

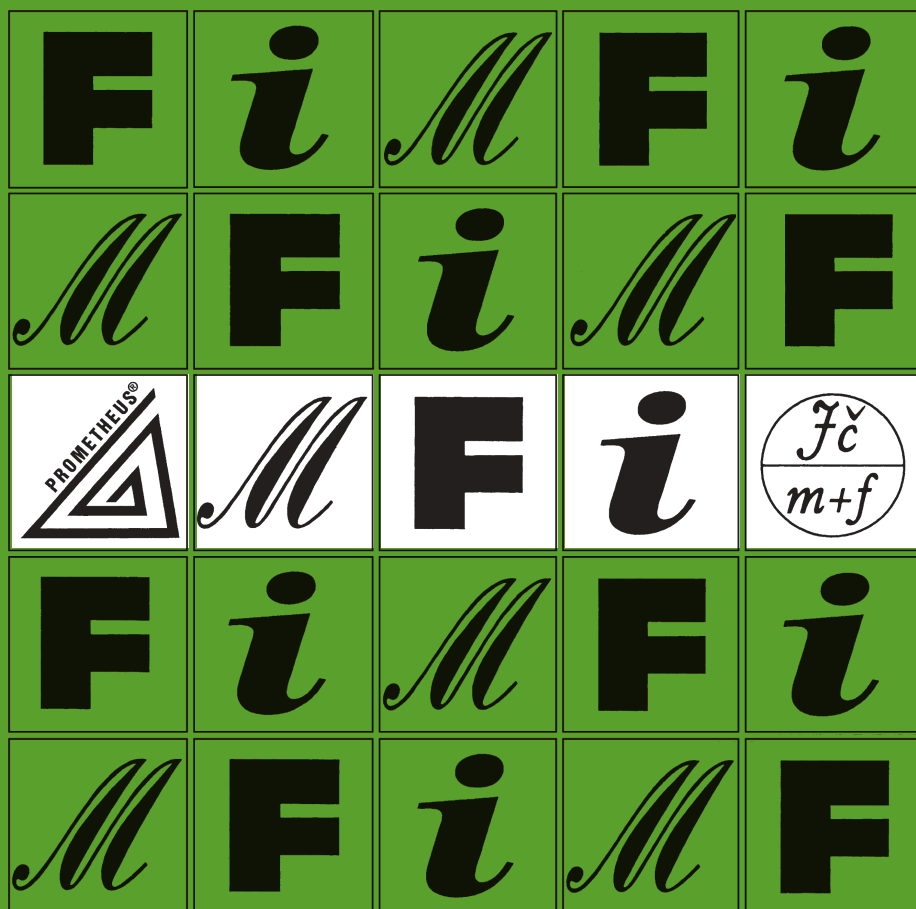
# MATEMATIKA

# 2

# FYZIKA

# INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



# MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách  
Ročník XXXV (2026), číslo 2

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

## Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku  
Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek  
Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

## Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška,  
Karel Kolář, Michaela Křížová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil, Dana Mandíková,  
Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel  
Töpfer, Jaroslav Zhouf

## Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

## Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

## OBSAH

### MATEMATIKA

<i>F. Kuřina, D. Hrubý:</i> Shodná rozložitelnost . . . . .	81
<i>P. Tlustý, I. Krech:</i> O netranzitivních ruletkách . . . . .	91
<i>P. Calábek:</i> Mnohočleny v soutěži Matematický klokan . . . . .	97
<i>J. Švrček:</i> Úloha o bedničkách . . . . .	109
Zajímavé matematické úlohy . . . . .	111

### FYZIKA

<i>P. Leischner:</i> Paradox komerčního zrcadla . . . . .	115
<i>E. Hejnová:</i> PISA 2025: Ukázkové přírodovědné úlohy jako inspirace pro rozvoj vědecké gramotnosti . . . . .	125

### INFORMATIKA

<i>Š. Gergelitsová, T. Holan:</i> Stavíme se Stavitelkou . . . . .	139
<i>E. Bartl:</i> Generativní umělá inteligence. Díl třetí: Perceptron . . . . .	149

### ZPRÁVY

<i>L. Richterek:</i> Celostátní kolo 67. ročníku FO 2026 . . . . .	153
<i>P. Calábek:</i> Ústřední kolo 75. ročníku MO kategorie A . . . . .	156
<i>P. Töpfer:</i> Ústřední kolo 75. ročníku MO kategorie P . . . . .	158

## Shodná rozložitelnost

FRANTIŠEK KUŘINA – DAG HRUBÝ

Hradec Králové – Jevíčko

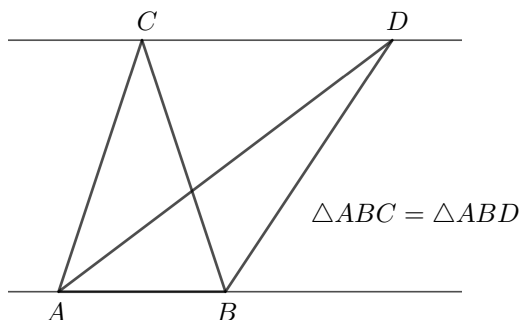
Vše již tu bylo, vše se opakuje,  
i čestný básník druhé olupuje.  
*Marie von Ebner-Eschenbach*

V tomto příspěvku se budeme zabývat především velikostmi geometrických útvarů, tedy tematikou, která je součástí vyučování matematice od prvního stupně základní školy až po maturitu. Dovolili jsme si tedy uvést náš článek poněkud provokativním motem. Avšak nejen proto. Petr Vopěnka o tom píše v úvodu k Eukleidovým Základům:

*Praktická geometrie* (měřictví) byla provozována dávno před Eukleidem. Takzvaní *napínači provazů* vyměřovali a vytyčovali nejrůznější pozemky a stavby. Zachycovali je značkami (body), které umísťovali do vrcholů (rohů), popřípadě některých dalších významných míst vytyčovaných útvarů. Měřili čtyři druhy jevu velikosti: *délky, plošné obsahy, objemy a velikosti úhlů*. Veličinami délky rozuměli délky různých jednotlivých provazů, či vzdálenosti dvou různých značek. Podobně veličinami plošného obsahu (popřípadě objemu) rozuměli plošné obsahy různých jednotlivých plošných útvarů (popřípadě objemy různých jednotlivých těles).

Eukleides však tuto historickou skutečnost nerespektuje. V Základech ztotožňuje velikosti geometrických útvarů s těmito útvary samotnými. Doložíme to několika citacemi:

- čára je délka bez šířky,
- trojúhelníky na stejných základnách a mezi rovnoběžkami jsou si rovny (obr. 1),
- v pravoúhlých trojúhelnících čtverec na straně proti úhlu pravému ležící rovná se čtvercům na stranách pravý úhel svírající (věta Pythagorova).



Obr. 1

V naší škole důsledně rozlišujeme geometrický útvar (množina bodů) a jeho velikost (kladné reálné číslo). Odříká-li žák Pythagorovu větu ve znění: „Čtverec nad přeponou se rovná dvěma čtvercům nad odvěsnami“, napomene ho učitel: „Copak čtverec se může rovnat dvěma čtvercům?“ Přitom se však zavedení velikostí úseček a obsahu věnuje v našich středoškolských učebnicích velmi malá, či dokonce nulová pozornost. Tak např. v učebnici planimetrie pro gymnázia [2] je uvedeno pouze: „Délka (velikost) se určuje měřením, které se provádí pomocí jednotkové úsečky.“ A po 26 letech je táž autorka ještě stručnější: „Délka úsečky je vzdálenost krajních bodů“ [3]. My zde budeme vycházet z těchto definic:

Délka úsečky je kladné číslo, pro které platí:

- shodné úsečky mají sobě rovné délky,
- délka grafického součtu úseček je rovna součtu velikostí jejich částí,
- existuje jednotková úsečka.

Obsahem mnohoúhelníku rozumíme kladné číslo, pro které platí:

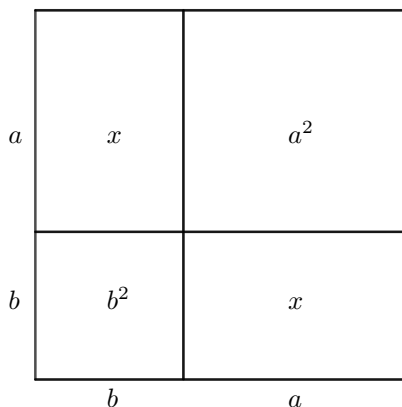
- shodné mnohoúhelníky mají sobě rovné obsahy,
- obsah sjednocení dvou nepřekrývajících se mnohoúhelníků je roven součtu obsahů těchto částí,
- čtverec o délce strany  $a$  délkových jednotek má obsah  $a^2$  čtverečných jednotek.

Na základě těchto definic můžeme odvodit vzorec pro obsah obdélníku, aniž bychom museli uvažovat, zda jsou velikosti jeho stran čísla přirozená, racionální či iracionální.

Můžeme uvažovat takto. Pro čtverec na obr. 2 platí

$$(a + b)^2 = a^2 + 2x + b^2,$$

a tedy  $x = ab$ . Problematice měření délek se zde nebudeme věnovat. Odkazujeme na publikaci [4].

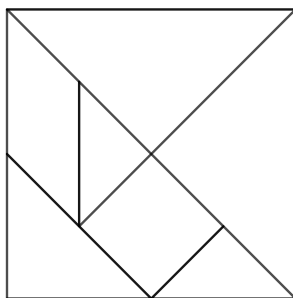


Obr. 2

V další části článku uvedeme jako úvod do problematiky několik známých úloh o velikostech útvarů. V poslední části pak budeme definovat pojem shodné rozložitelnosti a uvedeme několik vlastností této relace.

### Úlohy o velikostech geometrických útvarů

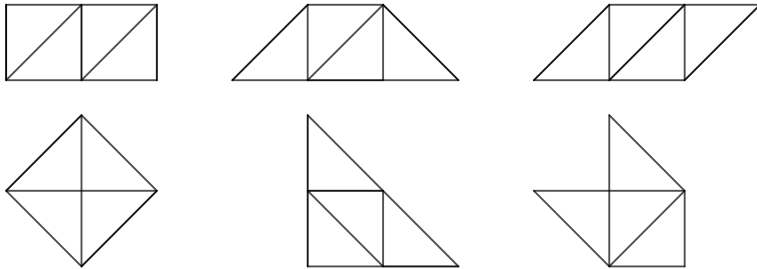
První úloha je motivována hrou *Tangram*, ve které se z dílů čtverce skládají různé geometrické útvary, viz obr. 3. O didaktickém využití tangramu napsala pěkný článek Hana Lišková. Je publikován ve sborníku [5, s. 139–142].



Obr. 3

### Úloha 1

Skládejte ze čtyř shodných pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků s odvěsnami délky 1 cm různé mnohoúhelníky.



Obr. 4

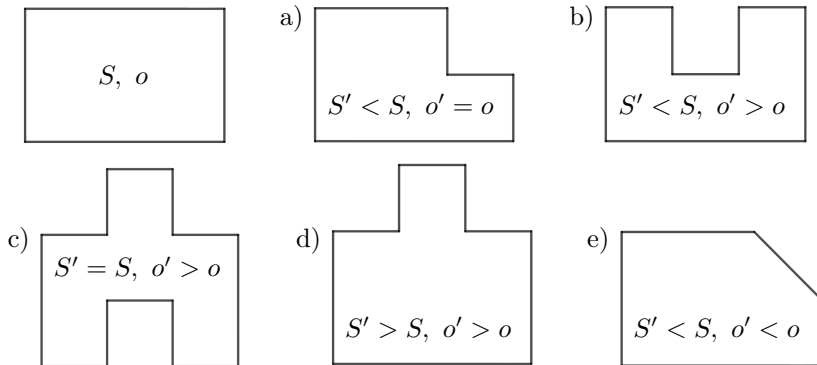
Některé výsledky jsou zakresleny na obr. 4 (obdélník, lichoběžník, rovnoběžník, čtverec, trojúhelník, nekonvexní šestiúhelník). Všechny tyto mnohoúhelníky mají obsah  $2 \text{ cm}^2$ . V další úloze si všimneme souvislosti obvodu a obsahu mnohoúhelníků.

### Úloha 2

Obdélník má obsah  $S$  a obvod  $o$ . Nakreslete mnohoúhelník, pro který platí:

- a)  $o' = o$  a  $S' < S$
- b)  $o' > o$  a  $S' < S$
- c)  $o' > o$  a  $S' = S$
- d)  $o' > o$  a  $S' > S$
- e)  $o' < o$  a  $S' < S$

Výsledky jsou na obr. 5.

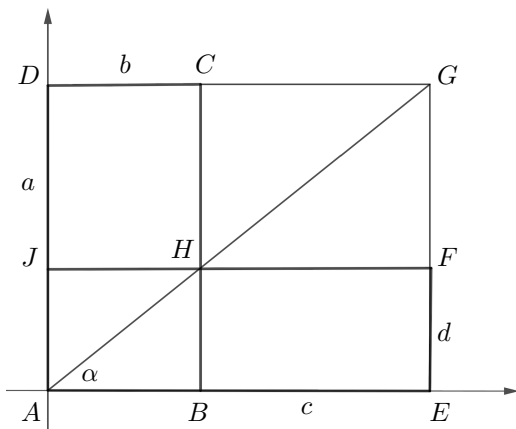


Obr. 5

### Úloha 3

K obdélníku  $ABCD$  se stranami  $|AD| = a$ ,  $|AB| = b$  sestrojte obdélník téhož obsahu, který má jednu stranu  $c$ .

Předpokládejme, že hledaný obdélník má strany  $c$ ,  $d$  a je umístěn v souřadnicovém systému podle obr. 6.



Obr. 6

Z rovnosti  $ab = cd$  plyne

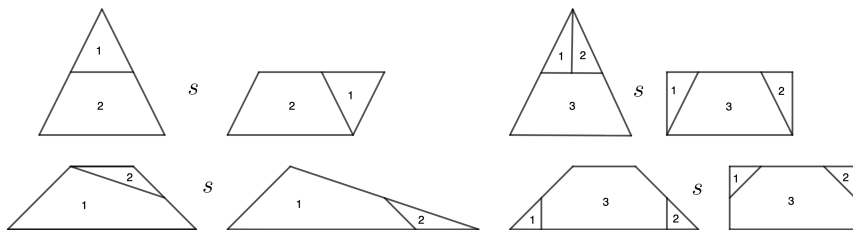
$$\frac{a}{c} = \frac{d}{b} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Body  $A$ ,  $H$ ,  $G$  leží tedy v přímce a konstrukce je podle obrázku zřejmá. Obdélník  $ABCD$  má stejný obsah jako obdélník  $AEFJ$ , neboť od shodných trojúhelníků  $AEG$  a  $ADG$  odebereme obsahy shodných trojúhelníků  $HCG$  a  $HFG$ .

### Shodná rozložitelnost

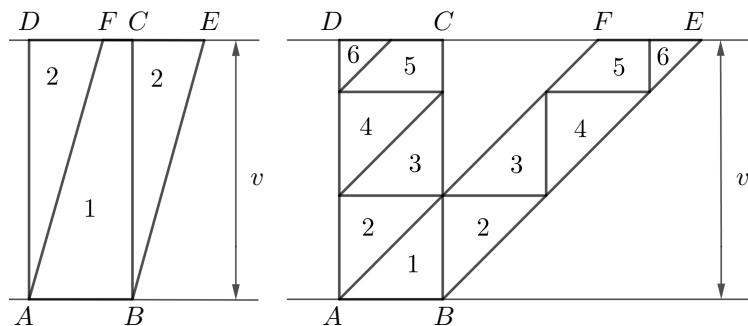
Mnohoúhelníky  $U$ ,  $V$  jsou shodně rozložitelné, lze-li např. mnohoúhelník  $U$  rozdělit na části, z nichž lze složit mnohoúhelník  $V$ . Je zřejmé, že shodně rozložitelné mnohoúhelníky mají též obsah. Otázka, zda platí obráceně, že mnohoúhelníky téhož obsahu jsou shodně rozložitelné není triviální a byla kladně vyřešena německým matematikem *Maxem Dehnem* (1878–1952). Naše další úvahy budou vedeny snahou tuto skutečnost dokázat.

Shodnou rozložitelnost útvarů  $U, V$  budeme symbolicky zapisovat  $U \simeq V$ . Na obr. 7 jsou zakresleny 4 dvojice shodně rozložitelných mnohoúhelníků obsahu  $2 \text{ cm}^2$ .



Obr. 7

Na obr. 8 vidíme shodnou rozložitelnost rovnoběžníků o společné základně a stejné výšce.

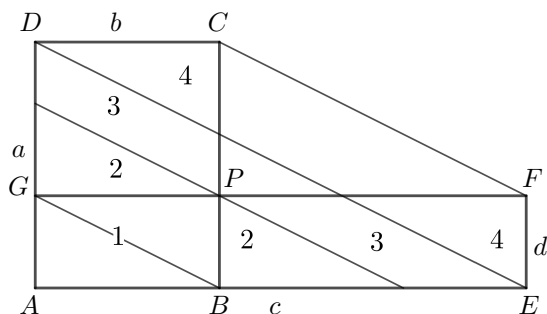


Obr. 8

Ukažme shodnou rozložitelnost libovolných dvou obdélníků  $ABCD, AEFG$  téhož obsahu. Umístěme obdélníky podle obr. 9. Označíme-li strany obdélníků  $|AD| = a, |AB| = b$ , resp.  $|AE| = c, |AG| = d$ , pak platí

$$ab = cd \quad \text{a} \quad \frac{d}{b} = \frac{a-d}{c-b}.$$

Přímky  $BG, ED$  a  $FC$  jsou tedy rovnoběžné. Bodem  $P$  na obr. 9 vedme další přímku s nimi rovnoběžnou. Obdélník  $AEFG$  se skládá z obdélníku 1 a shodných trojúhelníků 2 a 4. Rovnoběžníky 3 jsou podle předchozího výsledku shodně rozložitelné. Tím je shodná rozložitelnost obdélníků prokázána.



Obr. 9

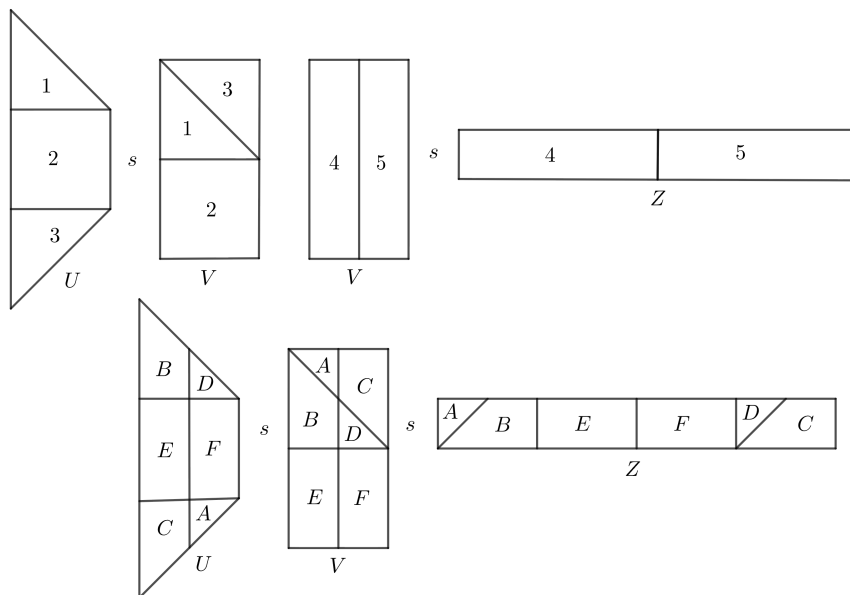
Připomeňme nyní dva poznatky. Relace  $r$  definovaná na množině  $M$  se nazývá relací ekvivalence, je-li reflexivní ( $\forall U \in M: U r U$ ), symetrická ( $\forall U, V \in M: U r V \Rightarrow V r U$ ) a tranzitivní ( $\forall U, V, Z \in M: U r V \wedge V r Z \Rightarrow U r Z$ ). Každá relace ekvivalence  $r$  na množině  $M$  rozkládá tuto množinu na třídy  $M/r$  navzájem ekvivalentních disjunktních množin. Dokažme, že relace shodné rozložitelnosti je relace ekvivalence. Reflexivnost a symetričnost relace  $s$  je zřejmá, neboť  $U s U$  a  $U s V \Rightarrow V s U$ . Ideu důkazu tranzitivity uveďme příkladem.

Lichoběžník  $U$  na obr. 10 je shodně rozložitelný s obdélníkem  $V$ , neboť každý z těchto útvarů je složen ze shodných trojúhelníků 1, 3 a čtverce 2. Z druhé strany obdélník  $V$  je shodně rozložitelný s obdélníkem  $Z$ . Platí tedy  $U s V$  a  $V s Z$ . Rozložme obdélník  $V$  na části jak z prvního, tak druhého rozkladu. Z částí  $A, B, C, D, E, F$ , které takto dostaneme, lze složit jak lichoběžník  $U$ , tak obdélník  $Z$ . Platí tedy  $(U s V)$  a  $(V s Z) \Rightarrow U s Z$ .

Předpokládejme, že pro útvary  $U, V, Z$  platí  $U s V$  a  $V s Z$ . Sestrojme v útvaru  $V$  jak rozdělení z  $U s V$ , tak i rozdělení z  $V s Z$ . Tento rozklad můžeme přenést jak na mnohoúhelník  $U$ , tak na mnohoúhelník  $Z$ . Platí tedy  $U s Z$ . Relace  $s$  shodné rozložitelnosti je relací ekvivalence a třídy  $M/s$  této relace na množině mnohoúhelníků  $M$  tvoří mnohoúhelníky téhož obsahu. Mají-li dva mnohoúhelníky stejný obsah, patří do téže třídy a jsou tedy shodně rozložitelné. Platí tedy základní věta o shodné rozložitelnosti:

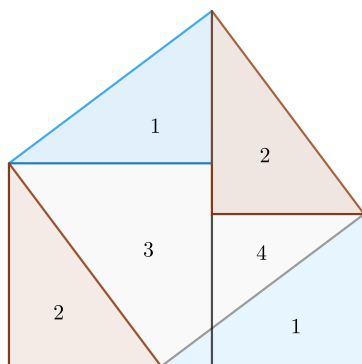
*Libovolné dva mnohoúhelníky téhož obsahu jsou shodně rozložitelné.*

Tuto větu můžeme dokázat i konstruktivně. Každý z mnohoúhelníků postupně rozložíme na obdélníky, ty pak na obdélníky shodné a společně jejich dělení můžeme převést na původní mnohoúhelníky. Tím bude uskutečněno jejich shodné rozdělení.



Obr. 10

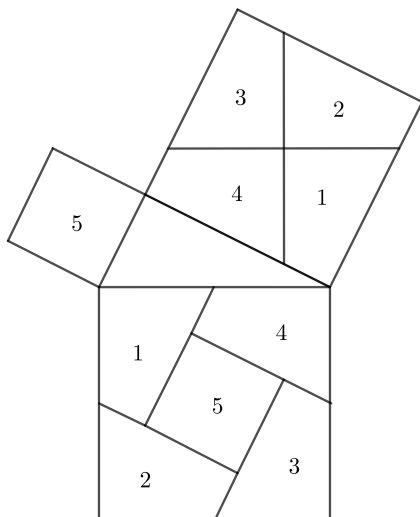
Úlohy o rozdělování mnohoúhelníků se vyskytují snad v celých dějinách elementární geometrie. Ilustrujme to třemi příklady. Nejprve dokážeme dvěma způsoby Pythagorovu větu. Na obr. 11 je čtverec nad přeponou rozdělen na trojúhelníky 1, 2, 4 a čtyřúhelník 3.



Obr. 11

Ze stejných útvarů se skládá sjednocení čtverců nad odvěsnami, tudíž je součet obsahů čtverců nad odvěsnami roven obsahu čtverce nad přeponou.

Druhý důkaz se opírá o obr. 12, jehož autorem je *H. Perigal* (1830). Obrázek vznikl takto: středem čtverce nad větší odvěsnou sestrojíme dvě navzájem kolmé přímky, z nichž jedna je rovnoběžná s přeponou pravouhlého trojúhelníku. Tyto přímky rozdělí čtverec na čtyři shodné čtyřúhelníky 1, 2, 3, 4, z nichž spolu se čtvercem nad kratší odvěsnou můžeme sestrojit čtverec nad přeponou. Tím je Pythagorova věta dokázána.



