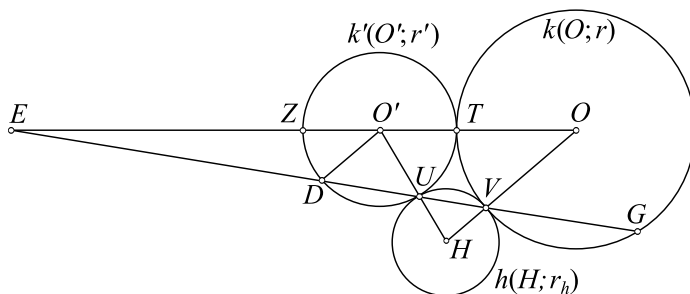


Polibky kružnic: Pappos z Alexandrie

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Pappos (4. stol) byl posledním významným alexandrijským učencem. Jeho osmidílná *Sbírka* (řecky *Synagoge*) nás seznamuje s dílem starověkých matematiků doplněným o Pappovy vlastní objevy. Uvádí se, že mezi ně patří důkaz starší hypotézy, věty o řetězci kružnic vepsaných do arbelu.¹ Ve skutečnosti nevíme, co z toho je Pappova vlastní práce a co pochází od jiných autorů. Může to být jen volný přepis neznámé Archimedovy práce. Většina zdrojů též nezmiňuje, že motivace důkazu věty o arbelu obsahuje analýzu rovinných konfigurací navzájem se dotýkajících kružnic. Odvozená lemmata mají obecnější platnost. Věta o arbelu je jen jedním z jejich důsledků. Stručně se nyní s obsahem Pappova čtyřdílného pojednání seznámíme.



Obr. 1 První okruh úvah – tři kružnice s vnějšími dotyky

¹Větu jsme uvedli v druhém dílu seriálu [1]. Setkáme se s ní i na konci tohoto článku.

První část se zabývá situací z obr. 1. Kružnice $k(O; r)$ a $k'(O'; r')$ mají vnější dotyk T a vně se dotýkají i kružnice $h(H; r_h)$ v bodech V a U . Přímký UV a OO' jsou různoběžné. Označíme E jejich průsečík a D druhý průsečík přímky UV s kružnicí k' . Pappos nejprve z podobnosti trojúhelníků $O'DU$ a HVU odvodil, že $OH \parallel O'D$. Pak pomocí dalších podobností dokázal vztahy

$$\frac{|EV|}{|ED|} = \frac{|ET|}{|EZ|} = \frac{|EO|}{|EO'|} = \frac{|OV|}{|O'D|} = \frac{r}{r'}, \quad (1)$$

kteří dnes snadno ověříme pomocí stejnoolehlosti kružnic k' a k (obr. 1). Dále konstatoval, že z první z rovností (1) plyne

$$\frac{|EV| \cdot |EU|}{|ED| \cdot |EU|} = \frac{|ET| \cdot |ET|}{|EZ| \cdot |ET|}$$

a odtud

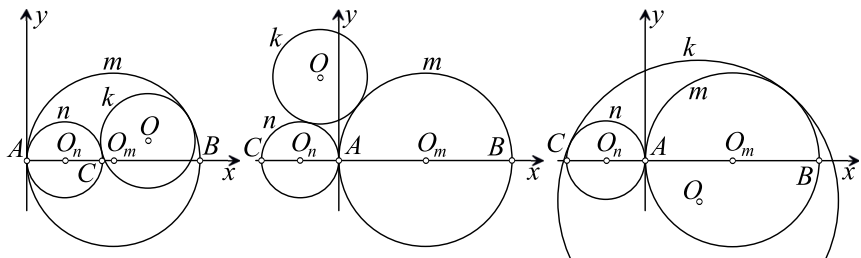
$$|EV| \cdot |EU| = |ET|^2, \quad (2)$$

neboť $|ED| \cdot |EU| = |EZ| \cdot |ET|$ (mocnost bodu E ke kružnici k').

Základem všech dalších úvah jsou kružnice $m(O_m; r_m)$ a $n(O_n; r_n)$, kde $r_m \geq r_n$, s dotykem v bodě A . Zbývající průsečíky kružnic m a n s přímkou O_mO_n budeme (v daném pořadí) značit B a C . Zvolme ještě libovolnou kružnici $k(O; r)$, která se jich dotýká. Při daném poloměru r není těžké sestrojít její střed O . Za účelem číselného určení středu O lze zvolit kartézskou soustavu souřadnic s kladnou poloosou x totožnou s polopřímkou AB (obr. 2). Výpočtem i konstrukcí vychází dva středy, jejichž poloha se liší jen znaménkem y -ové souřadnice. Starověcí učenci neznali záporná čísla ani kartézské souřadnice. Z praktických důvodů nahrazovali kružnice m a n půlkružnicemi ohraničenými přímkou AB a umístěnými na téže straně od ní, základem tzv. arbelu.

Z dnešního pohledu hledal Pappos ve druhém okruhu úvah souvislost mezi poloměrem r a x -ovou souřadnicí středu O . Zjistil překvapivou věc, sice že je podíl těchto dvou veličin konstantní (vztahy (8) a (9)).

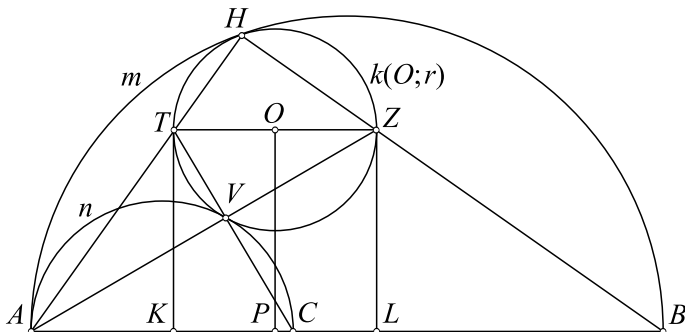
Nejprve definoval tři možné konfigurace navzájem se dotýkajících polokružnic m , n (v dalších úvahách budou někdy nahrazeny kružnicemi) a kružnice k . *První konfigurace* nastane při vnitřním dotyku kružnic m a n (obr. 2 vlevo). V dalších konfiguracích mají kružnice m a n v bodě A vnější dotyk. Přitom *druhá konfigurace* vznikne, když s nimi má kružnice k vnější dotyky (obr. 2 uprostřed) a ve *třetí konfiguraci* má s nimi dotyky vnitřní (obr. 2 vpravo).



Obr. 2 První, druhá a třetí konfigurace kružnic

Odvození provedl pro první konfiguraci: V souladu s obr. 3 označme H a V body dotyku kružnice k s kružnicemi m a n , a TZ její průměr rovnoběžný s přímkou AB takový, že $T \in AH$ a $Z \in BH$. Kolineárnost trojic (A, T, H) , (B, Z, H) , (A, V, Z) a (C, V, T) zaručovala věta L1 z Archimedyovy Knihy lemmat (viz [1]). Paty kolmic z bodů T , O a Z na přímkou AB jsou po řadě K , P a L . Z podobnosti trojúhelníků AHB a AKT lze zjistit $|AB|/|AH| = |AT|/|AK|$ a odtud

$$|AB| \cdot |AK| = |AT| \cdot |AH| \quad (3)$$



Obr. 3 Druhý okruh úvah – kružnice vepsaná mezi kružnice m a n

Podobně z trojúhelníků AZL a ACV plyne $|AZ|/|AL| = |AC|/|AV|$, neboli

$$|AZ| \cdot |AV| = |AC| \cdot |AL|. \quad (4)$$

Do třetice, tentokrát z mocnosti bodu A ke kružnici k , dostáváme

$$|AT| \cdot |AH| = |AZ| \cdot |AV|. \quad (5)$$

Ze všech tří vztahů pak

$$|AB| \cdot |AK| = |AC| \cdot |AL|, \quad (6)$$

resp.

$$\frac{|AL|}{|AK|} = \frac{|AB|}{|AC|}. \quad (7)$$

To znamená, že podíl $|AL|/|AK|$ nezávisí na velikosti (a tedy ani na poloze) vepsané kružnice k . Odtud Pappos usoudil, že též

$$\frac{|AB| + |AC|}{|AB| - |AC|} = \frac{|AL| + |AK|}{|AL| - |AK|}.$$

(Není-li tento krok zřejmý, vyřešte si úlohu 2 na konci článku.) Nakonec položil $|AL| - |AK| = 2r$ a $|AL| + |AK| = 2|AP|$, neboť P je střed úsečky KL . Tím získal vztah pro *libovolnou* kružnici vepsanou mezi kružnice m a n :

$$\frac{|AP|}{r} = \frac{|AB| + |AC|}{|AB| - |AC|}. \quad (8)$$

Analogicky můžeme pro druhou a třetí konfiguraci určit

$$\frac{|AP|}{r} = \frac{|AB| - |AC|}{|AB| + |AC|}. \quad (9)$$

Poznamenejme, že dnes lze při volbě kartézské soustavy souřadnic podle obr. 2 nahradit oba vztahy rovností pro x -ové souřadnice bodů O , B a C :

$$\frac{x_O}{r} = (-1)^{s+1} \frac{x_B + x_C}{x_B - x_C}, \quad \text{kde } s \text{ je číslo konfigurace.} \quad (10)$$

Pappos navíc uvedl, že ze vztahu $|AK|/|TK| = |ZL|/|BL|$ pro podobné trojúhelníky ATK , ZBL a z faktu $|TK| = |ZL| = |PO|$ plyne, že

$$|AK| \cdot |BL| = |PO|^2. \quad (11)$$

Ve třetí části do obrázku přidal kružnici $k'(O'; r')$ vepsanou útvaru ohraničeného oblouky AV , VH a HA (obr. 4). Označme U a T body jejího dotyku s kružnicemi n a k , dále pak E a $D(\neq U)$ průsečíky přímky UV s přímkou $O'O$ a kružnicí k' . Ukážeme, jak Pappos odvodil pro kružnice k , k' vztah (15) mezi jejich průměry d , d' a vzdálenostmi h , h' středů obou kružnic od přímky AB .

Tentýž poměr lze vyjádřit i jinak:

$$\frac{|AP|}{|AQ|} = \frac{|EO|}{|EO'|} = \frac{r}{r'} = \frac{|OX|}{|O'Y|}. \quad (14)$$

Z rovnosti levých stran vztahů (13) a (14) plyne rovnost jejich pravých stran. Proto též platí $|KX| = |OX| = r$ a odtud

$$|KO| = 2r = d.$$

Z podobných útvarů $APXK$ a $AQYO'$ dále plyne

$$\frac{|PK|}{|KX|} = \frac{|QO'|}{|O'Y'|},$$

neboli

$$\frac{|PO| + d}{r} = \frac{|QO'|}{r'}.$$

Navíc je $r = d/2$, $|PO| = h$, $r' = d'/2$ a $|QO'| = h'$, a tak nakonec dostaneme

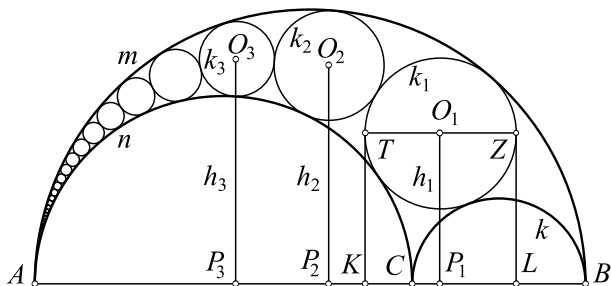
$$h' = \frac{h + 2r}{r} r', \quad \text{resp.} \quad h' = \frac{h + d}{d} d'. \quad (15)$$

Vztahy (15) splňuje i druhá konfigurace. Ve třetí konfiguraci je jiný typ dotyku kružnic k a k' a navíc může být střed kružnice k na různých stranách od přímky AB . Zavedení arbelu tuto komplikaci ve starověku řešilo na úkor obecnosti. Dnes lze konstatovat, že při náhradě veličin h a h' y -ovými souřadnicemi středů kružnic k a k' v kartézské soustavě souřadnic podle obr. 2, a přiřazení znaménka „-“ poloměru r v situaci, kdy má kružnice k s (celými) kružnicemi m a n vnitřní dotyk, platí pro všechny konfigurace vztah

$$\frac{y_{O'}}{r'} = \frac{y_O}{r} + 2. \quad (16)$$

Přístupme nyní k závěrečné části. Má-li v první konfiguraci kružnice k průměr BC , pak útvar ohraničený půlkružnicemi m , n a k ve zvolené polorovině s hraniční přímkou AB se nazývá *arbelos*. Uvažujme řetězec kružnic k_0, k_1, k_2, \dots vepsaných mezi kružnicemi m a n takový, že $k_0 = k$ a pro $j = 1, 2, \dots$ má kružnice $k_j(O_j; r_j)$ vnější dotyk s kružnicemi k_{j-1} a k_{j+1} . *Věta o řetězci kružnic vepsaných do arbelu* říká, že při označení podle obr. 5 platí:

$$h_1 = 2r_1 = d_1, \quad h_2 = 4r_2 = 2d_2, \quad h_3 = 6r_3 = 3d_3, \quad \dots \quad (17)$$



Obr. 5 Závěr – odvození věty o kružnicích vepsaných arbelu

Pappos ji dokázal následovně. Aplikací vztahu (7) na kružnice m, n, k_1 a na kružnice m, k, k_1 dostáváme

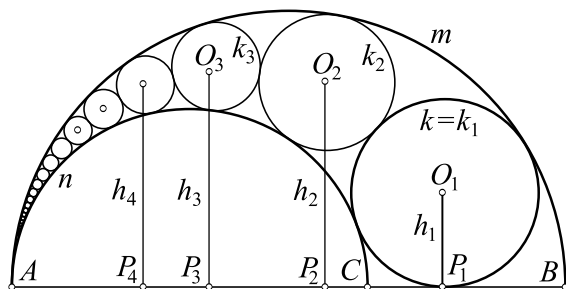
$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AL|}{|AK|} \quad \text{a} \quad \frac{|BA|}{|BC|} = \frac{|BK|}{|BL|}.$$

Jestliže v těchto vztazích nahradíme v každém zlomku čitatelem rozdílem původního čitatele a jmenovatele, obdržíme rovněž platné rovnosti

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|KL|}{|AK|} \quad \text{a} \quad \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|KL|}{|BL|},$$

z nichž zjistíme $|AK| \cdot |BL| = |KL|^2$. Odtud a ze vztahu (11) plyne $|P_1O_1| = |KL|$, jinými slovy $h_1 = d_1$. Po tomto zjištění již Pappos důkaz snadno dokončil opakovaným užitím vztahu (15):

$$h_1 = d_1, \quad h_2 = \frac{d_1 + d_1}{d_1} d_2 = 2d_2, \quad h_3 = \frac{2d_2 + d_2}{d_2} d_3 = 3d_3, \quad \dots$$

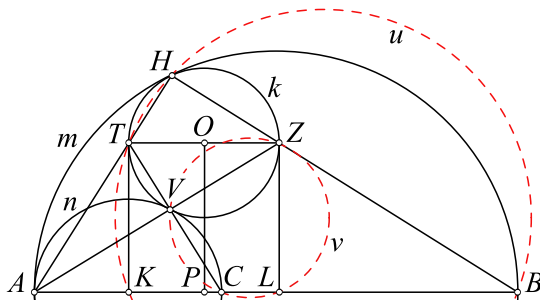


Obr. 6 Řetězec kružnic v Pappově závěrečném dodatku

Ještě uvedl dodatek dodatek, sice že pro situaci na obr. 6 platí

$$h_1 = r_1, h_2 = 3r_2, h_3 = 5r_3, \dots \quad (18)$$

I po mnoha stoletích oceňujeme brilantní využití tehdejší geometrické algebry a důvtipný postup starověkého autora. Shrnutím jeho hlavních výsledků jsme získali vztahy (10) a (16), které usnadňují určení poloměru a souřadnic středu kterékoliv kružnice řetězce (viz úlohu 4).



Obr. 7 Bod A je potenčním středem kružnic u , k a v

Některá místa Pappova pojednání vybízejí k dalším úvahám. Například vztah (6) je důsledkem tří tvarově stejných rovností (3), (4), a (5) mezi součiny délek úseček, jež všechny vycházejí z bodu A . Jakou zvláštní polohu má bod A na obr. 3?

Vše se objasní, když tam dokreslíme Thaletovy kružnice u a v nad průměry BT a CZ (obr. 7): Bod A má stejnou mocnost ke kružnicím u , k a v . Tento fakt pravděpodobně inspiroval Jakoba Steinerja (1796–1863) k zavedení *potenčního středu* kružnic a vyšetřování různých množin bodů a kružnic se stejnou mocností. Zamyšlení nad vztahem (2) a situací z obr. 1 jej mohlo vést k zavedení tzv. *společné mocnosti* bodu E ke kružnicím k , k' a popisu zobrazení, jež se dnes nazývá *kruhová inverze*. S jeho výsledky se seznámíme v dalším pokračování seriálu.

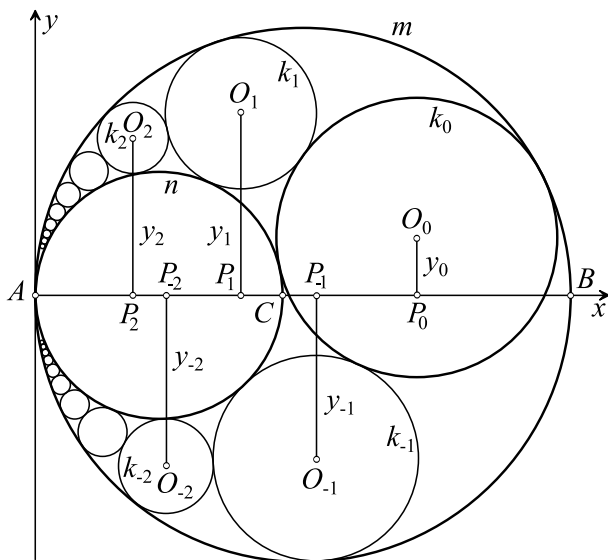
Úlohy

1. Dokažte, že při označení podle obr. 1 platí

$$|ED| \cdot |EG| = |ET|^2.$$

2. Necht' a' , a , b' , b jsou nenulové délky a $a'/a = b'/b = k$. Dokažte, že pak pro každá reálná čísla r , s , t , u , pro něž $ra + sb \neq 0$, resp. $ta' + ua \neq 0$, platí

$$\frac{ra' + sb'}{ra + sb} = k, \quad \text{resp.} \quad \frac{ra' + sa}{ta' + ua} = \frac{rb' + sb}{tb' + ub} = \frac{kr + s}{kt + u}.$$



Obr. 8 Obecný řetězec kružnic na bázi první konfigurace

3. Dokažte, že platí: Je-li první konfiguraci kružnic m , n a $k_0(O_0; r_0)$ vepsán řetězec $\dots k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_1, k_2, \dots$ kružnic $k_j(O_j; r_j)$ podle obr. 8, pak v kartézské soustavě souřadnic zvolené na obrázku platí pro všechna celá čísla j rekurentní vztah

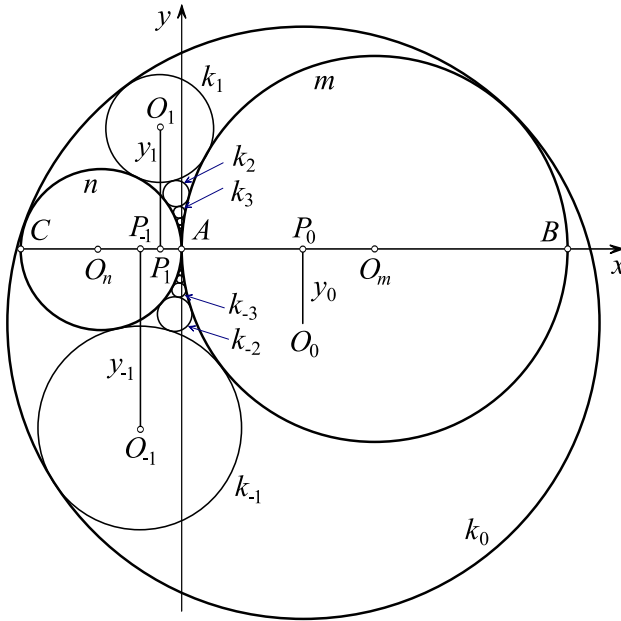
$$\frac{y_{j+1}}{r_{j+1}} = \frac{y_j}{r_j} + 2, \quad (19)$$

kde y_j je y -ová souřadnice středu O_j .

4. Necht' kružnice m , n a k_0 z obr. 8 mají po řadě poloměry 40 cm, 24 cm a 12 cm. Pomocí vztahů (10), (16) a Pythagorovy věty pro

vhodně zvolené trojúhelníky dokažte, že pro j -tou kružnici řetězce platí

$$O_j = [4r_j; (\sqrt{5} + 2j)r_j] \quad \text{a} \quad r_j = \frac{60}{5 + j(j + \sqrt{5})} \text{ cm.}$$



Obr. 9 Řetězec kružnic na bázi třetí konfigurace

5. Pokuste se pro druhou a třetí konfiguraci nakreslit obrázky analogické k obr. 4 a odvodit analogii vztahů (15).
6. Třetí konfiguraci kružnic $m(O_m; 38)$, $n(O_n; 16)$ a $k_0(O_0; r_0)$ je vepsán řetězec kružnic $\dots k_{-2}, k_{-1}, k_0, k_1, k_2, \dots$ podle obr. 9. V kartézské soustavě souřadnic na obr. 9 je $O_0 = [24, y_0]$. Dokažte, že $r_0 = 58,9$, $y_0 = -15,5$ a pro všechna celá čísla j platí

$$\frac{y_j}{r_j} = 0,26 + 2j.$$

(Hodnoty jsou zaokrouhlené a do (16) dosazujeme $-r_0$.)

Literatura

- [1] *Leischner, P.*: Polibky kružnic: Archimedes. MFI, roč. 24, č. 1 (2015), s. 87–94.
- [2] *Pappus of Alexandria*: Book 4 of the Collection, edited with translation and commentary by Heike Sefrin-Weis, Springer, London, 2010.

Využití znalostí matematiky při práci s kreditní kartou

VLADIMÍRA PETRÁŠKOVÁ

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

„Je těžké, když musíte bankéřům sdělit, že nemůžete splatit úrok. Taková slova nemají rádi.“

(D. Trump, Zbohatněte jako já. Pragma, Praha, 2004)

S kreditní kartou je spojováno mnoho negativního. Tato negativa souvisí jednak s nedisciplinovaností majitelů kreditních karet, jednak se základní neznalostí tohoto produktu. V tomto článku na příkladech ukážeme, jak nám matematika může pomoci blíže se seznámit s úskalími, která jsou spojena s využíváním kreditní karty. Zároveň nám pomůže odhalit i její výhody. Příklady jsou určeny žákům středních škol.

