro $N = 2$, s využitím výsledků těchto dvou úloh dále vyřešíme úlohu pro $N = 3$, atd. Takto stále postupujeme, dokud nedojdeme až k vyřešení úlohy původně požadované velikosti. Na výsledky všech těch menších řešených úloh se nás nikdo neptal a my je ani nedáváme na výstup, ale ukládáme si je a využíváme je při výpočtu řešení větších úloh.

Detailní práce s uloženými hodnotami se liší u různých konkrétních úloh, ale princip zůstává vždy stejný. V některé úloze použijeme každou zapamatovanou hodnotu pouze jednou, často ale budeme využívat tutéž uloženou hodnotu postupně vícekrát. Někdy se dokonce stane, že některé zaznamenané hodnoty nevyužijeme vůbec, ale to při jejich postupném vý-

počtu dopředu nevíme a pro jistotu si je ukládáme všechny. Někdy je zapotřebí pamatovat si v tabulce po celou dobu výpočtu výsledky všech menších úloh, někdy naopak odvodíme řešení pro data velikosti N třeba jen na základě výsledku získaného pro $N - 1$ a stačí tedy pamatovat si v každém kroku výpočtu jenom jednu předchozí hodnotu. Všechny tyto varianty si postupně předvedeme.

Dynamické programování se používá zejména pro řešení dvou základních typů algoritmických úloh:

1. pro kombinatorické úlohy odpovídající na otázku, kolika různými způsoby lze něco udělat,
2. pro optimalizační úlohy odpovídající na otázku, jak nejlépe lze něco udělat.

V tomto článku se budeme věnovat pouze prvnímu případu a ukážeme si několik příkladů takových úloh. K úlohám druhého typu se vrátíme někdy jindy.

Začneme jednoduchým příkladem z teorie grafů. Máme zadán acyklický orientovaný graf s N vrcholy. Slovo acyklický znamená, že graf neobsahuje žádný cyklus, neboli neobsahuje žádnou orientovanou cestu, po níž bychom přišli zpět do výchozího vrcholu. Každý orientovaný graf bez cyklů je možné topologicky uspořádat, tzn. označit jeho vrcholy různými celými čísly od 1 do N takovým způsobem, že každá hrana grafu povede z vrcholu s menším číslem do vrcholu s větším číslem. Jinými slovy, pokud v takto očíslovaném grafu existuje orientovaná hrana z vrcholu i do vrcholu j , potom $i < j$. Předpokládejme tedy, že zkoumaný graf je již topologicky uspořádan. Máme za úkol určit, kolik existuje různých cest z vrcholu 1 do vrcholu N .

Zadaný graf si můžeme představit jako silniční síť s jednosměrnými silnicemi mezi N městy, která jsou očíslována od 1 do N podle výše uvedeného topologického uspořádání. Chceme zjistit, kolika různými způsoby lze po silnicích dojet z města 1 do města N .

Úlohu je možné řešit prohledáváním zadaného grafu do hloubky. Prohledávat začneme ve startovním vrcholu číslo 1. Díky acykličnosti grafu se vůbec nemusíme zabývat evidencí již navštívených vrcholů, výpočet se nemůže zacyklit. Stačí tedy jenom počítat, kolikrát během prohledávání celého grafu přijdeme do cílového vrcholu N . Tím získáme požadovaný výsledek. Implementace takového řešení pomocí rekurzivní funkce je snadná, ale podstatnou nevýhodou tohoto postupu je jeho neefektivita. Počet různých cest z vrcholu 1 do vrcholu N může být značný, v některých grafech

až exponenciální vzhledem k počtu vrcholů N . Algoritmus bude každou z těchto cest procházet, takže jeho asymptotická časová složitost bude v nejhorším případě exponenciální vzhledem k N .

V následující ukázkové implementaci předpokládáme, že zadaný acyklický orientovaný graf je již topologicky uspořádan a je reprezentován maticí sousednosti g . Hodnota $g[x][y]$ je typu boolean a určuje, zda existuje orientovaná hrana z vrcholu x do vrcholu y .

```
def pocet_cest(g, N):
    pocitadlo = 0

    def pruchod(v):
        if v == N:
            nonlocal pocitadlo
            pocitadlo += 1
        else:
            for k in range(v+1, N+1): # hrana do vrcholu k
                if g[v][k]: pruchod(k)

    pruchod(1)
    return pocitadlo
```

Nyní si ukážeme podstatně lepší řešení této úlohy pomocí dynamického programování. Budeme si postupně počítat, kolik existuje různých cest ze startovního vrcholu 1 do vrcholu i pro všechna $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Tyto hodnoty $t[i]$ si budeme ukládat do jednoduché tabulky tvořené jednorozměrným polem velikosti N . Zjevně platí $t[1] = 1$, hledaným výsledkem pak bude poslední hodnota $t[N]$. Zbývá ukázat, jak spočítáme $t[i]$ pro $i > 1$, když už známe předchozí hodnoty $t[1], t[2], \dots, t[i-1]$. Každá cesta z vrcholu 1 do vrcholu i musí končit hranou vedoucí z nějakého vrcholu k do vrcholu i . Vzhledem k topologickému očíslování vrcholů grafu víme, že $k < i$ a hodnotu $t[k]$ proto již známe. Hodnotu $t[i]$ tedy získáme jako součet všech $t[k]$ takových, že v grafu existuje hrana z vrcholu k do vrcholu i .

Do každého vrcholu vede méně než N hran, takže každé $t[i]$ spočítáme v čase $O(N)$. Postupně počítáme N hodnot $t[1], t[2], \dots, t[N]$, a proto celková asymptotická časová složitost uvedeného algoritmu je $O(N^2)$. Prostorová složitost je $O(N)$, neboť si musíme v poli t pamatovat všech N postupně počítaných hodnot.

Také v této programové ukázce předpokládáme, že zadaný acyklický orientovaný graf je již topologicky uspořádan a je reprezentován stejně

jako minule maticí sousednosti g . Hodnota $g[x][y]$ určuje, zda existuje orientovaná hrana z vrcholu x do vrcholu y .

```
def pocet_cest(g, N):
    t = [0] * (N+1)
    t[1] = 1
    for i in range(2, N+1):      # cesty do vrcholu i
        for k in range(1, i):   # hrana z vrcholu k
            if g[k][i]: t[i] += t[k]
    return t[N]
```

Ve druhé úloze budeme dláždit pěšinu šířky 2 a délky N . Použijeme k tomu N obdélníkových dlaždic o velikosti 1×2 (délková jednotka zde není podstatná). Celá pěšina musí být pokryta dlaždicemi, žádné dvě dlaždice se nesmí překrývat. Naším úkolem je určit, kolik různých způsobů vydláždění existuje.

