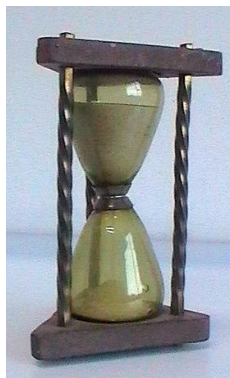


- [V] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/24/Oscillating_pendulum.gif.
- [VI] https://phet.colorado.edu/sims/pendulum-lab/pendulum-lab_cs.html.
- [VII] *Mjakišev, G. Ja., Sinjakov, A. Z.*: Fyzika: Kolebanija i volny, Učebnik dlja uglublennogo izučenija fiziky, Drofa, Moskva, 2002.
Dostupné na: <http://slovo.ws/urok/fizika/11/001/012.html>.
- [VIII] *Chytilová, M. a kol.*: Fyzika pro třetí třídu gymnasií, SPN, Praha, 1953.
- [IX] *Vanovič, J. a kol.*: Fyzika pro II. ročník SVVŠ, SPN, Praha, 1965.
[X] <http://modellus.fct.unl.pt>.
- [XI] <http://www.physicsclassroom.com/class/waves/Lesson-0/Pendulum-Motion>.
- [XII] <http://www.kostenlose-referate.de/das-fadenpendel-108.html>.
- [XIII] <http://www.sciencesphysiques2010.esy.es/tsch05.htm>.

Přesýpací hodiny v hodině fyziky

RENATA HOLUBOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc



Zamysleli jste se někdy nad tím, jak fungují přesýpací hodiny? Co je na vytékání písku zajímavého? Přesýpací hodiny byly běžně používány ve středověku k měření časových intervalů v délce od jedné minuty až do tří hodin, výjimečně intervalů delších. Rozšíření přesýpacích hodin bylo podmíněno rozvojem sklářského průmyslu – dovednost výroby baňky z průhledného skla. Jako náplň přesýpacích hodin se používaly různé granuláty – písek, kovový prášek, rozemletý mramor, vaječné skořápky. Nevýhodou těchto hodin bylo, že se musely překlápět a dlouhodobým používáním se předcházely. Zrníčka se omí-

lala, otvor, kterým propadávala, se zvětšoval. Koncem 18. stol. byly nahrazeny mechanickými hodinami. Přesto se s různými variantami přesýpacích hodin můžete setkat i dnes.

Vlastnosti písku – granulátu

Písek se chová jako kapalina či jako pevná látka. U kapaliny závisí rychlost výtoku z otvoru ve stěně nádoby na výšce kapaliny nad otvorem,

u písku tato zákonitost neplatí. Protože rychlost výtoku nezávisí na výšce sloupce písku nad otvorem a písek vytéká stále stejnou rychlostí, lze písek použít k měření časových intervalů. Písek řadíme mezi granuláty.

Vlastností granulátu je, že vlivem vnějších sil v důsledku tření a v bodech dotyku jednotlivých granulí vznikají tzv. „sítě sil“, které nehomogenně rozdělují silové působení v granulátu. V důsledku toho vznikají oblouky, podobně jako je klenutý oblouk ve stavitelství. V přesýpacích hodinách může takovýto oblouk v krajním případě přemostit otvor, kterým písek vytéká, a tím výtok písku přerušit. Tyto oblouky lze uměle vytvořit, když budeme hodinami pohybovat zrychleně nahoru nebo dolů, popř. lze výtok písku přerušit, když zahřejeme spodní zásobník. V důsledku zvýšení tlaku se vzduch snaží proudit do chladnějšího horního zásobníku. Tím je tok písku tak narušen, že vnikají přemostění a výtok se zastaví. K zahřátí lze použít ruce, fén.

Konstantní rychlost proudění písku závisí na přenosu sil v mezi granulami, které se děje prostřednictvím bodů dotyku jednotlivých zrněk.



Obr. 1 Dotyk jednotlivých zrněk písku

Při běžném uspořádání tvoří zrnka síť, kde mohou vznikat zakřivené oblouky – mosty (jako v gotické katedrále), které převádějí tlak na boční stěny přesýpacích hodin. Vrstvy písku ležící dole jsou více či méně odlehčeny od tíhy horních vrstev, takže „střední“ tlak nad zúžením v hodinách zůstává i při změně výšky písku konstantní. Třecí síly mezi částicemi a stěnou jsou dostatečné ke kompenzaci tíhové síly zrn, které leží v horních vrstvách granulátu.

