Bádateľský prístup k výučbe trojuholníkov

STANISLAV LUKÁČ

Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice

Bádateľská metóda vo vyučovaní prírodovedných predmetov

Vzhľadom na zásadné zmeny v spoločnosti rezonuje v prírodovednom vzdelávaní najmä v posledných dvoch desaťročiach nutnosť modernizácie prírodovedného vzdelávania. Tendencie o inováciu a skvalitnenie prírodovedného a matematického vzdelávania sa v celoeurópskom meradle premietajú do celého radu národných aj medzinárodných projektov aj do oficiálnych dokumentov iniciovaných Európskou komisiou. Skupina expertov pod vedením člena Európskeho parlamentu *Michela Rocarda* skúmala možnosti, ako skvalitniť prírodovedné a matematické vzdelávanie na základných a stredných školách. Jedným zo záverov Rocardovej správy v roku 2007 bolo deklarovanie nutnosti prechodu od školou preferovanej deduktívnej formy vyučovania k výskumne orientovanej koncepcii vzdelávania [3]. Pri sprístupňovaní obsahu by mali žiaci vykonávať rozmanité aktivity založené na riešení problémov, praktických činnostiach a spracovaní informácií.

Rozmanité modernizačné trendy vo vzdelávaní často vychádzajú z konštruktivistickej koncepcie učenia. Na konštruktivistických princípoch je postavená aj bádateľská metóda, pre ktorú sa zaužívala skratka IBSE (Inquiry Based Science Education). Táto metóda je odvodená z výskumných postupov charakteristických pre prácu vedcov, ktorú možno chápať ako proces identifikácie otázok a kontinuálneho hľadania odpovedí a vysvetlení [3]. Výskumné otázky sú samozrejme prispôsobené veku žiakov a úrovni rozvoja ich bádateľských zručností. Bádanie vo vyučovaní je nasmerované, podobne ako vedecké bádanie, k zodpovedaniu identifikovaných výskumných otázok a k využitiu vhodných argumentov na zdôvodnenie nájdených odpovedí.

Od žiakov nemožno očakávať, že budú hneď schopní stanoviť výskumné otázky a uskutočniť vlastné bádanie. Ich bádateľské zručnosti je potrebné rozvíjať postupne, a preto možno pri aplikovaní výskumných postupov do prírodovedného a matematického vzdelávania využívať rôzne typy bádateľských činností. Na základe klasifikácie navrhnutej Banchi a Bell [1] možno podľa stupňa učiteľovho navádzania a vedenia žiakov rozlíšiť štyri základné úrovne bádateľských aktivít:

1. *Potvrdzujúce bádanie* – úlohou žiakov je overiť im už známe výsledky. Cieľom učiteľa môže byť predstavenie nápadu, ako možno preskúmať určitú zákonitosť. Žiaci by mali byť schopní realizovať rôzne merania, zozbierať a triediť údaje.
2. *Štruktúrované bádanie* – učiteľ stanoví výskumnú otázku a poskytne žiakom aj inštrukcie na realizáciu jednotlivých krokov bádania. Úlohou žiakov je analyzovať získané údaje, zorganizovať údaje do prehľadných tabuliek, vytvoriť grafy, sformulovať svoje zistenia a hľadať vhodné argumenty na ich zdôvodnenie.
3. *Nasmerované bádanie* – učiteľ sformuluje so žiakmi výskumnú otázku a prípadne im poskytne aj určité usmernenie pre ich bádateľské činnosti. Žiaci si sami navrhnú postup bádateľských činností a spôsob zdôvodnenia odpovede na výskumnú otázku. Žiaci sa môžu zdokonaľovať v plánovaní a realizovaní experimentov, v analýze a hodnotení postupu bádania, v hľadaní a zdôvodňovaní súvislostí.
4. *Otvorené bádanie* – žiaci majú príležitosť pracovať ako vedci. Na základe nastolenej problémovej situácie majú identifikovať výskumné otázky, zostaviť postupnosť bádateľských činností, hľadať odpovede a vysvetlenia. Rozvíja sa schopnosť žiakov hľadať a kriticky posúdiť rôzne stratégie riešenia problémov, vyvodzovať závery a dokazovať objavené zistenia.

Na prebudenie záujmu žiakov by mal učiteľ nastoliť na začiatku bádania stimulujúcu situáciu, v ktorej sú zahrnuté javy predstavujúce predmet výskumu. S niektorými aspektmi skúmaných javov majú mať žiaci už prvotné skúsenosti a poznatky, aby mohli na ne nadviazať a využiť ich pri porozumení a vysvetľovaní nových zistení. Je vhodné, ak učiteľ pripraví stimulujúcu situáciu tak, aby niektoré pozorované situácie boli pre žiakov na základe ich doterajších skúseností neočakávané až prekvapivé.