Řešení úlohy opět založíme na metodě dynamického programování. Budeme postupně počítat, kolika různými způsoby lze vydláždit pěšinu délky i pro různé délky $i = 1, 2, 3, \dots, N$. Takto získané hodnoty $t[i]$ si budeme ukládat do pole. Snadno určíme první dvě hodnoty $t[1] = 1$, $t[2] = 2$. Ukážeme, jak spočítat hodnotu $t[i]$ pro $i > 2$ na základě již známých předchozích hodnot. Na úplném konci vydlážděné pěšiny délky i mohou nastat dvě případy. Může tam být

- buď jedna dlaždice napříč a před ní vydlážděná pěšina délky $i - 1$, což znamená $t[i - 1]$ možností,
- nebo dvě dlaždice položené podélně vedle sebe ve směru pěšiny a před nimi je vydlážděná pěšina délky $i - 2$, což představuje dalších $t[i - 2]$ možností.

Žádná jiná možnost vydláždění neexistuje, takže $t[i] = t[i - 1] + t[i - 2]$ pro $i > 2$. Požadovaný výsledek pro pěšinu délky N získáme jako poslední hodnotu v poli, tedy číslo $t[N]$.

Každou z N hodnot $t[1], t[2], \dots, t[N]$ spočítáme tentokrát v konstantním čase, takže celková asymptotická časová složitost popsaného řešení je pouze $O(N)$. Podle výše uvedeného algoritmu počítáme a ukládáme postupně N hodnot $t[i]$, což vede k řešení s prostorovou složitostí $O(N)$. Můžeme ho snadno zapsat ve tvaru funkce v Pythonu:

```
def pocet_dlazdeni(N):
    t = [0] * (N+1)
    t[1], t[2] = 1, 2
```

```

for i in range(3, N+1): # počet dláždění délky i
    t[i] = t[i-1] + t[i-2]
return t[N]

```

Všimněte si, že na rozdíl od předchozí úlohy spočítáme každé $t[i]$ pouze pomocí dvou bezprostředně předcházejících hodnot $t[i-1]$, $t[i-2]$. Ve skutečnosti tedy vůbec nepotřebujeme pole t velikosti N . Místo něj vystačíme se dvěma proměnnými na uložení dvou dosud posledních hodnot, starší hodnoty si nemusíme pamatovat. Při dobré implementaci má tak celé řešení dokonce konstantní prostorovou složitost, jak ukazuje i následující funkce:

```

def pocet_dlazdeni(N):
    a, b = 1, 2
    for i in range(3, N+1): # počet dláždění délky i
        a, b = b, a + b
    return b

```

Poznamenejme ještě, že takto získaná posloupnost hodnot

$$t[i] = 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

je v matematice velmi známou posloupností Fibonacciho čísel.

Ve třetím příkladu budeme zkoumat, kolik existuje různých binárních stromů tvořených přesně N vrcholy. Binárním stromem rozumíme orientovaný strom s jedním význačným vrcholem (kořenem), ze kterého vede cesta do všech ostatních vrcholů. Každý vrchol může mít nejvýše dva potomky. Každý vrchol kromě kořene má právě jednoho předka, kořen předka nemá.

Také tuto úlohu budeme řešit dynamickým programováním. Postupně určíme počet binárních stromů s 0 vrcholy, s 1 vrcholem, se 2 vrcholy, ... atd. Získané hodnoty si budeme ukládat do pole t , takže $t[i]$ bude určovat počet různých binárních stromů tvořených i vrcholy. Hledaným výsledkem bude údaj $t[N]$. Nejprve opět stanovíme počáteční hodnoty, zjevně $t[0] = 1$, $t[1] = 1$. Nyní potřebujeme odvodit vzorec pro výpočet $t[i]$ pro $i > 1$, když už známe hodnoty $t[0]$, $t[1]$, ..., $t[i-1]$.

Binární strom tvořený i vrcholy má jeden vrchol v kořeni a o zbývajících $i-1$ vrcholů se musí podělit levý a pravý podstrom. Je-li v levém podstromu k vrcholů, pak v pravém jich bude $i-k-1$. Každá volba $k = 0, 1, 2, \dots, i-1$ vede k jinému celkovému tvaru binárního stromu. Pro

zvolené k má levý podstrom $t[k]$ různých možných tvarů, zatímco pravý podstrom má $t[i - k - 1]$ různých možných tvarů. Přitom každá kombinace levého a pravého podstromu představuje jiný celkový tvar stromu, což pro pevně zvolené k dává $t[k] \cdot t[i - k - 1]$ možností. Počet všech různých binárních stromů s i vrcholy pro $i > 1$ tedy můžeme vyjádřit takto:

$$t[i] = t[0] \cdot t[i - 1] + t[1] \cdot t[i - 2] + t[2] \cdot t[i - 3] + \dots + t[i - 1] \cdot t[0]$$

Z výše uvedeného vzorce pro výpočet $t[i]$ je zřejmé, že každou hodnotu $t[i]$ spočítáme v čase $O(N)$. Postupně určujeme hodnoty $t[0], t[1], t[2], \dots, t[N]$, takže asymptotická časová složitost celého výpočtu je $O(N^2)$. Při výpočtu $t[i]$ využíváme všechny předcházející hodnoty, které proto musíme mít uložené v datové struktuře velikosti $O(N)$. Prostorová složitost popsaného algoritmu je tudíž $O(N)$.

Opět si ukážeme, jak může vypadat jednoduchá implementace popsaného řešení pomocí funkce v Pythonu:

```
def pocet_binstromu(N):
    t = [0] * (N+1)
    t[0], t[1] = 1, 1
    for i in range(2, N+1): # binární stromy s i vrcholy
        for k in range(i): # počet vrcholů v levém podstromu
            t[i] += t[k] * t[i-k-1]
    return t[N]
```

Na závěr pro zajímavost doplníme poznámku, že takto získaná posloupnost čísel

1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1 430, 4 862, 16 796, 16 796, ...

je v matematice známa jako Catalanova čísla. Nachází uplatnění při řešení řady různých kombinatorických problémů. N -té Catalanovo číslo lze spočítat podle explicitního vzorce bez využití dynamického programování, to ale není námětem našeho článku a případní zájemci si mohou informace sami dohledat.

Generativní umělá inteligence

Díl druhý: Umělý neuron Warrena

McCullocha a Waltera Pittse

EDUARD BARTL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Velké jazykové modely jsou postavené na hlubokých neuronových sítích, které využívají vícehlavový attention mechanismus. Co tyto „komplikovaně znějící“ pojmy znamenají se postupně dozvíme v jednotlivých dílech série článků věnované generativní umělé inteligenci. Začneme pěkně od začátku – v tomto dílu se budeme věnovat základní stavební jednotce hlubokých neuronových sítí, které se dnes říká *umělý neuron*. Konkrétně se budeme zabývat historicky prvním a zároveň nejjednodušším umělým neuronem, takzvaným MCP neuronem.