Abychom mohli řešit uvedené příklady, musíme znát pojmy jako např. úroková sazba, frekvence připisování úroků, jednoduché a složené úrokování, bezúročné období kreditní karty, úvěrový rámec kreditní karty. . . Je zřejmé, že dochází k překryvu dvou vzdělávacích oblastí vymezených v Rámcových vzdělávacích programech pro gymnázia, a to *Člověk a svět práce* a *Matematika a její aplikace* (VÚP, 2007). Žák potřebuje pro řešení jednak znalosti z oblasti společenskovední (finanční trh, bankovní a nebankovní služby, úvěrové produkty, . . .), jednak z oblasti matematiky (jednoduché úrokování a jeho základní standardy, složené úrokování, . . .).

Základní informace o kreditní kartě

Dříve než přistoupíme k řešení konkrétních úloh, popíšeme základní vlastnosti kreditní karty. Kreditní karta patří mezi karty platební. Většina z nás vlastní platební kartu, která se nazývá debetní karta. Uživatelé platebních karet často zaměňují názvy těchto dvou karet. Jaký je tedy mezi nimi rozdíl?

Debetní karta je vázaná na běžný účet. Jejím použitím čerpáme peněžní prostředky z našeho běžného účtu. To znamená, naše finanční prostředky. Pokud na účtu peníze nemáme, kartu nemůžeme použít (s výjimkou případu, kdy máme zřízení kontokorentní úvěr).

Kreditní karta je kartou úvěrovou. Prostřednictvím této karty čerpáme úvěr, který musíme stanoveným způsobem splácet. Kreditní kartu můžeme získat jednak od bankovních společností, jednak od nebankovních společností. Nebankovní společnosti mají pro vydání kreditní karty méně omezující podmínky než bankovní instituce. Např. může nastat situace, že kreditní kartu vydají i klientovi, který je již zaznamenán v registru dlužníků. Je zřejmé, že klient se pak může dostat do dluhové pasti. S kreditní kartou je spojena řada pojmů a úskalí. Nyní se s nimi seznámíme.

Úvěr z kreditní karty je revolvingovým úvěrem. To znamená, že držitel karty může postupně finanční prostředky splácet a zároveň čerpat. Ke každé kreditní kartě je schválena určitá částka (úvěr neboli úvěrový rámec), do jejíž výše můžeme čerpat finanční prostředky na nákup libovolného zboží či služeb. Na uhrazení úvěru máme několik dní a můžeme se rozhodnout, jestli vypůjčenou částku splatíme celou, nebo jen její část. Pokud se rozhodneme vypůjčenou částku splatit jen částečně, začnou se nám počítat úroky. Jestliže vypůjčenou částku splatíme do určitého dne celou, úroky se nepočítají. Období, na které jsou nám poskytnuty finanční prostředky zdarma (bez úroků), se nazývá bezúročné období. Toto období se obvykle pohybuje od 45 do 55 dnů. Bezúročné období se zpravidla nevztahuje na finanční prostředky vybrané z bankomatu. V posledních dvou letech se na trhu objevila nabídka kreditních karet s bezúročným obdobím, které se vztahuje i na výběr z bankomatu. Řada poskytovatelů kreditních karet, ve snaze získat nové klienty, začala vydávat kreditní karty s různými bonusy. Mezi tyto bonusy patří například nákup zboží se slevou u vybraných prodejců nebo připsání hotovosti ve výši určitého procenta z vypůjčené částky na účet klienta. Příklady dalších bonusů můžeme najít např. na stránkách iDnes.cz/Finance.

Řešené příklady

Příklad 1

Pan Novák si pořídil bankovní kreditní kartu s úvěrovým rámcem 35 000 Kč, úrokovou sazbou 23 % p. a. a bezúročným obdobím 45 dní. Datum splatnosti je stanoveno na 15. den následujícího měsíce. Karta mu byla vydána zdarma. Karta je pojištěna proti zneužití, přičemž měsíční poplatek je 40 Kč. Pokud kartou pan Novák uhradí měsíčně nákupy v součtu alespoň 3 000 Kč (bezhotovostní platbou), je vedení karty zdarma. Jinak zaplatí měsíční poplatek 49 Kč.

- a) Zjistěte, kolik Kč stálo pana Nováka využití kreditní karty v roce 2014, jestliže pouze třikrát za rok 2014 použil kreditní kartu k měsíčním bezhotovostním nákupům nad 3 000 Kč. Půjčené peníze vždy splatil v bezúročném období.
- b) Pan Novák si 5. 2. 2015 koupil pomocí této karty pračku za 12 500 Kč. Domníval se, že vypůjčené peníze splatí do 15. března, tj. v bezúročném období. Vzhledem k tomu, že měl mimořádný výdaj, zaplatil v tomto období pouze část půjčky, a to 3 500 Kč. Zbytek zaplatil 15. 4. 2015. Jak vysoké úroky pan Novák zaplatil při ročním úrokovém období? Jak vysoké úroky by pan Nováka zaplatil při měsíčním úrokovém období?

Při výpočtu úroku vycházejte ze standardu ACT/365.¹

Řešení.

a) Vzhledem k tomu, že pan Novák během roku 2014 provedl prostřednictvím kreditní karty pouze ve třech měsících roku platby nad 3 000 Kč, musí ve zbývajících devíti měsících zaplatit poplatek za vedení karty. Celkové roční náklady spojené s kreditní kartou jsou uvedeny v tab. 1.

Tabulka 1 Náklady na kreditní kartu

<i>Náklady na kreditní kartu za rok 2014</i>	
Pojištění proti zneužití	$12 \cdot 40 \text{ Kč} = 480 \text{ Kč}$
Poplatky za vedení karty	$9 \cdot 49 \text{ Kč} = 441 \text{ Kč}$
Celkem	921 Kč

V roce 2014 pan Novák zaplatil za využití kreditní karty 921 Kč.

¹Standard ACT/365 používá v čitateli měsíce se skutečným počtem dní a ve jmenovateli rok se skutečným počtem dní.

b) Pan Novák si půjčil 12 500 Kč. V bezúročném období splatil 3 500 Kč, takže jeho dluh je $12\,500\text{ Kč} - 3\,500\text{ Kč} = 9\,000\text{ Kč}$. Tyto zapůjčené prostředky jsou úročeny od jejich čerpání až do jejich splacení, tj. po dobu $(28 - 5) + 31 + 15 = 69$ dní.

Roční úrokového období

Úrok z částky 9 000 za 69 dní činí $9\,000\text{ Kč} \cdot 0,23 \cdot \frac{69}{365} = 391,30\text{ Kč}$.

Při ročním úrokovém období pan Novák zaplatil na úrocích 391,30 Kč.

Měsíční úrokové období

V případě měsíčního úrokového období se ke konci každého měsíce úroky připsí k dlužné částce a budou se s ní úročit.

Úrok za únor: $9000\text{ Kč} \cdot 0,23 \cdot \frac{23}{365} = 130,40\text{ Kč}$.

Úrok za březen: $9130,40\text{ Kč} \cdot 0,23 \cdot \frac{31}{365} = 178,40\text{ Kč}$.

Úrok za duben: $9308,80\text{ Kč} \cdot 0,23 \cdot \frac{15}{365} = 88\text{ Kč}$.

Úrok celkem: $130,40\text{ Kč} + 178,40\text{ Kč} + 88\text{ Kč} = 396,8\text{ Kč}$.

Při měsíčním úrokovém období pan Novák na úrocích zaplatil 396,80 Kč.

Příklad 2

Paní Kolářová je majitelkou kreditní karty s úvěrovým rámcem 80 000 Kč, roční úrokovou sazbou 21,9 % a bezúročným obdobím 55 dní. Datum splatnosti je nastaveno na 25. den následujícího měsíce. Paní Nováková si 15. dubna 2015 prostřednictvím kreditní karty (bezhotovostní platbou) pořídila obývací stěnu v hodnotě 35 000 Kč.

- Jak vysoká bude minimální splátka, jestliže banka požaduje minimální splátku ve výši 3,2 % z úvěrového rámce?
- Jakou částku bude mít paní Kolářová po 1. splátce k dispozici na kreditní kartě, jestliže neprovedla žádné další platby? Poznamenejme, že při každé splátce se úvěrový rámec navýší o výši splátky.

Řešení.

a) Minimální splátka se stanovuje z úvěrového rámce, tzn.,

$$\text{minimální splátka} = 80\,000\text{ Kč} \cdot 0,032 = 2\,560\text{ Kč}.$$

b) Vzhledem k tomu, že při každé splátce se úvěrový rámec navýší o výši splátky, tak paní Kolářová bude mít po 1. splátce (předpokládejme,

že splátka je ve výši přesně 3,2 % z úvěrového rámce) na kreditní kartě k dispozici 80 000 Kč – 35 000 Kč + 2 560 Kč = 47 560 Kč.

Příklad 3

Pan Vochozka si pořídil kreditní kartu s úvěrovým rámcem 45 000 Kč, měsíční úrokovou sazbou 2 % a měsíčním připisování úroků. Bezúročné období je 50 dní. Datum splatnosti je nastaveno na 20. den následujícího měsíce. Prostřednictvím kreditní karty vybral z bankomatu 6. 1. 2015 částku a) 2 500 Kč, b) 25 000 Kč.

Vzhledem k tomu, že obdržel koncem ledna mimořádné odměny, rozhodl se poslední den bezúročného období dluh splatit. Pan Vochozka nemá kreditní kartu pojištěnu. Poplatek za vedení kreditní karty je 29 Kč měsíčně v případě, že bezhotovostní objem zaúčtovaných plateb kreditní kartou v daném měsíci bude nižší než 500 Kč, jinak je vedení zdarma. Jak vysoké budou úroky a poplatky (výše poplatků za výběr z bankomatu je uvedena v tab. 2), jestliže vybral peníze na území České republiky? Při výpočtu úroků použijte standard ACT/360.²

Tabulka 2 Poplatky za výběr z bankomatu

Bezúročné období i pro výběry z bankomatu	Poplatek za výběr do výše 3 000 Kč (včetně 3 000 Kč) / poplatek za výběr nad 3 000 Kč		
	Vlastní bankomat	Cizí bankomat	Bankomat v zahraničí
Ne	70 Kč + 1 % / 100 Kč	70 Kč + 1 % / 100 Kč	100 Kč + 1 % / 130 Kč

Řešení. V případě výběru z kreditní karty v bankomatu neplatí bezúročné období (viz tab. 2). Půjčené peníze jsou úročeny od jejich čerpání až do splacení. Pan Vochozka si peníze vypůjčil na (31 – 6) dní v lednu a 20 dní v únoru.

a) Úvěr 2 500 Kč

Při výpočtu úroků budeme počítat s měsíční úrokovou sazbou 2 %. Vzhledem ke standardu ACT/360 budeme počítat ve jmenovateli s měsícem o 30 dnech.

²ACT/360 používá v čitateli měsíce se skutečným počtem dní a ve jmenovateli rok s 360 dny.

Tabulka 3 Náklady na úvěr ve výši 2 500 Kč

<i>Náklady na úvěr ve výši 2 500 Kč z kreditní karty</i>	
Výběr z bankomatu	$70 \text{ Kč} + 0,01 \cdot 2\,500 \text{ Kč} = 95 \text{ Kč}$
Úroky za leden	$2\,500 \text{ Kč} \cdot 0,02 \cdot \frac{25}{30} = 41,70 \text{ Kč}$
Úroky za únor	$2\,541,7 \text{ Kč} \cdot 0,02 \cdot \frac{20}{30} = 33,90 \text{ Kč}$
Celkem	170,60 Kč

Úvěr ve výši 2 500 Kč na dobu 45 dní bude pana Vochozku stát 170,60 Kč.

b) Úvěr 25 000 Kč

Při výpočtu úroků můžeme počítat i s roční úrokovou sazbou, která je $2\% \cdot 12 = 24\%$. Vzhledem k tomu, že výběr z bankomatu byl vyšší než 3 000 Kč, tak poplatek za výběr je 100 Kč.

Tabulka 4 Náklady na úvěr ve výši 25 000 Kč

<i>Náklady na úvěr ve výši 25 000 Kč z kreditní karty</i>	
Výběr z bankomatu	100 Kč
Úroky za leden	$25\,000 \text{ Kč} \cdot 0,24 \cdot \frac{25}{360} = 417 \text{ Kč}$
Úroky za únor	$25\,417 \text{ Kč} \cdot 0,24 \cdot \frac{20}{360} = 338,90 \text{ Kč}$
Celkem	855,90 Kč

Úvěr ve výši 25 000 Kč na dobu 45 dní bude pana Vochozku stát 855,90 Kč.

Příklad 4

Paní Novotná a pan Živý jsou majiteli kreditní karty s úvěrovým rámcem 50 000 Kč, roční úrokovou sazbou 22 % a bezúročným obdobím 45 dní. Poplatek za vedení kreditní karty je 49 Kč měsíčně v případě, že bezhotovostní objem zaúčtovaných plateb kreditní kartou v daném měsíci bude nižší než 3 000 Kč, jinak je vedení zdarma. Jestliže budou provedeny bezhotovostní platby za měsíc ve výši alespoň 10 000 Kč, jsou připsány na účet 2 % z této částky. Další bonus, který je spojen s kreditní kartou, je 5% sleva na zboží u obchodního řetězce LEXA.

- a) Paní Novotná využívala v průběhu roku kreditní kartu k bezhotovostní platbě ve výši právě 10 000 Kč měsíčně. Zároveň si u běžného účtu nastavila inkaso k platbě za kreditní kartu v bezúročném období. Během roku nakoupila v obchodním řetězci LEXA zboží v hodnotě 15 000 Kč. Udělejte roční uzávěrku úvěrového účtu ke kreditní kartě.
- b) Pan Živý kartu během roku využil pouze jednou, a to při koupi kola v hodnotě 15 000 Kč. Ačkoliv mohl koupit kolo v obchodním řetězci LEXA, tak dal přednost jinému obchodu. Pan Živý nevyužil ani bezúročného období a kolo splácel. Rozhodl se pro dobu splatnosti 1 rok, což pro něj znamenalo měsíční splátku 1 404 Kč. Jak vysoké budou úroky z úvěru na kreditní kartě? Jak vysoké budou poplatky a bonusy spojené s ročním užíváním kreditní karty?
- c) Srovnej podle výnosu/ztráty využití kreditní karty u paní Novotné a pana Živého.

Řešení.

a) Vzhledem k tomu, že paní Novotná využila všech výhod kreditní karty, tak jí kreditní karta přinesla pouze bonusy, a to ve výši 3 150 Kč (viz tab. 5).

Tabulka 5 Celkové poplatky a bonusy paní Novotné

<i>Náklady / bonusy</i>	
Poplatky spojené s kartou	0 Kč
Bonusy:	
Využití nad rámec 10 000 Kč	$12 \cdot 0,02 \cdot 10\,000 \text{ Kč} = 2\,400 \text{ Kč}$
Nákup zboží v řetězci LEXA	$0,05 \cdot 15\,000 \text{ Kč} = 750 \text{ Kč}$
Celkem	3 150 Kč

b) Úvěr pan Živý splácel 1 rok, to znamená, že ve splátkách zaplatil $12 \cdot 1\,404 \text{ Kč} = 16\,848 \text{ Kč}$. Vzhledem k tomu, že v měsíci, kdy pan Živý koupil kolo prostřednictvím kreditní karty, přesáhl bezhotovostní objem zaúčtovaných plateb částku 10 000 Kč, nebude tento měsíc pan Živý platit poplatek za vedení úvěrového účtu na kreditní kartě. Dále mu byl připsán bonus ve výši 2 % z 15 000 Kč.

V tab. 6 jsou shrnuty poplatky, úroky a bonusy spojené s využíváním kreditní karty.

Tabulka 6 Úroky, poplatky, bonusy kreditní karty pana Živého

<i>Poplatky / úroky / bonusy</i>	
Poplatky spojené s kartou	$11 \cdot 49 = 539 \text{ Kč}$
Úroky = splátky – dluh	$12 \cdot 1\,404 \text{ Kč} - 15\,000 \text{ Kč} =$ $= 16\,848 \text{ Kč} - 15\,000 \text{ Kč} = 1\,848 \text{ Kč}$
Bonusy: Využití nad rámec 10 000 Kč	$0,02 \cdot 15\,000 \text{ Kč} = 300 \text{ Kč}$

Pan Živý zaplatí na úrocích 1 848 Kč a na poplatcích 539 Kč. Zároveň mu bude připsán bonus 300 Kč.

c) Paní Novotná a pan Živý vlastní kreditní kartu se stejnými nabízenými službami. Paní Novotná využila všech výhod, které se vztahovaly ke kreditní kartě, a získala tím 3 150 Kč. Pan Živý využíval kreditní kartu bez rozmyslu, což ho stálo $1\,848 \text{ Kč} + 539 \text{ Kč} - 300 \text{ Kč} = 2\,087 \text{ Kč}$.

Výše uvedenou skutečnost můžeme shrnout citátem:
Kreditní karta je jako oheň, dobrý sluha, ale zlý pán.

Článek obsahuje konkrétní příklady ilustrující používání kreditní karty. Musíme si uvědomit, že i když budeme mít potřebné znalosti o „fungování“ kreditní karty, bude hrát rozhodující roli při jejím využívání naše disciplinovanost. Držitelé kreditní karty by tudíž měli dodržovat následující pravidla: hlídat bezúročné období, nevybírat kreditní kartou z bankomatu, sledovat bonusy a poplatky na kreditní kartě, nepodléhat zbytečnému utrácení (nezvyšovat spotřebu z důvodu dostatečně vysokého úvěrového rámce kreditní karty).

Literatura

- [1] *Trump, D.*: Zbohatněte jako já. Pragma, Praha, 2004.
- [2] *VÚP Praha*: Rámcový vzdělávací program pro gymnázia (RVP G) [online] Výzkumný ústav pedagogický, Praha. Dostupné na: http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPG-2007-07_final.pdf [cit. 2015-05-20].
- [3] *iDnes.cz/Finance*: Chcete bonusy za platby kartou? Nejdříve se musíte zadlužit. [cit. 2015-06-10] Dostupné na: http://finance.idnes.cz/bonusy-u-platebnich-karet-0yy-/zivotni-pojisteni.aspx?c=A120716_110154_bank_bab.

Kombinatorické důkazy identit s Fibonacciho čísly

TEREZA KOVÁŘOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Príspevek je věnován známé Fibonacciově posloupnosti $(F_n)_{n=0}^{\infty}$, jejíž první dva členy jsou $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ a další členy (pro $n \geq 2$) lze získat pomocí rekurentního vztahu $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. V tab. 1 je uvedeno prvních 11 Fibonacciho čísel.

Tabulka 1 Prvních 11 Fibonacciho čísel

F_0	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89

Fibonacciho čísla se vyskytují v mnoha zajímavých identitách (vzorcích). Budeme se věnovat zejména tomu, jak dokázat platnost vybraných identit. Obvykle se v literatuře uvádějí důkazy pomocí matematické indukce. Ukážeme jinou možnost, kterou je kombinatorický důkaz. Princip takového důkazu spočívá v nalezení vhodné kombinatorické interpretace levé i pravé strany rovnosti a následné diskuzi, v níž je nutné vysvětlit, že obě strany rovnosti popisují tutéž situaci.

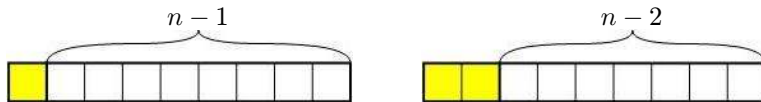
V celém článku budeme využívat vztahu mezi Fibonacciho čísly a pokrýváním obdélníku pomocí dlaždic dvou druhů. Prvním druhem jsou tzv. monomina (čtverce o délce strany 1) a druhým jsou domina (obdélníky o velikosti 1×2). Délka pokrývaného obdélníku bude vždy celé číslo a jeho šířka bude vždy 1. Zamysleme se nad tím, kolika způsoby lze pokrýt obdélník o velikosti $1 \times n$ pomocí monomin a domin. Počet všech těchto pokrytí označíme P_n .

Nejprve určíme počet pokrytí některých malých pravoúhelníků. Čtverec 1×1 můžeme pokrýt jediným způsobem (pomocí jednoho monomina). Platí tedy $P_1 = 1$. Obdélník 1×2 lze pokrýt dvěma způsoby, a to buď pomocí dvou monomin, nebo jednoho domina, tudíž $P_2 = 2$. Čtenář si může samostatně ověřit, že u obdélníku 1×3 snadno zjistíme, že počet různých způsobů pokrytí je 3, tedy $P_3 = 3$.

Obdélník $1 \times n$ (dále obdélník o délce n) budeme pokrývat postupně zleva doprava. První políčko lze pokrýt dvěma způsoby: buď pomocí monomina anebo pomocí domina. V prvním případě zbude k pokrytí obdélník o délce $n - 1$ a ve druhém případě zbude nepokrytý obdélník o délce $n - 2$ (obr. 1). Počet všech různých pokrytí obdélníku o délce n získáme tedy tak, že sečteme počty všech možných pokrytí obdélníků o délkách $n - 1$ a $n - 2$. Platí tedy $P_n = P_{n-1} + P_{n-2}$.

Již víme, že pro $n \in \{1, 2\}$ je P_n shodné s F_n . Navíc rekurentní vztah pro výpočet dalších členů obou posloupností je stejný, proto i pro všechna vyšší n se musí čísla P_n a F_n rovnat. Zjistili jsme tedy, že až na nultý člen se jedná o dvě shodné posloupnosti. Definujeme-li navíc $P_0 = 1$, můžeme tento vztah interpretovat též kombinatoricky (obdélník 0×1 nelze pokrýt žádnou dlaždicí, tj. „existuje“ jedna možnost).

Zjistili jsme tedy, že počet všech způsobů pokrytí obdélníku o délce n pomocí monomin a domin je roven F_n . Tuto skutečnost budeme využívat při dokazování následujících čtyř identit.



Obr. 1 Dvě možnosti pokrytí levého políčka obdélníku o délce n

Úloha 1

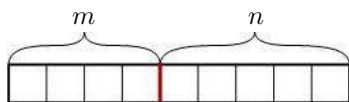
Dokažte, že pro libovolná m, n přirozená platí

$$F_{m+n} = F_m \cdot F_n + F_{m-1} \cdot F_{n-1}.$$

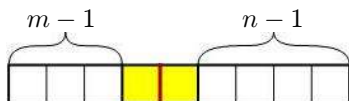
Řešení. Víme, že levá strana rovnosti odpovídá počtu všech různých pokrytí obdélníku o délce $m + n$ pomocí monomin a domin. Ukážeme-li, že počet těchto pokrytí popisuje i pravá strana zadané rovnosti, bude důkaz hotov.

Uvažujme tedy obdélník o délce $m + n$. Rozdělme ho na dva menší obdélníky o délkách m a n . První lze pomocí monomin a domin pokrýt F_m způsoby a druhý F_n způsoby (obr. 2). To nám dává $F_m \cdot F_n$ způsobů pokrytí původního obdélníku. Ještě jsme však nezapočetali ta pokrytí, kde jsou políčka m a $m + 1$ pokryta dominem (obr. 3). V takovém případě zbývá pokrýt dva obdélníky o délkách $m - 1$ a $n - 1$, čímž získáme dalších $F_{m-1} \cdot F_{n-1}$ způsobů pokrytí původního obdélníku.

Žádný jiný způsob pokrytí neexistuje, a proto obdélník o délce $m + n$ lze pokrýt $F_m \cdot F_n + F_{m-1} \cdot F_{n-1}$ způsoby, čímž jsme dokázali platnost zadané rovnosti.



