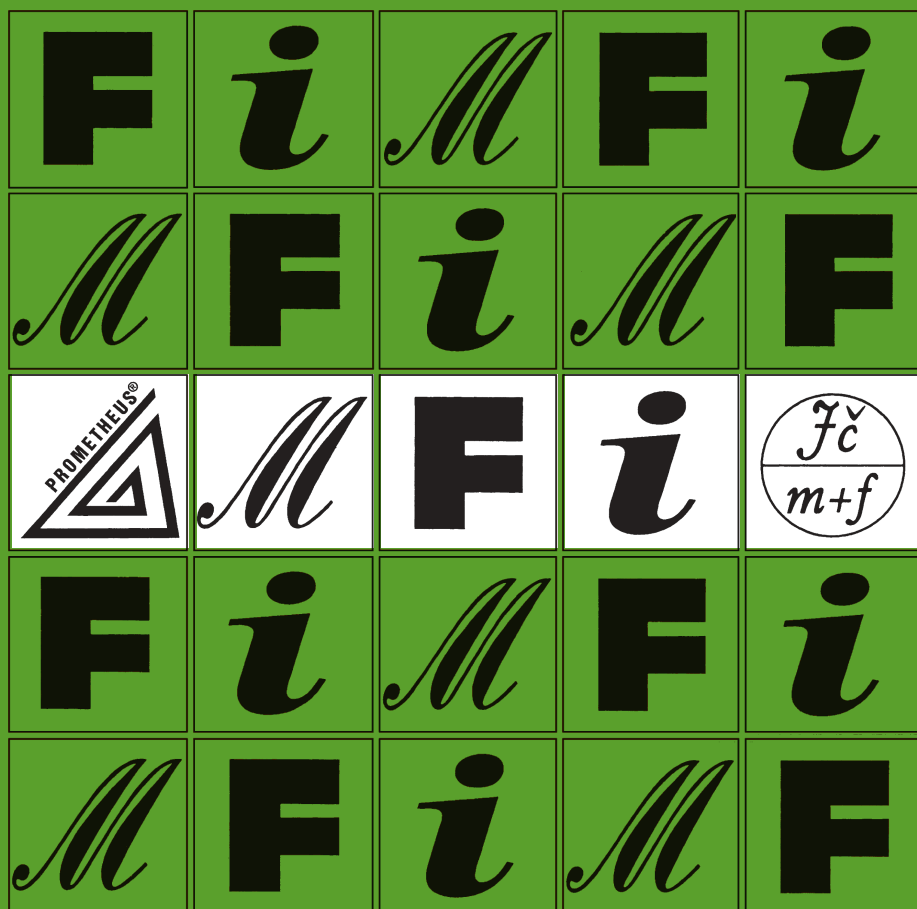


MATEMATIKA 3 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXXV (2026), číslo 3

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku
Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek
Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška,
Karel Kolář, Michaela Křížová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil, Dana Mandíková,
Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel
Töpfer, Jaroslav Zhouf

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>J. Polák:</i> Symetrické soustavy algebraických rovnic	161
<i>Redakce časopisu MFI:</i> Životní jubileum Josefa Poláka	178
<i>J. Švrček, L. Juklová:</i> Jak dokázat, že čtyři body leží na kružnici	179
<i>P. Tlustý, I. Krech:</i> Další vlastnosti netranzitivních ruletek	188
Zajímavé matematické úlohy	194

FYZIKA

<i>V. Žák, T. Fišar:</i> Kompetenční rámec absolventů učitelství a reálná výuka fyziky	199
<i>P. Kriek:</i> Implementácia historických prvkov do vyučovania fyziky na gymnáziu	213

INFORMATIKA

<i>P. Töpfer:</i> Nalezení nejlepšího řešení	226
--	-----

ZPRÁVY

<i>O. Lepil:</i> Vzpomínka na Přemysla Šedivého	234
<i>K. Kolář:</i> Zlatá medaile z IYPT po 28 letech!	238
<i>P. Šalom:</i> 67. IMO a IMSC 2026	239

Symetrické soustavy algebraických rovnic

JOSEF POLÁK

Fakulta aplikovaných věd ZČU v Plzni

Symetrie (souměrnosti) jsou nesmírně zajímavými a významnými vlastnostmi hmotných objektů reálného světa i abstraktních objektů v mnoha vědních oborech, speciálně v matematice. Ve školské matematice je systematická pozornost věnována symetriím matematických objektů (útvary) zpravidla jen v geometrii. Je třeba si uvědomit, že se symetriemi matematických objektů se setkáváme jako s velmi zajímavými a důležitými vlastnostmi také v dalších oblastech matematiky, speciálně v algebře.

Nejen zajímavým, ale i velice užitečným algebraickým využitím symetrií jsou symetrické polynomy a symetrické soustavy algebraických (polynomických) rovnic řešené metodou substituce. Jejich výkladu a užití je věnován náš článek. Vzhledem k jeho rozsahu i z didaktických důvodů se v něm omezujeme na symetrické soustavy algebraických rovnic o dvou a třech neznámých s reálnými koeficienty.

Úvodem připomeneme dvě důležité věty ze středoškolské matematiky o symetrických vlastnostech kořenů kvadratických rovnic a připojíme dvě analogické věty pro kubické rovnice s reálnými, resp. komplexními koeficienty.

Věta 1 (o rozkladu normovaného kvadratického polynomu)

Kvadratická rovnice v normovaném tvaru $x^2 + px + q = 0$ má kořeny $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, právě když kvadratický polynom $x^2 + px + q$ lze rozložit na součin kořenových činitelů $x - x_1, x - x_2$, tj.

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2). \quad (1)$$

Věta 2 (Viètovy vztahy pro normovanou kvadratickou rovnici)

Kořeny normované kvadratické rovnice $x^2 + px + q = 0$ jsou čísla $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, právě když platí vztahy (Viètovy vzorce)

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q. \quad (2)$$

Důkaz. Tato věta je jednoduchým a velmi názorným důsledkem věty 1. Roznásobením kořenových činitelů na pravé straně rovnosti (1) dostáváme

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$$

a tato rovnost polynomů nastává, právě když jsou si rovny jejich koeficienty, tj. když platí vztahy (2).

Věta 3 (o rozkladu normovaného kubického polynomu)

Kubická rovnice v normovaném tvaru $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ má kořeny $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$, právě když kubický polynom $x^3 + px^2 + qx + r$ lze rozložit na součin kořenových činitelů $x - x_1, x - x_2, x - x_3$, tj.

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3). \quad (3)$$

Věta 4 (Viètovy vztahy pro normovanou kubickou rovnici)

Kořeny normované kubické rovnice $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ jsou čísla $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$, právě když platí vztahy (Viètovy vzorce)

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p, \quad x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = q, \quad x_1 x_2 x_3 = -r. \quad (4)$$

Důkaz. Tato věta je důsledkem věty 3. Roznásobením kořenových činitelů na pravé straně rovnosti (3) dostáváme

$$x^3 + px^2 + qx + r = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)x - x_1 x_2 x_3 = 0$$

a tato rovnost polynomů nastává, právě když jsou si rovny jejich koeficienty, tj. jestliže platí vztahy (4).

1. Symetrické polynomy dvou proměnných

Polynomem $f(x, y)$ proměnných x, y s reálnými koeficienty se rozumí součet algebraických výrazů tvaru $ax^m y^n$, kde $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}_0$. Oborem proměnných x, y je obor komplexních čísel $\mathbb{C}$.

Speciálně: Polynom $f(x, y)$ se nazývá symetrický polynom proměnných x, y , jestliže se nezmění při záměně pořadí proměnných x, y , tj. platí-li

$$f(x, y) = f(y, x) \quad \text{pro všechna } x, y \in \mathbb{C}. \quad (5)$$

Příklad symetrického a nesymetrického polynomu 2 proměnných

Polynom $x^3y^2 + x^2y^3$ je symetrický, polynom $x^3 + y^2$ není symetrický.

Dvojice symetrických polynomů

$$e_1(x, y) = x + y, \quad e_2(x, y) = xy \quad (6)$$

tvoří tzv. *elementární symetrické polynomy proměnných x, y* . Užívá se pro ně též označení

$$u = e_1(x, y), \quad v = e_2(x, y) \quad (7)$$

neboli substituce

$$u = x + y, \quad v = xy. \quad (8)$$

Poznámka 1. Elementární symetrické polynomy dvou proměnných se vyskytují v modifikované podobě ve Viětových vzorcích pro kvadratickou rovnici (viz větu 2).

Volba elementárních symetrických polynomů (6) není náhodná, ale taková, že platí následující významná věta.

Věta 5 (základní věta o symetrických polynomech dvou proměnných)

Každý symetrický polynom $f(x, y)$ proměnných x, y lze jednoznačně vyjádřit jako polynom $g(u, v)$ proměnných u, v daných vztahy (8), přičemž platí

$$f(x, y) = g(u, v). \quad (9)$$

Příklady úpravy symetrického polynomu $f(x, y)$ na tvar $g(u, v)$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v, \\ x^2 + xy + y^2 &= x^2 + y^2 + xy = u^2 - v, \\ x^2 - xy + y^2 &= x^2 + y^2 - xy = u^2 - 3v, \\ x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3(x + y)xy = u^3 - 3uv. \end{aligned}$$

Obdobně by bylo možné provést úpravy symetrických polynomů $x^n + y^n$ proměnných x, y na polynomy proměnných u, v i pro $n = 4, 5, \dots$, avšak mnohem jednodušší je využít pro ně rekurentní vyjádření podle následující věty.

Věta 6 (o rekurentním vyjádření posloupnosti mocninných součtů)

Posloupnost mocninných součtů $s_n = x^n + y^n$ ($x, y \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$) lze vyjádřit v proměnných u, v rekurentním zadáním (rekurentním vzorcem)

$$s_0 = 2, \quad s_1 = u, \quad s_n = us_{n-1} - vs_{n-2} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 2. \quad (10)$$

Důkaz. $s_0 = x^0 + y^0 = 2$, $s_1 = x + y = u$ a pro $n \geq 2$ užitím zpětné substituce dané vztahy (8) dostáváme

$$\begin{aligned} us_{n-1} &= (x+y)(x^{n-1} + y^{n-1}) = x^n + xy^{n-1} + yx^{n-1} + y^n = \\ &= x^n + y^n + xy(x^{n-2} + y^{n-2}) = s_n + vs_{n-2}, \end{aligned}$$

odkud plyne dokazovaný rekurentní vzorec (10).

Užitím věty 6 je možné postupně získat vyjádření s_n v proměnných u, v uvedená ve 2. sloupci tabulky 1.

Tabulka 1

s_n v proměnných x, y	s_n v proměnných u, v
$s_1 = x + y$	$s_1 = u$
$s_2 = x^2 + y^2$	$s_2 = u^2 - 2v$
$s_3 = x^3 + y^3$	$s_3 = u^3 - 3uv$
$s_4 = x^4 + y^4$	$s_4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2$
$s_5 = x^5 + y^5$	$s_5 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2$
$s_6 = x^6 + y^6$	$s_6 = u^6 - 6u^4v + 9u^2v^2 - 2v^3$
$s_7 = x^7 + y^7$	$s_7 = u^7 - 7u^5v + 14u^3v^2 - 7uv^3$
$\vdots$	$\vdots$

2. Symetrické soustavy algebraických rovnic o dvou neznámých

V této i dalších částech článku navazujeme na náš příspěvek [5], ve kterém je formulován pojem *soustavy n algebraických rovnic o n neznámých* a podrobně s příklady popsáno její řešení *metodou postupné eliminace neznámých* (MPE).

Symetrická soustava algebraických rovnic s neznámými x, y v oboru $\mathbb{C}$ je soustava rovnic, kterou lze zapsat v anulovaném tvaru

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= 0, \\ f_2(x, y) &= 0, \end{aligned} \tag{11}$$

kde $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ jsou symetrické polynomy proměnných x, y . Z důvodu symetrie pro ni platí: Je-li uspořádaná dvojice (c_1, c_2) čísel $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ řešením soustavy rovnic (11), pak také uspořádaná dvojice (c_2, c_1) je jejím řešením.

Speciální případ symetrické soustavy algebraických rovnic (11)

Významný speciální případ soustavy rovnic (11) je

$$\begin{aligned}x + y &= a_1, \\ xy &= a_2,\end{aligned}\tag{12}$$

kde levými stranami rovnic jsou elementární symetrické polynomy a pravými stranami jsou dané konstanty $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Řešení soustavy rovnic (12) MPE. Neznámou y eliminujeme tak, že z 1. rovnice vyjádříme $y = a_1 - x$ a dosadíme do 2. rovnice, anebo 1. rovnici vynásobíme x a do rovnice $x^2 + xy = a_1x$ dosadíme za xy z 2. rovnice. Dostáváme tak pro neznámou x kvadratickou rovnici

$$x^2 - a_1x + a_2 = 0.\tag{13}$$

Její diskriminant je $D = a_1^2 - 4a_2$. Pro $D \geq 0$ má dva reálné kořeny x_1, x_2 a pro $D < 0$ dva imaginární (komplexně sdružené) kořeny x_1, x_2 . V obou případech pak $y_1 = a_1 - x_1, y_2 = a_2 - x_2$.

Poznámka 2. Ke kvadratické rovnici (13) lze dospět též přímo užitím analogie soustavy rovnic (12) s Viětovými vzorci pro kvadratickou rovnici v normovaném tvaru podle věty 2.

Příklad řešení symetrické soustavy algebraických rovnic tvaru (12)

V oboru komplexních čísel řešte symetrické soustavy rovnic

$$\begin{array}{ll} \text{a) } x + y = 3, & \text{b) } x + y = 2, \\ xy = 2, & xy = 10. \end{array}$$

Řešení. MPE eliminací neznámé y dostáváme:

- a) $x^2 - 3x + 2 = 0, D = 1, x_1 = 2, x_2 = 1, y_1 = 1, y_2 = 2$; daná soustava rovnic má 2 řešení $(2; 1), (1; 2)$,
b) $x^2 - 2x + 10 = 0, D = -36, x_1 = 1 + 3i, x_2 = 1 - 3i, y_1 = 1 - 3i, y_2 = 1 + 3i$; daná soustava rovnic má 2 řešení $(1 + 3i; 1 - 3i), (1 - 3i; 1 + 3i)$.

Obecný případ symetrické soustavy algebraických rovnic (11), řešení metodou substituce

Pro obecné (složitější) symetrické soustavy algebraických rovnic (11) je možné k řešení použít metodu postupných eliminací neznámých (MPE). Avšak to není vždy snadné a hlavně algebraické rovnice získané eliminací neznámých může být vysokého stupně. Proto je zpravidla výhodnější

využít symetrii soustavy rovnic a k jejímu řešení použít specifickou substituční metodu, která je založena na substituci symetrických polynomů elementárními symetrickými polynomy podle věty 5.

Postup řešení symetrické soustavy algebraických rovnic (11) metodou substituce spočívá ve 3 krocích.

1. krok: Symetrické polynomy $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ v soustavě rovnic (11) se užitím substituce (8) neboli

$$x + y = u, \quad xy = v \quad (14)$$

upraví na ekvivalentní tvary $g_1(u, v)$, $g_2(u, v)$.

2. krok: Získaná ekvivalentní soustava algebraických rovnic (obecně nesymetrických)

$$\begin{aligned} g_1(u, v) &= 0, \\ g_2(u, v) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

se řeší obvykle metodou postupných eliminací neznámých (MPE) a její řešení se označí u_i , v_i .

3. krok: Zpětným užitím substitucí (14) pro $u = u_i$, $v = v_i$ se dostávají výstupní soustavy rovnic pro neznámé x , y

$$x + y = u_i, \quad xy = v_i. \quad (16)$$

To jsou soustavy rovnic tvaru (12), ale nyní obecně je $u_i, v_i \in \mathbb{C}$. Eliminací neznámé y se z ní obdobně získává pro neznámou x kvadratická rovnice

$$x^2 - u_i x + v_i = 0. \quad (17)$$

Její kořeny x_j a příslušná y_j jsou (vzhledem k ekvivalenci rovnic) též kořeny dané soustavy rovnic (11).

Poznámka 3. Kvadratickou rovnici (17) lze alternativně získat přímo užitím věty 2 (viz poznámku 2).

Příklady řešení symetrických soustav algebraických rovnic tvaru (11) užitím metody substituce

V oboru komplexních čísel řešte metodou substituce následující symetrické soustavy algebraických rovnic.

Příklad 1

$$\begin{aligned} x + xy + y &= 11, \\ x^2 y + xy^2 &= 30. \end{aligned}$$

Řešení (metodou substituce). Danou soustavu rovnic upravíme na tvar

$$\begin{aligned}x + y + xy &= 11, \\(x + y)xy &= 30.\end{aligned}$$

Užitím substitucí $x + y = u$, $xy = v$ získáváme pro neznámé u, v soustavu rovnic

$$u + v = 11, \quad uv = 30,$$

kterou řešíme postupem MPE. Z 1. rovnice $v = 11 - u$ a po dosazení do 2. rovnice se v ní eliminuje neznámá v . Pro neznámou u dostáváme kvadratickou rovnici $u^2 - 11u + 30 = 0$, která má diskriminant $D = 1$ a kořeny $u_1 = 6$, $u_2 = 5$. K nim přísluší $v_1 = 11 - u_1 = 5$, $v_2 = 11 - u_2 = 6$. Z těchto hodnot získáme zpětnou substitucí pro neznámé x, y dvě výstupní soustavy rovnic

$$\begin{aligned}x + y &= 6, & x + y &= 5, \\xy &= 5, & xy &= 6.\end{aligned}$$

Řešíme je opět užitím MPE.

Pro 1. soustavu rovnic $y = 6 - x$, $x^2 - 6x + 5 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $y_1 = 1$, $y_2 = 5$.

Pro 2. soustavu rovnic $y = 5 - x$, $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x_3 = 3$, $x_4 = 2$, $y_3 = 2$, $y_4 = 3$.

Daná soustava rovnic má tedy 4 řešení: $(5; 1)$, $(1; 5)$, $(3; 2)$, $(2; 3)$.

Na porovnání uvedme stručně pro danou soustavu rovnic z příkladu 1 její *alternativní řešení přímým užitím* MPE. Z 1. rovnice dané soustavy vyjádříme $y = (11 - x)/(x + 1)$ pro $x \neq -1$ a dosazením do 2. rovnice po rozsáhlých úpravách dostáváme pro neznámou x algebraickou rovnici 4. stupně (kvartickou rovnici) $x^4 - 11x^3 + 4x^2 - 61x + 30 = 0$.

Příklad 2

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 4, \\x^3 + y^3 &= 8.\end{aligned}$$

Řešení. Užitím substituce $x + y = u$, $xy = v$ je $x^2 + y^2 = u^2 - 2v$, $x^3 + y^3 = u^3 - 3uv$ (tab. 1). Z dané soustavy rovnic pro x, y tak dostáváme ekvivalentní soustavu rovnic pro neznámé u, v

$$\begin{aligned}u^2 - 2v &= 4, \\u^3 - 3uv &= 8,\end{aligned}$$

kterou řešíme MPE. Z 1. rovnice vyjádříme $v = \frac{1}{2}(u^2 - 4)$ a po dosazení do 2. rovnice dostáváme pro u kubickou rovnici $u^3 - 12u + 16 = 0$. Její kořeny hledáme mezi děliteli absolutního členu 16. Zjišťujeme, že má kořeny $u_1 = 2$ (dvojnásobný kořen) a $u_2 = -4$. Jim přísluší $v_1 = 0$ a $v_2 = 6$. Zpětnou substitucí získáme 2 výstupní soustavy rovnic pro neznámé x, y :

$$\begin{aligned}x + y &= 2, & x + y &= -4, \\xy &= 0, & xy &= 6.\end{aligned}$$

Řešíme je MPE.

1. soustava rovnic má řešení $x_1 = 2, y_1 = 0$ a $x_2 = 0, y_2 = 2$.
2. soustava rovnic má řešení $x_3 = -2 + \sqrt{2}i, y_3 = -2 - \sqrt{2}i$ a $x_4 = -2 - \sqrt{2}i, y_4 = -2 + \sqrt{2}i$.

Daná soustava má tedy 4 řešení: $(2; 0), (0; 2), (-2 + \sqrt{2}i; -2 - \sqrt{2}i), (-2 - \sqrt{2}i; -2 + \sqrt{2}i)$.

Na porovnání uveďme opět pro danou soustavu rovnic z příkladu 2 její *alternativní řešení přímým užitím* MPE. Z 1. rovnice dané soustavy vyjádříme $y^2 = 4 - x^2$ a z její 2. rovnice $y^3 = 8 - x^3$. Odtud je $y^6 = (4 - x^2)^3$ a $y^6 = (8 - x^3)^2$, takže $(4 - x^2)^3 = (8 - x^3)^2$ neboli po úpravách dostáváme pro neznámou x algebraickou rovnici 6. stupně $x^6 - 6x^4 + 8x^3 + 24x^2 = 0$. Protože $x^6 - 6x^4 + 8x^3 + 24x^2 = x^2(x^4 - 6x^2 + 8x + 24)$, je tedy $x = 0$ nebo $x^4 - 6x^2 + 8x + 24 = 0$ (kvartická rovnice pro x).

Poznámka 4. V příkladech 1 a 2 přímé použití MPE k řešení dané soustavy rovnic vedlo na řešení algebraické rovnice vyššího stupně než při řešení dané soustavy užitím metody substituce. Obdobně o výhodnosti použití této metody se lze přesvědčit i v dalších příkladech.

Příklad 3

$$\begin{aligned}x + xy + y &= 5, \\x^3 + x^3y^3 + y^3 &= 17.\end{aligned}$$

Řešení. Danou soustavu rovnic upravíme na tvar

$$x + y + xy = 5, \quad x^3 + y^3 + x^3y^3 = 17.$$

Substituce: $x + y = u, xy = v, x^3 + y^3 = u^3 - 3uv$ (tab. 1). Získaná soustava rovnic pro neznámé u, v :

$$u + v = 5, \quad u^3 - 3uv + v^3 = 17.$$

Její řešení MPE: $v = 5 - u$ a po eliminaci v z 2. rovnice $u^2 - 5u + 6 = 0$. Tato kvadratická rovnice s diskriminantem $D = 1$ má kořeny $u_1 = 3$, $u_2 = 2$, jimž přísluší $v_1 = 2$, $v_2 = 3$. Zpětnou substitucí dostáváme dvě výstupní soustavy rovnic pro neznámé x , y :

$$\begin{array}{ll} x + y = 3, & x + y = 2, \\ xy = 2, & xy = 3. \end{array}$$

Jejich řešení MPE:

1. soustava má řešení $x_1 = 1$, $y_1 = 2$ a $x_2 = 2$, $y_2 = 1$.
2. soustava má řešení $x_3 = 1 + \sqrt{2}i$, $y_3 = 1 - \sqrt{2}i$ a $x_4 = 1 - \sqrt{2}i$, $y_4 = 1 + \sqrt{2}i$.

Daná soustava rovnic má tedy 4 řešení: $(2; 1)$, $(1; 2)$, $(1 + \sqrt{2}i; 1 - \sqrt{2}i)$, $(1 - \sqrt{2}i; 1 + \sqrt{2}i)$.

Příklad 4

$$\begin{array}{l} x + y = 4, \\ x^4 + y^4 = 82. \end{array}$$

Řešení. Substitute: $x + y = u$, $xy = v$, $x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2$ (tab. 1). Získaná ekvivalentní soustava rovnic pro neznámé u , v :

$$u = 4, \quad u^4 - 4u^2v + 2v^2 = 82.$$

Odtud plyne pro neznámou v kvadratická rovnice $v^2 - 32v + 87 = 0$, která má diskriminant $D = 676$ a kořeny $v_1 = 3$, $v_2 = 29$, jimž odpovídají $u_1 = u_2 = 4$.

Zpětnou substitucí dostáváme dvě výstupní soustavy rovnic pro neznámé x , y :

$$\begin{array}{ll} x + y = 4, & x + y = 4, \\ xy = 3, & xy = 29. \end{array}$$

Jejich řešení MPE:

1. soustava má řešení $x_1 = 3$, $y_1 = 1$ a $x_2 = 1$, $y_2 = 3$.
 2. soustava má řešení $x_3 = 2 + 5i$, $y_3 = 2 - 5i$ a $x_4 = 2 - 5i$, $y_4 = 2 + 5i$.
- Daná soustava rovnic má tedy 4 řešení: $(3; 1)$, $(1; 3)$, $(2 + 5i; 2 - 5i)$, $(2 - 5i; 2 + 5i)$.

Příklad 5

$$\begin{array}{l} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91. \end{array}$$

Řešení. Substitute: $x + y = u$, $xy = v$, $x^2 + y^2 = u^2 - 2v$, $x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2$ (tab. 1). Ekvivalentní soustava rovnic pro neznámé u , v :

$$u^2 - 3v = 7, \quad u^4 - 4u^2v + 3v^2 = 91.$$

Užitím MPE obdobným postupem jako v předchozím příkladu se upraví do tvaru $v = 3$, $u^2 = 16$ s řešením $u_1 = 4$, $u_2 = -4$, $v_1 = v_2 = 3$. Příslušné dvě výstupní soustavy rovnic pro neznámé x , y mají řešení $x_1 = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $y_2 = 3$, $x_3 = -1$, $y_3 = -3$, $x_4 = -3$, $y_4 = -1$.