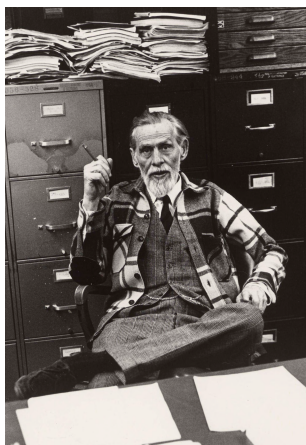
1. Dva géniové

Velké jazykové modely, například GPT od OpenAI, Gemini od Googlu, LLaMA od Mety nebo rodina velkých jazykových modelů Claude od Anthropicu, patří mezi nejmodernější přístupy v oblasti zpracování přirozeného jazyka.¹⁾ Na mnoho lidí, zejména ze starší generace, musí tyto nástroje působit futuristickým dojmem – jako by patřily spíše do sci-fi literatury než do dnešního světa. Tento dojem navíc umocnil překotný nástup velkých jazykových modelů. Pro laickou veřejnost se totiž objevily takřka přes noc, když 30. listopadu 2022 společnost OpenAI představila ChatGPT. Skutečnost je ovšem taková, že tomuto okamžiku předcházelo mnoho desítek let vývoje zejména v oblasti informatiky a informačních technologií. První krok k dnešním velkým jazykovým modelům byl učiněn již v roce 1943 dvěma poněkud excentrickými americkými vědci, Warrenem McCullochem a Walterem Pittsem.

¹⁾ Zpracování přirozeného jazyka (v angličtině se používá zkratka NLP – Natural Language Processing) je obor umělé inteligence, jenž se zabývá interpretací a generováním textu napsaného v přirozeném jazyce, jakým je například čeština nebo angličtina. Mezi typické úlohy NLP patří strojový překlad, sumarizace textu, rozpoznávání řeči a podobně.

Warren Sturgis McCulloch (1898–1969) byl vskutku renesanční osobností. Vystudoval filozofii a psychologii, velmi se zajímal o fungování lidského mozku, úzce spolupracoval se zakladatelem kybernetiky, Norbertem Wienerem. V mládí ho však lákalo studium teologie a chtěl se stát básníkem; je autorem několika sonetů. Byl také velmi zručný a prakticky orientovaný, co prokázal mimo jiné tím, že na svém statku v Connecticutu navrhl a postavil několik budov a malou přehradu.

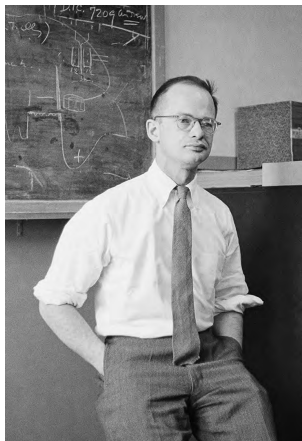
McCulloch úzce spolupracoval se zakladatelem kybernetiky, Norbertem Wienerem. Byl předsedou takzvaných *Macy Conferences on Cybernetics*, což byla setkání předních učenců z různých disciplín uskutečňovaných v letech 1946 až 1953, která měla zásadní vliv na vznik a rozvoj nejen kybernetiky, ale také umělé inteligence, systémových a kognitivních věd.



Obr. 1 Warren Sturgis McCulloch (zdroj: mitmuseum.mit.edu).

Walter Harry Pitts (1923 – 1969) byl neméně zajímavou osobností. Byl zázračným dítětem, celý život se zabýval matematickou logikou a neurovědami. Logiku však nestudoval na žádné škole, byl samoukem. V literatuře věnované Pittsovi je často zmiňovaná historka z jeho dětství, kdy jako dvanáctiletý přečetl za tři dny celou třísvazkovou *Principia Mathematica* od Bertranda Russella. Poté Russelovi napsal dopis, v němž poukázal na závažné nedostatky, které objevil v prvním svazku tohoto významného díla. Russell se zachoval velkoryse, námitky mladého Waltera ocenil a pozval ho ke studiu na Cambridge University. Pitts však tuto nabídku odmítl s tím, že se chce plně věnovat studiu logiky.

Osobní život Waltera Pittse však šťastný nebyl. Nikdy se neoženil a začátkem padesátých let začal ztrácet zájem o svojí vědeckou práci a postupně se propadal do sociální izolace. Vše vyvrcholilo rozkoem s Norbertem Wienerem, se kterým (stejně jako McCulloch) spolupracoval a měl k němu velmi přátelský vztah. Poté Pitts spálil všechny své nepublikované vědecké práce včetně rozepsané dizertace, která se věnovala neuronovým sítím. Zemřel ve věku 46 let na zdravotní potíže, které pravděpodobně souvisely s alkoholismem.



Obr. 2 Walter Harry Pitts (zdroj: Wikipedia).

2. MCP neuron

McCulloch a Pitts ve svém článku nazvaném *A Logical Calculus of Ideas Immanent in Nervous Activity* [1] vycházejí z předpokladu, že nervová aktivita má binární charakter,²⁾ to znamená, že biologický neuron v daném okamžiku vyše plný akční potenciál (takzvaně zahoří), nebo nevyšle vůbec žádný potenciál (nezahoří). V jeho aktivitě tedy neexistuje žádný mezistav, něco na způsob částečného zahoření. Nervovou aktivitu je proto možné přesně popsat formálními prostředky výrokové logiky. McCulloch a Pitts v článku dokazují, že chování každé sítě neuronů je možné popsat pomocí formule výrokové logiky a naopak, každou formuli je možné reprezentovat pomocí sítě neuronů.

²⁾V abstraktu článku autoři přímo mluví o „all-or-none character of nervous activity, neural events and the relations among them“.

Pro důkaz svých tvrzení vymysleli McCulloch a Pitts *umělý neuron*, který modeloval fungování neuronu biologického. Tomuto modelu dnes říkáme *McCullochův–Pittsův umělý neuron* (zkráceně *MCP neuron*), občas také *prahová logická jednotka* (tento název je velmi výstižný, jak můžeme vidět z dalšího popisu). Princip jeho fungování je velmi jednoduchý. MCP neuron má n binárních vstupů $x_1, x_2, \dots, x_n$ a právě jeden binární výstup y , je tedy pouze realizací booleovské funkce n proměnných

$$\{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}.$$

Každý vstup neuronu je buď *excitační*, nebo *inhibiční* a předpokládejme, že vždy existuje alespoň jeden excitační a alespoň jeden inhibiční vstup.³⁾ Excitační vstupy budeme značit pomocí symbolů $x_1^e, x_2^e, \dots, x_p^e$ a inhibiční vstupy pomocí symbolů $x_1^i, x_2^i, \dots, x_r^i$, přičemž zřejmě platí

$$p + r = n.$$

Výstup neuronu budeme označovat symbolem y .