Súčasťou bádateľských aktivít môže byť aj experiment. Pri plánovaní zaradenia experimentu do vyučovania musí mať učiteľ jasný zámer, akým spôsobom sa využijú skôr osvojené vedomosti a zručnosti žiakov. Ak má žiak sám zostaviť a realizovať experiment, musí sa naučiť sformulovať na základe pozorovaných zistení hypotézy a hľadať spôsoby, ako ich testovať, analyzovať údaje a určovať príčinné súvislosti v pozorovaných javoch.

V najjednoduchšom prípade môžu experimentálne činnosti nadobudnúť podobu demonštrácie, pri ktorej majú žiaci pozorovať javy a zákonitosti. Pri pozorovaní by mal učiteľ otázkami naviesť žiakov, aby sústredili svoju pozornosť na podstatné aspekty skúmaných javov. Na druhej strane by mal učiteľ nabádať žiakov, aby aj sami nastoľovali vhodné otázky súvisiace s pozorovanými javmi, ktoré sa môžu stať v ďalšej etape východiskom pre výskumné otázky.

V článku sú predstavené dva námety na bádanie vybraných vlastností trojuholníkov. Vzhľadom na rozsah článku prezentovaná postupnosť bádateľských činností nepredstavuje úplný plán vyučovacej hodiny, ale sústredili sme sa len na vybrané elementy vzdelávacieho obsahu. Zjednocujúcim motívom navrhovaných aktivít je možnosť vhodne využiť obsahy trojuholníkov pri zdôvodňovaní objavených zistení. Na realizáciu jednoduchých experimentov pri bádateľských činnostiach je využitý dynamický geometrický systém Geogebra. Predpokladáme, že niektoré dynamické konštrukcie slúžiace na demonštrácie by boli pripravené dopredu. Pri vlastnom bádaní by mali žiaci navrhovať a vytvárať konštrukcie samostatne. Preto by už mali mať základné zručnosti z práce so systémom Geogebra.

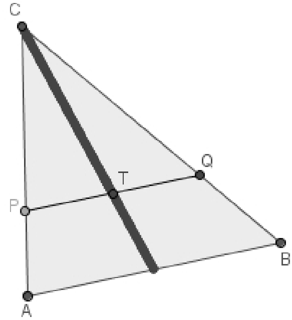
Ťažisko trojuholníka

Pri hľadaní ťažiska trojuholníka sa na začiatku sústredíme na skúmanie ťažníc trojuholníka. Žiakom predložíme úvahu založenú na rozdelení trojuholníka na veľmi tenké pásiky so stranami rovnobežnými s vybranou stranou trojuholníka. Ťažisko každého tenkého pásika by ležalo v strede pásika. Predstavme si, že v našom modeli budeme pásiky ďalej zužovať, až dostaneme rovnobežné úsečky s ťažiskom v strede úsečky. Predstavený model budeme žiakom demonštrovať pomocou dynamickej konštrukcie. Pri posúvaní rovnobežnej úsečky sa bude zaznamenávať stopa jej stredu T (pozri obr. 1).

Ťažisko trojuholníka bude ležať na spojnici ťažísk tenučkých pásikov modelovaných úsečkami. Po demonštrácii vytvorenia ťažnice trojuholníka kladie učiteľ žiakom otázky, pričom na preskúmanie rôznych konkrétnych trojuholníkov môže znova využiť dynamickú konštrukciu. Učiteľ ma nabádať aj žiakov, aby sformulovali otázky súvisiace s ťažnicami trojuholníka. Uvádzame niekoľko vhodných otázok.

Môže ležať ťažnica mimo trojuholníka?
Ako zostrojíme ťažnicu trojuholníka?
Je ťažnica osou uhla ACB?

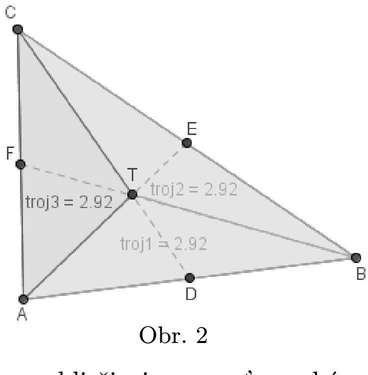
Na aké trojuholníky rozdeľuje ťažnica trojuholník ABC?



Obr. 1

Po úvodnej demonštrácii, ktorá predstavuje stimulujúcu situáciu, zadáme žiakom úlohu, ktorej riešenie môže podľa nášho názoru pomôcť rozvíjať bádateľské zručnosti žiakov. *Nájdite bod X v trojuholníku ABC, aby ste po spojení bodu X s vrcholmi trojuholníka získali tri trojuholníky s rovnakým obsahom.* Vzhľadom na skutočnosť, že sme zamerali pozornosť žiakov na ťažnice trojuholníka, považujeme opisovanú aktivitu za nasmerované bádanie. Učiteľ môže aj naviesť žiakov, aby sa snažili určiť polohu nájdeného bodu vzhľadom na ťažnice trojuholníka.

