MATEMATIKA

Pojem vzdálenosti v geometrii

FRANTIŠEK KUŘINA

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

Nevíme, zda to byl úmysl nebo náhoda, záměr nebo nedopatření, že slova *měřiti* a *měření* se nevyskytují ve Standardech [5], materiálech, které jsou od r. 2013 závaznou přílohou *Rámcových vzdělávacích programů základního vzdělání*. Ať tak, či onak, je to podle našeho názoru projevem vědomé či nevědomé tendence nerespektovat „nečistý" proces vznikání matematických pojmů a postupů, ale orientovat se na hotovou „čistou" matematiku. A to navzdory tomu, co napsal klasik matematiky *Henri Poincaré* (1842–1912) a co zdůrazňují současní filosoficky orientovaní autoři *Marie Benediktová Větrovcová* a *Pavel Krtouš*. Dovolíme si připomenout jejich slova.

„Zoologové říkají, že embryonální vývoj zvířete opakuje ve velmi krátké době celé dějiny jeho předků v rozsahu geologických období. Zdá se, že je tomu stejně s vývojem rozumu. Učitel musí nechat projít žáka tím, čím prošli jeho předci. Rychle, ale bez vynechání některé etapy. K tomu pak nám mají být prvním vodítkem dějiny vědy" [8, s. 33]. „Není tvoření osnov, tohoto plánu, jak vytyčit cestu ontogenezi matematiky, součástí širšího fylogenetického plánu daného evolučním procesem, rozumějme procesem povstávání a vznikání matematiky jako takové? Lze nahlížet na vzdělávání v matematice jako na dějinami matematiky nastíněnou (evoluční) větev, která vyrůstá na základě jakýchsi skrytých předpokladů, jak se matematika sama o sobě vyvíjí a jak na ni máme pohlížet?" [1, s. 173]. „První matematické teorie – geometrie, aritmetika a elementární teorie čísel – vznikaly při snaze porozumět našemu světu. Vznikaly jako nástroj přímočaře použitelný na jevy okolního světa. Geometrické poučky jako podobnost trojúhelníků či Pythagorova věta nevznikaly jako výplody práce abstraktní matematiky, ale jako nástroj pro vyměřování reálných útvarů. Jejich pravdivost nebyla prvotně založena na dokazatelnosti z nějakých axiomů, ale na tom, že fungovaly při aplikaci na reálný svět. Stejně tak tomu bylo s čísly. Axiomatická metoda přišla do teorie čísel až dávno poté, co jsme čísla pochopili a porozuměli mnoha jejich vlastnostem. Právě porovnáním matematických teorií se zkušenostním světem jsme získali pocit, že matematické výroky nesou obsah, že je lze pravdivostně ocenit“ [6, s. 69].

Cílem tohoto článku je připomenout několik možných přístupů k důležitému pojmu vzdálenost v matematické literatuře. V navazujícím článku *Pojem vzdálenosti ve školské matematice* se pak vrátíme k procesu měření délek a ukážeme několik aplikací pojmu vzdálenost ve vyučování na základní a střední škole.

Obsah i metody vyučování matematice jsou v praxi často ovlivněny hotovými matematickými strukturami, někdy dokonce i axiomatickými systémy. Matematické vzdělávání, které respektuje historický vývoj matematiky, je praktikováno např. v projektu realistické matematiky *Freudenthalova ústavu* v Utrechtu. Podrobněji o tom píšeme v publikaci [7]. Východiskem realistického přístupu je předpoklad, že žáci mohou a měli by sami rozvíjet matematické představy na základě praktických zkušeností a problémů. Ideu dvojího přístupu k matematice podrobně rozebírá *Petr Vopěnka* (1936–2015) v novém vydání *Eukleidových Základů* [3] v kapitole *Napínači provazů.* Tato praktická geometrie (měřictví) byla provozována dávno před Eukleidem. Napínači provazů nezkoumali ideální geometrický svět. Pohybovali se ve světě reálném, základem jejich práce bylo měření vzdáleností jako podklad pro výpočet obsahů ploch a objemů těles. Jde tedy o *praktickou moudrost* (phronesis) na rozdíl od *vědeckého porozumění* (epistémé), na němž je založen deduktivní systém *Eukleidových Základů.* Za představitele prvního přístupu lze považovat *Aristotela*, představitel druhého je *Platon.* „Napínači provazů ovládali svoje řemeslo s obdivuhodným mistrovstvím. Považujeme-li měřičství za řemeslo, neznamená to, že bychom mu chtěli upřít tvůrčí povahu. Právě naopak, v řemesle je často více tvůrčí činnosti než ve vědě, neboť tvoření je jeho hlavním úkolem.“ To zdůrazňuje Vopěnka v knize *Rozpravy s geometrií.*

Učebnice geometrie pro jedenáctiletou střední školu z r. 1954 autorů *Jan Vyšín, Zbyněk Dlouhý, Josef Metelka* a *Alois Urban* popisuje proces měření úseček na dvaceti stránkách včetně Archimedova axiomu a naznačení konstrukce velikosti úsečky jako reálného čísla, které může být i iracionální.

Současná učebnice planimetrie pro gymnázia *Evy Pomykalové* proces měření úseček vůbec nezmiňuje, pouze připomíná, že délka úsečky AB je vzdálenost bodů A, B.

Jan Vyšín v *Elementární geometrii*, učebnici planimetrie pro budoucí učitele, vyslovuje v kapitole *Velikost úseček a úhlů definici*:

Budiž každé úsečce přiřaděno jediné nezáporné číslo. Toto číslo budeme nazývat velikostí (délkou) úsečky, jsou-li splněny tyto podmínky:

1. Shodné úsečky mají stejné velikosti.
2. Součet úseček má za velikost součet velikostí jednotlivých úseček.
3. Určitá předem daná nenulové úsečka má velikost 1.

V dalším pak na pěti stranách dokazuje jednoznačnost a existenci velikosti úsečky ve tvaru reálného čísla $n,n_1n_2n_3 \ldots n_k \ldots$, přičemž se odvolává na teorii nekonečných řad.

To je „nejpoctivější" zpracování tematiky velikosti úsečky v české literatuře, které je mně známé. Složitý přístup k takto základnímu pojmu elementární geometrie je podle mého názoru důsledkem eukleidovsko-hilbertovské axiomatiky, jak se v dalším pokusíme prokázat.

Eduard Čech (1893–1960) formuluje ve své učebnici [2] pro základní školu přístup k délce úsečky takto: „Délku úsečky AB najdeme měřítkem. Přiložíme měřítko tak, aby se jeho začátek kryl třeba s bodem A, délku potom čteme u bodu B." Tento přístup považuji za velmi vhodný, neboť délka úsečky je určena „přesně" odpovídajícím bodem na měřítku. Při realizaci procesu měření musíme zpravidla zaokrouhlovat. Měříme-li např. na centimetry úsečky AB a CD, které v milimetrech mají po řadě délky 34 mm a 44 mm, platí $|AB| = 3$ cm, $|CD| = 4$ cm a pro jejich součet dostáváme velikost 7 cm, ačkoliv s přesností na milimetry má tento součet velikost 78 mm. Velikost součtů úseček tak není součet velikostí sčítaných úseček.

V Eukleidových Základech vydaných česky v roce 1907 a nově pak v roce 2007 má *délka*, spolu s *šířkou* a *dílem*, které jsou složkami praktické geometrie předeukleidovské éry, charakter primitivních, nedefinovaných pojmů. Píše se zde např.: „Bod jest, co nemá dílu. Čára je délka bez šířky. Hranicemi čáry jsou body. Úsečka je čára, která se svými body táhne rovně" [3, s. 41]. Ačkoliv pro praktickou geometrii a geometrii v současném pojetí je délka úsečky číslo získané měřením, jak jsem připomněl Vyšínovým zpracováním, u Eukleida je tento pojem reprezentován úsečkou. Nahrazení měřené délky (tedy čísla) úsečkou (geometrickým útvarem) popisuje explicitně *J. B. Pavlíček* v knize *Základy neeukleidovské geometrie Lobačev-*

ského: „Vzdáleností dvou bodů budeme rozumět každou úsečku shodnou s úsečkou spojující oba body.“ Toto sepětí měřené délky s číslem je snad nejlépe možné vyjádřit číselnou osou (měřítkem), jak jsem připomněl citací Čechovy učebnice. V deskriptivní geometrii a mnohdy i ve stereometrii je tento přístup běžný: délku úsečky umístěné v prostoru určíme např. sklopením promítacího lichoběžníku nebo „přenesením“ geometrického útvaru do roviny, tedy nikoliv měřením nebo výpočtem. Řadu příkladů tohoto postupu si čtenář snadno vyhledá v gymnaziálních učebnicích deskriptivní geometrie a stereometrie *Evy Pomykalové*.

Na úrovni matematiky dvacátého století zpracoval eukleidovskou geometrii německý matematik *David Hilbert* v knize *Grundlagen der Geometrie* z r. 1899. Hilbert rozlišil pět skupin axiomů (axiomy incidence, uspořádání (rozmístění), shodnosti, spojitosti a rovnoběžnosti). Pojem vzdálenost se v Hilbertově axiomatice nevyskytuje. Zavedení vzdálenosti v takto budované geometrii jsem již připomněl ve Vyšínově zpracování. Tato problematika je dosti složitá a nelze se divit, že řada autorů hledala k vzdálenosti „schůdnější“ cestu.