Obr. 2 Obdélník o délce $m + n$ rozdělený na 2 menší obdélníky o délkách m, n



Obr. 3 Obdélník, ve kterém domino pokrývá políčka m a $m + 1$

Úloha 2

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots + \begin{cases} \binom{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}}, & \text{pro } n \text{ sudé,} \\ \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n-1}{2}}, & \text{pro } n \text{ liché.} \end{cases}$$

Řešení. Rozdělíme všechna možná pokrytí obdélníku délky n do skupin podle toho, kolik se v daném pokrytí nachází domin – nemusí být žádné a nejvýše jich může být $\lfloor n/2 \rfloor$. (Symbol $\lfloor n/2 \rfloor$ značí dolní celou část čísla $n/2$, tj. jeho zaokrouhlení na celé jednotky vždy směrem dolů.)

Nyní je třeba určit, kolik různých pokrytí obdélníku se nachází v každé z těchto skupin. Vezměme skupinu, kde každý obdélník obsahuje k domin. Pokrytí se potom skládá z k domin a z $n - 2k$ monomin, tj. dohromady $n - k$ dlaždic, které skládáme vedle sebe v různém pořadí. Počet různých uspořádání těchto dlaždic je stejný jako počet uspořádaných $(n - k)$ -tic sestavených z k prvků jednoho druhu a $n - 2k$ prvků druhého druhu. Jedná se tedy o permutace s opakováním, kterých je

$$\frac{(n - k)!}{k! \cdot (n - 2k)!}$$

Tento výraz lze zapsat kombinačním číslem $\binom{n-k}{k}$. Sečteme-li počty obdélníků ve všech skupinách, dostaneme počet všech různých pokrytí obdélníku

o délce n . To je ale totéž, jako sečíst kombinační čísla $\binom{n-k}{k}$ pro všechna možná k (tj. $k = 0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$).

Úloha 3

Dokažte, že pro každé n přirozené platí $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 2$.

Řešení. Stačí dokázat ekvivalentní vztah $F_0 + F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$. Pravou stranu této rovnosti lze chápat jako počet všech pokrytí obdélníku o délce $n + 2$ s alespoň jedním dominem (tj. počet všech různých pokrytí tohoto obdélníku bez jednoho pokrytí sestaveného ze samých monomin). Ukážeme, že na levé straně rovnosti je totéž číslo.

Chceme, aby pokrytí obdélníku obsahovalo alespoň jedno domino. Všechna taková pokrytí můžeme opět rozdělit do skupin, tentokrát podle polohy posledního domina (tj. domina nejvíce vpravo). Nyní potřebujeme zjistit, kolik obdélníků se nachází v každé skupině. Pokud poslední domino je na pozicích $k + 1$ a $k + 2$, potom prvních k políček obdélníku může být pokryto libovolně a zbylých $n - k$ políček musí být vždy vyplněno monominy. Počet takových pokrytí je F_k . Sečteme-li počty pokrytí v každé skupině, dostaneme počet všech různých pokrytí obdélníku o délce $n + 2$ s alespoň jedním dominem. To je ale totéž jako sečíst F_k pro všechna možná k (tj. $k = 0, \dots, n$).

Úloha 4

Dokažte, že pro každé n přirozené platí $F_n^2 = F_{n+1} \cdot F_{n-1} + (-1)^n$.

Řešení. Při důkazu této identity nevystačíme s pokrýváním jednoho obdélníku o délce n , ale budeme potřebovat dvojici takových obdélníků. Počet pokrytí těchto dvou obdélníků pomocí monomin a domin odpovídá levé straně rovnosti. Na pravé straně rovnosti si můžeme všimnout výrazu $F_{n+1} \cdot F_{n-1}$, který odpovídá počtu různých pokrytí dvojice obdélníků o délkách $n + 1$ a $n - 1$.

Identita říká, že počet pokrytí dvou obdélníků délky n se od počtu pokrytí dvou obdélníků o délkách $n + 1$ a $n - 1$ liší o 1, nebo -1 v závislosti na paritě čísla n .

Předpokládejme nejprve, že n je liché. Ukážeme, že z každého pokrytí dvojice obdélníků délky n lze vyrobit pokrytí dvojice obdélníků o délkách $n + 1$ a $n - 1$.

Vezmeme tedy libovolné pokrytí dvojice obdélníků délky n a umístíme obdélníky pod sebe tak, že dolní obdélník je oproti hornímu posunut o jedno políčko vpravo (obr. 4 a 5. vlevo). Sloupce očísloveme 1 až $n + 1$.

Horní obdélník se tedy nachází ve sloupcích 1 až n a dolní ve sloupcích 2 až $n + 1$.

Protože je n liché, v každém pokrytém obdélníku se musí nacházet alespoň jedno monomino. Najdeme to monomino, které leží nejvíce vpravo. Řekněme, že leží v i -tém sloupci. Nové pokrytí obdélníků o délkách $n + 1$ a $n - 1$ vyrobíme tak, že původním obdélníkům vyměníme políčka ve sloupcích i až $n + 1$. Na obr. 4 je znázorněna výměna pro situaci, kdy dané monomino leželo původně v dolním obdélníku, a na obr. 5 je výměna znázorněna pro situaci, kdy poslední monomino leželo původně v horním obdélníku.



Obr. 4 Výměna políček, kdy poslední monomino leželo původně v dolním obdélníku



Obr. 5 Výměna políček, kdy poslední monomino leželo původně v horním obdélníku

Všimněme si, že ze dvou různých pokrytí dvojice obdélníků délky n vzniknou dvě různá pokrytí dvojice obdélníků o délkách $n + 1$ a $n - 1$. Dále potřebujeme zjistit, jestli je možné tímto způsobem vyrobit libovolné pokrytí dvojice obdélníků o délkách $n + 1$ a $n - 1$. To je pravda až na jednu výjimku. Jelikož každý obdélník o délce n musí obsahovat alespoň jedno monomino, musí i všechna výše popsaná pokrytí obdélníků o délkách $n + 1$ a $n - 1$ obsahovat dohromady alespoň dvě monomina. Nesmíme ale zapomenout, že tyto dva obdélníky lze také pokrýt pouze pomocí samých domin. Proto je všech možných pokrytí dvojice obdélníků o délkách $n + 1$ a $n - 1$ o jedno více než pokrytí dvojice obdélníků o délce n . Pro n liché tedy platí $F_n^2 = F_{n+1} \cdot F_{n-1} - 1$.

Pro n sudé budeme naopak ze dvojice pokrytých obdélníků o délkách $n + 1$ a $n - 1$ tvořit dvojici pokrytých obdélníků o délce n . Obrácením výše uvedeného postupu zjistíme, že pro n sudé platí $F_n^2 = F_{n+1} \cdot F_{n-1} + 1$.

Tím je identita dokázána.

Závěr

V článku jsme uvedli kombinatorické důkazy čtyř zajímavých identit s Fibonacciho čísly. V závěrečných cvičeních je pak uvedeno dalších pět identit, jejichž důkazy přenecháváme čtenářům. Stojí za zamyslení, zda by všechny uvedené identity bylo možno dokázat také jiným způsobem, např. přímým důkazem pomocí vzorce pro n -tý člen Fibonacciovy posloupnosti nebo matematickou indukcí. Většinou bychom však zjistili, že takové důkazy jsou zdlouhavé a komplikované. Kombinatorické důkazy jsou pro vybrané identity naopak velmi nápadité a elegantní.

V uvedených důkazech jsme využívali pokrývání obdélníku o délce n pomocí monomin a domin. Mohli bychom však využít i jiných vlastností Fibonacciho čísel, například skutečnosti, že F_n udává počet všech různých pokrytí obdélníku $2 \times n$ výhradně pomocí domin. Hodnota F_n udává mj. počet způsobů, jak vystoupat po schodišti o n schodech, je-li povoleno při každém kroku nejvýše jeden schod přeskročit. Obě tyto kombinatorické situace jsou popsány v [1]. Čtenářům doporučujeme promyslet si, proč uvedená tvrzení platí, a pokusit se pomocí nich dokázat identity uvedené v tomto článku.

Tvorba článku byla inspirována publikací [2], v níž lze najít důkazy mnoha dalších identit, a to nejen s Fibonacciho čísly, ale také s kombinačními čísly, Lucasovými nebo tzv. Gibonacciho čísly. Důkazy řady identit s Fibonacciho čísly jsou uvedeny rovněž v [3].

Cvičení

Dokažte, že pro libovolné n přirozené platí

a) $F_{2n} = F_n^2 + F_{n-1}^2$,

b) $F_{2n-1} = F_n^2 - F_{n-2}^2$,

c) $F_0 + F_2 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1}$,

d) $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n} - 1$,

e) $F_n^4 = F_{n+2} \cdot F_{n+1} \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2} + 1$.

Literatura

- [1] *Calda, E.*: Kombinatorika pro učitelské studium. Matfyzpress, Praha, 1996.
- [2] *Benjamin, A. T. – Quinn, J. J.*: Proofs That Really Count: the art of combinatorial proof. Mathematical Association of America, Washington, D.C., 2003.
- [3] *Grimaldi, R. P.*: Fibonacci and Catalan Numbers. An Introduction. John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2012.

Konstrukce elipsy

MARIE CHODOROVÁ – LENKA JUKLOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

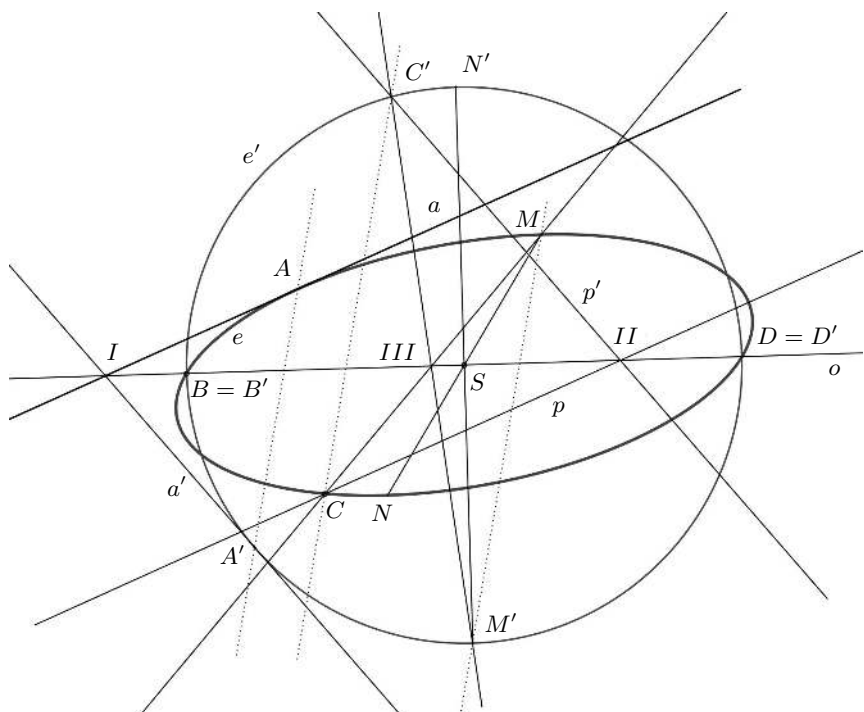
Kuželosečky představují ve výuce matematiky zajímavé téma, avšak na střední škole bývají často opomíjené nebo se s nimi studenti seznámí jen stručně v analytické geometrii a o jejich vlastních konstrukcích se ve výuce příliš nedozví, přitom lze konstatovat, že mají díky svým ohniskovým vlastnostem i praktické využití v běžném životě.

Na kuželosečkách lze mj. prezentovat množství zajímavých konstrukcí. V dalším textu se zaměříme výhradně na elipsu, kterou lze konstruovat pomocí ohniskových vlastností nebo jako řezy na rotační válcové ploše, kde využíváme tzv. *afinity mezi kružnicí a elipsou*. (Kružnice i elipsa jsou jistými řezy rotační válcové plochy a afinita mezi nimi je dána osou afinity, což je průsečnice rovin řezu, a odpovídají si body kružnice a elipsy ležící na téže povrchové přímce.) Pro tento článek jsme zvolili jednu typickou úlohu na konstrukci elipsy, kterou lze provést dvojím způsobem, a to buď využitím osové afinity mezi kružnicí a elipsou, nebo její konstrukci lze odvodit z prostoru, kdy hledaná elipsa bude průmětem řezu válce (samozřejmě při vhodném zvolení válce vzhledem k průmětně v prostoru). Uvažujeme takovou polohu roviny, aby řezem válce byla elipsa.

Úloha

Sestrojte elipsu, je-li dána její tečna a , střed S a její body B , C , které nejsou s bodem S kolineární.

Řešení (užitím tzv. osové afinity, obr. 1). Hledanou elipsu e sestrojíme jako afinní obraz kružnice e' ve vhodně zvolené osové afinitě. Vzhledem k tomu, že je dán střed hledané elipsy e a dva její body, zvolíme osu afinity tak, aby procházela středem S a například bodem B , tedy $o = SB$. Body S a B jsou *samodružné* a můžeme sestrojít kružnici $e'(S; |SB|)$, která je afinním obrazem elipsy e . Osu afinity jsme zvolili, kdežto směr afinity je nutno určit ze zbývajících prvků. Tečna a elipsy e se zobrazí na tečnu a' kružnice e' a současně a' musí procházet bodem $\{I\} = a \cap o$, a' sestrojíme jako tečnu kružnice e' procházející bodem I (jako obraz přímky a zvolíme jednu z tečen).

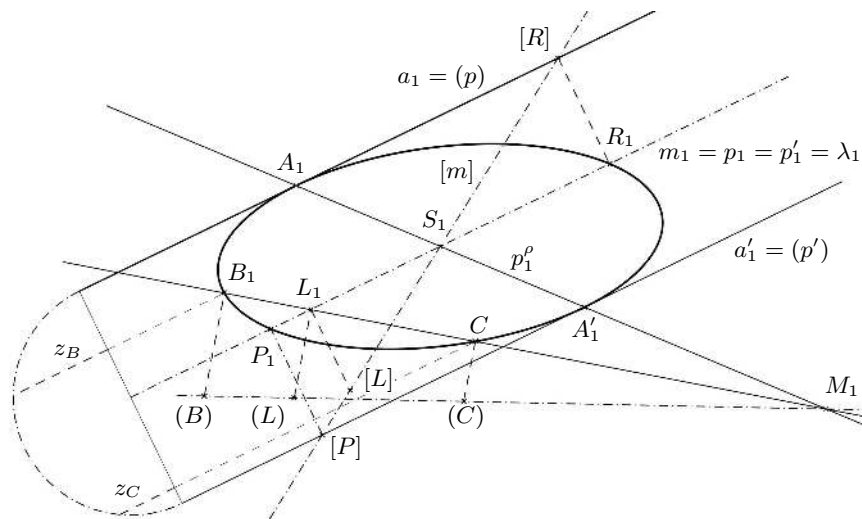


Obr. 1

Uvažujme přímkou $p \parallel a$ procházející bodem C . V osové afinitě se dvojice rovnoběžných přímek zobrazí opět na dvojici rovnoběžných přímek, proto také $p' \parallel a'$. Obraz C' leží na p' i na e' , tedy $C' = p' \cap e'$ (opět zvolíme libovolně jeden z průsečíků). Označíme-li D druhý průsečík osy afinity s kružnicí e' , je BD samodružný průměr elipsy e . Průměr $M'N'$ kružnice e' kolmý na BD se zobrazí na průměr MN elipsy e sdružený s průměrem BD , elipsa e je sdruženými průměry jednoznačně určena.

Jiné řešení (užitím prostorových konstrukcí, obr. 2). Druhý způsob řešení je založen na prostorových konstrukcích, hledanou elipsu sestrojíme jako pravoúhlý průmět řezu jisté rotační válcové plochy. Konstrukce provádíme v kótovaném promítání, jehož průmětna je dána přímkou a a bodem S . Uvažujme rotační válcovou plochu, jejíž povrchová přímka je a a osa o rotace prochází bodem S . K tomu, abychom vyjádřili, že na každý daný prvek pohlédneme jako na kolmý průmět bodu nebo přímky do průmětny π ,

připojíme předem v dané úloze ke každému zadanému prvku index 1. Se-
strojíme přímkou a'_1 , která je souměrná s a_1 podle S_1 . Tyto přímky jsou
průměty obrysových přímek a, a' rotační válcové plochy s osou o ležící
v průmětně π . Body B_1, C_1 jsou pravouhlé průměty bodů B, C této vál-
cové plochy. Bod S_1 je pravouhlým průmětem středu S jisté elipsy e , která
je řezem válcové plochy rovinou σ . Rovina σ je jednoznačně určena body
 B, C, S . Podle známé Quételetovy–Dandelinovy věty bude řezem elipsa e ,
jejímž pravouhlým průmětem bude elipsa e_1 , kterou zobrazíme pomocí
sdužených průměrů. Stopa roviny σ prochází bodem S a dále bodem M ,
což je stopník přímky BC , který určíme sklopením promítací roviny této
přímky.¹ V průmětně leží půdorysná stopa p^σ roviny σ a povrchové přímky
 a, a' dané rotační válcové plochy. Jeden průměr elipsy řezu bude tedy ležet
na p^σ , omezen bude body A, A' , kde $\{A\} = a \cap p^\sigma, \{A'\} = a' \cap p^\sigma$. Tento
průměr je průměrem řezu a současně i průměrem průmětu řezu.



Obr. 2

Víme, že dva průměry elipsy jsou sdužené, právě když tečny v krajních
bodech jednoho průměru jsou rovnoběžné s druhým průměrem. Přímky $a,$

¹Kóty bodů B, C lze snadno zjistit z předpokladu, že body B, C leží na dané rotační
válcové ploše. Řešení závisí na tom, zda leží oba v téže polorovině určené průmětnou,
nebo v polorovinách opačných.

a' jsou skutečným obrysem, resp. jejich průměty a_1 , a'_1 zdánlivým obrysem, rotační válcové plochy, jsou tedy tečnami elipsy řezu, resp. tečnami průmětu elipsy řezu. Hledáme průměr PQ rovnoběžný s přímkami a , a' . Průměr PQ bude ležet v rovině λ , která obsahuje osu válcové plochy o a je kolmá k průmětně π , tedy jejím průmětem je přímka. Rovina λ protíná danou válcovou plochu ve dvou povrchových přímkách p , p' a rovinu řezu σ v přímce m . Krajní body průměru P , Q určíme jako průsečíky přímky m s povrchovými přímkami p , p' . Rovina λ je kolmá k průmětně, sklopíme ji a ve sklopení určíme hledané body P , Q . Po sklopení roviny λ sklopené přímky p , p' splynou s prvními průměty přímk a , a' . Přímku m sklopíme pomocí bodu $L = m \cap BC$. Určíme sklopené body (P) , (Q) , $(P) = (m) \cap (p)$, $(Q) = (m) \cap (p')$. Body P_1 , Q_1 leží na m_1 a P_1Q_1 je obrazem průměru PQ . Průmět řezu je určen průměty sdružených průměrů $A_1A'_1$ a P_1Q_1 .

Diskusi lze také jednoduše provést pomocí prostorových úvah.

Diskuse:

- Body B_1 , C_1 jsou vnitřní body pásu a_1 , a'_1 , pak body B , $C \notin \pi$ a úloha má dvě řešení. Totiž body B , C , S mohou mít vzhledem k π čtyři polohy. Ze souměrnosti podle π dávají vždy dva případy jedno řešení. Na obr. 2 leží body B , C v téže polorovině určené průmětnou.
- Je-li jeden z bodů B_1 , C_1 vnitřním bodem pásu a_1 , a'_1 a druhý leží na a'_1 , má úloha jen jedno řešení.
- Leží-li oba body B_1 , C_1 na a'_1 , nebo B_1 leží na a_1 a C_1 leží na a'_1 ,² nebo je-li jeden z bodů B_1 , C_1 vnějším bodem pásu a_1 , a'_1 , pak úloha nemá žádné řešení.

Literatura

- [1] Šimek, J.: O některých konstrukcích elipsy odvozených z prostoru. Sborník VŠP v Olomouci, Přírodní vědy IV, Matematika – Fysika – Chemie, SPN, Praha, 1958, 19–28.
- [2] Havlíček, K.: Úvod do projektivní geometrie kuželoseček. SNTL, Praha, 1956.
- [2] Kadeřávek, F. – Klíma, J. – Kounovský, J.: Deskriptivní geometrie II, ČSAV, Praha, 1954.

²Body B_1 , C_1 , S_1 jsou nekolineární.

Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v uveřejňování úloh tradiční rubriky Zajímavé matematické úlohy. V tomto čísle uvádíme zadání další dvojice úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 20. 3. 2016 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v \TeX ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 221

Najděte všechny dvojice čísel X, Y desítkové soustavy takové, že pro čísla a, b, c, d ve tvaru

$$a = \overline{2X83}, \quad b = \overline{19Y6}, \quad c = \overline{29X6}, \quad d = \overline{1Y54}$$

jsou obě čísla $a + b, c - d$ dělitelná třemi.

Stanislav Trávníček

Úloha 222

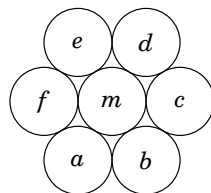
Je dána kružnice $k_1(S_1; r_1)$ a bod S_3 jejího vnějšku. Sestrojte kružnice $k_2(S_2; r_2)$ a $k_3(S_3; r_3)$ tak, že současně platí: S_2 je bodem úsečky S_1S_3 , kružnice k_2 se vně dotýká kružnic k_1 a k_3 a všechny tři kružnice mají společnou vnější tečnu.

Šárka Gergelitsová

Dále uvádíme řešení úloh 217 a 218, jejichž zadání byla zveřejněna ve čtvrtém čísle loňského (24.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 217

Kruh na obrázku je obklopen šesti dotýkajícími se shodnými kruhy. V těchto kruzích jsou zapsána reálná čísla a, b, c, d, e, f a m . Přitom číslo v každém kruhu je součinem všech čísel v kruzích, které se jej dotýkají. Určete všechny možné hodnoty čísla m .



Robert Geretschläger (Graz)

Řešení. Pokud je v některém kruhu napsáno číslo 0, potom $m = 0$ spolu se zbývajícími čísly. Předpokládejme dále, že ve všech kruzích jsou nenulová reálná čísla.

Podle zadání platí

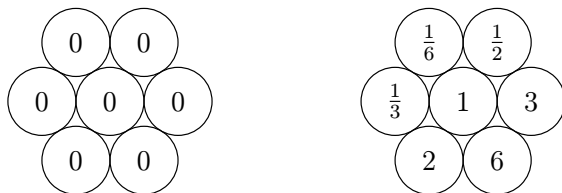
$$a = fmb, \quad b = amc, \quad d = cme, \quad e = dmf, \quad f = ema.$$

Vynásobením těchto šesti rovnic dostaneme

$$abcdef = (abcdef)^2 m^6.$$

Protože dále platí $m = abcdef$, dostáváme odtud $m = m^8$. Vzhledem k předpokladu $m \neq 0$ odtud plyne $m = 1$.