Ak žiaci pomocou experimentovania s dynamickou konštrukciou zistia, že hľadaný bod X leží na každej ťažnici trojuholníka, po preskúmaní viacerých trojuholníkov by mali dôjsť k záveru, že hľadaný bod je ťažiskom trojuholníka (pozri obr. 2).



Obr. 2

V ďalšej časti by sa mohli žiaci zamerať na skúmanie a vysvetľovanie zistenia, že tri ťažnice trojuholníka sa pretínajú v jednom bode, ale my sa sústredíme na hľadanie argumentov na zdôvodnenie experimentálne zisteneј vlastnosti ťažiska. Zadáme žiakom ďalšiu úlohu. *V trojuholníku ABC zostrojte všetky tri ťažnice a preskúmajte vlastnosti šiestich trojuholníkov, na ktoré rozdelili zostrojené ťažnice trojuholník ABC.* Po experimentovaní s dynamickou konštrukciou by mohli žiaci objaviť, že všetky trojuholníky majú rovnaký obsah. Pri zdôvodňovaní objaveného vzťahu využijeme vlastnosť, na ktorú sme upozornili žiakov už pri úvodnej demonštrácii, a to, že ťažnica rozdeľuje trojuholník na dva trojuholníky s rovnakým obsahom.

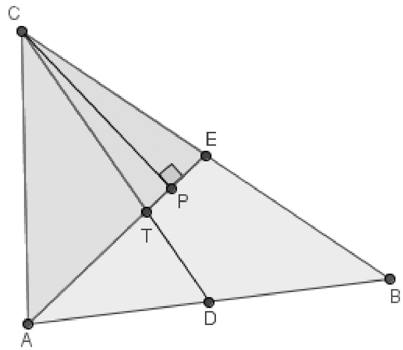
Zamerajme sa na ťažnice CD a AE a využime obr. 2. Ťažnica CD rozdeľuje trojuholník ABC na dva trojuholníky ADC a DBC s rovnakým obsahom. Taký istý obsah majú aj trojuholníky ABE a AEC. Potom súčet obsahov trojuholníkov ATC a TEC je rovnaký, ako súčet obsahov trojuholníkov ATC a ADT. Trojuholník ATC tvorí spoločnú časť trojuholníkov, ADC a AEC, preto trojuholníky ADT a TEC majú rovnaký obsah. Keďže bod D je stredom strany AB a trojuholníky ADT a DBT majú totožnú výšku na strany AD a DB, tak aj trojuholníky ADT a DBT majú rovnaký obsah. Analogickými úvahami možno ľahko dokázať, že všetky trojuholníky, ktoré vznikli rozdelením trojuholníka ABC ťažnicami, majú rovnaký obsah. Pri prezentovaní zdôvodnenia získaného výsledku by žiaci mohli pre väčšiu prehľadnosť využiť obrázky s rôznofarebnými trojuholníkmi.

Z dokázanej vlastnosti je zrejmé, že aj trojuholníky ABT, BTC a ATC majú rovnaký obsah. Ak má učiteľ matematicky nadaných žiakov, môžu sa pustiť aj do zdôvodnenia skutočnosti, že vyššie uvedenú vlastnosť má jediný bod trojuholníka, a to ťažisko. Budeme predpokladať, že uvedenú vlastnosť má okrem ťažiska T aj bod X. Zostrojíme priamku p prechádzajúcu bodom X rovnobežnú so stranou AB. Obsah trojuholníka ABX sa rovná jednej tretine z obsahu trojuholníka ABC. To isté platí aj pre obsah trojuholníka ABT. Potom body X a T majú rovnakú vzdialenosť od strany AB, a preto aj ťažisko T leží na priamke p. V ďalšom kroku zostrojíme priamku q prechádzajúcu cez bod X rovnobežnú so stranou BC. Pomocou analogickej úvahy možno zdôvodniť, že aj ťažisko T musí ležať na priamke q. Potom ťažisko T leží v prieniku priamok p, q a je totožné s bodom X.

Nájdené vzťahy využijeme na objavenie pomeru dĺžok úsekov, na ktoré ťažisko rozdeľuje ťažnice. Inštrukcie pre bádanie žiakov zakomponujeme priamo do zadania úlohy. *V trojuholníku ABC zostrojte ťažnice na dve strany. Využitím obsahov dvoch vhodne zvolených trojuholníkov charak-*

terizujte vzťah medzi dĺžkami úsekov, na ktoré ťažisko rozdeľuje ťažnicu trojuholníka ABC.

Môže sa stať, že žiaci pri experimentovaní odmerajú dĺžky úsekov a zistia, že sú v pomere 2 : 1. Po vyslovení hypotézy môžu testovať jej platnosť pre ťažnice v rôznych konkrétnych trojuholníkoch. Inštrukcie v zadaní im však dávajú návod aj na zdôvodnenie objaveného vzťahu. Na obr. 3 sú zostrojené v trojuholníku ABC ťažnice na strany AB a BC. Žiaci už zistili, že obsah trojuholníka ATC je dva krát väčší ako obsah trojuholníka TEC. Keďže oba trojuholníky majú totožnú výšku na strany AT a TE, potom platí, že dĺžka úsečky AT ja dva krát väčšia ako dĺžka úsečky TE.