Daná soustava rovnic má tedy 4 řešení: $(3; 1)$, $(1; 3)$, $(-1; -3)$, $(-3; -1)$.

Příklad 6

Řešte v oboru komplexních čísel soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y &= a, \\ x^7 + y^7 &= a^7, \end{aligned}$$

kde a je nenulový reálný parametr.

Řešení. Substitute: $x + y = u$, $xy = v$, $x^7 + y^7 = u^7 - 7u^5v + 14u^3v^2 - 7uv^3$ (viz tab. 1). Získanou soustavu rovnic pro neznámé u , v řešíme MPE:

$$u = a, \quad 7av(v^2 - 2va^2 + a^4) = 7av(v - a^2)^2 = 0.$$

Jejím řešením (pro $a \neq 0$) jsou $u_1 = a$, $v_1 = 0$ a $u_2 = a$, $v_2 = a^2$.

Řešením příslušných výstupních soustav rovnic pro neznámé x , y dostaneme $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = a$, $x_3 = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{3}i)$, $y_3 = \frac{a}{2}(1 - \sqrt{3}i)$, $x_4 = \frac{a}{2}(1 - \sqrt{3}i)$, $y_4 = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{3}i)$.

Daná soustava rovnic má 4 řešení: $(a; 0)$, $(0; a)$, $(\frac{a}{2}(1 + \sqrt{3}i); \frac{a}{2}(1 - \sqrt{3}i))$, $(\frac{a}{2}(1 - \sqrt{3}i); \frac{a}{2}(1 + \sqrt{3}i))$.

3. Symetrické polynomy tří proměnných

Polynomem $f(x, y, z)$ *proměnných* x , y , z *s reálnými koeficienty* se rozumí součet algebraických výrazů tvaru $ax^m y^n z^k$, kde $a \in \mathbb{R}$, $m, n, k \in \mathbb{N}_0$. Oborem proměnných x , y , z je obor komplexních čísel $\mathbb{C}$.

Speciálně: Polynom $f(x, y, z)$ se nazývá *symetrický polynom proměnných* x , y , z jestliže se nezmění při jakékoliv záměně pořadí proměnných x , y , z , tj. platí-li

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(x, z, y) = f(y, x, z) = f(y, z, x) = \\ &= f(z, x, y) = f(z, y, x) \quad \text{pro všechna } x, y, z \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (18)$$

Poznámka 5. Pro zjištění, je-li daný polynom $f(x, y, z)$ symetrický, stačí ověření tří z rovností (18), vyjadřujících záměnu kterýchkoliv dvou proměnných, tj. $f(x, y, y) = f(x, z, y)$, $f(x, y, z) = f(z, y, x)$, $f(x, y, z) = f(y, x, z)$.

Příklad symetrického a nesymetrického polynomu 3 proměnných

Polynom $x^2yz + xy^2z + xyz^2$ je symetrický, kdežto polynom $x^2yz + xy^2z$ není symetrický.

Trojice symetrických polynomů

$$e_1(x, y, z) = x + y + z, \quad e_2(x, y, z) = xy + xz + yz, \quad e_3(x, y, z) = xyz \quad (19)$$

jsou nazývány *elementární symetrické polynomy proměnných x, y, z* . Užívá se též jejich stručné označení

$$u = e_1(x, y, z), \quad v = e_2(x, y, z), \quad w = e_3(x, y, z) \quad (20)$$

neboli substitute

$$u = x + y + z, \quad v = xy + xz + yz, \quad w = xyz. \quad (21)$$

Poznámka 6. Elementární symetrické polynomy tří proměnných se vyskytují v modifikované podobě ve Viětových vztazích pro kubickou rovnici (viz větu 4).

Volba elementárních symetrických polynomů (19) není náhodná, ale taková, že platí následující významná věta.

Věta 7 (základní věta o symetrických polynomech tří proměnných)

Každý symetrický polynom $f(x, y, z)$ proměnných x, y, z lze jednoznačně vyjádřit jako polynom $g(u, v, w)$ (obecně nesymetrický) proměnných u, v, w daných vztahy (21), přičemž platí

$$f(x, y, z) = g(u, v, w). \quad (22)$$

Příklady úpravy symetrického polynomu $f(x, y, z)$ na tvar $g(u, v, w)$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = u^2 - 2v, \\ x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 &= \\ &= (xy + xz + yz)(x + y + z) - 3xyz = \\ &= (x + y + z)(xy + xz + yz) - 3xyz = uv - 3w, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= (x + y + z)^3 - 3(x^2y + xy^2 + x^2z + y^2z + yz^2 + z^2x) - \\ &\quad - 6xyz = u^3 - 3(uv - 3w) - 6w = u^3 - 3uv + 3w. \end{aligned}$$

Obdobně jako v předchozích příkladech bychom mohli provést úpravy symetrických polynomů tvaru $x^n + y^n + z^n$ s proměnnými x, y, z na polynomy s proměnnými u, v, w i pro $n = 4, 5, \dots$ Ovšem opět značně jednodušší je použití rekurentního vyjádření podle následující věty.

Věta 8 (o rekurentním vyjádření posloupnosti mocninných součtů)

Posloupnost mocninných součtů $s_n = x^n + y^n + z^n$ ($x, y, z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$) lze vyjádřit ve tvaru polynomů proměnných u, v, w rekurentním zadáním (rekurentním vzorcem)

$$\begin{aligned} s_0 &= 3, & s_1 &= u, & s_2 &= u^2 - 2v, \\ s_n &= us_{n-1} - vs_{n-2} + ws_{n-3} \quad \text{pro } n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 3. \end{aligned} \quad (23)$$

Důkaz. $s_0 = x^0 + y^0 + z^0 = 3$, $s_1 = x^1 + y^1 + z^1 = u$, $s_2 = u^2 - 2v$ a pro $n \geq 3$ použitím zpětné substituce proměnných u, v, w na x, y, z dostáváme

$$\begin{aligned} us_{n-1} - vs_{n-2} &= (x + y + z)(x^{n-1} + y^{n-1} + z^{n-1}) - \\ &\quad - (xy + xz + yz)(x^{n-2} + y^{n-2} + z^{n-2}) = \\ &= x^n + y^n + z^n - xyz(x^{n-3} + y^{n-3} + z^{n-3}) = s_n - ws_{n-3}, \end{aligned}$$

odkud plyne platnost rekurentního vzorce (23).

Užitím věty 8 lze postupně získat vyjádření mocninných součtů s_n uvedená ve 2. sloupci tabulky 2.

Tabulka 2

s_n v proměnných x, y, z	s_n v proměnných u, v, w
$s_1 = x + y + z$	$s_1 = u$
$s_2 = x^2 + y^2 + z^2$	$s_2 = u^2 - 2v$
$s_3 = x^3 + y^3 + z^3$	$s_3 = u^3 - 3uv + 3w$
$s_4 = x^4 + y^4 + z^4$	$s_4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2 + 4uw$
$s_5 = x^5 + y^5 + z^5$	$s_5 = u^5 - 5u^3v + 5uv^2 + 5u^2w - 5vw$
$\vdots$	$\vdots$

4. Symetrické soustavy algebraických rovnic o třech neznámých

Symetrická soustava algebraických rovnic s neznámými x, y, z v oboru $\mathbb{C}$ je soustava rovnic, kterou lze zapsat ve tvaru

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0, \quad f_3(x, y, z) = 0, \quad (24)$$

kde $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, $f_3(x, y, z)$ jsou symetrické polynomy proměnných x, y, z . Z důvodu symetrie pro ni platí: Jestliže je uspořádaná trojice (c_1, c_2, c_3) čísel $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ řešením soustavy rovnic (24), pak také každá permutace prvků c_1, c_2, c_3 je řešením této soustavy rovnic.

Speciální případ symetrické soustavy algebraických rovnic (24)

Zajímavým a významným speciálním případem soustavy rovnic (24) je

$$x + y + z = a_1, \quad xy + xz + yz = a_2, \quad xyz = a_3, \quad (25)$$

kde levými stranami rovnic jsou elementární symetrické polynomy proměnných x, y, z a pravými stranami jsou konstanty $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

Řešení soustavy rovnic (25) MPE. Neznámé y, z eliminujeme tak, že vyjádříme z 1. rovnice $y + z = a_1 - x$ a z 3. rovnice $yz = \frac{a_3}{x}$ a dosadíme do 2. rovnice, anebo 1. rovnici vynásobíme x^2 , 2. rovnice vynásobíme x , za xyz dosadíme ze 3. rovnice a získané rovnice $x^3 + x^2y + x^2z = a_1x^2$, $x^2y + x^2z + a_3 = a_2x$ odečteme. Dostaneme tak pro neznámou x kubickou rovnici

$$x^3 - a_1x^2 + a_2x - a_3 = 0. \quad (26)$$

Označíme-li její kořeny x_1, x_2, x_3 , pak řešeními (x_i, y_i, z_i) dané soustavy rovnic (25) je všech 6 permutací prvků x_1, x_2, x_3 .

Poznámka 7. Ke kubické rovnici (26) lze dospět též přímo užitím analogie soustavy rovnic (25) s Viětovými vzorci pro kubickou rovnici v normovaném tvaru podle věty 4.

Příklad řešení symetrické soustavy algebraických rovnic tvaru (25)

V oboru komplexních čísel řešte symetrickou soustavu rovnic

$$x + y + z = 9, \quad xy + xz + yz = 26, \quad xyz = 24.$$

Řešení. Užitím MPE eliminací neznámých y, z dostáváme pro neznámou x kubickou rovnici $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$, která má kořeny $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ (dělitelé 24). Daná symetrická soustava rovnic má proto 6 řešení: $(2; 3; 4)$ a všechny jeho permutace.

Obecný případ symetrické soustavy algebraických rovnic (24), řešení metodou substituce

Pro obecné (složitější) symetrické soustavy algebraických rovnic (24) je možné k řešení použít metodu postupných eliminací neznámých (MPE),

viz článek [5]. Avšak zpravidla je výhodnější na základě její symetrie řešit ji metodou substituce, jež je založena na substituci symetrických polynomů elementárními symetrickými polynomy podle věty 7.

Postup řešení symetrické soustavy algebraických rovnic (24) metodou substituce lze opět rozdělit do 3 kroků.

1. krok: Symetrické polynomy $f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, $f_3(x, y, z)$ v soustavě rovnic (24) se užitím substitucí (21) neboli

$$x + y + z = u, \quad xy + xz + yz = v, \quad xyz = w \quad (27)$$

upraví na ekvivalentní tvary $g_1(u, v, w)$, $g_2(u, v, w)$, $g_3(u, v, w)$.

2. krok: Získaná ekvivalentní soustava algebraických rovnic (obecně nesymetrických)

$$g_1(u, v, w) = 0, \quad g_2(u, v, w) = 0, \quad g_3(u, v, w) = 0 \quad (28)$$

se obvykle řeší metodou postupných eliminací neznámých (MPE) a její kořeny se značí u_i , v_i , w_i .

3. krok: Zpětným užitím substitucí (27) pro $u = u_i$, $v = v_i$, $w = w_i$, $i = 1, 2, 3$, získáme výstupní soustavy rovnic pro neznámé x , y , z

$$x + y + z = x_i, \quad xy + xz + yz = v_i, \quad xyz = w_i. \quad (29)$$

To jsou soustavy rovnic tvaru (25), ovšem nyní obecně je $u_i, v_i, w_i \in \mathbb{C}$. Eliminací neznámých y , z se z ní obdobně získává pro neznámou x kubická rovnice

$$x^3 - u_i x^2 + v_i x - w_i = 0. \quad (30)$$

Její kořeny x_j a příslušná y_j , z_j jsou (vzhledem k ekvivalenci rovnic) též kořeny dané soustavy rovnic (24).

Poznámka 8. Kubickou rovnicí (30) lze alternativně získat přímo užitím věty 4 (viz poznámku 7).

Příklady řešení symetrických soustav algebraických rovnic tvaru (24) užitím metody substituce

Příklad 7

V oboru komplexních čísel řešte metodou substituce soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 6, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= 8. \end{aligned}$$

Řešení. Substitute: $x+y+z = u$, $xy+xz+yz = v$, $xyz = w$, $x^2+y^2+z^2 = u^2 - 2v$, $x^3+y^3+z^3 = u^3 - 3uv + 3w$ (tab. 2). Ekvivalentní soustava rovnic pro neznámé u , v , w :

$$u = 2, \quad u^2 - 2v = 6, \quad u^3 - 3uv + 3w = 8.$$

Řešení MPE: Eliminací u z 2. rovnice $4 - 2v = 6 \Rightarrow v = -1$ a z 1. rovnice pak $3w = -6 \Rightarrow w = -2$. Zpětnou substitucí dostáváme pro x , y , z výstupní soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2, \\ xy + xz + yz &= -1, \\ xyz &= -2. \end{aligned}$$

Užitím MPE eliminací neznámých y , z odtud plyne pro neznámou x kubická rovnice $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$, přičemž

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 2)(x^2 - 1),$$

takže její kořeny jsou $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Daná soustava rovnic má proto 6 řešení, jimiž jsou všechny permutace čísel 2, 1, -1: (2; 1; -1), ...

Poznámka 9. Alternativní přímé řešení soustavy rovnic z příkladu 7 užitím MPE by bylo značně složitější, viz [5, s. 93–95].

Příklad 8

Řešte v oboru reálných čísel soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= a, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= a^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 &= a^3, \end{aligned}$$

kde a je nenulový reálný parametr.

Řešení metodou substitute této soustavy rovnic je zobecněním postupu řešení užitého v předchozím příkladu 7.

Tytéž substitute převádějí danou soustavu rovnic pro neznámé x , y , z na soustavu rovnic pro u , v , w : $u = a$, $v = 0$, $w = 0$, jíž odpovídá výstupní soustava rovnic

$$\begin{aligned} x + y + z &= a, \\ xy + xz + yz &= 0, \\ xyz &= 0. \end{aligned}$$

Její řešení jsou $x_1 = a$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$; $x_2 = 0$, $y_2 = a$, $z_2 = 0$; $x_3 = 0$, $y_3 = 0$, $z_3 = a$.

Daná soustava rovnic má tedy řešení: $(a; 0; 0)$, $(0; a; 0)$, $(0; 0; a)$.

V následujícím příkladu ještě ukážeme, jak lze postupovat při řešení symetrických soustav algebraických rovnic metodou substituce, jestliže soustava rovnic není tvaru (24), protože každá rovnice neobsahuje všechny tři neznámé x , y , z , ale jen dvě z nich.

Příklad 9

Užitím metody substituce řešte soustavu rovnic

$$x^2 + xy + y^2 = 37,$$

$$x^2 + xz + z^2 = 28,$$

$$y^2 + yz + z^2 = 19.$$

Řešení. Pro použití metody substituce k řešení dané soustavy rovnic je nutné ji upravit na ekvivalentní tvar, kde rovnice budou obsahovat všechny tři neznámé x , y , z . Jednu z takových rovnic lze získat sečtením všech tří rovnic dané soustavy. Získat další potřebné rovnice je ovšem podstatně obtížnější. Nejvýhodnější je vzít na pomoc metodu faktorizace: V dané soustavě rovnic odečteme od 1. rovnice 2. rovnici a od 2. rovnice 3. rovnici. Dostáváme soustavu rovnic, kterou lze vyjádřit v součinném tvaru

$$(y - z)(x + y + z) = 9,$$

$$(x - y)(x + y + z) = 9.$$

Odtud plyne $x + y + z \neq 0$ a $y - z = x - y$, odkud $2y = x + z$, a tedy $3y = x + y + z$, takže po substituci $x + y + z = u$ dostáváme, že $y = \frac{u}{3}$. Dále pak

$$x - y = \frac{9}{u} \Rightarrow x = \frac{u}{3} + \frac{9}{u} = \frac{u^2 + 27}{3u},$$

$$y - z = \frac{9}{u} \Rightarrow z = \frac{u}{3} - \frac{9}{u} = \frac{u^2 - 27}{3u}.$$

Po dosazení těchto vyjádření x , y , z do kterékoliv rovnice dané soustavy a úpravě vzniklé rovnice pro neznámou u dostáváme bikvadratickou rovnici $u^4 - 84u^2 + 243 = 0$. Užitím substituce $t = u^2$ přechází v kvadratickou rovnici s kořeny $t_1 = 81$, $t_2 = 3$. Odtud zpětnou substitucí je $u_{1,2}^2 = 81$, $u_{3,4}^2 = 3$, a tedy $u_{1,2} = \pm 9$, $u_{3,4} = \pm\sqrt{3}$. Podle výše odvozených vztahů

pro x, y, z jim přísluší řešení $x_{1,2} = \pm 4$, $y_{1,2} = \pm 3$, $z_{1,2} = \pm 2$, $x_{3,4} = \pm \frac{10\sqrt{3}}{3}$, $y_{3,4} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, $z_{3,4} = \mp \frac{8\sqrt{3}}{3}$.

Daná soustava má tedy 4 řešení: $(4; 3; 2)$, $(-4; -3; -2)$, $(\frac{10\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{8\sqrt{3}}{3})$, $(-\frac{10\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{8\sqrt{3}}{3})$.

Poznámka 10. Pozoruhodné jistě je, že každý ze symetrických polynomů rovnic dané soustavy v předchozím příkladu lze vyjádřit pomocí jediného elementárního polynomu $u = x + y + z$.

Závěr

Ukázali jsme, jak užitím symetrických polynomů dvou či tří proměnných a jejich vyjádřením elementárními symetrickými polynomy lze výhodně řešit symetrické soustavy algebraických rovnic se dvěma a třemi neznámými metodou substituce. K seznámení s dalšími algebraickými aplikacemi teorie symetrických polynomů a s jejím zobecněním pro $n \in \mathbb{N}$ proměnných je vhodná literatura [1], [2].

Literatura

- [1] *Boltjanskij, V. G., Vilenkin, N. J.*: Simetrija v algebre. Izdatel'stvo Nauka, Moskva, 1967.
- [2] *Kufner, A.*: Symetrické funkce. Škola mladých matematiků, svazek 52. Nakladatelství Mladá fronta, Praha, 1982.
- [3] *Lidskij, V. B. a kol.*: Úlohy z elementární matematiky. SPN, Praha, 1965. (Překlad z ruského originálu.)
- [4] *Polák, J.*: Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. I. část Konkrétní didaktika matematiky. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2014.
- [5] *Polák, J.*: Řešení soustav polynomiálních rovnic. Matematika–fyzika–informatika, roč. 31 (2022), č. 2, s. 81–100.
- [6] *Svätokrižny, P., Dlouhý, Z., Hruša, K.*: Aritmetika a algebra pre pedagogické fakulty. II. diel Algebra. SPN, Bratislava, 1978.
- [7] *Švrček, J.*: Systems of equations and methods of their solving. Vydavatelství UP, Olomouc, 2019.
- [8] *Tumanov, S. I.*: Poiski rešenija zadači. Izdatel'stvo Prosveščeniye, Moskva, 1969.
- [9] *Vilenkin, N. J. a kol.*: Algebra. Učebnoje posobie dlja srednich škol s matematičeskoj specializacij. Izdatel'stvo Prosveščeniye, Moskva, 1972.

Životní jubileum Josefa Poláka

REDAKCE ČASOPISU MATEMATIKA–FYZIKA–INFORMATIKA

V září letošního roku se dožívá významného životního jubilea doc. RNDr. Josef Polák, CSc., přední český matematik a didaktik, autor řady matematických příspěvků uveřejněných v našem časopise.

Josef Polák se narodil 19. září 1936 v Praze. Po maturitě na tehdejší jedenáctileté střední škole (JŠŠ) v Praze 3 (na Žižkově), zahájil v roce 1954 studium učitelství oborů matematika a fyzika na Fakultě přírodních věd Vysoké školy pedagogické v Praze. Po absolvování studia v roce 1958 nastoupil jako středoškolský učitel matematiky a fyziky na JŠŠ v Horažďovicích. Od roku 1960 pak působil jako vysokoškolský učitel na Katedře matematiky Vysoké školy strojní a elektrotechnické (VŠSE) a poté na ZČU v Plzni, postupně jako asistent, odborný asistent a od roku 1990 až do svých 75 let jako docent.



Během své učitelské praxe na ZČU v Plzni zastával řadu odborných i akademických funkcí, mj. byl dlouholetým předsedou tehdejšího Krajského výboru MO a členem Ústředního výboru MO.

Jeho vědecko-výzkumné aktivity byly zaměřeny především na aplikace matematiky, zejména v oblasti teorie elektromagnetického pole – ve spolupráci s k.p. Škoda Plzeň.

Josef Polák je autorem zhruba 100 odborných a populárně-naučných publikací, z nichž mezi nejznámější patří knižní publikace „Přehled středoškolské matematiky“ (vyšla v nakladatelství Prometheus, v 10 vydáních). Ta se stala vyhledávaným studijním materiálem nejen pro naše středoškoly, ale též pro učitele a všechny zájemce o středoškolskou matematiku. Velmi cenným didaktickým materiálem se stala také jeho třídílná knižní publikace „Didaktika matematiky. Jak učit matematiku zajímavě a užitečně, I.–III. část“ (nakladatelství Fraus), která je zaměřena především na výuku matematiky na středních školách.

Redakce časopisu Matematika–fyzika–informatika přeje jubilantovi u příležitosti jeho **90. narozenin** především pevné zdraví, dostatek energie a dalších tvůrčích sil.

Jak dokázat, že čtyři body leží na kružnici

JAROSLAV ŠVRČEK – LENKA JUKLOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Cílem článku je popis a prezentace tří základních metod (postupů), pomocí nichž lze prostředky syntetické geometrie (bez použití analytické geometrie) dokázat, že dané 4 body leží na téže kružnici (jsou koncyklické). S tímto úkolem se žáci středních škol setkávají poměrně často – především při řešení tzv. nadstandardních úloh školské planimetrie – zejména pak při řešení úloh MO a dalších matematických soutěží pro středoškoláky.

Náš příspěvek vznikl na základě učitelských i žákovských podnětů, kdy běžní středoškoláci nemají k dispozici potřebnou metodiku, jak řešit podobné úlohy uvedenými prostředky.

Uvažujme v rovině konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Chceme-li ověřit, zda tento čtyřúhelník je *tětivový*, tj. že jeho vrcholy leží na téže kružnici, lze zpravidla využít některý ze tří níže uvedených postupů:

1. Užití vlastností obvodových úhlů.
2. Užití kritéria pro tětivový čtyřúhelník (a jeho ekvivalentní verze).
3. Užití mocnosti bodu ke kružnici.

Jednotlivé postupy nejprve popíšeme a poté nabídneme čtenářům pětici úloh, při jejichž řešení využijeme výše uvedené postupy.

1. Užití vlastností obvodových úhlů

Zvolme některou ze stran uvažovaného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, např. AB . Dokážeme-li shodnost úhlů ACB a ADB , lze oba úhly považovat za *obvodové* pro tětivu AB kružnice, na níž tedy leží všechny čtyři vrcholy uvažovaného čtyřúhelníku $ABCD$ (a také naopak).

Poznamenejme ještě, že oba vrcholy C a D čtyřúhelníku $ABCD$ leží v téže polorovině vyřazené přímkou AB .

2. Užití kritéria pro tětivový čtyřúhelník (a ekvivalentní verze)

Zvolme jednu z úhlopříček konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, např. BD . Pokud ověříme, že pro velikosti vnitřních úhlů při vrcholech A , C , které

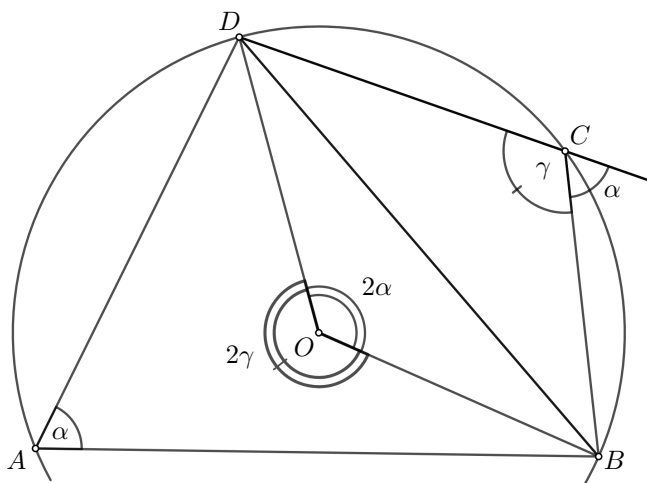
leží v opačných polorovinách vyřatých přímkou BD , platí při obvyklém označení vnitřních úhlů a jejich velikostí $\alpha + \gamma = 180^\circ$, pak čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, což lze považovat za jednu část (jednu z implikací) známého kriteriálního vztahu pro tětivový čtyřúhelník, s nímž se žáci seznámují při výuce planimetrie na středních školách. Stručným shrnutím tohoto odstavce je

Věta 1

Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, právě když pro velikosti jeho vnitřních úhlů platí

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ. \quad (1)$$

Nástin důkazu. Při důkazu nutné podmínky vyjdeme ze vztahu mezi obvodovým a středovým úhlem. Platí $2\alpha + 2\gamma = 360^\circ$, tedy $\alpha + \gamma = 180^\circ$ (obr. 1).