Obr. 12

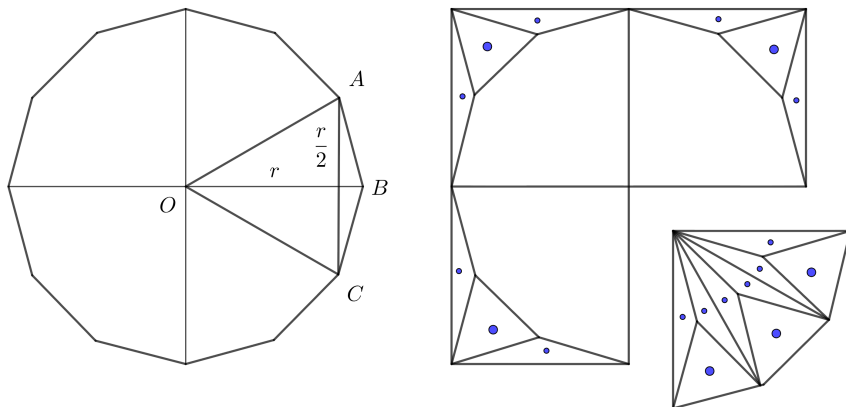
Z Číny desátého století pochází rozdělení pravidelného dvanáctiúhelníku na tři čtverce podle obr. 13. Pravidelný dvanáctiúhelník vepsaný do kružnice o poloměru  $r$  má tedy obsah  $3r^2$ . To je ovšem zřejmé i z obr. 13. Kdybychom připustili, že obsah pravidelného dvanáctiúhelníku je přibližnou hodnotou obsahu kruhu, tedy  $\pi r^2 = 3r^2$ , znamenalo by to hrubou aproximaci čísla  $\pi$  číslem 3.

To lze i historicky doložit např. citací z Bible kralické, Starý zákon, I. Kniha královská, Kapitola 7, verš 23:

*Udělal také moře slité,<sup>1)</sup> deset loket od jednoho kraje k druhém okrouhle vůkol, a pět loket byla výška jeho, a okolek jeho třiceti loket vůkol.*

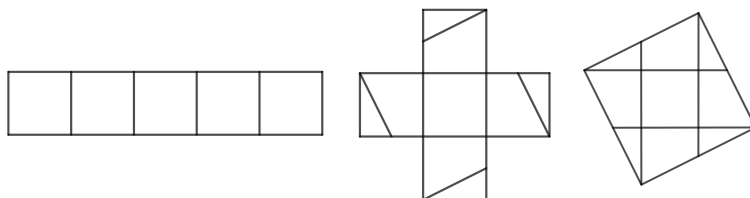
<sup>1)</sup>Nádoba s podstavou ve tvaru kruhu s průměrem 10 a obvodem 30.

Podle bible je tedy číslo  $\pi$  rovno číslu 3.



Obr. 13

Nakonec uvedme příklad přeměny pěti čtverců ve čtverec jediný.



Obr. 14

## Literatura

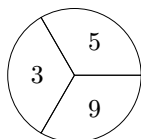
- [1] *Eukleides: Základy. Knihy I–IV.* OPS, Nymburk, 2008.
- [2] *Pomykalová, E.: Matematika pro gymnázia. Planimetrie.* Prometheus, Praha, 1993.
- [3] *Pomykalová, E.: Matematika s nadhledem od prváku k maturitě 6 – Planimetrie I.* Fraus, Plzeň, 2019.
- [4] *Kuřina F., Půlpán, Z.: Podivuhodný svět elementární matematiky.* Academia, Praha, 2006.
- [5] *Lišková, H.: Tangramové úlohy.* In: Fuchs, E. (Ed.): *Jak učit matematice žáky ve věku 10–16 let. Sborník příspěvků celostátní konference 19.–21. 10. 2017, Litomyšl, JČMF, Praha, 2018.*

# O netranzitivních ruletkách

PAVEL TLUSTÝ – IRENEUSZ KRECH

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice – Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie, POLSKO

V článku se budeme věnovat *ruletkám* a jejich vybraným vlastnostem. Ruletka je pomůcka určená k losování čísel. Zatím se omezíme jen na ruletky se stejně velkými sektory (vylosování každého z čísel na ruletce je stejně pravděpodobné). Příklad ruletky se 3 sektory je na obr. 1.



Obr. 1

Takovou třísektorovou ruletku lze ztotožnit s množinou  $R = \{3, 5, 9\}$ .

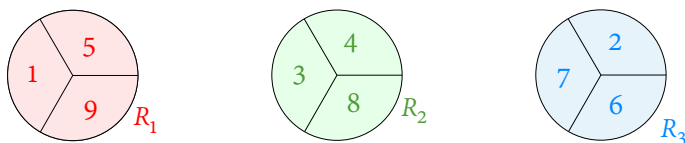
## Definice 1

Řekneme, že  $n$ -sektorové ruletky  $R_1, R_2, R_3$  tvoří *triplet*, označujeme  $(R_1, R_2, R_3)$ , pokud jsou množiny  $R_1, R_2, R_3$  navzájem disjunktní a splňují podmínky  $|R_1| = |R_2| = |R_3| = n$  a  $R_1 \cup R_2 \cup R_3 = \{1, 2, 3, \dots, 3n\}$ .

Mějme triplet  $(R_1, R_2, R_3)$  a uvažujme losování čísel pomocí ruletek  $R_{j_1}$  a  $R_{j_2}$ , kde  $j_1, j_2 \in \{1, 2, 3\}$ . Symbolem  $\{R_{j_1} \gg R_{j_2}\}$  označíme jev, že číslo vylosované pomocí ruletky  $R_{j_1}$  bude větší než číslo vylosované pomocí ruletky  $R_{j_2}$ .

## Příklad 1

Na obr. 2 máme triplet  $(R_1, R_2, R_3)$ , kde  $R_1 = \{1, 5, 9\}$ ,  $R_2 = \{3, 4, 8\}$ ,  $R_3 = \{2, 6, 7\}$ .



Obr. 2

Uvažujme nyní hru dvou hráčů, ve které si každý hráč vybere jednu z uvedených ruletek (každý jinou). Hráči losují pomocí své ruletky a ten, kdo vylosuje větší číslo, vyhrává. Soupeř vám nabídne, že si můžete vybírat ruletku jako první. Je to dobrá nabídka?

Mohlo by se zdát, že možnost vybrat si ruletku jako první je určitě výhodou. Vyberu si přece tu nejlepší a soupeři nechám na výběr ze dvou zbývajících. Zbývá jen určit, kterou ruletku si mám vybrat. Porovnáme tedy, jaké šance na výhru dávají hráčům jednotlivé ruletky.

Vylosujme nejprve dvojici čísel, jedno pomocí ruletky  $R_1$  a druhé ruletkou  $R_2$ . Grafická interpretace všech možných výsledků tohoto pokusu je na obr. 3. Červenou barvou je znázorněno 5 výsledků příznivých jevu  $\{R_1 \gg R_2\}$ , tedy  $P(R_1 \gg R_2) = \frac{5}{9} > \frac{1}{2}$ . Řekneme, že ruleтка  $R_1$  je lepší než ruleтка  $R_2$ .

8			
4			
3			
	1	5	9

Obr. 3

Pomocí podobného obrázku lze dokázat, že ruleтка  $R_2$  je lepší než ruleтка  $R_3$ . Nyní by se mohlo zdát, že nutně musí být ruleтка  $R_1$  lepší než ruleтка  $R_3$ . Ale to není pravda. Čtenář se snadno přesvědčí, že ruleтка  $R_3$  je lepší než ruleтка  $R_1$ . Mezi těmito třemi ruletkami tedy neexistuje nejlepší ruleтка. Vybírat si ruletku jako první tedy není výhodné. Hráč, který si vybírá ruletku jako druhý v pořadí, je ve výhodě, což se může zdát paradoxní.

## Definice 2

Triplet  $(R_1, R_2, R_3)$  nazveme *netranzitivní*, pokud

$$P(R_1 \gg R_2) > \frac{1}{2}, \quad P(R_2 \gg R_3) > \frac{1}{2}, \quad P(R_3 \gg R_1) > \frac{1}{2}.$$

## Příklad 2

Mějme triplet 6sektorových ruletek  $(R_1, R_2, R_3)$ , kde

$$R_1 = \{4, 5, 7, 10, 13, 18\}, \quad R_2 = \{2, 3, 9, 12, 14, 17\}, \quad R_3 = \{1, 6, 8, 11, 15, 16\}.$$



posloupnosti atd. Odtud dostaneme

$$\sigma(R_1, R_2, R_3) = (R_1, R_3, R_2, R_2, R_1, R_3, R_3, R_2, R_1).$$

Naopak z kódu tripletu můžeme získat jednotlivé ruletky. Například kód

$$(R_1, R_3, R_2, R_1, R_2, R_3, R_2, R_1, R_2, R_3, R_2, R_1, R_3, R_3, R_1)$$

určuje 5sektorové ruletky

$$R_1 = \{1, 4, 8, 12, 15\}, R_2 = \{3, 5, 7, 9, 11\}, R_3 = \{2, 6, 10, 13, 14\}.$$

S využitím kódu tripletu můžeme snadno zjistit, která ze dvou ruletek je lepší.

#### Definice 4

Uvažujme kód  $\sigma(R_1, R_2, R_3)$ . Symbolem

$$\delta(R_{j_1} \succ R_{j_2}), \quad j_1 \neq j_2, \quad j_1, j_2 \in \{1, 2, 3\}$$

označme počet všech případů, kdy v kódu  $\sigma(R_1, R_2, R_3)$  znaku  $R_{j_1}$  předchází znak  $R_{j_2}$ . Číslo  $\delta(R_{j_1} \succ R_{j_2})$  nazveme *hodnotou ruletky  $R_{j_1}$  vzhledem k ruletce  $R_{j_2}$* .

#### Příklad 4

V příkladu 3 jsme měli kód

$$\sigma(R_1, R_2, R_3) = (R_1, R_3, R_2, R_2, R_1, R_3, R_3, R_2, R_1).$$

Ukážeme si, jak vypočítáme  $\delta(R_1 \succ R_2)$ , tedy hodnotu ruletky  $R_1$  vzhledem k ruletce  $R_2$ .

1. Před prvním symbolem  $R_1$  neleží v uvedené posloupnosti žádný symbol  $R_2$ , tj. 0.
2. Druhému symbolu  $R_1$  předcházejí dva symboly  $R_2$ , tedy připočteme 2.
3. Před třetím symbolem  $R_1$  leží tři symboly  $R_2$ , tedy připočteme 3.

Odtud dostaneme, že  $\delta(R_1 \succ R_2) = 0 + 2 + 3 = 5$ . Analogicky máme  $\delta(R_2 \succ R_1) = 1 + 1 + 2 = 4$ .

Necháme na laskavém čtenáři, aby si rozmyslel, jako souvisejí čísla  $\delta(R_1 \succ R_2) = 5$  a  $\delta(R_2 \succ R_1) = 4$  s obr. 3. Pak bude zřejmé, že platí následující věta:

**Věta 1**

Uvažujme kód  $\sigma(R_1, R_2, R_3)$  o délce  $3m$ , kde  $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$ . Pokud

$$\delta(R_{j_1} \succ R_{j_2}) > \delta(R_{j_2} \succ R_{j_1}),$$

pak je ruletka  $R_{j_1}$  lepší než ruletka  $R_{j_2}$ .

Věta 1 dává jednoduchý návod, jak pomocí kódu porovnat, která ze dvou ruletek je lepší.

Pro další úvahy budeme potřebovat trojice *spravedlivých* ruletek. Nej-jednodušší takovou trojici ilustruje následující příklad 5.

**Příklad 5**

Triplet  $R_1 = \{1, 6\}, R_2 = \{2, 5\}, R_3 = \{3, 4\}$  má kód

$$(R_1, R_2, R_3, R_3, R_2, R_1).$$

Snadno se přesvědčíme, že

$$P(R_1 \gg R_2) = P(R_2 \gg R_3) = P(R_3 \gg R_1) = \frac{1}{2}.$$

Posloupnost  $(R_1, R_2, R_3, R_3, R_2, R_1)$  generovanou tripletem *spravedlivých* ruletek nyní použijeme k dalším úvahám. Z příkladu 3 víme, že triplet  $(R_1, R_2, R_3)$  netranzitivních ruletek  $R_1 = \{1, 5, 9\}, R_2 = \{3, 4, 8\}, R_3 = \{2, 6, 7\}$  má kód

$$(R_1, R_3, R_2, R_2, R_1, R_3, R_3, R_2, R_1). \tag{1}$$

Prodlužme tento kód tak, že na jeho začátek přidáme kód tripletu *spravedlivých* ruletek z příkladu 5. Tak vznikne nový kód

$$(R_1, R_2, R_3, R_3, R_2, R_1, R_1, R_3, R_2, R_2, R_1, R_3, R_3, R_2, R_1). \tag{2}$$

Je zřejmé, že každé číslo  $\delta(R_{j_1} \succ R_{j_2}), j_1 \neq j_2, j_1, j_2 \in \{1, 2, 3\}$  pro kód (2) bude o  $3 \cdot 2$ , tj. o 6 větší než analogické číslo pro kód (1). To nás vede k závěru, že vztahy  $\gg$  mezi ruletkami zůstanou zachovány a netranzitivita se přenáší i na nově vzniklé ruletky.

Dekódováním kódu (2) získáme triplet ruletek  $(R_1, R_2, R_3)$ , kde

$$R_1 = \{1, 6, 7, 11, 15\}, R_2 = \{2, 5, 9, 10, 14\}, R_3 = \{3, 4, 8, 12, 13\}.$$

Čtenář si sám ověří, že získaný triplet ruletek je skutečně netranzitivní. Ukázali jsme si tedy postup, jak lze z tripletu 3sektorových netranzitivních ruletek získat triplet netranzitivních 5sektorových ruletek. Prodloužení kódu lze také provést připojením kódu  $(R_1, R_2, R_3, R_3, R_2, R_1)$  na konec kódu (1). V takovém případě získáme kód

$$(R_1, R_3, R_2, R_2, R_1, R_3, R_3, R_2, R_1, R_1, R_2, R_3, R_3, R_2, R_1),$$

který generuje triplet ruletek

$$R_1 = \{1, 5, 9, 10, 15\}, \quad R_2 = \{3, 4, 8, 11, 14\}, \quad R_3 = \{2, 6, 7, 12, 13\}.$$

Popisovaný postup lze použít libovolně mnohokrát. Čtenáři necháváme za úkol zjistit, prodloužením jaké posloupnosti ruletek vznikla posloupnost ruletek z příkladu 5.

## Literatura

- [1] *Gardner, M.*: Colossal Book of Mathematics: Classic Puzzles Paradoxes And Problems. WW Norton & Company, 2001.
- [2] *Płocki, A., Tlustý, P.*: Kombinatoryka wokół nas. Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 3. vydání, 2017.
- [3] *Płocki, A., Tlustý, P.*: Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé. Prometheus, Praha, 2007.
- [4] *Savage, R. P.*: The paradox of nontransitive dice. The American Mathematical Monthly, roč. 101, (1994), č. 5, s. 429–436.
- [5] *Schaefer, A., Schweig, J.*: Balanced nontransitive dice. The College Mathematics Journal, roč. 48 (2017), č. 1, s. 10–16.
- [6] *Rump, C. M.*: Strategies for rolling the Efron dice. Mathematics Magazine, roč. 74, (2001), č. 3, s. 212–216.

# Mnohočleny v soutěži Matematický klokan

PAVEL CALÁBEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Mezinárodní soutěž Matematický klokan je již více než třicetiletá, když v červnu 1994 učitelé 10 zemí založili ve Štrasburku asociaci *Kangourou Sans Frontières* (AKSF), jejíž stanovy byly registrovány v Paříži v lednu 1995. Během let se v soutěži objevilo mnoho zajímavých úloh, které pokrývaly celou šíři výuky mnohočlenů na střední škole. Mohou sloužit jako doplňující učivo v hodinách matematiky, pro přípravu k maturitní zkoušce či jako úvod do problematiky mnohočlenů pro žáky řešící matematické soutěže. S úplnými řešeními některých úloh, rozdělených podle témat, vás seznámíme. Úlohy vesměs pocházejí z kategorie Student; v závorce je uveden rok, ve kterém soutěž proběhla, podtržena je vždy správná odpověď.

## 1. Práce s výrazy

V první části uvádíme příklady, které se týkají mnohočlenů spíše okrajově. Jsou založeny na manipulaci s výrazy, násobení a dělení mnohočlenů, znalosti základních vzorců pro práci s výrazy, včetně práce se symetrickými mnohočleny.

### Příklad 1 (2002)

Pro reálná čísla  $a, b, c$  platí

$$a + b + c = 7; \quad \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{7}{10}.$$

Jaká je hodnota  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ ?

- (A)  $\frac{19}{10}$       (B)  $\frac{17}{10}$       (C)  $\frac{9}{7}$       (D)  $\frac{3}{2}$       (E)  $\frac{10}{7}$

*Řešení.* Podle zadání platí

$$\begin{aligned} 7 \cdot \frac{7}{10} &= \frac{7}{a+b} + \frac{7}{b+c} + \frac{7}{c+a} = \frac{a+b+c}{a+b} + \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{c+a} = \\ &= 1 + \frac{c}{a+b} + 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a}. \end{aligned}$$

Odtud již snadno dostaneme

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{49}{10} - 3 = \frac{19}{10}.$$

**Příklad 2** (1996)

Nechť  $r + \frac{1}{r} = 6$ , potom  $r^3 + \frac{1}{r^3}$  je rovno:

- (A) 15      (B) 18      (C) 96      (D) 198      (E) jiná odpověď

*Řešení.* Užitím vzorce pro třetí mocninu součtu dostáváme

$$r^3 + \frac{1}{r^3} = \left(r + \frac{1}{r}\right)^3 - 3\left(r + \frac{1}{r}\right) = 6^3 - 3 \cdot 6 = 6 \cdot 33 = 198.$$

Takové číslo  $r$  skutečně existuje, je kořenem rovnice  $r^2 - 6r + 1 = 0$ , která má dokonce dva reálné kořeny  $3 \pm 2\sqrt{2}$ .

**Příklad 3** (1996)

Reálné číslo  $x$  vyhovuje rovnici  $x^2 - 4x + 2 = 0$ . Určete hodnotu  $x + \frac{2}{x}$ .

- (A) -4      (B) -2      (C) 0      (D) 2      (E) 4

*Řešení.* Snadno ověříme, že daná rovnice nemá kořen  $x = 0$ , proto vydělením nenulovým  $x$  dostaneme  $x - 4 + 2/x = 0$ , odkud  $x + 2/x = 4$ . Opět je potřeba si uvědomit, že taková  $x$  skutečně existují, například úvahou o kladném diskriminantu. Můžeme také rovnici vyřešit a vypočítat  $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{6}$ .

**Příklad 4** (2008)

Pro reálná čísla  $x, y, z$  platí  $x + y + z = 1$  a  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ . Hodnota  $x^2 + y^2 + z^2$  je:

- (A) 0      (B) 1      (C) 2      (D) 3      (E) není možno ji určit

*Řešení.* Z následující úpravy

$$0 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{yz + xz + xy}{xyz}$$

plyne  $xy + xz + yz = 0$ . Tedy

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = 1 - 2 \cdot 0.$$

Pro úplnost ještě dodejme, že taková reálná čísla skutečně existují, jsou to například  $x = y = 2/3, z = -1/3$ .

**Příklad 5** (2008)

Pro libovolné reálné číslo  $x$  označme  $\sin x + \cos x = m$ . Vyjádřete  $\sin^4 x + \cos^4 x$ .

- (A)  $1 - \frac{(1-m^2)^2}{2}$     (B)  $1 + \frac{(1-m^2)^2}{2}$     (C)  $\frac{1-(1-m^2)^2}{2}$     (D)  $m^4$     (E)  $m^4 + 1$

*Řešení.* Označme  $a = \cos x$ ,  $b = \sin x$ . Potom  $a^2 + b^2 = 1$ . Dle vzorce pro součet druhých mocnin dostáváme  $2ab = (a+b)^2 - (a^2 + b^2) = m^2 - 1$ . Ještě jednou uijeme vzorec pro součet druhých mocnin a dostaneme

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 = 1 - \frac{(1-m^2)^2}{2}.$$

**Příklad 6** (1995)

Mnohočlen  $(x + y)^9$  je rozložen a uspořádán podle klesajících mocnin  $x$ . Druhý a třetí člen mají stejnou hodnotu pro  $x = p$  a  $y = q$ , kde  $p, q$  jsou kladná čísla, jejichž součet je 1. Jaká je hodnota  $p$ ?

- (A)  $\frac{1}{5}$     (B)  $\frac{4}{5}$     (C)  $\frac{8}{9}$     (D)  $\frac{9}{10}$     (E) jiná

*Řešení.* Užitím binomické věty dostáváme, že druhý člen výrazu je  $9x^8y$ , třetí člen je  $36x^7y^2$ . Podle zadání tak platí  $9p^8q = 36p^7q^2$ . Jelikož  $p$  a  $q$  jsou kladná čísla, dostáváme odtud  $p = 4q$ . Ovšem podle zadání také platí  $q = 1 - p$ , což spolu s předcházející rovnicí dává  $p = \frac{4}{5}$ ,  $q = \frac{1}{5}$ .

**Příklad 7** (1995)

Výraz  $\sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}}$  je roven:

- (A)  $\frac{\sqrt{13}}{3}$     (B)  $\frac{3}{2}$     (C)  $\frac{\sqrt{5}}{2}$     (D)  $\sqrt{2}$     (E)  $2\sqrt{13}$

*Řešení.* Menšenek je jistě větší než menšitel, daný výraz je kladný, užitím vzorců pro druhou mocninu součtu a rozdílu druhých mocnin tak platí

$$\begin{aligned} \sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}} &= \sqrt{\left(\sqrt{7 + \sqrt{13}} - \sqrt{7 - \sqrt{13}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{7 + \sqrt{13} - 2\sqrt{(7 + \sqrt{13})(7 - \sqrt{13})} + 7 - \sqrt{13}} = \\ &= \sqrt{14 - 2\sqrt{49 - 13}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

*Poznámka.* Pro znalé se jedná o odvození tzv. Bhaskarových vzorců, které se užívají při úpravě surdických čísel.

*Jiné řešení.* Označme  $r = \sqrt{7 + \sqrt{13}}$  a  $s = \sqrt{7 - \sqrt{13}}$ . Potom

$$r^2 + s^2 = 7 + \sqrt{13} + 7 - \sqrt{13} = 14 \quad \text{a} \quad rs = \sqrt{7^2 - 13} = 6.$$

Proto

$$(r - s)^2 = r^2 + s^2 - 2rs = 14 - 2 \cdot 6 = 2.$$

Jelikož zřejmě  $r > s$ , platí  $r - s = \sqrt{2}$ .

**Příklad 8** (2004)

Číslo  $\left(\sqrt{22 + 12\sqrt{2}} - \sqrt{22 - 12\sqrt{2}}\right)^2$  je

- (A) záporné    (B) rovné nule    (C) čtvrtou mocninou přirozeného čísla  
(D) rovné  $11\sqrt{2}$     (E) přirozený násobek čísla 5

*Řešení.* Jedná se o variantu předcházející úlohy, podobným výpočtem

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{22 + 12\sqrt{2}} - \sqrt{22 - 12\sqrt{2}}\right)^2 = \\ & = 22 + 12\sqrt{2} - 2\sqrt{(22 + 12\sqrt{2})(22 - 12\sqrt{2})} + 22 - 12\sqrt{2} = \\ & = 44 - 2\sqrt{484 - 288} = 44 - 2 \cdot 14 = 2^4. \end{aligned}$$

## 2. Základní poznatky o mnohočlenech

V této části uvádíme příklady, které využívají základních poznatků o mnohočlenech, jako jsou výpočet hodnot, kořeny a dělitelnost kořenovým činitelem a Viětovy vztahy.

**Příklad 9** (2013)

Pro lineární funkci  $f$  platí  $f(2013) - f(2001) = 100$ . Vypočtete hodnotu  $f(2031) - f(2013)$ .

- (A) 75    (B) 100    (C) 120    (D) 150    (E) 180

*Řešení.* Uvažujme lineární funkci  $f(x) = ax + b$ . Potom podle zadání platí  $100 = f(2013) - f(2001) = a(2013 - 2001) = 12a$ . Proto

$$f(2031) - f(2013) = a(2031 - 2013) = 18a = 3/2 \cdot 12a = 150.$$

Snadno si uvědomíme, že takové lineární funkce skutečně existují, jsou to všechny lineární funkce s koeficientem  $a = 1/12$ .