Již v r. 1902 se snažil zavést axiomatiku s primitivním pojmem vzdálenost ruský matematik *Venjamim Fedorovič Kagan* (1869–1853). Patrně pod silným vlivem hilbertovského přístupu se toto pojetí uplatnilo až po zavedení pojmu metrický prostor, který r. 1906 definoval francouzský matematik *Maurice Fréchet* takto:

Množina P spolu se zobrazením d se nazývá metrický prostor, právě když každým dvěma prvkům $X, Y \in P$ je přiřazeno reálné číslo $d(X, Y)$ splňující tyto axiomy:

$$\mathrm{A}_1\colon \forall X, Y \in P \quad d(X,Y) \geq 0,$$

$$\mathrm{A}_2\colon \forall X, Y \in P \quad d(X,Y) = d(Y,X),$$

$$\mathrm{A}_3\colon \forall X, Y, Z \in P \quad d(X,Y) + d(Y,Z) \geq d(X,Z).$$

Dnes je tento pojem všeobecně přijímán. Geometrické útvary chápeme jako části metrických prostorů dimenze 2 nebo 3, tedy ne jako „pouhé množiny“, ale složky struktury $[P, d]$. Představu o úsečce jako množině malých korálků navlečených na niti, která se někdy doporučuje, bychom pěstovat neměli. Body úsečky nebo roviny bychom měli interpretovat spíše jako „místa“ na rovné čáře nebo v rovném terénu bez překážek. Dokonce i klasický termín „geometrické místo bodů“, který byl v éře množinové matematiky zavržen, není nevhodný.

Vzdálenost jako primitivní pojem geometrické axiomatiky zavedl americký matematik *George D. Birkhoff* v roce 1932. Obvyklé formulace příslušných axiomů zní:

Axiom vzdálenosti: Každé dva body A, B mají určitou vzdálenost $|AB|$, která je dána nezáporným reálným číslem.

Axiom měřítka: Existuje bijektivní zobrazení f množiny bodů libovolné přímky p na množinu všech reálných čísel tak, že pro libovolné body A, B přímky p platí $|AB| = |f(B) - f(A)|$.

Takový přístup můžeme nalézt např. v pracích *Gustava Choqueta*, *Alexeje Vasiljeviče Pogorelova* a *Anny Zofie Krygowské.*

Vzdálenost je důležitým pojmem elementární geometrie. Určování vzdáleností měřením dalo nejen název této disciplíně v historii; tento pojem je významný i v současné matematice, jak jsem připomněl definicí metrického prostoru. Snad vlivem poněkud akademického stylu v pojetí Eukleides–Hilbert se mu dostává v současné škole relativně malá pozornost. K této problematice se vrátím v samostatném článku. Myšlenky naznačené v úvodu tohoto příspěvku by měly ovlivňovat praxi vyučování směrem k činnostem, k experimentování, rýsování a modelování. Může to přinést prohloubení zájmu o matematiku u těch žáků, kteří jsou spjati s konkrétní realitou svých světů a abstraktní myšlení jim dělá potíže. Matematika by pro tyto žáky měla mít spíše charakter řemesla, než abstraktní teorie, kterou se v některých případech učí bez hlubšího porozumění.

Literatura

[1] *Benediktová Větrovcová, M.*: Zrození aritmetického a algebraického kalkulu. In: Spor o matematizaci světa. Pavel Mervart, Červený Kostelec, 2011.

[2] *Čech, E.*: Geometrie pro I. tř. měšťanských a středních škol. JČMF, Praha, 1947.

[3] *Eukleides*: Základy. Kniha I–IV. OPS, Nymburk, 2007.

[4] Eukleidovy Základy. JČM, Praha 1907.

[5] *Fuchs, E., Hrubý, D. a kol.*: Standardy a testové úlohy z matematiky pro základní školy a nižší ročníky víceletých gymnázií. Prometheus, Praha, 2000.

[6] *Krtouš, P.*: Pravdivost v matematice a zkušenost. In: Spor o matematizaci světa. Pavel Mervart, Červený Kostelec, 2011.

[7] *Kuřina, F.*: Matematika jako pedagogický problém. Gaudeamus, Hradec Králové, 2016.

[8] *Poincaré, H.*: Číslo, prostor, čas. OPS, Plzeň, 2010.

Česko-polsko-slovenská MO juniorů

JAROMÍR ŠIMŠA – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta MU, Brno – Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Před časem lety jsme v našem časopise přinesli krátkou informaci o nové mezinárodní matematické soutěži pro žáky ve věku do 16 let, viz [1], která nese dnes již zaběhnutý název Česko-polsko-slovenská matematická olympiáda juniorů (CPS MO juniorů). Již z jejího názvu je patrné, které tři středoevropské země se exkluzivně této soutěže účastní.

Cílem tohoto příspěvku je podrobněji seznámit čtenáře se strukturou soutěže, její přípravou a také s úlohami, které soutěžící řešili v dosud posledním, 5. ročníku této soutěže. Ten se konal od 15. do 18. května 2016 na Slovensku (v hotelu Kľak na Fačkovském sedle). Pro úplnost uvádíme, že první tři ročníky soutěže organizovali polští kolegové (první a druhý ročník se konal v Mszaně Dolné, třetí ročník se uskutečnil ve Szczyrku, obojí v polských Beskydech). Čtvrtý ročník pak uspořádala česká Ústřední komise MO v Karlově pod Pradědem.

Během pěti let existence získala tato mezinárodní matematická soutěž svou autentickou podobu. Soutěže se pravidelně účastní šestičlenná družstva nejlepších mladých olympioniků z Polska, Slovenska a České republiky, tedy vždy 18 soutěžících. Vlastní soutěž má dvě části, které probíhají ve dvou soutěžních dnech. První soutěžní den je to soutěž jednotlivců, kdy žáci řeší v čase 3,5 hodiny pětici soutěžních úloh, druhý soutěžní den se pak koná soutěž (tříčlenných) družstev sestavených (vylosovaných) po jednom zástupci z každé participující země. Během této soutěže, která trvá 5 hodin, řeší družstva 6 náročnějších úloh. Jedná se tedy o zcela výjimečnou týmovou soutěž, při níž dorozumívacím jazykem mezi členy družstva je zpravidla angličtina. Na základě pětileté zkušenosti lze konstatovat, že právě tato část CPS MO juniorů je pro většinu soutěžících velmi atraktivní. Jejím výrazným pozitivem je navíc skutečnost, že soutěžící se tak poprvé seznamují s moderním pojetím mezinárodní týmové spolupráce v oblasti matematiky.

Nominace do reprezentačních družstev je v případě České republiky a Slovenska podobná. Družstva jsou vybírána na základě doporučení Krajských komisí MO a dále pak na základě dvou náročnějších testů v průběhu výběrového soustředění, na něž je každoročně zváno nejvýše 12 matematických nadějí z celé republiky. Polský reprezentační tým je sestavován přímo z vítězů finále polské Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów (OMG), viz [3], což je matematická soutěž věkově odpovídající kategorii C v české a slovenské MO.

Aby si čtenář učinil lepší představu o náročnosti úloh v obou částech soutěže, uvedeme nejprve přehled všech úloh použitých v letošním 5. ročníku CPS MO juniorů. Úlohy soutěže jednotlivců jsou uvedeny v jazyce českém a zadání týmové soutěže v trojjazyčné verzi tak, jak ji obdrželi všichni účastníci.

Soutěž jednotlivců

(pondělí, 16. května 2016)

1. V rovině je dána úsečka AB se středem M. Uvažujme množinu všech pravoúhlých trojúhelníků ABC s přeponou AB, v nichž D značí patu výšky z vrcholu C a K, L jsou paty kolmic z bodu D po řadě k odvěsnám BC, AC. Určete, jaký je největší možný obsah čtyřúhelníku $MKCL$.

2. Pro reálná čísla x, y platí $x^2+y^2-1 < xy$. Dokažte, že $x+y-|x-y| < 2$.

3. Určete všechna celá čísla $n \geq 3$, pro něž je možné označit vrcholy pravidelného n-bokého hranolu navzájem různými kladnými celými čísly tak, aby vrcholy označené čísly a a b byly spojeny hranou, právě když platí $a \mid b$ nebo $b \mid a$.

4. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC, v němž $|AB| < |AC| < |BC|$. Na stranách AC a BC jsou zvoleny po řadě body K a L tak, že platí $|AB| = |CK| = |CL|$. Osy úseček AK a BL protínají přímku AB po řadě v bodech P a Q. Úsečky KP a LQ se protínají v bodě M. Dokažte, že $|AK| + |KM| = |BL| + LM|$.

5. Určete nejmenší celé číslo j, pro které lze do jednotlivých polí čtvercové tabulky 10×10 vepsat celá čísla od 1 do 100 tak, aby každých 10 po sobě jdoucích čísel leželo v některé čtvercové části $j \times j$ celé tabulky.

Úlohy týmové soutěže jsou pro soutěžící připraveny vždy po dvou v jazyce českém, slovenském a polském. Jejich řešení píší žáci v jazyce, který je stanoven v obdržených pokynech spolu s texty úloh (viz zadání soutěže družstev – níže). V soutěži jednotlivců odevzdávají žáci svá řešení v mateřském jazyce, podobně jako na IMO nebo na MEMO[1].

Team Competition

(Tuesday, 17th May 2016)

1. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Označme D patu výšky z vrcholu C. Nechť Q, R a P jsou po řadě středy úseček AD, BD a CD. Dokažte, že platí $|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle QCR| = 180°$.

Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po poľsky.