Neuronu je navíc přiřazena prahová hodnota $\theta \in \{0, 1, 2, \dots\}$, která spolu se vstupními hodnotami ovlivňuje jeho výstup, a to následujícím způsobem: Na výstupu neuronu je logická jednička, pokud excitační buzení vstupů převáží nad inhibičním. Přesněji řečeno, výstup je roven logické jedničce tehdy, je-li počet excitačních vstupů nastavených na jedničku alespoň roven prahové hodnotě θ a zároveň jsou všechny inhibiční vstupy nastaveny na nulu. Jinými slovy, $y = 1$, jsou-li současně splněny následující dvě podmínky:

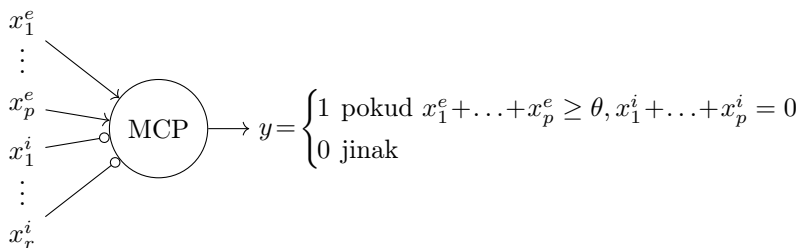
$$x_1^e + \dots + x_p^e \geq \theta, \quad (1)$$

$$x_1^i + \dots + x_r^i = 0. \quad (2)$$

Pokud není splněna alespoň jedna z těchto podmínek, výstup neuronu je nastaven na logickou nulu.

Schéma MCP neuronu a jeho fungování je znázorněno na obr. 3. Kvůli přehlednosti odlišujeme v tomto a dalších obrázcích excitační a inhibiční vstupy různými šípkami. Konkrétně excitační vstup označíme šípkou s vyplněným kolečkem, inhibiční vstup naopak šípkou s prázdným kolečkem.

³⁾ Tato podmínka je zavedena z čistě technických důvodů tak, abychom si mírně zjednodušili definici výstupní hodnoty neuronu.



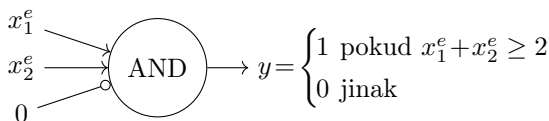
Obr. 3 McCullochův–Pittsův umělý neuron.

3. Booleovské operace pomocí MCP neuronu

Základní booleovské operace – tedy operace konjunkce (logický součin, AND), disjunce (logický součet, OR) a negace (NOT) – je nyní možné vyjádřit pomocí vhodného nastavení MCP neuronu. Konkrétně operaci konjunkce vyjádříme pomocí MCP neuronu s pouze dvěma excitačními vstupy x_1^e a x_2^e , jedním inhibičním vstupem, který je konstantně roven 0 a s prahem $\theta = 2$. Zdůvodnění je skutečně jednoduché. Pokud je totiž jediný inhibiční vstup stále nulový, pak je podmínka (2) vždy splněna. Podmínka (1), v tomto případě $x_1^e + x_2^e \geq 2$, je splněna pouze tehdy, když současně platí $x_1^e = 1$ a $x_2^e = 1$ (viz také tabulka 1). Tento neuron, jehož schéma je uvedeno na obr. 4, tak skutečně realizuje na svých excitačních vstupech operaci konjunkce.

x_1^e	x_2^e	$x_1^e + x_2^e$	y
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	2	1

Tabulka 1 Hodnoty excitačních vstupů a výstupu MCP neuronu, který realizuje operaci konjunkce.

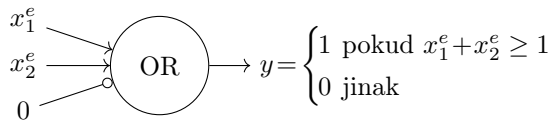


Obr. 4 Operace konjunkce vyjádřená pomocí McCullochova–Pittsova umělého neuronu.

Operaci disjunkce získáme malou úpravou předchozího nastavení. Změníme pouze prahovou hodnotu – tentokrát bude platit $\theta = 1$; vše ostatní zůstává stejné. Toto nastavení prahové hodnoty způsobí, že podmínka (1), tedy $x_1^e + x_2^e \geq 1$, je splněna v případech, že alespoň jeden excitační vstup nabývá hodnoty 1 (viz tabulka 2). Schéma tohoto neuronu je uvedeno na obr. 5.

x_1^e	x_2^e	$x_1^e + x_2^e$	y
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	2	1

Tabulka 2 Hodnoty excitačních vstupů a výstupu MCP neuronu, který realizuje operaci disjunkce.

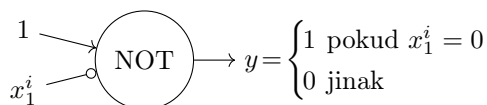


Obr. 5 Operace disjunkce vyjádřená pomocí McCullochova–Pittsova umělého neuronu.

Operaci negace vyjádříme také velmi jednoduše. Použijeme jeden excitační vstup konstantně nastavený na logickou nulu a jeden inhibiční vstup x_1^i . Prahová hodnota θ bude rovna nule. Při tomto nastavení si v jistém smyslu podmínky (1) a (2) vymění svoji roli: podmínka (1), tedy $x_1^e \geq 0$, bude vždy splněna a výstup neuronu tak bude určovat splnění nebo nesplnění podmínky (2), jak můžeme vidět v tabulce 3. Schéma tohoto MCP neuronu je znázorněno na obr. 6.

x_1^i	y
0	1
1	0

Tabulka 3 Hodnoty inhibičního vstupu a výstupu MCP neuronu, který realizuje operaci negace.



Obr. 6 Operace negace vyjádřená pomocí McCullochova–Pittsova umělého neuronu.

Je dobře známým faktem, že je možné každou formuli výrokové logiky převést do konjunktivní nebo disjunktivní normální formy, to znamená do tvaru, který využívá pouze konjunkci, disjunkci a negaci. Vhodným spojením MCP neuronů proto můžeme navrhnout *umělou neuronovou síť*, která je schopná vyjádřit libovolnou formuli výrokové logiky. Navzdory své jednoduchosti jsou umělé neuronové sítě založené na MCP neuronech mocným výpočetním nástrojem. Pokud je totiž vybavíme nekonečnou parametřovou páskou, mohou dokonce simulovat činnost libovolného Turingova stroje [2].