**Příklad 10** (2014, mezinárodní verze)

Pro reálnou funkci  $f(x) = ax + b$  platí  $f(f(f(1))) = 29$  a  $f(f(f(0))) = 2$ . Určete  $a$ .

- (A) 1            (B) 2            (C) 3            (D) 4            (E) 5

*Řešení.* Uvažujme lineární funkci  $f(x) = ax + b$ . Potom podle zadání platí

$$\begin{aligned} 29 &= f(f(f(1))) = f(f(a + b)) = f(a(a + b) + b) = \\ &= a(a(a + b) + b) + b = a^3 + a^2b + ab + b, \\ 2 &= f(f(f(0))) = f(f(b)) = f(ab + b) = a(ab + b) + b = a^2b + ab + b. \end{aligned}$$

Odečtením těchto dvou vztahů dostaneme  $a^3 = 27$ , tedy  $a = 3$ . Pro úplnost ještě dodejme, že taková funkce skutečně existuje, platí pro ni  $b = 2/13$ .

*Jiné řešení.* Stejně jako v předcházejícím řešení si uvědomíme, že pro reálná čísla  $c, d$  a lineární funkci  $f(x) = ax + b$  platí  $f(d) - f(c) = a(d - c)$ . Proto

$$\begin{aligned} 27 &= 29 - 2 = f(f(f(1))) - f(f(f(0))) = a(f(f(1)) - f(f(0))) = \\ &= a(a(f(1) - f(0))) = a(a(a)) = a^3 \end{aligned}$$

se stejným dokončením.

**Příklad 11** (1997)

Jaký je součet všech koeficientů polynomu

$$W(x) = (x - 1997)(x - 1498)(x - 999)(x - 1) + 1?$$

- (A) 1997            (B) 1000            (C) 1            (D) 13            (E) 4996

*Řešení.* Součet všech koeficientů mnohočlenu je roven jeho hodnotě v bodě 1. Je tak roven

$$W(1) = (-1996) \cdot (-1497) \cdot (-998) \cdot 0 + 1 = 1.$$

*Jiné řešení.* Koeficienty můžeme ovšem také vypočítat a sečíst je. Dostaneme

$$W(x) = x^4 - 4495x^3 + 6\,487\,505x^2 - 2\,994\,997\,505x + 2\,988\,514\,495.$$

**Příklad 12** (1995)

Rozvineme-li výraz  $(2x - 1)^{1995}$  vzhledem k proměnné  $x$ , dostaneme:

$$a_{1995}x^{1995} + a_{1994}x^{1994} + \dots + a_1x + a_0$$

Součet koeficientů  $a_{1995} + a_{1994} + \dots + a_1 + a_0$  je roven:

- (A) 0      (B) 1      (C) 1995      (D) -1      (E) 2

*Řešení.* Stejně jako v předchozím příkladě je hledaná hodnota rovna hodnotě mnohočlenu v bodě 1, tedy  $(2 \cdot 1 - 1)^{1995} = 1$ .

**Příklad 13** (1997)

Jaký je součet druhých mocnin všech reálných kořenů rovnice

$$x^{256} - 256^{32} = 0?$$

- (A) 8      (B) 4      (C) 512      (D)  $65 \cdot 536$       (E)  $2 \cdot 256^{32}$

*Řešení.* Jelikož  $256 = 2^8$ , je daná rovnice ekvivalentní  $x^{256} = 2^{8 \cdot 32} = 2^{256}$  čili  $|x| = 2$ . Jejími reálnými kořeny jsou pouze  $\pm 2$ , tedy hledaný součet je  $(-2)^2 + 2^2 = 8$ .

**Příklad 14** (1996)

Každá algebraická rovnice lichého stupně  $n$  ( $n \geq 3$ ,  $a_n \neq 0$ )

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x^1 + a_0 = 0$$

- (A) má alespoň jeden reálný kořen      (B) má alespoň dva reálné kořeny  
 (C) má vždy tři reálné kořeny      (D) nikdy nemá žádný reálný kořen  
 (E) nemá žádný reálný kořen, pokud není  $a_0 = 0$

*Řešení.* Jedná se o základní poznatek.

**Příklad 15** (2018)

Čísla  $m$  a  $n$  jsou kořeny rovnice  $x^2 - x - 2018 = 0$ . Určete hodnotu součtu  $m^2 + n$ .

- (A) 2016      (B) 2017      (C) 2018      (D) 2019      (E) 2020

*Řešení.* Velmi hezký příklad, v zadání opravdu není chyba a výraz  $m^2 + n$  je nesymetrický. Nejprve ukážeme, že pokud kořeny označíme v opačném pořadí, bude hodnota výrazu stejná, tedy že  $m^2 + n = n^2 + m$ . Plyne to z úpravy rovnosti  $m^2 - m - 2018 = 0 = n^2 - n - 2018$ . Podle Viětových

vztahů platí  $m+n=1$ , dosazením  $m=1-n$  do rovnosti  $m^2-m-2018=0$  dostaneme  $m^2-(1-n)-2018=0$ , odkud  $m^2+n=2019$ .

*Jiné řešení.* Úlohu můžeme samozřejmě řešit tak, že si najdeme kořeny dané rovnice, kterými jsou čísla  $(1 \pm 3\sqrt{897})/2$  a dosadíme do obou vztahů  $m^2+n$  a  $n^2+m$ . Jejich úpravu necháváme laskavému čtenáři.

**Příklad 16** (1998)

Rovnice  $x^2+3x+5=0$  má kořeny  $\alpha$  a  $\beta$ . Která rovnice má kořeny  $\frac{1}{\alpha}$  a  $\frac{1}{\beta}$ ?

- (A)  $x^2+\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}=0$     (B)  $5x^2+3x+1=0$     (C)  $15x^2+x+1=0$   
 (D)  $x^2+\frac{1}{3}x+1=0$     (E)  $x^2+3x+\frac{1}{5}=0$

*Řešení.* Podle Viětových vztahů platí  $\alpha+\beta=-3$ ,  $\alpha\beta=5$ , proto

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-3}{5} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{5}.$$

Podobně podle Viětových vztahů má kořeny  $\frac{1}{\alpha}$  a  $\frac{1}{\beta}$  rovnice  $x^2+\frac{3}{5}x+\frac{1}{5}=0$ . Tu snadno upravíme na tvar (B).

**Příklad 17** (2016)

Každá z rovnic  $x^2+ax+b=0$  a  $x^2+bx+a=0$  s reálnými koeficienty  $a$  a  $b$  ( $a \neq b$ ) má dva reálné kořeny. Součet druhých mocnin kořenů první z nich je roven součtu druhých mocnin kořenů druhé rovnice. Určete hodnotu  $a+b$ .

- (A)  $-4$     (B)  $-2$     (C)  $0$     (D)  $4$     (E) nelze jednoznačně určit

*Řešení.* Označíme-li  $t_1, t_2$  kořeny první rovnice a  $u_1, u_2$  kořeny druhé, podle Viětových vztahů platí  $t_1+t_2=-a$ ,  $t_1t_2=b$ ,  $u_1+u_2=-b$ ,  $u_1u_2=a$ . Podle zadání pak

$$a^2-2b=(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=t_1^2+t_2^2=u_1^2+u_2^2=(u_1+u_2)^2-2u_1u_2=b^2-2a.$$

Úpravou této rovnice dostaneme

$$0=a^2-2b-b^2+2a=(a-b)(a+b+2).$$

Jelikož podle zadání  $a \neq b$ , platí  $a+b=-2$ . Pro úplnost ještě dodejme, že existují taková čísla  $a, b$ , že obě rovnice mají uvedené vlastnosti. Například pro  $a=-2$  a  $b=0$  má první rovnice kořeny  $0$  a  $2$  se součtem druhých mocnin  $4$ . Druhá rovnice má kořeny  $\pm\sqrt{2}$  se stejným součtem druhých mocnin.

**Příklad 18** (2003)

Polynom  $P(x)$  vyhovuje pro všechna reálná čísla  $x$  rovnici

$$P(x^2 + 1) = x^4 + 4x^2.$$

Určete  $P(x^2 - 1)$ .

- (A)  $x^4 - 4x^2$  (B)  $x^4$  (C)  $x^4 + 4x^2 - 4$  (D)  $x^4 - 4$  (E) jiná odpověď

*Řešení.* Pro každé reálné číslo  $x$  platí

$$x^4 + 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - 4 = ((x^2 + 1) - 1)^2 - 4.$$

Jelikož všechna reálná čísla  $t$  větší nebo rovna 1 můžeme zapsat ve tvaru  $t = x^2 + 1$ , platí pro ně  $P(t) = (t - 1)^2 - 4$ . Takovýchto čísel je nekonečně mnoho, každý mnohočlen je určen hodnotami v konečně mnoha bodech (aspoň o jedna více než je jeho stupeň), výše uvedený předpis tak platí pro všechna reálná čísla  $t$ . Proto

$$P(x^2 - 1) = ((x^2 - 1) - 1)^2 - 4 = x^4 - 4.$$

**Příklad 19** (2016)

Kolik různých řešení v oboru reálných čísel má rovnice

$$(x^2 - 4x + 5)^{x^2 + x - 30} = 1?$$

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) nekonečně mnoho

*Řešení.* Buď platí  $x^2 + x - 30 = 0$  a  $x^2 - 4x + 5 \neq 0$ , nebo  $x^2 - 4x + 5 = 1$ , nebo  $x^2 - 4x + 5 = -1$  a  $x^2 + x - 30$  je celé číslo dělitelné dvěma. První rovnice z první dvojice má kořeny  $-6$  a  $5$ , oba vyhovují druhé nerovnosti. Druhá rovnice má (dvojnásobný) kořen  $2$ , první rovnice třetí dvojice nemá reálné kořeny, jelikož její diskriminant je  $16 - 24 < 0$ .

**Příklad 20** (2021)

Nechť  $M(k)$  je maximum funkce  $y = |4x^2 - 4x + k|$  pro libovolné reálné číslo  $k$ ,  $x \in \langle -1; 1 \rangle$ . Najděte nejmenší možnou hodnotu  $M(k)$ .

- (A) 4 (B)  $\frac{9}{2}$  (C) 5 (D)  $\frac{11}{2}$  (E) 8

*Řešení.* Každá z parabol  $y = p(x) = 4x^2 - 4x + k$  má vrchol v bodě  $x = 1/2 \in \langle -1; 1 \rangle$ . Zřejmě tak platí  $p(-1) > p(1) > p(1/2)$ . Jelikož grafem funkce  $p(x)$  je spojitá parabola, která má minimum v bodě  $1/2$ , kvadratická

funkce  $p(x)$  na intervalu  $\langle -1; 1 \rangle$  nabývá všech hodnot mezi čísly  $p(1/2)$  a  $p(-1)$ . Platí tak

$$M(k) = \max\{|p(-1)|, |p(1/2)|\} = \max\{|8 + k|, |-1 + k|\}.$$

Rovnice  $|8 + k| = |-1 + k|$  má jediné řešení  $k = -7/2$ , pro něž jsou obě absolutní hodnoty  $9/2$ . Pro  $k < -7/2$  je  $M(k) \geq |-1 + k| = 1 - k > 9/2$ , pro  $k > -7/2$  platí  $M(k) \geq |8 + k| = 8 + k > 9/2$ . Funkce  $M(k)$  tak nabývá svého minima  $9/2$  v bodě  $k = -7/2$ .

**Příklad 21** (2024, mezinárodní verze)

Mnohočlen  $P$  vyhovuje vztahu  $P(x + 1) = x^2 - x + 2P(6)$  pro všechna reálná čísla  $x$ . Jaký je součet koeficientů mnohočlenu  $P$ ?

(A)  $-40$  (B)  $-6$  (C)  $12$  (D)  $40$  (E) žádný z předcházejících

*Řešení.* Dle zadání rovnost platí pro  $x = 5$ , odtud  $P(6) = 5^2 - 5 + 2P(6)$ , tedy  $P(6) = -20$ . Proto  $P(x + 1) = x^2 - x - 40$ . Součet koeficientů mnohočlenu  $P$  je roven  $P(1)$ , do dané rovnice dosadíme  $x = 0$  a dostaneme  $P(1) = 1^2 - 1 - 40 = -40$ .

*Jiné řešení.* Jako v předcházejícím řešení dostaneme  $P(x + 1) = x^2 - x - 40$ . Proto mnohočlen

$$P(x) = P((x - 1) + 1) = (x - 1)^2 - (x - 1) - 40 = x^2 - 3x - 38$$

má součet koeficientů  $1 + (-3) + (-38) = -40$ .

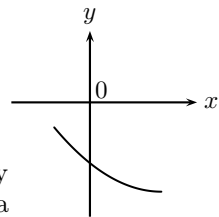
### 3. Grafy polynomických funkcí

Úlohy testující, zda žáci chápou vztah mezi předpisem mnohočlenu a jeho grafem jsou v Matematickém klokanovi velmi oblíbené a vděčné.

**Příklad 22** (2020)

Na obrázku vidíte část paraboly  $y = ax^2 + bx + c$ . Které z následujících čísel je kladné?

(A)  $c$  (B)  $b + c$  (C)  $ab$  (D)  $ac$  (E)  $bc$



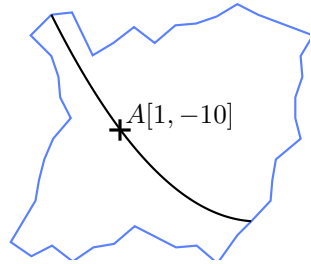
*Řešení.* Parabola na obrázku je otevřená nahoru, tedy  $a > 0$ , protíná osu  $y$  v záporném čísle, tedy  $c < 0$  a její vrchol leží vpravo od osy  $y$ , proto je  $-b/(2a) > 0$ , tedy  $b < 0$ . Tyto poznatky vylučují (A), (B), (C), (D). Na obrázku je část paraboly

$$y = 0,2(x - 6)(x + 2) + 0,7 = 0,2x^2 - 0,8x - 1,7.$$

**Příklad 23** (2011)

Na tabuli byla nakreslena (v kartézské soustavě souřadnic s obvyklou polohou os  $x$  a  $y$ ) parabola  $y = ax^2 + bx + c$  a na ní vyznačen bod  $A[1; -10]$ . Po smazání části tabule (včetně os) zůstala pouze část na obrázku. Které z následujících tvrzení může být nepravdivé?

- (A)  $a > 0$       (B)  $b < 0$       (C)  $a + b + c < 0$   
 (D)  $b^2 > 4ac$       (E)  $c < 0$



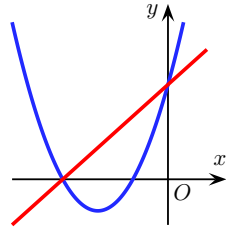
*Řešení.* Parabola je otevřená nahoru, tedy  $a > 0$ , její vrchol leží vpravo od přímky  $x = 1$ , tedy  $-b/(2a) > 1$  čili  $b < -2a < 0$ . Jelikož funkce  $y$  v bodě 1 nabývá hodnoty  $-10$ , je součet jejích koeficientů záporný, navíc má dva reálné kořeny, tedy kladný diskriminant  $b^2 - 4ac > 0$ . Nemusí tak platit jediné (E), např. pro funkci

$$y = 25(x - 3/5)(x - 2) = 25x^2 - 65x + 30.$$

**Příklad 24** (2021)

Na obrázku je parabola o rovnici  $y = ax^2 + bx + c$ , kde  $a$ ,  $b$  a  $c$  jsou různá reálná čísla. Přímka protíná parabolu na záporné poloose  $x$  a kladné poloose  $y$ . Která z následujících rovnic může být rovnicí této přímky?

- (A)  $bc$       (B)  $cb$       (C)  $ab$       (D)  $ac$       (E)  $ca$



*Řešení.* Parabola na obrázku je otevřená nahoru, tedy  $a > 0$ , v bodě 0 nabývá hodnotu  $c$ , tedy  $c > 0$ . Přímka na obrázku prochází také bodem  $(0, c)$ , tedy její absolutní člen je  $c$ . Vzhledem k tomu, že  $a$ ,  $b$ ,  $c$  jsou navzájem různá čísla, tím vyloučíme (B), (C), (E). Pokud by hledanou přímkou byla (A), potom by rovnice  $ax^2 + bx + c = bx + c$  měla záporný kořen (který je (menším) kořenem kvadratického mnohočlenu) a kořen 0 (obě křivky prochází bodem  $(0, c)$ ). Ovšem tato rovnice má dvojnásobný kořen 0, což je spor. Správnou odpovědí tak může být jediné (D). Například parabola  $y = x^2 + 3x + 2$  prochází body  $(-2; 0)$ ,  $(-1; 0)$  a  $(0; 2)$ . Přímka  $y = x + 2$  jím prochází také a osu  $x$  protíná v bodě  $-2$ .

**Příklad 25** (2018)

Graf kvadratické funkce  $f(x) = x^2 + px + q$  s reálnými koeficienty protíná osy  $x$  a  $y$  ve třech různých bodech. Kružnice procházející těmito body

protíná graf funkce  $f$  v dalším bodě. Najděte jeho souřadnice pro libovolné přípustné hodnoty  $p, q$ .

- (A)  $[0, -q]$  (B)  $[p, q]$  (C)  $[-p, q]$  (D)  $\left[-\frac{q}{p}, \frac{q^2}{p^2}\right]$  (E)  $[1, p + q + 1]$

*Řešení.* Parabola, která je grafem kvadratické funkce  $f$ , protíná osu  $y$  v jediném bodě  $C[0, q]$ , osu  $x$  tak musí protnout ve dvou bodech, které jsou kořeny  $f$ . Osou souměrnosti této paraboly je přímka  $x = -p/2$  procházející jejím vrcholem rovnoběžná s osou  $y$ . Tato přímka také prochází středem uvažované kružnice, je tak její osou. Bodem souměrně sruženým s bodem  $C$  podle této přímky je bod  $[-p, q]$ .

Například kružnice  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$  prochází průsečíky  $[-1; 0]$ ,  $[0; -3]$  a  $[3; 0]$  paraboly  $y = x^2 - 2x - 3$  s osami  $x$  a  $y$ . Dosazením snadno zjistíme, že tato kružnice neprochází body  $[0; 3]$ ,  $[-2; -3]$ ,  $[-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}]$ ,  $[1; -4]$ , což vylučuje distraktory (A), (B), (D), (E).

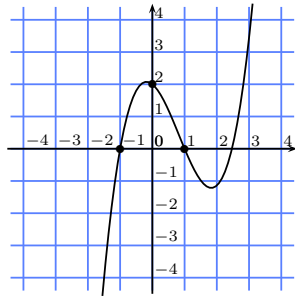
**Příklad 26** (2007)

Na obrázku vidíte část grafu funkce  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Určete číslo  $b$ .

- (A)  $-4$  (B)  $-2$  (C)  $0$  (D)  $2$  (E)  $4$

*Řešení.* Graf funkce prochází body  $[-1; 0]$ ,  $[0; 2]$ ,  $[1; 0]$ , platí tak

$$\begin{aligned} -a + b - c + d &= 0, \\ a + b + c + d &= 0. \end{aligned}$$



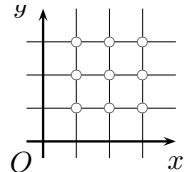
Pokud od součtu první a třetí rovnice odečteme dvojnásobek druhé, dostaneme  $b = -2$ . Pro úplnost dodejme, že na obrázku je graf funkce

$$y = 0,81x^3 - 2x^2 - 0,81x + 2 = (x - 1)(x + 1)(0,81x - 2).$$

**Příklad 27** (2016)

Kolik kvadratických funkcí proměnné  $x$  má vlastnost, že jejich graf prochází alespoň třemi z vyznačených mřížových bodů kartézské soustavy souřadnic na obrázku?

- (A) 6 (B) 18 (C) 19 (D) 22 (E) jiný počet



*Řešení.* Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že jsou vyznačeny mřížové body  $[i, j]$ , kde  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ . Graf nejvýše kvadratické funkce je určen

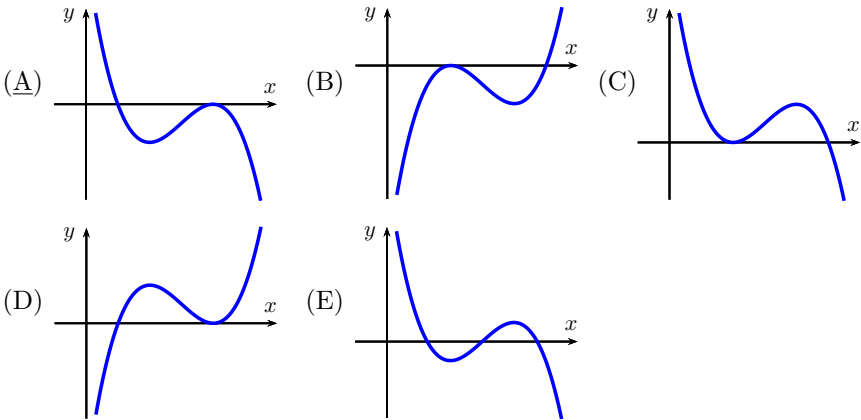
třemi různými body, tato parabola tak prochází právě jedním z bodů každého sloupce (v našem případě  $x = 1, 2, 3$ ). Pro každý sloupec jsou to tři možnosti, existuje tak  $3^3 = 27$  vyhovujících nejvýše kvadratických funkcí. Mezi nimi je však právě pět lineárních, jsou to funkce  $y = 1$ ,  $y = 2$ ,  $y = 3$ ,  $y = x$ ,  $y = 4 - x$ .

**Příklad 28** (2013)

Pro reálná čísla  $a < b$  uvažujme funkci

$$W(x) = (a - x)(b - x)^2.$$

Na jednom z následujících obrázků je její graf. Na kterém?



*Řešení.* Mnohočlen  $W$  třetího stupně má dva reálné kořeny ((E) má tři), z nichž větší ( $b$ ) je dvojnásobný (nevyhovuje (B), (C)). Přitom pro  $x > b$  platí  $W(x) < 0$ .

**Závěr**

Uvedli jsme 28 úloh o mnohočlenech, které se objevily za 30 let v soutěži Matematický klokan. Můžeme konstatovat, že tyto úlohy jednak pokrývají učivo o mnohočlenech ze střední školy a mnohé z nich jej zajímavým způsobem rozvíjejí. Mohou tak sloužit jako rozvíjecí učivo pro nadanější žáky, jednak jako příprava k maturitní zkoušce z matematiky.

# Úloha o bedničkách

JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V letech 1968–1970 odvysílala Československá televize (ČST) více než dvacet dílů zábavného pořadu (dnes talkshow) „Hovory H“ vynikajícího českého herce a spisovatele *Miroslava Horníčka* (1918–2003). Ten se podílel také na tvorbě většiny scénářů k jednotlivým dílům tohoto divácky atraktivního pořadu ČST. Ve 22. dílu „Hovorů“, který byl uveden v roce 1970, vyzval Miroslav Horníček diváky k řešení jedné zajímavé logické „úlohy o bedničkách“:

*Mezi šesti bedničkami, z nichž pět má stejnou hmotnost a jedna z nich má hmotnost jinou, určete pomocí trojího vážení na digitálních vahách, která z bedniček má jinou hmotnost. (Lze stejnou úlohu řešit i pro sedm bedniček, mezi nimiž má jedna jinou hmotnost než ostatních šest?)*

Dále uvádíme jedno z možných řešení (strategii řešení) „úlohy o bedničkách“. Pokud vás však tato úloha zaujala, pokuste se *nejprve sami* o její řešení, až poté se vraťte k jejímu níže uvedenému řešení.

*Řešení úlohy o bedničkách.*

Označme jednotlivé bedničky **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**. Nejprve zvážíme společně např. první tři bedničky (**1**, **2** a **3**). Jejich hmotnost označíme  $m_1$ . Ve druhém kroku zvážíme společně bedničky **3** a **4**. Zjištěnou hmotnost označíme  $m_2$ . Obě vážení zaznamenáme symbolicky:

$$\begin{aligned}m_1 &= \mathbf{1} + \mathbf{2} + \mathbf{3}, \\m_2 &= \quad \quad \mathbf{3} + \mathbf{4}.\end{aligned}$$

Pokud  $2m_1 = 3m_2$ , mají bedničky **1**–**4** stejnou hmotnost. Všechny čtyři jsou tedy pravé, a hmotnost  $m$  každé z nich je proto  $m = m_1/3 = m_2/2$ . Jinou hmotnost (je „falešná“) má tedy buď bednička **5**, nebo bednička **6**. Třetím vážením pak snadno zjistíme, která z nich je falešná. Zvážíme samostatně bedničku **5**, tj. symbolicky  $m_3 = \mathbf{5}$ . Pokud  $m_3 = m$ , je falešná bednička **6**. V opačném případě je falešná bednička **5**.