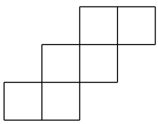
2. Najděte největší možné celé číslo d, které současně dělí tři trojmístná čísla $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ a $\overline{cab}$, kde a, b a c jsou vhodné nenulové a navzájem různé číslice.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po słowacku.

3. Na płaszczyźnie poprowadzano pewną liczbę prostych tak, że każda przecina dokładnie 15 innych. Ile prostych poprowadzono? Scharakteryzuj wszestkie możliwe konfiguracje i uzasadnij, że nie ma innych.

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte ve slovenštině.

4. Pewną liczbę płytek przystających do przedstawionej na rysunku należy umieścić wewnątrz kwadratu o wymiarach 11×11 podzielenego na pola będące kwadratami jednostkowymi w taki sposób, aby kazda plytka pokrywała dokładnie 6 pól, żadna nie wystawala poza kwadrat oraz żadne dwie nie niepokrywały tego samego pola.



(a) Wyznacz największą możliwą liczbę płytek, którą można umieścić wewnątrz kwadratu w opisany sposób.

(b) Znajdź wszystkie pola, które muszą zostać przykryte przy każdym pokryciu z użyciem maksymalnej liczby płytek

Poznámka. Riešenie tejto úlohy musí byť napísané po česky.

[1] Podrobné výsledky 5. CPS MO juniorů lze najít např. na webovských stránkách [2].

5. Daný je trojuholník ABC taký, že $|AB| : |AC| : |BC| = 5 : 5 : 6$. Označme M stred strany BC a N taký bod na strane BC, že $|BN| = 5\,|CN|$. Dokážte, že stred kružnice opísanej trojúholníku ABN je stredom úsečky spájajúcej stredy kružíc vpísaných trojúholníkom ABC a ABM.

Uwaga. Rozwiązanie tego zadania powinno być napisane po czesku.

6. Dané je kladné celé číslo k. Nájdite všetky trojice kladných celých čísel a, b, c, ktoré spĺňajú rovnosti

$$\begin{aligned} a + b + c &= 3k + 1, \\ ab + bc + ca &= 3k^2 + 2k. \end{aligned}$$

Poznámka. Řešení této úlohy odevzdejte v polštině.

Jak se soutěž připravuje?

Příprava jednotlivých ročníků soutěže probíhá ustáleným způsobem. Každá účastnická země zašle po oslovení (zhruba 3 měsíce před vlastní soutěží) organizátorům aktuálního ročníku soutěže čtyři nové, původní úlohy. Tým organizátorů pak sestaví ve spolupráci s vedoucími družstev jednotlivých zemí z došlých návrhů oba soubory úloh (pro soutěž jednotlivců i soutěž družstev), a to ve čtyřech jazykových verzích pro soutěž jednotlivců (anglickou, českou, polskou a slovenskou) a ve dvou verzích pro soutěž družstev (anglickou a smíšenou).

Autoři úloh souběžně připraví vzorová řešení svých návrhů, která po skončení soutěže obdrží všichni soutěžící. Po ukončení obou částí soutěže (jednotlivců i týmů) – týž den v odpoledních hodinách se prezentují nejlepší žákovská řešení samotnými řešiteli, kteří tak mají možnost seznámit ostatní soutěžící ve svém rodném jazyce nebo anglicky s odlišnými přístupy k řešení zadaných úloh.

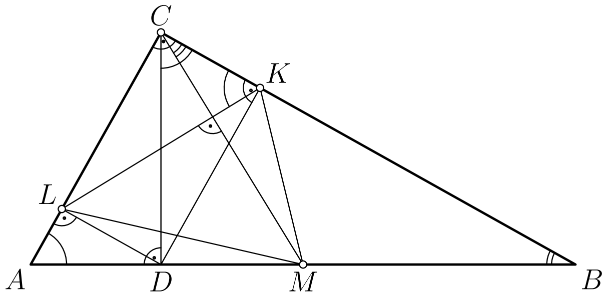
Řešení vybraných soutěžních úloh

V následující části příspěvku uvedeme ukázky řešení čtveřice českých soutěžních úloh, jejímiž navrhovateli byli podobně jako v předešlých ročnících soutěže, oba autoři článku. V soutěži jednotlivců se jednalo o 1. úlohu (J. Švrček) a 5. úlohu (J. Šimša a D. Klaška) a v týmové soutěži pak o 1. úlohu (J. Švrček) a o 2. úlohu (J. Šimša).

Příklad 1 (soutěž jednotlivců)

V rovině je dána úsečka AB se středem M. Uvažujme množinu všech pravoúhlých trojúhelníků ABC s přeponou AB, v nichž D značí patu výšky z vrcholu C a K, L jsou paty kolmic z bodu D po řadě k odvěsnám BC, AC. Určete, jaký je největší možný obsah čtyřúhelníku $MKCL$.

Řešení. Nejprve ukážeme, že přímky KL a MC jsou navzájem kolmé. Na základě podobnosti pravoúhlých trojúhelníků ABC a CBD je $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BCD|$.



Obr. 1

Protože $CLDK$ je pravoúhelník, platí $|\sphericalangle LKC| = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle BAC|$. Střed M úsečky AB je současně středem Thaletovy kružnice (opsané pravoúhlému trojúhelníku ABC), a proto BCM je rovnoramenný trojúhelník, v němž

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle MBC| = |\sphericalangle BCM|.$$

Na základě odvozených rovností dále platí

$$|\sphericalangle LKC| + |\sphericalangle BCM| = |\sphericalangle BAC| + |\sphericalangle ABC| = 90^\circ,$$

a proto jsou přímky LK a CM navzájem kolmé (obr. 1). Uvažovaný čtyřúhelník $MKCL$ má tedy navzájem kolmé úhlopříčky KL a CM a pro jeho obsah S pak platí známý vztah (popř. jej lze snadno odvodit)

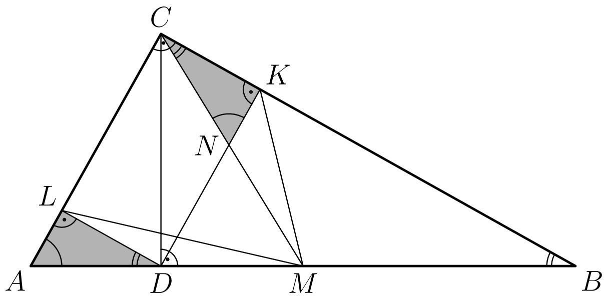
$$S = \frac{1}{2} \cdot |KL| \cdot |CM|.$$

Vzhledem k tomu, že $|CM| = \frac{1}{2}|AB|$, má uvažovaný čtyřúhelník největší obsah, právě když jeho úhlopříčka KL má největší možnou délku. Protože $|KL| = |CD|$, je délka úhlopříčky KL maximální, právě když má maximální možnou délku (velikost) výška CD z vrcholu C v pravoúhlém trojúhelníku ABC s pevně danou délkou přepony AB. Očividně je tedy délka úhlopříčky KL maximální, právě když pravoúhlý trojúhelník ABC má největší možnou výšku z vrcholu C, tj. v případě, kdy $|CD| = \frac{1}{2}|AB|$. V takovém případě má čtyřúhelník $MKCL$ maximální možný obsah

$$S = \frac{1}{8}|AB|^2.$$

Tím je úloha vyřešena.

Jiné řešení (podle *Josefa Minaříka*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že D je bodem úsečky AM ($D \neq A$). Označme N průsečík úseček MC a DK. Pravoúhlé trojúhelníky ADL a NCK (na obr. 2 jsou vyznačeny šedě) jsou shodné, neboť se shodují ve velikostech vnitřních úhlů a odpovídající si strany DL a CK jsou rovněž shodné (protilehlé strany v pravoúhelníku $DKCL$), a proto jsou shodné i výšky k přeponám v obou uvažovaných pravoúhlých trojúhelnících.



Obr. 2

Protože navíc platí $|MA| = |MC|$, mají trojúhelníky AML a CMK stejné obsahy, takže zkoumaný čtyřúhelník $MKCL$ a rovnoramenný trojúhelník AMC mají stejný obsah. Čtyřúhelník $MKCL$ má tedy maximální obsah, právě když má maximální možný obsah trojúhelník AMC, tedy v případě, když výška z vrcholu C má největší možnou délku. To nastane jen tehdy, když $|CD| = |MC|$, tj. když C je vrcholem pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku s přeponou AB.

Výpočet obsahu tohoto pravoúhlého trojúhelníku vede ke stejnému výsledku jako v předchozím řešení této úlohy.

Příklad 5 (soutěž jednotlivců)

Určete nejmenší celé číslo j, pro které lze do jednotlivých polí čtvercové tabulky 10×10 vepsat celá čísla od 1 do 100 tak, aby každých 10 po sobě jdoucích čísel leželo v některé čtvercové části $j \times j$ celé tabulky.

Řešení. Předpokládejme, že tabulka je zaplněna způsobem, který vyhovuje zadání úlohy pro některé $j < 10$, a ukažme nejprve, že nutně platí $j \geq 5$. Díky předpokladu $j < 10$ žádná dvě ze čtyř čísel v rohových polích celé tabulky neleží ve čtverci $j \times j$, takže se každá dvě z těchto čtyř čísel liší alespoň o 10. Pro druhé nejmenší z těchto čísel, které označíme a, tak platí $11 \leq a \leq 80$. V tabulce je tedy zapsáno všech 19 čísel

$$a-9,\ a-8,\ a-7,\ \ldots,\ a,\ a+1,\ a+2,\ a+3,\ \ldots,\ a+9$$

a všechna musí ležet v jednom čtverci $j \times j$ s rohovým polem obsazeným číslem a, takže platí $j^2 \geq 19$ neboli $j \geq 5$.