4. Rosenblattovo vylepšení

Řekli jsme, že MCP neuron je velmi jednoduchý model biologického neuronu. McCulloch a Pitts svou práci vnímali čistě teoreticky jako prostředek k pochopení výpočetních vlastností nervových systémů. Nezabývali se proto fyzickou realizací svého modelu a nepředpokládali jeho technické využití.

Příští díl série se bude věnovat rozšířené variantě MCP neuronu, takzvanému *perceptronu*, jehož autorem je americký psycholog Frank Rosenblatt. Perceptron je biologickému neuronu bližší, na rozdíl od neuronu McCullocha a Pittse není statický – je schopný se jistým způsobem učit. Brzy proto našel významné praktické uplatnění a je základní výpočetní jednotkou dnešních hlubokých neuronových sítí včetně těch, na kterých jsou postaveny velké jazykové modely GPT, Gemini a další.

Literatura

- [1] *McCulloch, W. S., Pitts, W.*: A Logical Calculus of Ideas Immanent in Nervous Activity. Bulletin of Mathematical Biophysics, roč. 5 (1943), č. 4, 115–133.
- [2] *Michael Sipser*: Introduction to the Theory of Computation. 3. vydání, Cengage Learning, 2012.

ZPRÁVY

66. mezinárodní matematická olympiáda



Již 66. ročník Mezinárodní matematické olympiády (IMO) se konal ve dnech 10.–20. července v Austrálii v letovisku Sunshine Coast nedaleko Brisbane. Soutěže se zúčastnilo rekordních 630 soutěžících ze 110 států. Český tým přivezli jednu stříbrnou medaili a tři bronzové.

Jako první do Austrálie přiletěli vedoucí národních delegací. Jejich hlavním úkolem bylo vybrat šest soutěžních úloh z takzvaného shortlistu, který na základě 235 úloh navržených jednotlivými státy připravila Problem Selection Committee. Mezi 31 úlohami v tomto shortlistu, které byly tradičně rozděleny do čtyř kategorií (algebra, kombinatorika, geometrie, teorie čísel), byly i dva české návrhy od *Patrika Baka* a *Michala Janíka*, ale ani jeden z nich se nakonec pro soutěž nepoužil.

Zadání šesti soutěžních úloh najdete na konci této zprávy. Kromě výběru úloh a schvalování bodovacích schémat letos vedoucí strávili notnou dobu i debatováním o dlouhodobém směřování IMO. Mimo jiné bylo odhlasováno, že od příštího ročníku se mohou v shortlistu objevovat i úlohy o komplexních číslech – nepředpokládá se ovšem, že by vedoucí takové úlohy hned příští rok vybrali pro ostrou soutěž.

Soutěžící a pedagogičtí vedoucí dorazili do Austrálie o tři dny později. Po krátké prohlídce Brisbane se přesunuli na ubytování, které bylo zajištěno v příjemném resortu Novotel. Resort kromě kajakování na laguně a kopání tunelu do Evropy na přilehlé pláži nabízel i interakci s volně se pohybujícími klokany. Vlastní soutěž proběhla 15. a 16. července. Soutěžící měli každý den 4,5 hodiny na řešení tři obtížných úloh. Za každou z nich mohli získat až 7 bodů. Připomeňme, že zhruba polovina soutěžících si z olympiády přiveze medaili, přičemž počet udělených zlatých (G), stříbrných (S) a bronzových (B) medailí je v přibližném poměru 1 : 2 : 3. Soutěžící, kteří zcela správně vyřeší alespoň jednu úlohu, obdrží čestná uznání (HM).

Českou republiku reprezentoval šestičlenný tým ve složení: *Erik Ježek* (Smíchovská SPŠ a G, Praha), *Jakub Trčka* (G J. Keplera, Praha), *David Hromádka* (G Nad Alejí, Praha), *Pa-vel Hyánek* (G Brno, třída Kapitána Jaroše), *Mikuláš Jandík* (G Christiana

Dopplera, Praha) a *Veronika Menšíková* (Arcibiskupské G, Praha). Vedoucím týmu byl *Josef Tkadlec* z Informatického ústavu MFF UK v Praze a pedagogickým vedoucím byl *Pavel Calábek* z PrF UP v Olomouci.



České reprezentační družstvo, zleva: Josef Tkadlec (vedoucí), Pavel Hyánek (bronz), Mikuláš Jandík (čestné uznání), Erik Ježek (stříbro), David Hromádka (bronz), Pavel Calábek (pedagogický vedoucí), Veronika Menšíková (čestné uznání), Jakub Trčka (bronz)

Výsledky našich soutěžících v jednotlivých úlohách:

Umístění	Úloha	1	2	3	4	5	6
81.–87. Erik Ježek		7	7	5	7	7	0
187.–202. Jakub Trčka		6	7	0	7	6	0
272.–290. David Hromádka		7	7	0	7	0	0
272.–290. Pavel Hyánek		7	1	0	6	7	0
334.–345. Mikuláš Jandík		7	0	1	5	4	0
346.–365. Veronika Menšíková		7	1	0	7	1	0

Zlato se letos udělovalo za zisk alespoň 35 bodů, stříbro za 28 bodů a bronz za 19 bodů. Tyto hranice byly nezvykle vysoké – v 9 z předchozích 10 ročníků by Erik za 33 bodů bral zlato a Kuba by za 26 bodů bral stříbro.

V neoficiálním pořadí týmů obsadila Česká republika se ziskem 134 bodů 41. příčku hned za Slovenskem, které se s spolu s Jihoafrickou republikou a Novým Zélandem podělilo o 38.–40. místo. Zvítězila jako obvykle Čína, jejíž reprezentanti všichni bezchybně vyřešili každou z prvních pěti úloh (totéž se mimo jiné podařilo i některým jazykovým modelům). Šestá úloha se ukázala výrazně obtížnější. Celkem ji vyřešilo jen 6 soutěžících, z toho 5 vyřešilo všechny úlohy a dosáhlo tak maximálního možného počtu 42 bodů. Jediným dalším úspěšným řešitelem šesté úlohy byl Slovák Matej Bachníček. Kompletní výsledky jsou dostupné na adrese imo-official.org.

Organizátoři soutěže si dali záležet na tom, aby byl tento ročník opravdu australský. V anglických zadáních se tak hra s nerovnostmi v páté soutěžní úloze jmenovala „inekoalaty game“ a funkcím ze třetí úlohy se říkalo „bonza“ (australský slang pro „prvotřídní“). Ve volnočasovém programu po soutěži se pak vyskytovaly položky jako exkurze do zábavního parku „Aussie World“, návštěva zoo s klokany, koalami a krokodýly nebo vyslechnutí přednášek Terence Taa (rodáka z Adelaide a držitele Fieldsovy medaile) a Burckharda Polstera (profesora na univerzitě v Melbourne a YouTubera z kanálu Mathologer).