Je-li však  $2m_1 \neq 3m_2$ , je falešná některá z bedniček **1–4** (obě bedničky **5 a 6** jsou tedy pravé). V tomto případě určíme třetím vážením hmotnost bedniček **2 a 5** dohromady, tj. symbolicky  $m_3 = 2 + 5$ .

Platí-li  $m_3 = m_2$ , je falešná bednička **1**.

Pokud však  $m_3 \neq m_2$ , musíme uvažovat dvě možnosti:

(i) Je-li  $3m_3 = 2m_1$ , je falešná bednička **4**.

(ii) Je-li  $3m_3 \neq 2m_1$ , je falešná buď bednička **2**, nebo bednička **3**.

V případě (ii) jsou tedy pravé (kromě bedniček **1, 5 a 6**) buď obě bedničky **3 a 4**, nebo obě bedničky **2 a 4**, což však znamená, že právě jedna ze zvážených hodnot  $m_2, m_3$  je rovna hmotnosti  $2m$  dvou pravých bedniček. Platí tedy:

Bednička **2** je falešná, právě když  $m_2 = 2m$ , tj. právě když pro její hmotnost  $f$  platí  $f = m_1 - 2m = m_3 - m$ , což po úpravě dává

$$2m_1 = m_2 + 2m_3.$$

Analogicky, bednička **3** je falešná, právě když  $m_3 = 2m$ , tj. právě když pro její hmotnost  $f$  platí  $f = m_1 - 2m = m_2 - m$ . Odtud po úpravě máme

$$2m_1 = 2m_2 + m_3.$$

Dodejme ještě, že součty  $m_2 + 2m_3$  a  $2m_2 + m_3$  jsou díky předpokladu  $m_3 \neq m_2$  různé, takže nastane právě jedna z odvozených možností.

Tím jsme probrali všechny možnosti, jak mezi šesti bedničkami, z nichž jedna má jinou hmotnost než ostatních pět, lze pomocí trojího vážení na digitálních vahách nalézt falešnou bedničku (s odlišnou hmotností).

Na konkrétním příkladu se můžete kontrolně přesvědčit o správnosti navrženého postupu, a to pro konkrétních šest bedniček např. s hmotnostmi v pořadí 8, 8, 9, 8, 8, 8, popř. 8, 9, 8, 8, 8, 8.

*Poznámka.* Tuto logickou úlohu bylo mj. možno uplatnit jako vhodnou průpravu (doplňkovou úlohu) k úloze C–I–6 v aktuálním – 75. ročníku MO (o 21 buchtách, z nichž 10 je naplněno povidly a ostatních 11 tvarohem).

Závěrem uvádíme pro zájemce formulaci analogické úlohy pro 7 bedniček:

*Mezi sedmi bedničkami, z nichž šest má stejnou hmotnost a jedna z nich má hmotnost jinou, určete pomocí trojího vážení na digitálních vahách, která z bedniček má jinou hmotnost.*

Nejlepší řešení této úlohy, případně jiná řešení úvodní úlohy, která zašlete do redakce časopisu Matematika–fyzika–informatika, rádi zveřejníme.

# Zajímavé matematické úlohy

V dalším čísle našeho časopisu pokračujeme v pravidelné rubrice Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 9. 2026 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi zveřejníme.

## Úloha 309

Průsečky rovnoběžek se stranami trojúhelníku  $ABC$  dělí zbývající strany na  $n$  shodných částí. Tyto rovnoběžky spolu se stranami dělí trojúhelník na shodné malé trojúhelníky s jednotkovým obsahem. Určete všechna přirozená čísla  $n$ , pro něž lze trojúhelník  $ABC$  rozřezat na tři trojúhelníky, jejichž vrcholy leží v dělicích bodech stran  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  nebo ve vrcholech  $A$ ,  $B$ ,  $C$  a současně jejich obsahy jsou tři po sobě jdoucí přirozená čísla.

*Jaroslav Zhouf*

## Úloha 310

Určete všechny trojice  $(a, b, c)$  nenulových reálných čísel pro něž současně platí:

- rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

má tři různé nenulové reálné kořeny, z nichž jeden je 10,

- převrácené hodnoty těchto kořenů jsou současně kořeny rovnice

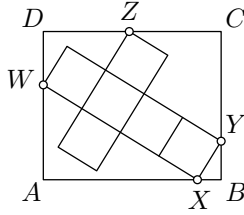
$$4x^3 + \frac{1}{a}x^2 + \frac{1}{b}x + \frac{1}{c} = 0.$$

*Zdeněk Pezlar*

V následující části uvádíme řešení úloh 305 a 306, jejichž zadání jsme zveřejnili v posledním (čtvrtém) čísle loňského (34.) ročníku našeho časopisu.

## Úloha 305

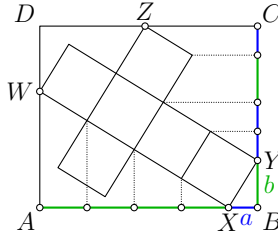
Do obdélníku  $ABCD$  se stranami délek  $|AB| = 30$ ,  $|BC| = 25$  jsme umístili síť krychle, která se dotýká jeho stran v bodech  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  a  $W$  podle obrázku.



Vypočítejte délku strany krychle a rozhodněte, zda lze tuto síť umístit do obdélníku tak, aby její strany byly rovnoběžné se stranami obdélníku.

*Tomáš Bárta*

*Řešení.* Označme  $|BX| = a$ ,  $|BY| = b$ , Z obr. 1 plyne  $30 = |AB| = a + 4b$ ,  $25 = |BC| = 3a + 2b$ .



Obr. 1

Řešením této soustavy rovnic dostaneme  $a = 4$ ,  $b = 13/2$ . Délka hrany krychle je pak podle Pythagorovy věty rovna

$$|XY| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + \left(\frac{13}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{233}.$$

Pokud je možno síť krychle umístit do obdélníku tak, aby její strany byly rovnoběžné se stranami obdélníku, je délka úsečky  $WX$  kratší než nejdelší strana obdélníku, tedy  $AB$ . Platí však

$$|WX| = 4|XY| = 2\sqrt{233}$$

a

$$|WX| = 2\sqrt{233} > 2\sqrt{225} = 2 \cdot 15 = 30 = |AB|,$$

tedy síť krychle nelze výše popsaným způsobem do obdélníku umístit.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Michał Fronczek* a *Bar-tosz Wieczorek*, všichni II LO SS Tarnowskie Góry (Polsko), *Tereza Reimová* a *Tereza Havelková*, obě G Jablonec nad Nisou, U Balvanu.

Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

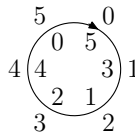
### Úloha 306

U kulatého stolu sedí  $n$  ( $n \geq 3$ ) svatebních hostů. Číšník přinesl kulatý ták, na němž je  $n$  různých zákusků rozmístěných do kruhu. Ukázalo se, že každý host je alergický právě na jeden zákusek, každý na jiný. Najděte všechna  $n$  s následující vlastností:

Jsou-li zákusky na tácu rozmístěny do kruhu jakkoliv, číšník může položit ták doprostřed stolu tak, aby před každým hostem byl na tácu zákusek, na nějž není alergický.

*Josef Tkadlec*

*Řešení.* Označme hosty sedící kolem kulatého stolu ve směru hodinových ručiček netradičně  $0, 1, 2, \dots, n-1$ , ať nemáme problém s popisem pomocí zbytků při celočíselném dělení.



Nechť číšník donese zákusky na tácu a postaví jej doprostřed stolu tak, že před každým hostem je jeden zákusek. Označme  $\pi(i)$  hosta, který je alergický na zákusek před hostem  $i$ . Jelikož každý host je alergický na právě jeden zákusek a každý na jiný, je  $\pi$  permutace množiny  $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ . (Například obrázek odpovídá permutaci  $\pi = (5, 3, 1, 2, 4, 0)$  a znamená, že host 5 je alergický na zákusek před hostem 0, host 3 je alergický na zákusek před hostem 1 atd.)

Nejprve ukážeme, že pro  $n$  sudé může číšník otočit ták o nějakých  $j$  pozic ( $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ) ve směru hodinových ručiček tak, že se před každým hostem po tomto otočení objeví zákusek, na který není alergický. (Na obrázku je to např.  $j = 3$ .) Sporem předpokládejme, že to není možné. Potom pro každé  $j$  existuje takové číslo  $i$ , že se zákusek s číslem  $\pi(i)$  objeví před hostem  $(i + j) \bmod n$ , který je na něj alergický, a bude tak platit

$$\pi(i) \equiv i + j \pmod{n}.$$

(Například na prvním obrázku je  $n = 6$ , pro  $j = 0$  je takové  $i = 4$  (před hostem 4 leží zákusek, na který je alergický), pro  $j = 1$  je  $i = 5$  (při otočení tácu o jednu pozici ve směru hodinových ručiček se před hostem 0 objeví zákusek, na který je alergický on, tento zákusek původně stál na pozici 5), pro  $j = 2$  je  $i = 1$  atd.) Bude tak platit

$$\pi(i) - i \equiv j \pmod{n}.$$

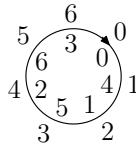
Přítom zřejmě platí, že různým  $j$  odpovídají různá čísla  $i$  (při dvou různých otočeních se před stejným hostem nemůže objevit dvakrát zákusek, na který je alergický). Sečtením všech těchto ekvivalencí dostaneme

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\pi(i) - i) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} j \pmod{n}.$$

Jelikož  $\pi$  je permutace, je na levé straně této ekvivalence 0, platí tak

$$0 \equiv \frac{n(n-1)}{2} \pmod{n},$$

tedy  $n$  dělí číslo  $n(n-1)/2$ , což je spor, protože toto číslo je dělitelné  $n$  jen v případě, že  $(n-1)/2$  je celé, tedy  $n$  je liché číslo.



Pro  $n$  liché se číšníkoví otočení tácu nemusí podařit, uspořádejme zákusky na tácu „ob jedno místo“, tj. zákusek, na který je alergický host  $i$ , leží na místě  $(2i \bmod n)$ . (Na obrázku je toto uspořádání pro  $n = 7$ .) Potom při otočení tácu o  $j$  pozic ve směru hodinových ručiček bude před zákuskem, na který je alergický, sedět host číslo  $(n - j) \bmod n$ .

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Michał Fronczek* a *Bar-tosz Wieczorek*, oba II LO Tarnowskie Góry (Polsko).

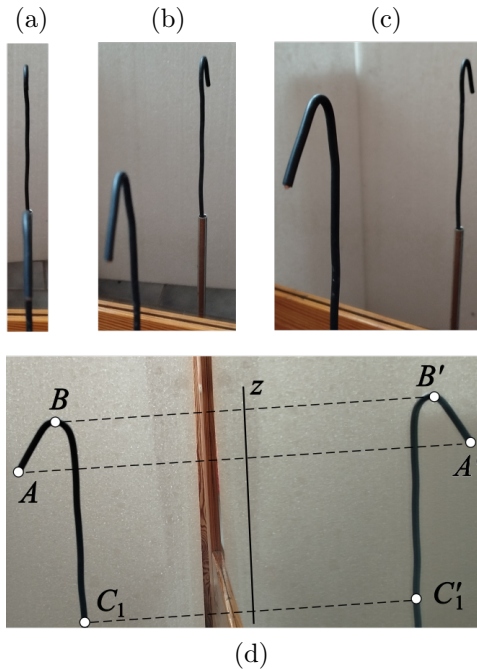
*Pavel Calábek*

## Paradox komerčního zrcadla

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Nedávno publikovaný článek [2] měl obsahovat i obr. 1, fotografie zahnutého drátu a jeho zrcadlového obrazu. Překvapivý výsledek na snímku (d) způsobil sepsání tohoto příspěvku.



Obr. 1 Snímky ohnutého drátu a jeho obrazu v zrcadle

Co je na obrázku zvláštního? Zatímco u situací (a) až (c) pozorujeme odpovídající perspektivní zkreslení, na snímku (d) se obraz drátu v zrcadle jeví trochu větší nebo aspoň silnější než originál. Vzniká pocit, že se nachází blíže než předmět, jehož je obrazem. Opak má být pravdou. Jedná se o zrakovou iluzi nebo efekt způsobený zrcadlem či digitálním zpracováním snímku?

Jednou z příčin by mohla být okolnost, že reflexní vrstva (komerčních) zrcadel je překryta skleněnou deskou. V učebnicích se neuvádí, jak průchod světla tímto skleněným prostředím ovlivňuje polohu a tvar zrcadlového obrazu. Avšak i s běžně dostupnými pomůckami lze jev vyšetřit. Ukážeme si, jak na to.

Vyjádřeno přesněji, popíšeme průzkum zobrazování takovým zrcadlem simulací chodu paprsků pomocí nástrojů dynamické geometrie.

### **Jak se vyrábí komerční zrcadlo a z čeho se skládá**

Na stránkách firmy Alfaram se dočteme, že se „zrcadla určená k dennímu užívání vyrábějí především z plaveného skla, které musí mít dokonale hladký a nezkraslený povrch. Jakékoli nedokonalosti by mohly ovlivnit odražený obraz, takže by byl nespolehlivý. Suroviny použité k výrobě se roztaví v peci a poté se rovnoměrně nalijí do hladkého povrchu, který se následně ochladí.

Když je příslušná skleněná tabule připravena, je omyta speciálními chemickými sloučeninami a poté je aplikován reflexní povlak. Nejčastěji se k tomu používá stříbro nebo chrom. Nakonec je na zrcadlo umístěna ochranná vrstva. Dříve se skládala z mědi a olova, nyní se od tohoto řešení z ekologických důvodů upouští. Proti poškození a stárnutí se užívají speciální laky, které jsou nejen šetrnější k životnímu prostředí, ale prokazatelně mají velký vliv na pevnost zrcadel a zároveň je chrání před vlhkostí a vysokými teplotami.“

Zrcadlo, kterým se budeme zabývat, se skládá ze tří hlavních částí: ploché skleněné tabule – tzv. *krycí vrstvy zrcadla*, reflexního povlaku a ochranné vrstvy. Pro jednoduchost předpokládáme, že skleněná vrstva je planoparalelní a homogenní s indexem lomu  $n$ . Obklopuje ji vzduch, jehož index lomu je 1. Reflexní vrstvu ztotožňujeme s rovinou  $\sigma_r$ . Z vnějšku zrcadlové sklo ohraničuje rovina  $\sigma_s$ , která odděluje předmětový prostor od obrazového.

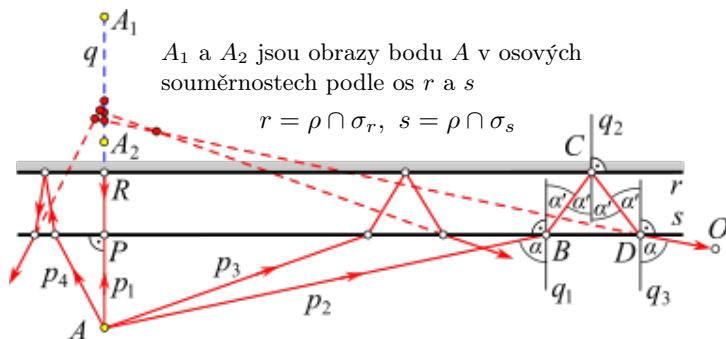
### **Odraz paprsků z bodového zdroje světla na komerčním zrcadle**

Ideální zrcadlo tvořené pouze reflexní rovinou  $\sigma_r$  zobrazuje bod  $A$  do bodu  $A'$  souměrně sdruženého s  $A$  podle  $\sigma_r$ . U komerčního zrcadla nutno

brát v úvahu i lom na rozhraní  $\sigma_s$ . Obr. 2 představuje situaci v rovině  $\rho = APB$ , kde  $P$  je pata kolmice z  $A$  na  $\sigma_s$ ,  $B \in \sigma_s$  a  $B \neq P$ . Normála  $q = AP$  protíná rovinu  $\sigma_r$  v bodě  $R$  a průsečnice roviny  $ARB$  s rovinami  $\sigma_r$  a  $\sigma_s$  jsou po řadě  $r$  a  $s$ .

Paprsek  $p_1$ , dopadající z  $A$  na  $\sigma_s$  kolmo, nemění při přechodu do skla směr a v bodě  $R$  se odrazí do protisměru. Paprsek  $p_2$ , jenž dopadá na  $\sigma_s$  v bodě  $B$ , se lomí. Úhel lomu  $\alpha'$  je dán vztahem

$$\alpha' = \arcsin\left(\frac{\sin \alpha}{n}\right), \quad \text{kde } \alpha \text{ je úhel dopadu.} \quad (1)$$



Obr. 2 Zobrazení paprsků z bodu  $A$  v rovině dopadu  $\rho$

Lomený paprsek se pak odrazí v bodě  $C$  od reflexní roviny  $\sigma_r$  a nakonec se lomí v bodě  $D \in \sigma_s$  do předmětového prostoru. Po lomu svírá s normálou  $q_3$  opět úhel  $\alpha$ , neboť  $\arcsin(n \sin \alpha') = \alpha$ .

Vidíme, že zde na rozdíl od odrazu na ideálním zrcadle dochází k posunutí odraženého paprsku, jež roste s velikostí úhlu  $\alpha$ . Každé dva ze čtyř paprsků v rovině  $\rho$  mají jiný zdánlivý průsečík, a tak není obraz bodu  $A$  v prostoru jednoznačně určen.

### Simulace vytvoření obrazu bodu

Model pro průzkum chodu paprsků byl vytvořen pomocí programu *Cabri Geometry II Plus*, alternativou může být i zdarma dostupná *GeoGebra*. Tloušťku  $d$  zrcadlového skla na nákrese jsme zvolili 2 cm, aby bylo dobře vidět detaily konstrukcí. Obrázky v článku většinou vznikly úpravami vektorových kopií Cabri-konstrukcí v programu *Inkscape*. Podle potřeby jsme rozměry z konstrukcí převedli na hodnoty, jež odpovídají tloušťce  $d = 4$  mm běžně užívaných nástěnných zrcadel.

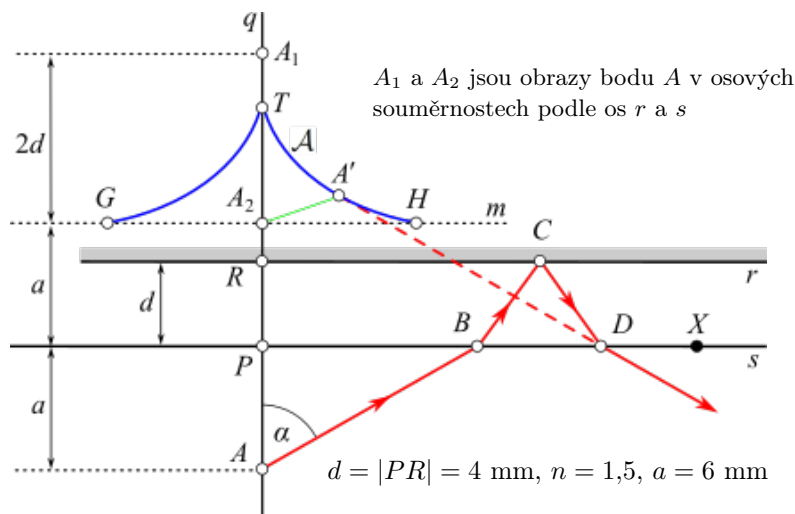


průsečíků paprsků z bodu  $A$ , které se nachází v dostatečně malém okolí centrálního paprsku  $p$ .

Jak lze v Cabri takovou množinu (ve zvolené rovině dopadu  $APB$ ) najít? Sestrojíme paprsek  $p = ABCDO$ , zvolíme číslo  $\delta > 0$  a s využitím nástroje *Kružítko* průsečíky  $E, F$  kružnice  $k(A; \delta)$  s přímkou  $s$ . K nim pak paprsky  $p_1 = AE\dots$  a  $p_2 = AF\dots$  ohraničující zkoumaný svazek paprsků v rovině  $\rho$ .

Na obr. 3 vidíme, jak se při zmenšování hodnoty  $\delta$  množina průsečíků postupně zmenšuje a mění z trojúhelníku  $KLM$  na „úsečku“, až se nám od volby  $\delta = 0,03$  mm jeví jako jediný bod  $A'$ .

Pro sestrojování paprsku  $p$  i s bodem  $A'$  vytvoříme makrokonstrukci **K2** s užitečnými doplňky. Postupujeme analogicky jako u **K1**, ale přímkou  $s$  zaměníme za polopřímku  $PX$ , kde  $X \in s$ . Navíc ke vstupním objektům přidáme čísla  $\delta = 0,001$  a  $\kappa = 0,5$ , bod  $B$  sestrojíme jako obraz bodu  $X$  ve stejnolehlosti se středem  $P$  a koeficientem  $\kappa$ . Na výstupu nahradíme přímkou  $DO$  polopřímku  $A'D$ . Jako  $A'$  jsme zvolili průsečík přímkou  $p$  a  $p_2$ .



Obr. 4 Množina  $\mathcal{A} = GTH$  všech obrazů  $A'$  bodu  $A$

Nyní je již snadné nalézt množinu  $\mathcal{A}$  všech obrazů pevně zvoleného bodu  $A$ , viz obr. 4. Konstrukcí **K2** sestrojíme jeho obraz  $A'$  pro paprsek  $p = AB\dots$  a pak posouváním bodu  $X$  přemísťujeme  $B$  a sledujeme, kde se nachází  $A'$ .

Hodnoty parametru  $\kappa$  můžeme měnit. Zvolíme-li velmi malé  $\kappa$ , můžeme detailně vyšetřit polohy bodu  $A'$  v blízkosti kolmému dopadu paprsků. Při volbě dostatečně velké hodnoty  $\kappa$ , lze umístit bod  $B$  i mimo nákresu<sup>2)</sup>, což umožní průzkum množiny  $\mathcal{A}$  pro  $\alpha \rightarrow 90^\circ$ .

K demonstraci vykreslení poloh bodu  $A'$  poslouží nabídka *Stopa*, nástrojem *Množina* zobrazíme celou čáru  $TH$ . Jejím obrazem v souměrnosti s osou  $q$  je zbývající část množiny  $\mathcal{A}$ , čára  $TG$ .

Z konstrukce bodů  $A'$  plyne, že množina  $\mathcal{A}$  je obalovou křivkou všech odražených paprsků, přímek  $A'D$ .

Bod  $T$  představuje umístění bodu  $A'$  pro  $\alpha = 0$ . Pokusili jsme se jej najít zobrazením délky  $|A_2A'|$  pomocí nástroje *Vzdálenost a délka* a nastavením  $B = P$ . Při posunutí  $B$  do  $P$  na doraz program tuto délku nezobrazil, a tak jsme ji určovali přibližováním bodu  $B$  k bodu  $P$  při malých hodnotách  $\kappa$ . Pro  $d = 2$  cm,  $n = 1,5$ ,  $a = 3$  cm a  $\kappa = 0,0005$  jsme postupně zjistili<sup>3)</sup>, že pro  $\alpha \doteq 0,1^\circ$  je  $|A_2A'| = 2,6666428593$  cm, pro  $\alpha \doteq 0,05^\circ$  je  $|A_2A'| = 2,6666639704$  cm a pro  $\alpha \doteq 0,01^\circ$  je  $|A_2A'| = 2,6666664592$  cm.

Zjištěné hodnoty vedou k domněnce, že  $|A_2T| = 2,66$  cm, resp. pro  $d = 4$  mm a  $a = 6$  mm obdržíme  $|A_2T| = 5,33$  mm.

S rostoucí velikostí úhlu  $\alpha$  se bod  $A'$  vzdaluje od normály a zároveň se přibližuje k přímce  $m \parallel s$ , která prochází bodem  $A_2$ . Body  $H$  a  $G$  jsou limitní polohy bodu  $A'$  pro  $\alpha \rightarrow 90^\circ$ . Do množiny  $\mathcal{A}$  již nepatří. Vzhledem k jejich symetrii podle normály  $q$  jsou určeny vzdáleností  $|A_2H|$ . Tu jsme nejprve určovali (při nastavení  $d = 2$  cm,  $n = 1,5$ ,  $a = 3$  cm a  $\kappa = 500$ ) vzdalováním bodu  $B$  až do 30 metrů od  $P$ , čemuž odpovídá  $\alpha \doteq 89,9^\circ$ . Ukázalo se, že program měl při hodnotách  $\alpha$  blízkým  $90^\circ$  potíže s výpočtem délky  $|A_2A'|$ , a tak bylo možné určit  $|A_2H|$  jen s přesností na tři platné cifry,  $|A_2H| \doteq 3,58$  cm.