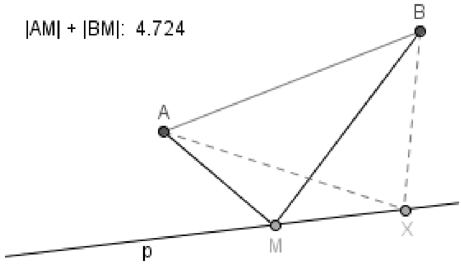


Obr. 3

Súčet vzdialeností

V druhom námete budeme skúmať súčet vzdialeností. Na geometrické sčítavanie vzdialeností sa budú využívať aj zhodné zobrazenia. Aj v tomto prípade začneme demonštráciou využívajúcou dynamickú konštrukciu, v ktorej bude zostrojená priamka p a dva rôzne body A, B ležiace v jednej polrovine určenej priamkou p. Našou úlohou bude nájsť na priamke p taký bod M, aby obvod trojuholníka ABM bol minimálny. Keďže dĺžka strany AB je rovnaká pre všetky trojuholníky s tretím vrcholom na priamke p, žiaci by rýchlo prišli na to, že stačí zistiť, kedy je súčet vzdialeností bodu M od bodov A, B minimálny.

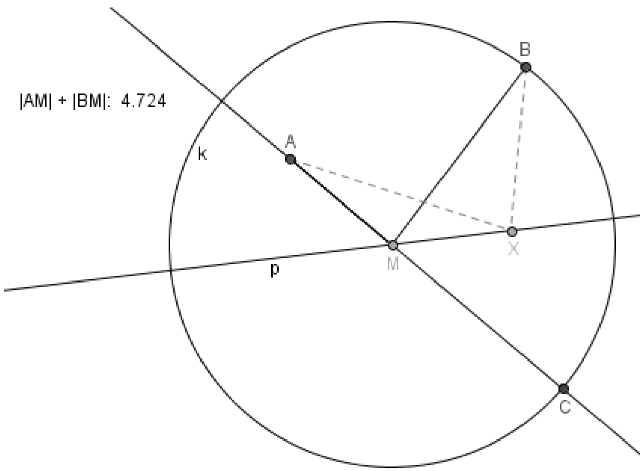
Najprv si zvolíme ľubovoľný bod X ležiaci na priamke p, odmeriame vzdialenosti bodu X od bodov A, B a určíme ich súčet. Potom budeme pohybovať bodom X po priamke p a hľadať polohu bodu X, kedy bude súčet vzdialeností minimálny. Na experimentálne určenú pozíciu bodu X na priamke p umiestnime bod M (pozri obr. 4). Pri pozorovaní demonštrácie žiakov iste napadne otázka, ako by sme mohli nájsť pozíciu bodu M konštrukčne, bez posúvania bodu X po priamke p.



Obr. 4

Pri hľadaní odpovede na položenú otázku navrhujeme naviesť žiakov na riešenie jednoduchšieho prípadu, kedy by bod B ležal v opačnej polrovine určenej priamkou p. V tomto jednoduchom prípade by bod M ležal v priesečníku priamky AB s priamkou p. Skúsme v dynamickej konštrukcii z demonštrácie nájsť bod C odpovedajúci bodu B tak, aby minimálny súčet vzdialeností $|AM|$ a $|MC|$ bol rovnaký ako pre body A, B. Učiteľ položí žiakom otázku: *Aké vlastnosti by mal mať bod C?*

Z riešenia jednoduchšieho variantu úlohy by žiaci mali vidieť, že bod C má ležať na priamke AM a na kružnici $k(M, |MB|)$. Pomocné útvary sú zostrojené na obr. 5.