Ve druhé části řešení uvedeme zaplnění tabulky, které vyhovuje zadání úlohy pro $j = 5$ (obr. 3).

1	2	3	4	5	96	97	98	99	100
10	9	8	7	6	95	94	93	92	91
11	12	13	14	15	86	87	88	89	90
20	19	18	17	16	85	84	83	82	81
21	22	23	24	25	76	77	78	79	80
30	29	28	27	26	75	74	73	72	71
31	32	45	46	47	54	55	56	69	70
34	33	44	43	48	53	58	57	68	67
35	38	39	42	49	52	59	62	63	66
36	37	40	41	50	51	60	61	64	65

Obr. 3

Pro snazší kontrolu toho, že každých 10 po sobě jdoucích čísel leží v jednom čtverci 5×5, může čtenář využít toho, že čísla od 1 do 100 jsou při cestě šachového pěšce postupně zapisována do této tabulky, která má jako celek svislou osu souměrnosti – přímku mezi pátým a šestým sloupcem tabulky.

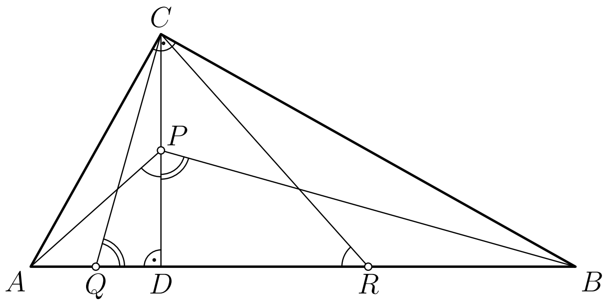
Příklad 1 (soutěž družstev)

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB. Označme D patu výšky z vrcholu C. Nechť Q, R a P jsou po řadě středy úseček AD, BD a CD. Dokažte, že platí

$$|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle QCR| = 180°.$$

Řešení. Protože trojúhelníky ADC a CDB jsou podobné (věta *uu*), svírají těžnice z odpovídajících si vrcholů týž úhel s protější stranou (obr. 4). Pro dvojice těžnic AP, CR a CQ, BP v uvedené dvojici podobných trojúhelníků proto platí

$$|\sphericalangle APD| = |\sphericalangle CRD| = |\sphericalangle CRQ| \quad \text{a} \quad |\sphericalangle CQR| = |\sphericalangle CQD| = |\sphericalangle BPD|.$$



Obr. 4

Odtud plyne

$$|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle APD| + |\sphericalangle BPD| = |\sphericalangle CRQ| + |\sphericalangle CQR| = 180° - |\sphericalangle QCR|,$$

a tudíž $|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle QCR| = 180°$. Tím je důkaz uzavřen.

Jiné řešení. Snadno se můžeme přesvědčit o tom, že trojúhelníky ABP a QRC mají stejné obsahy. Z podobnosti trojúhelníků ADC a CDB plyne pro poměr délek odpovídajících si těžnic v obou trojúhelnících

$$\frac{|AP|}{|CQ|} = \frac{|CR|}{|BP|}, \quad \text{neboli} \quad |AP| \cdot |BP| = |CQ| \cdot |CR|. \tag{1}$$

Na základě rovnosti obsahů S_{ABP}, S_{QRC} trojúhelníků ABP, QRC dostaneme využitím známé formule pro jejich obsah

$$S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot |AP| \cdot |BP| \cdot \sin |\sphericalangle APB| = \frac{1}{2} \cdot |CQ| \cdot |CR| \cdot \sin |\sphericalangle QCR| = S_{QRC}.$$

S ohledem na (1) je pak $\sin|\sphericalangle APB| = \sin|\sphericalangle QCR|$. Protože oba (neshodné) úhly APB a QCR mají velikosti menší než $180°$, je tedy

$$|\sphericalangle APB| + |\sphericalangle QCR| = 180°,$$

což jsme chtěli dokázat.

Příklad 2 (soutěž družstev)

Najděte největší možné celé číslo d, které současně dělí tři trojmístná čísla $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ a $\overline{cab}$, kde a, b a c jsou vhodné nenulové a navzájem různé číslice.

Řešení. Uvažujme pevná tři trojmístná čísla

$$A = 100a + 10b + c, \quad B = 100b + 10c + a, \quad C = 100c + 10a + b$$

s třemi nenulovými navzájem různými číslicemi a, b, c a dokažme, že každý jejich společný dělitel d má tyto vlastnosti:

(i) V rozkladu d na prvočinitele mohou být zastoupena pouze prvočísla 2, 3 a 37, ne však v mocninách vyšších než 2^1, 3^3 a 37^1.

(ii) Je-li d dělitelné číslem 37, pak d není dělitelné číslem 3.

Skutečně, z rovností

$$10A - B = 999a, \quad 10B - C = 999b, \quad 10C - A = 999c$$

vyplývá, že číslo d dělí každé z čísel $999a$, $999b$ a $999c$. Protože $999 = 3^3 \cdot 37$ a každý dělitel tří různých nenulových číslic (čísel) a, b, c je roven 1, 2 nebo 3, zbývá k důkazu části (i) ukázat, že 3^4 nedělí d. To plyne okamžitě z rovnosti

$$A + B + C = 111(a + b + c),$$

neboť 3^2 nedělí 111 a 3^3 nedělí $a+b+c$, protože $a+b+c \leq 9+8+7 = 24$. Tvrzení (ii) snadno dokážeme sporem: kdyby číslo d bylo dělitelné oběma (nesoudělnými) čísly 37 a 3, a tedy i jejich součinem $37 \cdot 3 = 111$, byl by každý trojmístný násobek čísla d (mezi nimiž jsou čísla A, B, C) zapsán *třemi stejnými* číslicemi, a to je spor.

Z dokázaných vlastností (i) a (ii) plyne, že pro společný dělitel čísel A, B, C platí

$$d \in \{1, 2, 3, 9, 18, 27, 37, 54, 74\}.$$

Zatímco mezi trojmístnými násobky čísla 54

$$108, 162, 216, 270, 324, 378, 432, \underline{486}, 540, 594, \underline{648}, 702, 756, \underline{864}, 918, 972$$

požadovaná trojice čísel existuje (tvoří ji podtržená čísla), mezi trojmístnými násobky čísla 74

$$148, 222, 296, 370, 444, 518, 592, 666, 740, 814, 888, 962$$

taková trojice není.

Závěr. Největší hledané celé číslo d je tedy 54.

Česká účast v CPS MO juniorů

Pro české a slovenské žáky prvních ročníků středních škol je v matematické olympiádě obou našich zemí určena kategorie C, která vrcholí krajským kolem. Jejich vítězové tak mohou jen závidět svým polským vrstevníkům, pro které podobná soutěž končí až ústředním (celopolským) kolem, konaným každoročně ve Varšavě. Polská zkušenost prokazuje, že i tři roky před maturitou, kdy žáci ještě neznají většinu středoškolské matematiky, pro ně lze připravovat soutěž v řešení náročných matematických úloh, které i na republikové úrovni dokážou rozhodnout o nejlepších jednotlivcích. Považujeme proto za velmi prospěšnou iniciativu polských kolegů, za níž stojí jmenovitě *Jerzy Bednarczuk* a *Waldemar Pompe*, kteří přišli jako první s myšlenkou česko-polsko-slovenské juniorské matematické soutěže.

Prvních pět jejích ročníků prokázalo, že naši žáci svou účastí získávají významnou pobídku k tomu, aby dále rozvíjeli své matematické dovednosti. Docela reálnou se totiž pro ně stává představa, že se v dalších ročnících MO probojují v kategorii A až do reprezentačních družstev ČR pro prestižní soutěže, jakými jsou IMO a MEMO. Tento osobní „plán růstu“ úspěšně naplnili někteří účastníci prvních ročníků CPS MO juniorů, jako jsou Radovan Švarc, Pavel Turek, Marian Poljak nebo Filip Bialas.

Literatura

[1] *Švrček, J.*: 2. Česko-polsko-slovenská MO juniorů. MFI, 22/4, s. 312–313.

[2] http://www.math.muni.cz/mo.

[3] http://www.omg.edu.pl.

Praktická ukázka využití testování hypotéz

ONDŘEJ VENCÁLEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Tradiční kurzy pravděpodobnosti a statistiky na všech úrovních vzdělávání začínají příklady z oblasti hazardních her – hody mincí, jednou či vícero kostkami, tahy čísel z osudí. Je to snad dáno tím, že právě oblast hazardních her vedla k zájmu o nahodilost a potřebě jejího popisu jazykem matematiky. Pokud však při výuce u těchto příkladů zůstaneme a nedojde na příklady poněkud závažnější, nabude velká část studentů dojmu, že „celá pravděpodobnost a statistika se vlastně zabývají jen malichernými problémy". Cílem tohoto příspěvku je přesvědčit čtenáře, že navzdory výše uvedenému přesvědčení je statistika velmi užitečným nástrojem, který napomáhá k rozvoji nejrůznějších oblastí lidského vědění.

Úskalí zobecňování

Předmětem zkoumání statistiky jsou nejrůznější vztahy. Představme si například prodejce, který prodává nějaké přístroje (např. fotoaparáty) dvou různých typů. Vede si záznamy o tom, zda u prodaných kusů došlo v záruční době k poruše a následné reklamaci či nikoliv. U typu A, kterého se prodalo 200 kusů, zaznamenal čtyři reklamace, u typu B, kterého se prodalo 100 kusů, jen jednu. Reklamována byla tedy 2 % přístrojů typu A a 1 % přístrojů typu B. Lze tedy říci, že typ A je *obecně* poruchovější? Slůvkem *obecně* zde míníme skutečnost, že pro další (zatím neprodané) výrobky bude opět poruchovost typu A vyšší než typu B.