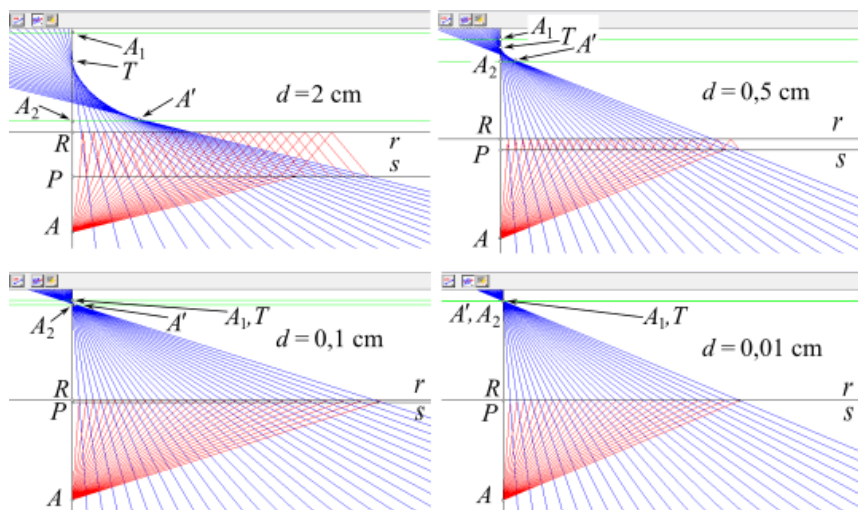
Hodnotu  $|A_2A'|$  však lze v blízkosti bodu  $H$  nahradit délkou  $|A_2A_x|$ , kde  $A_x \in A'D \cap m$ , obdržíme  $|A_2H| \doteq 3,5777$  cm. Pro  $d = 4$  mm a  $a = 6$  mm je tedy  $|A_2A'| \doteq 7,155$  mm.

Obr. 5 znázorňuje, jak se mění svazek paprsků při zmenšování tloušťky skleněné krycí vrstvy zrcadla. Každý ze čtyř snímků obrazovky zachycuje vytvoření stop paprsků pro posloupnost poloh bodu  $B$ . Ke zobrazení po-

<sup>2)</sup> Cabri s objekty pracuje v kartézské soustavě souřadnic pomocí analytické geometrie a na pracovní plochu zobrazuje jen část kartézské roviny. Hodně vzdálený bod  $B$  na obrazovce nevidíme, ale přemísťovat jej pohybem bodu  $X$  můžeme.

<sup>3)</sup> Cabri určuje číselné hodnoty až na 10 desetinných míst. Uvádíme je úplně, máme-li na mysli matematické objekty. V geometrické optice je taková přesnost absurdní, vzdálenosti  $10^{-10}$  cm patří do mikrofyziky.

sloužily nástroje *Stopa* a *Pohyb objektu*. Kvůli přehlednosti obrázku byl pohyb zastavován většinou kolem hodnoty  $\alpha = 70^\circ$ . Při  $d = 0,1$  mm se zrcadlo chová téměř jako ideální.



Obr. 5 Závislost svazku odražených paprsků na tloušťce  $d$ ,  $|AR| = \text{konst.}$

### Výpočet polohy bodů $T$ , $H$

Na obr. 6 je  $N$  střed úsečky  $BD$ . Z pravoúhlého trojúhelníku  $BCN$  pomocí základních vztahů a rovnosti (1) postupně dostáváme

$$\begin{aligned} x = |BD| &= 2|BN| = 2|CN| \cdot \tan \alpha' = \\ &= \frac{2d \sin \alpha'}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha'}} = \frac{2d \sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \end{aligned} \quad (2)$$

Označme po řadě  $A_x$  a  $A_y$  průsečíky přímky  $A'D$  s přímkami  $m$  a  $q$ . Z pravoúhlých trojúhelníků  $DA_yP$  a  $ABP$  zjistíme

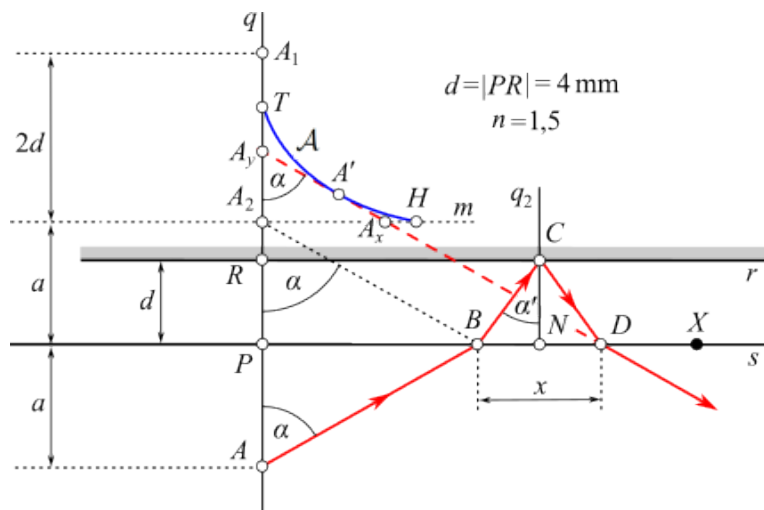
$$|PA_y| = (|PB| + x) \cotg \alpha, \quad |PB| = a \tan \alpha.$$

Odtud s využitím (2) plyne

$$|PA_y| = a + \frac{2d \cos \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \quad \text{a} \quad |PT| = \lim_{\alpha \rightarrow 0} |PA_y| = a + \frac{2d}{n},$$

resp.

$$|A_2T| = \frac{2d}{n}.$$



Obr. 6 K výpočtu polohy bodů  $T$  a  $H$

Dále si povšimněme, že obrazec  $BDA_xA_2$  je rovnoběžník, a tak platí

$$|A_2A_x| = |BD| = \frac{2d \sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}, \quad |A_2H| = \lim_{\alpha \rightarrow 90^\circ} |BD| = \frac{2d}{\sqrt{n^2 - 1}}. \quad (3)$$

Pro  $n = 1,5$  obdržíme

$$|A_2H| = \frac{4d}{\sqrt{5}} \doteq 1,789 d,$$

$$|A_2T| = \frac{4d}{3} = 1,3\overline{3} d.$$

Je-li navíc  $d = 4$  mm, pak  $|A_2H| \doteq 7,155$  mm a  $|A_2T| = 5,3\overline{3}$  mm.

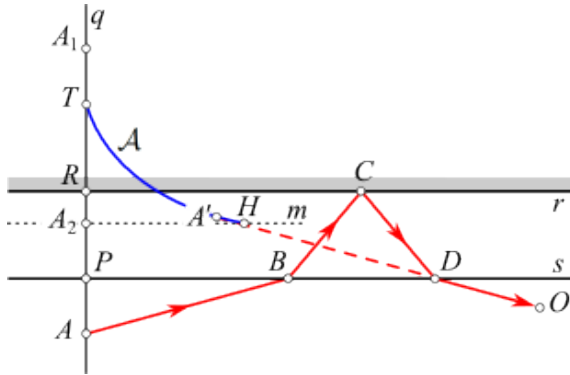
### Důsledek 1

Existují situace, kdy je bod  $A$  více vzdálen od receptoru  $O$  než jeho obraz  $A'$ .



## Důsledek 2

Je-li vzdálenost bodu  $A$  od zrcadla menší než tloušťka  $d$  krycí vrstvy, může se jeho obraz  $A'$  nacházet uvnitř skleněné desky zrcadla, tzn. před reflexní vrstvou zrcadla, obr. 8.



Obr. 8 Obraz bodu  $A$  se nachází v krycí vrstvě zrcadla

## Závěr

Seznámili jsme se s principy vytváření obrazu u zrcadel denní potřeby. Článek může posloužit i jako námět na zajímavou činnost s případným experimentálním ověřením.

Pokud jde o úvodní snímek, výsledky jeho měření ani „rekonstrukce“ počítačovou simulací neprokázaly, že by byl obraz větší než předmět.

## Literatura

- [1] *Alfaram*: ABC zrcadla, stránky firmy Alfaram. Dostupné na: <https://alfaram.cz/blog/zpravy/abc-zrcadla-jak-vypada-proces-vyroby-zrcadel>.
- [2] *Leischner, P.*: O zobrazování rovinným zrcadlem. MFI, roč. 34 (2025), č. 3, s. 203–210.

# PISA 2025: Ukázkové přírodovědné úlohy jako inspirace pro rozvoj vědecké gramotnosti

EVA HEJNOVÁ

Přírodovědecká fakulta Univerzity J. E. Purkyně, Ústí nad Labem

Cílem šetření PISA<sup>1)</sup> je pravidelně zjišťovat, do jaké míry dokážou žáci na konci povinné školní docházky aplikovat znalosti a dovednosti v běžných životních situacích tak, aby se mohli plnohodnotně zapojit do společnosti. Předmětem hodnocení přitom není primárně školní učivo, ale tzv. funkční gramotnosti, tedy znalosti a dovednosti využitelné v reálném životě. Důraz je kladen zejména na kompetence potřebné pro občanskou participaci při řešení globálních výzev, jako jsou technologické změny, ekologické problémy nebo fenomén dezinformací. K těmto klíčovým dovednostem patří kritické myšlení a řešení problémů. Státy, které se do programu zapojí, tak mohou zjistit, jaké jsou silné a slabé stránky jejich vzdělávacího systému, a na zjištěné nedostatky pak cíleně reagovat.

V roce 2025 byla přírodovědná gramotnost po deseti letech opět hlavní sledovanou oblastí mezinárodního šetření PISA, stejně jako v letech 2006 a 2015. Každý cyklus bývá doplněn o tzv. inovativní doménu – v roce 2025 šlo o oblast učení v digitálním světě [1].

Koncepce přírodovědné gramotnosti se v rámci šetření PISA postupně vyvíjí. V roce 2015 koncepční rámec hodnocení rozlišoval tři základní typy znalostí – obsahové, procedurální a epistemické – a soustředil se na tři klíčové dovednosti [2]:

1. vysvětlovat jevy vědecky,

---

<sup>1)</sup>Program pro mezinárodní hodnocení žáků PISA (Programme for International Student Assessment) se zaměřuje na zjišťování čtenářské, matematické a přírodovědné gramotnosti patnáctiletých žáků. Šetření se koná zpravidla v tříletých cyklech, přičemž v každém z nich je kladen důraz na jednu z těchto tří gramotností. Česká republika se tohoto šetření účastní pravidelně již od jeho počátku v roce 2000.

2. vyhodnocovat a navrhovat přírodovědný výzkum,
3. vědecky interpretovat data a důkazy.

Ukázalo se, že čeští žáci dosahují vysoké úspěšnosti v úlohách vyžadujících interpretaci dat a obsahové znalosti, avšak nízké v úlohách zaměřených na procedurální a epistemické znalosti [3]. K nižší úspěšnosti přispívá i neobvyklá forma zadání testových úloh, která se liší od běžných školních úloh a klade vysoké nároky na čtenářskou gramotnost žáků.

## 1. Koncepční rámec PISA 2025 pro oblast přírodních věd

Přípravy nového cyklu šetření PISA v roce 2025 byly započaty již v roce 2022, koncepční rámec pro oblast přírodovědy vypracovala společnost Oxford University Press [4]. V následujícím roce se Česká republika spolu s dalšími zúčastněnými zeměmi zapojila do vývoje nových testových přírodovědných úloh. V rámci pilotního šetření, které proběhlo na jaře 2024 na 63 českých školách, byla ověřena kvalita úloh i funkčnost nově vyvinuté online platformy pro testování. Hlavní sběr dat proběhl v měsících duben a květen 2025, první část výsledků šetření bude zveřejněna v září 2026.

Jak uvádí dokument PISA 2025 [5], v předchozích koncepčních rámcích byla pro oblast přírodních věd za hlavní výsledek vzdělávání a ústřední koncept pro hodnocení přírodovědných znalostí a dovedností považována přírodovědná gramotnost. Koncepce šetření PISA 2025 se však posouvá k širšímu pojetí. Primárně se nezaměřuje pouze na přírodovědnou gramotnost, ale na obecné výsledky přírodovědného vzdělávání s cílem harmonizovat koncepční rámec pro oblast přírodních věd s koncepčními rámci pro matematiku a čtení.

Nový koncepční rámec pro oblast přírodních věd zdůrazňuje nejen porozumění přírodním vědám, ale též schopnost hodnotit vědecké informace ve vztahu k problémům, jako je životní prostředí nebo zdravotní péče, a porozumění způsobům, jakým přírodní vědy poskytují spolehlivé vědecké znalosti. Podle nového rámce by přírodovědně vzdělaný člověk měl být schopen se zapojit do věcné debaty o přírodních vědách, udržitelnosti a technologiích a zdůvodnit tak své jednání.

K tomu jsou podle koncepčního rámce zapotřebí tři následující dovednosti. Třetí z nich byla do rámce doplněna nově, protože informační zdroje z internetu, z nichž mnohé mají vědecký charakter, hrají ve vzdělávání žáků důležitou roli:

1. vysvětlovat jevy vědecky,

2. vytvářet a vyhodnocovat návrhy přírodovědného zkoumání a kriticky interpretovat přírodovědná data a důkazy,
3. vyhledávat, vyhodnocovat a využívat vědecké informace k rozhodování a jednání.

V tomto pojetí se nový koncepční rámec posouvá k obecněji pojatému konceptu *vědecké gramotnosti* [6], který klade důraz na kritické myšlení, aplikaci vědeckých znalostí a dovedností v reálných situacích a aktivní participaci ve společenském životě jako informovaný občan. Tím překonává výhradní svázání přírodovědné gramotnosti pouze s přírodními vědami.

Koncepční rámec šetření PISA 2025 nicméně stále představuje užší pojetí toho, co znamená „porozumět přírodním vědám a tomu, jakým způsobem nám přírodní vědy poskytují spolehlivé vědecké znalosti“ [4], neboť nezahrnuje samotné poznání vědecké praxe. Vědecká informace, k jejímuž „vyhledávání, vyhodnocování a využívání“ má být žák veden, je v tomto rámci chápána jako něco předem daného a známého – viz formulace třetí dovednosti „vyhledávat, vyhodnocovat a využívat vědecké informace k rozhodování a jednání“. Do konceptu vědecké gramotnosti však kromě samotných poznatků patří i procesy jejich vytváření (viz např. [7]).

Řadu souvisejících dovedností, které jsou zahrnuty v klíčových kompetencích a svým obsahem prakticky a inovativně směřují k naplnění konceptu vědecké gramotnosti, lze nalézt také v revidovaném rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání (revRVP ZV) [8]. Pro oblast vědecké gramotnosti má zásadní význam zejména klíčová kompetence k řešení problémů. V tab. 1 jsou k této kompetenci uvedeny její dvě vybrané složky<sup>2)</sup> a očekávané výsledky učení na úrovni 9. ročníku. V posledním sloupci je uveden popis základní a minimální úrovně, které mají žáci dosáhnout [8].

## 2. Metodologie výzkumu

Pro účely testování byly vybrány dvě úlohy z příkladů, které byly zveřejněny jako ilustrace zaměření koncepčního rámce pro oblast přírodních věd PISA 2025 [4]. Konkrétně šlo o třetí část úlohy *Nebezpečí kouření* a úlohu *Komu máme věřit?* Obě úlohy dobře korespondují se dvěma vybranými složkami klíčové kompetence k řešení problémů uvedenými v tab. 1 a také s třetí dovedností definovanou v koncepčním rámci pro oblast přírodních věd PISA 2025, tj. „vyhledávat, vyhodnocovat a užívat vědecké informace k rozhodování a jednání“.

---

<sup>2)</sup>Složky klíčové kompetence k řešení problémů byly vybrány zejména s ohledem na zaměření úloh, které jsou v článku prezentovány.

Závazná část revRVP ZV		Nezávazná část revRVP ZV
Složka klíčové kompetence	Očekávaný výsledek učení (9. ročník)	Úroveň
Kritické hodnocení a využití vědeckého poznání	Analyzuje při rozhodování a řešení problémů objektivní informace a prezentované závěry vědeckého poznání.	<p><i>Splněno</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Rozlišuje mezi faktickými tvrzeními, názory a hypotézami ve složitějších sděleních s vědeckým obsahem.</li> <li>• Zohledňuje společenský dopad vědy a to, jak může vědecký výzkum pozitivně i negativně ovlivnit společnost.</li> <li>• Využívá tvrzení s vědeckým obsahem z různých zdrojů, aby ověřil jejich spolehlivost.</li> </ul> <p><i>Minimální doporučená úroveň</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Rozliší základní fakta od názorů při řešení každodenních situací.</li> </ul>
Práce s informacemi a kritické myšlení	Kriticky hodnotí informace z různých zdrojů	<p><i>Splněno</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Aktivně pracuje s daty, zdroji, informacemi, vytváří si k nim postoje, názory.</li> <li>• Definuje podstatu sdělení jednotlivých informací.</li> <li>• Posuzuje informace vzhledem k základním poznatkům lidstva.</li> </ul> <p><i>Minimální doporučená úroveň</i></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Porovná dvě protichůdné informace týkající se známé situace či jevu a vybere tu věrohodnější.</li> </ul>

Tabulka 1 Klíčová kompetence k řešení problémů v revRVP ZV (vybrané části)

Naším záměrem bylo, aby zadávání úloh nebylo ve školní praxi časově náročné. Zároveň jsme vzhledem k délce textů i jejich méně obvyklé formě nechtěli žáky zatěžovat zbytečně rozsáhlým testem<sup>3)</sup>. Zároveň jsme také nevolili úlohy obsahující obrázky, které by po kopírování mohly být hůř čitelné. Na rozdíl od ostrého testování v šetření PISA probíhajícího elektronicky, kde se používají barevné obrázky, jsme zvolili tištěnou podobu úloh. Zařadili jsme též pouze úlohy s výběrem odpovědi, neboť z dřívějších výzkumů vyplývá [9], že žáci úlohy s otevřenou odpovědí často vynechávají a neřeší je. Z těchto důvodů byly pro testování vybrány pouze dvě úlohy, které obsahují některé typické argumentační chyby.

Obě vybrané úlohy byly obsahově zaměřeny na oblast zdraví a zdravotních rizik, konkrétně na problematiku očkování a škodlivosti kouření. Cílem těchto ukázkových úloh nebylo zjišťovat, zda si žáci pamatují fakta nebo dokážou vědecky jev vysvětlit (např. popsat biologické mechanismy, proč kouření škodí), ale zjistit, zda umí posoudit relevanci a věrohodnost dostupných informací, zvážit souvislosti a limity vědeckých výsledků a rozlišit logicky podloženou námitku od nepodloženého či zavádějícího tvrzení, což je pro rozhodování v každodenním životě klíčové.

Níže jsou uvedeny texty úloh ve znění, v jakém byly žákům zadány. V obou případech mohli žáci vybírat ze sedmi nabízených argumentů, přičemž mohli zvolit více než jen jedno tvrzení.

### Úloha 1: Nebezpečí kouření

O kouření se ví, že je nebezpečné, ale jak jsme to zjistili? Z následujících tvrzení zaškrtni ta, která lze použít jako vědecký důkaz, že je kouření nebezpečné.

- Váš blízký přítel nebo příbuzný dlouhodobě kouří a teď onemocněl.
- Statistiky ukazují, že kuřáci umírají v průměru v mladším věku než nekuřáci.
- Existují protikuřácké kampaně.
- V novinách se objevují články o lidech, kteří onemocněli v důsledku kouření.
- Je prokázáno, že kuřáci jsou častěji nemocní a neschopní pracovat než nekuřáci.
- V restauracích a kavárnách bude zakázáno kouření.
- Statistiky ukazují, že lidé s vyšším vzděláním méně kouří.

<sup>3)</sup>Při šetření PISA mají žáci na řešení testu 120 minut. Po testu následuje dotazníkové šetření, které je zaměřeno na získání dalších informací o žácích, jejich prostředí a postojích.

## Úloha 2: Komu máme věřit?

Na Facebooku se objevil článek, který tvrdí, že jsou vakcíny nebezpečné. Který z následujících důvodů v tobě budí pochybnosti o jeho pravdivosti? Zaškrtni všechny důvody, které by tě mohly nutit o článku pochybovat:

- Článek je zveřejněn v časopise na internetu.
- Článek nebyl recenzován.
- Článek neodpovídá názoru vědců.
- Autor je vědec specializující se na jadernou fyziku.
- Autor uvádí, že nedovolil naočkovat své děti.
- Článek není v souladu s převládajícím vědeckým názorem.
- Mezi vědci vždy panují neshody.

### 3. Výzkumný soubor

Výzkumný soubor tvořilo 367 žáků ve věku 15–16 let z několika devátých ročníků základních škol (dále jen ZŠ), prvních ročníků gymnázií (dále jen G) a jednoho středního odborného učiliště strojírenského (dále jen SOU). Zastoupené školy se nacházely v Ústeckém, Karlovarském a Středočeském kraji. Průměrný věk respondentů činil 15,4 roku<sup>4)</sup>. Podrobný přehled počtu žáků podle typu školy je uveden v tab. 2. Testování žáků bylo realizováno na začátku dubna 2025.

	Typ školy			Celkem
	ZŠ	G	SOU	
Počet žáků	134	180	53	367
Průměrný věk	15,07	15,54	15,75	15,40

Tabulka 2 Počet a průměrný věk jednotlivých skupin žáků

### 4. Výsledky testování a diskuze

Výsledky testování jsou uvedeny v tabulkách 3 a 4. Četnosti volby jednotlivých nabízených odpovědí jsou vyjádřeny v procentech – jednak souhrnně za celý soubor testovaných žáků, a vzhledem k poměrně značné různorodosti souboru také zvlášť pro každou testovanou skupinu žáků. Rozdíly mezi skupinami nebyly vzhledem k omezenému rozsahu výzkumného souboru, zejména u skupiny SOU, ověřovány statistickými testy. Interpre-

<sup>4)</sup>V šetření PISA jsou pro testování vybíráni žáci v rozmezí věku 15 let a 3 měsíce až 16 let a 2 měsíce.

taci rozdílů je proto třeba chápat jako orientační, avšak odůvodněnou a podloženou výsledky.

#### 4.1. Výsledky a diskuze k úloze Nebezpečí kouření

O kouření se ví, že je nebezpečné, ale jak jsme to zjistili? Z následujících tvrzení zaškrtni ta, která lze použít jako vědecký důkaz, že je kouření nebezpečné.	Celkem (%)	ZŠ (%)	G (%)	SOŠ (%)
A. Váš blízký přítel nebo příbuzný dlouhodobě kouří a teď onemocněl.	20,4	20,9	17,2	30,2
B. Statistiky ukazují, že kuřáci umírají v průměru v mladším věku než nekuřáci.	85,3	74,6	95,0	79,3
C. Existují protikuřácké kampaně.	18,3	23,9	12,8	22,6
D. V novinách se objevují články o lidech, kteří onemocněli v důsledku kouření.	39,5	45,5	31,7	50,9
E. Je prokázáno, že kuřáci jsou častěji nemocní a neschopní pracovat než nekuřáci.	66,5	55,2	77,8	56,6
F. V restauracích a kavárnách bude zakázáno kouření.	22,1	31,3	12,2	32,1
G. Statistiky ukazují, že lidé s vyšším vzděláním méně kouří.	9,8	11,9	6,7	15,1

Tabulka 3 Výsledky testování úlohy *Nebezpečí kouření*

V této úloze měli žáci kriticky posoudit různé typy argumentů týkající se škodlivosti kouření a rozhodnout, které z nich představují vědecký důkaz – tedy relevantní informaci podporující závěr, že kouření je nebezpečné – a které naopak vycházejí z chybných argumentačních postupů či irrelevantních informací. Klíčová zde byla schopnost žáků rozlišit, které argumenty jsou vědecky podloženy (např. statistickými údaji či robustními studiemi) a kdy se naopak jedná o chybné či zavádějící argumenty (např. podsunutý argument, apel na autoritu, ukvapené zobecnění či zaměňování korelace za kauzalitu).