V závěru ještě musíme ukázat, že pro vypočtená m z množiny $\{0; 1\}$ existují reálná čísla a, b, c, d, e, f daných vlastností. Jsou to například čísla z následujících obrázků.



Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich. *Filip Bialas* z G Opatov v Praze 4, *Jan Gocník*, *Marian Poljak* a *Jan Šuta*, všichni z GJŠ v Přerově, *Lenka Kopfová* z MG v Opavě, *Ondřej Houška* z GNA v Praze 6, *Ivana Krumlová*, *Petr Zelina*, oba z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Vojtěch Lukeš* z GLP v Plzni, *Jakub Matěna* z G v Praze 9, Českolipská, *Jan Petr* z GJK v Praze 6 a *Pavel Turek* z G v Olomouci-Hejčíně.

Neúplné řešení zaslali *František Jáchim* z Volyně, *Tomáš Domes* z MG v Opavě, *Veronika Hladíková* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Tomáš Konečný* z GJVJ v Českých Budějovicích, *Daniel Kopf* z SG v Opavě, *Tran Anh Minh* a *Jan Šorm*, oba z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Ester Sgalová* z GChD v Praze 5, *Lucien Šíma* z PORG v Praze 8 a *Václav Voráček* z G v Jindřichově Hradci.

Úloha 218

Najděte všechny dvojice (x, y) celých čísel vyhovujících rovnici

$$x^2 - 3x - 4xy - 2y + 4y^2 + 4 = 0.$$

Pavel Calábek

Řešení. Danou rovnici upravíme do tvaru

$$(x - 2y)^2 = 3x + 2y - 4.$$

Protože x a y jsou celá čísla, existuje celé číslo d tak, že platí

$$\begin{aligned}x - 2y &= d, \\3x + 2y - 4 &= d^2.\end{aligned}$$

Řešením této soustavy vzhledem k neznámým x , y a parametru d dostaneme

$$\begin{aligned}x &= \frac{d(d+1)+4}{4}, \\y &= \frac{d(d-3)+4}{8}.\end{aligned}$$

V čitatelích výrazů pro x a y vpravo jsou mnohočleny s celočíselnými koeficienty, které mají stejné zbytky při dělení 8 pro každou dvojici d a $d+8$. Vyzkoušením všech osmi možných zbytkových tříd při dělení 8 zjistíme, že x a y nabývají celočíselné hodnoty pouze pro celá čísla d tvarů $d = 8k + 4$ a $d = 8k - 1$, kde k je libovolné celé číslo. V prvním případě tak dostaneme

$$x = 16k^2 + 18k + 6, \quad y = 8k^2 + 5k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

ve druhém

$$x = 16k^2 - 2k + 1, \quad y = 8k^2 - 5k + 1, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Všechna celá čísla x a y vyhovující zadané rovnici jsou některého z tvarů (1) nebo (2).

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich, *Ondřej Houška* z GNA v Praze 6, *Vojtěch Lukeš* z GLP v Plzni, *Jakub Matěna* z G v Praze 9, *Českolipská*, *Pavel Turek* z G v Olomouci-Hejčíně a *Václav Voráček* z G v Jindřichově Hradci.

Neúplné řešení zaslal *Jan Petr* z GJK v Praze 6.

Pavel Calábek

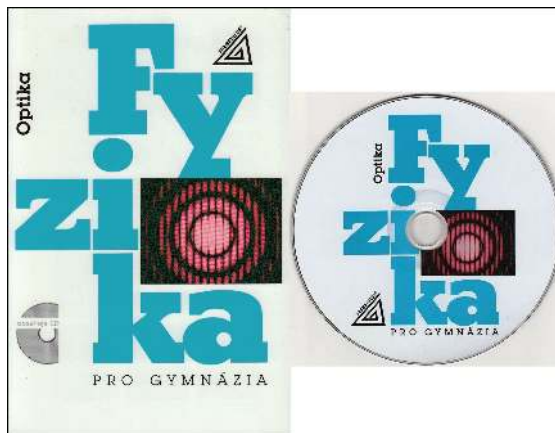
FYZIKA

Učebnice optiky pro gymnázia nově

OLDŘICH LEPIL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V říjnu loňského roku vyšlo v nakladatelství Prometheus nové vydání učebnice Fyzika pro gymnázia. Optika. Je to 5., podstatně přepracované vydání praxí prověřené učebnice, která vyšla v 1. vydání již v roce 1993 (spoluautorem byl *RNDr. Zdeněk Kupka, CSc.*). Učebnice po úmrtí spoluautora vyšla v přepracovaném 3. vydání v roce 2002. Nynější úpravy učebnice jsou podstatnější a z formálního hlediska spočívají především ve zmenšení rozsahu knižní podoby učebnice. Zatím co předcházející vydání učebnice mělo 208 stran, nová učebnice má rozsah přesně poloviční.



Obr. 1

Po obsahové stránce odpovídá knižní část požadavkům současného Rámcového vzdělávacího programu pro gymnázium a stejně jako v předcházejících vydáních je učivo rozčleněno do čtyř základních kapitol: 1. Základní pojmy, 2. Zobrazování optickými soustavami, 3. Vlnová optika, 4. Elektromagnetické záření a jeho energie. Do knihy již nejsou zahrnuta teoretická a laboratorní cvičení, což ale neznamená, že by tato cvičení byla vynechána. Naopak, např. náměty laboratorních cvičení byly rozšířeny ze čtyř v předcházejícím vydání na sedm v novém vydání. Nově jsou zpracována laboratorní cvičení: Pozorování vlastností lidského oka, Určení úhlového zvětšení lupy a Měření osvětlení fotometrem. Z knižní části učebnice jsou však cvičení přesunuta na CD.

Všechny textové části učebních materiálů na CD jsou ve formátu pdf, takže by neměl být problém s jejich případným exportem na jiný nosič, např. na flash disk nebo do paměti tabletu, popř. si vybraný text vytisknout na vlastní tiskárně. Je však třeba připomenout základní zásadu plynoucí z autorského zákona, že *kopii lze vytvořit výhradně pro vlastní potřebu* (podrobněji viz <http://www.msmt.cz/vzdelavani/skolstvi-v-cr/autorsky-zakon-ve-skolach>). V rozporu s autorským zákonem je nejen jakýkoliv technický způsob šíření publikace, ale také např. hromadné rozmnožování vybraných částí textu, které by učitel rozdál žákům jako učební pomůcku.

Umístěním některých částí učebního textu a dalších doplňujících učebních materiálů na příložené CD je sledován trend širšího využívání elektronických nosičů pro usnadnění přístupu žáků k náročnějším částem učiva, které již RVP nezahrnuje, ale významně přispívají k vytvoření uceleného přírodovědného vzdělání. Dále je takto žákovi umožněn přístup k dalším informačním zdrojům a audiovizuálním prostředkům názorné prezentace učiva optiky. To je patrné z přehledu materiálů, které CD obsahuje (obr. 2):

1. Rozšiřující učivo
2. Animace k učivu
3. Videozáznamy experimentů
4. Historické poznámky
5. Slovníček fyzikálních pojmů
6. Obrazové prezentace k učivu

Změny v základním učivu optiky, které je obsaženo v tištěné části učebnice, nejsou nějak zásadní a ponechána je i tradiční struktura učiva, která dává přednost výkladu paprskové optiky před optikou vlnovou. Jako prvky inovace můžeme uvést např. některé aplikace optiky, kde došlo v poslední

době k výrazným vývojovým změnám. Příkladem může být učivo o fotografickém přístroji, kde už nemá smysl zabývat se záznamem obrazu na film, ale výklad je zaměřen na současné technické řešení se záznamem obrazu pomocí elektronického čipu CCD, včetně jeho charakteristiky jako souboru obrazových bodů – pixelů, jejichž počet určuje rozlišení obrazu. Fotografický přístroj je také jediný optický přístroj (kromě lupy) podrobněji vyložený v základním učivu. Všechny ostatní optické přístroje (dataprojektor, mikroskop a dalekohled) jsou zahrnuty do rozšiřujícího učiva na CD. Revoluční změny v osvětlovací technice si vyžádaly rozšíření poznatků o luminiscenci v souvislosti s pokrokem ve vývoji světelných zdrojů na bázi diod LED.



Obr. 2

Podstatně výraznější jsou zásahy do obsahu rozšiřujícího učiva, které je hlavní náplní CD. Na CD je dostatek prostoru, kterým není navyšován stránkový rozsah učebnice, což umožňuje i volnější zpracování učiva a je na učiteli, které jeho části ve výuce využije. Tak např. v kapitole R1 *Základní pojmy* (18 stran) je jednak podrobněji popsána historie měření rychlosti světla, jednak je značná pozornost věnována barvě světla z hlediska moderních technických prostředků jako jsou displeje LCD počítačových monitorů a televizorů nebo barevný tisk počítačovou tiskárnou. Výhodou je i skutečnost, že vyobrazení rozšiřujícího učiva na rozdíl od učebnice tištěné mohou být barevná.

Podobně v kapitole R2 *Zobrazování optickými soustavami* (13 stran) je vedle klasického učiva o mikroskopu a dalekohledu podrobněji vyložen princip barevné projekce dataprojektorem pracujícím na principu transmisní technologie a v poznámce je zmíněna i složitější reflektivní technologie DLP založená na využití polovodičového čipu se soustavou miniaturních zrcátek.

K nejnáročnějšímu učivu středoškolské optiky patří poznatky vlnové optiky a kapitola R3 *Vlnová optika* (25 stran) je ze všech kapitol rozšiřujícího učiva nejrozsáhlejší. Převážnou část kapitoly tvoří učivo, které jako rozšiřující bylo označeno již v předcházejícím vydání učebnice. Týká se interference světla na tenkých vrstvách, ohybových jevů na různých typech překážek, holografie a výrazněji bylo modernizováno učivo o polarizaci světla. V této části učiva je podrobněji vyložena funkce obrazovky LCD a snímače záznamu na kompaktním disku.

Do kapitoly R4 *Elektromagnetické záření a jeho energie* (9 stran) je nově zařazeno učivo o fotometrických vlastnostech zdrojů světla. Je tomu tak proto, že v současnosti k výběru zdroje světla již nestačí znát jen příkon, jak tomu bylo u klasických žárovek, ale užité vlastnosti současných zdrojů – kompaktních zářivek a tzv. LED žárovek označují výrobci nově fotometrickými veličinami, jako je celkový světelný tok, popř. světelná účinnost. Do rozšiřujícího učiva je zařazen také výklad o záření černého tělesa, jehož závěr o kvantování energie záření vytváří spojovací můstek k dalšímu učivu fyziky mikrosvěta.

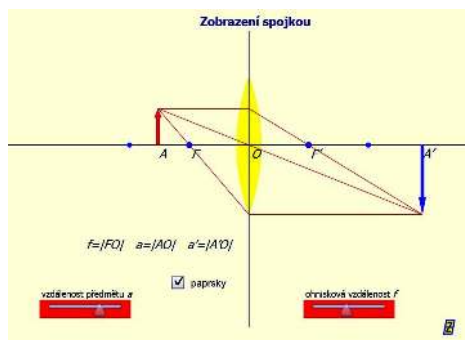
Textovými částmi obsahu CD jsou ještě Historické poznámky a Slovníček fyzikálních pojmů. Historické poznámky zpracovala *RNDr. Radmila Hýbllová* a obsahují životopisné medailonky 16 významných osobností historie optiky a krátkou historii vývoje dalekohledu a mikroskopu. Slovníček fyzikálních pojmů je výběrem veličin a jevů optiky, které však nejsou řazeny abecedně, ale jsou uspořádány podle posloupnosti poznatků v učebnici. Kapitoly Slovníčku korespondují s kapitolami v učebnici a výběr příslušného pojmu usnadňuje interaktivní rejstřík v úvodu Slovníčku. U každého hesla Slovníčku je uveden jeho anglický ekvivalent a některá hesla rozšiřují poznatky optiky nad rámec učiva v učebnici.

Značnou část prostoru na CD zaujímají obrazové materiály v podobě animací (označení A), videoexperimentů (označení V) a obrazových prezentací (označení P). Autorem animací je *ing. Zdeněk Burjan* a jde o interaktivní aplety na následující témata:

- A1 Odraz a lom světla
- A2 Zobrazení dutým zrcadlem
- A3 Zobrazení vypuklým zrcadlem
- A4 Zobrazení spojkou
- A5 Zobrazení rozptylkou

I když lze na internetu nalézt aplety na obdobná témata, výhodou je možnost pohotově zařazovat animace do výuky, popř. vkládat je do pre-

zentrací, které si připraví sám učitel. Animace tvoří exe soubory, takže pro spuštění animace není potřebný žádný speciální software. Na obr. 3 je jako příklad ukázka z animace A4.

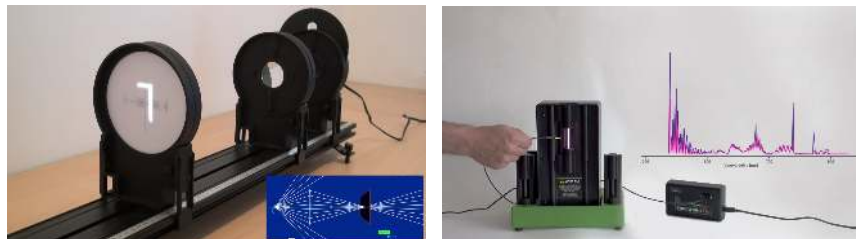


Obr. 3

Speciálně pro učebnici optiky vytvořili *Mgr. Lucie Filipenská* a *Mgr. Pavel Böhlm* soubor šesti videoexperimentů na témata:

- V1 Světlovod
- V2 Duté zrcadlo
- V3 Zobrazení spojkou
- V4 Difrakce světla
- V5 Polarizace
- V6 Spektrum světla

Na obr. 4 jsou ukázky z videoexperimentů V3 a V6. Kromě toho firma Edufor Services, s. r. o. (www.edufor.cz) poskytla další videoexperimenty realizované s použitím Školního experimentálního systému Vernier: Žhavení vlákna žárovky, Počítání fólií procházejícím světlem, Stáčení roviny polarizace a Ochrana před UV zářením.



Obr. 4

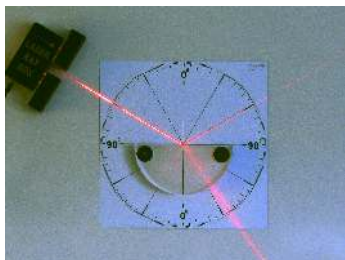
Dobrou pomůckou pro učitele mohou být prezentace ve formátu programu MS PowerPoint:

P1 Paprsková optika

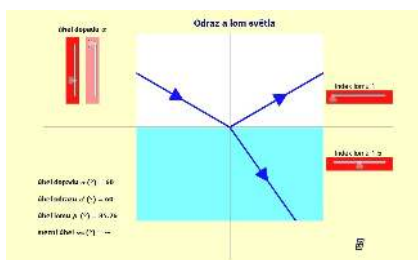
P2 Spektra

P3 Tepelné záření

V prezentaci P1 jsou v barevné podobě uvedena některá vyobrazení k učivu paprskové optiky, která jsou v učebnici vytištěna černobíle. Autorem původních vyobrazení je *Mgr. František Látal, Ph.D.* Např. na obr. 5 je zobrazení lomu světla na optické desce a na obr. 6 je vyobrazení z animace A1, které s fotografií koresponduje.

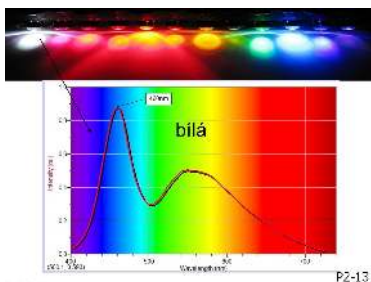


Obr. 5

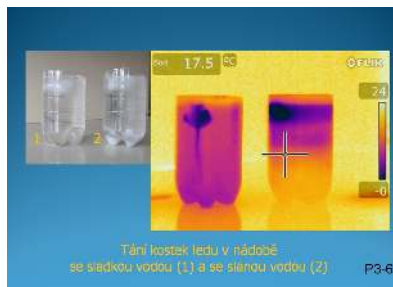


Obr. 6

Prezentace P2 doplňuje text o spektrech látek a obsahuje vyobrazení spekter různých zdrojů světla, získaná spektrometrem Vernier SpectroVis Plus a Prezentace P3 je souborem termogramů různých objektů, které byly pořízeny termovizní kamerou FLIR. Autorem vyobrazení v prezentacích P2 a P3 je *Mgr. Václav Pazdera*. Jednotlivé obrázky je možné snadno překopírovat do prezentací, které si učitel připraví podle vlastního návrhu. Na obr. 7 je ukázka spektra bílé diody LED a na obr. 8 je ukázka termogramu tání ledu v nádobě se sladkou a slanou vodou.



Obr. 7



Obr. 8

Po technické stránce CD připravil *Mgr. Lukáš Richterek, Ph.D.*, který je také autorem některých fotografií. Obrázky kreslené programem METAPOST připravil *PaedDr. Přemysl Šedivý*. I když v přepracovaném vydání učebnice většinou nejde o zcela nový text, přesto bylo zpracování učiva znovu posouzeno lektory, kterými byli *doc. RNDr. Josef Hubeňák, CSc.* a *RNDr. František Pluháček, Ph.D.* Pro tisk učebnici velmi pečlivě připravili redaktori nakladatelství Prometheus *Mgr. Milena Osobová* a *PaedDr. Bohuslav Rothanzl*.

Autor děkuje všem spolupracovníkům, lektorům i redaktorům za dobře odvedenou práci. Věřím, že se nové zpracování učebnice stane pro učitele i žáky gymnázií užitečnou učební pomůckou. Všichni spolupracovníci také rádi přijmou připomínky, které by mohly přispět k dalšímu zlepšení knihy i doplňujících materiálů na CD.

Vypařování v experimentech: V hlavní roli váhy

PETR KÁCOVSKÝ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Hmotnost kam se podíváš

Hmotnost je jednou z prvních fyzikálních veličin, se kterou se žáci ve svém životě setkávají – nejdříve v domácím prostředí v běžné mluvě, následně pak ve škole jako s fyzikální veličinou. V hodinách fyziky je pak nepřestává provázet až do maturitního ročníku – pomineme-li elektromagnetické jevy, kde se objevuje jen sporadicky, je hmotnost možná tím nejzákladnějším a nejčastěji uvažovaným parametrem těles v celé základoškolské a středoškolské fyzice. Koneckonců, najdeme ji i ve dvou zřejmě neslavnějších fyzikálních vztazích, které se ze školních lavic zčásti probojovaly do povědomí veřejnosti – ve slavném Einsteinově $E = mc^2$ i Newtonově zákonu síly ve tvaru $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Měření hmotnosti pak ve výuce často představuje klíč k určování jiných, přímo obtížně měřitelných veličin – na základní škole jde obvykle o výpočet hustoty, na škole střední se pak přidává výpočet zrychlení z výše zmíněného zákona síly či určení tuhosti pružiny statickou i dynamickou metodou.

Měření hmotnosti

Metody měření hmotnosti jsou vzhledem k častému výskytu této veličiny ve fyzice velmi rozmanité a zahrnují jak metody přímé, tak nepřímé, metody absolutní i relativní, substituční i kompenzační; není ovšem cílem tohoto článku se těmito metodami podrobněji zabývat.

Historicky nejstarším nástrojem používaným k určování hmotnosti jsou nám důvěrně známé rovnoramenné váhy používané již v Babylóně, Egyptě nebo Číně v souvislosti s obchodem; v českých zemích se pak objevují za vlády Přemysla Otakara II. [1].

Určování hmotnosti rovnoramennými vahami přetrvalo ve školních lavicích do dnešních dnů a je standardní součástí přípravy žáků, přestože z praxe již tyto váhy téměř vymizely a jejich opodstatnění ve výuce tak spočívá hlavně v demonstraci principu páky. Z hlediska tohoto příspěvku je použití rovnoramenných vah zcela vyloučeno – níže uvedené experimenty se zaměřují na vypařování kapalin, tedy děj, při kterém se hmotnost kapaliny neustále mění. Je tedy třeba používat váhy, které vrátí aktuální hmotnost okamžitě, než se tato stačí změnit, což zdlouhavé vyvažování misek v případě rovnoramenných vah neumožňuje.

Váhy pružinové, využívající pro měření hmotnosti Hookova zákona, tento nedostatek částečně odstraňují, i když i zde musíme po zavěšení váženého tělesa počítat s určitou časovou prodlevou potřebnou k ustálení pružiny v její nové rovnovážné poloze. Paradoxně se ve školách s pružinovými vahami setkáváme častěji v podobě pružinových siloměrů, které ovšem můžeme při znalosti tíhového zrychlení s úspěchem využívat k vážení. Pro zaznamenání malých změn hmotnosti kapalin typických pro vypařování vykazují ale tyto váhy příliš malou citlivost i přesnost.

Nejpřesnějšími běžně dostupnými vahami jsou v současné době váhy elektronické (tenzometrické), které využívají ke stanovení hmotnosti piezoelektrického jevu, kdy je mechanicky deformovaný krystal zdrojem měřitelného elektrického napětí [2]. Na trhu se dnes vyskytuje velké množství těchto vah různých rozsahů i citlivostí a pro školy je dobrou zprávou setrvalý pokles jejich ceny. V současné době je možné pořídit přenosné kapesní váhy s citlivostí 0,01 gramu a rozsahem 0 až 200 gramů i za cenu okolo

200 Kč, což z nich dělá dostupnou a velmi užitečnou učební pomůcku pro frontální i skupinové metody výuky. Právě kapesní váhy s těmito parametry (obr. 1) byly díky své rychlé odezvě a dostatečné přesnosti použity při proměřování tří experimentů, které popíšeme v následujícím textu.



Obr. 1 Kapesní váhy používané v následujících experimentech

Experiment 1 (Určení měrného skupenského tepla varu vody)

Zatímco určování měrného skupenského tepla tání ledu (resp. tuhnutí vody) bývá poměrně běžným praktickým úkolem středoškoláků, měrné skupenské teplo varu často zmiňujeme pouze teoreticky. Tento experiment umožňuje jeho snadné a poměrně přesné určení v čase ne delším než 15 minut. Ideou měření je využití konstantního tepelného výkonu rychlovarné konvice při ohřívání i varu vody.

Pomůcky: Teploměr (výhodou, ale ne podmínkou je čidlo spolupracující s počítačem, které je schopné vykreslovat časový vývoj teploty; pro tento konkrétní experiment bylo využito čidlo Vernier Go!Temp), rychlovarná konvice, váhy (postačuje citlivost 1 g).