Výrobek typu A se jeví jako více poruchový, a to dvojnásobně oproti typu B. Když by však bylo byť jen o jednu reklamaci typu B více, byly by u obou typů výrobku 2 % reklamací. Nezdá se tedy fér tvrdit něco obecného na základě tak malého rozdílu v pozorované poruchovosti.

Představme si ještě několik dalších situací. V tabulce 2 je popsána situace, kdy jsou počty reklamací vyšší než v tabulce 1, ale stále platí, že poruchovost typu A je dvojnásobná oproti typu B (20 % oproti 10 %). Tomuto rozdílu již budeme přikládat větší význam, neboť změna jednoho či dvou pozorování nebude znamenat zásadní změnu našich závěrů o poruchovosti. V situaci prezentované v tabulce 3 si pak již můžeme být rozdílností v poruchovosti jednotlivých typů dost jisti. Procentuální zastoupení reklamovaných výrobků je sice stejné jako v předešlé situaci, ale máme podstatně více pozorování.

Tabulka 1 Četnost reklamací u jednotlivých typů přístroje

	reklamace	bez závad	celkem
typ A	4	196	200
typ B	1	99	100
celkem	5	295	300

Tabulka 2 Četnost reklamací u jednotlivých typů přístroje (situace s vyšší poruchovostí)

	reklamace	bez závad	celkem
typ A	40	160	200
typ B	10	90	100
celkem	50	250	300

Tabulka 3 Četnost reklamací u jednotlivých typů přístroje (situace s vyšší poruchovostí a vyšším počtem pozorování)

	reklamace	bez závad	celkem
typ A	400	1 600	2 000
typ B	100	900	1 000
celkem	500	2 500	3 000

Otázka, kterou si ve všech třech výše uvedených situacích klademe, je stejná: „Může být pozorovaná rozdílnost v poruchovosti dvou typů přístroje náhodná, nebo jde o obecné pravidlo?“ Statistika dává „návod“, jak tuto otázku zodpovědět.

Od označení k hypotéze

U žádného z přístrojů nevíme předem, zda bude reklamován či nikoliv. Výskyt závady tedy lze považovat za *náhodný jev*. Míru poruchovosti přístrojů můžeme vyjádřit pomocí pravděpodobnosti výskytu závady. Budeme ji značit P(Z). Je-li například P(Z) = 0,1, znamená to, že k závadě dojde u přibližně 10 % výrobků. Poruchovost může záviset na typu výrobku. Označme proto P(Z|A) pravděpodobnost výskytu závady u výrobků typu A a P(Z|B) pravděpodobnost výskytu závady u výrobků typu B.

Zajímá nás, zda je *obecně* pravděpodobnost výskytu závady u výrobků typu A stejná jako u výrobků typu B, tedy zda platí

$$\mathrm{P}(\mathrm{Z}|\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{Z}|\mathrm{B}). \tag{1}$$

V takovém případě pravděpodobnost výskytu závady *nezávisí* na typu výrobku.

Naprosto zásadní je uvědomit si, že pravděpodobnosti P(Z|A) a P(Z|B) *neznáme*. Máme k dispozici pouze jejich odhady učiněné na základě našich pozorování, a to

P(Z|A) odhadneme hodnotou $4/200 = 0{,}02$,

P(Z|B) odhadneme hodnotou $1/100 = 0{,}01$.

To, že se mezi 200 již prodanými výrobky typu A vyskytly 4 závady totiž neznamená, že se v dalších 200 prodaných výrobcích typu A opět vyskytnou přesně 4 závady. Očekáváme sice, že by jich mohlo být kolem čtyř, ale mírně větší či menší počet je jistě možný také.

Otázka, zda je pozorovaná rozdílnost v poruchovosti dvou typů přístroje náhodná, nebo jde o obecné pravidlo, je vlastně otázkou, zda platí rovnost (1). Skutečnost, že platí rovnost (1), je nějaká *hypotéza*, konkrétně jde o *hypotézu nezávislosti* poruchovosti a typu výrobku. Ta může a nemusí být pravdivá. O její pravdivosti chceme rozhodnout na základě námi učiněných pozorování. Konfrontace hypotézy (rovnost (1)) s daty (tabulka 1) je příkladem jednoho z hlavních úkolů statistiky – *testování hypotéz*.

Trocha počítání (od otázek k odpovědím)

Uvažujme situaci, uvedenou na začátku, tedy celkem 5 reklamací u celkem 300 přístrojů, z nichž 2/3 jsou typu A a 1/3 typu B. Pokud by hypotéza platila, očekávali bychom, že stejné zastoupení (tj. 2/3 a 1/3) jednotlivých typů bude i mezi reklamovanými, avšak 2/3 z 5 nejsou celé číslo. Tři reklamace u typu A a dvě u typu B je tedy možnost blízká našim očekáváním vycházejícím z předpokladu nezávislosti. Drobná kolísání jsou však jistě díky náhodě možná.

Označme symbolem X počet reklamací u typu A. Při celkovém počtu pět reklamací může nastat jen jedna ze šesti následujících možností: $X = 0$ (pokud všech pět reklamací je u typu B), $X = 1$, $X = 2$, $X = 3$, $X = 4$, nebo $X = 5$ (pokud všech pět reklamací je u typu A). Tyto možnosti však *nejsou stejně pravděpodobné*. Již jsme si ukázali, že pokud platí hypotéza nezávislosti, bude s velkou pravděpodobností hodnota X blízká 3.

Výpočet pravděpodobností jednotlivých možností je dán vzorcem

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{\binom{200}{k}\binom{100}{5-k}}{\binom{300}{5}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 5. \tag{2}$$

Ve jmenovateli je počet všech možností, které z 300 přístrojů mohou být těmi pěti reklamovanými. Tyto možnosti jsou za platnosti hypotézy stejně pravděpodobné. V čitateli jsou započteny už jen možnosti, kdy nastane jev $X = k$. Je celkem $\binom{200}{k}$ možných k-tic pokažených přístrojů typu A a ke každé k-tici existuje $\binom{100}{5-k}$ možných $(5 - k)$-tic pokažených přístrojů typu B.

Po dosazení hodnot $k = 0, \ldots, 5$ do vzorce (2) dostaneme pravděpodobnosti shrnuté v tabulce 4.

Tabulka 4 Pravděpodobnosti vypočtené podle vzorce (2)

k	0	1	2	3	4	5
$\mathrm{P}(X = k)$	0,004	0,040	0,164	0,332	0,330	0,129

Je-li alternativou k naší hypotéze možnost, že přístroje typu A jsou poruchovější, tj. $\mathrm{P}(Z|A) > \mathrm{P}(Z|B)$, svědčí ve prospěch této alternativy vysoké hodnoty X.

Stále předpokládáme, že platí hypotéza nezávislosti. Předpokládanou hypotézu nazýváme nulovou. Položme si nyní otázku, nakolik „extrémním“ výsledkem (svědčícím ve prospěch alternativy) je za tohoto předpokladu naše pozorování $X = 4$. Tedy, s jakou pravděpodobností dojde k tomu, že z pěti porouchaných přístrojů budou čtyři nebo více typu A. Vypočteme proto

$$\mathrm{P}(X \geq 4) = \mathrm{P}(X = 4) + \mathrm{P}(X = 5) \doteq 0{,}330 + 0{,}129 = 0{,}459.$$

Čtyři nebo více poruch je tedy poměrně očekávaný výsledek (cca 46 %), i když hypotéza platí. Poznamenejme, že jsme se právě seznámili s tzv. *Fisherovým faktoriálovým testem.* Hodnotě pravděpodobnosti, kterou jsme vyčíslili na 0,459 se říká *p-hodnota* (anglicky *p-value*).

Kdyby byla p-hodnota příliš nízká, např. 0,001, odmítli bychom hypotéze nadále věřit, tj. řekli bychom, že *hypotézu nezávislosti zamítáme.* Uvědomme si, že se může stát, že zamítneme i platnou hypotézu. Například výše uvedená pravděpodobnost 0,001 je sice malá, za platnosti nulové hypotézy však asi v jednom z tisíce případů takový výsledek nastane a my hypotézu zamítneme nesprávně.

Statistici tedy vědí, že se při zamítnutí (ale i případném nezamítnutí) hypotézy mohou dopustit chyby. Vědí ale, že k tomu dojde jen s malou pravděpodobností. Dokonce mohou tuto pravděpodobnost kontrolovat, a to volbou parametru α v následujícím rozhodovacím pravidle: Je-li

p-hodnota $\leq \alpha$, pak zamítáme hypotézu,

p-hodnota $> \alpha$, pak nezamítáme hypotézu.

Pravděpodobnost chybného zamítnutí hypotézy, která platí, je pak nejvýše α. Hodnotu tohoto parametru sami dopředu zvolíme. Obvykle se volí $\alpha = 0{,}05$, tj. připouštíme 5% pravděpodobnost zamítnutí platné hypotézy. Parametru α se říká *hladina testu.*

Vraťme se ještě k tabulkám 2 a 3. Pro tabulku 2 je p-hodnota 0,019. Pro tabulku 3 pak vyjde p-hodnota řádově 10^{-13}. V obou případech je tedy p-hodnota menší než obvyklá hodnota $\alpha = 0{,}05$. Znamená to, že v situacích popsaných v tabulkách 2 a 3 zamítáme hypotézu nezávislosti na hladině 5 %. Zatímco v situaci popsané v úvodu (tabulka 1) rozdíl v poruchovosti není statisticky významný, v obou dalších situacích už naše pozorování poskytují dost silný argument k tomu, abychom mohli tvrdit, že typ A je obecně poruchovější než typ B.