Obr. 1

K důkazu skutečnosti, že (1) je také postačující podmínkou, lze pak vhodně kombinovat důkaz sporem s již dokázanou podmínkou nutnou.

Za pozornost však bezesporu stojí další praktické tvrzení, které je ekvivalentní s větou 1, resp. s rovností (1).

Věta 2

Konvexní čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový, právě když některý jeho vnitřní úhel je shodný s vnějším úhlem u protějšího vrcholu.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti předpokládejme nejprve, že např. velikost α vnitřního úhlu při vrcholu A konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ je rovna velikosti vnějšího úhlu při vrcholu C . Nechť γ je velikost vnitřního úhlu při vrcholu C . Pak platí

$$\alpha + \gamma = \alpha + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ,$$

což je ale (postačující) podmínka (1), která garantuje skutečnost, že čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový (obr. 1).

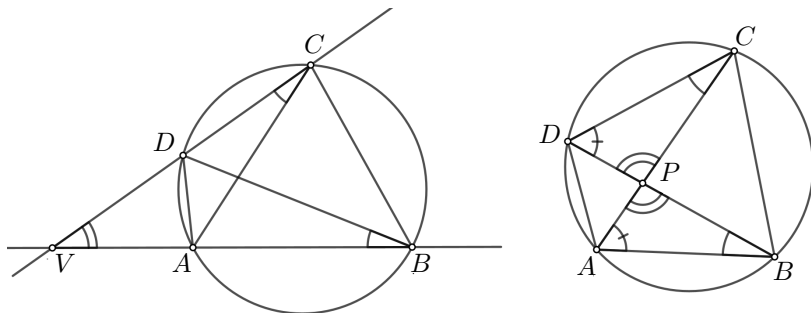
Obrácením postupu snadno ukážeme, že pokud $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník, je vnitřní úhel, např. při jeho vrcholu A , shodný s vnějším úhlem u protějšího vrcholu C .

3. Užití mocnosti bodu ke kružnici.

Existuje-li v uvažovaném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ aspoň jedna dvojice protilehlých stran, které nejsou rovnoběžné, protínají se přímkami, na nichž tyto strany leží, ve vnějším bodě V čtyřúhelníku $ABCD$. Předpokládejme, že AB a CD jsou dvě různoběžné strany a V je průsečíkem přímek AB a CD , viz obr. 2 vlevo. Nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby vrcholy daného čtyřúhelníku ležely na téže kružnici, je v takovém případě splnění rovnosti

$$|VA| \cdot |VB| = |VC| \cdot |VD|, \quad (2)$$

viz obr. 2 vlevo, která charakterizuje tzv. *mocnost vnějšího bodu V ke kružnici* (opsané čtyřúhelníku $ABCD$), viz např. [1].



Obr. 2

Lze však pracovat také s průsečíkem P úhlopříček AC a BD uvažovaného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, kde P je vnitřním bodem konvex-

ního čtyřúhelníku $ABCD$. Analogický kritériální vztah (rovnost) garantující skutečnost, že $ABCD$ je tětivový čtyřúhelník, má však nyní tvar

$$|PA| \cdot |PC| = |PB| \cdot |PD|, \quad (3)$$

viz obr. 2 vpravo.

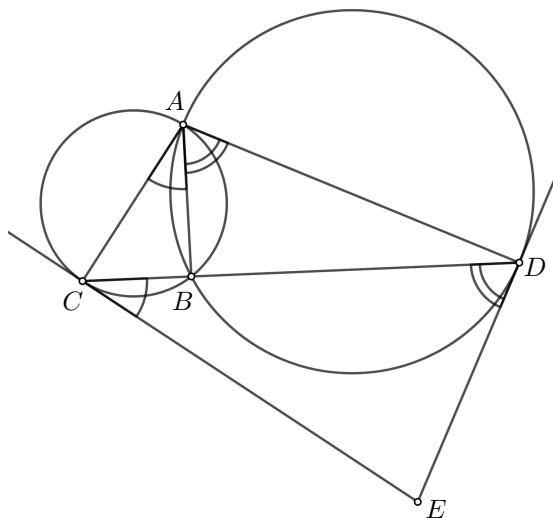
Poznámka. Při důkazech rovností (2) a (3) (jako nutných podmínek) vystačíme s podobnostmi dvojice trojúhelníků VAC a VDB , popř. PAB a PDC , resp. s příslušnými podobnostními poměry.

V následující části uvedeme ukázky použití těchto tří metod (postupů) při řešení konkrétních důkazových planimetrických úloh.

Příklad 1

Dvě kružnice se protínají v bodech A a B ($A \neq B$). Bodem B prochází přímka, která protíná obě kružnice v bodech C a D ($C \neq B \neq D$), viz obr. 3. V bodech C a D jsou sestrojeny tečny k oběma kružnicím, které se protínají v bodě E . Dokažte, že body A , C , D a E leží na téže kružnici.

Řešení. Užitím věty o shodnosti obvodového a úsekové úhlu pro kružnici opsanou trojúhelníku ABC a její tětivu BC obdržíme $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BCE|$. Analogicky pak, pro tětivu BD kružnice opsané trojúhelníku ABD platí $|\sphericalangle BAD| = |\sphericalangle BDE|$, viz obr. 3.



Obr. 3

Pro velikost vnitřního úhlu při vrcholu E čtyřúhelníku $ADEC$ pak platí

$$\begin{aligned} |\sphericalangle CED| &= 180^\circ - (|\sphericalangle ECD| + |\sphericalangle EDC|) = \\ &= 180^\circ - (|\sphericalangle BAD| + |\sphericalangle BCE| = 180^\circ - |\sphericalangle CAD|, \end{aligned}$$

což (po snadné úpravě) odpovídá přímo podmínce (1) z věty 1. Tím je důkaz ukončen.

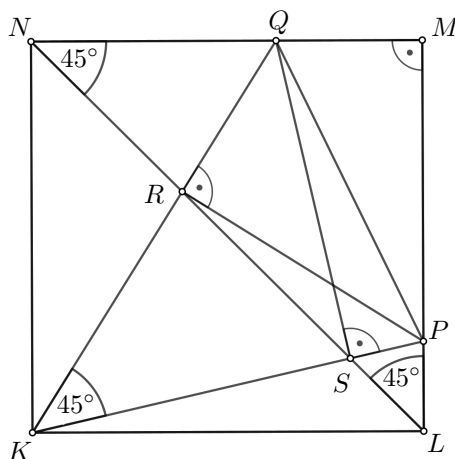
Příklad 2

V rovině je dán čtverec $KLMN$. Uvnitř jeho stran LM a MN jsou zvoleny po řadě body P a Q tak, že $|\sphericalangle PKQ| = 45^\circ$. Úhlopříčka LN daného čtverce protíná úsečky KP a KQ po řadě v bodech S a R .

- Dokažte, že body P , Q , R , S a M leží na téže kružnici.
- Dokažte, že obsah trojúhelníku KSR je roven obsahu čtyřúhelníku $PQRS$.

Řešení.

- Dokážeme, že pětiúhelník $PMQRS$, viz obr. 4, je tětiový.



Obr. 4

Vzhledem k tomu, že jeho vnitřní úhel při vrcholu M je pravý, lze očekávat, že kružnice opsaná uvedenému pětiúhelníku je Thaletova kružnice, jejímž průměrem je úsečka PQ . Je tedy třeba dokázat, že oba úhly PRQ a PSQ jsou pravé.

Nejprve dokážeme, že oba čtyřúhelníky $KNQS$ a $KLPR$ jsou tětiové.

K důkazu těchto tvrzení využijeme první z uvedených postupů. Úhlopříčky čtverce svírají s jeho stranami úhel velikosti 45° , proto platí

$$|\sphericalangle SNQ| = |\sphericalangle SKQ| = 45^\circ = |\sphericalangle PKR| = |\sphericalangle PLR|,$$

což však znamená, že úsečku SQ vidíme z bodů N a K , které leží v téže polorovině vyřazené přímkou SQ , pod stejným úhlem, tj 45° . Analogicky, úsečku PR vidíme pod úhlem 45° z bodů K a L , které leží v téže polorovině vyřazené přímkou PR , a proto jsou oba čtyřúhelníky $KSQN$ a $KLPR$ tětivové.

Protože $|\sphericalangle KLP| = |\sphericalangle QNK| = 90^\circ$, platí podle (1) v tětivových čtyřúhelnících $KSQN$, $KLPR$

$$|\sphericalangle KLP| = |\sphericalangle PRK| = |\sphericalangle PRQ| = 90^\circ$$

$$|\sphericalangle QNK| = |\sphericalangle QSK| = |\sphericalangle QSP| = 90^\circ,$$

což dokazuje tvrzení této části. (Úsečky PR a QS jsou tak výškami z vrcholů P a Q v trojúhelníku KPQ .)

b) Podle věty 2 v tětivovém čtyřúhelníku $PQRS$ platí rovnost $|\sphericalangle KPQ| = |\sphericalangle KRS|$, a trojúhelníky KPQ a KRS jsou tedy podle věty *uu* podobné. Jejich poměr podobnosti je přitom roven $2 : \sqrt{2}$, neboť oba pravoúhlé trojúhelníky KPR a KQS jsou rovnoramenné (s přeponami po řadě KP a KQ). Čtyřúhelníky $KNQS$ a $KLPR$ jsou podle části a) tětivové, takže podle věty 1 v nich platí $45^\circ = |\sphericalangle KLR| = |\sphericalangle KPR|$ a také $45^\circ = |\sphericalangle KNS| = |\sphericalangle KQS|$. S ohledem na výše uvedený poměr ($2 : \sqrt{2}$) podobnosti trojúhelníků KPQ a KRS je obsah prvního z nich dvakrát větší než obsah druhého trojúhelníku, tj. obsah trojúhelníku KSR je roven obsahu čtyřúhelníku $PQRS$, což jsme měli dokázat.

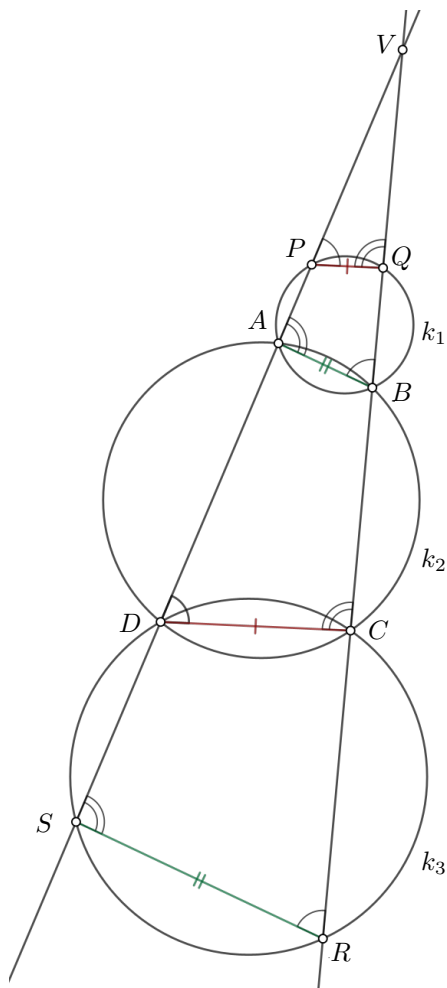
Příklad 3 (Sněhulák)

V rovině je dán konvexní úhel s vrcholem V . Uvažujme trojici kružnic k_1 , k_2 a k_3 situovaných stejně jako na obr. 5. Dokažte, že průsečíky P , Q kružnice k_1 a průsečíky R , S kružnice k_3 s rameny daného úhlu, viz obr. 5, leží na téže kružnici.

Řešení (užitím věty 2). Uvažujme označení průsečíků kružnic k_1 , k_2 , k_3 s rameny daného úhlu stejně jako na obr. 5. Opakovaným užitím věty 2 máme

$$|\sphericalangle VPQ| = |\sphericalangle QBA| = |\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle CRS|,$$

což podle téže věty znamená, že čtyřúhelník $PQRS$ je tětivový.



Obr. 5

Jiné řešení (užitím mocnosti bodu ke kružnici). Ze vztahu (2) pro vnější bod V kružnic k_1, k_2, k_3 dostáváme po řadě $|VP| \cdot |VA| = |VQ| \cdot |VB|$, $|VA| \cdot |VD| = |VB| \cdot |VC|$, $|VD| \cdot |VS| = |VC| \cdot |VR|$, odkud plyne

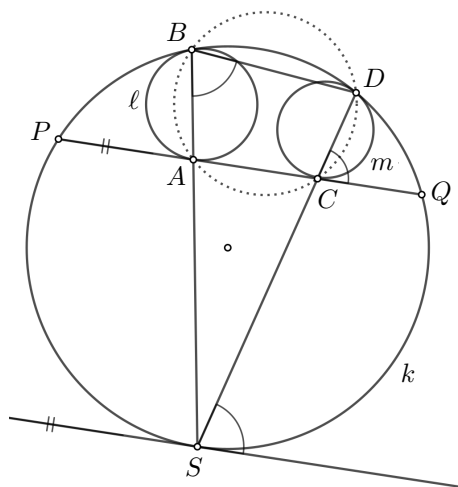
$$\frac{|VP|}{|VQ|} = \frac{|VB|}{|VA|} = \frac{|VD|}{|VC|} = \frac{|VR|}{|VS|}. \quad (4)$$

Z rovnosti obou krajních výrazů ve (4) po úpravě dostáváme $|VP| \cdot |VS| = |VQ| \cdot |VR|$, což podle (2) dokazuje, že body P , Q , R a S leží na téže kružnici.

Poznámka. Za pozornost zde stojí také skutečnost, že dvojice přímek PQ , CD a AB , RS jsou *rovnoběžné*, kdežto každá dvojice „sousedních“ přímek PQ , AB , CD a RS (obr. 5) jsou tzv. *anti-rovnoběžné*, neboť platí také $|\sphericalangle VQP| = |\sphericalangle PAB| = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DSR|$, tj. $\Delta VPQ \sim \Delta VBA \sim \Delta VDC \sim \Delta VRS$. Stejnou vlastnost (jsou anti-rovnoběžné) mají např. také strany *ortického* trojúhelníku daného *ostroúhlého* trojúhelníku vzhledem k jeho stranám.

Příklad 4

Je dána kružnice k a její tětiva PQ . Uvažujme kružnice ℓ , m , které obě leží v téže polorovině vyřazené přímkou PQ tak, že každá z nich se dotýká jak tětivy PQ , tak i zevnitř kružnice k . Dokažte, že obě dvojice A , B a C , D dotykových bodů kružnic ℓ a m po řadě s tětivou PQ a s kružnicí k leží na téže kružnici, viz obr. 6.



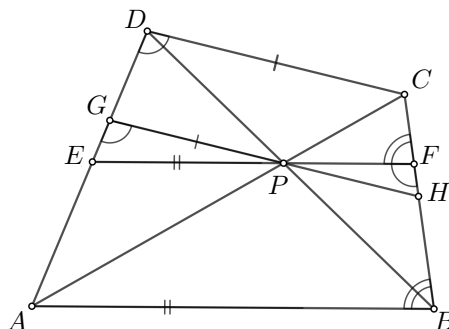
Obr. 6

[*Návod k řešení.* Dotykové body B a D obou menších kružnic ℓ a m s kružnicí k , jsou středy stejnoolehlostí, které zobrazují po řadě kružnice ℓ a m na kružnici k . Dotykové body A a C kružnic ℓ a m s tětivou PQ kružnice k se proto zobrazují na takový bod kružnice k , pro který tečna sestrojená

v odpovídajícím obraze bodu A , resp. C , je *rovnoběžná* s tětivou PQ . Takový bod je pro obrazy bodů A a C v obou stejnolehlostech společný a je jím střed S kružnicového oblouku PQ kružnice k , na němž neleží středy B a D obou uvažovaných stejnolehlostí. Trojice bodů B, A, S , resp. D, C, S , leží tudíž na přímkách procházejících bodem S . Závěrem využijte větu o shodnosti obvodového a úsekového úhlu a větu 2.]

Příklad 5 (viz [2, Problem E5])

Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$, v němž strany AB a CD nejsou rovnoběžné a P značí je průsečík jeho úhlopříček. Rovnoběžka s AB , která prochází bodem P , protíná strany AD, BC po řadě v bodech E, F . Podobně rovnoběžka s CD , která prochází průsečíkem P , protíná strany AD, BC po řadě v bodech G, H . Pokud platí $|PE| \cdot |PF| = |PG| \cdot |PH|$, je čtyřúhelník $ABCD$ tětivový (obr. 7). Dokažte.



Obr. 7

[*Návod k řešení.* Užitím vztahu (3) nejprve ukažte, že čtyřúhelník $EHFG$ je *tětivový* – bod P je průsečík jeho úhlopříček EF a GH . Užitím vlastnosti obvodových úhlů (1. metoda) dále ukažte, že $|\sphericalangle HFE| = |\sphericalangle EGH|$. Závěrem využijte souhlasné úhly ve dvojicích přímek $AB \parallel EF$ a $CD \parallel GH$ a vztah (1), viz obr. 7.]

Literatura

- [1] Horák, S.: Kružnice. Škola mladých matematiků, sv. 16. Nakl. Mladá fronta, Praha, 1966.
- [2] Monk, D.: New Problems in Euclidean Geometry. United Kingdom Mathematics Trust, 2009.

Další vlastnosti netranzitivních ruletek

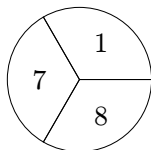
PAVEL TLUSTÝ – IRENEUSZ KRECH

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice – Uniwersytet Komisji Edukacji Narodowej w Krakowie, POLSKO

V práci [1] jsme zkoumali trojice netranzitivních ruletek s n sektory a ukázali, jak z takové trojice vytvořit trojici netranzitivních ruletek s $(n + 2)$ sektory. Vzhledem k tomu, že bylo možné uvedený postup libovolně opakovat, odvodili jsme metodu, jak získat trojice netranzitivních ruletek s libovolně mnoha sektory.

V tomto příspěvku zobecníme výchozí trojici netranzitivních ruletek jiným způsobem. Zaměříme pozornost na počet ruletek. Ukážeme si, jak lze ke skupině netranzitivních ruletek přidat další ruletku tak, aby i nově vzniklá skupina představovala skupinu netranzitivních ruletek.

Připomeňme, že ruletka je pomůcka určená k losování čísel. Zatím uvažujeme jen ruletky se stejně velkými sektory (vylosování každého z čísel na ruletce je stejně pravděpodobné). Příklad ruletky se 3 sektory je na obr. 1.



Obr. 1

Takovou 3-sektorovou ruletku lze ztotožnit s množinou $R = \{1, 7, 8\}$.

Definice 1

Soubor k navzájem disjunktních množin $(R_1, R_2, R_3, \dots, R_k)$, kde

$$|R_1| = |R_2| = |R_3| = \dots = |R_k| = n$$

a

$$R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup \dots \cup R_k = \{1, 2, 3, \dots, k \cdot n\}$$

nazveme *skupinou k ruletek s n sektory*.

Vyberme dvě ruletky R_{j_1} a R_{j_2} , kde $j_1, j_2 \in \{1, 2, 3, \dots, k\}$ ze skupiny k ruletek. Symbolem $\{R_{j_1} \gg R_{j_2}\}$ označíme jev, že číslo vylosované pomocí ruletky R_{j_1} bude větší než číslo vylosované pomocí ruletky R_{j_2} .

Definice 2

Skupinu k ruletek $(R_1, R_2, R_3, \dots, R_k)$, nazveme *netranzitivní*, pokud existuje taková permutace $(R_{j_1}, R_{j_2}, R_{j_3}, \dots, R_{j_k})$, pro kterou platí:

$$P(R_{j_1} \gg R_{j_2}) > \frac{1}{2}, P(R_{j_2} \gg R_{j_3}) > \frac{1}{2}, \dots, P(R_{j_k} \gg R_{j_1}) > \frac{1}{2}.$$

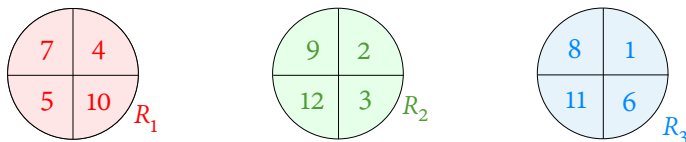
Je-li navíc

$$P(R_{j_1} \gg R_{j_2}) = P(R_{j_2} \gg R_{j_3}) = \dots = P(R_{j_k} \gg R_{j_1}) = p > \frac{1}{2},$$

říkáme, že skupina ruletek je *vyvážená*.

Příklad 1

Na obrázku 2 je skupina tří čtyřsektorových ruletek $R_1 = \{4, 5, 7, 10\}$, $R_2 = \{2, 3, 9, 12\}$, $R_3 = \{1, 6, 8, 11\}$.



Obr. 2

Losujme nejprve dvojici čísel pomocí ruletek R_1 a R_2 . Na obr. 3 jsou znázorněny všechny možné výsledky takového losování. Červeně jsou vyznačeny výsledky příznivé $\{R_1 \gg R_2\}$, zeleně výsledky příznivé jevu $\{R_2 \gg R_1\}$.

12				
9				
3				
2				
	4	5	7	10

Obr. 3

Jevu $\{R_1 \gg R_2\}$ je příznivých 9 výsledků. Vzhledem k tomu, že všechny výsledky jsou stejně pravděpodobné, dostáváme, že

$$P(R_1 \gg R_2) = \frac{9}{16} > \frac{1}{2}.$$

V souladu s [1] řekneme, že ruletka R_1 je *lepší* než ruletka R_2 . Analogicky lze ukázat, že

$$P(R_2 \gg R_3) = \frac{9}{16} \quad \text{a} \quad P(R_3 \gg R_1) = \frac{9}{16}.$$

Tedy ruletka R_2 je lepší než ruletka R_3 a ruletka R_3 je lepší než ruletka R_1 . Vzhledem k tomu, že

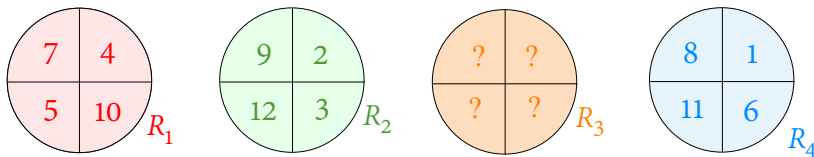
$$P(R_1 \gg R_2) = P(R_2 \gg R_3) = P(R_3 \gg R_1) = \frac{9}{16}$$

je trojice (R_1, R_2, R_3) skupinou vyvážených netranzitivních ruletek.

Nyní ukážeme, jak ze skupiny k netranzitivních n -sektorových ruletek získáme skupinu $(k+1)$ netranzitivních n -sektorových ruletek. Použijeme metodu *vložení a roztažení*.

Uvažujme skupinu (R_1, R_2, R_3) netranzitivních ruletek z příkladu 1 a vytvořme z ní skupinu čtyř netranzitivních ruletek (R_1, R_2, R_3, R_4) .

V prvním kroku („vložení“) přečísloujeme ruletky tak, že z R_3 se stane ruletka R_4 (viz obr. 4) a vložíme novou ruletku R_3 (zatím bez očíslovaných sektorů).



Obr. 4

Sektory ruletky R_3 očísloujeme (na chvíli) desetinnými čísly, z nichž každé je o 0,5 větší než čísla na sektorech ruletky R_4 , tj. $R_1 = \{4, 5, 7, 10\}$, $R_2 = \{2, 3, 9, 12\}$, $R_3 = \{1.5, 6.5, 8.5, 11.5\}$, $R_4 = \{1, 6, 8, 11\}$.

Nyní je zřejmé, že R_1 je lepší než R_2 , R_2 je lepší než R_3 , R_3 je lepší než R_4 a R_4 je lepší než R_1 .

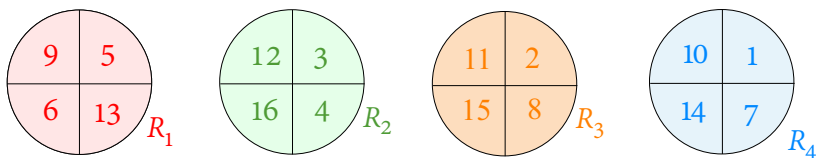
Ve druhém kroku („roztážení“) musíme přiřadit jednotlivým sektorům ruletky R_3 celočíselné hodnoty, ale tak, abychom zachovali „vztahy“ mezi

ruletkami. K tomu stačí přeznačit sektory na všech ruletkách lineárně: uspořádáme všechna čísla ze sektorů vzestupně a následně je nahradíme číslem rovným pořadí, na kterém se dané číslo nachází. Schématicky je postup znázorněn na obr. 5.