Výsledky v tab. 3 ukazují výrazné rozdíly v tom, jak jednotlivé skupiny žáků hodnotily, co lze považovat za vědecký důkaz o nebezpečnosti kouření. Nejčastěji byla žáky za relevantní důkaz považována odpověď B („Statistiky ukazují, že kuřáci umírají v průměru v mladším věku než nekuřáci.“) a odpověď E („Je prokázáno, že kuřáci jsou častěji nemocní

a neschopní pracovat než nekuřáci.“). Argument B lze považovat za jeden z nejsilnějších a nejplatnějších vědeckých důkazů, protože vychází ze statistických údajů. Podobně i argument E představuje silný a relevantní vědecký důkaz opřený o data z rozsáhlých studií, což naznačuje i formulace „Je prokázáno. . .“. Na webové stránce [4] není uvedeno autorské řešení ukázkových úloh, nicméně se lze domnívat, že právě tyto dva argumenty B a E autoři úlohy považovali za „správné odpovědi“, tedy za tvrzení, která nejspolehlivěji podporují závěr, že kouření je nebezpečné.<sup>5)</sup>

U jednotlivých skupin lze v četnosti volby argumentů B a E sledovat podobný vzorec: za správné je označila většina žáků z gymnázií, poměrně vysoký podíl žáků SOU a o něco nižší podíl žáků ZŠ. Pokud jde o četnost volby těchto odpovědí, gymnazisté výrazně převyšují skupiny ZŠ i SOU, což poukazuje na jejich větší citlivost k relevantním a vědecky podloženým argumentům. Žáci SOU a ZŠ sice dosahují nižších hodnot, ale i tak jde o většinově volené argumenty, což naznačuje alespoň základní povědomí o roli statistiky při prokazování souvislostí. Menší podíl volby argumentu E, zejména u žáků SOU a ZŠ, však může signalizovat, že koncept „prokázání“ a jeho opření o robustní vědecké studie není pro všechny skupiny stejně srozumitelný.

U argumentů založených na chybném uvažování je patrný nejvyšší podíl u tvrzení D („V novinách se objevují články o lidech, kteří onemocněli v důsledku kouření.“). Tento argument kombinuje apel na autoritu (noviny) a tzv. anekdotický důkaz, který se opírá pouze o jednotlivé, náhodné případy. Poměrně závažným zjištěním je, že značná část žáků ve všech skupinách toto tvrzení považuje za platný vědecký důkaz (ve skupinách ZŠ a SOU jde zhruba o polovinu žáků, u gymnazistů přibližně o třetinu). To ukazuje na nedostatečné pochopení hierarchie zdrojů informací a významu primárních vědeckých dat.

Také argument F („V restauracích a kavárnách bude zakázáno kouření.“) byl často volen, zejména žáky ZŠ a SOU (v obou skupinách zhruba třetinou respondentů). Tento argument představuje typický podsunutý argument. Zákaz kouření je politické rozhodnutí a zdravotní opatření, které je důsledkem již prokázané škodlivosti kouření, nikoli samotným vědec-

---

<sup>5)</sup>Proti relevantnosti argumentu B lze samozřejmě namítnout, že není jasné, o jaké statistiky se konkrétně jedná. Podobně v argumentu E není blíže uvedeno, kým nebo jak bylo prokázáno, že jsou kuřáci častěji nemocní a neschopní pracovat než nekuřáci, ani o jak rozsáhlé studie se tento argument opírá. S ohledem na testovanou věkovou skupinu žáků se však lze domnívat, že určité zjednodušení a menší míra přesnosti formulací je v tomto případě akceptovatelná.

kým důkazem. Vysoká četnost této volby u žáků ZŠ a SOU naznačuje, že zaměňují politické rozhodnutí s vědeckým poznatkem. Studenti gymnázií se zde naopak projevují jako nejméně náchylní k tomuto typu chybného argumentu.

Podsunutý argument představuje také tvrzení C („Existují protikuřácké kampaně.“). Samotná existence kampaní není vědeckým důkazem škodlivosti kouření, ale důsledkem již prokázané škodlivosti. I v tomto případě vykazují žáci ZŠ a SOU vyšší tendenci volit tento chybný argument ve srovnání s gymnazisty, kteří zjevně lépe rozlišují mezi důvodem (prokázání škodlivosti kouření) a důsledkem (protikuřácké kampaně).

Zajímavý je také relativně vysoký podíl žáků SOU a ZŠ, kteří zvolili argument A („Váš blízký přítel nebo příbuzný dlouhodobě kouří a teď onemocněl.“). Tento argument představuje klasický příklad ukvapeného zobecnění z anekdotické zkušenosti, která nemá hodnotu vědeckého důkazu. Žáci SOU přitom vykazují mezi skupinami výrazně vyšší míru náchylnosti k tomuto typu mylného uvažování (třetina respondentů). To naznačuje nedostatečné pochopení nutnosti generalizace z dostatečně robustních datových souborů, nikoli izolovaných případů.

Nejnižší zastoupení ve všech skupinách měla volba argumentu G („Statistiky ukazují, že lidé s vyšším vzděláním méně kouří.“). Toto tvrzení je příkladem falešné kauzality, kdy je zaměňována korelace za kauzalitu – i když existuje korelace mezi vzděláním a kouřením, vzdělání samo o sobě není příčinou škodlivosti kouření. Pozitivní je, že tento argument byl celkově vybírán nejméně; zarážející však může být, že žáci SOU ho volili výrazně častěji než ostatní skupiny. To může ukazovat na slabší porozumění rozdílu mezi korelací a kauzalitou, což je základní koncept statistického uvažování.

#### **4.2. Výsledky a diskuze k úloze Komu máme věřit?**

Tato úloha se zaměřovala na rozpoznávání důvěryhodných informací o očkování. Také v této úloze měli žáci posoudit různé typy argumentů, včetně těch, které obsahují chybné argumentační postupy. Podobně jako v předchozí úloze zde byla klíčová schopnost žáků vyhodnotit informace pro posuzování věrohodnosti sdělení, se kterými se mohou setkat v médiích nebo na sociálních sítích, a kriticky zhodnotit různé argumenty, které mohou působit přesvědčivě, ale ve skutečnosti nemají oporu v odborném poznání či metodách vědecké práce. Výsledky uvedené v tab. 4 ukazují, že mezi skupinami žáků lze opět pozorovat výrazné rozdíly ve vnímání argumentů, které mohou vzbuzovat pochybnosti o pravdivosti tvrzení, že vakcíny jsou nebezpečné.

Na Facebooku se objevil článek, který tvrdí, že jsou vakcíny nebezpečné. Který z následujících důvodů v tobě budí pochybnosti o jeho pravdivosti? Zaškrtni všechny důvody, které by tě mohly nutit o článku pochybovat:	Celkem (%)	ZŠ (%)	G (%)	SOŠ (%)
A. Článek je zveřejněn v časopise na internetu.	36,5	41,0	32,2	39,6
B. Článek nebyl recenzován.	48,5	46,3	50,6	47,2
C. Článek neodpovídá názoru vědců.	71,9	62,7	77,8	75,5
D. Autor je vědec specializující se na jadernou fyziku.	26,4	19,4	30,6	30,2
E. Autor uvádí, že nedovolil naočkovat své děti.	27,3	31,3	23,9	28,3
F. Článek není v souladu s převládajícím vědeckým názorem.	65,9	49,3	80,6	58,5
G. Mezi vědci vždy panují neshody.	25,6	34,3	21,7	17,0

Tabulka 4 Výsledky testování úlohy *Komu máme věřit?*

Nejčastěji žáci napříč skupinami zpochybňovali článek proto, že neodpovídá názoru vědců (argument C) a není v souladu s převládajícím vědeckým názorem (argument F). U gymnazistů byla volba těchto dvou argumentů nejčastější, zatímco u žáků základních škol byly tyto podíly znatelně nižší. Žáci SOU vykazovali znatelně menší podíl zejména při volbě argumentu F.

Argument C („Článek neodpovídá názoru vědců.“) představuje nejrelevantnější důvod k pochybnostem o pravdivosti článku. To koresponduje i s tím, že tento argument byl nejčastější volbou všech skupin žáků, což signalizuje poměrně dobré povědomí o konceptu vědeckého konsensu. Žáci ZŠ však dosáhli nižší četnosti této odpovědi, což poukazuje na obtížnější rozlišování mezi jednotlivými názory a obecně přijímaným vědeckým poznáním.

Argument F („Článek není v souladu s převládajícím vědeckým názorem.“) byl velmi podobný možnosti C, avšak více zdůrazňoval převládající konsensus vědců. Patřil také k nejčastěji voleným odpovědím napříč skupinami. V tomto případě je patrná jasná dominance žáků gymnázií, což ukazuje na jejich silnější orientaci na mainstreamový vědecký názor jako na kritérium pravdivosti. Rozdíly mezi volbou argumentů C a F by mohly být zajímavým předmětem dalšího zkoumání v rámci porozumění nuancím vědeckého konsensu u různých věkových skupin.

Významný je i podíl žáků, kteří zpochybnili článek proto, že nebyl recenzován (argument B). Tento důvod uváděla ve všech skupinách přibližně polovina žáků, nicméně byl preferován méně než argumenty odkazující na shodu s vědeckým názorem (argumenty C a F). To naznačuje, že žáci mají částečné, avšak stále nedostatečné povědomí o významu recenzního řízení.

Zajímavý je také rozdíl mezi skupinami v hodnocení odbornosti autora (argument D: „Autor je vědec specializující se na jadernou fyziku.“). Tento argument zvolila přibližně třetina gymnazistů a žáků SOU, zatímco u žáků ZŠ to byla jen pětina. To by mohlo ukazovat na méně rozvinutou schopnost této skupiny posoudit význam odbornosti autora a důležitost specializace vzhledem k dané problematice.

Ačkoli opět není známo autorské řešení této úlohy, lze se domnívat, že argumenty B, C, D a F představují pravděpodobně ty důvody, které mohou nejvíce vzbuzovat pochybnosti o pravdivosti článku.

Zbývající tvrzení představovala argumentační chyby. Nejčastěji bylo všemi skupinami žáků překvapivě voleno tvrzení A, které se vztahovalo k předsudku vůči formě zveřejnění článku („Článek je zveřejněn v časopise na internetu.“). To naznačuje jistou nedůvěru k online zdrojům, která se nejvýrazněji projevila u žáků základních škol. Může to odrážet jejich menší zkušenost s hodnocením online obsahu nebo také větší důraz na tradiční tištěné zdroje ve výuce.

Tvrzení E představovalo emocionální apel („Autor nedovolil naočkovat své děti.“), který však oslabuje vědeckou věrohodnost článku. Toto tvrzení zvolila přibližně třetina žáků ZŠ a SOU, což může poukazovat zejména mladších žáků na větší náchylnost k emocionálním argumentům a menší schopnost kriticky oddělit autorovo osobní rozhodnutí od faktických informací. Žáci gymnázií naopak vykazovali větší odolnost vůči takovýmto manipulativním technikám.

Poměrně často bylo žáky voleno také tvrzení G („Mezi vědci vždy panují neshody.“), a to i přibližně pětinou gymnazistů. Ani toto tvrzení však nepředstavuje dostatečný důvod k pochybnostem o pravdivosti článku – jde o chybné zobecnění. Přestože vědci mohou mít na určité otázky různé názory, v klíčových oblastech mezi nimi obvykle panuje konsensus založený na důkazech.

## 5. Shrnutí diskuze a doporučení pro výuku

Výsledky testování ukazují významné rozdíly v úrovni kritického myšlení a vědecké gramotnosti mezi žáky různých typů škol, což však není příliš překvapivé. Zároveň však ve všech skupinách odhalily nejasnosti v rozlišování správných a chybných argumentů.

Gymnazisté prokazují nejvyšší schopnost odlišit vědecky podložená tvrzení od argumentačních klamů, více spoléhají na odborné argumenty a názor vědecké komunity. Nejčastěji volí odpovědi odkazující na vědecký konsenzus a zároveň jsou nejméně náchylní k emocionálním apelům a chybným zobecněním. Nicméně i část gymnazistů vykazuje náchylnost k některým chybným argumentům, jako je například předsudek vůči formě publikace nebo apel na autoritu či emoce.

Žáci středního odborného učiliště<sup>6)</sup> se v některých aspektech přibližují gymnazistům, zejména v orientaci na vědecký konsenzus. Přesto u nich přetrvává vyšší náchylnost k chybným zobecněním a k argumentům založeným na autoritě či emocích. Svou důvěru také častěji opírají o anekdotickou zkušenost (uvedení jednotlivého případu), která však nepředstavuje vědecký důkaz.

Žáci základních škol častěji podléhají emocionálním apelům, nepodloženým zobecněním a předsudkům vůči formě publikace. To poukazuje na nižší úroveň kritického a logického myšlení a slabší epistemické znalosti, které vedou k větší důvěře v emocionálně nebo subjektivně laděné argumenty a menší schopnosti rozpoznat vědecký konsenzus jako klíčové kritérium hodnocení pravdivosti.

Na základě výsledků testování ukázkových úloh PISA 2025 lze pro školní výuku doporučit několik konkrétních kroků k rozvoji a posílení kritického myšlení a vědecké gramotnosti:

1. Zařazovat diskuse o tom, jak funguje vědecký konsenzus, proč je důležitý a jak vzniká.
2. Trénovat rozpoznávání argumentačních klamů – například emocionální apel, apel na autoritu, podsunutý argument, nepodložené zobecnění či předsudek vůči formě publikace.
3. Posilovat epistemické znalosti a porozumění povaze vědeckého poznání – vysvětlovat žákům, proč nestačí jednotlivý příklad nebo názor autority, ale proč je nutné ověřovat informace na základě důkazů a odborného konsenzu.
4. Rozvíjet mediální gramotnost – učit žáky kriticky číst texty z různých zdrojů, včetně internetu, a hodnotit jejich věrohodnost.
5. Vytvářet příležitosti k diskusi a argumentaci – umožnit žákům obhajovat své názory s oporou o důkazy a reflektovat vlastní argumentační i logické chyby.

---

<sup>6)</sup>Zde je třeba uvést, že testování se účastnili žáci pouze z jedné školy, výsledky lze tedy zobecňovat jen ve velmi omezené míře.

Uvedená doporučení mohou přispět ke snížení náchylnosti žáků k dezinformacím a manipulativním technikám a zároveň podpořit rozvoj schopnosti odlišovat vědecké poznatky od osobních názorů a domněnek. Učitelům mohou jako výukový materiál posloužit například výše uvedené úlohy doplněné komentářem k jejich řešení. Získaná zjištění lze dobře využít i ve výuce fyziky, kde žáci často pracují s daty, interpretují měření a vyvozují závěry. Právě fyzika může díky svému experimentálnímu charakteru nabídnout řadu příležitostí k rozvíjení kritického myšlení a k hlubšímu porozumění povaze vědeckého poznávání. Další inspiraci pro vzdělávací strategie v oblasti kritického myšlení či vědecké gramotnosti mohou čtenáři nalézt v revRVP ZV [8] nebo v odborné literatuře (např. [10], [11], [12]).

## Závěr

Cílem článku bylo na dvou vybraných ukázkových úlohách z aktuálního šetření PISA 2025 ilustrovat zaměření koncepčního rámce pro oblast přírodních věd a ukázat prevalenci některých typických chyb, kterých se žáci v argumentaci a logickém uvažování dopouštějí. Testování se účastnili žáci 9. ročníků základních škol a žáci prvního ročníků gymnázií a středního odborného učiliště strojírenského; jejich průměrný věk byl 15,4 roku.

Výsledky testování ukázaly, že rozvoj kritického myšlení a vědecké gramotnosti představuje důležitou výzvu pro všechny stupně vzdělávání, přičemž nejvíce podpory potřebují žáci základních škol a středního odborného učiliště. Právě u těchto dvou skupin se nejčastěji objevuje náchylnost k argumentačním klamům a slabší epistemické znalosti, které vedou k větší důvěře v emocionálně nebo subjektivně laděné argumenty a k menší schopnosti rozpoznat vědecký konsenzus jako klíčové kritérium hodnocení pravdivosti. Uvedené rozdíly mezi skupinami je třeba chápat jako orientační, neboť nebyly ověřeny statistickými testy; přesto však naznačují významné tendence v úrovni kritického myšlení a vědecké gramotnosti.

Systematickou součástí vzdělávání by proto mělo být posilování schopnosti rozlišovat mezi vědeckými fakty, jednotlivými názory a dezinformacemi, stejně jako rozpoznávání manipulativních technik. Klíčovou roli v tomto procesu sehrává učitel, který může pomoci žákům porozumět tomu, jak vědecké poznání vzniká, jak lze odlišit fakta od názorů a hypotéz a jak uplatňovat kritické myšlení v běžném životě. Učitelé tak mohou významně přispět k budování odolnosti vůči dezinformacím a k výchově občanů, kteří dokážou samostatně a kriticky uvažovat o složitých tématech současného světa.

## Literatura

- [1] ČŠI: O šetření PISA. [online]. [cit. 2025-08-03]. Dostupné z: <https://www.csicr.cz/cz/Mezinarodni-setreni/PISA/0-setreni-PISA>.
- [2] ČŠI: PISA 2015 koncepční rámec. [online]. [cit. 2025-08-03]. Dostupné z: [https://www.csicr.cz/Csicr/media/Prilohy/PDF\\_el.\\_publikace/Mezinárodní\\_šetření/PISA\\_2015\\_koncepcni\\_ramec\\_prgr.pdf](https://www.csicr.cz/Csicr/media/Prilohy/PDF_el._publikace/Mezinárodní_šetření/PISA_2015_koncepcni_ramec_prgr.pdf).
- [3] ČŠI: Publikace s uvolněnými úlohami z mezinárodního šetření PISA. [online]. [cit. 2025-08-03]. Dostupné z: [https://www.csicr.cz/Csicr/media/Prilohy/PDF\\_el.\\_publikace/Mezinárodní\\_šetření/PISA\\_2015\\_up\\_2019\\_final\\_web.pdf](https://www.csicr.cz/Csicr/media/Prilohy/PDF_el._publikace/Mezinárodní_šetření/PISA_2015_up_2019_final_web.pdf).
- [4] PISA 2025: Koncepční rámec pro oblast přírodních věd. [online]. [cit. 2025-08-03]. Dostupné z: [https://pisa-framework.oecd.org/science-2025/cze\\_ces/](https://pisa-framework.oecd.org/science-2025/cze_ces/).
- [5] PISA 2025 Science Framework (Draft). [online]. [cit. 2025-08-03]. Dostupné z: [https://pisa-framework.oecd.org/science-2025/assets/docs/PISA\\_2025\\_Science\\_Framework.pdf](https://pisa-framework.oecd.org/science-2025/assets/docs/PISA_2025_Science_Framework.pdf).
- [6] Hejnová, E.: Rozšířené pojetí vědecké gramotnosti jako příležitost (nejen) pro fyzikáře. In: Kéhar, O. (ed.), *Moderní trendy v přípravě učitelů fyziky 11*. [online]. Západočeská univerzita v Plzni, 2025, s. 91–95. Dostupné z: [https://kof.zcu.cz/ak/trendy/11/sbor/ModerniTrendy11\\_sbornik.pdf](https://kof.zcu.cz/ak/trendy/11/sbor/ModerniTrendy11_sbornik.pdf).
- [7] Maršálek, J., Konopásek, Z., Zámečník, L.: Kolik fyziky se vejde do vývěvy (a co všechno do fyziky)? *Československý časopis pro fyziku*, roč. 72 (2022), č. 4, s. 245–258.
- [8] *Rámcové vzdělávací programy*. [online]. [cit. 2025-08-03]. Dostupné z: <https://revize.rvp.cz/zv>.
- [9] Mandíková, D.: Vývoj výsledků českých žáků v historii výzkumů TIMSS a PISA. In: Kéhar, O. (ed.), *Moderní trendy v přípravě učitelů fyziky 9*. [online]. Západočeská univerzita v Plzni, 2019, s. 122–129. Dostupné z: [https://kof.zcu.cz/ak/trendy/9/sbor/ModerniTrendy9\\_sbornik.pdf](https://kof.zcu.cz/ak/trendy/9/sbor/ModerniTrendy9_sbornik.pdf)
- [10] Novotný, J., Svobodová, J.: *Jak pracuje věda*. Burian a Tichák, Olomouc, 2021.
- [11] Gazda, J., Liška, V., Marek, B.: *Kritické myšlení*. Grada, Praha, 2019.
- [12] Šedý, J.: *Kritické myšlení*. Galén, Praha, 2021.

# INFORMATIKA

## Stavíme se Stavitelkou

ŠÁRKA GERGELITSOVÁ – TOMÁŠ HOLAN

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

*Stavitelka je aplikace pro vytváření 3D konstrukcí pomocí jazyka Python. Tento text ukazuje její použití, myslíme si, že by mohl zajímat ty, kdo učí programování, i ty, kteří se učí programovat a chtějí programem vytvořit něco hezkého.*

### 1. Aplikace

Stavitelka je webová aplikace na <https://stavitelka.geometry.cz/>, obsahuje *textové pole* pro vkládání programu, *tlačítko Postav* a „*obrázek*“ – okno s odpovídající scénou. Používá se tak, že do textového pole napíšeme nebo vložíme program, stiskneme tlačítko a můžeme si prohlížet výsledek. Obrázek zobrazuje trojrozměrnou scénu, jejíž prohlížení můžeme ovládat pomocí myši.

### Program

Scéna se popisuje pomocí programu v jazyku Python, ale k vytvoření jednoduché scény nemusíme umět programovat, ani nepotřebujeme žádné velké znalosti. Projdeme si je postupně.

### Objekt

Scéna se skládá z objektů. Stavitelka umí pracovat se třemi typy objektů – kvádr, koule, a válec. Objekt vytvoříme tak, že zavoláme patřičnou funkci, takže když program bude obsahovat jediný příkaz

```
st . Koule ()
```

uvidíme kouli, a podobně příkazem

```
st . Kvadr ()
```

nebo

```
st . Valec ()
```

vytvoříme kvádr nebo válec (obr. 1).



Obr. 1 Základní tvary s výchozími hodnotami parametrů

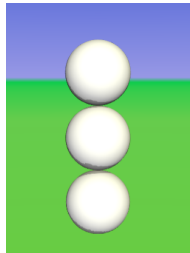
Všechny příkazy pro Stavitelku začínají písmeny „st.“. To zelené a modré na obrázku je něco jako tráva a obloha.

### Vlastnosti a parametry

Každý vytvořený objekt má nějakou **polohu**, **zvětšení** a též **pootočení** neboli **rotaci**. Každý z těchto údajů je určen třemi čísly – trojrozměrná poloha  $(x, y, z)$ , zvětšení v každém ze tří směrů  $(s_x, s_y, s_z)$  a rotace podle každé ze tří os  $(r_x, r_y, r_z)$ . Když je neuvedeme, použijí se výchozí hodnoty. K tomu je dobré říci, že rozměry všech těchto základních objektů jsou **1**, s výjimkou výšky válce, která je **2**. Výchozí poloha každého objektu i výchozí pootočení jsou  $(0, 0, 0)$  a výchozí zvětšení je  $(1, 1, 1)$ . Poloha objektu je poloha jeho středu, proto koule sahá od  $-0,5$  do  $+0,5$  ve všech směrech a válec v ose  $y$  sahá od  $-1$  do  $+1$ . Takže třeba program

```
st . Koule ()  
st . Koule (y=1)  
st . Koule (y=2)
```

vyrobí jednoduchého sněhuláka (obr. 2),

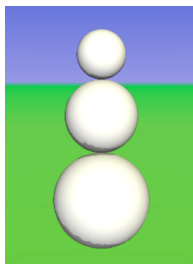


Obr. 2 Umístění objektu

ale pokud přidáme velikosti a náležitě upravíme polohu (souřadnice  $y$ ),

```
st . Koule (sx=2, sy=2, sz=2)  
st . Koule (sx=1.5, sy=1.5, sz=1.5, y=1.75)  
st . Koule (y=3)
```

dostaneme lepšího sněhuláka (obr. 3).



Obr. 3 ... a změna velikosti

Parametry můžeme uvádět v jakémkoliv pořadí a když nějaký vynecháme, použije se jeho výchozí hodnota.