Příklady z oblasti psychologie a medicíny

V předešlé části jsme se seznámili s jednou statistickou technikou – Fisherovým faktoriálovým testem nezávislosti. Nyní si ukážeme dvě situace, v nichž je možné tento test využít.

Příklad z oblasti psychologie

Daniel Kahneman představuje v knize *Myšlení rychlé a pomalé* [2] svůj pohled na to, jak se generují intuitivní názory na složité záležitosti. Tvrdí, že pokud naše intuice nenajde na nějakou obtížnější otázku rychle uspokojivou odpověď, vyhledá související otázku, která je snazší, a na tu pak odpoví. Tento fenomén nazývá *substitucí*.

Kahneman cituje německou studii, jejímiž účastníky byli studenti, kteří měli odpovídat na dvě otázky:

- Jak jste v poslední době spokojeni?
- Kolikrát jste byli za poslední měsíc na rande?

Realizátoři studie chtěli zjistit, zda odpovědi na tyto otázky spolu souvisejí. Zjistili však (poměrně překvapivě), že nikoliv. Evidentně studentům při otázce na jejich spokojenost nepřišly schůzky na mysl. Jiné skupině byly položeny tytéž otázky, ale v opačném pořadí:

- Kolikrát jste byli za poslední měsíc na rande?
- Jak jste v poslední době spokojeni?

Výsledky byly zcela odlišné. Zjistila se úzká vazba mezi mírou spokojenosti a počtem schůzek.

Kahneman tyto výsledky vysvětluje tím, že zde šlo o substituci:

> *Randění zjevně nepředstavovalo ústřední prvek života těchto studentů . . . , ale když byli nejprve dotázáni na milostný život, vyvolalo to v nich určitou emoční reakci. Studenti, kteří měli hodně schůzek, si připomněli tento šťastný aspekt svého života, zatímco těm, kteří schůzky neměli, to připomenulo jejich osamělost nebo nepříjemné zkušenosti s odmítnutím. Emoce vzbuzené otázkou na schůzky ještě měli všichni v mysli, když odpovídali na další otázku o své celkové spokojenosti.*

Pojďme se nyní podívat, jak mohla tato studie vypadat. Zjednodušíme odpovědi studentů ohledně spokojenosti na *spokojen* a *nespokojen*, a ohledně schůzek na *měl* a *neměl*.

Tabulka s četnostmi jednotlivých kombinací pro skupinu, která nejprve odpovídala na otázku týkající se štěstí, by mohla vypadat jako tabulka 5. Tabulka 6 pak udává četnosti jednotlivých kombinací odpovědí pro skupinu, která nejprve odpovídala na otázku týkající se schůzek.

Jestliže použijeme dříve uvedený Fisherův test nezávislosti, dospějeme k p-hodnotě 0,253 pro skupinu 1 a 0,001 pro skupinu 2. Zatímco v prvním případě tedy hypotézu nezávislosti nemůžeme zamítnout, u druhé skupiny je významně vyšší zastoupení šťastných ve skupině těch, kteří měli schůzku, oproti skupině těch, kteří schůzku neměli.

Tabulka 5 Počty studentů podle jejich odpovědí týkajících se štěstí a schůzek – skupina 1

	šťastný	nešťastný	celkem
měl schůzku	20	40	60
neměl schůzku	10	30	40
celkem	30	70	100

Tabulka 6 Počty studentů podle jejich odpovědí týkajících se štěstí a schůzek – skupina 2

	šťastný	nešťastný	celkem
měl schůzku	25	35	60
neměl schůzku	5	35	40
celkem	30	70	100

Příklad z oblasti medicíny

Přišel vám předešlý výsledek zajímavý? Následující příklad bude nejen zajímavý, ale výsledek zde zjištěný je i velice důležitý.

Výzkumníci z Ústavu hematologie a krevní transfuze v Praze ve spolupráci s několika dalšími pracovišti sbírají a analyzují data týkající se zhoubných nádorů hlavy a krku. Podařilo se jim ukázat, že pacienti, kteří mají virový původ zhoubného nádoru (jde o tzv. papilomaviry) mají významně lepší prognózu přežití. V tabulce 7 jsou pacienti rozděleni jednak podle HPV pozitivity[1] (tj. pozitivní pacienti mají papilomavirový původ nádoru) a jednak podle toho, zda přežili tři roky od diagnózy.

Tabulka 7 Počty pacientů podle přežití doby 3 let od diagnózy a podle HPV pozitivity.

	přežil	zemřel	celkem
HPV pozit.	66	17	83
HPV negat.	45	63	108
celkem	111	80	181

Test nezávislosti hovoří jasně: p-hodnota $= 9 \cdot 10^{-8} < 0{,}05$. Pacienti s virovým původem nádoru mají významně vyšší pravděpodobnost přežití

[1]Zkratka HPV pochází z anglického označení human papilloma virus.

doby tří let od diagnózy. V analýze této datové sady samozřejmě musí statistik zohlednit i další důležité faktory, které mají či mohou mít vliv na délku přežití pacienta, jako jsou například věk, pohlaví nebo, zda jde o kuřáka či nekuřáka.

Výzkumnou zprávu shrnující zjištěné výsledky se podařilo publikovat v prestižním časopise *International Journal of Cancer* [3]. Předmětem dalšího zkoumání je, zda pacienti HPV pozitivní reagují jinak na různé typy léčby než pacienti HPV negativní. Taková skutečnost by mohla výrazně napomoci v rozhodování o způsobu terapie.

Literatura

[1] *Calda, E. – Dupač, V.*: Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika. Prometheus, Praha, 2006.

[2] *Kahneman, D.*: Myšlení rychlé a pomalé. Jan Melvil Publishing, Brno, 2012.

[3] *Vojtěchová, Z. a kol.*: Analysis of the integration of human papillomaviruses in head and neck tumours in relation to patients' prognosis. International Journal of Cancer, roč. 138 (2016), č. 2, s. 386–395.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 227 a 228 můžete zaslat nejpozději do 20. 11. 2016 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v TEXovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 227

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC, pro jehož odvěsny platí nerovnost $|AC| > |BC|$. Nechť D je průsečík osy vnitřního úhlu při vrcholu C s přeponou AB a E, F nechť značí po řadě středy kružnic opsaných trojúhelníkům BDC, ADC. Dokažte, že průsečík P osy vnitřního úhlu při vrcholu A a přímky EF je středem kružnice vepsané trojúhelníku CDE.

Jaroslav Švrček & Waldemar Pompe (*Warszawa*)

Úloha 228

Najděte všechna čtyřmístná čísla $\overline{abcd}$ $(ac \neq 0)$, pro něž jsou

$$\overline{ab}+\overline{cd}, \quad \overline{ab}-\overline{cd}, \quad (\overline{ab}+\overline{cd})/(\overline{ab}-\overline{cd}) \quad \text{a} \quad a+b+c+d$$

druhými mocninami některých přirozených čísel.

Radek Horenský

Dále uvádíme řešení úloh 223 a 224, jejichž zadání byla zveřejněna ve druhém čísle aktuálního ročníku našeho časopisu.

Úloha 223

V krabici bez víka s výškou 1 a s půdorysným rozměrem $m \times n$ (m, n jsou přirozená čísla) bylo uloženo mn dřevěných kostek (jednotkových krychlí). Nina si chtěla s kostkami hrát, když však otočila krabici krabici dnem vzhůru, žádné kostky z ní nevypadly, protože byly v krabici „natěsno“ a pevně je držely stěny krabice. Nina poté vytáhla z krabice několik kostek. Když opět krabici otočila, s překvapením zjistila, že z ní opět žádné kostky nevypadly, protože každá kostka v krabici byla v některém řádku nebo sloupci, ve kterém žádná kostka nechyběla a stěny krabice tento řádek nebo sloupec stále udržely. Určete, kolika způsoby mohla Nina takto kostky z krabice vytáhnout.

Peter Novotný

Řešení. Ke každému výběru kostek ze zadání existuje (jednoznačně) množina sloupců a řádků, které zůstaly „natěsno“ (neporušené). Naopak ke každému výběru sloupců a řádků, které mají zůstat neporušené, existuje (kromě výběru všech sloupců (resp. řádků), kdy musí zůstat neporušené i všechny řádky (sloupce)) jednoznačný výběr kostek, které musí Nina vytáhnout, aby právě vybrané řádky a sloupce zůstaly neporušené (průnik porušených řádků s porušenými sloupci). Počet všech možností, jak vybrat aspoň jeden porušený řádek a sloupec, je

$$(2^m - 1)(2^n - 1).$$

K tomu ještě přidáme možnost, že neporušené zůstanou všechny sloupce a řádky. Celkový počet možností, jak může Nina vytáhnout kostky, je tedy roven

$$(2^m - 1)(2^n - 1) + 1.$$

Poznámka. Přestože se někteří řešitelé dopustili chyb, když neuvažovali (přípustné) možnosti, že Nina z krabice nevytáhne ani jednu kostku (0 je také považována za několik čísel), popř., že vytáhne všechny kostky (v krabici nezůstane ani jedna kostka, je proto tvrzení o vlastnosti kostek v krabici pravdivé), jejich řešení redakce uznala za správná.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Martin Raszyk* z ETH Zürich. Neúplné řešení zaslal *Anton Hnáth* z Moravan.