PŘED	1	1.5	2	3	4	5	6	6.5	7	8	8.5	9	10	11	11.5	12
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
PO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

Obr. 5

Tímto způsobem vzniknou ruletky z obr. 6, který představuje požadovanou skupinu čtyř netrazitivních ruletek.



Obr. 6

Víme, že

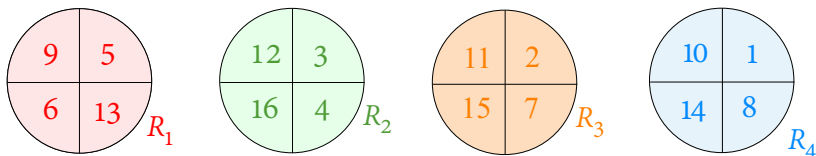
$$P(R_1 \gg R_2) = P(R_2 \gg R_3) = P(R_4 \gg R_1) = \frac{9}{16},$$

ale

$$P(R_3 \gg R_4) = \frac{10}{16},$$

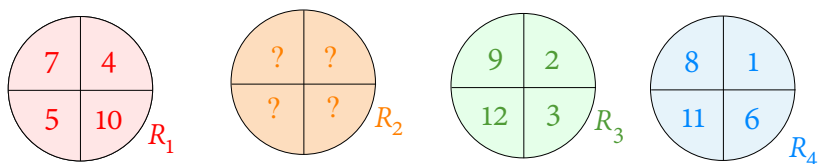
tj. tato skupina čtyř ruletek není vyvážená.

Čtenář si snadno ověří, že pokud vzájemně vyměníme čísla 7 a 8 na ruletkách R_3 a R_4 , dostaneme skupinu netranzitivních vyvážených ruletek z obr. 7.



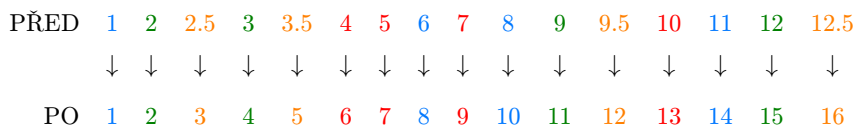
Obr. 7

Vložení nové ruletky do původního souboru netranzitivních ruletek můžeme provést i na jiném místě, tak jako na obr. 8.



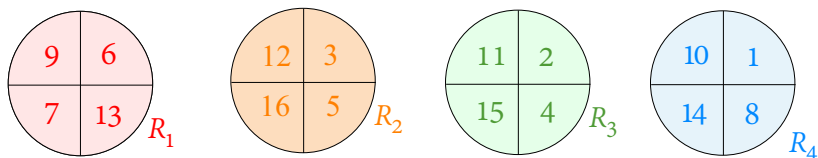
Obr. 8

Výchozí ruletky R_2 a R_3 z obr. 2 se stanou ruletkami R_3 a R_4 a pro novou ruletku R_2 najdeme očíslování sektorů. Po kroku „vložení“ máme posloupnost ruletek: $R_1 = \{4, 5, 7, 10\}$, $R_2 = \{2.5, 3.5, 9.5, 12.5\}$, $R_3 = \{2, 3, 9, 12\}$, $R_4 = \{1, 6, 8, 11\}$. Krok „roztažení“ je znázorněn na obr. 9.



Obr. 9

Tak dostaneme netranzitivní ruletky z obr. 10.



Obr. 10

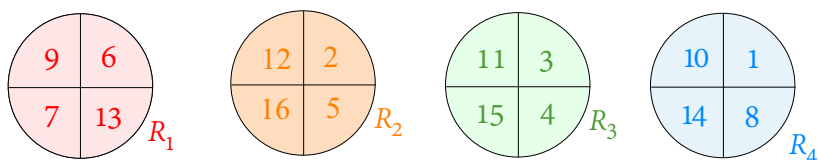
Podobně jako v předchozím příkladu není tato skupina ruletek po etapě „roztažení“ vyvážená, protože

$$P(R_1 \gg R_2) = P(R_3 \gg R_4) = P(R_4 \gg R_1) = \frac{9}{16},$$

ale

$$P(R_2 \gg R_3) = \frac{10}{16}.$$

K získání vyvážené skupiny netranzitivních ruletek stačí jen zaměnit sektory s čísly 2 a 3. Tak vznikne skupina (viz obr. 11), která již má požadované vlastnosti.



Obr. 11

Samozřejmě, že lze tuto metodu používat opakovaně a získat libovolný počet netranzitivních ruletek se stejným počtem sektorů, jako mají výchozí ruletky. Spojení metod z článku [1] a z této práce umožňuje vygenerovat libovolně velkou skupinu vyvážených netranzitivních ruletek s libovolným počtem sektorů.

Literatura

- [1] *Thustý, P., Krech, I.*: O netranzitivních ruletkách. MFI, roč. 35 (2026), č. 2, s. 91–96.
- [2] *Schaefer, A., Schweig, J.*: Balanced nontransitive dice. The College Mathematics Journal, roč. 48 (2017), č. 1, s. 10–16.
- [3] *Savage, R. P.*: The Paradox of Nontransitive Dice. The American Mathematical Monthly, roč. 101 (1994), č. 5, s. 429–436.
- [4] *Rump, C. M.*: Strategies for Rolling the Efron Dice. Mathematics Magazine, roč. 74 (2001), č. 3, s. 212–216.

Zajímavé matematické úlohy

V dalším čísle našeho časopisu pokračujeme v pravidelné rubrice Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh 311 a 312. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 12. 2026 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi zveřejníme.

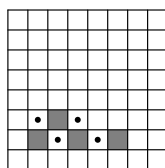
Úloha 311

Určete velikosti vnitřních úhlů všech lichoběžníků $ABCD$ s delší základnou AB , které lze „rozřezat“ na dva rovnoramenné trojúhelníky.

Jaroslav Švrček

Úloha 312

V tabulce je obarveno několik polí. V každém kroku vybereme všechna neobarvená pole, která mají obarveny aspoň dvě strany, a tato pole obarvíme. Určete nejmenší možný počet m polí, která musíme na začátku obarvit, aby po několika krocích byla obarvena celá tabulka. Pro toto m určete nejmenší a největší počet kroků, po nichž to může nastat. (Např. budou-li na počátku obarvena čtyři pole na obrázku vpravo, potom v prvním kroku obarvíme čtyři pole označená tečkou.)



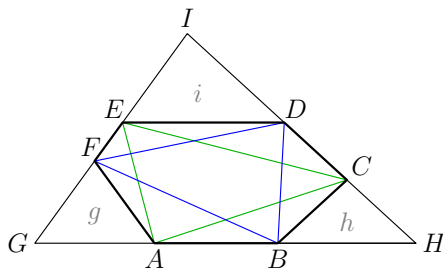
Pavel Calábek

V následující části uvádíme řešení úloh 307 a 308, jejichž zadání jsme zveřejnili v prvním čísle aktuálního (35.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 307

Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ má protější dvojice stran rovnoběžné. Dokažte, že trojúhelníky ACE a BDF mají stejné obsahy.

Josef Tkadlec



Řešení (autorské). Označme průsečíky přímek EF , AB , CD podle obrázku G , H , I . Přímký GH (resp. AB) a ED jsou rovnoběžné, trojúhelník EDI je tak podobný s trojúhelníkem GHI v poměru $i : 1$, podobně je trojúhelník GAF podobný s trojúhelníkem GHI v poměru $g : 1$ a trojúhelník BHC je s ním podobný v poměru $h : 1$, kde i , g , h jsou kladná reálná čísla menší než 1.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že trojúhelník GHI má jednotkový obsah, tedy $S_{GHI} = 1$. Výška trojúhelníku EGA ke straně EG je g -násobkem výšky trojúhelníku GHI ke straně GI , délka jeho strany EG je $(1 - i)$ -násobkem délky strany IG , obsah S_{EGA} trojúhelníku EGA je tak roven

$$S_{EGA} = g(1 - i)S_{GHI} = g(1 - i).$$

Podobně jsou obsahy S_{AHC} a S_{CIE} trojúhelníků AHC a CIE rovny

$$S_{AHC} = h(1 - g),$$

$$S_{CIE} = i(1 - h).$$

Obsah S_{ACE} trojúhelníku ACE je tak roven

$$\begin{aligned} S_{ACE} &= S_{GHI} - S_{EGA} - S_{AHC} - S_{CIE} = \\ &= 1 - g(1 - i) - h(1 - g) - i(1 - h) = \\ &= 1 - (g + h + i) + (gh + hi + ig). \end{aligned}$$

Podobně pro obsahy trojúhelníků FGB , BHD , DIF platí

$$S_{FGB} = g(1 - h),$$

$$S_{BHD} = h(1 - i),$$

$$S_{DIF} = i(1 - g).$$

Obsah trojúhelníku BDF je tak roven

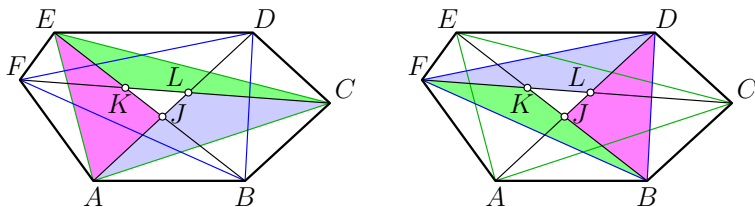
$$\begin{aligned} S_{BDF} &= S_{GHI} - S_{FGB} - S_{BHD} - S_{DIF} = \\ &= 1 - g(1 - h) - h(1 - i) - i(1 - g) = \\ &= 1 - (g + h + i) + (gh + hi + ig). \end{aligned}$$

Vidíme, že obsahy trojúhelníků ACE a BDF si rovny, jak jsme měli dokázat.

Jiné řešení (podle Bartosze Wieczorka). Podobně jako v předcházejícím řešení označme $S_{XY\dots}$ obsah mnohoúhelníku $XY\dots$. Dále označme J, K, L po řadě průsečíky úhlopříček AD a BE , BE a CF , CF a AD . Předpokládejme, že stejně jako na obrázku je trojúhelník JKL v polorovině ADE (v opačném případě stačí vrcholy přeznačit tak, že místo šestiúhelníku $ABCDEF$ uvažujeme šestiúhelník $DEFABC$). Potom platí

$$\begin{aligned} S_{ACE} &= S_{JKL} + S_{ACL} + S_{CEK} + S_{EAJ}, \\ S_{BDF} &= S_{JKL} + S_{DFL} + S_{BFK} + S_{BDJ}. \end{aligned}$$

Aby platilo dokazované tvrzení, stačí ukázat, že obsahy odpovídajících trojúhelníků ACL a JKL , CEK a BFK , EAJ a BDJ jsou shodné.



To opravdu platí. Pro první dvojici to plyne z faktu, že čtyřúhelník $ACDF$ je lichoběžník se základnami CD a AF , obsahy trojúhelníků ACD a FCD jsou tak shodné, tedy jsou shodné i obsahy trojúhelníků ACL a DFL , které vzniknou odebráním jejich průniku, tj. společného trojúhelníku CDL .¹⁾ Podobně to platí i pro zbývající dvojice trojúhelníků.

Správná řešení zaslali: *Michał Fronczek* a *Bartosz Wieczorek*, oba II LO SS Tarnowskie Góry (Polsko),

Neúplné řešení zaslala *Johanka Pouchová*, G Plzeň, Mikulášské nám.

Úloha 308

Kolika způsoby je možno uspořádat přirozená čísla $1, 2, \dots, n$ do kruhu tak, aby každé číslo bylo dělitelem součtu svých dvou sousedních čísel. Takové způsoby, které lze získat jeden z druhého otočením nebo osovou souměrností, považujeme za jeden způsob. Úlohu řešte pro a) $n = 2025$, b) $n = 2026$.

Jaroslav Zhouf

¹⁾Viz např. článek Motýlí křídla v lichoběžníku L Juklové a J. Švrčka v prvním čísle 34. ročníku našeho časopisu.

Řešení.

a) Sudá čísla dělí jen sudá čísla, pokud by se v kruhu vedle sebe nacházela dvě sudá čísla, musela by tak vedle nich být jen sudá čísla. V kruhu by se tak nacházela jen sudá čísla, což je spor. Vedle každého sudého čísla se tedy musí nacházet dvě čísla lichá.

Mezi přirozenými čísly do 2025 se nachází 1012 sudých čísel a 1013 lichých, při rozmístění čísel do kruhu se proto budou nacházet v jednom místě vedle sebe dvě lichá čísla a ve zbytku se budou lichá a sudá čísla střídát.

Nejprve předpokládejme, že se vedle sebe nachází čísla 2025 a 2024. Jelikož zbývající čísla v kruhu jsou menší než 2025, musí být před číslem 2025 číslo 1. Nejmenší větší číslo než 2024, které je dělitelné číslem 2024, je číslo 4048, vedle čísla 2024 se tak z druhé strany musí nacházet číslo 2023.

Obecně, nechť jsou čísla v kruhu v pořadí

$$\dots, 1, 2025, 2024, \dots, k+1, k, \dots$$

Vpravo vedle čísla k se musí nacházet nějaké číslo menší a součet tohoto čísla s číslem $k+1$ musí být dělitelný k , jediná možnost pro součet je $2k$ a vedle čísla k tak je $k-1$. Proto jsou čísla do kruhu uspořádána v klesajícím pořadí

$$\dots, 1, 2025, 2024, 2023, 2022, \dots$$

Nechť nyní nejsou v kruhu čísla 2024 a 2025 vedle sebe. Předpokládejme, že číslo 2023 neleží vedle čísla 2024. Čísla 2023 a 2025 nemohou ležet vedle sebe, protože by čísla v kruhu byla uspořádána

$$\dots, 2025, 2023, 2021, \dots,$$

a tedy by ležela vedle sebe tři lichá čísla. Aby lichá čísla 2023 a 2025 dělila sudé číslo, musí být toto číslo aspoň 4046. Jelikož vedle těchto čísel leží čísla menší než 2023, je jejich součet menší než 4046. Proto součet čísel vedle nich musí být lichý, a tedy vedle nich musí ležet jedno číslo sudé a jedno liché. Jsme tedy v situaci, kdy se na dvou místech vedle sebe objeví dvě lichá čísla. Tudíž 2024 a 2023 se v kruhu nacházejí vedle sebe.

Z podobných důvodů jako výše jsou čísla v kruhu uspořádána

$$\dots, 1, 2024, 2023, \dots, k+1, k.$$

Součet čísel vedle k musí být dělitelný k , pokud by vpravo bylo číslo menší než k , je jedinou možností pro součet $2k$ a číslo vpravo od k je $k-1$.

Ještě je možné, že by vpravo vedle k stálo 2025, pak by součet jeho sousedů byl různý od $2k$, tedy by byl aspoň $3k$ a muselo by tak platit

$$k + 1 + 2025 \geq 3k, \quad \text{tj. } k \leq 1013.$$

Proto jsou čísla v kruhu uspořádána

$$\dots, 1, 2024, 2023, \dots, 1014, 1013.$$

Pokud by vpravo vedle čísla 1013 bylo 1012, potom by se v úseku $1012, \dots, 1$ nacházela kromě čísla 2025 jen čísla nejvýše rovna 2012, součet žádných dvou z nich ovšem nepřevyšší 2025, tedy 2025 by nemohlo dělit součet svých sousedů. Proto vedle čísla 1013 musí být číslo 2025, vedle něj pak 1012, vedle 1011, a dále už musí bez výjimek posloupnost klesat. Další vyhovující uspořádání čísel tak je

$$\dots, 1, 2024, 2023, \dots, 1014, 1013, 2025, 1012, 1011, \dots$$

a žádná jiná pořadí neexistují.

b) Jak víme z části a), vedle každého sudého čísla musí stát dvě čísla lichá. Mezi čísla $1, 2, \dots, 2026$ je stejný počet sudých a lichých čísel, tedy i vedle libovolného lichého čísla musí stát dvě čísla sudá. Vedle čísla 2025 tak musí stát 2026 a 2024, stejnými úvahami jako výše získáme jediné možné pořadí

$$\dots, 1, 2026, 2025, 2024, \dots$$

Správná řešení zaslal *Michał Fronczek*, II LO Tarnowskie Góry (Polsko).

Pavel Calábek

Kompetenční rámec absolventů učitelství a reálná výuka fyziky

VOJTĚCH ŽÁK, TOMÁŠ FIŠAR

Matematicko-fyzikální fakulta, Univerzita Karlova

V roce 2023 vydalo Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR (dále: MŠMT) dokument, který má název *Kompetenční rámec absolventa a absolventky učitelství* (dále: KRAAU) [1]. Ten by měl na národní úrovni popsat kompetence, jimiž by měli být vybaveni absolventi a absolventky studijních programů vedoucích k učitelské kvalifikaci.

Vzhledem k tomu, že KRAAU začíná vzdělávání budoucích učitelů a učitelek v Česku již ovlivňovat a v odborné literatuře zabývající se fyzikálním vzděláváním dosud v podstatě nebyl reflektován (na rozdíl od jiného vlivného dokumentu – *Strategie 2030+*, která již částečně reflektována byla, např. ve [2]), velmi stručně ho v tomto článku představíme. Zejména ale podrobně uvedeme dvě aktivity s KRAAU související, které podle našeho názoru mohou pomoci při výuce fyziky na základních a středních školách.

Struktura KRAAU

KRAAU je rozdělen do 6 oblastí, v jejichž rámci je formulováno 18 kompetencí. Jednotlivé oblasti jsou v něm pojmenovány takto:

1. Vyučované obory a jejich zprostředkování žákům a žákyňám
2. Plánování, vedení a reflexe výuky
3. Prostředí pro učení
4. Zpětná vazba a hodnocení
5. Profesní spolupráce
6. Profesní sebepojetí, rozvoj, etika a duševní zdraví

Jednotlivé kompetence jsou uvedeny v [1, s. 17] a dále jsou podrobně rozepsány [1, s. 22–71] (včetně rozlišení tří úrovní: *absolvent/ka*, *začínající učitel/ka*, *zkušený/á učitel/ka*).

Komentář jednotlivých oblastí KRAAU

Oblast 1: Vyučované obory a jejich zprostředkování žákům a žákyním – CO

Jádrem KRAAU je z hlediska oborové didaktiky (v našem případě didaktiky fyziky) oblast 1, kam jsou zařazeny dvě kompetence: *rozumím vyučovaným oborům a dále se v nich rozvívám a didakticky zprostředkuji obsah vyučovaných oborů žákům a žákyním v souladu s jejich vzdělávacími potřebami*. Potřebnost fyzikálních znalostí a dovedností učitelů fyziky a jejich didaktický um určitě nemusíme před čtenáři obhajovat. Oba dva tyto body (a není podstatné, zda je budeme označovat jako kompetence) jsou natolik důležité, že byly dále rozpracovány v *kompetenčním rámci pro fyziku* [3]. Oblast 1 je možné heslovitě označit zájmenem *CO*.

Oblast 2: Plánování, vedení a reflexe výuky – PŘED, BĚHEM A PO

Tato oblast překračuje z časového hlediska samotnou výuku, typicky organizovanou do vyučovacích hodin, a zabývá se mimo jiné tím, co by mělo výuce předcházet (např. *nastavování cílů, plánování výuky*) a co by po ní mělo následovat (*reflexe výuky*). Oblast 2 je tedy možné vystihnout slovy *PŘED, BĚHEM A PO*, a vyjadřuje tedy „časové souřadnice“.

Oblast 3: Prostředí pro učení – KDE

Další oblast se v přeneseném slova smyslu zabývá „prostorovými souřadnicemi“ a řeší, kde učení žáků probíhá. Tematizuje nejen *vhodné uspořádání fyzického a digitálního prostředí*, ale také psychologicky a sociálně *bezpečné prostředí pro učení*. Stručně je tedy možné oblast 3 zastoupit slovem *KDE*.

Oblast 4: Zpětná vazba a hodnocení – ZPĚT

Další oblast kompetencí se do jisté míry vrací k tomu, co již proběhlo. Týká se *hodnocení, zpětné vazby a reflexe* učení žáků. Tematizováno je také sebehodnocení a vzájemné hodnocení žáků. K reflexi dodejme, že ji můžeme chápat jako „zrcadlení toho, co se stalo“, a tudíž nemusí být zakončena hodnotícím výrokem, ať už kladným, nebo záporným (+, -). Tuto oblast můžeme vystihnout krátce jako *ZPĚT*.

Oblast 5: Profesní spolupráce – S KÝM

Pátá oblast se zaměřuje na spolupráci s dalšími možnými aktéry vzdělávání – *kolegy, rodiči, širší komunitou*. Upozorňuje tedy na spolupráci s těmi, kteří stojí původně mimo danou výuku (v dané třídě), která ale může významně pozitivně tuto výuku ovlivnit. Oblast 5 lze tudíž vystihnout slovy *S KÝM*.

Oblast 6: Profesní sebepojetí, rozvoj, etika a duševní zdraví – JÁ

Tato oblast je poměrně široká. Zahrnuje jednak např. požadavek na *odpovědnou práci s informacemi, respekt k vědeckým faktům*, jednak se výrazně obrací k učiteli jako bytosti a zdůrazňuje *péči o duševní zdraví a utváření sebepojetí učitele*. Pro výrazný obrat k nitru učitele ji můžeme zjednodušeně zastoupit zájmemem *JÁ*.

Aktivity do výuky fyziky navazující na kompetenční rámec

V dalším textu uvádíme dvě aktivity, které se úzce vztahují ke KRAAU a které je možné zařadit do výuky fyziky. U každé z nich je uvedena její návaznost na kompetenční rámec, její stručný popis, dále podrobný popis a zkušenosti s danou aktivitou ve výuce fyziky. Uvedené aktivity je možné upravit i pro výuku jiných předmětů.

Mapování fyzikálních znalostí pomocí Excalidraw

Návaznost aktivity na kompetenční rámec

Tato aktivita spadá do oblasti 2: *Plánování, vedení a reflexe výuky*, konkrétněji se týká kompetence 2.3: *Podporuji u žáků a žákyň zvědavost a motivaci k učení* a v rámci ní úrovně 1, bodu 1: *Zjišťuji, co už žáci a žákyňe umí a vědí, a nově vyučovaný obsah a kompetence s tím propojuji. Cíleně navazuji na předchozí výuku.*

Stručný popis aktivity

Aktivita využívá digitální platformu *Excalidraw* [4] ke zjišťování prekonceptů a názorů žáků vztahujících se k fyzikálnímu tématu, které bude do výuky zařazeno. Cílem aktivity je přizpůsobit další výuku tak, aby žáci mohli využít své dosavadní znalosti a zkušenosti, na které se naváže, a došlo k potlačení jejich případných miskoncepcí. Pro využití této digitální platformy je zapotřebí, aby žáci měli elektronické zařízení, např. počítač, tablet nebo mobilní telefon s internetovým připojením.

Podrobný popis zařazení aktivity do výuky

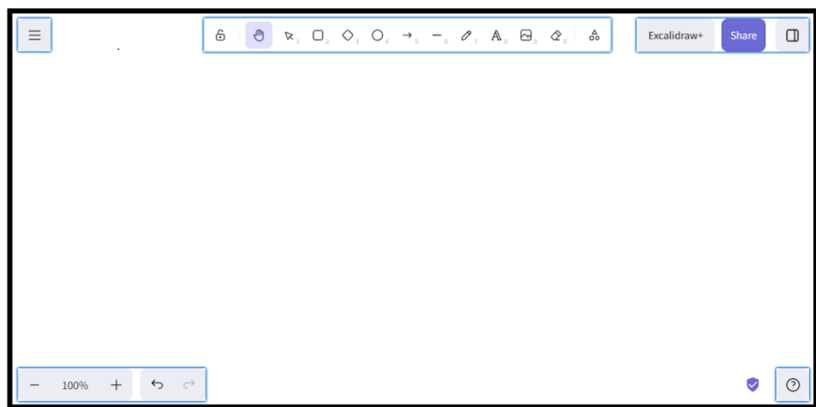
Vzhledem k povaze aktivity je vhodné ji zařadit na začátek daného fyzikálního tématu. Okamžitá práce s názory žáků je náročná z hlediska oborového i didaktického. Z tohoto důvodu doporučujeme aktivitu zařadit na konec vyučovací hodiny, která novému tématu předchází. Učitel tím získá čas na zpracování informací. Následně může názory žáků rozebrat na začátku hodiny, kterou zahájí nové téma. Náročnější možností je provést aktivitu na začátku nebo v průběhu hodiny a rovnou ji vyhodnotit. Případně je možné zadat žákům samostatnou práci a mezitím si promyslet, jak pracovat s jejich konkrétními názory.

Doporučujeme, aby žáci používali svá vlastní zařízení, čímž si osvojí práci právě s nimi. V případě potřeby jim však poskytneme počítač nebo tablet. Žákům je vhodné nabídnout internetové připojení, nicméně z naší zkušenosti vyplývá, že většina žáků tuto potřebu řeší prostřednictvím svého datového připojení. Použití vlastního mobilního telefonu a internetového připojení je pro ně dnes běžné.