Teorie: K tomu, abychom vodu o hmotnosti m_1 v rychlovarné konvici ohřáli o rozdíl teplot Δt , je třeba jí dodat teplo $Q = cm_1\Delta t$, kde konstanta c je měrná tepelná kapacita vody, $c = 4180 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Pokud navíc víme, že zvýšení teploty o Δt si vyžádalo čas τ_1 , můžeme určit průměrný tepelný výkon P_1 konvice při ohřevu jako

$$P_1 = \frac{Q}{\tau_1} = \frac{cm_1\Delta t}{\tau_1}.$$

Při dosažení teploty varu se přestává teplota kapaliny zvyšovat a veškeré dále dodávané teplo je využíváno na vypařování kapaliny z celého jejího

objemu. Toto teplo označujeme jako skupenské teplo varu L_v . Dodání většího tepla L_v umožní změnu skupenství většímu množství vody m_2 , což lze matematicky vyjádřit jako

$$L_v = m_2 l_v,$$

kde m_2 je hmotnost varem odpařené vody. Konstanta úměrnosti l_v se nazývá měrné skupenské teplo varu a udává teplo, které je třeba dodat jednomu kilogramu kapaliny (zde vody), aby se tato zcela přeměnila na páru stejné teploty. Pokud navíc víme, že se voda o hmotnosti m_2 odpařila za čas τ_2 , můžeme určit průměrný tepelný výkon P_2 konvice při varu jako

$$P_2 = \frac{m_2 l_v}{\tau_2}.$$

Budeme-li nyní oprávněně předpokládat, že tepelný výkon konvice je během ohřevu vody i během jejího varu stejný, tj. $P_1 = P_2$, dostáváme rovnost výkonů ve tvaru

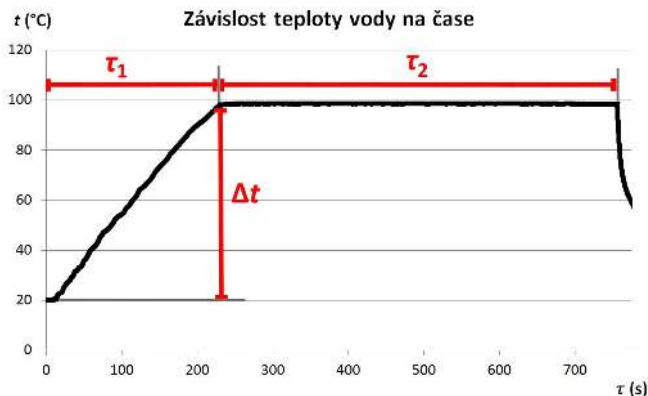
$$\frac{cm_1 \Delta t}{\tau_1} = \frac{m_2 l_v}{\tau_2}.$$

Z této rovnice již snadno vyjádříme hledané měrné skupenské teplo varu vody

$$l_v = c \Delta t \frac{m_1 \tau_2}{m_2 \tau_1}.$$

Postup: Konvici naplníme přibližně do poloviny jejího maximálního deklarovaného objemu studenou kohoutkovou vodou a zvážíme ji. Upevníme teploměr tak, aby měřil teplotu několik centimetrů pod hladinou, ale současně se nedotýkal topné spirály či dna konvice. Víko konvice necháváme po celou dobu experimentu otevřené.

Současně se zapnutím konvice spustíme měření teploty. Přivedeme vodu k varu a poté ji necháme – stále při otevřeném víku – vřít alespoň po dobu srovnatelnou s dobou ohřevu, event. déle. Následně ukončíme měření teploty, současně vypneme konvici a co nejrychleji ji opět zvážíme. Z rozdílu hmotností před a po experimentu zjistíme hmotnost m_2 vyvařené vody. Na závěr vodu vylijeme a zvážíme konvici prázdnou – to nám umožní dopočítat původní hmotnost vody m_1 . Všechny ostatní údaje, tj. Δt , τ_1 a τ_2 , vyčteme z naměřené závislosti teploty na čase (obr. 2).



Obr. 2 Odečet hodnot Δt , τ_1 a τ_2 z grafu

Výsledky: Pro ilustraci jsou níže přiloženy výsledky pěti měření – viz tab. 1. Průměrná hodnota měrného skupenského tepla varu vody vzešlá z těchto pěti měření činí přibližně 1,94 MJ/kg, což představuje odchylku přibližně 14 % od tabulkové hodnoty (2,26 MJ/kg).

Tab. 1: Výsledky vzorových měření

měření	m_1 (kg)	m_2 (kg)	τ_1 (s)	τ_2 (s)	Δt (°C)	l_v (MJ/kg)
1	0,470	0,176	225	520	78,5	2,03
2	0,476	0,106	230	310	78,0	1,97
3	0,429	0,097	201	280	73,5	1,90
4	0,414	0,082	200	237	77,1	1,93
5	0,363	0,123	183	362	77,0	1,88
průměr						1,94

Limity měření: Největším zdrojem chyb v tomto experimentu je předpoklad, že během ohřevu vody se tepelný výkon konvice využije pouze na ohřev vody – ve skutečnosti se musí ohřát také vlastní tělo konvice, které v tomto konkrétním případě se svojí hmotností téměř 350 g vstupuje do tepelné bilance poměrně výrazně. Kdyby se nemuselo ohřívát i tělo konvice, byl by čas τ_1 kratší, dopočítaná hodnota l_v by vzrostla a více se blížila své skutečné hodnotě.

Další nepřesností je předpoklad, že vzniklá pára konvici zcela opouští. Ve skutečnosti její část kondenzuje na stěnách konvice, stéká zpět a může

tak být „odpařena dvakrát“. Jinak řečeno, hmotnost skutečně odpařené vody m_2 je větší než pouhý rozdíl hmotností vody před a po experimentu. Tuto nepřesnost lze alespoň minimalizovat tím, že použijeme konvici, která se směrem vzhůru nijak zásadně nezužuje. Pozor! S konvicemi, které mají ústí výrazně zúžené, můžeme dostat velmi špatné výsledky (i s více než padesátiprocentní odchylkou od skutečné hodnoty).

V experimentu dále neuvažujeme, že voda se vypařuje za každé teploty, tedy i během svého ohřevu na teplotu varu; tento vliv je ovšem slabý.

Technické a metodické poznámky

- Je opravdu důležité, aby nebyla konvice plná více než z poloviny předepsaného objemu. V opačném případě začne během varu voda cákat mimo konvici a kromě znehodnocení měření tak může způsobit i popálení experimentátorů. Je vhodné před měřením optimální výšku hladiny vyzkoušet a během měření dodržovat zásady bezpečnosti práce s vroucí vodou.

- Teploměr musí být ponořený do hloubky několika centimetrů, aby nedošlo k tomu, že během měření se s úbytkem vody dostane jeho měřicí část nad hladinu.

- Experiment lze využít k tomu, aby žáci lépe porozuměli grafům souvisejícím se změnami skupenství, se kterými se na základěškolské i středoškolské úrovni setkávají.

Experiment 2 (Závislost rychlosti vypařování na obsahu plochy hladiny kapaliny)

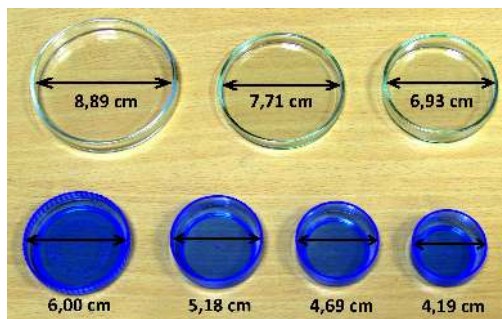
S poznatkem, že vypařování kapaliny se urychlí zvětšením jejího povrchu, se setkáváme jak na základěškolské [3], tak na středoškolské [4] úrovni. Obvykle se tato skutečnost konstatuje, event. kvalitativně dokazuje. Následující experiment navrhuje proměření závislosti rychlosti odpařování na obsahu plochy hladiny kapaliny kvantitativně.

Pomůcky: Váhy (s citlivostí alespoň 0,01 g), technický líh, mističky různých průměrů (v dražší verzi Petriho misky, v levnějším provedení například mističky na míchání barev ve výtvarné výchově; v našem případě kombinace).

Teorie: Rychlost vypařování nemá v českém kontextu žádnou ustálenou definici ani označení. Z logiky věci se zdá být rozumné definovat ji jako hmotnost kapaliny odpařené za jednotku času. Pro žáky bude ale obecně

snazší hovořit o změně hmotnosti v různých nádobách za stejný časový úsek, proto se o intuitivní definici pokoušet nebudeme.

Postup: Posuvným měřítkem určíme a zaznamenáme průměry používaných mističek (obr. 3). Do všech mističek nalijeme technický lih (ne nutně stejné množství) a mističky i s lihem zvážíme. Poté necháme lih odpařovat a po uplynutí alespoň jedné hodiny zvážíme všechny mističky znovu. Rozdíl hmotností představuje pro každou misku hmotnost odpařeného lihu.



Obr. 3 Rozměry používaných mističek

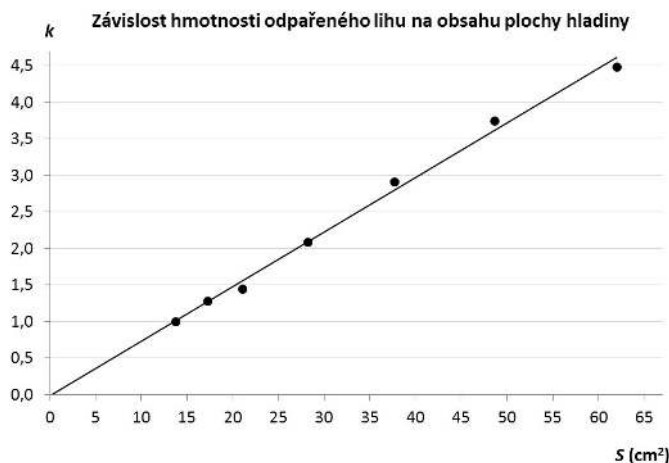
Protože je měření časově náročné, nelze jej ve výuce rozumně zopakovat. Pokud ale chceme mít více hodnot k dalšímu zpracování, může měření provádět více skupin žáků naráz, stačí každé skupince opatřit stejnou sadu mističek; vážení probíhá jednorázově na začátku a na konci měření a jedny váhy při něm tudíž postačí.

Výsledky: Měření bylo vzorově provedeno desetkrát, pokaždé ale trvalo jinak dlouho. Nelze tak přímo průměrovat hmotnosti odpařeného lihu – při kratších měřeních jsou tyto logicky nižší. Proto byl pro účely zpracování dat zaveden bezrozměrný koeficient k , který pro každé měření říká, kolikrát větší hmotnost lihu se z jednotlivých mističek odpařila ve srovnání s mističkou nejmenší (tj. např. hodnota $k = 2$ pro danou mističku říká, že se z ní odpařilo dvakrát více lihu než z nejmenší mističky za stejný čas). Při takovémto způsobu zpracování dat již nezáleží na době měření a je možné hodnoty k z různě dlouhých měření zprůměrovat; samozřejmě je na zvážení učitele, zda tímto žáky zatěžovat, nebo se spokojit s jediným méně přesným, ale názorným měřením. Vzorově naměřené hodnoty ukazuje tab. 2 a graf na obr. 4. Z grafu je patrné, že se zvyšujícím se obsahem plochy hladiny roste hmotnost odpařeného lihu (prostřednictvím koefi-

entu k) lineárně a extrapolace na nulový obsah plochy naznačuje dokonce přímou úměrnost.

Tab. 2: Vzorově naměřené hodnoty, průměry z deseti měření

S (cm ²)	13,8	17,3	21,1	28,2	37,7	48,6	62,0
k	1,00	1,28	1,44	2,09	2,91	3,75	4,48



Obr. 4 Graf závislosti hmotnosti odpařeného lihu na obsahu plochy hladiny odpařovaného lihu, průměr z deseti měření

Technické a metodické poznámky:

- Vzhledem k lihovým výparům není příjemné provádět měření v učebně, kde probíhá výuka. Odpařování lze nechat probíhat například v jiné, volné učebně.

- Měření je svou délkou vhodné na dvě po sobě následující spojené hodiny fyziky. Protože vyžaduje zásah experimentátorů pouze na začátku a na konci svého trvání, je přirozené vyplnit dobu měření jinou aktivitou (výklad, procvičování, pokus).

- Měření průměru misek se může stát samostatnou laboratorní úlohou zahrnující práci s posuvným měřítkem a statistické zpracování dat získaných opakovaným měřením téže veličiny.

- Úspěch experimentu stojí na použití mělkých mistichek. Použití vysokých nádob vede k tomu, že odpařovaný luh začne kondenzovat na jejich stěnách a úbytek hmotnosti se zpomalí.

- Po nalití lihu je dobré zkontrolovat, že jsou mističky zvnějšku suché, event. je před zvážením otřít. Jinak riskujeme, že naše data ovlivní rychlé odpařování lihu z vnějšího povrchu misek.
- Všechny mističky je vhodné mít na stejném místě – zamezíme tak riziku, že se budou nacházet v místech s různou teplotou či jiným prouděním vzduchu, které rychlost odpařování ovlivňují.

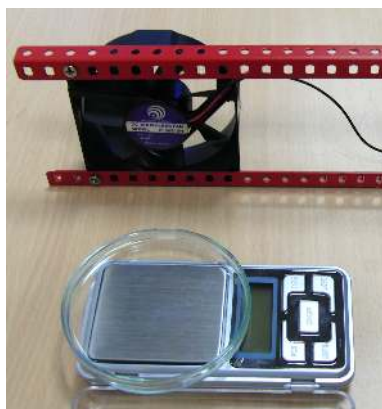
Experiment 3 (Závislost rychlosti vypařování na odstraňování par nad hladinou kapaliny)

Cílem posledního experimentu je kvantitativně ukázat vliv, který má odstraňování par nad hladinou kapaliny na rychlost jejího odpařování.

Pomůcky: Váhy (s citlivostí alespoň 0,01 g), technický líh, Petriho miska, ventilátor z počítače (typické napájecí napětí 12 V), zdroj střídavého napětí 12 V (s výhodou regulovatelný), voltmetr/multimetr.

Teorie: Stejná jako u předcházejícího experimentu.

Postup: Zapneme váhy, Petriho misku naplníme lihem a postavíme ji na vážící plochu. Ventilátor připojíme ke zdroji střídavého napětí a umístíme ho do vzdálenosti 5 až 10 cm od misky tak, aby po jeho spuštění proud vzduchu směřoval nad hladinu lihu (obr. 5). Zaznamenáme počáteční hmotnost m_1 , kterou ukazují váhy, a přivedením vhodného vstupního napětí (které kontrolujeme voltmetrem) uvedeme ventilátor do chodu. Po 5 minutách ventilátor odpojíme a zaznamenáme koncovou hmotnost m_2 ; zajímá nás úbytek hmotnosti $\Delta m = m_1 - m_2$.



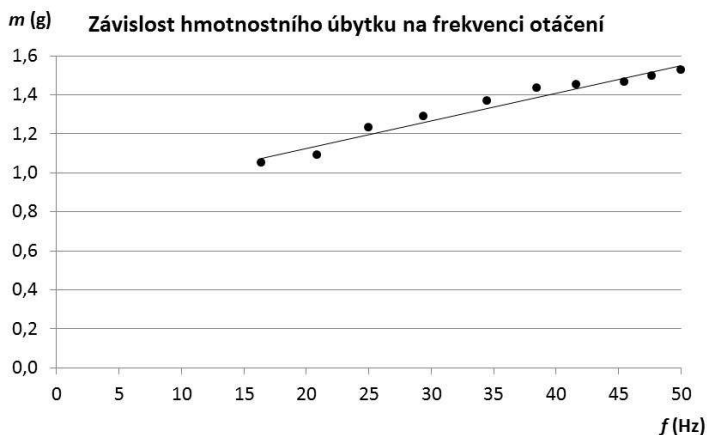
Obr. 5 Uspořádání třetího experimentu

Výsledky: Úbytek hmotnosti můžeme proměřit pro různá vstupní napětí ventilátoru a bez dalších složitějších zpracování tak pouze ukázat, že s rostoucím vstupním napětím roste nejen intuitivně vnímaná frekvence otáčení ventilátoru, ale také hmotnost lihu odpařená za stejný časový interval (např. zmíněných 5 minut). Do porovnání je vhodné zařadit i údaj, jaký je hmotnostní úbytek bez použití ventilátoru.

V našem vzorovém měření byl hmotnostní úbytek během 5 minut proměřen pro deset hodnot vstupního napětí v rozmezí 3 až 12 V. Vyhodnocení pak bylo dotaženo ještě o krok dále – pomocí optické závory Vernier Photogate byla ke každé z deseti hodnot napětí určena frekvence otáčení ventilátoru (tab. 3), což umožnilo vynést graf závislosti hmotnostního úbytku na frekvenci otáčení ventilátoru tak, jak to ukazuje obr. 6. Je patrné, že jde o rostoucí závislost, která vykazuje známky linearity; skutečné vlivy turbulentního proudění na odpařování jsou ovšem natolik složité, že lineární aproximaci uvedenou v grafu je třeba brát se značnou rezervou.

Tab. 3: Závislost hmotnostního úbytku na frekvenci otáčení ventilátoru, průměr z pěti měření

U (V)	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0
f (Hz)	16,4	20,8	25,0	29,4	34,5	38,5	41,7	45,5	47,6	50,0
Δm (g)	1,05	1,09	1,23	1,29	1,37	1,43	1,45	1,46	1,49	1,52



Obr. 6 Graf závislosti hmotnostního úbytku lihu na frekvenci otáčení ventilátoru odstraňujícího páry nad jeho hladinou; průměr z pěti měření

Technické a metodické poznámky:

- Proměření celé závislosti tak, jak je uvedena v tabulce 3, je časově náročné a během pětiminutových intervalů vznikají neúčinné prostoje; ve výuce může být tedy praktičtější ukázat pouze skutečnost, že pokud budeme páry nad hladinou lihu odstraňovat, odpaří se dramaticky více lihu než bez odstraňování, a to bez dalšího matematického zpracování.

- Je-li ventilátor zapnutý, mohou váhy ukazovat na první pohled chaotické nárůsty a úbytky hmotnosti podle toho, jak turbulentní proudění na hladinu lihu právě působí.

- Vzhledem k výše uvedenému bodu je nutné odečítat hmotnost ve chvílích, kdy je ventilátor vypnutý.

Závěr

Cenová dostupnost dnešních relativně přesných vah s citlivostí až 0,01 g umožňuje poměrně snadno provádět ve výuce (ať už frontální či skupinové) experimenty spojené s malými změnami hmotnosti (menšími než 1 gram). Typickým příkladem jsou experimenty související s vypařováním kapalin za pokojové teploty, z nichž tři jsou popsány v tomto příspěvku. Cílem bylo nastínit kvantitativní přístup k dějům souvisejícím s vypařováním, v běžné výuce lze ovšem výše popsané postupy značně zkrátit a méně precizovat tak, aby byly žákům srozumitelné a zároveň nekonzumovaly neúměrně velké množství času. Ve svém plném znění, tak jak jsou popsány v tomto příspěvku, mohou tyto experimenty sloužit jako náměty pro laboratorní práce žáků.

Literatura

- [1] *Kolář, J.:* Hmotnost – jednotky a metody měření. Bakalářská práce, Brno, 2007.
- [2] *Sedlák, B. – Štoll, I.:* Elektřina a magnetismus. Academia, Praha, 2002.
- [3] *Bohuněk, J. – Kolářová, R.:* Fyzika pro 8. ročník základní školy. Prometheus, Praha, 1999.
- [4] *Bartuška, K. – Svoboda, E.:* Fyzika pro gymnázia – Molekulová fyzika a termika. Prometheus, Praha, 2003.

Tři netradiční oscilátory – konstruktivistický přístup k výuce fyziky

ČENĚK KODEJŠKA – GIORGIO DE NUNZIO

Gymnázium, Nový Bydžov – Università del Salento, Itálie

V rámci výzkumu různých koncepcí v teorii učení, jako jsou behaviorismus, kognitivismus, konstruktivismus a konektivismus jsme se zaměřili na konstruktivistické pojetí tří fyzikálních experimentů s netradičními oscilátory. Navázali jsme tak na předchozí práce, jejichž výsledky byly publikovány v [1], [2].

Naším cílem bylo navrhnout tři problémové úlohy z oblasti kmitů, které by studenti dokázali popsat diferenciální rovnicí. Dalším úkolem bylo najít řešení této rovnice, odvodit vztah pro vlastní frekvenci oscilátoru a navrhnout reálné provedení experimentu, kterým by dokázali ověřit příslušné teoretické vzorce. U každé úlohy byly stanoveny hypotézy o přesnosti daného měření, které pak byly na závěr každého experimentu diskutovány.

Dalším dlouhodobým cílem naší práce je porovnání experimentálních výsledků dosažených českými a italskými studenty. Zatímco provedení experimentů a ověření hypotéz již v ČR proběhlo, na italské Univerzitě v Salentu se experimentální provedení teprve připravuje.

Žákům byly předloženy následující problémové úlohy: kmity zatížené zkumavky v kapalině o hustotě ρ , kmity prstence o poloměru R zavěšeného na vodorovné tyči a kmity kapalinového sloupce v U-trubicí. Žáci provedli nejprve teoretický rozbor působících sil na daný oscilátor, následně zformulovali lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty, ze které odvodili vztah pro periodu netlumených kmitů.

V experimentálním provedení jsme pak na základě teoretických vzorců pro výpočet periody kmitů navrhli určení velikosti jiné veličiny než periody, abychom učinili měření atraktivnější. V případě zkumavky ponořené do kapaliny žáci určovali z periody kmitů hustotu kapaliny, u kmitů prstence počítali poloměr prstence a vlastní moment setrvačnosti prstence,

který porovnávali s teoreticky vypočítanou hodnotou $J_0 = mR^2$ a u oscilací vodního sloupce v U-trubicí určovali koeficient tlumení, logaritmický dekrement útlumu a porovnávali vlastní periodu netlumených kmitů s periodou tlumených kmitů.

V posledním zmíněném experimentu si povšimli skutečnosti, že z čistě matematického pohledu se nejedná o periodu, protože průběh funkce se díky klesající amplitudě neopakuje a jedná se tedy v případě tlumených kmitů o kvaziperiodický pohyb.

V další části práce popíšeme nejprve teoretický základ pro kmity tří netradičních oscilátorů, a pak se budeme zabývat experimentálním provedením, k jehož realizaci jsme opět použili zvukovou kartu PC a optickou bránu sestavenou z laserového ukazovátka a solárního článku. Zvýšenou pozornost jsme věnovali také výpočtu chyb měření, které potvrdilo či vyvrátilo některé naše hypotézy.

1. Odvození vztahů pro periodu kmitů zkumavky, prstence a kapaliny v U-trubicí

Při odvození vztahů pro periodu příslušného oscilátoru můžeme vycházet z pohybové rovnice (1) zapsané v diferenciálním tvaru (2):

$$ma = F \quad (1)$$

$$my'' = F \quad (2)$$

Prvním úkolem žáků bylo najít konkrétní tvar pro vyjádření síly na pravé straně rovnice tak, aby tato síla byla funkcí výchylky. Žáci si museli uvědomit, že síla F , která je příčinou pohybu oscilátoru, vzniká teprve vychýlením oscilátoru z rovnovážné polohy. Pro zvýšení názornosti situace bylo z didaktického pohledu dobré nakreslit si příslušný oscilátor a zakreslit působící síly.