Ještě ukázka parametrů **zvětšení** a **rotace**: Třeba kvádr zmenšený ve směru osy  $z$  (to je osa zepředu dozadu) na čtvrtinu a otočený podle stejné osy o 45 stupňů

```
st.Kvadr(sz=1/4, rz=45)
```

vypadá takhle:



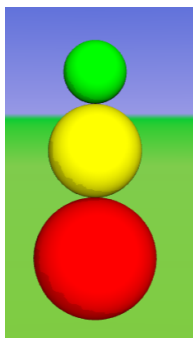
Obr. 4 Rotace

## Barva

Mezi parametry je ještě jeden (ale už poslední!) – a to je **barva**. Barva se uvádí jako trojice čísel mezi 0 a 1 uvádějících intenzitu červené, zelené a modré, neboli RGB. Výchozí barva, jak jsme už viděli, je bílá.

```
st.Koule(sx=2, sy=2, sz=2, barva=(1, 0, 0))  
st.Koule(sx=1.5, sy=1.5, sz=1.5, y=1.75, barva=(1, 1, 0))  
st.Koule(y=3, barva=(0, 1, 0))
```

vypadá takhle:



Obr. 5 Změna barvy

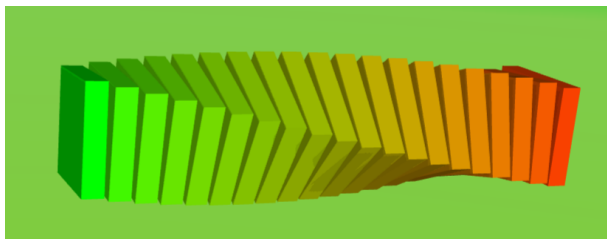
Tip: Pokud se vám dlouhé řádky nevejdou do textového pole, chyťte ho za pravý dolní roh a roztáhněte ho na potřebnou velikost.

### Proč je to program

Víme tedy, že Stavitelka je aplikace, která z příkazů vyrobí trojrozměrnou scénu, kterou si můžeme prohlížet. Ale proč se ty příkazy zapisují jako program a proč v jazyku Python?

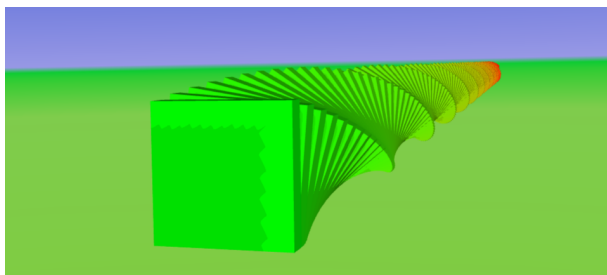
Odpověď zní: protože v programovacím jazyku dokážeme snadno zaplat opakování, podmínky, výpočty. Třeba když chceme vyrobit dvacet čtvercových desek – kvádrů, různě posunutých, pootočených a obarvených, nemusíme psát dvacet příkazů, ale použijeme cyklus:

```
N = 20
for i in range(N):
    st.Kvadr(sx=0.2, x=0.25*i, rx=5*i, barva=(i/N,1-i/N,0))
```



Obr. 6 Cyklem generovaná řada čtvercových desek

A to, že jsme číslo 20 schovali do proměnné  $N$ , nám dovolí přidáním jedné nuly vytvořit místo dvaceti desek dvě stovky desek.



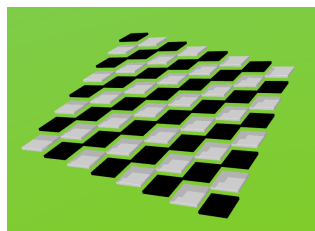
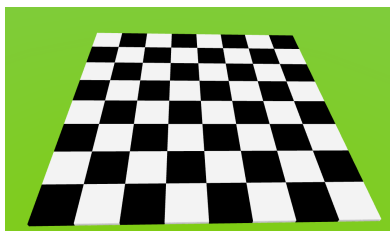
Obr. 7 ... delší cyklus

Stejně snadno vytvoříme třeba nejen šachovnici:

```
for i in range(8):
    for j in range(8):
        st.Hranol(sy=0.1, x=i, z=j, barva=((i+j)%2,)*3)
```

ale i šachovnicové schodiště

```
... st.Hranol(sy=0.1, x=i, z=j, y=(i+j)/4, barva=((i+j)%2,)*3)
```



Obr. 8 Šachovnice (v kódu  $y = 0$ ) a schodiště ( $y = (i + j)/4$ )

Díky tomu, že scénu zapisujeme jako program, a díky tomu, že Stavitelka umí vytvářet prostorové objekty, se vyhneme nutnosti studovat nějaký jazyk pro tvorbu 3D scény.

## 2. Tvary

Ale není všechno tak krásně jednoduché. Kdybychom chtěli vytvořit třeba něco, co by připomínalo květ, můžeme vzít kouli, v jedné ose, třeba  $z$ , ji zmenšit, aby byla skoro placatá, ve druhé ose, třeba (ve svislé ose)  $y$  ji zmenšit a pak ji vytvořit několikrát, vždy trochu pootočenou:

```
N = 3
for i in range(N):
    st.Koule(sz=0.2, sy=1/3, rz = i*360/N, barva=(1, 0, 0))
```



Obr. 9 Tři škálované a překrývající se koule

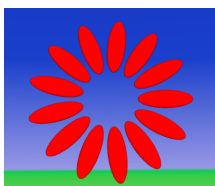
Jenže kdybychom chtěli třeba lichý počet okvětních lístků, tak to takhle nedokážeme a problém je v tom, že rotace otáčí každý objekt kolem jeho středu a to, co vidíme na obrázku jako 6 dílků, jsou ve skutečnosti jenom 3 dílky, které se překrývají.

Jak tedy rozmístit okvětní lístky kolem středu? Řešení spočívá v tom, co se ve Stavitelce jmenuje „tvar“, v možnosti vytvořit nový druh objektu, který bude obsahovat jiné objekty. A tyto jiné objekty v něm můžeme vhodně rozmístit, takže když se nově vytvořený tvar bude otáčet kolem svého středu souřadnic, tedy kolem své souřadnice (0, 0, 0), budou se kolem tohoto bodu otáčet všechny objekty ve tvaru obsažené.

Ukažme si příklad, definice tvaru začíná `st.TVAR_zacatek_definice(jmeno)`, končí `st.TVAR_konec_definice()` a nový exemplář vytvoříme pomocí `st.TVAR(jmeno)`, kde můžeme zase uvést parametry stejně jako u kvádru, koule nebo válce:

```
st.TVAR_zacatek_definice("listek")
st.Koule(x=1, sz=0.2, sy=1/3, barva=(1, 0, 0))
st.TVAR_konec_definice()

N = 13
for i in range(N):
    st.TVAR("listek", rz=i*360/N)
```



Obr. 10 V novém tvaru je koule posunutá mimo střed, kolem něhož se otáčí

Definice tvaru může obsahovat další tvary, takže z lístků můžeme definovat tvar pro květinu a z květin třeba celý záhon, a protože máme k dispozici všechny nástroje jazyka Python, mohou mít jednotlivé květiny

třeba náhodně vybranou velikost nebo pootočení:

```
st.TVAR_zacatek_definice("listek")
st.Koule(x=1, sz=0.2, sy=1/3, barva=(1, 0, 0))
st.TVAR_konec_definice()

st.TVAR_zacatek_definice("kytka")
N = 13
for i in range(N):
    st.TVAR("listek", rz=i*360/N)
st.Koule(sz=0.2, barva=(1, 1, 0))
st.Valec(sx=0.2, sz=0.2, sy=2, y=-1.8, z=0.2, barva=(0, 1, 0))
st.TVAR_konec_definice()

import random

SIRKA = 10
HLOUBKA = 10
KROK = 3
for ix in range(SIRKA):
    for iz in range(HLOUBKA):
        st.TVAR("kytka", x=ix*KROK, z=iz*KROK, ry=random.
            random()*360)

xrozmer = KROK*SIRKA
zrozmer = KROK*HLOUBKA
yrozmer = 0.3
st.Kvadr(sx=xrozmer, sz=zrozmer, sy=yrozmer, x=xrozmer/2-2, z=
    zrozmer/2-2, y=-4, barva=(0.5,0.3,0))
```



Obr. 11 Pole téměř slunečnicové

Protože popis scény je program, můžeme do něj psát komentáře.

Tato scéna zobrazuje 100 květin, každá z nich se skládá ze 13+2 objektů, to máme dohromady 1501 trojrozměrných objektů. Stavitelka zvládne

zobrazovat menší tisíce objektů, takže u takovéhle scény už může zobrazování začít drhnout. Ale na hraní a pokusy by to mělo stačit.

### Dodatečná změna barvy

Už jsme viděli, že mezi parametry objektů Stavitelky je také parametr **barva**. U základních objektů (Koule, Valec, Kvadr) je její význam jasný. Parametr **barva** ale můžeme zadat, i když vytváříme **tvar**. A tento parametr může tvar předat svému objektu, který o to „požádá“: Když v definici tvaru použijeme barvu **BAREVNY\_PARAMETR**, bude nahrazena barvou, kterou zadáme při vytváření tvaru ve scéně, například:

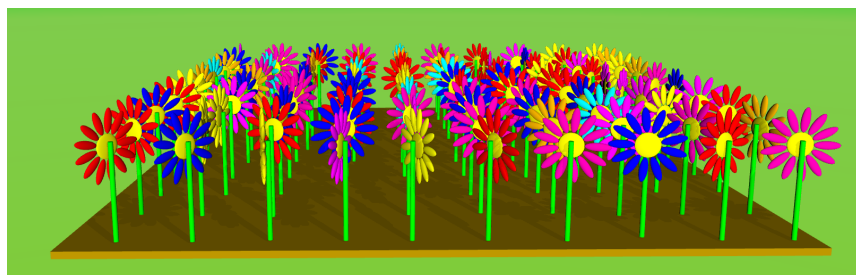
```
st.TVAR_zacatek_definice("listek")
st.Koule(x=1, sz=0.2, sy=1/3, barva=st.BAREVNY_PARAMETR)
st.TVAR_konec_definice()

st.TVAR_zacatek_definice("kytka")
...
st.TVAR("listek", rz=i*360/N, barva=st.BAREVNY_PARAMETR)
...
st.TVAR_konec_definice()

import random

barvy = [(1,0,0),
(1,1,0), (1,0.5,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,0,0.5), (0,0,1)]

...
st.TVAR("kytka", x=ix*KROK, z=iz*KROK,
ry=random.random()*360, barva=barvy[random.randint(0,6)])
```



Obr. 12 Objekt předává svou barvu vnořenému tvaru – květina svému okvětnímu lístku

Zde dostane každá vytvořená květina parametr **barva**, kterým se nahradí barevný parametr (**BAREVNY\_PARAMETR**) v její definici i v jí podřízené definici okvětního lístku.

### 3. Funkce definující tvar

Když naučíme Stavitelku, jak má vypadat nějaký tvar, zapamatuje si to a pak můžeme vytvářet jeho instance, které budou mít vlastní **polohu**, **zvětšení** a **rotaci**. Kdybychom potřebovali dodatečně měnit některé parametry, nejde to, až na výše uvedenou výjimku jednoho parametru pro barvu.

Ale můžeme si pomoci funkcí, která pro každou hodnotu parametrů nadefinuje nový tvar; možná to vypadá složitě, ale v jazyku Python je to vcelku jednoduché, třeba takto:

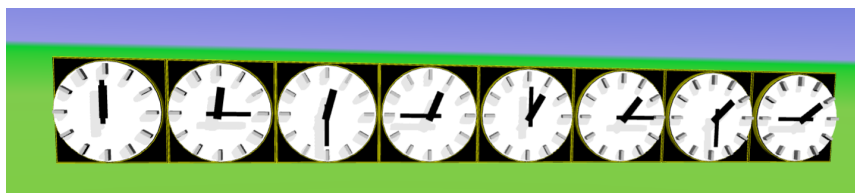
```
def Hodiny(hodiny , minuty):
    jmeno = f"hodiny_{hodiny}_{minuty}"

    st.TVAR_zacatek_definice(jmeno)
    st.TVAR("cifernik")
    uhel_mala = -360*(hodiny+minuty/60)/12
    st.TVAR("mala_rucicka", z=0.3, rz=uhel_mala)
    uhel_velka = -360*minuty/60
    st.TVAR("velka_rucicka", z=0.3, rz=uhel_velka)
    st.TVAR_konec_definice()

    return jmeno

for hodiny in range(2):
    for minuty in range(0,60,15):
        st.TVAR(Hodiny(hodiny , minuty) ,
                x=4*hodiny + minuty/15)
```

V této funkci používáme tři tvary: "cifernik", "mala\_rucicka" a "velka\_rucicka", jejichž definice zde neuvádíme.



Obr. 13 Cyklem můžeme nejen generovat řadu objektů, ale díky funkci i definovat nové tvary

Každé zavolání funkce Hodiny, třeba Hodiny(12, 45) nadefinuje nový tvar s odpovídajícím jménem, třeba hodiny\_12\_45\* a zavolání funkce st.TVAR potom vytvoří instanci tohoto nového tvaru.

## 4. Off-line Stavitelka

Pokud nám nevyhovuje online prostředí, anebo pokud chceme na psaní programů používat nějaké nástroje k tomu určené, můžeme použít modul stavitelka.py (odkaz je dole na stránce aplikace). Jen musíme na začátek programu doplnit příkaz

```
import stavitelka as st
```

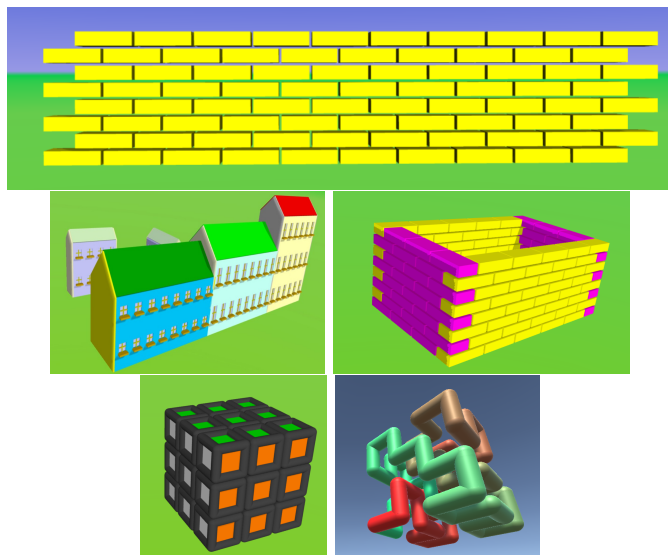
a na konec volání funkce

```
st.ZobrazScenu()
```

Příkazy mezi tím budou stejné jako ve výše popsané online verzi a poslední příkaz vytvoří HTML soubor, který se automaticky otevře v prohlížeči.

## 5. Úlohy

Pokud vás nenapadá, co byste mohli pomoci Stavitelky stavět, zkuste třeba šachovnici, zeď z cihel daných rozměrů a s danými mezerami, čtyři zdi navazující kolem dokola, hrad, stůl s počítačem, počítačovou učebnu (spousta stolů s počítači), budovu vaší školy, Rubikovu kostku nebo potrubí.



Obr. 14 Díky Stavitelce vygenerujeme i složitější scénu

# Generativní umělá inteligence

## Díl třetí: Perceptron

EDUARD BARTL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Velké jazykové modely jsou postavené na hlubokých neuronových sítích, které využívají vícehlavový attention mechanismus. Co tyto komplikovaně znějící pojmy znamenají se postupně dozvíme v jednotlivých dílech série článků věnované generativní umělé inteligenci. Třetí díl seriálu popisuje umělý neuron, kterému říkáme perceptron.

### 1. McCullochův–Pittsův neuron

Řekli jsme si, že velké jazykové modely, jakými jsou například GPT od OpenAI, Gemini od Googlu nebo rodina velkých jazykových modelů Claude od Anthropicu, patří mezi moderní přístupy v oblasti zpracování přirozeného jazyka. Velké jazykové modely používají ke svému fungování předtrénované hlubkové neuronové sítě tvořené obrovským počtem umělých neuronů.

V minulém dílu jsme se podrobně věnovali takzvanému McCullochovu–Pittsovu umělému neuronu (MCP neuronu), který je schopen reprezentovat jen úzkou třídu booleovských funkcí. Na MCP neuron se můžeme dívat jako na velmi zjednodušený model biologického neuronu. Jako takový však má dvě zásadní nevýhody:

- Vstupy i výstup MCP neuronu jsou pouze binární. MCP neuron tedy umí reprezentovat pouze booleovské funkce.<sup>1)</sup>
- Fungování MCP neuronu (tedy to, jakou booleovskou funkci reprezentuje) je dáno jeho konstrukcí (kolik má excitačních a inhibičních vstupů, jestli jsou některé vstupy napevno nastavené na jedničku nebo nulu a podobně). Nedokáže tedy přizpůsobit svoje chování – říkáme, že se nedokáže *učit z příkladů*.

Obě tyto nevýhody odstranil americký psycholog Frank Rosenblatt. Učinil tak vylepšeným umělým neuronem, kterému se říká *perceptron*.

---

<sup>1)</sup>Ve skutečnosti neumí reprezentovat zdaleka všechny booleovské funkce. K této problematice se vrátíme v jednom z následujících dílů.

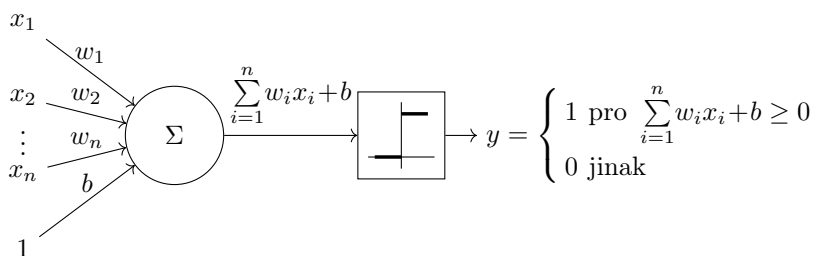
## 2. Rosenblattův perceptron

Frank Rosenblatt (1928–1971) vystudoval psychologii na Cornellově univerzitě. Po studiích pracoval na Cornell Aeronautical Laboratory v Buffalu ve státě New York, kde se zabýval vnímáním, učením a rozpoznáváním vzorů. Chtěl pochopit, jak může biologický mozek zpracovávat informace, a pokusil se tyto principy převést do matematického modelu – perceptronu [1]. Rosenblatt perceptron nejen teoreticky navrhl, ale se svými kolegy zkonstruoval i jeho fyzickou realizaci, známou jako Mark I Perceptron. Zemřel 11. července 1971, v den svých 43. narozenin, při nehodě na plachtnici v Chesapeake Bay ve státě Maryland.



Obr. 1 Frank Rosenblatt (zdroj: Heinz Nixdorf MuseumsForum)

Podívejme se nyní, jak perceptron vypadá a jak funguje. Jeho schéma je uvedeno na obr. 2.



Obr. 2 Schema Rosenblattova perceptronu

Perceptron je na první pohled složitější než MCP neuron (porovnejme obr. 2 se schématem MCP neuronu uvedeného v předchozím dílu). Dohro-

mady má perceptron  $n + 1$  vstupů, poslední vstup je pomocný a je trvale nastaven na hodnotu 1. Významné vylepšení spočívá v tom, že vstupy  $x_1, \dots, x_n$  nemusí být pouze logické jedničky nebo nuly, mohou to být libovolná reálná čísla. Každý vstup je navíc vybaven vahou. Tyto váhy mohou být opět reálná čísla. Váha pomocného vstupu se nazývá *bias*<sup>2)</sup> a budeme ji značit písmenkem  $b$ .

Perceptron nejprve provede jednoduchý výpočet – vážený součet vstupů, ke kterému je přičten *bias*:

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i + b. \quad (1)$$

Na výsledek tohoto výpočtu je pak aplikována takzvaná *aktivační funkce*  $\varphi$ . V tomto případě je aktivační funkcí *Heavisidova skoková funkce*<sup>3)</sup>

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \geq 0, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad (2)$$

jejíž graf je znázorněn ve schématu perceptronu. Výstup perceptronu je tedy 1, pokud je výsledek výpočtu (1) nezáporný; v opačném případě je výstup nastaven na 0.

### 3. Lineární binární klasifikátor

Dostáváme se tak k podstatnému zjištění: právě popsaný výpočet umožňuje perceptronu pracovat jako *lineární binární klasifikátor*. Co přesně znamená lineární binární klasifikátor, si ukážeme na perceptronu, který má pouze dva vstupy  $x_1$  a  $x_2$  (a samozřejmě pomocný vstup trvale nastavený na jedničku). Takový perceptron nejprve vypočítá hodnotu výrazu

$$w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + b, \quad (3)$$

na kterou je pak aplikována aktivační funkce (2). Jestliže tedy platí, že

$$w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + b \geq 0,$$

pak perceptron vrací 1, jinak vrátí 0. Význam tohoto výpočtu se snadno odhalí, pokud se na vstupy  $x_1$  a  $x_2$  budeme dívat jako na souřadnice bodů

<sup>2)</sup>Česky bychom mohli říct *vychýlení* nebo *posunutí*.

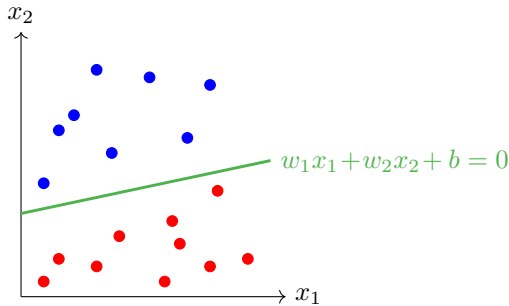
<sup>3)</sup>Problematika volby aktivační funkce je poměrně rozsáhlá a taktéž se k ní vrátíme později.

v rovině. Rovnici

$$w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + b = 0 \tag{4}$$

pak můžeme chápat jako rovnici přímky v rovině. Bod  $[x_1, x_2]$  tedy leží v jedné z polorovin určených touto přímkou.

Perceptron s nastavenými vahami  $w_1$ ,  $w_2$  a biasem  $b$  tak rozlišuje (klasifikuje) body v rovině do dvou tříd pomocí lineární rozhodovací hranice, která je dána přímkou (4), jak ukazuje obr. 3.



Obr. 3 Body rozdělené do dvou tříd podle přímky.

V obecném případě, kdy má perceptron  $n$  vstupů  $x_1, \dots, x_n$  se vše odehrává v  $n$ -rozměrném prostoru; dělící hranicí je nadrovina

$$\sum_{i=1}^n w_i x_i + b = 0.$$

Problémem však zůstává, jakým způsobem nastavit váhy perceptronu tak, aby příslušná přímka danou množinu bodů správně rozdělila. Otázkou také je, zda je takové nastavení vah možné za všech okolností. Těmto problémům se Frank Rosenblatt a další významní vědci také věnovali a my se jimi budeme zabývat v dalších dílech série.

## Literatura

- [1] *Rosenblatt, F.*: The Perceptron: A Probabilistic Model for Information Storage and Organization in the Brain. *Psychological Review*, roč. 65 (1958), č. 6, 386–408.

# ZPRÁVY

## Celostátní kolo 67. ročníku FO 2026

Celostátní kolo 67. ročníku Fyzikální olympiády kategorie A ve školním roce 2025/2026 hostil ve dnech 3.–6. února 2026 Olomoucký kraj a především Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého ([www.prof.upol.cz](http://www.prof.upol.cz)) ve spolupráci se SŠ, ZŠ a MŠ pro sluchově postižené Olomouc ([www.sluch-ol.cz](http://www.sluch-ol.cz)) a Střední školou technických profesí Olomouc ([www.kosinka.com](http://www.kosinka.com)). Soutěž proběhla za podpory JČMF, MŠMT, rektora UP, PrF UP, firmou Conatex ([www.conatex.cz](http://www.conatex.cz)), Honeywell ([tadyjebudoucnost.cz](http://tadyjebudoucnost.cz)) a Meopta ([www.meopta.com](http://www.meopta.com)). Na základě výsledků krajských kol soutěže, jež proběhla 14. 1. 2026, přijelo změřit své síly celkem 40 soutěžících (z toho 8 dívek). Záštitu nad celostátním převzali: hejtman olomouckého kraje *Laďislav Okleštěk* za náměstek hejtmána *Mgr. Svatopluk Binder, Ph.D.*, náměstek primátorky statutárního města Olomouc *Mgr. Viktor Tichák, Ph.D.*, rektor UP *doc. JUDr. Michael Kohajda, Ph.D.*, a děkan Přírodovědecké fakulty UP *Mgr. Jan Říha, Ph.D.* Knižní ceny věnoval účastníkům i emeritní profesor PrF UHK a dlouholetý místopředseda ústřední komise FO *prof. Ing. Bohumil Vyběral, CSc.*

Ve středu 4. 2. dopoledne čekaly soutěžící v prostorách Přírodovědecké fakulty UP čtyři teoretické úlohy, s ni-

míž se museli vypořádat během pěti hodin. Autorem prvních tří byl *prof. Ing. Ivo Čáp, CSc.* (FO SR), autorem čtvrté *doc. RNDr. Jan Šlégr, Ph.D.* (PrF UHK), jenž provedl také závěrečnou redakci zadání i autorského řešení úloh. První mechanická úloha s názvem *Hra s míčkem* řešila šikmý vrh míče a jeho možné vykopnutí do žlabu; řešitelé za ni získali v průměru 7,5 bodu z deseti možných a nejlépe si s ní poradil *Daniel Jedlička* (VOŠ a SPŠ elektrotechnická, Plzeň). Druhá úloha *Tepelný děj* zahrnovala cyklický děj s jedním molem dusíku uzavřeného ve válci s pístem a průměrný zisk byl 5,9 bodu; porota jako nejlepší ocenila řešení *Vojtěcha Černého* (G Jana Keplera, Praha 6, Parlěřova). Třetí, nejobtížnější úloha *Elektromagnetická brzda* se věnovala indukovanému proudu, výkonu a brzdicímu momentu síly pro model jednoduché obdélníkové cívky rotující v magnetickém poli; soutěžící dosáhli v průměru 3,6 bodu a nejlepší řešení odevzdal *Michal Stroff* (G Praha 4, Budějovická). Čtvrtá úloha s názvem *Komplex Y-12* navazovala na studijní text [1] a vycházela z modelu hmotnostního spektrometru jader izotopů uranu použitého v projektu Manhattan. Soutěžící získali v průměru 8,1 bodu a nejlepším řešitelem byl *Zbyněk Makovský* (G Pardubice, Dašická).