Pro zajištění bezpečného a otevřeného prostředí pro vyjadřování názorů žáků a jejich vzájemnou komunikaci je vhodné dodržovat několik důležitých pravidel. Základním pravidlem je, že se žák samostatně zamýšlí. Svoje názory a představy následně sděluje ostatním v elektronické formě, kterou si přiblížíme dále. V této fázi na názory žáků pokud možno nikdo nereaguje, ani ostatní žáci, ani vyučující. Důležité je upozornit především na nevhodné projevy chování, jako je smích nebo pokřikování, které mohou názory žáků snadno shodit a snížit tak jejich sebedůvěru.

Nyní přejdeme k samotné platformě *Excalidraw*. Ta představuje interaktivní online tabuli, která integruje nástroje pro kreslení a psaní a umožňuje sdílení obsahu s větším počtem uživatelů. Existuje v různých jazykových verzích, níže se odkazujeme k anglické (bohužel v době přípravy článku nebyla k dispozici česká verze). Toto sdílení může být realizováno ve dvou režimech: pasivním, určeném pouze pro prohlížení obsahu, nebo aktivním, umožňujícím připojeným uživatelům kolaborativní úpravy sdílené tabule. Identifikace připojených uživatelů je usnadněna možností změny jména bez nutnosti předchozí registrace nebo přihlášení. Přestože každý uživatel v reálném čase sleduje pohyb kurzorů ostatních, zpětné zjištění autora konkrétního objektu vytvořeného na tabuli není možné.

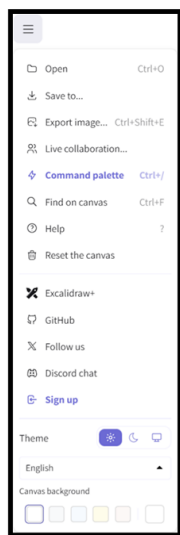
Nevýhodou je, že každý připojený uživatel má možnost odstranit jakýkoli objekt na sdílené tabuli, a to bez ohledu na jeho autorství. Z tohoto důvodu je při využití této platformy klíčová disciplína žáků a jasně definovaná pravidla pro spolupráci, aby nedocházelo k mazání cizí práce. Práce s touto aplikací je podobná jako s fyzickou tabulí, je ale rychlejší. Na rozdíl od fyzické tabule, na kterou typicky nemohou všichni žáci najednou psát a kreslit, mohou v tomto případě všichni vyjádřit svůj názor ve stejnou dobu. Aplikaci lze spustit v internetovém prohlížeči, takže je dostupná na všech běžných počítačích, tabletech a telefonech s internetem. Prostředí *Excalidraw* je snadno pochopitelné a intuitivní (obr. 1), proto popis ovládání jednotlivých prvků, jako je kreslení, psaní, nahrávání obrázků, výběr barev, mazání, uzamykání objektů a posun po tabuli, ponecháváme na samostatném prozkoumání čtenářem.



Obr. 1 Tabule platformy *Excalidraw* (se zvětšenými položkami, v anglické verzi)

Pro sdílení tabule dalšími uživateli klikneme na tlačítko „Share“ v pravém horním rohu (obr. 1). Poté se zobrazí nabídka s možnostmi sdílení. Kliknutím na „Start session“ vytvoříme odkaz, který žáci potřebují, aby se mohli připojit k naší tabuli a spolu s námi na ní pracovat. Zároveň se žákům nabídne možnost změnit si své jméno. Druhé tlačítko, „Export to link“, vytvoří odkaz, díky kterému se žáci mohou k tabuli připojit pouze pro zobrazení, nemohou ji ale nijak upravovat. Doporučujeme tento odkaz vytvořit ještě před začátkem výuky a umístit ho žákům na webové stránky předmětu nebo ukázat příslušný QR kód pomocí projektoru, příp. poslat žákům několik papírů s vytištěným QR kódem.

Pro návrat k úpravám tabule stačí kliknout mimo zobrazenou nabídku. Po připojení žáků k relaci spolupráce je vhodné je vyzvat k nastavení vlastních jmen. Učitel tak získá základní přehled o přítomných účastnících. Sdílení s možností úprav lze kdykoliv ukončit kliknutím na tlačítko „Share“ a následně na „Stop session“. Ukončení relace pro učitele znamená, že se jeho zobrazení tabule přestane aktualizovat podle změn prováděných ostatními uživateli. Ostatní žáci však budou moci na sdílené tabuli nadále spolupracovat. Z tohoto důvodu je nutné žáky důrazně upozornit, že aktivitu ukončujeme. Po ukončení relace je možné vytvořený obsah uložit. V levém horním rohu (obr. 1) klikneme na ikonu nabídky a zvolíme možnost „Save to ...“ (obr. 2), následně „Save to file“ pro uložení v editovatelném formátu, nebo „Export image ...“ pro uložení v podobě statického obrázku. Tento obrázek lze následně žákům promítnout. Výhodou uloženého souboru je, že ho můžeme dát žákům po vyučovací hodině k dispozici.



Obr. 2 Hlavní nabídka platformy *Excalidraw* (v anglické verzi)

Je zřejmé, jak snadno lze získat data z platformy *Excalidraw* v podobě obrázku. Ten může pomoci analyzovat a vyhodnotit všechny nápady žáků a propojit je s fyzikálními souvislostmi. Můžeme je roztřídit, např. do skupin: *už známe*; *budeme se zabývat*; *nebudeme se zabývat*; *složitě*; *bude možné se dozvědět navíc*. Určitý nápad může být samozřejmě zařazen i do více skupin (ty nejsou disjunktní). Konkrétní vyhodnocení mimo jiné závisí na odpovědích vyučujícího na následující otázky: Budu s nápady (daty) pracovat hned po jejich získání ve stejné hodině? Budu se žáky sdílet samotné zpracování dat, nebo jim představím pouze závěry?

Jak již bylo zmíněno, rozhodnutí, zda získat a zpracovat data ve stejné vyučovací hodině, ovlivňují zkušenosti a jistota vyučujícího. Doporučujeme však komentovat jednotlivé nápady ve výuce, ať už ve stejné vyučovací hodině, nebo v hodině následující, kdy bude mít vyučující komentáře k jednotlivým nápadům již připravené. Žáci totiž nemusí vždy porozumět všem myšlenkám a představám spolužáků, proto je vhodné je nejprve okomentovat. Během komentování můžeme také zmínit souvislosti s probíranou látkou, což může žáky motivovat k hlubšímu zamyšlení. Nápady doporučujeme reflektovat zejména z věcného a fyzikálního hlediska, nikoli na základě znalosti autora nápadu. Získané nápady tak implicitně rozdělíme na smysluplnější a méně smysluplné, aniž bychom je takto explicitně ka-

tegorizovali. Žádný z návrhů automaticky nevyřazujeme, zásadní je, aby žáci pochopili, že pracujeme, aspoň na začátku, s každým jejich nápadem.

Doporučujeme seznam nápadů vytisknout (případně vyfotit a vytisknout) a během probírání jednotlivých témat v další výuce fyziky můžeme již probrané nápady odškrtnout sami, nebo to provádět společně se žáky. Na závěr daného tematického celku je vhodné se k původnímu seznamu nápadů vrátit a připomenout, která fyzikální témata byla skutečně zařazena a která nikoliv. V případě nezařazených témat je vhodné uvést důvod jejich vynechání a případně nabídnout žákům relevantní zdroje informací pro jejich samostatné studium.

Z hlediska žáků může vyhodnocení probíhat například takto: Se žáky společně diskutujeme jednotlivé nápady a roztřídíme je podle domluvených pravidel. Učitel žákům elektronickou tabuli nahraje jako zápis z hodiny, například na webové stránky nebo do jiného digitálního prostředí, které škola používá. Následně mají za úkol vybrat a označit např. tři z komentovaných nápadů: ten, na který se nejvíce těší; ten, na který se těší nejméně; ten, o který mají zájem i mimo školní výuku. Na konci tématu se pak mohou k tomuto roztřídění vrátit a zreflektovat, zda jejich očekávání a zájem o jednotlivé nápady odpovídaly skutečnosti.

Zkušenosti s aktivitou ve výuce fyziky

Aktivitu jsme zařadili např. do výuky jaderné fyziky. Tato oblast je typicky vyučována v 9. ročníku základní školy. Důvodem pro zařazení této aktivity je fakt, že žáci nepřicházejí s jadernou fyzikou vědomě do každodenního kontaktu, ale spíše mají o této oblasti informace z médií nebo z jiných vyučovacích předmětů (chemie, dějepisu, přírodopisu, ...).

Žáci s platformou *Excalidraw* pracovali poprvé, proto jsme touto aktivitou vyučovací hodinu zahájili. Při prvním zařazení v dané třídě je obtížné odhadnout, kolik času aktivita zabere. V našem případě žáci využívali školní tablety a platformu si otevřeli pomocí promítnutého QR kódu během několika minut. Na začátku vyučující ukázal jen nástroje pro kreslení, psaní a mazání. Následně měli žáci čas prozkoumat platformu sami, protože s ní pracovali poprvé (tuto část při opakovaném zařazení už vynecháváme). Žákům 9. ročníku stačil čas do 10 minut, což např. v 6. ročníku považujeme na základě našich zkušeností za minimum. Teprve potom bylo žákům sděleno zadání.

Doba určená na práci se odvíjí od tématu, zkušeností žáků a jejich věku. Osvědčilo se nám pozorovat tabuli a v okamžiku, kdy se neobjevuje už nic nového, aktivitu ukončit. Kromě očekávaných pojmů se objevují i kresby, které bývají často docela výstižné. Pro jadernou fyziku se např. jedná

o výbuch, elektrárnu, nemocného člověka nebo „zmutované zvířátko“.

Ze zpětné vazby žáků vyplývá, že na aktivitě oceňují především využití digitálních technologií a seznámení s kooperativním nástrojem, který mohou využít i jinde, např. při řešení skupinových prací a projektů. Dále oceňují, že mohou vyjádřit svůj názor a napsat cokoli. Naopak zmiňují i negativní stránku, kdy se někteří spolužáci při komentování jednotlivých nápadů vyjadřují nevhodně. To naplňuje obavu z jednoho z námi předpokládaných rizik.

Pokud se aktivita zařazuje opakovaně, ukazuje se, že pro žáky přestává být atraktivní kreslit nebo psát na tabuli věci mimo téma, čímž dospějeme k efektivnější práci. Aktivitu je vhodné využívat i u témat, s nimiž mají žáci již nějakou zkušenost z každodenního života. Takových témat můžeme najít mnoho už v 6. ročníku (např. magnety, gravitace, délka, čas, hmotnost, teplota). Také na střední školu žáci přicházejí s mnoha miskoncepce, a proto vidíme velké možnosti využití platformy *Excalidraw* i na středních školách.

Rozdělování žáků do skupin podle společných zájmů

Návaznost aktivity na kompetenční rámec

Tato aktivita spadá do oblasti 3: *Prostředí pro učení*, konkrétněji se týká kompetence 3.1: *Vytvářím bezpečné prostředí pro učení* a v rámci ní úrovně 2, bodu 7: *Vedu žáky a žákyňe k tomu, aby si uvědomovali společné zájmy a hodnoty skupiny a vhodně reagovali na projevy ohrožující pozitivní vztahy ve třídě a respekt k odlišnostem*.

Stručný popis aktivity

Aktivita se zaměřuje na vytvoření skupin žáků s podobnými zájmy a jejich následnou spolupráci. Nabídneme tři způsoby rozdělení žáků, přičemž jeden z nich popíšeme podrobněji. Díky této aktivitě může žák zjistit, že spolužák, s nímž doposud příliš nekomunikoval, sdílí podobné zájmy. To může vést k lepšímu vzájemnému porozumění a posílení sociálních vazeb mezi žáky.

Podrobný popis zařazení aktivity do výuky

Aktivitu je vhodné zařadit do výuky, ve které chceme využít skupinovou práci nebo prvky kooperace. Nemusí přitom nutně jít o společné řešení úkolů, ale i o následnou diskuzi nad nimi. Pokud si žáci budou vybírat témata, která je skutečně zajímavá, otevírá se možnost volby kognitivně náročnějších úkolů nebo rozšiřujícího učiva. Předpokládáme totiž jejich vyšší vnitřní motivaci.

Jako první příklad rozdělení žáků podle nějakého zájmu může být uvedeno dělení podle *fyzikálních oborů*, které je vhodné například pro závěrečné opakování na základní škole. Při tomto způsobu doporučujeme upřednostnit skupinovou práci v podobě projektu nebo výuku s prvky projektu před kognitivně náročnějšími úkoly. Témata pro rozdělení žáků mohou být např.: fascinující světelná kouzla (optika); tajemství neviditelných sil (gravitace, elektřina, magnetismus); energie kolem nás (termodynamika, zákon zachování energie); příběhy pohybu (kinematika); cesta ke hvězdám (astrofyzika); síly přírody v akci (meteorologie); přeměny kolem nás (skupenství a jejich změny); zvukové vlny.

Druhým možným způsobem rozdělení žáků je dělení podle *typu úloh*, které chtějí řešit. Tento přístup je vhodný například pro zadávání kognitivně náročnějších úkolů v rámci již probranému tématu, kdy žáci zvládají základní řešení souvisejících úloh, nebo pro práci s rozšiřujícím učivem. Dostačující je jedna vyučovací hodina nebo její část, aby činnost pro žáky nebyla příliš stereotypní. Pokud chceme aktivitě vyčlenit více času, je vhodnější věnovat se jí ve více tématech než delší dobu v jednom tématu. Typy úloh pro rozdělení žáků mohou být: grafické úlohy; výpočtové úlohy; kvalitativní úlohy; experimentální úlohy; úlohy řešené pomocí simulací; problémové úlohy.

Třetí způsob, který uvedeme, je rozdělení žáků podle *využití fyziky v běžném životě*. Takové dělení může být nejvhodnější, protože nejvíce souvisí s běžnou zkušeností žáků. Aktivita je vhodná pro skupinový projekt s následnou prezentací. Aplikacemi pro rozdělení mohou být: fyzika v kuchyni; fyzika ve sportu; fyzikální hry; fyzikální paradoxy; fyzika v estetice; fyzika v medicíně; fyzika v architektuře a stavitelství; fyzika v dopravě; fyzika v zábavním parku; fyzika v kriminalistice. Může být obtížné trefit se zrovna do těch aplikací, o které se žáci zajímají nejvíc. Proto je vhodné, abychom nechali výběr tématu otevřený i jejich vlastním návrhům. Žáky s návrhy témat seznámíme dříve než v dané vyučovací hodině, aby se mohli zamyslet nad vlastním tématem, které by je bavilo řešit. Protože typicky nelze všechna témata zařadit do jednoho tematického celku, je vhodné aktivitu zařadit do období mezi nimi.

Abychom žákům zajistili dostatečný čas pro promyšlení zvoleného tématu, doporučujeme zahájit krátkou přípravu minimálně dvě vyučovací hodiny před samotnou realizací. V první fázi přípravy žáky informujeme, že se v následující vyučovací hodině, případně v několika následujících hodinách, budou věnovat fyzikálnímu tématu dle vlastního výběru. Zároveň jim nabídneme předem připravený seznam témat. Pokud jsme otevření i

návrhům samotných žáků, vyzveme je, aby v případě zájmu přišli s vlastním tématem. Pro případ, že by jejich návrh nebyl vhodný, doporučíme jim, aby si zároveň vybrali i téma z nabízeného seznamu. Každý žák si tedy sám zvolí jedno téma, případně k tomu jeden vlastní návrh tématu. Pro usnadnění přístupu k seznamu témat doporučujeme jeho vyvěšení ve třídě, zveřejnění na webových stránkách školy nebo umožnění žákům si seznam vyfotografovat. Vzhledem k tomu, že ne všichni žáci si téma vyberou okamžitě, je vhodné jim poskytnout potřebný čas na rozmyšlení. Tímto krokem příprava v dané vyučovací hodině končí.

Ve druhé fázi přípravy, která proběhne v následující vyučovací hodině, žákům rozdáme čisté papíry menšího formátu. Na tento papír žák napíše své jméno, příjmení a zvolené téma, případně i svůj návrh vlastního tématu. Následně žáci tyto papíry odevzdávají vyučujícímu. Tímto krokem příprava v dané vyučovací hodině končí.

Po skončení této vyučovací hodiny si vyučující přečte návrhy témat a provede jejich kategorizaci podle zvolených témat. Na základě této kategorizace se vytvoří pracovní skupiny žáků. V případě vzniku mnohočlenných skupin provedeme jejich další dělení na menší. Pokud jsou některé skupiny méně početné, nebo si dané téma zvolil pouze jeden žák, budou na něm pracovat v tomto počtu; témata mezi žáky nepřerazujeme. Je samozřejmé, že náročnost a rozsah práce musí být přizpůsoben počtu žáků v dané skupině a také jejich kognitivním schopnostem. Z tohoto důvodu při prvním zařazení této aktivity doporučujeme nabízet spíše omezený počet témat, aby se vytvořily skupiny s podobným počtem členů. Nyní můžeme zahájit vyučovací hodinu, během níž se žáci budou věnovat zadanému tématu.

V rámci vyhodnocení doporučujeme zaměřit se na dvě klíčové oblasti: výsledky skupinové práce a kvalitu spolupráce žáků. Monitorování spolupráce žáků je přitom nezbytné provádět průběžně. Skutečnost, že jsou žáci seskupeni podle svých zájmů, automaticky nezaručuje bezproblémovou spolupráci.

Forma prezentace skupinové práce se odvíjí od jejího konkrétního typu a zadání. V případě prací tvořivého charakteru s fyzickým výstupem může být vhodnou formou výstava. Pokud jsou pracovní skupiny menší a charakter práce umožňuje rovnoměrné rozdělení ústní prezentace mezi žáky ve skupině, může být prezentace realizována ústně před celou třídou. Tuto variantu je samozřejmě možné kombinovat s výstavou výsledného produktu. V situaci, kdy se jedná například o téma z nižšího ročníku nebo téma, které sice přímo nespadá do stávajících vzdělávacích programů, ale mohlo

by být pro žáky zajímavé, představuje velmi cennou zkušenost, pokud žáci prezentují dané téma v rámci výuky fyziky v nižších ročnících. Podobně je možné skupinovou práci využít v rámci vrstevnického učení tak, že její součástí bude i vytvoření pracovního listu s aktivní činností pro spolužáky, jejímž prostřednictvím se seznámí s daným tématem. Zmíněné metody a formy slouží pouze jako inspirace, vždy je vhodné přizpůsobit je konkrétním cílům a podmínkám.

Zkušenosti s aktivitou ve výuce fyziky

V rámci skupinové práce měli žáci na výběr témata: *vedení elektrického proudu v kovech, vedení elektrického proudu v kapalinách a vedení elektrického proudu v plynech.*

V našem případě si téma *vedení elektrického proudu v plynech* nezvolil žádný ze žáků, a proto se třída rozdělila do dvou velkých skupin. Domníváme se, že žáci toto téma pokládali za náročnější než ostatní, i když míra detailu zpracování závisela pouze na jejich volbě. V rámci těchto dvou skupin se žáci dále sami rozdělili do menších skupin po čtyřech. Každá skupina dostala titulní stranu (obr. 3) a seznam položek, které měly být splněny (obr. 4). Na základě něj může být vytvořeno bodové hodnocení.

TÉMA: VEDENÍ ELEKTRICKÉHO PROUDU V KOVECH VEDENÍ ELEKTRICKÉHO PROUDU V KAPALINÁCH VEDENÍ ELEKTRICKÉHO PROUDU V PLYNECH	NÁZEV SPOLEČNOSTI:
ROLE: (O) ŘEDITEL ODBORNOSTI: = koordinuje a zodpovídá za odborné zpracování, konzultuje s vyučujícím informace odborného charakteru (U) UMĚLECKÝ ŘEDITEL: = koordinuje a zodpovídá za vizuální styl a estetickou stránku, konzultuje s vyučujícím tisk materiálů (K) KREATIVNÍ ŘEDITEL: = koordinuje a zodpovídá za kreativitu a nápady, konzultuje s vyučujícím nestandardní návrhy (E) ŘEDITEL EFEKTIVITY: = koordinuje a zodpovídá za fungování skupiny a rovnoměrné rozdělení aktivit, konzultuje s vyučujícím aktivitu skupiny	
AKTIVITA: O: U: K: E: Σ:	

Obr. 3 Možná titulní strana zadání skupinové práce – rozdělení rolí (uvedeno pro inspiraci)

- ROZDĚLTE SI VE ČTYŘČLENNÉ SKUPINĚ ROLE ŘEDITELŮ
- VYMYSLTE NÁZEV VAŠÍ SPOLEČNOSTI
- NA KONCI KAŽDÉ VYUČOVACÍ HODINY KAŽDÝ ŘEDITEL ZHODNOTÍ SVOU ÚČAST A PRÁCI
- SPLŇTE KRITÉRIA PRO OBSAH PROJEKTU:

OBSAHUJE TROJROZMĚRNÝ MODEL PRO DANÉ TÉMA

OBSAHUJE ALESPŮŇ JEDNU ZAJÍMAVOST, KTEROU NEZNÁTE ZE ŠKOLNÍ VÝUKY

OBSAHUJE ALESPŮŇ JEDNU OTÁZKU SE ZAKRYTOU ODPOVĚDÍ

OBSAHUJE ALESPŮŇ JEDNU OTÁZKU NA PŘEMÝŠLENÍ BEZ ODPOVĚDI

OBSAHUJE PRVEK, KTERÝ SI ČTENÁŘ NEBO KOLEMJDOUNCÍ MŮŽE V PŘÍPADNĚ ZÁJMU VZÍT

OBSAHUJE ALESPŮŇ TŘI PRVKY, S KTERÝMI JDE POHYBOVAT

OBSAHUJE ALESPŮŇ TŘI BARVY

OBSAHUJE JEDEN QR KÓD JAKO ODKAZ NA VZDĚLÁVACÍ VIDEO K TÉMATU

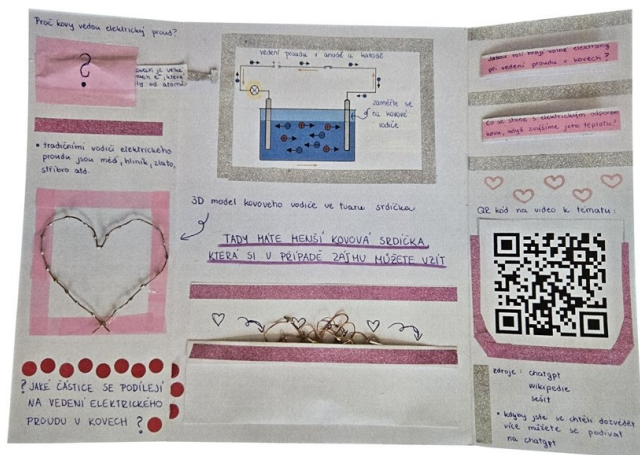
OBSAHUJE ALESPŮŇ JEDNO DOPORUČENÍ NA ZDROJ K ROZŠÍŘENÍ TÉMATU

OBSAHUJE SEZNAM ZDROJŮ

OBSAHUJE REÁLNÁ JMÉNA AUTORŮ

Obr. 4 Možná druhá strana zadání skupinové práce – seznam položek, které mají být splněny (uvedeno pro inspiraci)

Tato konkrétní skupinová práce se zaměřuje především na vytvoření interaktivních prvků a rozdělení rolí jednotlivých žáků ve skupině. Dodržování rolí není povinné, ale doporučené. Prezentace skupinové práce není v tomto případě součástí aktivity, podstatou je vytvoření zajímavého artefaktu na výstavu (obr. 5).



Obr. 5 Jeden z artefaktů vzešlých ze skupinové práce na téma vedení elektrického proudu v kovech

Aktivita byla zorganizována jako odpočinková série vyučovacích hodin pro žáky 9. ročníku před přijímacím řízením. Žáci měli k dispozici různé materiály (například lepící kamínky, samolepky, drobné kusy kovu, korálky, houbičky na mytí, plastové krabičky a podobně) poskytnuté vyučujícím, které mohli využít. Na žádost skupiny vyučující připravil požadovaný materiál na další vyučovací hodinu. Pro spojování materiálů mohli žáci s asistencí vyučujícího použít tavnou pistoli nebo mohli pájet.

Vzhledem k tomu, že žáci po každé vyučovací hodině, kdy tato výuka probíhala, hodnotili své zapojení do práce, tak po ukončení aktivity jako celku už žádné další vyhodnocování neprobíhalo. Skupiny, které nedokázaly splnit všechny úkoly ze zadání, nebyly nijak penalizovány. Většina skupin dokázala téměř vše splnit. Výsledné hodnocení žáků proběhlo pozitivní známkou udělenou za celkově aktivní přístup k práci. Někteří žáci se do rolí vžili více, někteří méně. Protože cílem nebylo dostat žáky do nekomfortní situace, bylo využívání rolí dobrovolné, ale přesto doporučené.