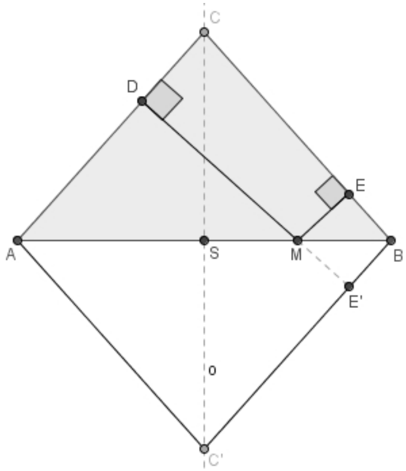
Obr. 5

Pre konštrukciu hľadaného bodu M to však stále nestačí. Ak by sme zostrojili opisované pomocné útvary pre bod X, získame pre každú jeho polohu nejaký bod C, ktorý však nevedie k nájdeniu polohy bodu M. Učiteľ by od žiakov žiadal formulovanie domnienok pre ďalšie vlastnosti bodu C využiteľného na riešenie úlohy. Dá sa očakávať, že žiaci by napríklad zbadali, že bod C má mať takú istú vzdialenosť od priamky p, akú má bod B. Učiteľ by naviedol pozornosť žiakov na veľkosti uhlov, ktoré zvierajú priamky AM a BM s priamkou p. Po vyslovení domnienky, že veľkosti týchto uhlov sú rovnaké je už len krôčik k domnienke, že bod C je obrazom bodu B v osovej súmernosti určenej priamkou p. Túto hypotézu by mohli žiaci samostatne testovať pomocou dynamických konštrukcií. Ich úlohou by bolo nielen otestovať hypotézu pre niekoľko konkrétnych prípadov, ale aj hľadať argumenty na zdôvodnenie správnosti objavenej konštrukcie. V prípade potreby by učiteľ naviedol žiakov na využitie trojuholníkovej nerovnosti. Ak by uznal za vhodné, mohol by žiakom vysvetliť, že ak by sme považovali úsečky AM a BM za dopadajúci a odrazený svetelný lúč, potom pre ne platí zákon odrazu, ktorý je vyjadrením princípu minimálnej vzdialenosti, ktorú má prejsť svetelný lúč z bodu A do bodu B pri odraze od rozhrania, ktoré reprezentuje priamka p.

Po úvodnej demonštrácii zadáme žiakom problém na samostatné bádanie. Vzhľadom na možnosť využitia osovej súmernosti, podobne ako v demonštrácii, považujeme túto aktivitu za nasmerované bádanie. *Daný je rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB. Na základni AB je zostrojený bod M tak, že rozdeľuje úsečku AB v pomere* $3:1$. *Určte súčet vzdialeností bodu M od ramien trojuholníka ABC a vyšetrite, ako sa zmení súčet vzdialeností pre iné polohy bodu M na základni AB.*

Riešenie úlohy vyžaduje od žiakov hľadanie vzťahu medzi súčtom vzdialeností bodu M od ramien trojuholníka a vlastnosťami trojuholníka. Po prvých experimentoch s odmeranými vzdialenosťami pre konkrétne rovnoramenné trojuholníky by mal učiteľ nasmerovať žiakov na hľadanie spôsobu, ako geometricky sčítať vyšetrované vzdialenosti. Jednoduché riešenie ponúka využitie osovej súmernosti. Zobrazíme trojuholník ABC v osovej súmernosti podľa priamky AB a zostrojíme aj obraz bodu E. Body D, M, E' ležia na jednej priamke, lebo veľkosti uhlov BME a BME' sú rovnaké. Súčet vzdialeností bodu M od ramien rovnoramenného trojuholníka ABC predstavuje dĺžka úsečky DE'.

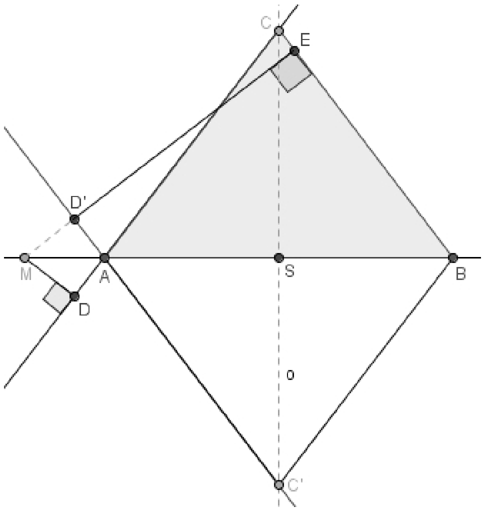
Súčet vzdialeností bodu M od ramien rovnoramenného trojuholníka ABC je vzdialenosť rovnobežných priamok AC a BC' a to je výška v trojuholníku ABC na rameno trojuholníka. Z uvedených úvah je zrejmé, že súčet vzdialeností bodu M od ramien trojuholníka nezávisí od polohy bodu M na strane AB. Žiaci môžu túto skutočnosť ľahko objaviť už pri úvodnom experimentovaní s dynamickou konštrukciou. Vzhľadom na počiatočnú demonštráciu môže byť pre nich prekvapivé zistenie, že súčet vzdialeností je rovnaký pre rôzne polohy bodu M. Pri svojom bádaní však môžu zbadať, že pri posúvaní bodu M sa mení aj poloha bodov D, E.



Obr. 6

S matematicky nadanými žiakmi môže učiteľ pokračovať v bádaní pri riešení podobnej úlohy, v ktorej majú žiaci preskúmať vzdialenosti bodu M od ramien rovnoramenného trojuholníka ABC, ak bod M je umiestnený na priamke AB, ale mimo úsečky AB. Po úvodnom experimentovaní možno ľahko vidieť, že súčet vzdialeností bodu M od ramien trojuholníka ABC narastá so vzďaľovaním bodu M od vrcholov trojuholníka ABC. Ako možno pozmeniť zadanie úlohy, aby bol výsledok znova nezávislý na polohe bodu M? Vysvetlenie ponúka obr. 7. Po zobrazení priamky AC v osovej súmernosti podľa priamky AB vidno, že vzdialenosť bodu M od ramena AC je taká istá ako dĺžka úsečky MD'. V tomto prípade je rozdiel vzdialeností bodu M od ramien BC a AC trojuholníka ABC konštantný a je rovný dĺžke úsečky ED', ktorá má rovnakú dĺžku ako výška trojuholníka ABC na rameno BC.