Pokus 1

Naplňte zkumavku pískem a dobře jej setřepejte. Na stůl položte arch bílého papíru. Nad tímto papírem zkumavku otočte vzhůru nohama – část

písku vypadne. Prozkoumejte tvar hladiny písku ve zkumavce a tvar písku na papíře.

Ve zkumavce můžete po odtržení pozorovat tvar klenby. Pokud se uvolní další vrstva písku, zbylý tvar povrch bude mít opět tvar klenby.



Obr. 2 Tvar písku po odtržení

Studium granulátu ve srovnání s tekutinami

Protože se jedná o mnohačasticové systémy, je třeba použít zákony statistické fyziky. Ale na rozdíl od tekutin (kapaliny a plyny) je energie $k_B T$, kde k_B je Boltzmannova konstanta, T termodynamická teplota, zanedbatelná. Zanedbatelné jsou také kohezní síly mezi zrnky. Pokud použijeme model, že jedno zrno písku je jedna molekula (v plynu), narazíme na základní odlišnost granulí a tekutin – zrnka jsou v klidu, jejich kinetická energie je rovna nule a také jejich termodynamická teplota je nulová. Je to nehomogenní systém, jehož mechanické vlastnosti se liší od místa k místu. Z hlediska dynamiky, budeme-li zkoumat tok písku, tak není Newtonovský. Existuje zde hraniční vrstva, kde granule tečou, ostatní vrstvy zůstávají v klidu (v případě hromady písku).

Tok granulovaných pevných látek studoval *Beverloo*. Odvodil, že objemový průtok W je úměrný průměru výtokového otvoru D , hustotě částic ρ a tíhovému zrychlení g :

$$W \sim D^a \rho^b g^c$$

Napíšeme-li rozměrovou rovnici

$$\frac{[M]}{[T]} = [L]^a \left[\frac{M}{L^3} \right]^b \left[\frac{L}{T^2} \right]^c,$$

odkud $b = 1$, $c = 0,5$, $a = 2,5$, pak po dosazení v ideálním případě máme

$$W = \rho \sqrt{g} D^{2,5}.$$

Tento vztah byl na základě experimentálních měření upraven na tvar

$$W = \rho \sqrt{g} (D - kd)^{2,5},$$

kde byl zaveden průměr částic d a faktor k (bezrozměrová konstanta) charakterizující polohu částice.

Budeme-li tvořit hromadu z písku, potom v případě suchého písku lze vytvořit jen kužel s pevně daným úhlem sklonu stěn, který je asi 35° . Pokud chceme vytvořit homoli s větším sklonem a přidáme další písek, zrnka písku začnou téct dolů po povrchu stěny a úhel zůstane zase stejný. V suchém písku nelze vytvořit tunel – stěny se hroustí. Pokud na vrstvu písku působíme vnější silou, zvýšíme hustotu granulátu, ale úhel sklonu kužele zůstane přibližně stejný. Výška kužele závisí také na tvaru zrněk – hranatá zrnka umožňují strmější stěny než zrnka kulatá . . . zkuste udělat hromadu z kuliček!

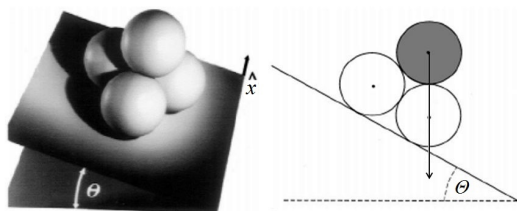
Situace se změní přidáním vody – vlivem povrchového napětí zde vznikají kohezní síly. Nyní lze formovat útvary, které mají sklon stěn až 90° (hrady z písku).

Určení úhlu resistance (nehybnosti, angl. repose)

Tvar přesýpacích hodin není náhodný, je spojen s vlastností, kterou má hromada písku. Granulované materiály mají určitý parametr, tzv. úhel nehybnosti Θ_r , což je úhel, který svírá stěna hromady písku s horizontální rovinou. Podobně platí, že když nasypeme písek do nádoby se zvýšeným okrajem a rovnou podstavou, uhladíme, bude tato vrstva stabilní, pokud nádobu neskloníme pod určitým maximálním úhlem Θ_m . Po překročení této meze (zvětšení úhlu), se začnou jednotlivá zrnka kutálet, až se vytvoří lavina padajících granulí.