Aktivita byla mimo jiné také zařazena do výuky fyziky v 6. ročníku ZŠ, kdy žáci ve skupinách vyráběli různá měřidla, např. sluneční hodiny, přesýpací hodiny, rovníramenné váhy. Vyučující nejprve žákům nabídl několik možností, které měřidlo by mohli ve skupině vyrábět. Každý žák se rozmyslel, které měřidlo bude vyrábět, a tak vznikla u daného měřidla skupina. Rozdělení do skupin zabralo asi 15 minut, pak žáci začali pracovat na zadané práci. V tomto případě bylo jejich úkolem zjistit fyzikální podstatu měřidla a vymyslet, jakým způsobem a z jakého materiálu je zkonstruovat. Žáci na rozdělení, které se odvíjelo od měřidel, reagovali nejprve negativně, a ani během začátku práce atmosféra ve třídě nebyla dobrá. Žáci na výrobě měřidel pracovali celkem tři vyučovací hodiny a už druhou hodinu se atmosféra viditelně zlepšila. Nakonec po zbylou část práce byla atmosféra pozitivní, a to i podle žáků. Vyhodnocení aktivity ve smyslu, jak se žákům ve skupinách pracovalo, co se žákům na skupinové práci líbilo a nelíbilo, probíhalo v rámci jednotlivých skupin a to jak v průběhu práce, tak i na jejím závěru.

Závěr

V tomto článku jsme velmi stručně uvedli *Kompetenční rámec absolventa a absolventky učitelství* (KRAAU), který bude pravděpodobně v příštích letech ať už přímo, nebo nepřímo ovlivňovat vzdělávání budoucích učitelů na českých vysokých školách, a zprostředkovaně tak může mít vliv na kvalitu výuky na základních a středních školách, včetně výuky fyziky.

KRAAU na jednu stranu přiléhavě upozorňuje, v jak složitém kontextu se vzdělávání (včetně oborového a speciálně i fyzikálního) odehrává, na druhou stranu je rizikem, že bude odvádět pozornost budoucích učitelů (fyziky) od jádra jejich oboru (fyzikálních znalostí a dovedností, postojů k fyzice a hodnot spojených s fyzikou).

Poměrně podrobně jsme představili dvě aktivity do výuky fyziky: (i) mapování fyzikálních znalostí pomocí *Excalidraw* a (ii) rozdělování žáků do skupin podle společných zájmů. Ačkoliv někteří učitelé obdobné aktivity do výuku již zařazují (i bez znalosti KRAAU), chtěli jsme tyto aktivity podrobněji přiblížit a na základě nich ukázat, že některé části KRAAU mohou ve výuce fyziky dostat smysluplnou náplň.

Tento článek vznikl na základě nedávno obhájené diplomové práce *Aktivity do výuky fyziky související s kompetenčním rámcem absolventů učitelství* (řešitel: T. Fišar). Další informace a náměty spojené s KRAAU v souvislosti s výukou fyziky se objevují a budou objevovat na [5].

Literatura

- [1] Bořkovec, M. a kol.: Kompetenční rámec absolventa a absolventky učitelství. MŠMT, Praha, 2023. Dostupné z: https://msmt.gov.cz/uploads/kompetencni_ramec_absolventa_2023_10.pdf.
- [2] Kos, J., Křížová, M.: Strategie 2030+ v přípravě budoucích učitelů fyziky. Matematika–fyzika–informatika, roč. 33 (2024), č. 1, s. 39–51.
- [3] Žák, V. a kol.: Oborově specifický kompetenční rámec pro fyziku. MŠMT, MFF UK, Praha, 2026. Dostupné z: https://www.mff.cuni.cz/data/nodes/67268/OS_KR_FY_MSMT.pdf.
- [4] Excalidraw. [online]. [cit. 2025-12-12]. Dostupné z: <https://excalidraw.com>.
- [5] Katedra didaktiky fyziky MFF UK: Kompetenční rámec. [online]. [cit. 2025-07-07]. Dostupné z: <https://www.mff.cuni.cz/cs/kdf/studenti/kompetencni-ramec>.

Implementácia historických prvkov do vyučovania fyziky na gymnáziu

PATRIK KRIEK

Gymnázium Jozefa Gregora Tajovského, Banská Bystrica, SLOVENSKO

Úvod

Motivačný popud, ktorý vychádza z konštatovania, že „fyzika u žiakov nepatrí práve medzi obľúbené predmety“, je snáď taký starý, ako vyučovanie fyziky samo. Spoločnou snahou učiteľov fyziky a výskumníkov v oblasti didaktiky fyziky je neustále hľadanie ciest, ako možno tento stav zvrátiť, urobiť vyučovanie fyziky pre žiakov atraktívnejším a môcť tak poukázať na jeho neodmysliteľné miesto vo všeobecnom vzdelaní a praktickom živote. Je pochopiteľné, že v 21. storočí hľadáme tieto cesty najmä v informačných technológiách a, najmä posledné roky, v začlenení umelej inteligencie do vyučovania. Z nášho pohľadu je však zaujímavé aj „obzrieť sa späť“. Fyzikálne poznatky, objavy a metódy ich získavania majú svoj príbeh, históriu. Práve história poznatkov a metód poznávania by mohla byť účinnou cestou, ktorá by dokázala žiakov viac motivovať a priblížiť im fyziku. Tematikou dejín fyziky sa už zaoberalo viacero autorov z rôznych uhlov pohľadu, menujme napr. [1]. Ako sme už aj spomenuli, oproti iným metódam a technikám má jednu veľkú výhodu – je medzipredmetová, jej využitím tak možno motivačne pôsobiť aj na veľkú časť žiakov s iným ako prírodovedným zameraním. Vystáva však otázka, či využitie histórie fyziky vo vyučovaní má aj iné prínosy ako len motiváciu žiakov. Príspevok vznikol so zámerom priblížiť závery a zistenia autora v tejto oblasti v rámci jeho diplomovej práce [2]. Kladie si tak nasledovné ciele:

- v stručnosti podať prehľad o možnostiach implementácie historických prvkov do vyučovania fyziky na gymnáziu vrátane vlastných skúseností,
- predstaviť pedagogický experiment, ktorý skúmal výsledky implementácie historických prvkov do vyučovania fyziky na gymnáziu so zreteľom na postoje žiakov k tomuto predmetu a kvantitu resp. kvalitu ich vedomostí.

Článok je určený najmä učiteľom fyziky na gymnáziu, ktorí hľadajú rôzne cesty, ako motivovať žiakov vo vyučovaní. Môže však poslúžiť ako inšpirácia aj pre učiteľov fyziky v základných školách, kde je túto motivačnú techniku taktiež možné aplikovať.

1. História fyziky ako motivačná technika

V súvislosti s motiváciou žiakov zavádza Josef Trna [3] pojem *motivačné výučbové techniky*, ktoré chápe ako „... *podnet a spôsob, ktorým sú vo výučbe žiaci motivovaní, a to pri použití ľubovoľnej vyučovacej metódy*.“ Bližšie ich klasifikuje a spomína aj motivačné výučbové techniky *medzipredmetové*, medzi ktoré radí aj históriu fyziky a jej objavov. V našom ponímaní hovoríme o *historických prvkoch vo vyučovaní fyziky*, ktoré chápeme ako „*také prvky, ktoré využívajú históriu udalostí, výskumu, biografie fyzikov a ďalšie historické súvislosti ako prostriedok na obohatenie výučby fyziky*“ [2]. Analýzou dostupných prameňov v tejto oblasti sme rozčlenili množinu týchto prvkov na menšie obsahové jednotky:

Autobiografické prvky

Ide o autobiografické poznámky, ktoré vo formou medailónov bývajú súčasťou učebníc fyziky, pracovných zošitov či iných knižných materiálov. Slúžia na rýchle zoznámenie žiakov s fyzikmi, ktorí súvisia s preberanou témou. Obsahujú základné a najdôležitejšie informácie o ich živote, diele v súvislosti s témou a často aj zaujímavosti. S medailónmi možno pracovať aj opačne – žiaci na základe podrobného opisu života a diela fyzikov sa snažia vytvoriť ich medailóny, vybrať tak dôležité informácie a pracovať s textom (obr. 1).



*Christiaan Huygens (1629 - 1695) bol holandský fyzik a prírodovedec. Spočiatku sa venoval právu, aj ho študoval, už počas školských čias ho však zaujala matematika a fyzika. Zostrojil ďalekohľad a zaoberal sa kyvadlovými hodinami. Huygens sa tiež zaoberal podrobne teóriou svetla, bol zástancom jeho vlnovej povahy. Jeho predstavy sa však v tej dobe zatienili korpuskulárnou teóriou I. Newtona. Jeho meno nesie princíp, ktorý vysvetľuje šírenie vlnenia v prostredí pomocou tzv. vlnoplôch. Až na sklonku života napísal dielo *Cosmotheoros* (Pozorovateľ kozmu), kde zhrnul dovtedy známe poznatky o vesmíre. Nikdy sa neoženil ani nemal žiadnych potomkov.*

Obr. 1 Príklad medailónu fyziky Christiaana Huygensa

Opis doby a podmienok

Žiaci majú tendenciu posudzovať cestu k fyzikálnym objavom očami jedinca žijúceho v 21. storočí. Neuvedomujú si, že ľudia ešte na počiatku 17. storočia nemali také prístroje a metódy, ktoré by im dovolili merať

presne napr. čas či iné veličiny. Vývoj fyzikálnych poznatkov a rozhodnutia vedcov sú ovplyvnené vtedajšou politickou situáciou a kultúrnymi podmienkami. Žiaci by mali o týchto skutočnostiach vedieť, aby si vedeli urobiť správny obraz o fungovaní vedy a nemali skreslenú predstavu (obr. 2).

Známy Ohmov zákon, ktorého platnosť dnes vieme demonštrovať pomocou meracích prístrojov na hodine fyziky za pár minút, nebolo možné v minulosti dokázať až tak ľahko. V prvej polovici 19. storočia nemal G. S. Ohm k dispozícii citlivé meracie prístroje a ani zdroj stáleho napätia. Cesta k Ohmovmu zákonu, tak ako ho poznáme dnes, mu tak trvala niekoľko rokov.

Obr. 2 Opis doby a vtedajších podmienok pri objave Ohmovho zákona (podľa [4])

Historické pokusy a prístroje

Historický pokus je zo všetkých historických prvkov najčastejšou motivačnou výučbovou technikou, zároveň tak aj najviac bádateľsky preskúmanou oblasťou (napr. [5]). Jej výhoda spočíva v tom, že množstvo významných experimentov, ktoré v minulosti viedli k veľkým objavom, vieme prakticky úplne presne zreprodukovávať aj dnes pomocou jednoduchých pomôcok. Prednými stránkami takejto techniky je teda najmä jej autenticita a prepojenie fyziky s historickým pozadím. Medzi najznámejšie a využívané vo vyučovaní fyziky patria napr. Oerstedov pokus s magnetkou, Galileov pokus s naklonenou rovinou a iné.

Fyzikálne úlohy s historickým obsahom

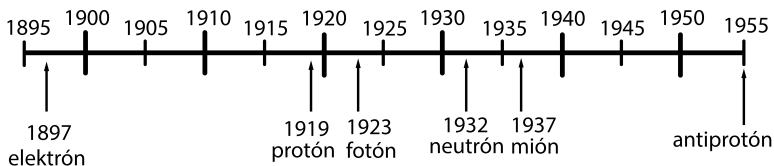
Inou možnosťou, ako implementovať históriu fyziky do jej vyučovania, je v rámci riešenia fyzikálnych úloh vychádzať zo situácií, ktoré súvisia práve s historickými experimentami. Pritom môže ísť o úlohy kvalitatívne aj kvantitatívne. Podstata a historické pozadie úloh nemusí presne zodpovedať skutočným udalostiam tej doby a experimentu, dôležité je však vyhnúť sa takým formuláciám, ktoré by históriu fyziky skresľovali či poďávali nepravdivé informácie (obr. 3).

Podľa dobových (ale nie zcela istých) zdrojov skúmal Galileo Galilei zákonitosti voľného pádu púšťaním rôzne ťažkých guľ zo Šikmej veže v Pise. Výška tejto veže je 55 m a je odklonená od zvislého smeru asi 3 m. Koľko tepov svojho srdca mohol zaznamenať Galileo Galilei pri páde guľe s hmotnosťou 5 kg, ak zoberieme priemernú tepovú frekvenciu 70 tep/min?

Obr. 3 Príklad kvantitatívnej fyzikálnej úlohy s historickým kontextom (podľa [6])

Časová priamka

Časová priamka je jednou z dôležitých pomôcok pri práci s viacerými časovými udalosťami, ktoré si potrebujeme prehľadne a graficky zatriediť. Žiaci s ňou môžu aktívne pracovať pri jej tvorbe, vhodná je najmä pri potrebe zatriediť viacero udalostí v chronologickom slede. Autor má skúsenosť s jej tvorbou napr. pri objavoch elementárnych častíc v 19./20. storočí (obr. 4).



Obr. 4 Príklad časovej priamky v téme objavy elementárnych častíc

Nobelove ceny

Motivačnou technikou, ktorá priamo súvisí s históriou fyziky, je prehľad udelených Nobelových cien za fyziku. Pozornosť môže byť venovaná ako autobiografiám vedcov, tak opisu ich objavov. Pôsobnosť tohto historického prvku zasahuje aj do súčasnosti a nabáda tak žiakov sledovať aj najnovšie objavy z fyziky a technických vied. Tematika môže byť spracovaná formou referátu či časovej priamky.

Fyzikálne zaujímavosti o dejinách fyziky

Dejiny fyziky v sebe skrývajú nielen množstvo poučných príbehov, ale častokrát aj úsmevné (či menej úsmevné) zaujímavosti, nazývané aj kuriozity. Tie pôsobia na žiakov obzvlášť motivačne, autor má vlastnú skúsenosť s kvízom, ktorého obsahom sú práve takéto kuriozity a zaujímavosti. Môžu slúžiť ako ozvláštnenie hodín fyziky, či aktivitu pre zastupovanú hodinu, kedy chceme so žiakmi „nenápadne“ riešiť fyziku. Zdrojom pre tieto zaujímavosti je sústavná analýza diel, ktoré sa zaoberajú práve dejinami fyziky, napr. [4]. Je však dôležité používať zaujímavosti overené, často možno nájsť (najmä na internete) nepodložené „fámy“ (obr. 5).

Pojmy v historickom kontexte

Je zaujímavé pozrieť sa na to, ako sa v priebehu času vyvíjali aj fyzikálne pojmy. Už len samotné slovo *fyzika* si prešlo svojím vývojom a bolo by zaujímavé zistiť, koľko žiakov pozná význam slova *silospyt*. Podobne si svojím vývojom prešli mnohé fyzikálne pojmy ako hmotnosť, či hustota – merná hmotnosť. Aj mnohé iné pojmy z techniky z posledných dvadsiatich

rokov už pomaly nadobúdajú historický charakter – CD či disketa sú pre dnešných žiakov vzdialené ale stále majú svojim princípom fungovania čo ponúknuť.

Johannes Kepler, známy Keplerovými zákonmi, trpel polyopiou, videl „rozmazane“. Najväčší hviezdár Európy 17. storočia tak na hviezdy ani poriadne nevidel.

Pierre Curie, ktorý značnú časť svojho života pracoval s rádioaktivitou, zomrel v roku 1906. Nie však na následky rádioaktivity, ako by mnohí predpokladali. Zrazil ho konský povoz.

Skvelý vynálezca Nikola Tesla mal fóbiu z perál. Jeho strach bol natoľko intenzívny, že sa vyhýbal všetkému, čo perly len pripomínalo. Vyhýbal sa tak dokonca aj ženám, ktoré nosili perlové náhrdelníky.

Obr. 5 Príklady zaujímavostí z dejín fyziky

Slovenskí (českí) fyzici

Prvok, ktorý priamo súvisí s autobiografickými poznámkami sú medailóny slovenských (českých) vedcov a fyzikov. Je dôležité, aby žiaci okrem zahraničných osobností vedeli aj o našich rodákoch, ktorí v dejinách taktie prispeli k rozvoju fyzikálnej vedy a techniky. Medzi tých najznámejších patria *Štefan Banič*, *Maximilián Hell*, *Jozef Murgaš* či *Dionýz Ilkovič*. Téma slovenských (českých) fyzikov je vhodná najmä na prácu s referátom či prezentáciou.

Pri rozdelení množiny historických prvkov na menšie celky si nerobíme nárok na ich úplnosť, takéto rozdelenie by mohlo byť vyčerpávajúce a nové prvky by mohli byť nachádzané prakticky stále. Naším zámerom bolo predstaviť tie základné, ktoré možno čo najjednoduchšie implementovať do vyučovania fyziky. V ďalšom texte chceme poukázať na konkrétny pokus implementácie takýchto prvkov do vyučovania a našich výsledkov.

2. Implementácia histórie fyziky do vyučovania v podobe pracovných listov

Našou myšlienkou bolo určitou formou popri klasickom výklade učiva priblížiť súčasným žiakom aj dejiny fyziky. Takémuto zámeru sa núka viacero ciest, napr. tvorba učebného textu, prezentácie či multimediálneho textu. My sme sa rozhodli pre formu pracovných listov a to z toho dôvodu, že by sme radi okrem pasívneho predávania informácií o dejinách fyziky žiakov uviedli aj do aktívneho riešenia úloh a problémov s historickým kontextom. Východiskom tvorby pracovných listov bol v dobe písania tohto príspevku platný Štátny vzdelávací program (ŠVP) [7] a Cieľové po-

žiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z fyziky [8]. Cieľovou oblasťou, na ktorej sme sa rozhodli tieto pracovné listy aj otestovať, bola oblasť *dynamika hmotného bodu*. V rámci diplomovej práce [2] tak vzniklo 10 pracovných listov, ktoré cielene viedli žiakov témami historickým prístupom. Pracovné listy mali jednotnú štruktúru, pričom prvky listov uvádzame na obr. 6. Čitateľ ich nájde v plnom znení v spomínanej práci [2].

3. Metodológia výskumu

Pohnútkou k výskumnému zámeru uvedenému nižšie bola otázka, či okrem motivačného účinku hovorí pre implementáciu historických prvkov do vyučovania fyziky aj niečo iné, napr. pozitívny vplyv na rozsah a úroveň žiackych vedomostí. Na základe predpokladov sme stanovili *výskumný cieľ*: overiť, či implementácia historických prvkov v učive fyziky v podobe pracovných listov má pozitívny vplyv na

- postoj žiakov k predmetu fyzika v strednej škole,
- rozsah a úroveň nadobudnutých poznatkov v predmete fyzika žiakmi strednej školy.

V súvislosti s týmto cieľom sme sformulovali konkrétne *výskumné hypotézy*:

- H1: Implementácia historických prvkov v učive fyziky v podobe pracovných listov má pozitívny vplyv na postoj žiakov k predmetu fyzika v strednej škole.
- H2: Implementácia historických prvkov v učive fyziky v podobe pracovných listov má pozitívny vplyv na rozsah a úroveň nadobudnutých poznatkov v predmete fyzika žiakmi strednej školy.

Ako výskumné nástroje boli využité neštandardizovaný dotazník a didaktický test z oblasti dynamika hmotného bodu, ktorých tvorbu a presné znenie nájde čitateľ v [2]. Dotazník mal podobu vstupného a výstupného dotazníka a obsahoval výroky s možnosťou odpovede na Likertovej škále. Dotazník obsahoval 10 položiek, pričom cieľom prvých 5 bolo identifikovať zmenu v postojoch žiakov strednej školy k predmetu fyzika. Prvú polovicu položiek vyplňala experimentálna aj kontrolná trieda. Druhá polovica položiek sa vzťahovala k historickým prvkom a postoju žiakov k nim. Túto časť vyplňala len experimentálna trieda, kde boli do vyučovania implementované pracovné listy s historickým kontextom. Cieľom metódy didaktického testu bolo identifikovať zmenu v rozsahu a úrovni nadobudnutých poznatkov žiakmi v tematickom celku *Sila a pohyb* – konkrétne z častí kinematika a dynamika. Rozhodli sme sa použiť neštandardizovaný test s ohľadom na ŠKVP danej školy, kde výskum prebiehal. Test pozostával

Úvodný motivačný text

Medailón fyzika

1.1 Ako odmerať palicou obvod Zeme?

Ále veľká je chuť naša Zemi? Kedy vám niekto povedal túto otáčku, pravdepodobne by ste siakli po smutku a našli do pár sekúnd príbližný obvod tejto planety. Takáto motivácia však často nemá účel. Ako na to teda prísť? Asi nás ponúka prírodná morálna, ale mnoho rádov na vedľajšom oblúku. Teda otáčku na našej sieti v roku 250 pred našim letopočtom priky sčítal Eratosthenes z Kyreny. Ako to urobil, ako z drevenou palicou? Boli jeho výsklady presné?

1. Prečítaj si opäť informáciu o živote Eratosthenesa z Kyreny.

Eratosthenes z Kyreny (asi 284 p. n. l. – 202 p. n. l.) bol grécky matematik, astronóm, básnik a jeden z najväčších geografov antického obdobia. Z povinnosti panovníkov z dynastie Ptolemajcov viedol najdlhšiu knižnicu staroveku – Aleksandrijskú knižnicu. Veľa jeho diel sa stratilo, nohovor sa že dokonca našiel a prešiel a opäť nedokázal nájsť. Pravdepodobne ako prvý začal používať pojmy ako zemepisná dĺžka a šírka. Je známy pre Eratosthenesovo sčítanie, čo je algoritmus na výpočet prvočísel. V staroveku typy čísel, je možné, že sme ich chceli. Výsledok nie je ani toľko o jeho zameriavali.

2. Ak Eratosthenes urobil svoj prvotný odhad. Skús odhadnúť, aký obvod v kilometroch má Zem.

Môj odhad: Zem má obvod asi _____ km.

3. Ako by si urobil odhad množstva v Eratosthenesovej dobe ty?

Eratosthenes si vedel odhadnúť, pretože predmet vyruší v istom čase dĺžku rovnú dĺžke tieňa. Výsledok si, že v meste Syene (dnes Assuán) – mesto na juhu Egyptu v blízkosti obkreslenia Rieky) svetlo slnka v určitý deň v roku stálo na dvoch stĺpoch a predmet vytváral rovnaký tieň. V Aleksandrii takisto mohli napríklad, správnosť si to aj vysvetliť rozdielnym postavením miest na obkresle kružnice voči Slneku. Otvor sa v tejto dobe opäť napríklad, že naše Zem má približne guľovitý tvar. Napríklad im k tomu zameriavali obrázok na mriežke, či na pozorovaní obkresle. Hovorí sa, že k určeniu obvodu Zeme mu okrem vediacim postavili len jednu palicu – drevenú palicu. V deň letného obkreslenia na juhu palicu na juhu v Syene obkresle rovnakú dĺžku tieňa. O rok neskôr v rovnaký deň vykopali obrázok tieňa palice aj v Aleksandrii a výsklady pre neho mohli odhadnúť presnosť. Drevená palica vďaka tomu, ktorý vykopali rovnakú dĺžku tieňa obkresle približne 7,2°. Právnosť delenia kružnice na 360° a radiálnosť miest ho okrem toho naviedli na riešenie.

Motivačný názov pracovného listu

Motivačná ilustrácia

Dobová mapa

Miesto pre odhad a nápady žiakov

4. Eratosthenes zistil v Aleksandrii odklon tieňa 7,2°, pričom situáciu videl na obrázku nižšie. Ďalej poznal približnú vzdialenosť medzi Syene a Aleksandriou $d = 800$ km. Skús za pomoci týchto informácií urobiť príbližný obvod Zeme tak, ako to urobil Eratosthenes.

5. Pozri si video, v ktorom je ešte raz vysvetlený Eratosthenesov postup určovania približného obvodu zemegule. Aké ďalšie informácie v ňom zazrel? Pomocou čísel 1 až 4 odhadni číselníky tohto postupu, začni číslom 1. K viden sa dostaneš pomocou priloženého QR kódu.

☐

☐

☐

☐

Doplňujúce úlohy s podporou externého zdroja

Text s historickými poznámkami

6. Zisti pomocou internetu, aký je príbližný obvod Zeme. Prečo možno dohľadaj viac hodnôt? Ako sa líši Eratosthenesov odhad od skutočnosti? A čo tvoj odhad v úlohe č. 2?

Záverčné otázky a reflexia odhadov žiakov

Obr. 6 Štruktúrne prvky pracovných listov, bližšie popísané v [2]

Matematika – fyzika – informatika **35** (3) 2026

219

z ôsmich úloh (štyri úlohy z kinematiky a štyri úlohy z dynamiky), každá položka sa vzťahovala k jednému pracovnému listu, ktoré boli všetky aplikované v experimentálnej triede. Typy úloh boli rôznorodé, od výberu správnej odpovede po otvorené otázky. Vzhľadom na absenciu pilotáže výskumného nástroja sme pristúpili k vlastnému skórovaniu didaktického testu. Keďže jeho cieľom bolo primárne zistiť zmenu v úrovni a rozsahu poznatkov nadobudnutých žiakmi, opreli sme sa o Niemierkovu taxonómiu poznávacích cieľov. Podľa toho bolo jendotlivým úlohám pridelené bodovanie nasledovne:

- zapamätanie ($w = 1$) 1 b,
- porozumenie ($w = 2$) 2 b,
- špecifický transfer ($w = 3$) 3 b,
- nešpecifický transfer ($w = 4$) 4 b.