Po bádaní súčtov a rozdielov vzdialeností v rovnoramenných trojuholníkoch sa zameriame na rovnostranný trojuholník. Za vhodný námet na realizáciu otvorenej bádateľskej aktivity sme vybrali problém, ktorým sa zaoberal aj taliansky matematik *Vincenzo Viviani* (1622–1703). Výsledok riešenia tohto problému je známy ako Vivianiho veta [5]. Aby sme zvýšili záujem žiakov o hľadanie riešenia, snažili sme sa zapracovať do problému reálnu situáciu. *Stroskotanci sa priplavili na ostrov v tvare rovnostranného trojuholníka. Aby sa čo najrýchlejšie vedeli dostať ku všetkým brehom ostrova, chceli by si postaviť prístrešok na takom mieste, aby súčet vzdialeností od prístrešku ku všetkým brehom ostrova bol čo najmenší. Nájdite stroskotancom vhodnú pozíciu pre stavbu prístrešku.*



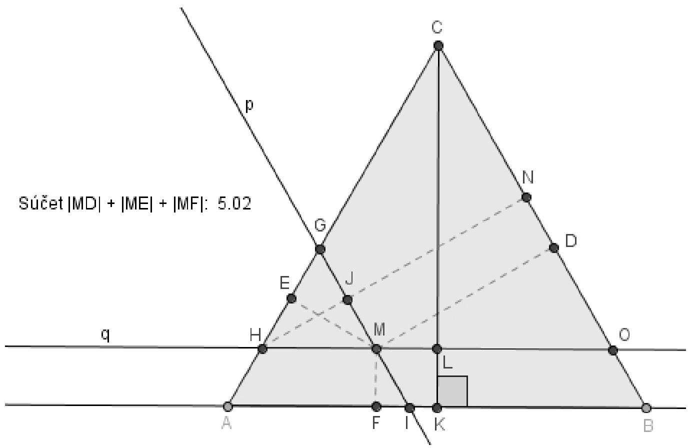
Obr. 7

Po porozumení zadania problému a načrtnutí problémovej situácie sa zdá byť logické, že vhodná pozícia pre prístrešok by mohla byť vo vrchole rovnostranného trojuholníka. Experimentovanie s dynamickou konštrukciou by však malo priviesť žiakov k prekvapivému zisteniu, že pre ľubovoľný bod rovnostranného trojuholníka je súčet vzdialeností od tohto bodu k všetkým trom stranám trojuholníka konštantný. Ak umiestnime bod do vrcholu rovnostranného trojuholníka, tak súčet vzdialeností je rovný výške trojuholníka. Žiaci by sa mali snažiť aj zdôvodniť objavené zistenie, napríklad využitím geometrického sčítania dĺžok úsečiek. Na tento účel môžu využiť viaceré postupy založené na aplikovaní otáčania a posunutia. My sme vybrali postup založený na vlastnostiach rovnostranných trojuholníkov.

Na obr. 8 je zostrojený rovnostranný trojuholník ABC a pre zvolený bod M sú vyznačené kolmice na jednotlivé strany trojuholníka. Bodom M sú preložené priamky p, q, ktoré sú rovnobežné so stranami BC, AB. V trojuholníkoch HMG, AIG a HOC majú všetky vnútorné uhly veľkosť $60°$, preto sú tieto trojuholníky rovnostranné. Úsečka KC je výškou rovnostranného trojuholníka ABC. Našou úlohou je určiť súčet dĺžok úsečiek MD, ME a MF. Je zrejmé, že dĺžka úsečky MF je rovná dĺžke úsečky KL. V rovnostrannom trojuholníku HMG majú výšky HJ a ME rovnakú dĺžku. Keďže priamky p a BC sú rovnobežné, majú rovnakú dĺžku aj úsečky MD a JN. Aj v rovnostrannom trojuholníku HOC majú výšky HN a LC rovnakú dĺžku. Preto platí:

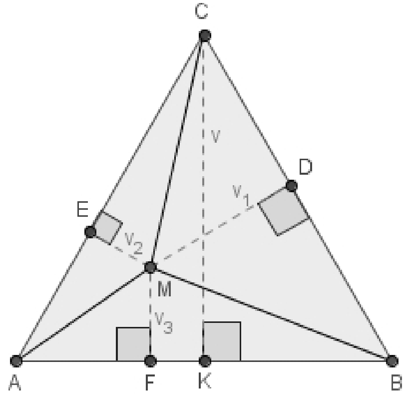
$$|MF| + |ME| + |MD| = |KL| + |HJ| + |JN| = |KL| + |LC| = |KC|.$$

Uvedený postup možno považovať za dôkaz tvrdenia o konštantnom súčte vzdialeností ľubovoľného bodu vnútri rovnostranného trojuholníka od jeho strán. Od všetkých žiakov nemožno očakávať presné dôkazy, ale pri geometrickom sčítavaní dĺžok úsečiek by mali vychádzať zo zistenia, že kolmice na strany rovnostranného trojuholníka prechádzajúce bodom M zvierajú uhly s veľkosťou $60°$.