Pokus 2

Úkolem pokusu je stanovit úhel stability Θ_m . Tento úhel nemusí být stejný jako úhel resistance, záleží na vlastnostech písku. Na základě znalosti úhlu Θ_m lze stanovit vnitřní koeficient tření mezi jednotlivými granulami písku (nebo podobného materiálu – lze použít krupici, krystalový cukr apod.).

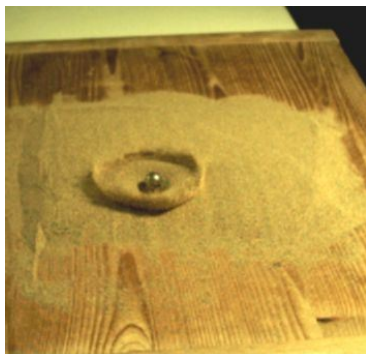


Obr. 3 Úhel resistance

V přírodě narazíme na pískovny, které mají svahy strmější než uvede-
ných 35° . Je to dáno tím, že písek obsahuje vodu z podloží, která navíc
obsahuje další vazebné látky (vápník, železo).

Naplníme-li hodiny pískem s různě velkými zrnky, při přesýpání zjis-
tíme, že jak nahoře, tak i v dolní baňce, se mezi velkými zrny narušuje
promíchávání.

Dolní nádoba – jak zrnka padají, dělá se kupole, další dopadající zrnka
spouští malé laviny. Padající zrnka se uspořádají podle velikosti – velké
se hromadí u paty hromady, nad nimi pár větších a menších zrněk – malá
zrnka při pohybu propadnou mezi velkými, ta zůstanou ležet nahoře a také
se snadněji kutálejí po svahu dolů. V horní nádobě probíhá totéž – vytvoří
se trychtýř. Protože je písek v pohybu, vrstvení se neustále narušuje. Nad
otvorem se vytvoří hrubozrný pás směrem nahoru – k hromadění velkých
zrn dochází od paty trychtýře.



Obr. 4 Vznik nerovností v písku (záznam vysokorychlostní kamery, autor M. Dud-
ka, Š. Bártová; pracoviště autora)

Písek se pohybuje i např. vlivem větru, vody – tento pohyb je chaotický,
přesto vznikají útvary – žebra – v roce 1910 je popsala *Hertha Ayrton* na
základě jednoduchých experimentů.

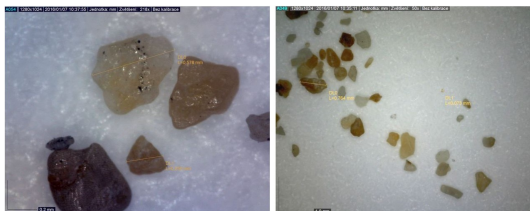
Pokus 3

V průhledném akváriu stejnoměrně rozprostřeme písek po dně, poté
začneme pohybovat akváriem v horizontální rovině. V písku vznikají vlny
a „žebra“. Na počátku je proces náhodný, i malé nerovnosti na dně způsobí
turbulence, v blízkosti dna jde o samozesilující proces. Oscilační žebra jsou
symetrická, proudící jsou asymetrická.

Geometrie písečných zrn

Kolik zrněk písku je na planetě? Odpověď neznáme, jejich počet můžeme jen odhadnout.

Průměr velkého zrna písku je 2 mm, což odpovídá asi 31 průměrům mini zrněk. Velké zrunko (na pláži) je kutáleno, obroušováno, až získá kulový tvar $V = 4/3\pi r^3$.



Obr. 5 Zrnka písku

Předpokládejme, že maxi zrunko o průměru 2 mm je obklopeno mini zrnky o průměru 0,063 mm a 0,125 mm.

$$V_{\min} = 4/3 \pi \cdot 0,0315^3 \text{ mm}^3 \doteq 0,000131 \text{ mm}^3$$

$$V_{\max} = 4/3 \pi \cdot 1^3 \text{ mm}^3 \doteq 4,19 \text{ mm}^3$$

Objem velkého zrnka je 31 993 objemů minizrněk. Vezmeme-li v úvahu i prázdný prostor, který zůstává mezi zrnky, mělo by tam místo dalších 20 000 minizrníček.

Odhadněme počet zrněk v krychli o hraně 10 cm.