Úloha 224

Najděte všechna přirozená čísla k, pro která existují celá čísla a, b, c taková, že $a + b + c = 0$ a současně $|ab|$, $|bc|$, $|ca|$ jsou k-té mocniny přirozených čísel.

Patrik Bak

Řešení. Podle zadání existují přirozená čísla x, y a z taková, že platí

$$|a| \cdot |b| = z^k, \qquad |a| \cdot |c| = y^k, \qquad |b| \cdot |c| = x^k.$$

Řešením této soustavy s neznámými $|a|$, $|b|$, $|c|$ dostaneme

$$|a| = \left(\frac{yz}{x}\right)^{\frac{k}{2}}, \qquad |b| = \left(\frac{xz}{y}\right)^{\frac{k}{2}}, \qquad |c| = \left(\frac{xy}{z}\right)^{\frac{k}{2}}.$$

Protože x, y, z jsou přirozená čísla, zřejmě platí $a, b, c \neq 0$. Odtud a z $a + b + c = 0$ zřejmě plyne, že, dvě z čísel mají stejná znaménka a třetí má znaménko opačné. Navíc pro vyhovující trojici (a, b, c) úloze (pro stejné k) vyhovuje i trojice $(-a, -b, -c)$. Bez újmy na obecnosti tak předpokládejme, že $a > 0$, $b > 0$ a $c < 0$. Potom dosazením do $a + b + c = 0$ dostaneme

$$\left(\frac{yz}{x}\right)^{\frac{k}{2}} + \left(\frac{xz}{y}\right)^{\frac{k}{2}} = \left(\frac{xy}{z}\right)^{\frac{k}{2}},$$

což po vynásobení kladným číslem $(xyz)^{\frac{k}{2}}$ dává

$$(yz)^k + (xz)^k = (xy)^k.$$

Užitím Velké Fermatovy věty tato rovnice nemá řešení v oboru přirozených čísel pro $k \geq 3$. Pro $k \in \{1; 2\}$ stačí volit $a = 9$, $b = 16$ a $c = -25$.

Závěr. Úloze vyhovují dvě přirozená čísla, a to $k = 1$ a $k = 2$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

Pavel Calábek

FYZIKA

Síly působící na matematické kyvadlo na 7 + 1 způsob

VOJTĚCH ŽÁK

Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze

Úvod

Kyvadlo patří k tématům, se kterými se můžeme setkat ve výuce fyziky jak na základních, tak středních školách, a to přesto, že v obecných kurikulárních dokumentech – rámcových vzdělávacích programech [1] a [2] explicitně kyvadlo v rámci učiva uvedeno není. Na druhou stranu v učebnicích fyziky kyvadlo tematizováno bývá (kromě současných českých učebnic také např. v jedné z nejstarších česky psaných učebnic [3, s. 68–71]. Zvláštní pozornost bývá věnována tzv. matematickému kyvadlu, tj. hmotnému bodu upevněnému na konci tuhého vlákna, které má konstantní délku a zanedbatelnou hmotnost, a na které nepůsobí žádné disipativní síly, např. [4, s. 104].[1]

Přestože je matematické kyvadlo tématem tradičním a fyzikou jako vědou dostatečně podrobně zvládnutým, objevují se různé zkreslené představy o něm a jeho pohybu. Typická chybná představa o silách působících na kuličku zavěšenou na niti je uvedena v [5, s. 19 a 81]. Ukázalo se, že mnozí čeští studenti dokončující studium učitelství fyziky měli chybnou představu spočívající v tom, že při průchodu rovnovážnou polohou působí na kuličku nenulová síla ve směru tečny k příslušné kružnicové trajektorii [5, s. 19].[2] V českém prostředí je na problémy s úvahou o silách působících

[1] V charakteristice by se dalo pokračovat dále, např. kyvadlo se pohybuje v homogenním tíhovém poli a s počáteční nulovou rychlostí.

[2] Tento výzkum byl proveden v 80. letech 20. století.

na závaží matematického kyvadla upozorněno také např. v [6, s. 346], kde je uveden mimo jiné neadekvátní silový diagram objevující se v učebnicích fyziky.[3]

Vzhledem k tomu, že matematické kyvadlo je stále v kurikulu české střední školy tematizováno a přitom existují poznatky, že problematické momenty vztahující se k silám působícím na závaží kyvadla se objevují jak u studentů, tak u jejich učitelů a také zřejmě v učebnicích fyziky, vznikla tato studie. Jejím cílem je:

- podat přehled diagramů sil působících na závaží matematického kyvadla a diskutovat jejich adekvátnost;
- navrhnout silový diagram, který je adekvátní.

Studie má tedy dvě části – výzkumnou a vývojovou. K první z nich se vztahuje následující výzkumná otázka: *Které síly, jakého směru a jaké relativní velikosti jsou v českých učebnicích (a obdobných textech) zobrazovány v silovém diagramu závaží matematického kyvadla?*

Studie je určena zejména učitelům fyziky na středních školách, kteří do své výuky zařazují matematické kyvadlo (dále jen: kyvadlo). Je také cílena na žáky středních škol a to jak zprostředkovaně přes jejich učitele fyziky, tak přímo, zejména v případě žáků usilujících proniknout hlouběji do dynamiky hmotného bodu. Tento text (spolu s obrázky) má ambici být alternativou k úvahám o silách působících na závaží kyvadla, které jsou prezentovány v česky psaných učebnicových textech. Text je členěn tak, že v kapitole *Metodologie* je uvedeno, které učebnice a jakým způsobem byly analyzovány, a ve *Výsledcích analýzy* jsou stručně prezentovány jednotlivé silové diagramy (jejich typy a varianty) a to včetně obrázků. Následná *Diskuze*, která se zabývá (ne)adekvátnostmi v identifikovaných silových diagramech, vyúsťuje v *Návrh silového diagramu*, který má být adekvátní alternativou k diagramům zjištěným při analýze.

Metodologie

Jako metoda sběru dat byla použita analýza tištěných učebnic a dalších textů obdobného charakteru.[4] Analyzovány byly učebnice a další texty,

[3]Také v mezinárodním prostředí se objevují články týkající se problémů s matematickým kyvadlem ve výuce. Např. byla identifikována častá miskoncepce, že normálová složka tíhové síly se vyruší tahovou silou vlákna [7, s. 977]. Výzkumných nálezů v mezinárodním prostředí je pochopitelně více a vydaly by zřejmě na samostatnou studii.

[4]Elektronické texty do analýzy zahrnuty nebyly, ačkoliv je zřejmé, že jsou díky dostupnosti často využívány jak žáky, tak učiteli.

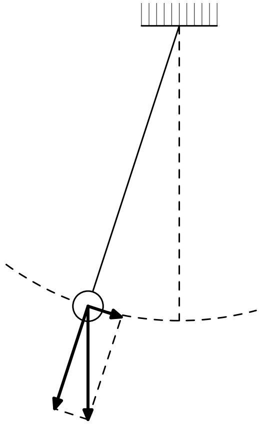
u kterých je pravděpodobné, že je žáci a učitelé využívají při přípravě na výuku fyziky. Jedná se v první řadě o současné české středoškolské učebnice fyziky – osmidílnou učebnici pro gymnázia (konkrétně díl *Mechanické kmitání a vlnění* [8], resp. dřívější vydání [9], dvojdílnou učebnici pro SŠ (její první díl [10]), jednodílnou učebnici pro netechnické obory [11] a dále *Přehled středoškolské fyziky* [12], resp. [13, 14]. Dále byla analyzována kniha, která je v současné době k dispozici speciálně učitelům k přípravě jejich výuky, *Příručka pro učitele fyziky na střední škole* [15]. Do analýzy byly zahrnuty ale i další dostupné a využívané zdroje, jednak české vydání známé zahraniční vysokoškolské učebnice fyziky autorů Hallidaye, Resnicka, Walkera [16], resp. [17], jednak starší učebnice [18, 19] a texty určené spíše k rychlému opakování [20, 21]. Domníváme se, že tyto učebnice představují široký výběr tištěných zdrojů obsahu středoškolské fyziky, které jsou v současné době k dispozici, a tudíž považujeme výběr učebnic a jim podobných textů za reprezentativní. Analýza se zaměřila speciálně na silové diagramy znázorňující matematické kyvadlo. Hlavní pozornost byla věnována tomu, které síly a jakým způsobem (směr a relativní velikost) jsou v nich zobrazeny. Protože bylo zkoumáno zejména to, které různé silové diagramy se v učebnicích objevují, zatímco otázka, jak často se v učebnicích různé silové diagramy objevují, řešena nebyla, můžeme tuto analýzu označit jako kvalitativní výzkum. Další postup, který následuje po analýze silových diagramů, byl již uveden na konci předchozí, úvodní, části.

Výsledky analýzy

V následujícím přehledu uvádíme různé silové diagramy, které byly v analyzovaných textech v tématu matematické kyvadlo identifikovány. Podobné diagramy byly sdruženy do několika typů, příp. jejich variant. Silové diagramy na uvedených obrázcích reprezentují jednotlivé typy, nejsou ale přesnými kopiemi diagramů v jednotlivých učebnicích; ukazují jen jejich důležité charakteristiky. V níže uvedeném přehledu jsou diagramy řazeny od jednodušších ke komplexnějším. Jejich podrobnější diskuze je pak uvedena v následující kapitole.