Obr. 8

Na jednoduché zdôvodnenie objaveného zistenia možno vhodne využiť obsahy trojuholníkov. Nech bod M leží vnútri rovnostranného trojuholníka ABC. Po spojení bodu M s vrcholmi trojuholníka ABC dostaneme tri trojuholníky AMB, BMC a AMC, súčet obsahov ktorých je rovný obsahu trojuholníka ABC (pozri obr. 9).



Obr. 9

Ak dĺžku strany rovnostranného trojuholníka ABC označíme a, platí:

$$\frac{av}{2} = \frac{av_1}{2} + \frac{av_2}{2} + \frac{av_3}{2}$$

Po úprave uvedeného vzťahu získavame dôkaz tvrdenia, že súčet vzdialeností od ľubovoľného bodu vnútri rovnostranného trojuholníka ABC k všetkým stranám trojuholníka ABC je rovný výške trojuholníka ABC. Ak by sme zvolili bod M na strane rovnostranného trojuholníka ABC, potom by sme trojuholník ABC rozdelili na dva trojuholníky s vrcholom v bode M a pomocou vyššie opísaného postupu by sme zistili, že súčet vzdialeností bodu M od zvyšných dvoch strán trojuholníka je znova rovný výške trojuholníka ABC. Uvedené tvrdenie teda platí pre ľubovoľný bod rovnostranného trojuholníka ABC.

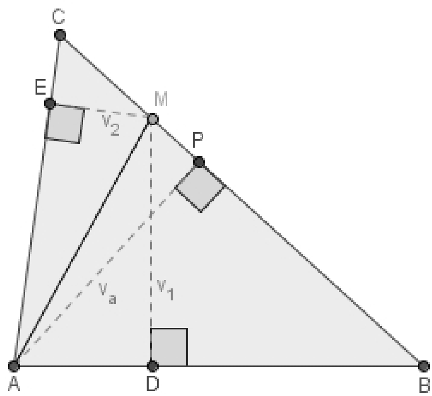
Aj pri riešení úlohy o rovnoramennom trojuholníku (pozri obr. 6) možno vhodne využiť obsahy trojuholníkov. Využitím bodu M na základni a rovnoramenného trojuholníka ABC s ramenami b možno rozdeliť trojuholník ABC na trojuholníky BMC a AMC. Nech v je výška na rameno v rovnoramennom trojuholníku ABC, potom platí:

$$\frac{bv}{2} = \frac{b \cdot |EM|}{2} + \frac{b \cdot |DM|}{2}$$

Získali sme dôkaz tvrdenia, že súčet vzdialeností bodu M od ramien rovnoramenného trojuholníka ABC je rovný výške na rameno trojuholníka ABC.

Po vyriešení problému o ostrove v tvare rovnostranného trojuholníka je prirodzená otázka, či by objavený poznatok bolo možné aplikovať aj na všeobecný trojuholník. Po porozumení dôkazu pre rovnostranný trojuholník, by žiaci mali sami vysloviť hypotézu, že pre všeobecný trojuholník nebude súčet vzdialeností od ľubovoľného bodu trojuholníka k jeho stranám konštantný. Predmetom ďalšieho samostatného bádania žiakov bude úloha: *Nájdite bod v trojuholníku ABC, od ktorého je súčet vzdialeností k trom stranám trojuholníka ABC minimálny.* Využitím úvahy, ktorou sme začali riešiť problém pre rovnostranný trojuholník, by mali žiaci po experimentovaní s dynamickou konštrukciou dôjsť k záveru, že hľadaným bodom je ten vrchol trojuholníka ABC, z ktorého je výška na protiľahlú stranu najkratšia. Túto vlastnosť má vrchol ležiaci oproti najdlhšej strane trojuholníka ABC.

Pri zdôvodňovaní objaveného zistenia umiestnime najprv bod M na najdlhšiu stranu trojuholníka ABC. Spojením bodu M s vrcholom A rozdelíme trojuholník ABC na trojuholníky ABM a AMC (pozri obr. 10).