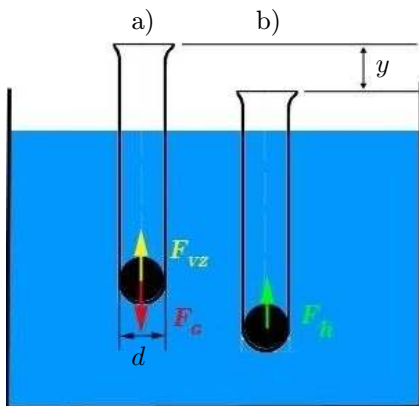
1.1. Kmity zkumavky v kapalině

Oscilátor je tvořen zkumavkou, která je ve své dolní části zatížena, aby v kapalině udržovala při kmitech pokud možno svislý směr. Situace je znázorněna na obr. 1. Pro jednoduchost jsme umístili těžiště soustavy zkumavka-kulička do středu kuličky uvnitř zkumavky. V situaci a) je zkumavka v rovnovážné poloze a tíhová síla F_G je v rovnováze se vztlakovou silou F_{vz} . Porušíme-li rovnováhu zatlačením zkumavky do kapaliny o délku y , začne působit proti pohybu zkumavky hydrostatická tlaková

síla F_h . Ta je na obrázku 1b) znázorněna jako výsledná působící síla při puštění zkumavky. Velikost této síly je dána obecně známým vztahem (3):

$$F_h = S\rho gy \quad (3)$$

kde S je průřez zkumavky, ρ je hustota kapaliny, g je tíhové zrychlení a y je velikost výchylky zkumavky z rovnovážné polohy.



Obr. 1 Kmity zkumavky – rozbor sil

Rovnici (2) tak můžeme konkretizovat na tvar:

$$my'' = -S\rho gy \quad (4)$$

Znaménko mínus reflektuje skutečnost, že síla F_h působí proti výchylce y . Vydělíme-li rovnici hmotností a upravíme-li ji na lineární homogenní diferenciální rovnici, získáme rovnici netlumených kmitů:

$$y'' + \frac{S\rho g}{m}y = 0 \quad (5)$$

Vlastní frekvenci a periodu netlumených kmitů pak určíme ze vztahu

$$\omega_0^2 = \frac{S\rho g}{m} \quad (6)$$

jako

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho g S}{m}}, \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S}}, \quad (7)$$

kde m je hmotnost zkumavky včetně kuličky uvnitř zkumavky a pro ostatní veličiny platí, co bylo uvedeno výše ve vztahu (3).

Ze vztahů (7) pak můžeme vyjádřit vztah pro hustotu kapaliny (8), který budeme používat v experimentální části:

$$\rho = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot \frac{m}{gS} \quad (8)$$

Pro úplnost uvedeme také tvar diferenciální rovnice, pokud budeme uvažovat tlumení,

$$y'' + 2by' + \frac{S\rho g}{m}y = 0, \quad (9)$$

kde b je konstanta útlumu, pro kterou platí

$$\delta = bT = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}}. \quad (10)$$

V tomto vztahu představuje T periodu tlumených kmitů, A_n a A_{n+1} jsou dvě po sobě jdoucí amplitudy výchylky a δ je tzv. *logaritmický dekrement útlumu*. Vztah (10) budeme používat v experimentu s kmity vodního sloupce v U-trubici.

1.2. Kmity kapalinového sloupce v U-trubici

Kapalina uzavřená v U-trubici o vnitřním průměru d může kmitat, pokud kapalinový sloupec délky l vychýlíme z rovnovážné polohy o výchylku y (obr. 2).

K odvození diferenciální rovnice kmitů můžeme vyjít opět z obecného vztahu (2), do kterého dosadíme na pravé straně rovnice sílu, která způsobí kmity sloupce. Touto výslednou silou je stejně jako u obyčejného kyvadla tíhová síla F_G , pro jejíž velikost můžeme odvodit vztah:

$$F_G = mg = V\rho g = 2yS\rho g \quad (11)$$

Analogicky s rovnicemi (4) a (5) můžeme zformulovat diferenciální rovnici

$$y'' + \frac{2g}{l}y = 0, \quad (12)$$

ze které můžeme určit frekvenci a periodu netlumených kmitů

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2g}{l}}, \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}. \quad (13)$$

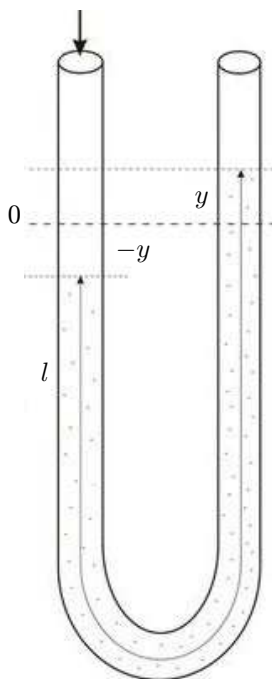
Protože jsou kmity kapalinového sloupce výrazně tlumené, můžeme v souladu s řešením rovnice (9) najít vztah pro periodu tlumených kmitů [3]

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{4\pi^2}{T_0^2} - b^2}}, \quad (14)$$

kde T_0 je perioda netlumených kmitů a b je koeficient útlumu definovaný vztahem (10). Vztah (14) můžeme upravit do matematicky přehlednější podoby

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{b}{\omega_0}\right)^2}}. \quad (15)$$

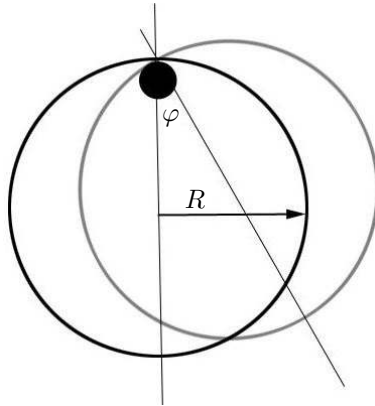
Toto vyjádření pak využijeme v experimentální části k porovnání naměřené periody tlumených kmitů s teoreticky vypočítanou.



Obr. 2 Kapalina v U-trubici – znázornění výchylky [3]

1.3. Kmity tenkého prstence zavěšeného na vodorovné tyči

Prstenec o poloměru R je zavěšen na vodorovné tyči, jejíž poloměr můžeme vůči poloměru prstence zanedbat. Situace je znázorněna na obr. 3.



Obr. 3 Kmity prstence zavěšeného na vodorovné tyči

Prstenec (tenká obruč) zavěšený na vodorovné tyči představuje fyzické kyvadlo. Zde zavádíme místo výchylky y úhlovou výchylku φ , pro kterou můžeme na základě pohybové rovnice otáčivého pohybu zformulovat rovnici (16) analogickou vztahu (4), viz [4]:

$$J\varphi'' = -mgd \sin \varphi \doteq -mgd\varphi = -D\varphi \quad (16)$$

Vztah (16) pak můžeme upravit na klasický tvar diferenciální rovnice

$$\varphi'' + \frac{D}{J}\varphi = 0, \quad (17)$$

kde $J = J_0 + md^2$ je moment setrvačnosti fyzického kyvadla (prstence) vzhledem k ose otáčení neprocházející těžištěm tělesa, $D = mgd$ je tzv. direkční moment kyvadla, m je hmotnost kyvadla, d je vzdálenost osy otáčení od těžiště kyvadla a J_0 je moment setrvačnosti kyvadla vzhledem k ose otáčení procházející těžištěm tělesa. Pro tenký prstenec platí pro J_0 vztah:

$$J_0 = mR^2 \quad (18)$$

Z rovnice (17) pak můžeme určit vztahy pro vlastní frekvenci a periodu

kyvadla

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgd}{J}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mgd}{J_0 + md^2}},$$
$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + md^2}{mgd}},$$
(19)

které můžeme v případě prstence, u kterého platí $d = R$, zredukovat na tvar

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{2R}}, \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2R}{g}}.$$
(20)

Rovnice (19) a (20) využijeme v experimentální části k výpočtu poloměru prstence R a momentu setrvačnosti J_0 . Tyto experimentálně zjištěné hodnoty pak budeme porovnávat s klasickým měřením poloměru prstence pomocí posuvného měřidla a teoretickým výpočtem J_0 ze vztahu (18).

2. Určení hustoty kapaliny z kmitů zkumavky

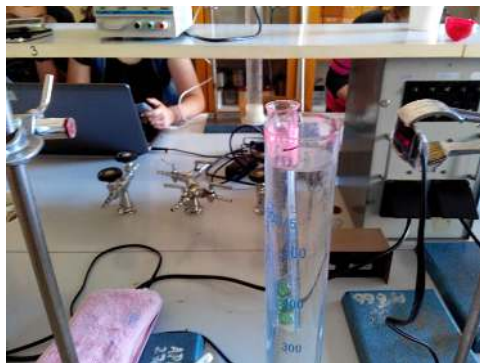
Jak bylo vysvětleno v části 1.1, koná zkumavka ponořená do kapaliny, pokud ji vychýlíme z rovnovážné polohy, kmitavý pohyb. Úkolem studentů bylo zrealizovat a zoptimalizovat podmínky pohybu zkumavky v kapalině, která je velmi nestabilní.

Po několika neúspěšných pokusech se zkumavkou, na jejíž dno jsme umístili do vaty nejprve kovovou kuličku a poté rybářská olůvka, jsme nedokázali stabilizovat pohyb zkumavky. Zatížení bylo rozloženo nerovnoměrně a zkumavka se při kmitavém pohybu kymácela ze strany na stranu, což se negativně projevilo v zaznamenaném oscilogramu. Délka zkumavky pak při zatížení olůvky způsobila příliš velký ponor, který neumožnil udělit oscilátoru výchylku větší než 1 cm. Při výchylce menší než tato hodnota jsou kmity tak rychle utlumené, že je téměř nelze zaznamenat.

Hledali jsme tedy jiné řešení, jak zkumavku stabilizovat. Toto řešení je zobrazeno na obr. 4. Zátěž jsme zrealizovali ze tří skleněných kuliček, jejichž průměr téměř přesně odpovídal vnitřnímu průměru zkumavky. Takto upravená zkumavka zachovává při správném rozkmitání svislý směr a její ponor umožňuje bez problémů zrealizovat měření. Kuličky lze za pár korun koupit v obchodě s hračkami.

Námi stanovená hypotéza i přesto byla, že se nám nepodaří změřit hustotu kapaliny tímto způsobem s relativní chybou menší než 10 %, a že

se tedy v tomto případě jedná o pouhý myšlenkový experiment, který je nevhodný k experimentálnímu určení hustoty kapaliny.



Obr. 4 Experimentální uspořádání kmitů zkumavky

Horní konec zkumavky jsme opatřili tenkým černým proužkem, který jsme pomocí izolepy připevnili ke zkumavce. Proužek by měl být dlouhý pouze do poloviny obvodu zkumavky, protože pokud ho uděláme po celém obvodu, vznikají na oscilogramu při kmitech vlivem nestability zkumavky stínové záznamy přerušení laserového paprsku.

Je-li zkumavka, ponořená do kapaliny v odměrném válci, v rovnovážné poloze, zaměříme laserový paprsek na černý proužek. My jsme použili po několika různých variantách odměrných válců, kádinek a baněk odměrný válec o objemu 500 ml. Tento válec je dostatečně vysoký, aby zkumavka mohla volně kmitat (běžná kádinka toto díky malé hloubce neumožňuje) a jeho vnitřní průměr je dostatečně velký na to, aby při kmitech nedocházelo ke kontaktu zkumavky a válce (což se děje u menších odměrných válců).

Před vlastním měřením periody je třeba ještě určit hmotnost m zkumavky se zátěží, k čemuž jsme použili digitální váhy s přesností na desetinu gramu. Průměr zkumavky d jsme určili posuvným měřidlem a pomocí něj jsme vypočítali průřez $S = \pi r^2$, kde $r = d/2$.

Periodu kmitů jsme zaznamenávali v programu Free Audio Editor (FAE), který jsme již dostatečně popsali v [1] a [2]. Z periody jsme podle vztahu (8) vypočítali hustotu kapaliny. Měření jsme provedli pro vodu a líh. Navzdory původnímu předpokladu, že výsledky budou hodně nepřesné, jsme byli mile překvapeni dosaženou přesností.

Naměřené hodnoty pro vodu jsou uvedeny v tabulce 1. Zkumavka měla vždy průměr $d = 18 \cdot 10^{-3}$ m, její průřez byl tedy $S = 2,5 \cdot 10^{-4}$ m².

Hmotnost zkumavky se lišila podle hmotnosti použitých kuliček a tlumicí vaty na dně zkumavky. Tíhové zrychlení jsme volili $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Tabulka 1 Určení hustoty vody z periody kmitů zkumavky

Č. měř.	$\frac{m}{10^{-3} \text{ kg}}$	$\frac{T_0}{\text{s}}$	$\frac{\rho}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}}$	$\frac{\Delta m}{10^{-3} \text{ kg}}$	$\frac{\Delta T_0}{\text{s}}$	$\frac{\Delta \rho}{\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}}$
1	34,4	0,737	1001	0,58	0,0014	21
2	34,4	0,721	1046	0,58	0,0146	60
3	34,4	0,723	1040	0,58	0,0126	54
4	35,1	0,735	1027	0,12	0,0006	5
5	35,6	0,744	1017	0,62	0,0084	41
6	35,6	0,739	1030	0,62	0,0034	27
7	35,5	0,740	1025	0,52	0,0044	27
8	35,5	0,741	1022	0,52	0,0054	30
9	34,3	0,737	998	0,68	0,0014	24
10	35,0	0,739	1013	0,02	0,0034	10

Kmity zkumavky jsou velice rychle utlumené, zkumavku je třeba vychýlit o cca 2 cm, aby došlo alespoň ke čtyřem kmitům přes laserový paprsek. Oscilogram kmitů je na obr. 5.



Obr. 5 Oscilogram kmitů zkumavky

Absolutní chybu v určení hustoty můžeme vypočítat pro každý řádek tabulky 1 vztahu

$$\Delta\rho = \rho \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta S}{S} + \frac{2\Delta T_0}{T_0} \right), \quad (21)$$

který lze za předpokladu přesného určení průřezu zjednodušit na vztah (22)

$$\Delta\rho = \rho \left(\frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta T_0}{T_0} \right). \quad (22)$$

Průměrná hodnota hmotnosti byla určena pomocí statistické analýzy v programu MS Excel z naměřených hodnot jako $m = (0,0350 \pm 0,0002)$ kg a průměrná hodnota periody $T_0 = (0,736 \pm 0,002)$ s.

Průměrná hodnota hustoty vody určená ze všech měření má velikost $\rho = (1020 \pm 30)$ kg · m⁻³. Relativní chyba měření je $\delta\rho = 0,0294 \doteq 3\%$, což je v dobrém souladu s měřením realizovaným ve školní laboratoři. I nalezená hodnota průměrné hustoty vody poměrně dobře koresponduje s tabulkovou hodnotou $\rho = 1000$ kg · m⁻³ při 20 °C.

Hypotéza, že relativní chyba měření bude větší než 10 %, se nepotvrdila, a k našemu překvapení lze konstatovat, že můžeme tímto způsobem v podmínkách školního laboratorního cvičení měřit hustotu kapaliny s dostatečnou přesností. Přesto i toto měření je závislé na velké pečlivosti při jeho realizaci, zejména při puštění zkumavky ve svislém směru tak, aby se při pohybu nerozkývala ze strany na stranu. Zde se osvědčil nejprve přípravný dvouhodinový nácvik, kdy studenti prováděli cvičné měření a učili se správně rozkmitat zkumavku, a poté proběhlo teprve při dalším laboratorním cvičení řádné měření.

(Pokračování)

Literatura

- [1] *Kodejška, Č.*: Tři nové fyzikální experimenty se zvukovou kartou PC. MFI, 24 (2015), s. 109–123.
- [2] *Kodejška, Č. a kol.*: Fyzikální experimenty se zvukovou kartou PC. MFI, 22 (2013), s. 343–350.
- [3] *Tesař, J., Bartoš, P.*: Kmitavý pohyb trochu jinak. [online]. [cit. 03. 05. 2015] Dostupné z: <http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/13-31-Tesar.html>.
- [4] *Šedivý, P. a kol.*: Harmonické kmity mechanických soustav. Knižovnička Fyzikální olympiády č. 44, MAFY, Hradec Králové, 2000, s. 12–13.

INFORMATIKA

Optimalizace tras přívozů (Úlohy z MO – kategorie P, 33. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Pro dnešní pokračování naší dlouhodobé série článků o úlohách z Matematické olympiády kategorie P jsme si vybrali jednu úplně čerstvou úlohu. Byla zadána v březnu 2015 jako praktická úloha ústředního kola 64. ročníku MO (školní rok 2014/15). Ačkoliv za ni téměř každý z řešitelů získal nějaké body, zcela správně na plný počet bodů ji nevyřešil nikdo. Podle původního zadání bylo totiž zapotřebí nejen navrhnout optimální vedení tras budovaných přívozů, ale navíc také vypořádat se s rozsáhlými vstupními daty a přitom omezeným množstvím operační paměti. Ukládaná data bylo proto nutné složitě komprimovat, což působilo řešitelům značné problémy. My si původní zadání trochu zjednodušíme a budeme se v článku věnovat pouze té zajímavější části řešeného problému – tedy návrhu vlastního algoritmu. Vhodným způsobem proto snížíme velikost zpracovávaných vstupních údajů, abychom neměli žádné technické problémy s uložením dat ve vnitřní paměti počítače. Formulaci zadání zároveň mírně upravíme, aniž bychom tím ovšem změnilí podstatu řešené úlohy.

* * * * *

Kocourkovští radní přemýšleli, jak by do svého města mohli nalákat více turistů. Při zkoumání turistických prospektů zjistili, že jejich město nemá na rozdíl od mnoha dalších svůj aquapark, řeku s nábřežími, lyžařské středisko a mnoho dalších lákadel. Protože však byli limitováni rozpočtem města, rozhodli se vybudovat jen jednu z těchto atrakcí a volba padla na řeku. Naplánovali tedy výstavbu dlouhého vodního kanálu. Na každé jeho straně vybrali místa, kde by mohly být mosty. Bohužel koordinace

plánování selhala. Vybraná místa nebyla na protilehlých pozicích podél kanálu a co hůř, vícepráce při stavbě kanálu způsobily, že na výstavbu mostů již nezbyly žádné peníze. Radní se proto rozhodli mezi vybranými místy místo mostů zřídit přívozy.

Soutěžní úloha

Vaším úkolem je určit dvojice míst na levé a pravé straně kanálu, která mají být spojena přívozy tak, aby každé vybrané místo bylo spojeno přívozem alespoň s jedním vybraným místem na druhé straně kanálu a zároveň aby součet délek všech zřízených přívozů byl nejmenší možný. Pokud existuje více takových řešení, vypište jedno libovolné z nich.

Formát vstupu

První řádek vstupu obsahuje čtyři celá čísla L , S , A , B oddělená mezerami. Tato čísla udávají postupně délku kanálu, jeho šířku a počet vybraných míst na levé a na pravé straně. Můžete předpokládat, že platí $1 \leq L \leq 1\,000\,000$, $1 \leq S \leq 1\,000$ a $1 \leq A, B \leq 1\,000$. Následuje A řádků, z nichž i -tý obsahuje vzdálenost a_i i -tého vybraného místa na levé straně kanálu od počátku kanálu. Poté následuje B řádků, z nichž j -tý obsahuje vzdálenost b_j j -tého vybraného místa na pravé straně kanálu od jeho počátku. Můžete předpokládat, že všechny vzdálenosti a_i (pro $1 \leq i \leq A$), b_j (pro $1 \leq j \leq B$) jsou celá čísla, žádná dvě vybraná místa nejsou stejná a na vstupu jsou polohy vybraných míst zadány podle rostoucí vzdálenosti od počátku kanálu, tedy že platí $0 \leq a_1 < \dots < a_A \leq L$ a $0 \leq b_1 < \dots < b_B \leq L$.

Formát výstupu

Každý řádek výstupu obsahuje dvě celá čísla i a j , která udávají, že mezi i -tým místem na levé straně kanálu a j -tým místem na pravé straně kanálu má být zřízen přívoz. Na pořadí řádků ve výstupu nezáleží.

Příklad 1.

Vstup:	Výstup:
10 5 3 2	1 1
0	2 2
5	3 2
10	
2	
8	

Příklad 2.

Vstup:	Výstup:
1000 1 3 3	1 1
0	2 1
1	3 2
1000	3 3
0	
999	
1000	

Při rozboru úlohy si nejprve všimněte několika důležitých věcí. Především si uvědomte, že v optimálním řešení se trasy žádných dvou přívozů nekříží. Toto pozorování snadno dokážeme pomocí trojúhelníkové nerovnosti. Kdyby se trasa přívozu spojujícího místa a , b křížila s trasou přívozu spojujícího místa a' , b' (tzn. $a < a'$, $b' < b$), potom by se vyplatilo vyměnit tyto dva přívozy za přívoz spojující dvojici míst a , b' a přívoz spojující dvojici míst a' , b . Vzniklo by tím jiné přípustné řešení, ve kterém je součet délek tras všech přívozů menší. Označme si průsečík tras původních přívozů symbolem s . Součet jejich délek můžeme vyjádřit jako

$$|ab| + |a'b'| = (|as| + |sb|) + (|a's| + |sb'|) = (|as| + |sb'|) + (|a's| + |sb|).$$

Obsah první závorky je podle trojúhelníkové nerovnosti větší než $|ab'|$, zatímco obsah druhé nerovnosti je opět podle trojúhelníkové nerovnosti větší než $|a'b|$ (nakreslete si obrázek!). Celkově proto skutečně platí

$$|ab| + |a'b'| > |ab'| + |a'b|.$$

Dále si povšimněte, že se nemusí vyplatit usilovat o řešení s minimálním počtem přívozů. Tuto skutečnost dobře demonstruje příklad 2 ze zadání úlohy. V něm máme tři vybraná místa na levé straně kanálu a tři vybraná místa na pravé straně kanálu, takže jistě existuje řešení se třemi přívozy, ve kterém z každého vybraného místa vyjždí právě jeden přívoz. Jelikož už víme, že trasy přívozů se nesmí křížit, takové řešení existuje jediné a je tvořeno přívozy 1-1, 2-2, 3-3. Vzhledem k poloze vybraných míst toto řešení ale není optimální z hlediska celkové délky tras přívozů, výhodnější je zvolit čtyři přívozy 1-1, 2-1, 3-2, 3-3. K řešení úlohy tedy nelze použít nějaký jednoduchý hladový algoritmus, který by prostě spojoval dvojice míst na obou stranách kanálu v tom pořadí, jak po sobě následují od začátku kanálu.

Správné řešení úlohy je založeno na myšlence dynamického programování. Abychom si postup řešení dobře vysvětlili, budeme v první etapě hledat pouze nejmenší možnou celkovou délku tras všech vybudovaných přívozů. Teprve až vyřešíme tuto část úlohy, program doplníme ještě o určení a vypsání dvojic míst, která jsou jednotlivými přívozy spojena.