Předpokládejme stejné kuličky a těsné uspořádání – jedna koule je obklopena 12 kuličkami, které se jí dotýkají. Lze vypočítat maximální počet kuliček v kostce. V tabulce 1 jsou počty kuliček pro jejich různé velikosti.

Tabulka 1 Počty kuliček (zrněk)

Průměr (mm)	Počet kuliček (zaokrouhleno)
0,063	$5,6 \cdot 10^9$
0,125	$720 \cdot 10^6$
0,25	$90 \cdot 10^6$
0,5	$11,2 \cdot 10^6$
1,0	$1,4 \cdot 10^6$
2,0	$1,72 \cdot 10^5$

Při nejtěsnějším uspořádání póry zabírají 26 % celkového objemu kostky. V přírodě je objem mezer většinou asi 40 %. Při volnějším uspořádání se do kostky vejde méně zrněk, objem pórů se zvětšuje. Zrnka nejsou navíc kuličky, ale jsou nepravidelná, jsou mezi nimi větší mezery. Máme-li směs velkých a malých zrn, malá zrnka zaplňují mezery, a tím zmenšují objem pórů. Čím nestejnorodější směs, tím více zrněk se vejde do daného objemu.

Pokud smícháme 300 ml jemného písku a 300 ml hrubého písku, výsledný objem nebude roven 600 ml.

Hustota křemíku je $2,65 \text{ g/cm}^3$ ($= 0,00265 \text{ g/mm}^3$). Naše minizrníčko ($d = 0,063 \text{ mm}$) a maxizrno ($d = 2 \text{ mm}$) mají tudíž hmotnost:

$$m = 0,000131 \text{ mm}^3 \cdot 0,00263 \text{ g/mm}^3 = 0,000000347 \text{ g}$$

$$M = 4,188 \text{ mm}^3 \cdot 0,00265 \text{ g/mm}^3 = 0,0110982 \text{ g}$$

V tabulce 2 je uvedeno, kolik zrněk dané velikosti je potřeba, abychom dostali 1 g křemičitého písku. Je vidět, jak je statistika ovlivněna nejmenšími částicemi. Potřebujeme 32 g zrněk o průměru 2 mm, abychom měli stejný počet minizrněk o průměru 0,063 mm, která tvoří 1 g písku.

Tabulka 2 Hmotnost zrněk a jejich počet

Průměr (mm)	Hmotnost jednoho zrnka (g) (zaokrouhleno)	Počet zrněk na 1 gram (zaokrouhleno)
0,063	$3,5 \cdot 10^{-7}$	$2,8 \cdot 10^6$
0,125	$2,7 \cdot 10^{-6}$	370 000
0,25	$2,2 \cdot 10^{-5}$	46 000
0,5	$1,7 \cdot 10^{-4}$	5 800
1,0	$1,4 \cdot 10^{-3}$	720
2,0	$1,1 \cdot 10^{-2}$	90

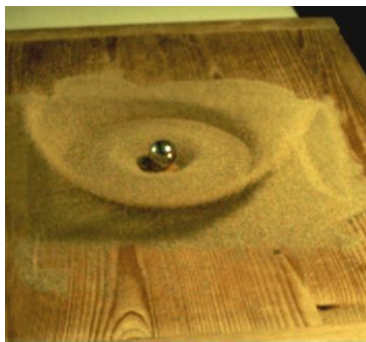
Příklad

Mějme 1 m^3 písku, který obsahuje drobná zrnka, normální zrnka a hlínu. Pórovitost je 40 % a podíl jemného písku 50 %. Potom jemný písek sám o sobě obsahuje 71,6 miliard zrn (o velikosti 0,2 mm) a 2,29 bilionů zrn, pokud jsou jen velmi jemná (jen o průměru 0,063 mm). U hlíny jsou částičky ještě mnohem menší.

Abychom počítali zrnka na pláži nebo v duně, museli bychom určit její objem (hmotnost), pórovitost, rozdělení zrněk podle velikosti atd.

Pokus 4

Zajímavé je studovat pád předmětu do písku, např. kuličky. Po dopadu vznikají fontány písku a vlny. Kinetická energie kuličky je ve zlomku sekundy přenesena na velké množství zrněk písku. Zatímco se koule po nárazu zastaví, energie je přenesena na písek – dochází k bezpočtu kolizí zrníček, která se vzájemně třou, otáčejí, poskakují – dochází k disipaci energie. Tato vlastnost byla využita během války – pytle s pískem byly ochranou proti střelám.