Následující ročníky Mezinárodní matematické olympiády se uskutečnily v Číně (2026), v Maďarsku (2027) a v Saudské Arábii (2028).

Na závěr uvádíme *texty soutěžních úloh* (v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla).

1. Řekneme, že přímka v rovině je *slunečná*, pokud není rovnoběžná ani s osou x , ani s osou y , ani s přímkou $x + y = 0$. Je dáno celé číslo $n \geq 3$. Určete všechna nezáporná celá čísla k , pro něž existuje n navzájem různých přímek v rovině takových, že:

- pro každá dvě kladná celá čísla a a b splňující $a + b \leq n + 1$ platí, že bod (a, b) leží na aspoň jedné z těchto n přímek; a
- přesně k z těchto n přímek je slunečných. (USA)

2. Jsou dány kružnice Ω a Γ se středy po řadě M a N takové, že poloměr kružnice Ω je menší než poloměr kružnice Γ . Předpokládejme, že kružnice Ω a Γ se protínají ve dvou bodech A a B . Přímka MN protíná kružnici Ω v bodě C a kružnici Γ v bodě D tak, že body C, M, N, D leží na přímce v tomto pořadí. Označme P střed kružnice opsané trojúhelníku ACD . Přímka AP protíná kružnici Ω podruhé v bodě $E \neq A$ a kružnici Γ podruhé v bodě $F \neq A$. Označme H průsečík výšek trojúhelníku PMN . Dokažte, že rovnoběžka s AP vedená bodem H se dotýká kružnice opsané trojúhelníku BEF .

(Vietnam)

3. Označme $\mathbb{N}$ množinu kladných celých čísel. Řekneme, že funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je *senza*, jestliže pro všechna kladná celá čísla a a b platí, že

$$f(a) \text{ je dělitelem } b^a - f(b)^{f(a)}.$$

Určete nejmenší reálnou konstantu c takovou, že pro každou senza funkci f a každé kladné celé číslo n platí $f(n) \leq cn$. (Kolumbie)

4. Řekneme, že kladný dělitel kladného celého čísla m je *ostrý*, pokud je různý od m . Uvažujme nekonečnou posloupnost $(a_1, a_2, \dots)$ kladných celých čísel, z nichž každé má alespoň tři ostré dělitele. Pro každé $n \geq 1$ platí, že číslo a_{n+1} je součtem tří největších ostrých dělitelů čísla a_n . Určete všechny možné hodnoty a_1 . (Litva)

5. Alice a Bob hrají hru, jejíž pravidla závisí na kladném reálném čísle λ , známém oběma hráčům. V n -tém kole hry (počínaje $n = 1$) se stane toto:

- Je-li n liché, Alice vybere nezáporné reálné číslo x_n takové, že $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \lambda n$.
- Je-li n sudé, Bob vybere nezáporné reálné číslo x_n takové, že $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq n$.

Pokud hráč nemůže vybrat takové číslo x_n , hra končí a vyhrává jeho soupeř. Pokud hra pokračuje donekonečna, nevyhrává žádný z hráčů. Všechna vybraná čísla jsou známa oběma hráčům. Určete všechny hodnoty λ , pro které má Alice vítěznou strategii, a také všechny hodnoty λ , pro které má vítěznou strategii Bob. (Itálie)

6. Matylda chce do čtvercové tabulky 2025×2025 rozmístit několik dlaždic tak, že každá dlaždice je obdélník nebo čtverec, každá dlaždice přesně zakrývá několik políček tabulky a dlaždice se navzájem nepřekrývají. Určete nejmenší počet dlaždic, které Matylda musí rozmístit, aby v každém řádku a každém sloupci zůstalo přesně jedno políčko nezakryté. (Singapur)

Josef Tkadlec

13. ročník CPSJ

Ve dnech 18. až 21. května 2025 se v polském Szczyrku konal již 13. ročník Česko-polsko-slovenské matematické soutěže juniorů (CPSJ). V něm se utkali na české a slovenské straně vybraní žáci nejvýše prvních ročníků středních škol, polskou stranu pak reprezentovali vítězové finále soutěže Olimpiada Matematyczna Juniorów.

Český reprezentační výběr byl sestaven na základě výsledků našich žáků především v krajských kolech kategorií A a C v 74. ročníku MO a dále následného výběrového soustředění z žáků, kteří navštěvují nejvýše první ročník středních škol (kvinty osmiletých gymnázií). Účast v reprezentaci si vybojovali: *Miriám Barešová* (5/8), G Dobruška, *Jan Bradáč* (5/8), G Boškovice, *Štěpán Sikora* (4/8), G Nad Štolou, Praha 7, *Dan Školař* (9), SOŠ a ZŠ Březová, *Michal Tollár* (5/8) a *Petr Vokřínek* (5/8), oba G Brno, tř. Kpt. Jaroše. Vedoucím české delegace byli *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.* a *Mgr. Patrik Bak*.



Český reprezentační výběr

Všichni účastníci se sešli v neděli 18. května v penzionu Gronik v Szczyrku. V pondělí na ně čekala soutěž jed-

notlivců, kdy řešili po dobu 3,5 hodiny pět příkladů. Jejich zadání obdrželi soutěžící v mateřském jazyce, řešení mohli odevzdávat ve svém mateřském jazyce nebo anglicky. Po odpočinkovém programu a prezentaci svých řešení byli navečer soutěžící rozlosováni do šesti tříčlenných družstev, v každém z nich bylo po jednom českém, polském a slovenském účastníkovi. Druhý den tyto týmy řešily po dobu pěti hodin soutěž družstev, kdy dostaly sadu šesti příkladů, po dvou v češtině, polštině a slovenštině. Řešení těchto úloh družstva odevzdávala vždy v jiném jazyce, přičemž vznikly všechny kombinace různých jazyků. Soutěžící si tak vyzkoušeli týmovou komunikaci, kdy svým kolegům museli objasnit zadání a poté i řešení úloh.



Při soutěži jednotlivců

Absolutními vítězi soutěže jednotlivců se stali se ziskem 21 bodů (z 25 možných) *Marek Konieczny* z Polska a *Alex Markus* ze Slovenska. Po nich se seřadilo pět českých žáků v pořadí *Štěpán Sikora, Miriám Barešová, Dan Školař, Jan Bradáč* a *Petr Vokřínek*. *Michal Tollár* pak obsadil dělené deváté místo.