Výskum prebiehal v rámci dvoch paralelných tried prvého ročníka (I. A a I. B) na všeobecnom gymnáziu, ktoré majú v predmete fyzika rovnakého vyučujúceho s dotáciou hodín 2+1, triedy sa na jednej hodine v týždni delia na skupiny. Obe triedy sú porovnateľne veľké, v I. A triede je 32 žiakov a I. B triede 31 žiakov. Triedu I. A sme zvolili za *experimentálnu triedu* a I. B za *kontrolnú triedu*. V zmysle metodologickej terminológie sme tak vzhľadom na podmienky a možnosti vykonať takýto časovo náročnejší pedagogický experiment zvolili *dostupný výber*. V rámci správneho postupu sme pred vstupom do terénu uskutočnili tzv. *pilotážny prieskum*. Jeho cieľom bolo hlavne zoznámiť sa s terénom a zistiť informácie o našom výskumnom súbore. Dozvedeli sme sa, že triedy sú okrem počtu žiakov porovnateľné aj vo výkone, vedomostiach a zručnostiach z fyziky. Túto skutočnosť nám potvrdila ich vyučujúca fyziky, ktorá si úroveň vedomostí a zručností žiakov overuje pri nástupne na strednú školu, čím chce zistiť, aké sú rozdiely medzi žiakmi prichádzajúcimi z rôznych základných škôl. Po pilotážnom prieskume sme podľa metodologických zvyklostí pristúpili v predvýskumu, ktorého cieľom je hlavne overiť *nosnosť výskumných nástrojov*. Siestim žiakom bol daný nami vytvorený dotazník, aby sme si overili, či žiaci správne rozumejú položeným otázkam a vedia, ako pracovať s použitou škálou. Na základe tohto predvýskumu sme jasnejšie formulovali použitie škály pri značení odpovedí. Predvýskum didaktického testu z časových dôvodov nebolo možné vykonať.

Výskum začal v druhej polovici októbra 2023, keď vyučujúca začala na hodinách preberať tematický celok *Sila a pohyb*. Za tento čas si už žiaci oboch triedy zvykli na nové prostredie a čiastočne si vybudovali nový po-

stoj k fyzike na inom stupni školy, pričom bola oslabená zložka ich postoja, ktorú si priniesli zo základnej školy. Žiakom oboch tried bol v tejto dobe zadaný vstupný dotazník. Experimentálna trieda vyplnila obidve časti dotazníka, kontrolná trieda len prvú časť týkajúcu sa postoja k fyzike ako vyučovaciemu predmetu. Nasledovala fáza implementácie pracovných listov, ktorú v exmperimentálnej triede vykonávala vyučujúca fyziky. V experimentálnej triede boli popri klasických metódach aplikované v učive mechaniky aj pracovné listy s historickými prvkami. V kontrolnej triede boli aplikované len klasické metódy, zväčša výklad nových tém. Po prebratí poslednej témy, šmykového trenia, nastala vo februári 2024 posledná fáza výskumu. V experimentálnej a kontrolnej triede sme zadali výstupný dotazník (zhodný so vstupným), pričom opäť experimentálna trieda vyplnila všetky jeho časti a trieda kontrolná len časť týkajúcu sa postoja k fyzike ako vyučovaciemu predmetu. Obom triedam bol následne zadaný aj rovnaký didaktický test. Vzhľadom na povahu výskumu a možnosti nebol žiakom zadávaný pretest, približne rovnakú úroveň vedomostí a zručností oboch tried sme si overili v rámci pilotážneho prieskumu, kde nám to potvrdila ich vyučujúca.

4. Výsledky výskumu a ich diskusia

Nižšie uvádzame hlavné závery výskumu, ktorý sa týkal implementácie historických prvkov do vyučovania fyziky strednej školy. Kompletné vyhodnotenie výsledkov môže čitateľ nájsť opäť v zdroji [2]. V tomto článku by sme radi vyzdvihli najmä zistenia, ktoré môžu byť užitočné pre prax a prínosom vo fyzikálnom vzdelávaní.

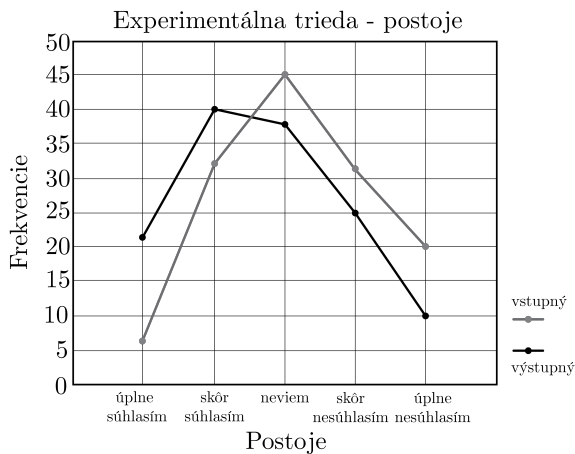
V rámci prvej hypotézy sme sa snažili zistiť, či implementácia historických prvkov do vyučovania fyziky strednej školy má štatisticky významný pozitívny vplyv na postoj žiakov k tomuto predmetu. Prostredníctvom Pearsonovho chí-kvadrát testu nezávislosti sme porovnávali postoje žiakov k predmetu fyzika na začiatku ich štúdia a po prebratí tematického celku *Sila a pohyb*, počas ktorého boli do výučby fyziky aplikované pracovné listy s historickou tematikou. Výsledky štatistickej analýzy potvrdili, že v experimentálnej skupine v priebehu sledovaného obdobia došlo k signifikantnej zmene v postojoch žiakov k predmetu fyzika – študenti vyslovili pozitívnejší vzťah k predmetu fyzika ($\chi^2 = 13,21$; $df = 4$; $p = 0,01026 < 0,05$; Cramer $V = 0,221$ – stredný efekt). Môžeme teda konštatovať, že implementácia historických prvkov a artefaktov vo výučbe fyziky predstavuje signifikantný, stredne silný faktor, ktorý má pozitívny vplyv na postoje študentov k predmetu fyzika (obr. 7).

Sumár frekvencií Experimentálna skupina		POSTOJE				
Dotazník	úplne súhlasím	skôr súhlasím	neviem	skôr nesúhlasím	úplne nesúhlasím	Total
VSTUPNÝ	7	32	45	31	20	135
VÝSTUPNÝ	22	40	38	25	10	135
Celkovo	29	72	83	56	30	270

Sumár očakávaných frekvencií Experimentálna skupina		POSTOJE					$\chi^2 = 13,21$ $p = 0,10276$
Dotazník	úplne súhlasím	skôr súhlasím	neviem	skôr nesúhlasím	úplne nesúhlasím	Total	
VSTUPNÝ	14,5	36	41,5	28	15	135	
VÝSTUPNÝ	14,5	36	41,5	28	15	135	
Celkovo	29	72	83	56	30	270	

Obr. 7 Štatistické spracovanie prvej hypotézy pre experimentálnu skupinu

Zisteniu zodpovedá aj situácia v kontrolnej triede. Posun postoja k predmetu fyzika v danom časovom úseku je v kontrolnej triede len minimálny ($\chi^2 = 1,34$; $df = 4$; $p = 0,855 > 0,05$). Môžeme tak predpokladať, že za zmenu postoja v experimentálnej triede môže jediný odlišný faktor medzi týmito dvoma skupinami – pravidelná aplikácia dejín fyziky v podobe pracovných listov do vyučovania. Časť dotazníka, ktorá sa týkala dejín fyziky a vyplňala ju len experimentálna trieda potvrdzuje, že história fyziky je žiakmi vnímaná pozitívne (obr. 8).



Obr. 8 Frekvencia postojov žiakov experimentálnej triedy k predmetu fyzika

V rámci druhej hypotézy sme sa zamerali na otázku, či implementácia historických prvkov v podobe pracovných listov má vplyv na rozsah a úroveň žiackych vedomostí.

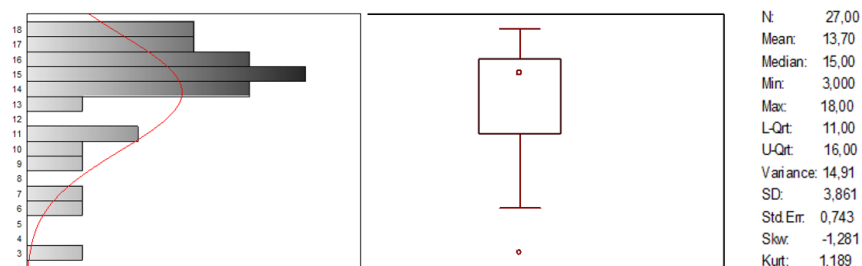
Výskumným nástrojom bol didaktický test, ktorý po prebratí celku *Sila a pohyb* (dynamika hmotných bodov) bol zadaný tak ako experimentálnej, tak aj kontrolnej skupine. Vybierali sme dokopy 27 testov v experimentálnej a 28 testov v kontrolnej triede. Na vyhodnotenie rozdielov medzi skupinami bol využitý neparametrický U-test, pričom jeho výsledky uvádzame na obr. 9.

Premenná	Mann-Whitney U-test				
	Rank Sum exp.	Rank sum kon.	U	Z	p
Bodové skóre	794	746	340	0,636954	0,524155

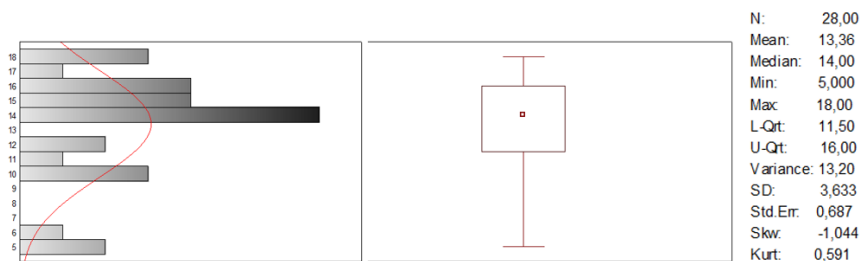
Obr. 9 Mann-Whitney U-test pre druhú hypotézu

Ako môžeme vidieť z tabuľky, výsledky U-testu medzi sledovanými skupinami žiakov nepotvrdili štatisticky významné rozdiely v úrovni dosiahnutých vedomostí preukázaných v rámci didaktického testu z fyziky ($U = 340,00$; $p = 0,524 > 0,05$; $\eta^2 = 0,07$ – veľmi malá miera efektu), tj. implementácia pracovných listov s historickou tematikou nemá signifikantný vplyv na úroveň fyzikálnych vedomostí žiakov.

Na obr. 10 a obr. 11 uvádzame aj bodové skóre a iné štatistické charakteristiky pre experimentálnu a kontrolnú triedu.



Obr. 10 Bodové skóre a štatistika pre experimentálnu skupinu



Obr. 11 Bodové skóre a štatistika pre kontrolnú skupinu

Priemerné bodové skóre žiakov experimentálnej skupiny dosiahlo hodnotu $M = 13,70$ bodov (medián = 15; tj. aspoň polovica žiakov získala minimálne 15 z 18 možných bodov), v prípade žiakov kontrolnej skupiny to bolo $M = 13,36$ bodov (medián = 14, t. j. aspoň polovica žiakov získala minimálne 14 bodov). Takéto zistenie je však mimoriadne zaujímavé. Je pedagogicky známe, že motivácia žiakov je nedielnym predpokladom k lepším učebným výkonom. Ako sa však v našom šetrení nakoniec ukázalo, ide pravdepodobne o predpoklad nutný a nie postačujúci, keďže aj v motivovanejšie triede, v ktorej došlo k posunu v postojoch k predmetu fyzika sme nezaznamenali štatisticky významný rozdiel v úrovni a rozsahu nadobudnutých poznatkov oproti kontrolnej triede. Uvedomujeme si, že vzhľadom na podmienky nášho výskumu, veľkosť vzorky a časové rozpätie experimentu nemusia byť výsledky úplne smerodajné a táto otázka by si zaslúžila väčšie šetrenie. Tento zaujímavý výsledok môže byť spôsobený aj práve limitáciami výskumného šetrenia a nemožno tak s istotou vylúčiť vplyv implementácie historických prvkov na kvalitu a kvantitu žiackych vedomostí.

Záver

V tomto príspevku sme sa zamerali na možnosti implementácie histórie fyziky do vyučovania a ich teoretických prínosov pre vyučovanie samotné. Výsledky sú súčasťou diplomovej práce [2], kde čitateľ nájde podrobné zistenia a vyhodnotenie.

Ako sa ukázalo, dejiny fyziky majú vysoký motivačný potenciál najmä kvôli skutočnosti, ktorú už sme skôr uviedli, a síce, že ide o medzipredmetovú motivačnú techniku, ktorá má potenciál zaujať aj žiakov, ktorí k prírodným vedám neinklinujú. Aj keď sa v pedagogickom experimente neukázal štatisticky významný vplyv využívania takýchto prvkov na kvan-

titu a kvalitu žiackych vedomostí, nemožno tento vplyv plne vylúčiť vzhľadom na limitácie výskumného šetrenia. História fyziky, objavov a vedcov má okrem motivačného aj veľa iných aspektov, ktoré jednoznačne odporúčajú jej zaradenie do vyučovania fyziky. Veríme, že historické prvky tak nájdu cestu k učiteľom a budú môcť byť aplikované do vyučovania ako historické spestrenie hodín fyziky.

Literatúra

- [1] Šebesta, J.: Dejiny a filozofia fyziky vo fyzikálnom vzdelávaní. FMFI UK, Bratislava, 1998.
- [2] Kriek, P.: Historické prvky v učive fyziky strednej školy. Diplomová práca, Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre, 2024. Dostupné na: <https://opac.crzp.sk/?fn=detailBiblioFormChildCELJ9&sid=B4B27B8958935512D756C0CEE3A9&seo=CRZP-detail-kniha>.
- [3] Trna, J.: Jak motivovat žáky ve fyzice se zaměřením na nadané. Paido, Brno, 2012. ISBN 978-80-7315-238-3
- [4] Štoll, I.: Dějiny fyziky. Prometheus, Praha, 2009. ISBN 978-80-7196-375-2.
- [5] Veselá, A.: Významné historické experimenty jako motivace ve výuce fyziky. Diplomová práce. Univerzita Hradec Králové, 2017. Dostupné na: <https://theses.cz/id/xeglp4/>.
- [6] Vondřejcová, K.: Životy fyziků v úlohách a experimentech. MaFy, Hradec Králové, 2011. ISBN 978-80-86148-72-4.
- [7] Štátny pedagogický ústav: Inovovaný štátny vzdelávací program. 2015. Dostupné na: <https://www.statpedu.sk/sk/svp/inovovany-statny-vzdelavaci-program/>.
- [8] Štátny pedagogický ústav: Cieľové požiadavky na vedomosti a zručnosti maturantov z fyziky. 2015. Dostupné na: https://www.statpedu.sk/files/sk/svp/maturitne-skusky/platne-od-sk-r-2018/2019/cp_fyzika_2019.pdf.

Nalezení nejlepšího řešení

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V nedávném článku [1] jsme si ukázali princip dynamického programování a jeho využití při řešení kombinatorických úloh typu *Kolika různými způsoby lze něco udělat?* Druhým velkým okruhem úloh, v nichž využijeme dynamické programování, jsou optimalizační úlohy typu *Jak nejlépe lze něco udělat?* Těm bude věnován dnešní článek.

Základní schéma řešení těchto úloh zůstane stejné, jako jsme si ho představili již v článku [1]. Nedokážeme sice přímo vyřešit úlohu pro velká vstupní data velikosti N , ale odvodíme způsob, jak lze toto řešení nalézt s využitím výsledků úloh téhož typu pro menší vstupní data. Vyřešíme tedy nejprve triviální úlohu pro vstup $N = 1$, pomocí jejího výsledku pak úlohu velikosti 2, s využitím výsledků těchto dvou úloh vyřešíme případ $N = 3$, atd. Takto postupujeme dále, až se dostaneme k řešení úlohy původně požadované velikosti.

Výsledky všech menších vyřešených úloh si budeme ukládat do tabulky, abychom je mohli využít v budoucnu, až budeme řešit úlohy větší. V nejjednodušším případě vystačíme s jednorozměrným polem t velikosti N , v němž každá uložená hodnota $t[i]$ udává výsledek úlohy pro vstupní data velikosti i . K obtížnějším úlohám s dvojrozměrnou tabulkou t se vrátíme někdy později v jiném článku.

Při určování počtu možností v článku [1] jsme počítali hodnotu $t[i]$ vždy jako součet některých vhodných hodnot $t[k]$ pro $k < i$. Nyní při řešení optimalizačních úloh bude změna spočívat pouze v tom, že při výpočtu $t[i]$ nebudeme sčítat, ale budeme vybírat maximum nebo minimum z vhodných hodnot $t[k]$ pro $k < i$. Předvedeme si to na řešení dvou konkrétních příkladů.

Podobně jako v [1] začneme u jednoduchého grafového problému. Máme dán orientovaný acyklický graf s N vrcholy, jehož vrcholy jsou očíslovány od 1 do N v topologickém uspořádání. Připomeňme si, že každý orientovaný graf bez cyklů lze topologicky uspořádat, tzn. očíslovat jeho vrcholy navzájem různými čísly od 1 do N takovým způsobem, aby každá hrana vedla z vrcholu s menším číslem do vrcholu s větším číslem. Algoritmem nalezení topologického uspořádání se zde zabývat nebudeme a předpokládáme, že zadaný graf je již topologicky uspořádan. Naším úkolem je určit délku nejdelší cesty z vrcholu 1 do vrcholu N .

Úlohu je možné řešit prohledáváním zadaného grafu do hloubky. Prohledávání začneme ve startovním vrcholu 1 a průběžně si budeme pamatovat, v jaké vzdálenosti od něj se momentálně nacházíme. To lze snadno implementovat rekurzivní funkcí, která bude v jednom parametru dostávat číslo zpracovávaného vrcholu a ve druhém parametru jeho vzdálenost od startovního vrcholu 1. Při každém příchodu do cílového vrcholu N porovnáme aktuální délku cesty s dosud nalezeným maximem a hodnotu maxima případně zlepšíme (tzn. zvýšíme, protože hledáme nejdelší cestu).

V následující ukázkové implementaci předpokládáme, že zadaný graf je reprezentován maticí sousednosti g . Hodnota $g[x][y]$ je typu boolean a udává, zda v grafu existuje orientovaná hrana z vrcholu x do vrcholu y . Vzhledem k topologickému uspořádání grafu nás zajímají pouze takové hodnoty $g[x][y]$, v nichž $x < y$. Jiné hrany v topologicky uspořádaném grafu totiž nemohou existovat.

```
def maxdelka(g, N):
    maximum = 0

    def pruchod(v, delka):
        nonlocal maximum
        if v == N:
            maximum = max(delka, maximum)
        else:
            for k in range(v+1, N+1):
                if g[v][k]: pruchod(k, delka+1)

    pruchod(1, 0)
    return maximum
```

Uvedené řešení sice dává správný výsledek, ale podstatnou nevýhodou je jeho neefektivita. Počet různých cest z vrcholu 1 do vrcholu N v ori-

entovaném grafu může být až exponenciální vzhledem k počtu vrcholů N . Popsaný postup řešení postupně prochází každou z těchto cest, takže jeho asymptotická časová složitost je v nejhorším případě exponenciální vzhledem k N .

Ukážeme si podstatně lepší řešení založené na metodě dynamického programování. Pro jednotlivé vrcholy $i = 1, 2, \dots, N$ budeme postupně počítat délku nejdelší cesty z vrcholu 1 do vrcholu i . Tyto délky si budeme ukládat pro další využití do pole t jako hodnoty $t[i]$. Je zřejmé, že $t[1] = 0$. Ukážeme, jak spočítáme $t[i]$ pro $i > 1$, když už známe hodnoty $t[1], t[2], \dots, t[i-1]$. Uvažujme jednu libovolnou cestu vedoucí z vrcholu 1 do vrcholu i . Jejím předposledním vrcholem je nějaký vrchol k . Podle topologického uspořádání je $k < i$, takže při výpočtu $t[i]$ již známe hodnotu $t[k]$ neboli délku nejdelší cesty z vrcholu 1 do vrcholu k . Pak tedy nejdelší cesta z vrcholu 1 do vrcholu i vedoucí přes vrchol k má délku $t[k] + 1$. Při výpočtu $t[i]$ proto stačí uvažovat všechny vrcholy k takové, že v grafu existuje hrana z vrcholu k do vrcholu i . Hodnotu $t[i]$ určíme jako maximum z hodnot $t[k] + 1$ pro všechny takové vrcholy k .

Uvedeným postupem spočítáme po řadě hodnoty $t[2], t[3], \dots, t[N]$. Poslední z nich $t[N]$ je hledaným výsledkem naší úlohy. Výpočet každé hodnoty $t[i]$ má časovou složitost $O(N)$ a těchto hodnot je $N - 1$, takže asymptotická časová složitost celého řešení je $O(N^2)$. Prostorová složitost je $O(N)$, neboť si musíme pamatovat všech N počítaných hodnot $t[i]$ pro případ, že je budeme ještě potřebovat. Některé z nich si možná ukládáme zbytečně a už je nepoužijeme, ale to dopředu nevíme.

Popsaný algoritmus můžeme zapsat jako funkci v Pythonu. Na první pohled se nabízí toto jednoduché řešení:

```
def maxdelka(g, N):
    t = [0] * (N+1)
    for i in range(2, N+1):
        for k in range(1, i):
            if g[k][i]: t[i] = max(t[i], t[k]+1)
    return t[N]
```

Uvedená funkce vypadá sice dobře a pro některé vstupy dává správné výsledky, má ale jednu velmi podstatnou vadu: obecně nefunguje správně. Představte si třeba graf se čtyřmi vrcholy a s hranami $(1, 4)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$. Jediná cesta z vrcholu 1 do vrcholu 4 má délku 1, ale naše funkce vrátí chybný výsledek 2. Počítá totiž délku nejdelší cesty vedoucí do vrcholu N , ale ne nutně ze startovního vrcholu 1. Když si uvědomíme tento problém,

oprava funkce je již docela snadná:

```
def maxdelka(g, N):
    t = [None] * (N+1)
    t[1] = 0
    for i in range(2, N+1):
        for k in range(1, i):
            if g[k][i] and t[k] != None:
                if t[i] == None or t[i] < t[k]+1:
                    t[i] = t[k]+1
    return t[N]
```

Přirozeným rozšířením naší úlohy je požadavek určit nejen délku nejdelší cesty v grafu z vrcholu 1 do vrcholu N , ale nalézt i tuto cestu a vypsát ji jako posloupnost čísel procházených vrcholů. To lze řešit při využití dynamického programování dvěma základními způsoby.

První možností je uložit si pro každé $i = 1, 2, \dots, N$ zároveň s hodnotou $t[i]$ také celou nejdelší cestu vedoucí z vrcholu 1 do vrcholu i . Hodnotu $t[i]$ jsme získali jako $t[k] + 1$ díky nějakému konkrétnímu vrcholu k a nejdelší cestu vedoucí do vrcholu i dostaneme tak, že dříve nalezenou cestu do vrcholu k nyní jednoduše prodloužíme o vrchol i . Nevýhodou tohoto řešení je kvadratická prostorová složitost vzhledem k N . Postupně si ukládáme N cest, z nichž každá má délku $O(N)$.

Výhodnější je proto druhá možnost, jak lze k řešení přistoupit. Pro každé $i = 1, 2, \dots, N$ si zároveň s hodnotou $t[i]$ uložíme pouze jedno číslo: číslo toho vrcholu k , z něhož jsme přišli do vrcholu i po nejdelší cestě (tedy takové k , pro které $t[i] = t[k] + 1$). Toto číslo si uložíme do druhého jednorozměrného pole p . Bude tedy platit $p[i] = k$, údaj $p[i]$ představuje předchůdce vrcholu i na optimální cestě vedoucí z vrcholu 1 do vrcholu i . Po spočítání všech dvojic hodnot $t[i]$, $p[i]$ bude $t[N]$ udávat délku nejdelší cesty a z uložených hodnot $p[i]$ nyní dodatečně sestrojíme odzadu trasu nejdelší cesty. Tato cesta končí vrcholem N , do něj jsme přišli z vrcholu $p[N]$, tomu předchází vrchol $p[p[N]]$ atd., dokud nedojdeme ke startovnímu vrcholu 1.