Obr. 10

Nech a, b, c sú strany trojuholníka ABC. Pre obsahy trojuholníkov ABC, ABM a AMC platí:

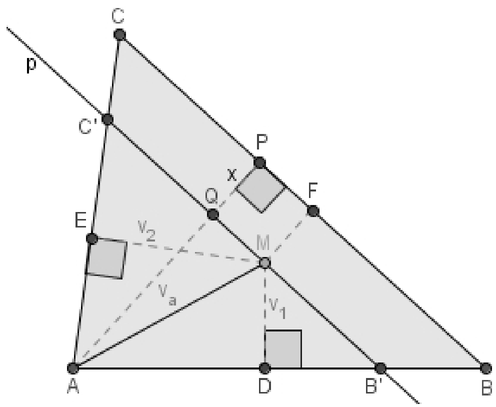
$$\frac{av_a}{2} = \frac{cv_1}{2} + \frac{bv_2}{2}$$

Po úprave tohto vzťahu a využití faktu, že strana a má najväčšiu dĺžku, možno zostaviť postupnosť tvrdení:

$$av_1 + av_2 \geq cv_1 + bv_2 = av_a$$

Porovnaním prvého a tretieho výrazu dostávame pre súčet vzdialeností bodu M od strán c, b výsledok $v_1 + v_2 \geq v_a$. Ak by sme bod M posunuli do vrcholu B alebo C, súčet vzdialeností by bol nahradený výškou trojuholníka z príslušného vrcholu, ktorá má aspoň takú dĺžku ako v_a. Pre každú inú pozíciu bodu M na strane a súčet vzdialeností bodu M od strán c, b tiež nie je menší ako výška v_a. Tým sa zatiaľ potvrdilo, že hľadaným bodom môže byť vrchol A, lebo súčet vzdialeností tohto bodu od strán trojuholníka ABC je v_a.

Skúsme, či možno nájsť menší súčet vzdialeností, ak by hľadaný bod M ležal vnútri trojuholníka ABC. Znova využijeme základnú myšlienku z uvedeného postupu pre pomocný trojuholník $AB'C'$, ktorý dostaneme tak, že zostrojíme rovnobežnú priamku p so stranou BC prechádzajúcu bodom M (obr. 11). Pôvodná výška trojuholníka v_a je rozdelená na výšku AQ v trojuholníku $AB'C'$ a úsečku QP s dĺžkou x, ktorá predstavuje vzdialenosť bodu Q a aj bodu M od strany BC.



Obr. 11

Aj v trojuholníku $AB'C'$ má strana $B'C'$ najväčšiu dĺžku, a preto môžeme pre trojuholník $AB'C'$ využiť už dokázané tvrdenie: $v_1 + v_2 \geq |AQ|$. Po pripočítaní dĺžky x k obidvom stranám nerovnice dostávame na ľavej strane nerovnice súčet vzdialeností bodu M od troch strán trojuholníka

ABC a na pravej strane nerovnice výšku v_a v trojuholníku ABC. Tým sme zdôvodnili objavené zistenie, že spomedzi všetkých bodov trojuholníka ABC má vrchol oproti najdlhšej strane trojuholníka ABC tú vlastnosť, že súčet vzdialeností tohto bodu od všetkých strán trojuholníka ABC je minimálny.

Záver

V článku sme predstavili niekoľko aktivít na aplikovanie bádateľskej metódy vo vyučovaní matematiky, ktoré môžu učitelia vzhľadom na podmienky vo svojich triedach ďalej rozpracovať, aby umožňovali rozvíjať bádateľské zručnosti žiakov na rôznych úrovniach. Bádateľská metóda by mala umožniť žiakom osvojovanie nových pojmov a vzťahov prostredníctvom bádateľských činností, ktoré umožňujú žiakom pozorovať objekty a javy z reálneho sveta, experimentovaním nadobúdať nové skúsenosti a poznatky a zamýšľať sa nad zdôvodňovaním empirických zistení. Aplikovanie bádateľskej metódy vo vyučovaní matematiky a prírodovedných predmetov na základných a stredných školách by mohlo pomôcť aj zvýšiť záujem žiakov o prírodovedné a matematické vzdelávanie a o štúdium prírodovedných a technických odborov na vysokých školách.

Poďakovanie. Táto práca bola podporovaná Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy č. APVV-0715-12.

Literatura

[1] *Banchi, H. – Bell, R.*: The many levels of inquiry. Science and Children, roč. 46 (2008), s. 26–29. [online] http://learningcenter.nsta.org/files/sc0810_26.pdf.

[2] *De Villiers, M., D.*: Rethinking proof with The Geometer's Sketchpad. Key Curriculum Press, 2003.

[3] *Held, Ľ. a kol.*: Výskumne ladená koncepcia prírodovedného vzdelávania. Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity v Trnave, 2011.

[4] *Ješková, Z. – Kireš, M. – Onderová, Ľ.*: Školská reforma na Slovensku mení spôsob výučby prírodných vied. Československý časopis pro fyziku, roč. 62 (2012), č. 5-6, s. 316–321.

[5] *Mudaly, V.*: Is proving a visual act? Mevlana International Journal of Education, roč. 3 (2013), č. 3, s. 36–44.

[6] *Švrček, J. – Vanžura, J.*: Geometrie trojúhelníka. Polytechnická knižnice, Praha, 1988.

[7] *Šnajder, Ľ. – Daneshjoová, D. – Gondová, V.*: Informatické pracovné listy s bádateľskými aktivitami. Ústav experimentálnej fyziky SAV, 2012.