Český tým tak zvítězil v neoficiální soutěži družstev před druhým Slovenskem a třetím Polskem. Tyto výsledky

ovšem nelze brát za směrodatné, neboť polští soutěžící byli o dva roky mladší.

Podrobnější výsledky **soutěže jednotlivců** najdete na stránkách **Matematické olympiády**. Vzorová řešení (v polštině) soutěžních úloh na stránkách **polských kolegů**. Na závěr uvádíme zadání všech soutěžních úloh, přitom úlohy soutěže družstev uvádíme tak, jak ji obdrželi soutěžící. Za textem úlohy je uvedena navrhuji země.

Soutěž jednotlivců (19. 5.)

1. Určete všechna prvočísla p , pro která lze číslo $p^3 + p^2 + p + 1$ zapsat jako součin dvou různých prvočíslel.

(Slovensko)

2. Určete všechny trojúhelníky, které lze rozřezat na shodné pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky s odvěsnami délek 1.

(Česko)

3. V daném trojúhelníku ABC je $|\sphericalangle ACB| = 60^\circ$. Body D a E jsou po řadě body stran BC a AC . Uvažujme vrcholy K , L rovnostranných trojúhelníků ADK , BEL takových, že body A a L leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou BE a body B a K leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou AD . Dokažte, že $|AE| + |BD| = |KL|$.

(Polsko)

4. Na tabuli jsou na počátku napsána tři nezáporná celá čísla. V každém kroku čísla a , b , c napsaná na tabuli nahradíme hodnotami součtů $a+b$, $b+c$, $c+a$. Určete největší možný počet kroků, po kterých se na tabuli může objevit číslo 111.

(Česko)

5. Dokažte, že pro všechna přiro-

zená čísla $n \geq 1$ je číslo

$$A_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{3}{n+3} - \frac{4}{n+4} - \dots + \frac{2n-1}{3n-1}$$

větší než $\frac{1}{3}$.

Poznámka. Slabší odhady (například $A_n > 0$ pro každé n) mohou být ohodnoceny částečnými body. (Polsko)

Soutěž družstev (20. 5.)

1. Uvažujme následující operaci s dvojmístným číslem: Nejprve vynásobíme jeho číslice, poté vypočteme druhou mocninu jeho poslední číslice a tyto dva výsledky zapíšeme za sebou v tomto pořadí (např. pro číslo 27 spočteme 14 a 49, odkud získáme 1449). Čtyřmístné číslo nazveme *okázalé*, pokud je jeho druhá odmocnina dvojmístným číslem a operací z ní vznikne původní čtyřmístné číslo. Určete všechna okázalá čísla.

(Slovensko)

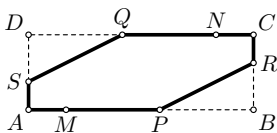
2. Pro obdélníkový list papíru $ABCD$ platí

$$|AB| : |BC| = 3 : 1.$$

Na jeho stranách AB a CD leží po řadě takové body M a N , že

$$|AM| : |AD| = |CN| : |CB| = 1 : 2.$$

List přeložíme tak, že bod D splyne s bodem M . Poté jej opět přeložíme bodem B na bod N . Vznikne šestiúhelník $APRCQS$ jako na obrázku. Dokažte, že tento šestiúhelník lze šesti přímkami rozdělit na pravoúhlé trojúhelníky.



(Slovensko)

3. Niech $n \geq 3$ będzie liczbą całkowitą. Na płaszczyźnie zaznaczono $2n$ punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Wśród tych punktów n punktów pomalowano na czerwono, a pozostałe n pomalowano na niebiesko (każdy punkt ma dokładnie jeden kolor). Wyznacz, w zależności od n , największą dodatnią liczbę całkowitą k o następującej własności: zawsze (niezależnie od tego, które punkty wybrano i jak je pomalowano) można narysować k -kąt o czerwonych wierzchołkach oraz k -kąt o niebieskich wierzchołkach w taki sposób, aby nie miały one żadnych punktów wspólnych.

(Slovensko)

4. Wykaż, że pośród każdych 21 parami różnych liczb nieujemnych rzeczywistych można wskazać dwie różne liczby x, y o tej własności, że

$$20|x - y| < (x + 1)(y + 1).$$

(Česko)

5. Nech $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ je postupnosť kladných reálnych čísel taká, že pre všetky kladné celé čísla n platí

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}.$$

Nájdite najväčšie celé číslo N také, že presne N členov postupnosti je celočíselných pre nejaké reálne a_1 .

(Slovensko)

6. Nech $n \geq 1$ je celé číslo. Postupnosť n šípok, z ktorých každá ukazuje doľava ($\leftarrow$) alebo doprava ($\rightarrow$) sa volá *zaujímavá*, ak žiadne dve šípky neukazujú na ten istý počet šípok. Určte počet všetkých zaujímavých postupností n šípok.

Príklad: Pre $n = 5$ v postupnosti $\rightarrow \leftarrow \leftarrow \rightarrow \rightarrow$ sú počty šípok na ktoré ukazujú jednotlivé šípky postupne 4, 1, 2, 1, 0. Preto táto postupnosť nie je zaujímavá (keďže počet 1 sa objavil dvakrát).

(Polsko)

Autorsky se na tvorbě a přípravě úloh podíleli *Pavel Calábek, Jaroslav Švrček, Patrik Bak, Arkadiusz Męcel a Łukasz Bożyk*. Příští, 14. ročník soutěže se uskuteční v květnu 2026 na Slovensku.

Pavel Calábek

Turnaj mladých fyziků 2025

Od 29. 6. do 6. 7. 2025 se ve švédském Lundu uskutečnil 38. ročník Mezinárodního turnaje mladých fyziků (International Young Physicists' Tournament, IYPT). Česká republika se může pochlubit úspěchem – naši reprezentanti získali bronzovou medaili.

Pokud Turnaj mladých fyziků (TMF) již znáte, můžete některé části článku přeskóčit

- O Turnaji mladých fyziků
- Změny v TMF v ČR
- Příprava na IYPT 2025
- Průběh mezinárodního kola
- Závěr, výzva a pozvánka

O Turnaji mladých fyziků

Turnaj mladých fyziků je jedna z nejnáročnějších oborových soutěží,

které v ČR podporuje Ministerstvo školství mládeže a tělovýchovy v rámci Podpory soutěží. V průběhu roku pracují středoškoláci z celého světa na 17 komplexních a otevřených fyzikálních úlohách (jejich zadání naleznete na webu <https://iyp.org/problems/>). Během několikaměsíční přípravy se snaží vypracovat jejich co nejlepší řešení. Zatímco v okresním kole stačí řešení sepsat a odevzdat, ve vyšších kolech je prezentují a musí ho obhájit před dalšími účastníky a zejména před porotou složenou z fyziků či učitelů fyziky. Také musí umět kriticky zhodnotit práci ostatních a dobře podat svoje argumenty.