Asymptotická časová složitost algoritmu zůstává $O(N^2)$ stejně jako u původní úlohy, v níž jsme hledali pouze délku nejdelší cesty. Ukládání hodnot $p[i]$ tuto složitost nijak neovlivní a závěrečná zpětná rekonstrukce nejdelší cesty má časovou složitost pouze $O(N)$, neboť každá cesta v grafu má délku nejvýše N . Prostorová složitost zůstává $O(N)$, místo jednoho pole zde používáme dvě stejně velká pole velikosti N .

```

def maxcesta(g, N):
    t = [None] * (N+1)
    p = [None] * (N+1)
    t[1] = 0
    for i in range(2, N+1):
        for k in range(1, i):
            if g[k][i] and t[k] != None:
                if t[i] == None or t[i] < t[k]+1:
                    t[i] = t[k]+1
                    p[i] = k

    cesta = [N]
    v = N
    while v != 1:
        v = p[v]
        cesta.append(v)
    return list(reversed(cesta))

```

Náš druhý ukázkový příklad je ze zcela jiné oblasti, týká se plánování a rozvrhování. Postup jeho řešení metodou dynamického programování bude ovšem velmi podobný jako u předchozí grafové úlohy. Máme zadánu posloupnost N po sobě jdoucích úkolů ($N > 1$), které máme vykonat. Úkoly označíme čísly $1, 2, \dots, N$. Pro každý z úkolů známe čas $c[i]$, jak dlouho nám práce na i -tém úkolu bude trvat. Úkoly musíme provádět postupně v uvedeném pořadí, nemůžeme pracovat na více úkolech zároveň. Některé ze zadaných úkolů smíme vynechat, ale nikdy nesmíme vynechat žádné dva po sobě jdoucí úkoly. Máme zjistit, jak nejrychleji dokážeme za těchto podmínek zadané úkoly splnit.

Situaci ilustruje následující příklad: pro $N = 10$ a posloupnost časů $3\ 4\ 8\ 2\ 1\ 3\ 1\ 1\ 6\ 3$ je správným výsledkem 12 . Vykonáme úkoly s pořadovými čísly $2, 4, 5, 7, 8, 10$, jejich celková délka je

$$4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 3 = 12.$$

Nižšího výsledného času potřebného na splnění vybraných úkolů nelze dosáhnout.

Na této úloze si ukážeme, že i řešení dynamickým programováním můžeme někdy navrhnout více různými způsoby. V každém případě si budeme postupně počítat a ukládat vhodné hodnoty $t[i]$ pro $i = 1, 2, \dots, N$. Důležité ovšem je nejdříve jasně rozhodnout, co tyto hodnoty budou přesně

znamenat. V tom se právě mohou různé způsoby řešení lišit. Předvedeme si dvě takové možnosti.

Předpokládejme nejprve, že $t[i]$ určuje minimální čas, v němž lze splnit podle stanovených pravidel posloupnost úkolů 1, 2, ..., i , pokud i -tý zadaný úkol je tím posledním, který jsme vykonali. Zřejmě platí $t[1] = c[1]$, $t[2] = c[2]$. Potřebujeme nalézt vztah, jak spočítat hodnotu $t[i]$ pro $i > 2$. Protože i -tý úkol určitě vykonáme, započítáme si čas $c[i]$. Předcházet mu může splněný úkol $i - 1$ nebo $i - 2$ a pro ně již známe optimální řešení $t[i - 1]$, resp. $t[i - 2]$. Pro výpočet hodnoty $t[i]$ vezmeme menší z nich, neboť hledáme minimální možný čas. Platí tedy $t[i] = c[i] + \min(t[i - 1], t[i - 2])$. Takto spočítáme postupně všechny hodnoty $t[3], \dots, t[N]$. Řešením celé úlohy pak bude $\min(t[N], t[N - 1])$, neboť posledním splněným úkolem může být buď celkově poslední, nebo předposlední úkol ze zadané posloupnosti.

```
def mincas(c):          # c = seznam N časů jednotlivých úkolů
    N = len(c)
    c = [None] + c # úkoly číslujeme od 1 do N
    t = [None] * (N+1)
    t[1], t[2] = c[1], c[2]
    for i in range(3, N+1):
        t[i] = c[i] + min(t[i-1], t[i-2])
    return min(t[N], t[N-1])
```

Pokud by nás navíc zajímalo, které úkoly máme vykonat, abychom dosáhli minimálního možného času, upravíme toto řešení obdobným způsobem, jako jsme to provedli v úvodní úloze o nejdelší cestě v grafu. Při každém výpočtu hodnoty $t[i]$ si uložíme do $p[i]$ informaci, který úkol předcházet i -tému úkolu v optimálním řešení. Z hodnot $p[i]$ pak na závěr zrekonstruujeme odzadu posloupnost vykonaných úkolů.

```
def ukoly(c):          # c = seznam N časů jednotlivých úkolů
    N = len(c)
    c = [None] + c # úkoly číslujeme od 1 do N
    t = [None] * (N+1)
    p = [None] * (N+1)
    t[1], t[2] = c[1], c[2]
    for i in range(3, N+1):
        t[i] = c[i] + min(t[i-1], t[i-2])
        p[i] = i-1 if t[i-1] < t[i-2] else i-2
```

```

v = N if t[N] < t[N-1] else N-1 # poslední splněný úkol
vyber = [v]
while p[v] != None:
    v = p[v]
    vyber.append(v)
return list(reversed(vyber))

```

V našem druhém řešení téže úlohy o posloupnosti úkolů stanovíme, že hodnota $t[i]$ bude určovat minimální čas, v němž lze splnit podle stanovených podmínek posloupnost úkolů 1, 2, ..., i . Poslední i -tý úkol přitom můžeme, ale také nemusíme vykonat. Právě toto je jediný rozdíl od předchozího řešení. Celý další postup bude velmi podobný, ale všechny vzorce tentokrát vycházejí trochu odlišně. V tomto případě bude platit $t[1] = 0$, $t[2] = \min(c[1], c[2])$. Za hodnotu $t[i]$ pro $i > 2$ vezmeme výhodnější ze dvou možností podle toho, zda v pořadí i -tý úkol vykonáme, nebo ne. Pokud ano, započítáme čas $c[i]$ a optimálně splníme předchozích $i - 1$ úkolů. Pokud nebudeme provádět úkol číslo i , musíme nutně vykonat úkol $i - 1$, takže započteme čas $c[i - 1]$ a optimálně splníme předchozích $i - 2$ úkolů. Platí tedy

$$t[i] = \min(c[i] + t[i - 1], c[i - 1] + t[i - 2]).$$

Řešením celé úlohy je v tomto případě hodnota $t[N]$.

```

def mincas(c):          # c = seznam N časů jednotlivých úkolů
    N = len(c)
    c = [None] + c # úkoly číslujeme od 1 do N
    t = [None] * (N+1)
    t[1], t[2] = 0, min(c[1], c[2])
    for i in range(3, N+1):
        t[i] = min(c[i] + t[i-1], c[i-1] + t[i-2])
    return t[N]

```

Pokud při tomto způsobu řešení chceme nalézt seznam skutečně vykonaných úkolů, budeme si při každém výpočtu hodnoty $t[i]$ ukládat do $p[i]$ informaci, který úkol jsme se rozhodli vykonat v i -tém kroku výpočtu (zda úkol i , nebo úkol $i - 1$). Z těchto hodnot pak opět dokážeme zrekonstruovat odzadu výslednou posloupnost splněných úkolů.

```

def ukoly(c):          # c = seznam N časů jednotlivých úkolů
    N = len(c)
    c = [None] + c # úkoly číslujeme od 1 do N
    t = [None] * (N+1)
    p = [None] * (N+1)
    t[1], t[2] = 0, min(c[1], c[2])
    p[2] = 1 if t[2] == c[1] else 2
    for i in range(3, N+1):
        t[i] = min(c[i] + t[i-1], c[i-1] + t[i-2])
        p[i] = i if t[i] == c[i] + t[i-1] else i-1

    vyber = []
    v = N
    while v > 1:
        vyber.append(p[v])
        v = p[v] - 1
    return list(reversed(vyber))

```

Obě popsané varianty řešení druhé úlohy jsou zcela rovnocenné z hlediska správnosti i z hlediska efektivity. Záleží tedy jenom na vás, který pohled na dynamické programování vám při řešení nějaké konkrétní úlohy bude připadat přirozený a názornější. Oba algoritmy mají asymptotickou časovou složitost $O(N)$, protože počítají postupně N hodnot $t[i]$ (případně také N hodnot $p[i]$) a každou z nich získají v konstantním čase. Rovněž zpětná rekonstrukce posloupnosti úloh má vždy časovou složitost $O(N)$. Prostorová složitost všech uvedených řešení je $O(N)$, pracuje se v nich se seznamy t , případně p , délky N .

Jistě jste si všimli, že v obou výše uvedených variantách řešení naší druhé úlohy jsme pro výpočet $t[i]$ potřebovali pouze dvě bezprostředně předcházející hodnoty $t[i-1]$, $t[i-2]$. Pokud tedy budeme určovat jenom minimální čas, seznam t délky N ani nepotřebujeme ukládat a místo něj vystačíme se dvěma proměnnými. Řešení tak může mít dokonce konstantní prostorovou složitost. Při určování posloupnosti splněných úkolů se ovšem nevyhneme ukládání všech hodnot do seznamu p a prostorová složitost v takovém případě proto bude lineární vzhledem k N .

Literatura

- [1] Töpfer, P.: Zjištění počtu možností. Matematika–fyzika–informatika, roč. 34 (2025), č. 3, s. 219–224.

Vzpomínka na Přemysla Šedivého

OLDŘICH LEPIL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Letos by se dožil 90 let *PaedDr. Přemysl Šedivý* (1936–2014). Byl to nejen vynikající a náročný učitel matematiky, fyziky a deskriptivní geometrie, ale i autor učebních textů pro výuku fyziky, didaktických materiálů a učebních pomůcek. Měl také významný podíl na organizaci Fyzikální olympiády (obr. 1).

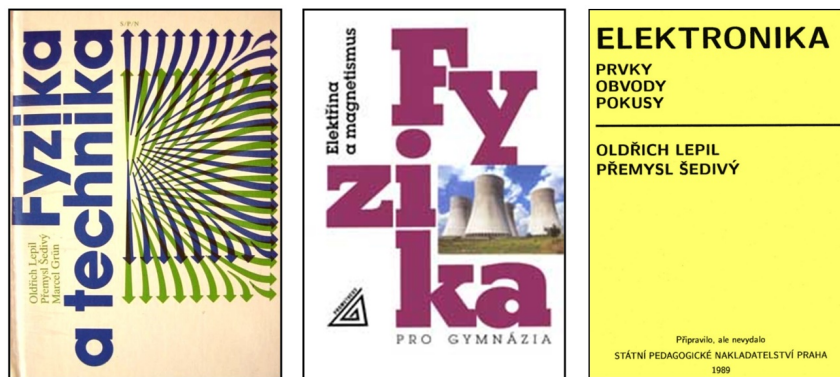


Obr. 1

Učitelské vzdělání získal studiem na Vysoké pedagogické škole v Praze, kterou v roce 1958 absolvoval s vyznamenáním. Po studiu vyučoval na jedenáctiletých středních školách v Polici nad Metují a v Broumově a v roce 1968 přešel na Gymnázium J. K. Tyla v Hradci Králové. Na této škole působil až do roku 2006 a byl zde jednou z nejvýraznějších učitelských osobností.

V odborné činnosti se P. Šedivý vždy zaměřoval na aktuální problémy související s modernizací obsahu a metod výuky. Intenzivně se věnoval např. využití poznatků o polovodičích nebo osciloskopii fyzikálních dějů v elektrických obvodech. Je autorem soupravy panelů pro výuku polovodičů, která byla centrálně dodávána školám. Pro demonstraci vzniku a šíření elektromagnetických vln vytvořil pomůcku s vysílačem decimetrových vln. Podnětné jsou jeho originální náměty na experimentování s operačními zesilovači a s dalšími polovodičovými součástkami, např. s integrovanými obvody pro vytváření logických členů.

Měl jsem možnost řadu let s P. Šedivým spolupracovat především na tvorbě učebnic fyziky, takže bych na tuto spolupráci navázal několika osobními vzpomínkami. Seznámili jsme se počátkem 80. let minulého století při práci na rozsáhlém projektu tzv. federálních učebnic fyziky pro gymnázium, kde byl požadavek, aby se tvorby účastnili také učitelé středních škol. Příliš možností na výběr autorů, kteří by měli alespoň nějaké publikační zkušenosti třeba v podobě příspěvků do časopisů, nebylo a tak byli přizváni zejména učitelé aktivní ve Fyzikální olympiádě. Přemysl se stal spoluautorem učebnice pro výběrový seminář *Fyzika a technika* [1] (obr. 2), kde zpracoval unikátní soubor 16 seminárních úloh z elektroniky.



Obr. 2

Přemysl byl ovšem nejen erudovaný učitel fyziky, ale také pozorný oponent nově vznikajících učebních materiálů, čemuž se nevyhnuly ani moje učební texty připravované počátkem 90. let již pro nově vznikající nakladatelství Prometheus. A tak jsem redakci nakladatelství navrhl nejlepší možné řešení, jak se s jeho připomínkami vyrovnat, totiž požádat Pře-

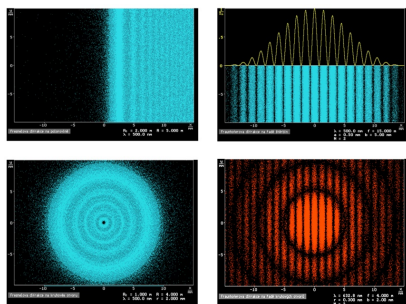
mysla, aby se stal spoluautorem těchto textů. Jsem přesvědčen, že to byl velmi dobrý tah, který se projevil na kvalitě stěžejní společné publikace, kterou je učebnice [2] (obr. 2). Poprvé vyšla v roce 1992 ještě v SPN a její poslední 9. vydání vyšlo v roce 2023.

Zvláštní ráz měla naše spolupráce v oblasti fyzikálního experimentu, jemuž jsme se oba intenzivně věnovali. Bez toho, že bychom se navzájem domlouvali na nějakém aktuálním tématu, stalo se několikrát, že došlo spontánně k práci na stejném tématu, což jsou i některá z témat uvedených v úvodu. Práce se týkaly zejména elektroniky a počítačového modelování různých typů mechanických pohybů a dějů v elektrických obvodech nejprve pomocí programu FAMULUS a později programem Coach 5 a dalšími. Vyvrcholením spolupráce v této oblasti měla být společná publikace s názvem *Elektronika – prvky, obvody, pokusy*, která byla v roce 1989 kompletně připravena do tisku. Vzhledem k určité tehdejší nejistotě na knižním trhu však z rozhodnutí nakladatelství nevyšla a zůstala jen v rukopisné podobě.

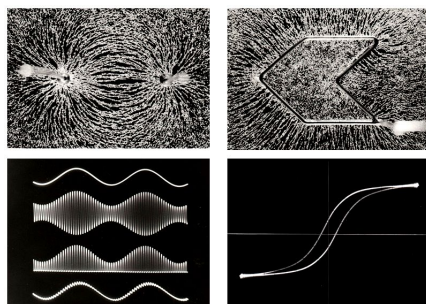
Poněkud odlišnou tematiku tvořily modely ohybových jevů ve vlnové optice. Základem těchto modelů byl článek v tehdy málo dostupném časopise *Praxis der Naturwissenschaften*. V něm byl popsán krátký program v programovacím jazyce BASIC, který umožňoval zobrazit závislost intenzity světla v ohybovém obrazci na vzdálenosti od překážky. Tento krátký program jsme pak každý po svém upravili pro dobře dostupný program FAMULUS. Přemysl však ve spolupráci se svým žákem *Miroslavem Brožem*¹⁾ rozpracoval námět mnohem rozsáhleji jako programový komplet, nabízený školám pod názvem FamDifr [3]. Z dnešního hlediska poměrně jednoduchý systém FAMULUS pro počítače s operačním systémem DOS byl tak využit k vytvoření unikátního programu umožňujícímu grafické zobrazení i velmi složitých ohybových jevů v překvapivé kvalitě (obr. 3).

Přemysl Šedivý byl také vynikající fotograf a jeho schopnosti byly využity k obohacení učebnice [2] originálními ilustracemi. Unikátní jsou např. jeho snímky elektrických polí nebo některých oscilogramů (obr. 4). Odborné kompetence spojil i se špičkovým zvládnutím typografických možností textového procesoru T_EX a „grafického“ programu METAPOST, kterým nakreslil nespočet vynikajících vyobrazení pro odborné publikace různých autorů.

¹⁾V současnosti je docentem Astronomického ústavu MFF UK v Praze. Některé ukázky ohybových jevů vytvořené programem FamDifr si mohou prohlédnout návštěvníci olomoucké Pevnosti poznání v oddělení optiky.



Obr. 3



Obr. 4

Výraznou stopu zanechal P. Šedivý v historii Fyzikální olympiády. Svoji erudici garantoval po řadu let kvalitu náročných soutěžních úloh, pro které připravoval nejen pečlivě zpracované zadání, ale ke každé úloze vypracoval podrobná, dokonale propracovaná řešení, která mohou sloužit jako didaktická pomůcka pro učitele. Vysokou úroveň měly i jím navrhované originální experimentální úlohy. Je autorem, popř. spoluautorem téměř dvou desítek studijních textů FO z nejrůznějších oblastí fyziky. Uveďme alespoň tři témata, která vystihují klíčové odborné zaměření autora: *Ohyb světla* (1996), *Pokusy s operačními zesilovači* (1998), *Modelování pohybů numerickými metodami* (1999), podrobněji viz [4].

Práce P. Šedivého byla také vícekrát oceněna. Z významných ocenění to byla Medaile ministra školství mládeže a tělovýchovy 1. stupně za celoživotní pedagogickou činnost a za přínos školství v rámci Fyzikální olympiády (2009). Na sjezdu Jednoty českých matematiků a fyziků v roce 2014 byl jmenován čestným členem JČMF in memoriam.

Literatura

- [1] Lepil, O., Grün, M., Šedivý, P.: Fyzika a technika. Praha, SPN, 1984.
- [2] Lepil, O., Šedivý, P.: Fyzika pro gymnázia. Elektrina a magnetismus. SPN, Praha, 1992 (2. vyd. Galaxie, Praha 1993, 3. vyd. Prometheus, Praha, 1994).
- [3] Šedivý, P., Brož, M.: FamDifr, Famulus Etc. Praha, 1995. Viz také: Programový komplet FamDifr. <https://sirrah.troja.mff.cuni.cz/~mira/famdifr/famdifr.html>
- [4] <http://fyzikalniolympiada.cz/studijni-texty>

Zlatá medaile z IYPT po 28 letech!

Čeští účastníci dosáhli mimořádného úspěchu na 39. ročníku mezinárodního Turnaje mladých fyziků (International Young Physicists' Tournament, IYPT), který se konal 5. až 12. července 2026 ve švýcarském Curychu. Český tým vybojoval zlatou medaili, a navázal tak na dosud poslední české zlato z roku 1998. Naši uspěli v náročné konkurenci 35 států z šesti kontinentů.

Turnaj mladých fyziků patří mezi nejnáročnější mezinárodní týmové soutěže pro středoškoly ve fyzice. Účastníci řeší během školního roku 17 otevřených fyzikálních úloh, navrhují a realizují vlastní experimenty, vytvářejí teoretické modely a obhajují svoje výsledky v odborné diskuzi. Body totiž získávají za svůj výkon ve Fyzikálních soubojích, v nichž týmy nejen prezentují vlastní řešení, ale také kriticky hodnotí práci soupeřů a vystupují v rolích oponentů a recenzentů.²⁾

Letošní průběh turnaje byl velmi napínavý. Náš tým začal vítězstvím ve skupině, avšak s nepříliš vysokým bodovým ziskem, takže průběžné pořadí odpovídalo 14. místu a bronzové medaili. Výhra druhého kola se podařila již s relativně vysokým bodovým ziskem, což tým posunulo na průběžné 6. místo. Jak třetí, tak čtvrté kolo naši opět vyhráli a po těchto kolech se drželi na 4. místě, jež bylo letos poslední zlatou příčkou.

²⁾Více o obecném průběhu soutěže lze najít např. v Kolář, K., Němec, H.: Turnaj mladých fyziků 2025. Matematika–Fyzika–Informatika, roč. 34 (2025), č. 3, s. 237–240. Dostupné z: <https://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/1010>.

V pátém kole sice český tým podal velmi kvalitní výkon, přesto však svůj souboj těsně prohrál rozdílem 0,1 bodu. V dané místnosti porotci navíc udělovali spíše nižší bodová hodnocení než v ostatních skupinách, což vedlo k poklesu českého týmu na páté místo. V tu chvíli se zdálo, že zlatá medaile zůstane pro nás nedosažitelná, avšak kvůli přestupku jednoho z finalistů, který byl těsně před vyhlášením výsledků penalizován, se český tým posunul na 4. místo. Po 28 letech tak Česká republika znovu získala zlatou medaili na IYPT. Pro všechny členy týmu přitom jde o dobu delší, než po kterou sami žijí.

Reprezentační družstvo tvořili Lukáš Franta (kapitán), Daniel Švaňha (oba z G Ch. Dopplera v Praze), Kryštof Basista (G Hlučín), Michal Fišer a Daniel Jedlička (oba VOŠ a SPŠE Plzeň). Jednalo se o stejné složení týmu jako v předchozím roce, kdy náš tým získal bronzovou medaili.



Český tým s vedoucími

Českou delegaci vedl předseda TMF ČR Stanislav Panoš, vedoucími českého týmu na mezinárodním kole byli Karel Kolář a Dagmar Panošová. Na přípravě reprezentace se podílela celá řada odborníků, zejména z vysokých škol a AV ČR – skupinu konzultantů vedl Hynek Němec z FZU AV ČR. Úspěch je zejména výsledkem mnohaměsíční práce vysoce motivovaných studentů, ale i podpory desítek organizátorů a konzultantů, kteří se Turnaji mladých fyziků dlouhodobě věnují. TMF ČR vyhlašuje a organizuje Jednotu českých matematiků a fyziků.

Zájemci o účast již nyní naleznou na webu soutěže <https://tmfcr.cz/tasks.php?ver=both> zadání problémů pro další ročník. Pro nováčky je nejlepší možností seznámit se se soutěží na *Úvodním soustředění TMF*, které je plánováno na pondělí 12. 10. 2026 na Fyzikálním ústavu AV ČR v Praze. Na soustředění zveme jak středoškoláky, tak jejich učitele. Podrobnosti a přihlašování naleznete na webu soutěže https://tmfcr.cz/content.php?y=40&page=40_uvodko.



Vyhlášení a přebírání zlaté medaile českým týmem (autor: Aeschmann Productions)



Z prvního Fyzikálního souboje s Ukrajinou a Švýcarskem (autor: Aeschmann Productions)



Fotka českého týmu a absolutních vítězů ze Singapuru

Mezinárodní finále příštího ročníku se uskuteční v Aucklandu na Novém Zélandu.

Karel Kolář

67. IMO a IMSC 2026

Přípravný kemp IMSC v Pekingu a IMO v Šanghaji, celkem víc než měsíc v Číně naplněný matematikou – to má za sebou český reprezentační tým.

Před IMO proběhlo od 17. června až do 12. července v Pekingu intenzivní přípravné soustředění IMSC. Letošní 4. ročník byl zatím největším matematickým kempem reprezentačních týmů

všech dob s účastí více než 500 účastníků ze 40 zemí. Během soustředění se střídaly přednášky a cvičné soutěže, které soutěžící náležitě otestovaly. Mimo odborný program se tým podíval na Velkou čínskou zeď a do Chrámu nebes. Na závěrečném ceremoniálu měl český tým společně s polskými účastníky taneční vystoupení.



Na závěrečné soutěži naši studenti získali dvě stříbrné medaile zásluhou Lukáše Komína a Jakuba Trčky, dvě bronzové medaile získali Erik Ježek a Veronika Menšíková, čestné uznání získal Pavel Hyánek.



Výlet na Velkou čínskou zeď

Zajímavostí bylo, že nejtěžší šestá úloha (*Squares in Circles*) byla (oficiálně) otevřeným problémem, nad kterým si matematici lámali hlavu dlouhé měsíce. Článek s připraveným důkazem

se rozhodli zveřejnit až po soutěži, během které úlohu vyřešilo 5 studentů.

Ve dnech 13.–21. července proběhla v čínské Šanghaji 67. mezinárodní matematická olympiáda (IMO). České družstvo dovezlo domů čtyři stříbrné medaile, které získali Jakub Trčka (GJK Praha 6, 3/4), Erik Ježek (Smíchovské SPŠ a G, Praha 6, 4/4), Veronika Menšíková (Arcibiskupské G, Praha 2, Korunní, 8/8) a Pavel Hyánek (G Brno, třída Kapitána Jaroše, 8/8), jednu bronzovou medaili, kterou získal Martin Bryja (G Brno, třída Kapitána Jaroše, 7/8). Lukáš Komín (G Opatov, Praha 4, 7/8) si ze soutěže odváží čestné uznání. Tímto výsledkem se český tým umístil na pěkném 34. místě ze 117 zemí.



Český tým s medailemi

Bodové hranice potřebné k získu bronzové, stříbrné a zlaté medaile byly 16, 23 a 29 bodů ze 42 možných. Vedoucími týmu byli Pavel Šalom a Zdeněk Pezlar.

Zadání a [podrobné výsledky](#) lze najít na [oficiálních stránkách soutěže](#). Letošní ročník zamíchal pořadím v [síní slávy IMO](#), ziskem perfektního skóre se Alex Chui z Velké Británie při své sedmé účasti dostal na celkovou první příčku.

Pavel Šalom