Ve čtvrtek 5. 2. soutěžící ve dvou skupinách řešili praktickou úlohu navrženou *Mgr. Radkem Čelechovským*,

Ph.D. z katedry optiky PřF UP a věnovanou lámání i pružnosti špaget s odhadem modulu pružnosti. Soutěžící ji zvládli poměrně dobře, získali v průměru 14,7 bodu a nejlepší řešitelkou porota vyhlásila *Julii Pazdírkovou* (Masarykovo G, SZŠ a VOŠ zdravotnická, Vsetín).



Řešení experimentální úlohy v prostorách PřF UP (foto Ota Blahoušek)

K celostátnímu kolu tradičně patří i bohatý navazující program, jenž zahrnoval přednášku *Fyzikální principy letu proudových letounů* zástupců firmy Honeywell, exkurze do laboratoří PřF UP, podvečerní přednášky *prof. RNDr. Tomáše Opatrného, Dr.*, *Kvantové počítače a prof. RNDr. Jana Švece, Ph.D. et Ph.D.*, *Jak vzniká lidský hlas?* (oba PřF UP Olomouc) i možnost návštěvy science centra *Pevnost poznání* ([www.pevnostpoznani.cz](http://www.pevnostpoznani.cz)).

Poslední den, v pátek 6. 2. dopoledne, proběhlo aule PřF slavnostní vyhlášení výsledků. Uvedme základní statistické údaje: deset účastníků se stalo vítězi, dvacet šest úspěšnými řešiteli a čtyři účastníky soutěže. Pomyšnou zlatou medaili vybojoval *Michal Stroff* (G Praha 4, Budějovická),

stříbrnou *Anita Vaceková* (G Brno, třída Kapitána Jaroše) a bronzovou *Julie Pazdírková* (Masarykovo G, SZŠ a VOŠ zdravotnická, Vsetín).



Tři nejlepší soutěžící, zleva: *Julie Pazdírková*, *Michal Stroff* a *Anita Vaceková* (foto Ota Blahoušek)

Držme palce pěti našim soutěžícím na 56. mezinárodní fyzikální olympiádě, která má proběhnout 4. až 12. července 2026 v columbijském městě Bucaramanga (viz [ipho2026.com](http://ipho2026.com)). Další informace a fotodokumentaci celostátního lze najít na stránkách [fo.upol.cz/ck2026.html](http://fo.upol.cz/ck2026.html).

V příštím 68. ročníku bude hostitelem celostátního kola Pardubický kraj, kam pozval účastníky zástupce krajské komise FO *RNDr. Vladimír Vícha*. Zájemci a příznivci soutěže najdou všechny potřebné aktuální informace včetně zadání i řešení úloh na čtenářům MFI jistě dobře známých internetových stránkách ÚKFO <http://www.fyzikalniolympiada.cz>.

## Literatura

- [1] *Vybíral, B.*: Magnetické pole ve vakuu (Elektrodynamika I.). <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/magnet.pdf>.

## Výsledková listina celostátního kola

### Vítězové

1. Michal Stroff (G Praha 4, Budějovická, 58,5 b), 2. Anita Vaceková (G Brno, tř. Kpt. Jaroše, 55 b), 3. Julie Pazdírková (Masarykovo G, SZŠ a VOŠ zdravotnická, Vsetín, 54 b), 4. Vojtěch Černý (G J. Keplera, Praha 6, Parlérova, 52,5 b), 5. Alex Christian Faivre (G J. A. Komenského a Jazyková škola, Uherský Brod, 52,5 b), 6. Lukáš Franta (G Ch. Dopplera, Praha 5, 51,5 b), 7. Eliška Bednářová (G Otokara Březiny a SOŠ Telč, 50,5 b), 8. Miroslav Mládek (SPŠ strojní a stavební, Tábor, 50,5 b), 9. Daniel Jedlička (VOŠ a SPŠ elektrotechnická, Plzeň, 50 b), 10. Vít Iždny (G J. Keplera, Praha 6, Parlérova, 48,5 b).



Zlatý Michal Stroff (foto O. Blahoušek)

### Úspěšní řešitelé

11. Adam Pustka (G F. X. Šaldy, Liberec, 46,5 b), 12. Jan Bláha (G Praha 4, Na Vítězné pláni, 45,5 b), 13. Matěj Bajgar (G České Budějovice, Jírovцова, 45 b), 14. Zbyněk Makovský (G Pardubice, Dašická, 44 b), 15. Kamila Tomášová (G J. Keplera, Praha 6, Parlérova, 43,5 b), 16. Vojtěch Kubrycht (G Praha 4, Budějovická, 42 b), 17. Tomáš Zvěřina (G Jihlava, 40,5 b),

18. Radovan Koukal (G Praha 4, Na Vítězné pláni, 40,5 b), 19. Patrik Pöschl (G F. X. Šaldy, Liberec, 39,5 b), 20. Michal Fišer (VOŠ a SPŠ elektrotechnická, Plzeň, 39 b), 21. Anna Matiašková (G Turnov, 38 b), 22. Petr Barták (Slovanské G, Olomouc, 38 b), 23. Dominik Kaňka (Lepařovo G, Jičín, 37,5 b), 24. Kryštof Basista (G Josefa Kainara, Hlučín 37,5 b), 25. Adam Kladníček (G Dr. Antona Randy, Jablonec nad Nisou, 37,5 b), 26. Filip Černý (G F. X. Šaldy, Liberec, 36 b), 27. Mikuláš Hořenek (Wichterlovo G Ostrava, 35,5 b), 28. Marek Nedoma (Biskupské G Žďár nad Sázavou, 35,5 b), 29. Milan Kadlec (G Písek, 35,5 b), 30. Marie Hrubá (G Ostrava, Zábřeh, Volgogradská, 35,5 b), 31. Matěj Hošek (G Ostrava, Zábřeh, Volgogradská, 35 b), 32. Mark Joly (G Havlíčkův Brod, 32 b), 33. Ivan Mišustín (G Pierra de Coubertina, Tábor, 32 b), 34. Lukáš Vojtek (G Brno, třída Kpt. Jaroše, 31,5 b), 35. Květa Bouchalová (G Olomouc, Hejčín, Tomkova, 29,5 b), 36. Tereza Nejezchlebová (G Pardubice, Dašická, 27,5 b).



Nejlepší dívka v soutěži Anita Vaceková (foto O. Blahoušek)

*Lukáš Richterek*

## Ústřední kolo 75. ročníku MO kategorie A

Ústřední kolo 75. ročníku Matematické olympiády kategorie A uspořádala ve dnech 15.–18. března 2026 jihomoravská krajská komise Matematické olympiády ve spolupráci s Gymnáziem Brno, tř. Kpt. Jaroše, a s přispěním řady partnerů a sponzorů. Na uspořádání ústředního kola se dále podílela Ústřední komise matematické olympiády, Jednota českých matematiků a fyziků a Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR.

Všichni soutěžící, členové Ústřední komise MO a pozvaní hosté byli ubytováni v hotelu *Avanti* v centru Brna, kde proběhla i celá soutěž. Slavnostní zahájení proběhlo 15. března ve Hvězdárně a planetáriu Brno za účasti představitelů MŠMT, kraje i města. V jeho průběhu udělili představitelé České matematické společnosti a Nadace Qminers Cenu Cantor za mimořádný přínos při přípravě účastníků MO *Mgr. Zbyňku Vrbovi* z Gymnázia Český Krumlov, *Jitce Putnarové* ze Základní školy Litoměřice, *Boženy Němcové* a *PaedDr. Josefu Kubešovi* z Gymnázia Plzeň, Mikulášské náměstí. Výsledky ústředního kola pak byly vyhlášeny ve středu 18. března ve Sněmovním sále města Brna.

Na základě jednotné koordinace úloh krajského kola kategorie A pozvala Ústřední komise MO k účasti v ústředním kole 51 nejlepších účastníků, mezi nimiž bylo 7 dívek. Na řešení obou trojic soutěžních úloh měli soutěžící po oba dny – 16. a 17. března,

vždy 4,5 hodiny čistého času. Za každou úlohu mohli soutěžící získat nejvýše 7 bodů (s celočíselnými bodovými zisky).

Organizátoři závěrečného kola MO připravili pro soutěžící a pro členy ústřední komise pestrý doprovodný program. Odpoledne po prvním soutěžním dnu absolvovali prohlídku města. Druhý den to pak byla návštěva Mendelova muzea a slavnostní večere U Královny Elišky.

Vyhlášení výsledků soutěže a předání cen nejlepším řešitelům IV. kola kategorie A se uskutečnilo ve středu 18. března dopoledne. Předseda ÚK MO *doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.*, v závěrečném projevu poděkoval celému týmu organizátorů, zvláště pak *Mgr. Viktoru Ježkovi*, tajemníkovi krajské komise MO, *RNDr. Jiřímu Hermanovi*, předsedovi krajské komise MO a *Mgr. Tomáši Nečasovi*, řediteli pořádatelského gymnázia, za kvalitní přípravu a mimořádně zdařilý průběh celého ústředního kola.

Podle organizačního řádu MO bylo vyhlášeno jedenáct vítězů ústředního kola, absolutními vítězy se pak stali *Erik Ježek* ze Smíchovské SPŠ a G v Praze 5 a *Veronika Menšíková* z Arcibiskupského G v Praze 2 se ziskem 40 bodů. Dále bylo oceněno 14 úspěšných řešitelů. Podrobnější [výsledky](#) najdete na stránkách [75. ročníku MO](#). Zde najdete také [vzorová řešení](#) soutěžních úloh, jejichž zadání uvádíme níže.

### 1. soutěžní den (16. března)

1. Pro kladná reálná čísla  $x, y, z$  platí  $x^2 + y^2 + z^2 = 75$  a dva ze tří součtů  $x + y, y + z, z + x$  jsou aspoň 10. Určete

nejmenší a největší možnou hodnotu zbyvajících součtu. (Patrik Bak)

**2.** Necht  $T$  je těžiště ostroúhlého trojúhelníku  $ABC$ . Na kratším oblouku  $BC$  kružnice jemu opsané je dán bod  $P$ . Označme  $P'$  patu kolmice z bodu  $P$  k úsečce  $BC$ . Dále označme  $X$  průsečík přímky  $P'T$  a rovnoběžky s  $BC$  vedené bodem  $A$ . Nakonec označme  $S$  střed úsečky  $PX$ . Dokažte, že

$$|\sphericalangle BAP| = |\sphericalangle SAC|. \quad (\text{Michal Janík})$$

**3.** Řekneme, že skupina několika lidí je *trojitá*, pokud se každý člen skupiny zná s přesně třemi dalšími členy a skupinu nelze rozdělit do dvou neprázdných částí tak, aby každý jejich člen měl všechny své známé ve své části. Vztah známosti je vzájemný. Určete největší celé číslo  $k \geq 3$ , pro které existuje kladné celé číslo  $n$  takové, že z každé trojité skupiny s alespoň  $n$  lidmi lze vybrat alespoň  $k$  lidí a posadit je ke kulatému stolu tak, že se každí dva sousedé znají. (Jozef Rajník)

## 2. soutěžní den (17. března)

**4.** Necht  $a, b$  jsou různá kladná celá čísla taková, že čísla  $a^2 + 1$  a  $ab + 1$  mají stejné množiny prvočinitelů. Dokažte, že číslo

$$a^2 + b^2 + 2$$

je dělitelné druhou mocninou některého prvočísla.

(Dominik Martin Rigász)

**5.** Necht  $\mathcal{P} = (a_1, a_2, \dots, a_{2026})$  je libovolné pořadí čísel  $1, 2, \dots, 2026$ . Řekneme, že index  $i \in \{1, 2, \dots, 2026\}$  je

*dobrý*, pokud každé z 2026 čísel

$$\begin{aligned} & a_i, \\ & a_i - a_{i+1}, \\ & a_i - a_{i+1} + a_{i+2}, \\ & a_i - a_{i+1} + a_{i+2} - a_{i+3}, \\ & \vdots \\ & a_i - a_{i+1} + \dots - a_{i+2023} + a_{i+2024}, \\ & a_i - a_{i+1} + \dots - a_{i+2023} + a_{i+2024} - a_{i+2025} \end{aligned}$$

je nezáporné, kde indexy počítáme modulo 2026, tj. klademe  $a_{j+2026} = a_j$  pro každé celé  $j$ . Označme  $n(\mathcal{P})$  počet dobrých indexů pořadí  $\mathcal{P}$ . Určete nejmenší možné i největší možné  $n(\mathcal{P})$ .

(Jakub Krivošík)

**6.** Necht  $ABCDEF$  je šestiúhelník vepsaný do kružnice se středem  $O$ , jehož každé dvě protilehlé strany jsou rovnoběžné. Přímky  $AB, CD$  a  $EF$  vymezují trojúhelník  $\Delta_1$  a přímky  $BC, DE$  a  $FA$  vymezují trojúhelník  $\Delta_2$ . Dokažte, že středy kružnic opsaných trojúhelníkům  $\Delta_1$  a  $\Delta_2$  jsou souměrné sdužené podle bodu  $O$ .

(Michal Janík)

Všichni vítězové a nejlepší úspěšní řešitelé z nematuritních ročníků byli pozváni na výběrové soustředění, kde budou bojovat o místa v reprezentačních družstvech na Mezinárodní matematickou olympiádu v Číně a Středoevropskou matematickou olympiádu ve Slovinsku. Nejlepší řešitelé z nematuritních ročníků pak budou v pozvání na tradiční zářijové soustředění nejlepších řešitelů kategorie A do Janských Lázní.

Pavel Calábek

## Ústřední kolo 75. ročníku MO kategorie P

V polovině března letošního roku se konalo v Brně ústřední kolo 75. ročníku Matematické olympiády kategorie P. Jako obvykle přímo navazovalo na ústřední kolo MO kategorie A, takže někteří studenti mohli absolvovat obě tyto vrcholné soutěže na jednom místě a v průběhu jednoho týdne.

Ústřední kolo Matematické olympiády organizačně výborně připravili pracovníci Krajské komise MO Jihomoravského kraje ve spolupráci s Fakultou informatiky Masarykovy univerzity v Brně a s přispěním celé řady partnerů a sponzorů. Všichni účastníci byli ubytováni v moderním hotelu Avanti nedaleko centra. Teoretická část soutěže se konala přímo na místě v hotelu, praktická část proběhla v počítačových učebnách nedaleké Fakulty informatiky MU. Na přípravě a zajištění odborné části ústředního kola MO kategorie P se podíleli také pracovníci Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, kteří připravili soutěžní úlohy, zajistili opravování a vyhodnocení odevzdaných řešení a přípravu soutěžního prostředí pro praktickou část soutěže.

V letošním ústředním kole Matematické olympiády kategorie P soutěžilo 30 nejlepších úspěšných řešitelů krajských kol. Výrazně největší zastoupení měl tentokrát pořadající Jihomoravský kraj se 13 soutěžícími, dalších 9 soutěžících bylo z Prahy a jenom zbývajících 8 odjinud. Sedm krajů nemělo v letošním ústředním kole žádného řeši-

tele. Pouze 11 soutěžících bylo z maturitních ročníků, zatímco 19 účastníků ústředního kola bylo mladších.

Soutěž začala ve středu večer slavnostním zahájením v prostorách Hvězdárny a planetária na Kraví hoře. Ve čtvrtěk dopoledne proběhla teoretická část soutěže, v níž studenti řešili úlohy zaměřené na návrh efektivního algoritmu. V této části se nepracuje na počítačích, soutěžící odevzdávají svoje řešení zpracovaná v písemné podobě. Na vyřešení tří zadaných úloh mají vymezen čas 4,5 hodiny. Jedna z teoretických úloh ústředního kola obvykle využívá nějaký netradiční výpočetní model, který připraví autoři úloh vždy pro všechna soutěžní kola příslušného ročníku Matematické olympiády a již od domácího kola se s ním řešitelé seznámí formou studijního textu. Letošní ročník byl trochu výjimečný tím, že v teoretické části soutěže nebyla zadána žádná úloha navazující na studijní text. Místo toho zavedený výpočetní model a studijní text tentokrát využila poslední úloha praktická.

Zatímco organizátoři hned ve čtvrtek po obědě začali s opravováním a hodnocením odevzdaných řešení teoretických úloh, studenti měli možnost vydat se s průvodci na prohlídku města. Po večeri ještě následovala příprava soutěžících na páteční praktickou část – všichni si mohli vyzkoušet práci na počítačích se soutěžním a vyhodnocovacím prostředím CMS. Soutěžící k němu přistupují pomocí webového rozhraní, jehož prostřednictvím mohou nejen odevzdávat k vyhodnocení svá vypracovaná řešení soutěžních úloh, ale mohou také klást dotazy k úlohám a

dozvídají se, jak byla odevzdaná řešení ohodnocena. Jedná se o stejné prostředí, jaké se používá i na mezinárodních olympiádách v informatice.

Praktická část ústředního kola MO kategorie P se konala v pátek dopoledne v počítačových učebnách Fakulty informatiky Masarykovy univerzity. Soutěží se za obdobných podmínek a podle stejných pravidel, jako jsou organizovány i mezinárodní středoškolské olympiády v informatice. Každý soutěžící pracuje na přiděleném osobním počítači se soutěžním prostředím a v průběhu 4,5 hodiny má za úkol vyřešit tři úlohy. Řešení praktických úloh je třeba dovést do podoby odladěných a plně funkčních programů. Odevzdané programy jsou již v průběhu soutěže okamžitě testovány pomocí předem připravené sady testovacích vstupních dat. Hodnotí se nejen správnost, ale pomocí nastavených časových limitů také rychlost výpočtu. V bodovém hodnocení lze díky tomu odlišit kvalitu různých řešení z hlediska časové složitosti použitého algoritmu. Řešitelé se průběžně dozvídají ohodnocení svých řešení, mají možnost řešení opravit a odevzdat ho opakovaně vícekrát.

Ústřední kolo 75. ročníku Matematické olympiády bylo zakončeno v pátek odpoledne slavnostním vyhlášením výsledků kategorie P na Fakultě informatiky. Řešení každé soutěžní úlohy bylo hodnoceno nejvýše 10 body, celkem tedy mohli soutěžící získat maximálně 60 bodů. Tohoto výsledku letos nikdo nedosáhl, absolutní vítěz obdržel za svoje řešení úloh 53 bodů. Každou z prvních pěti zadaných úloh někdo ze

soutěžících vyřešil na plný počet bodů. Nejobtížnější se ukázala být šestá úloha (poslední praktická), která navazovala na studijní text o celočíselném lineárním programování. Tři nejlepší řešení této úlohy byla ohodnocena 7 body.

Podle součtu dosažených bodů z obou soutěžních dnů dohromady se stanoví výsledné pořadí. Úspěšnými řešiteli letošního ústředního kola MO kategorie P se stali soutěžící na 1. až 14. místě v celkovém pořadí, tedy všichni, kteří získali alespoň 25 bodů. Sedm nejlepších z nich se ziskem alespoň 43 bodů bylo vyhlášeno vítězi ústředního kola.

### **Výsledky ústředního kola 75. ročníku MO kategorie P**

#### *Vítězové*

1. Adam Houdek, 1/4, SOŠ a ZŠ Březová, 53 bodů,
2. Erik Ježek, 4/4, Smíchovská SPŠ a gymnázium, Praha 5, 50 bodů,
3. Svatava Šimečková, 8/8, Gymnázium Brno, tř. Kpt. Jaroše, 48 bodů,
4. Petr Starý, 8/8, Gymnázium Jírovcova, České Budějovice, 46 bodů,
5. Hugo Herynek, 7/8, Gymnázium Jana Keplera, Praha 6, 45 bodů,
6. Jakub Hříbal, 7/8, Gymnázium Joachima Barranda, Beroun, 44 bodů,
7. Martin Vořechovský, 7/8, Gymnázium Brno, tř. Kpt. Jaroše, 43 bodů.

#### *Úspěšní řešitelé*

8. Jan Václavek, 8/8, Gymnázium Brno, tř. Kpt. Jaroše, 41 bodů,
9. Petr Hanák, 4/4, SPŠ Zlín, 33 bodů,
10. Veronika Menšíková, 8/8, Arcibiskupské gymnázium, Praha 2, 29 bodů,

11.–12. Marián Cveček, 2/4, SPŠ Purkyňova, Brno, 28 bodů,

11.–12. Lucian Poljak, 8/8, Gymnázium Jakuba Škody, Přerov, 28 bodů,

13.–14. Matěj Bajgar, 7/8, Gymnázium Jírovцова, České Budějovice, 25 bodů,

13.–14. Jan Procházka, 7/8, Gymnázium Brno, tř. Kpt. Jaroše, 25 bodů.

#### *Ostatní účastníci*

– Pavel Hyánek, 8/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše, 24 bodů,

– Jakub Trčka, 3/4, G Jana Keplera, Praha 6, 24 bodů,

– Martin Zeman, 8/8, G Christiana Dopplera, Praha 5, 19 bodů,

– Jan Hrubec, 7/8, OPEN GATE Gymnázium a ZŠ Babice, 18 bodů,

– Veronika Maščíková, 8/8, G PORG, Praha 8, 16 bodů,

– Martin Blecha, 3/6, Gymnázium Brno, Vídeňská, 15 bodů,

– Martin Vagner, 7/8, G, Voděradská, Praha 10, 15 bodů,

– Miroslav Neumann, 3/4, SPŠ Brno, Purkyňova, 14 bodů,

– Tobiáš Neugebauer, 7/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše, 13 bodů,

– Antonín Horák, 6/8, G Brno-Řečkovice, 12 bodů,

– Petr Vokřínek, 6/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše, 12 bodů,

– Marek Dvořák, 7/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše, 11 bodů,

– Ondřej Nevěril, 8/8, G, Zábřeh, 11 bodů,

– David Kolář, 7/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše, 10 bodů,

– Jakub Hladký, 7/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše, 8 bodů,

– David Laušman, 7/8, G Opatov, Praha 4, 4 body.

Na základě výsledků ústředního kola 75. ročníku Matematické olympiády kategorie P obdrželi úspěšní řešitelé pozvánku na krátké výběrové soustředění, jehož cílem je výběr českých reprezentantů pro mezinárodní olympiády v informatice. Při výběru reprezentantů sčítáme body získané v ústředním kole MO-P a výsledky dosažené na výběrovém soustředění. Čtyři nejlepší řešitelé budou reprezentovat Českou republiku na 38. mezinárodní olympiádě v informatice IOI 2026, která se bude konat ve dnech 9. až 16. 8. 2026 v hlavním městě Uzbekistánu Taškent. Další čtyři úspěšní studenti se zúčastní 33. středoevropské olympiády v informatice CEOI 2026 ve Slovinsku. Ta se bude konat ve dnech 5.–10. 7. 2026 ve slovinském hlavním městě Lublaň. Nejlepší čtveřice našich dívek bude soutěžit na 6. evropské dívčí olympiádě v informatice EGOI 2026 ve dnech 12.–18. 5. 2026 v italském městě Cesenatico. O průběhu a výsledcích všech tří mezinárodních informatických olympiád vás budeme informovat v našem časopise.

Podrobné informace o celém 75. ročníku MO kategorie P, kompletní výsledková listina, texty soutěžních úloh a jejich vzorová řešení jsou vám k dispozici na webu olympiády na adrese <https://mo.mff.cuni.cz/>. Na stejném místě se můžete seznámit i se staršími ročníky této soutěže a také se všemi aktuálními informacemi týkajícími se kategorie P Matematické olympiády.

*Pavel Töpfer*