Na mezinárodní úrovni proti sobě stojí pětičlenné týmy. Soutěž probíhá formou *Fyzikálních soubojů*: referující tým prezentuje řešení úlohy, na kterou ho vyzve oponent; úkolem oponenta je prezentované řešení rozebrat. Třetí tým, tzv. recenzent, kriticky posuzuje, jak bylo podáno řešení a jak probíhala vědecká diskuze.

Soutěž rozvíjí do hloubky fyzikální znalosti problematiky, které se účastníci rozhodnou věnovat: nejenže se dostávají daleko za hranice běžného ŠŠ látky, často se setkávají i s fyzikálními jevy, jejichž vysvětlení stále není zcela uzavřené.

Dále se soutěžící zlepšují ve vědecké prezentaci, odborné angličtině a diskuzních schopnostech; učí se efektivně pracovat v týmu i kriticky rozebírat a hodnotit cizí práce.

Místa, kde se koná mezinárodní kolo, se střídají. Letošní kolo proběhlo ve švédském Lundu a účastnilo se ho 35 družstev z celého světa.

Změny v TMF v ČR

Od právě ukončeného ročníku se soutěž v prvním (okresním) kole zpřístupnila i pro individuální účastníky. Každý soutěžící zasílá textové řešení (protokol) k jedné úloze podle svého vlastního výběru.

V krajském kole loni každý soutěžící předkládal písemný rozbor dvou řešení ostatních účastníků, v němž měl řešení zhodnotit a identifikovat jejich silné a slabé stránky. V příštím ročníku se i krajské kolo více přiblíží formátu mezinárodní soutěže: klání proběhne formou zkrácených Fyzikálních soubojů – kde bude kratší prezentace následovaná kratší oponenturou a diskuzí mezi referujícím a oponentem. Nově plánujeme zařadit do tohoto kola i možnost otázek od dalších účastníků na místě. Do krajského kola včetně mohou soutěžit jednotlivci i až čtyřčlenná družstva.

V ústředním kole soutěží výhradně tříčlenná družstva, která mohou mít nejvýše jednoho náhradníka. Složení družstev se může v případě potřeby mezi koly měnit (s drobnými omezeními).

Všechny podrobnosti k soutěži naleznete na <https://tmfcr.cz/>; finální pravidla pro nadcházející 39. ročník budou zveřejněna na přelomu srpna a září.

Příprava na IYPT 2025

Letos proběhl poprvé výběr jednotlivých účastníků do týmu zastupujícího ČR na základě jejich individuálních výkonů. Na dvoudenní výběrové soustředění byli vedle všech finalistů pozváni další čtyři účastníci na základě doporučení porotců. Každý z vybra-

ných účastníků soustředění prezentoval svoje dvě nejlepší úlohy a musel čelit otázkám hodnotitelů i ostatních účastníků. Sledovala se i schopnost klást relevantní dotazy.

Po dlouhé a náročné diskuzi hodnotitelů byl vybrán pětičlenný tým: Lukáš Franta (kapitán), Kryštof Basista, Martin Fišer, Daniel Jedlička a David Švaňa. Členové byli z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze (LF, DŠ – v ústředním kole byli členy dvou různých družstev), SPŠE Plzeň (MF, DJ), a Gymnázia Josefa Kainara v Hlučíně (KB). Po výběru reprezentantů probíhala další příprava, která vyvrcholila dva dny před odletem intenzivním doлаđováním a finalizací prezentací na Fyzikálním ústavu AV ČR.



Náš tým při přebírání cen

Průběh mezinárodního kola

Náš tým přijal výzvy k prezentacím úloh č. 4 Šplhající magnety, č. 3 Lato-lato (Klik-Klak), č. 14 Raketa z lahve na vodu a č. 16 Wirtzova pumpa. Do 5. kola, do kterého si tým sám vybírá úlohu, kterou prezentuje, padla volba na úlohu Zvukem proti ohni, ve které jde o to, jak uhasit plamen pomocí

(velmi intenzivního) zvuku. Český tým vyhrál 3 z 5 Fyzikálních soubojů a u jednoho ze dvou zbývajících chybělo k výhře velice málo – bodový rozdíl na první tým byl menší než 2 %.



Po druhém Fyzikálním souboji



Po třetím Fyzikálním souboji



Po pátém Fyzikálním souboji



Výhra: Lego Star Wars

V průběhu týdne se účastníci setkali se spoustou vrstevníků z různých států a vyměnili si drobné dárky na znak přátelství. Vedle soutěžního programu jsme se vydali i na exkurzi do vikingské vesničky a stavili se na chvíli na pláži, v rámci hry jsme prošli centrum Lundu a na závěr byla připravená společenská večeře a následná taneční zábava.

Nesmírnou náročnost soutěže letos dobře ilustruje úloha č. 1 Papírový bumerang, v níž měl být studován pohyb bumerangu sestaveného výhradně z papíru. Tato úloha byla nakonec v rámci celého mezinárodního kola prezentována pouze jedním týmem, což je v obrovském nepoměru s celkovým počtem 179 prezentovaných řešení při možnosti volby ze 17 úloh. Na první pohled neškodné zadání se tedy ukázalo být nad síly většiny soutěžících, a lze jen spekulovat, jestli kamenem úrazu bylo poskládání bumerangu se stabilními a reprodukovatelnými aerodynamickými vlastnostmi nebo jeho vypouštění s kontrolovatelnou a opakovatelnou translační i rotační rychlostí.

Závěr, výzva a pozvánka

Navzdory velkému množství hlubokých změn v organizaci a pojetí národních kol soutěže se letošní ročník vydal velice dobře a bronzové umístění to potvrzuje.

Budeme rádi, pokud se zapojí do dalšího ročníku ještě vyšší počet zájemců. Nelekejte se počtu zadáných úloh: do okresního kola stačí, aby každý soutěžící vyřešil jednu z nich, do krajského kola pak druhou. Připomínáme, že není nutné mít tým hned na začátku soutěže. Pokud má někdo problém najít spoluřešitele na škole – organizátoři pomohou se sestavením týmu v průběhu ročníku (pro zajímavost: tímto způsobem se do pětičlenného reprezentačního týmu probíjeli hned 3 účastníci).



Diplom a medaile

Všechny, kteří mají zájem o účast v soutěži, případně uvažují, jestli soutěž svým žákům doporučit, zveme na *Úvodní soustředění TMF*, které se bude konat 13. 10. 2025 v Praze na Fyzikálním ústavu AV ČR. Podrobné informace a přihlášku naleznete na <https://tmfcr.cz>.

Karel Kolář a Hynek Němec