Vytvoříme si dvojrozměrnou tabulku T velikosti $A \times B$ prvků (hodnoty A, B podle zadání udávají, kolik bylo vybráno míst na levém a na pravém břehu kanálu). Číslo $T[i, j]$ bude udávat nejmenší možný součet délek tras přívozů, které spojují prvních i míst na levé straně kanálu s prvními j místy na jeho pravé straně. Jak tuto hodnotu určíme? V každém optimálním řešení musí být spolu spojeny přívozem poslední místo na levé straně kanálu (tzn. i -té místo) a poslední místo na pravé straně kanálu (tzn. j -té místo), jinak by se trasy některých přívozů křížily. Navíc pro $i \geq 2$ a $j \geq 2$ bude v libovolném optimálním řešení přívozem spojena právě jedna z následujících tří dvojic míst: $(i - 1)$ -té místo a j -té místo, i -té místo a $(j - 1)$ -té místo, nebo $(i - 1)$ -té místo a $(j - 1)$ -té místo. Jinak by se opět buď některé trasy přívozů křížily, nebo by do některého vybraného místa nevedl žádný přívoz. Aby bylo $T[i, j]$ minimální možné, musí tedy pro $i \geq 2$ a $j \geq 2$ platit

$$T[i, j] = d(i, j) + \min(T[i - 1, j], T[i, j - 1], T[i - 1, j - 1]).$$

Výraz $d(i, j)$ zde udává vzdálenost i -tého místa na levé straně a j -tého místa na pravé straně kanálu. Hodnoty $d(i, j)$ nám bude snadno počítat pomocná funkce pomocí Pythagorovy věty – je to vzdálenost dvou bodů v rovině, přičemž známe kartézské souřadnice obou těchto bodů.

Uvedený rekurzivní vztah je základem řešení úlohy pomocí metody dynamického programování. Hodnoty $T[i, j]$ nebudeme počítat rekurzivní funkcí, i když i takové řešení by bylo možné. Raději však budeme postupně vyplňovat tabulku T v pořadí podle rostoucích hodnot indexů i, j – tedy v takovém pořadí, abychom při výpočtu prvku $T[i, j]$ již znali všechny tři hodnoty obsažené v uvedeném rekurzivním vzorci. Začneme od prvků s indexem $i = 1$ nebo $j = 1$, další prvky tabulky T potom můžeme počítat třeba po řádcích zleva doprava (existují ale i jiné možnosti vhodného pořadí výpočtu). Hledaným konečným výsledkem pak bude hodnota prvku $T[A, B]$. Tu vypočítáme jako úplně poslední po vyplnění celé tabulky T .

Zbývá ukázat správné nastavení počátečních hodnot tabulky T , tedy hodnot pro $i = 1$ nebo $j = 1$. Máme-li na jedné straně kanálu jediné

vybrané místo, musíme toto jediné místo nutně spojit přívozy se všemi vybranými místy na druhé straně kanálu. Je tedy zřejmé, že hodnota $T[1, j]$ je rovna součtu všech vzdáleností $d(1, j)$ pro $1 \leq j \leq B$ a podobně hodnota $T[i, 1]$ je rovna součtu všech vzdáleností $d(i, 1)$ pro $1 \leq i \leq A$. Tyto hodnoty spočítáme nejlépe postupným přičítáním délek přívozů. Začneme od prvku $T[1, 1] = d(1, 1)$. Pro rostoucí index $j > 1$ pak počítáme

$$T[1, j] = T[1, j - 1] + d(1, j).$$

Obdobně postupujeme při výpočtu hodnot $T[i, 1]$.

Asymptotická časová složitost popsaného řešení je $O(AB)$. Počítáme $A \cdot B$ prvků tabulky T , výpočet každého z nich zvládneme podle výše uvedeného vzorce v konstantním čase. Při omezení hodnot $A, B \leq 1000$ to představuje reálnou dobu výpočtu ve zlomcích sekundy. Paměťová složitost popsaného postupu vychází rovněž $O(AB)$, což je velikost jediné datové struktury T použité v řešení.

Právě popsané řešení si nyní ukážeme zapsané v programovacím jazyce Pascal:

```

program Privozy1;
{základní řešení s dvojrozměrnou tabulkou T}

const Max = 1000; {počet vybraných míst na každé straně kanálu}
var L: longint; {délka kanálu}
    S: integer; {šířka kanálu}
    A, B: integer; {počet vybraných míst vlevo a vpravo}
    aa, bb: array [1..Max] of longint; {poloha vybraných míst}
    T: array [1..Max, 1..Max] of real; {součty délek přívozů}
    i, j: integer;

function d(i, j: integer): real;
{počítá vzdálenost i-tého místa vlevo od j-tého místa vpravo}
begin
    d := sqrt(sqr(s) + sqr(aa[i]-bb[j]))
end; {function d}

function min(K, L, M: real): real;
{minimum ze tří reálných čísel}
var Q: real;
begin
    if K < L then Q := K else Q := L;
    if M < Q then Q := M;
    min := Q
end; {function min}

```

```

begin
readln(L, S, A, B);
for i:=1 to A do readln(aa[i]);
for j:=1 to B do readln(bb[j]);

T[1,1]:=d(1,1);
{první řádek tabulky T}
for j:=2 to B do T[1,j]:=T[1,j-1] + d(1,j);
for i:=2 to A do {i-tý řádek tabulky T pro i>=2}
  begin
    T[i,1]:=T[i-1,1] + d(i,1);
    for j:=2 to B do {počítáme prvek T[i,j]}
      T[i,j]:=d(i,j) + min(T[i-1,j], T[i,j-1], T[i-1,j-1]);
    end;

writeln(T[A,B]:8:2) {výsledkem je hodnota T[A,B]}
end.

```

Všimněte si, že v uvedeném řešení úlohy počítáme hodnoty prvků v tabulce T postupně po řádcích a že hodnoty prvků v i -tém řádku závisí pouze na hodnotách z předchozího ($i - 1$)-tého řádku, nikoliv na hodnotách z řádků vzdálenějších. Místo celého dvojrozměrného pole T , které jsme uvažovali v odvození algoritmu, můžeme proto při implementaci použít dvě jednorozměrná pole, která budou vždy představovat aktuální a předcházející řádek tabulky. Paměťová složitost našeho řešení se tím výrazně sníží na $O(B)$. Toto je běžný trik, který se při implementaci dynamického programování často využívá. Nepotřebujeme dokonce ani dvě jednorozměrná pole, postačí nám pouze jedno jednorozměrné pole U (a k němu ještě pomocná proměnná X), ve kterém budeme vždy hodnoty nově počítaného i -tého řádku tabulky T přepisovat přes hodnoty předchozího ($i - 1$)-tého řádku. V pomocné proměnné X si přitom budeme vždy udržovat hodnotu $T[i - 1, j - 1]$, která už sice byla v poli U na indexu $j - 1$ přepsána hodnotou $T[i, j - 1]$, ale my ji ještě budeme potřebovat při výpočtu následujícího prvku $T[i, j]$.

Uvedenou paměťovou optimalizaci si ukážeme ve formě upraveného programu:

```

program Privozy2;
{optimalizace paměti -
  dvojrozměrná tabulka T je nahrazena jednorozměrným polem U}

const Max = 1000; {počet vybraných míst na každé straně kanálu}
var L: longint; {délka kanálu}
    S: integer; {šířka kanálu}
    A, B: integer; {počet vybraných míst vlevo a vpravo}

```



```

aa, bb: array[1..Max] of longint; {polohy vybraných míst}
{součty délek přívozů = řádky tabulky T}
U: array[1..Max] of real;
X, Y: real; {pracovní pro zaplňování pole U}
i, j: integer;

function d(i, j: integer): real;
{počítá vzdálenost i-tého místa vlevo od j-tého místa vpravo}
begin
  d := sqrt(sqr(s) + sqr(aa[i]-bb[j]))
end; {function d}

function min(K, L, M: real): real;
{minimum ze tří reálných čísel}
var Q: real;
begin
  if K < L then Q := K else Q := L;
  if M < Q then Q := M;
  min := Q
end; {function min}

begin
  readln(L, S, A, B);
  for i:=1 to A do readln(aa[i]);
  for j:=1 to B do readln(bb[j]);
  U[1]:=d(1,1);
  for j:=2 to B do U[j]:=U[j-1] + d(1,j); {první řádek tabulky T}
  for i:=2 to A do {i-tý řádek tabulky T pro i>=2}
    begin
      X := U[1]; {zaznamenáme si T[i-1,1]}
      U[1] := U[1] + d(i,1); {prvek T[i,1]}
      for j:=2 to B do {počítáme prvek T[i,j]}
        begin
          Y := d(i,j) + min(U[j], U[j-1], X);
          X := U[j];
          U[j] := Y
        end
      end;

  writeln(U[B]:8:2) {výsledkem je hodnota T[A,B]}
end.

```

Dosud jsme řešili zjednodušenou úlohu určit pouze minimální možný součet délek všech přívozů, které spojují všechna vybraná místa. Vraťme se nyní k původnímu zadání úlohy, kde bylo úkolem vypsat konkrétní dvojice míst spojených přívozem v tomto optimálním řešení. K tomu použijeme druhou dvojrozměrnou tabulku V velikosti $A \times B$ prvků, kterou budeme

vyplňovat souběžně s tabulkou T . Pro $i \geq 2$ a $j \geq 2$ se hodnota $T[i, j]$ počítá jako minimum ze tří případů, které mohou nastat. Do prvku $V[i, j]$ si při tom uložíme informaci, který z těchto tří případů nastal. Je úplně jedno, jak si tuto informaci zakódujeme – můžeme použít třeba hodnoty 1, 2, 3 jako v našem ukázkovém programu. Hodnoty $V[i, j]$ pro $i = 1$ a $j = 1$ dodefinujeme odpovídajícím způsobem. Po zaplnění obou tabulek dokážeme z údajů uložených v tabulce V zpětně zrekonstruovat celé řešení, tzn. určit vedení tras jednotlivých přívozů. Vypíšeme nejprve přívoz $A - B$ spojující poslední vybraná místa po obou stranách kanálu a podle hodnoty $V[A, B]$ se přesuneme do stavu $V[A - 1, B]$ nebo $V[A, B - 1]$ nebo $V[A - 1, B - 1]$. Tam postupujeme obdobně, dokud nedojdeme až k přívozu 1-1, který spojuje první vybraná místa po obou stranách kanálu. Podrobněji je tento postup předveden v závěrečné programové ukázkce. Také tento zpětný průchod řízený druhým polem V je naprosto ukázkový postup, jaký se často využívá při řešení úloh dynamickým programováním.

Provedená úprava algoritmu nic nezměnila na asymptotické časové složitosti výpočtu $O(AB)$. Tabulka V má stejně jako pole T velikost $A \times B$ a každý její prvek určíme také v konstantním čase. Při zpětné rekonstrukci tras všech budovaných přívozů určíme podle údajů v tabulce V každou jednu trasu přívozu v konstantním čase a jejich počet bude jistě menší než $A+B$, když se žádné dvě trasy nesmějí křížit. Paměťová složitost algoritmu je $O(AB)$, což je dáno velikostí tabulky V . Její velikost nelze jednoduše zredukovat tak, jako jsme to provedli u předchozího řešení s tabulkou T .

Na závěr si předvedeme řešení celé úlohy i s výpisem nalezených tras přívozů. Pro větší názornost vezmeme za základ výsledného programu naše původní řešení s dvojrozměrnou tabulkou T , tedy bez zmiňované paměťové optimalizace. Vzhledem k přidání druhé tabulky V bude stejně paměťová složitost programu kvadratická.

```

program Privozy3; {řešení Privozy1 doplněné o určení tras}

const Max = 1000; {počet vybraných míst na každé straně kanálu}
var L: longint; {délka kanálu}
    S: integer; {šířka kanálu}
    A, B: integer; {počet vybraných míst vlevo a vpravo}
    aa, bb: array [1..Max] of longint; {polohy vybraných míst}
    T: array [1..Max, 1..Max] of real; {součty délek přívozů}
    V: array [1..Max, 1..Max] of byte; {určení pozic přívozů}
        {hodnoty: 1 = snížit 1. souřadnici,
                2 = snížit 2. souřadnici,
                3 = snížit obě souřadnice}
    i, j: integer;

```

```

function d(i, j: integer): real;
{počítá vzdálenost i-tého místa vlevo od j-tého místa vpravo}
begin
  d:=sqrt(sqr(s) + sqr(aa[i]-bb[j]))
end; {function d}

function min(K, L, M: real; var Kde: byte): real;
{minimum ze tří reálných čísel}
{výstupní parametr Kde určuje, kolikátý parametr ji minimální}
var Q: real;
begin
  if K < L then begin Q:=K;Kde:=1 end else begin Q:=L;Kde:=2 end;
  if M < Q then begin Q:=M; Kde:=3 end;
  min := Q
end; {function min}

begin
  readln(L, S, A, B);
  for i:=1 to A do readln(aa[i]);
  for j:=1 to B do readln(bb[j]);

  T[1,1] := d(1,1);
  for j:=2 to B do
    begin
      T[1,j] := T[1,j-1] + d(1,j); V[1,j] := 2
    end; {první řádek T}
  for i:=2 to A do {i-tý řádek tabulky T pro i>=2}
    begin
      T[i,1] := T[i-1,1] + d(i,1); V[i,1]:=1;
      for j:=2 to B do
        {počítáme prvek T[i,j], zároveň určíme V[i,j]}
        T[i,j]:=d(i,j) + min(T[i-1,j],T[i,j-1],T[i-1,j-1],V[i,j]);
      end;

  i := A; j := B;
  writeln(i, ' ', j);
  while (i>1) or (j>1) do
    begin
      case V[i,j] of
        1: dec(i);
        2: dec(j);
        3: begin dec(i); dec(j) end
      end;
      writeln(i, ' ', j)
    end;
end.

```

Variace a kombinace s omezeným opakováním

STANISLAV TRÁVNÍČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Ve stále živé publikaci [1] rozebírají autoři problematiku pojetí a náplně vyučování matematice jak z hlediska vývoje vědy, tak z hlediska tradic. Připomínají i typicky školské hledisko – *vyučovat to, co se dá lehce nacvičit a vyzkoušet*. Než se této myšlence nedůvěřivě usmějeme, nahlédněme do učiva kombinatoriky.

První učivo a první vzorec nám říká, že počet $V(k, n)$ k -členných variací z n prvků je

$$V(k, n) = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1). \quad (1)$$

V navazujících úlohách se tvoří vlajky z různobarevných pruhů a sestavují se čísla z různých číslic. Na variace navazují logicky permutace se vzorcem

$$P(n) = n! \quad (2)$$

V úlohách pak přehazujeme pořadí např. žáků nebo cvičenců, a tvoříme i skupiny různých číslic.

Pokračuje se učivem a vzorcem pro počet $K(k, n)$ všech k -členných kombinací z n prvků

$$K(k, n) = \binom{n}{k}. \quad (3)$$

V úlohách pak z celku vytváříme skupiny, u nichž nezáleží na pořadí prvků.

Nyní přicházejí případy, kdy některé prvky mohou být stejné, resp. že se mohou ve skupinách opakovat. Nejprve opět *variace s libovolným opakováním*, tj. vytváření uspořádaných k -členných skupin z n prvků, přičemž každý prvek se ve skupině může vyskytovat až k -krát (že nejvýše k -krát, jak říká učebnice, je samozřejmé, když jde o k -členné skupiny). Počet těchto variací nám dává hezký vzorec

$$V'(k, n) = n^k, \quad (4)$$

z něhož pro $k = n$ dostáváme vzorec pro permutace s libovolným opakováním. V úlohách se nezapomíná na důležitý případ, kdy $n = 2$ (např. nuly a jedničky).

Pokračuje se *permutacemi s omezeným opakováním*, v nichž se jednotlivé prvky mohou opakovat s různou zadanou četností k_1, k_2, \dots, k_n :

$$P'(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \quad (5)$$

Oblíbenými úlohami jsou permutace písmen daného slova. Posledním tématem jsou k -členné *kombinace s libovolným opakováním* z n prvků, přičemž každý prvek se ve skupině může vyskytovat až k -krát. Jejich počet je

$$K'(k, n) = \binom{n + k - 1}{k}. \quad (6)$$

Těchto šest vzorců mají středoškolsí studenti nejen znát (dnes tedy alespoň o nich vědět), ale mají i poznat, ve kterém případě mají který vzorec použít. Pokrývají tyto vzorce všechny případy, které jsou v kombinatorice (a zejména v praxi) možné?

Úloha 1

Katka má 6 lístků s písmeny; na dvou je O, na dvou P a dále má jednu E a jednu L. Kolik různých čtyřhláskových slov může ze svých písmen složit?

Řešení. Na tuto úlohu nelze použít žádný z uvedených šesti vzorců. Jde zřejmě o variace 4. třídy ($T = 4$) ze šesti prvků ($N = 6$), protože u slova záleží na pořadí písmen, přitom však různé prvky mají různou možnost opakování. Jde tedy o případ, který lze označit jako variace s omezeným opakováním.

Pro názornost zapišme řetězec:

O O P P E L

Zjistíme, kolik variací dostaneme. Vidíme, že je několik možností podle toho, co daná čtveřice obsahuje. Předně to mohou být čtveřice z písmen O O P P, kterých je podle vzorce (5)

$$P_1 = P'(2, 2) = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Pak vezměme případ, kdy ve slově bude celá jedna dvojice (jsou dvě možnosti – OO nebo PP) a k tomu dvojice zbývajících písmen po jednom,

podle (1) je těchto dvojic $3 \cdot 2 = 6$. Těchto případů je proto

$$P_2 = 2 \cdot P'(2, 1, 1) \cdot 3 \cdot 2 = 2 \cdot \frac{4!}{2!} \cdot 6 = 72.$$

Zbývá případ, že máme 4 různá písmena, těchto možností je podle (2)

$$P_3 = P(4) = 4! = 24.$$

Celkový počet slov je

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 6 + 72 + 24 = 102.$$

Vidíme, že na citovaném výroku z knihy [1] něco je: na případy, jako je tento z naší úlohy 1, nemáme vzoreček a tak se jimi při výuce matematiky nezabýváme; přitom okolnost, že máme různých věcí různý počet, je v praxi docela přirozená. Ukázali jsme, že se těmto případům vyhýbat nemusíme, stačí provést roztrídění různých možností a v každé té třídě použít vhodný z výše uvedených vzorců.

S určením počtu variací s omezeným opakováním i s jejich výpisem si dobře dovede poradit výpočetní technika, tedy vhodný počítačový program. Učitel matematiky, který zná základy programování, si pro svou potřebu může takový program sestavit. Je samozřejmé, že algoritmus programu nesleduje nutně naše lidské uvažování, ale ze zásoby svých znalostí zvolíme takové prostředky, které jsou pro počítač jednodušší a vhodnější; rekurse použitá v následujícím programu `VarOmOp` – je však lidskému postupu blízká (permutace zde bereme jako zvláštní případ variací, když se třída variace shoduje s počtem všech prvků). Ježto nás nezajímá jen počet variací, ale i samotné variace, zjistí náš program počet variací tak, že je prostě všechny vytvoří a vypíše „podle abecedy“ stanovené zadáním. V našem případě platí abeceda, v níž je pořadí písmen dané zadáním úlohy 2, symbolicky $O < P < E < L$. Uveďme začátek hledaného výpisu:

OOPP, OOPE, OOPL, OOEP, OOEL, OOLP,
OOLE, OPOP, OPOE, OPOL, OPPO, ...

Vidíme, že když písmena nejsou uspořádána podle tradiční abecedy, vyžaduje výpis podle dané dočasné abecedy od člověka velkou pozornost.

Náš program načte řetězec C znaků (jehož maximální délka je 8), a tvoří třídy o délce T . Vytvoření všech variací zařizuje procedura `Vytvor`

(Vytvoř) se dvěma řetězcovými parametry A , B : do prvního se postupně skládají vytvářené variace, ze druhého se postupně čerpají potřebné znaky, tj. na počátku je řetězec A prázdný a v B je celý načtený řetězec C . V průběhu práce, pokud je do A přidán i -tý znak z B , je pro další krok rekurze (pro připojení dalšího znaku) tento znak z řetězce B vypuštěn, protože už byl použit. Když má řetězec A délku T , je daná variace vytvořena a tisková procedura ji vytiskne. Ta rovněž zařídí, že se běh programu po každých třiceti variacích zastaví, aby si uživatel mohl vytvořené variace prohlédnout (každá variace je opatřena pořadovým číslem) a pro přehlednost je na obrazovce využito barevného odlišení různých fází práce.

```

program VarOmOp;
uses Crt;

const
  MaxN = 8;
  BNad = yellow+16*red;
  BInf = lightgreen;
  BVst = white;
  BVys = yellow;
var
  C: string;
  K, T, N, Radek: Integer;

procedure Tiskni(Q: string);
var I: Integer;
begin
  TextAttr := BVys;
  Inc(Radek);
  for I := 1 to T do Write(' ',Q[I]);
  TextAttr := BInf;
  Write(' ', Radek);
  if (Radek mod 30 = 0) then
  begin
    GotoXY(2,20);
    Write('Enter');
    ReadLn
  end;
  GotoXY(1+3*(T+1)*((Radek mod 30) div 10),9+(Radek mod 10));
end; {Tiskni}

procedure Vytvor(A, B: string);
var
  J: Integer;
begin
  if Length(A) >= T then Tiskni(A)

```

```

else
  for J := 1 to Length(B) do
    if Pos(B[J], B) = J then
      Vytvor(A + B[J], Copy(B,1,J-1)+Copy(B,J+1, N));
end;    {Vytvor}

begin {program}
  ClrScr;
  WriteLn; TextAttr := BNad;
  WriteLn(' Variace s omezenym opakovanim znaku retezce ');
  WriteLn; TextAttr := BInf;
  WriteLn(' Kazdy znak zadej tolikrat, kolikrat se muze opakovat ');
  WriteLn; TextAttr := BVst;
  Write(' Vstupni retezec (nejvyse ',MaxN,') znaku: ');
  ReadLn(C);
  N := Length(C);
  if N > MaxN then N := 2;
  Write(' Trida variace: ');
  ReadLn(T);
  if T > N then T := 1;
  WriteLn; TextAttr := BVys;
  Radek := 0;
  GotoXY(1,9);
  Vytvor(' ', C);
  for K := 1 to T+2 do Write(' * ');
  GotoXY(2,20);
  TextAttr := BInf;
  WriteLn(' Konec. ');
  ReadLn
end. {program}

```

Pokud při spuštění programu volíme T rovno délce řetězce, dostaneme výpis všech permutací.

Nyní se zabýváme kombinacemi s omezeným opakováním.

Úloha 2

V cyklistické stáji jsou 3 Francouzi, 2 Španělé, 2 Holanďané, 1 Belgičan a 1 Čech. Kolika způsoby, pokud jde jen o národnosti, lze pro příští závod sestavit pětičlenný tým?

Řešení.

Má se tedy stanovit počet kombinací 5. třídy z pěti různých prvků s omezeným opakováním (tj. prvků je sice 9, ale některé jsou navzájem shodné). Stejně jako při řešení úlohy 1 lze i zde získat řešení roztříděním na různé možnosti. Označme národy F, S, H, B, C a dále X, Y, Z nechť jsou

navzájem různé národy. Pak můžeme postupně v jednotlivých případech skladby týmu zjišťovat počet možností, například takto:

- a) $3 F + 2 X$ (X je S nebo H) 2 (FFFSS, FFFHH)
 b) $3F + X + Y$ 6 (X, Y – dva národy ze čtyř)
 c) $2X + 2Y + Z$ $3 \times 3 = 9$
 (třemi způsoby se vytvoří dvojice, třemi způsoby se tým doplní)
 d) $2X + Y + Z + U$ $3 \times 4 = 12$
 (mohou být tři různé dvojice, a ze zbývajících čtyř národů se vždy jeden vynechá)
 e) $X + Y + Z + U + V$ 1 (závodníci různých národů)

Celkem je 30 možností.