Obr. 6 Pád kuličky do písku (záznam vysokorychlostní kamery, autor M. Dudka, Š. Bártová; pracoviště autora)

Pokus 5

Známý je také následující pokus. Tyč postavíme do nádoby s pevnými stěnami, potom do této nádoby nasypeme písek. Na nádobu opatrně klepeme, písek si tzv. „sedne“ (vytvoříme hustší uspořádání). Nyní lze nádobu s pískem zvednout pomocí této tyče. Toto chování písku je ovlivněno *dilatací* písku. Vytažení tyče vyžaduje uvolnění vytvořených vazeb, ale v důsledku pevné stěny nádoby to není možné. Totéž lze pozorovat u vakuově balené kávy – dilatace je znemožněna atmosférickým tlakem působícím na balení. Dalším příkladem této vlastnosti je chování písku na pláži – stopa ve vlhkém písku se zdá být suchá – naší vahou jsou zrnka písku odtažena od sebe, velikost pórů se zvětší a je tak více prostoru pro okolní vodu přítékající do stopy. V silně zhuštěném granulátu se vlivem vnější síly zvětší celkový objem pórů.

Pokus 6

Průhlednou PET láhev naplníme do poloviny pískem a přilijeme tolik vody, aby hladina ležela těsně nad vrstvou písku. Nyní zatlačíme na boční

stěny láhve. Pozorujeme, že úroveň hladiny vody poklesla a povrch písku je suchý.

Vhodnou láhev naplníme až po okraj pískem. Údery na láhev písek „setřepeme“. Nyní do láhve nalijeme vodu až téměř po okraj. Otvor uzavřeme zátkou, kterou prochází kapilára. Dbáme, aby pod zátkou nezůstala vzduchová bublina. Poté pomocí injekční stříkačky doplníme do kapiláry tolik vody, aby sahala do výšky nejméně 10 cm. Nyní stlačíme stěny láhve. Pozorujeme, že úroveň hladiny vody v kapiláře viditelně poklesne.

Vraťme se k přesýpacím hodinám. Pomocí pokusu nyní srovnajte výtok kapaliny z otvoru v nádobě s výtokem písku. Postupujte tak, že během zvoleného časového intervalu budete měřit hmotnost vyteklé látky. V případě písku získáte lineární závislost.

Závěr

Problematika pevných látek ve tvaru granulí je určitě pro žáky zajímavá, s mnoha fenomény se setkávají v každodenním životě. Výklad lze doplnit celou řadou jednoduchých experimentů. Přesýpací hodiny si žáci mohou vyrobit i z PET lahví. Jako plnivo lze použít např. krupici, či sůl. Daná problematika zahrnuje celou řadu aspektů, které lze studovat a aplikovat např. v geologii, technice (sklady obilí – síla, těžba písků) atd. A nezapomeňte – pokud půjdete stavět hrady z písku – použijte písek s malým obsahem vody (asi 1 % – povrchové napětí vody drží zrnka pohromadě) a stavějte za dne, kdy je pod mrakem.

Literatura

- [1] *Barabási, A. L., Albert, R., Schiffer, P.*: The physics of sand castles: maximum angle of stability in wet and dry granular media.
- [2] *Tanin, E. H., Putra, A.*: Medco Problem – Experiment on granular material. WOPHO, 2015.
- [3] *Jaeger, H. M., Nagel, S. R.*: Physics of the granular state. Science, roč. 255 (1992), s. 1523–1557.
- [4] *Mills, A. A., Day, S., Parkes, S.*: Mechanics of the sandglass. Eur. J. Phys., roč. 17 (1996), s. 97–109.
- [5] *Serrano, D. A., Sanches-Silva Zacatenco*: The Hagen-Beverloo law for outflow of granular solids from holes on side walls. Revista Mexicana de Física, roč. 61 (2015), s. 207–210. Dostupné na: <http://www.scielo.org.mx/pdf/rmf/v61n3/v61n3a8.pdf>.
- [6] *Weber, S. M.*: Granulare Materie I. PIKO, MNU, 2015.
- [7] <http://www.antik-kant.cz/poradna/poradce/presyp.html>.
- [8] <http://www.sand-abc.de/sandphysik/sandphysik6.htm>.