Program `KomOmOp` pro výpočet počtu kombinací s omezeným opakováním a výpis všech takových kombinací se od předchozího `VarOmOp` samozřejmě odlišuje. Například místo dvanácti variací OOPE, OOEPE, OPOE, OPEO, OEOP, OEPO, POOE, POEO, PEOO, EOOP, EOPO, EPOO dostaneme jedinou permutaci. Je proto třeba, aby se již jednou vytvořená a vytištěná permutace nedostala do výstupu znovu.

Zvolili jsme zde jiný postup, kdy tvoříme N -tice nul a jedniček, v nichž je právě T jedniček (viz pole B), což kontroluje procedura `Pocet1`. K jejich vytváření je použita rekurzivní procedura `Vytvor01`. Tisková procedura navíc kontroluje, aby daná kombinace byla započítána a vytištěna jen jednou. Úprava obrazovky je podobná jako u předchozího programu s tím, že výsledky jsou ve dvou sloupcích po 15 (ježto jsme zvolili jsme větší `MaxN = 10`).

```

program KomOmOp;
uses Crt;

const
  MaxN = 10;
  BNad = yellow+16*red;
  BInf = lightgreen;
  BVst = white;
  BVys = yellow;

var
  T, N, P, R, Radek: Integer;
  C: string;
  A: array [1..MaxN] of Integer;
  
```

```

procedure Tiskni;
var Q: Integer;
begin
  TextAttr := BVys;
  Inc(Radek);
  for Q := 1 to N do
    if A[Q] = 1 then Write(' ',C[Q]);
  TextAttr := BInf;
  Write(' ',Radek);
  if Radek mod 30 = 0 then
    begin
      GotoXY(2,20);
      Write('Enter');
      ReadLn
    end;
  GotoXY(1+3*(T+1)*((Radek mod 30) div 15),9+(Radek mod 15));
end;

```

```

procedure Rozhodni;
var
  J, L: Integer;
  Tisk: Boolean;
begin
  Tisk := true;
  J := 1;
  repeat
    if A[J] = 1 then
      begin
        for L := 1 to J do
          if (C[L] = C[J]) and (A[L] = 0) then
            Tisk := false
          end;
        Inc(J)
      until (J > N) or not Tisk;
    if Tisk then Tiskni
  end; {Rozhodni}

```

```

procedure Pracuj(K, P: Integer);
var I, S: Integer;
begin
  if K <= N then
    begin
      if P <= T then
        begin
          A[K] := 1;
          Pracuj(K+1,P+1)
        end;
    end;

```

```

    A[K] := 0;
    Pracuj(K+1,P)
end
else
    if P = T then Rozhodni
end; {Pracuj}

begin {program}
    ClrScr; WriteLn;
    TextAttr := BNad;
    WriteLn(' Kombinace s opakovaním znaku retezce ');
    WriteLn; TextAttr := BInf;
    WriteLn(' Kazdy znak zadej tolikrat ,
    kolikrat se muze opakovat. ');
    WriteLn; TextAttr := BVst;
    Write(' Vstupni retezec ');
    TextAttr := BInf;
    Write('(nejvyse ',MaxN,' znaku): ');
    TextAttr := BVst;
    ReadLn(C);
    N := Length(C);
    if N > MaxN then N :=2;
    Write(' Trida kombinace: ');
    ReadLn(T);
    if not (T in [1..N]) then T := 1;
    WriteLn; TextAttr := BVys;
    Radek := 0;
    GotoXY(1,91);
    Pracuj(1,0);
    for R := 1 to 2*T+5 do Write('*');
    GotoXY(2,20);
    TextAttr := BInf;
    WriteLn('Konec. ');
    ReadLn
end. {program}

```

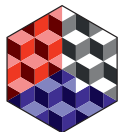
Může se zdát, že zbývá ještě jeden neřešený případ, a to, že některých prvků máme libovolný počet a jiných jen omezený počet. Ten však lehce převedeme na předchozí, stačí, když prvky, kterých máme libovolná počet, zapíšeme do řetězce v počtu T . Pokud učitel matematiky při probírání kombinatoriky přijme do výuky (aspoň jako zajímavost) i případy omezeného opakování, může zde uvedené programy použít ke kontrole výsledků.

Literatura

- [1] *Fischer, R. – Malle, G.: Člověk a matematika. SPN, Bratislava, 1992.*

ZPRÁVY

9. Středoevropská matematická olympiáda



Devátý ročník Středoevropské matematické olympiády (MEMO) se konal ve dnech 25.–31. srpna 2015 ve slovinském Koperu. Soutěže se tradičně účastní Rakousko, Chorvatsko, Česká republika, Německo, Maďarsko, Litva, Polsko, Slovensko, Slovinsko, Švýcarsko – celkem 60 soutěžících z 10 zemí.

Český tým byl sestaven z těchto žáků: *Filip Bialas* (6/8 G Opatov, Praha 4), *Vojtěch Lukeš* (7/8 G Ludka Pika, Plzeň), *Jan Petr* (6/8 G Jana Keplera, Praha 6), *Daniel Pišťák* (7/8 G Christiana Dopplera, Praha 5), *Lucien Šíma* (7/8 PORG, Praha 8), *Jan Šorm* (7/8 G Brno, třída Kapitána Jaroše 14). Vedoucími českého týmu byli *doc. RNDr. Jaroslav Zhouf, Ph.D.*, z FIT ČVUT v Praze a *PhDr. Lucie Růžičková, Ph.D.*, z Gymnázia Christiana Dopplera v Praze.

Vlastní soutěž se konala ve dvou dnech. První den proběhla na Pedagogické fakultě Univerzity na Primorskem v Koperu individuální soutěž, v níž žáci řešili po jedné úloze z algebry, kombinatoriky, geometrie a teorie čísel. Druhý den se konala na jedné z koperských základních škol týmová soutěž, v níž každý tým řešil osm úloh, po dvou ze stejných oblastí jako v soutěži jednotlivců.

Kromě samotné soutěže se v době volna mohli žáci podívat do hlavního slovinského města Ljubljany a do krásného jeskynního komplexu Postojna.

Na závěr pobytu v Koperu se konalo slavnostní vyhlášení výsledků. V individuální soutěži bylo uděleno 6 zlatých, 9 stříbrných a 18 bronzových medailí. Jedním z držitelů zlaté medaile byl také náš *Filip Bialas*, který ztratil pouze jeden bod z maximálního součtu a se ziskem 31 bodů obsadil dělenou 3. příčku. *Jan Petr* a *Jan Šorm* byli oceněni čestným uznáním za úplné vyřešení jedné soutěžní úlohy. V týmové soutěži skončil český tým na 7. místě s celkovým ziskem 36 bodů.

Podrobnější informace mohou zájemci nalézt na oficiálních stránkách 9. MEMO (<http://memo2015.dmf.si>).

Na závěr uvádíme texty všech soutěžních úloh. V závorce je uvedena země, která úlohu navrhla.

Soutěž jednotlivců

(27. srpna 2015)

Příklad I–1

Najděte všechny surjektivní funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takové, že pro všechna kladná celá čísla a a b platí právě jedna z následujících rovností:

$$f(a) = f(b),$$

$$f(a + b) = \min\{f(a), f(b)\}.$$

Poznámka. \mathbb{N} označuje množinu všech kladných celých čísel. Funkci $f: X \rightarrow Y$ nazýváme surjektivní, jestliže pro každé $y \in Y$ existuje $x \in X$ takové, že $f(x) = y$.

Příklad I–2

Nechť $n \geq 3$ je celé číslo. *Vnitřní úhlopříčka jednoduchého n -úhelníku* je úhlopříčka, která celá leží v tomto n -úhelníku. Označme $D(P)$ počet všech vnitřních úhlopříček jednoduchého n -úhelníku P a označme $D(n)$ nejmenší možnou hodnotu $D(Q)$, kde Q je libovolný jednoduchý n -úhelník. Dokažte, že žádné dvě vnitřní úhlopříčky jednoduchého n -úhelníku P se neprotínají (případně se protínají pouze ve společném krajním bodě), právě tehdy když $D(P) = D(n)$.

Poznámka. Jednoduchý n -úhelník je mnohoúhelník s n vrcholy, který sám sebe neprotíná. Mnohoúhelník není nutně konvexní.

Příklad I-3

Nechť čtyřúhelník $ABCD$ je tětívoový. Nechť bod E je průsečíkem přímk rovnoběžných s AC a BD procházejících po řadě body B a A . Přímk EC a ED se protínají s kružnicí opsanou trojúhelníku AEB dále po řadě v bodech F a G . Dokažte, že body C, D, F a G leží na jedné kružnici.

Příklad I-4

Najděte všechny dvojice kladných celých čísel $[m, n]$, pro která existují vzájemně nesoudělná celá čísla a a b větší než 1 taková, že

$$\frac{a^m + b^m}{a^n + b^n}$$

je celé číslo.

Soutěž družstev (28. srpna 2015)

Příklad T-1

Dokažte, že pro všechna kladná reálná čísla a, b, c taková, že $abc = 1$, platí následující nerovnost:

$$\frac{a}{2b + c^2} + \frac{b}{2c + a^2} + \frac{c}{2a + b^2} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$$

Příklad T-2

Určete všechny funkce $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takové, že

$$f(x^2 y f(x)) + f(1) = x^2 f(x) + f(y)$$

platí pro všechna nenulová reálná čísla x a y .

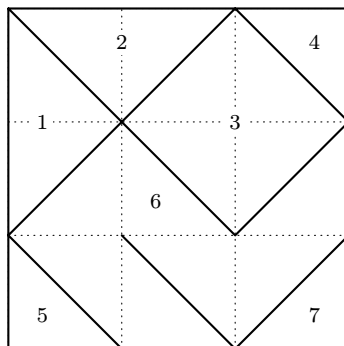
Příklad T-3

V řadě stojí n studentů na pozicích od 1 do n . Zatímco se učitel dívá jinam, někteří studenti změní své pozice. Když se učitel podívá zpět, studenti opět stojí v řadě. Jestliže student, který byl původně na pozici i , je teď na pozici j , řekneme, že

se tento student přemístil o $|i - j|$ kroků. Určete největší možný součet kroků, kterého mohou všichni studenti dosáhnout.

Příklad T-4

Nechť N je kladné celé číslo. V každém z N^2 jednotkových čtverců tabulky $N \times N$ je zakreslena jedna z jeho dvou úhlopříček. Zakreslené úhlopříčky rozdělují tabulku $N \times N$ na K oblastí. Pro každé N určete nejmenší a největší možnou hodnotu K .



Příklad pro $N = 3, K = 7$

Příklad T-5

Nechť ABC je ostroúhlý trojúhelník, kde $|AB| > |AC|$. Dokažte, že existuje bod D s následující vlastností: jestliže dva různé body X a Y leží ve vnitřní oblasti trojúhelníku ABC tak, že body B, C, X a Y leží na jedné kružnici a platí

$$|\sphericalangle AXB| - |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle CYA| - |\sphericalangle CBA|,$$

pak přímka XY prochází bodem D .

Příklad T-6

Nechť I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC , kde $|AB| > |AC|$, a necht přímka AI protíná stranu BC v bodě D . Předpokládejme, že bod P leží na úsečce BC a platí $|PI| = |PD|$. Dále necht bod J je obrazem bodu I v osové souměrnosti určené osou úsečky BC a necht Q je další průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům ABC a APD . Dokažte, že

$$|\sphericalangle BAQ| = |\sphericalangle CAJ|.$$

Příklad T-7

Najděte všechny uspořádané dvojice kladných celých čísel $[a, b]$ tak, že

$$a! + b! = a^b + b^a.$$

Příklad T-8

Nechť $n \geq 2$ je celé číslo. Určete počet kladných celých čísel m takových, že $m \leq n$ a $m^2 + 1$ je dělitelné číslem n .

Jaroslav Zhouf

Přehled předešlých ročníků MEMO:

8. MEMO – 2014: Dresden, Německo, <http://memo2014.de>

7. MEMO – 2013: Veszprém, Maďarsko, <http://memo2013.mik.uni-pannon.hu>

6. MEMO – 2012: Solothurn, Švýcarsko, <http://www.imosuisse.ch/memo2012>

5. MEMO – 2011: Varaždin, Chorvatsko, <http://memo2011.math.hr>

4. MEMO – 2010: Žilina, Slovensko, <http://memo2010.skmo.sk>

3. MEMO – 2009: Poznaň, Polsko, <http://www.memo2009.wmi.amu.edu.pl>

2. MEMO – 2008: Olomouc, ČR, <http://kag.upol.cz/memo/>

1. MEMO – 2007: Eisenstadt, Rakousko, <http://www.oemo.at/en/info/memo.php>

Tři dny s matematikou (Ústí nad Orlicí 2015)

Ve dnech 4.–6. 11. 2015 proběhla na SŠ automobilní v Ústí nad Orlicí tradiční konference Tři dny s matematikou. Téměř sto učitelů matematiky středních odborných škol a učilišť zde vyslechlo přednášky a rozvinulo své didaktické schopnosti v dílnách.

Konferenci zahájil ředitel školy *Ing. Petr Vojtěch*, poté účastníky pozdravil *Mgr. Martin Kiss*, vedoucí odboru kultury a školství Pardubického kraje. Za organizátory vystoupili *Mgr. František Procházka* za Pardubickou pobočku JČMF

a *Mgr. Aleš Odehnal*, zástupce ředitele školy a předseda organizačního výboru. Poté účastníci absolvovali některé z těchto pracovních dílen:

- Prof. RNDr. Josef Molnár, CSc.: Jak počítali naši předkové,
- PaedDr. Josef Lindauer: Kombinatorika pro trojkaře,
- Jakub Stránský: Software Techambition,
- RNDr. Šárka Gergelitsová, Ph.D.: Geogebra.

Na večer byl připraven seznamovací program v jídelně školy.

Ve čtvrtek dopoledne probíhalo druhé kolo dílen:

- PaedDr. Josef Lindauer: Statistika – chyby, omyly, a klamné triky statistiky,
- Mgr. Vladimír Pančocha: Matematiku umím naučit i medvěda,
- Mgr. Martin Grygar, Ph.D.: Aktualnost sporu o univerzálie a vědecké entity, projekce dokumentu o N. Bohrovi.

Odpoledne byly připraveny dvě přednášky:

- Doc. PaedDr. Petr Eisenmann CSc.: Tvořivě při řešení úloh ve školské matematice,
- RNDr. Dag Hrubý: Rizika neoliberálního přístupu ke vzdělávání.

V závěru odpoledního programu informovali o testování 5. a 9. tříd ZŠ, přijímacích zkouškách na maturitní obory SŠ a státní maturitě a na dotazy odpověděli ředitel Centra pro zjišťování výsledků vzdělávání *Ing. Jiří Žíka* a *PhDr. Eva Řídká, CSc.* a *Mgr. Dana Tomandlová*.

Účastníci společenského večera si pak vyslechli přednášku *doc. Arne Vrbského, M.M.* ze Zemědělské akademie Grünfeld, který přítomné seznámil se základními aplikacemi turbodidaktiky.

V pátek dopoledne následovalo poslední kolo dílen:

- Prof. RNDr. Jarmila Novotná CSc.: Charakteristika a ukázky dobrého vyučování,

- PaedDr. Josef Lindauer: Kombinatorika pro trojkaře,
- Mgr. David Brebera: Matematické hrátky a hlavolamy,
- Mgr. Jiří Houser: O některých hodnotách některých goniometrických funkcí.

Před polednem se za SUMA JČMF s účastníky rozloučil *Mgr. Miroslav Staněk*.

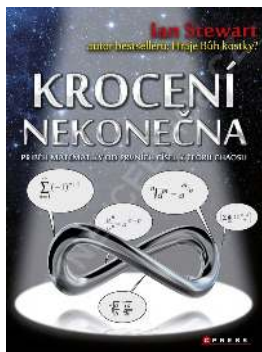
V průběhu konference pracovníci nakladatelství Prometheus, Fraus a Didaktis nabídli učitelům publikace a učebnice matematiky a fyziky.

Poděkování patří *Ing. Petru Vojtěchovi*, řediteli SŠ Automobilní v Ústí nad Orlicí, a za perfektní přípravu a organizaci konference všem organizátorům, v čele s *Mgr. Alešem Odehnalem*, *Mgr. Dagmar Příbylovou* a *Mgr. Andreou Jirouškovou*.

Miroslav Staněk

LITERATURA

Příběh matematiky od zrodu prvních čísel k teorii chaosu



Je to věda? Je to umění? Možná obojí, možná něco úplně jiného. Matematika

stojí stranou všech ostatních úspěchů člověka, je to styčný bod mezi rozumem a fantazií, kde je skutečné a neskutečné dokonale uspořádáno. Historie obecně je nekonečný příběh změny, kdy myšlenky vzkvétají a upadají, kultury vládnu a pak mizí, jednu hodnotu nahrazuje jiná. Ne tak v matematice. Jakmile matematik dokáže pravdivost svého tvrzení, nemůže být vyvráceno.

Matematika se neobjevila najednou a plně rozvinuta, ale má dlouhou a slavnou historii s velkým vlivem na vývoj lidské kultury. V průběhu své evoluce do počátku 21. století prostoupila všemi oblastmi vědecké aktivity – sehrává neocenitelnou roli v biologii, fyzice, chemii, ekonomii nebo inženýrských oborech. Všechny technické a technologické triumfy moderní doby jsou na ní závislé. Prakticky všechno, co nyní považujeme za samozřejmost, od televize po mobilní telefony, od obřích letadel po satelitní navigační systémy, od jaderné energetiky po lékařské vyšetřovací přístroje, spoléhá na matematiku.

Pokrok v matematice není založen jen na nových revolučních myšlenkách, které zcela vyvracejí ty staré, na něž se pak zapomeno. Jde spíše o příběh, jak se ke starým, ale úctyhodným pravdám připojují myšlenky novější, které svět matematiky neustále rozšiřují. Dnes je, díky práci mnoha brilantních jedinců během staletí, matematika tak rozsáhlý obor, že není možné, aby ji kdokoli zvládl v celé její šíři.

Neúnavný popularizátor matematiky *Ian Stewart*, britský matematik, emeritní profesor na univerzitě ve Warwicku, člen Královské vědecké společnosti, zaujímá přední místo mezi významnými světovými vědeckými kapacitami, které se vedle své výzkumné a učitelské práce věnují popularizační literární tvorbě. Je autorem více než 140 odborných článků (zabývá se teorií katastrof, biomatematikou, problémy na pomezí čisté a aplikované matematiky) a několika desítek knih, které si oblíbili i ti, pro něž byla matematika noční můrou.

Zásluhou nakladatelství Dokořán a Academia jsou překlady knih Iana Stewarta vydávány i u nás (Čísla přírody, Od sud až do nekonečna, Jak rozkrájet dort, Hraje Bůh kostky?, Kabinet matematických kuriozit profesora Stewarta, Truhlice matematických pokladů profesora Stewarta, Matematika života). Tento výčet do češtiny přeložených knih nyní rozšířilo nakladatelství CPress ve společnosti Albatros Media vydáním autorovy práce z roku 2008 (ve zdařilém autorizovaném překladu Zdeňka Kubíka nazvané „Krocení nekonečna – příběh matematiky od prvních čísel k teorii chaosu“ (Brno, 2014, ISBN 978-80-264-0295-4).

Kniha představuje jedinečnou exkurzi do historie matematiky, tvořené významnými objevy, jež zásadním způsobem ovlivnily společnost a změnily každodenní život člověka. Svým přímočarým a i pro matematické laiky pochopitelným jazykem (bez použití komplikovaných vzorců) nabízí autor příběh minulosti a vývoje matematiky. Celé vyprávění je v rámci jednotlivých kapitol, řazených podle témat, zhruba chronologické. Každá ze dvou desítek kapitol začíná pohledem do minulosti a sleduje milníky, které se objevily s vývojem předmětu v čase. Ve vyprávění jsou uvedeny příběhy a činy nejproslulejších matematiků – každý z nich se vztahuje k určité hodnotě, závažnému problému či k objevu, který změnil náš způsob chápání světa i našeho místa v něm.

Stručně z obsahu: Žetony, zářezy a tabulky (Zrod čísel) – Logika tvaru (První kroky v geometrii) – Symboly a čísla (Odkud pocházejí naše číselné symboly) – Kouzlo neznámé (Značka X) – Věčné trojúhelníky (Trigonometrie a logaritmy) – Křivky a souřadnice (Geometrie je algebra a algebra je geometrie) – Vzory v číslech (Počátky teorie čísel) – Systém světa (Vynález infinitezimálního počtu) – Přírodní zákony (Formulování fyzikálních zákonů) – Nemožné hodnoty (Mohou mít záporná čísla druhé odmocniny?) – Pevné základy (Cesta za smyslem infinitezimálního po-

čtu) – Nemožné trojúhelníky (Je Euklidova geometrie jediná možná?) – Vzestup symetrie (Jak neřešit rovnici) – Algebra dospívá (Čísla poskytují cestu ke strukturám) – Geometrie gumové blány (Kvalita vítězí nad kvantitou) – Čtvrtá dimenze (Geometrie z jiného světa) – Tvar logiky (Postavení matematiky na dosti pevné základy) – Jak pravděpodobné to je? (Racionální přístup k náhodě) – Chroupání čísel (Počítací stroje a výpočetní matematika) – Chaos a komplexita (I odchytky tvoří vzory). Podtéma knihy představuje praktické využití matematiky na řadě vybraných příkladů z různých oblastí lidské činnosti jak z minulosti, tak z dneška.

Jednou ze společných charakteristik matematiků je jejich vášně pro úplnost – ono nutkání vracet se při objasňování své práce k základním principům. Čtenáři matematických textů se kvůli tomu musí často prokousat množstvím stránek různých matematických souvislostí a okolností, než se dostanou k tomu, co vlastně autor zjistil. Tvůrce této publikace se tomu vyhnul, všechny pasáže knihy jsou většinou krátké a přehledně zpracované. Formát zpracování celého textu, proložení četnými nákresey, dovolí ponořit se přímo do daného tématu, aniž bychom se museli probírat dlouhými povídáním. Pro zájemce o hlubší studium dané problematiky je na závěr uveden seznam doporučené literatury – převážně v angličtině psané knihy, časopisecké i internetové články.

I když se to na první pohled nezdá, matematika popisuje a studuje stavbu celého našeho světa, řídí se logikou lidského myšlení a její cesta vede tam, kde to potřeby lidí vyžadují. Všichni se časem setkáme s novými jevy a novými problémy, ale matematika, kterou si lidé vytvořili, si s nimi bude schopna poradit. Její vnitřní požadavky však stále simulují nové myšlenky a teorie, proto mnoho důležitých dohadů zůstává nevyřešeno, ale matematikové na nich trpělivě pracují.

Bohumil Tesařík