Tíhová síla a její složky

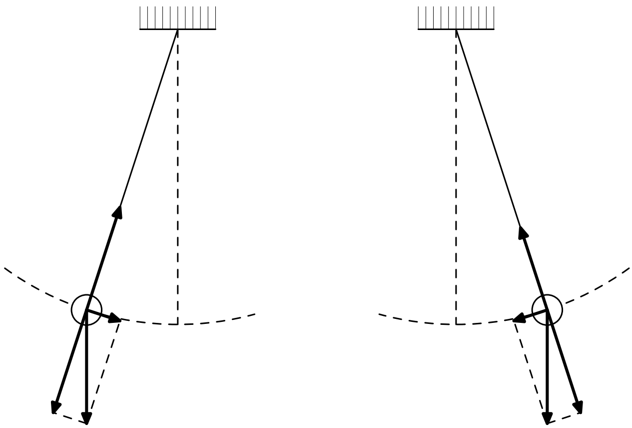
Diagram sil působících na závaží matematického kyvadla, kde je zobrazena tíhová síla a její dvě složky – jedna působící ve směru vlákna (radiální neboli normálová složka) a druhá, která je k první složce kolmá (tedy je tečná k trajektorii), se objevuje v několika českých učebnicích [14, s. 205], [9, s. 32], [19, s. 129]; obr. 1.



Obr. 1

Tíhová síla, její složky a síla vlákna

Diagram, kde na rozdíl od předchozího případu vystupuje tahová síla přenášená vláknem (dále: síla vlákna), je uveden v učebnici [17, s. 418] a [20, s. 95], kde síla vlákna má stejnou velikost jako radiální složka tíhové síly (obr. 2a), a v novějším vydání [16, s. 412], kde je tato síla znázorněna jako menší než radiální složka tíhové síly (obr. 2b).

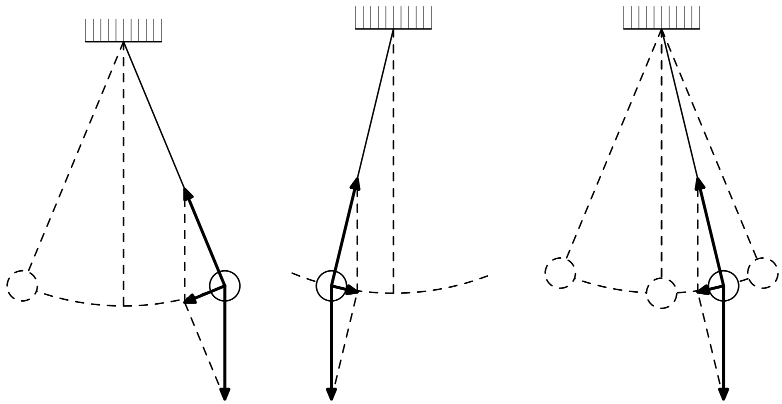


Obr. 2a Obr. 2b

Tíhová síla, síla vlákna a jejich výslednice

V česky psaných učebnicích se také objevují silové digramy, kde je znázorněna tíhová síla (bez složek), síla vlákna a jejich výslednice, která je tečná k trajektorii závaží. Tento typ silového diagramu se vyskytuje v podstatě ve třech variantách.

V první variantě (obr. 3a) se zdá, že je kyvadlo zakresleno v krajní poloze – [10, s. 123], [15, s. 153], [12, s. 230]. Ve druhé variantě (obr. 3b) je znázorněno matematické kyvadlo v poloze, u které není zřejmé, zda je, nebo není krajní – [11, s. 58]. Ve třetí variantě (obr. 3c) je kyvadlo zřetelně zakresleno mimo krajní polohu; je v obecné poloze – [13, s. 209], [8, s. 34].

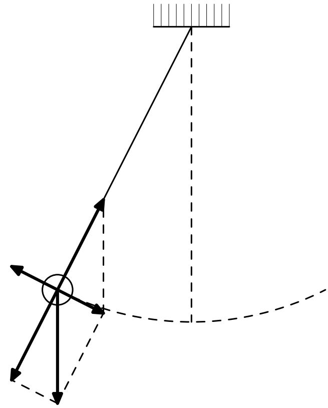


Obr. 3a Obr. 3b Obr. 3c

Ani tento výčet ovšem není úplný. Např. v knize [21, s. 78] je uveden silový diagram s tíhovou silou, silou vlákna, dále je zkonstruována jejich výslednice, nicméně tato výslednice je interpretována jako složka tíhové síly. V učebnici [18, s. 275–276] je uveden a znázorněn ještě jiný přístup (obr. 4); je zde silový diagram znázorňující závaží kyvadla v krajní poloze v klidu (tedy s nulovou výslednou silou) – oproti jiným diagramům je tu navíc znázorněna síla, kterou „kuličku vychýlíme do vzdálenosti y od rovnovážné polohy“ [18, s. 276].

Diskuze

Je pozoruhodné, že diagram sil působících na závaží matematického kyvadla se v česky psaných učebnicích (a dalších učebnicových textech) objevuje (minimálně) v sedmi odlišných podobách. Postupně je projdeme v pořadí, jak byly uvedeny v předchozí kapitole, a prodiskutujeme je z didakticko-fyzikálního hlediska.



Obr. 4

V silových diagramech, kde je znázorněna tíhová síla a její složky (radiální a tečná), je zobrazena podstatná síla, která je třeba v úvaze o periodě kyvadla při malých výchylkách – tečná, v případě malých úhlů navíc téměř vodorovná síla. Na druhou stranu je zřejmé, že tento silový diagram není kompletní. Pod vlivem zobrazených sil by se totiž závaží nepohybovalo po části kružnice. U zvídavějších studentů může tento silový diagram otázku, proč v něm nejsou zobrazeny všechny síly působící na závaží kyvadla, oprávněně vyvolat.

Komplexnější přístup nabízí druhý typ silového diagramu, kde je oproti předcházejícímu znázorněna ještě navíc síla, která působí prostřednictvím vlákna na závaží kyvadla. Při doplnění síly vlákna do diagramu s tíhovou silou a jejími složkami vzniká ovšem otázka, jakou velikost vůči těmto silám má síla vlákna mít. Autoři učebnic na ni odpovídají různě. V učebnici [20, s. 95] a [17, s. 418] má síla vlákna stejnou velikost jako radiální složka tíhové síly, naproti tomu v novějším vydání téže učebnice [16, s. 412] je relativní velikost síly vlákna menší.[5] Velikosti sil, které na závaží kyvadla působí, můžeme sice považovat za ne zcela zásadní záležitost, nicméně pokud si někdo ze žáků položí otázku, jaký směr má výslednice zobrazených sil,[6] můžeme dojít k zajímavému závěru. V prvním uvedeném případě má

[5] Dodejme, že rozdíl ve velikosti sil (jejich zobrazení) je měřitelný běžným pravítkem, takže by nebylo vhodné ho jednoduše odbýt.

[6] Jako učitelé bychom měli být rádi, pokud si někdo ze žáků tuto otázku položí.

výslednice sil směr tečny ke kružnicovému oblouku, po kterém se závaží pohybuje, což je (jak budeme diskutovat dále) ve speciálním případě realistické. Pokud je ale síla vlákna menší než radiální složka tíhové síly, bude výslednice mířit směrem „ven z příslušné kružnice“, což ve skutečnosti nemůže nastat. Jestliže se totiž závaží kyvadla pohybuje (nenulovou rychlostí) po dané kružnici, musí mít výsledná síla, která na něj působí, nenulovou dostředivou složku, která tedy míří do středu (nikoli od středu) kružnice.

V některých silových diagramech je znázorněna tíhová síla, síla vlákna a dále jejich výslednice, která má ve všech těchto identifikovaných případech směr tečny k trajektorii závaží. Pokud je ze silového diagramu zřejmé, že je závaží znázorněno v krajní poloze (kde má nulovou rychlost), pak můžeme takové znázornění pokládat za adekvátní. V tomto případě je totiž dostředivá síla, přesněji řečeno dostředivá složka výsledné síly, nulová (díky nulové rychlosti), a výslednice má tedy směr tečny k trajektorii. Silové diagramy, které budí dojem, že závaží není v krajní poloze, příp. je z nich zcela zřejmé, že je závaží zachyceno v obecné poloze, musíme považovat za fyzikálně neadekvátní. Výslednice v tomto případě nemá směr tečny k trajektorii. Při průchodu rovnovážnou polohou je výsledná síla dokonce silou „čistě“ dostředivou.

Návrh silového diagramu

Pokud jsme během analýzy silových diagramů v učebnicích identifikovali určité problematické momenty, považujeme za konstruktivní uvést vlastní návrh, jak silový diagram znázornit a diskutovat. Vytvoření silového diagramu by mělo podle našeho názoru sledovat jasnou myšlenku, která bude objasňovat jeho postupný vznik (ačkoliv výsledkem v tištěné knize je statický obrázek).

Hlavním problémem nalezených silových diagramů je fakt, že nedávají uspokojivou odpověď na otázku, jaká je (zejména jaký směr má) výslednice sil. V některých případech je sice výslednice zakreslena, ale správně pouze pro závaží v krajní poloze. Tento moment budeme brát jako výchozí při tvorbě diagramu a tím se vyhneme situaci, kdy by po složení jednotlivých sil vznikla nerealistická výslednice. Navrhujeme, aby konstrukce (náčrtek) silového diagramu probíhala tímto způsobem: *Na základě vlastností pohybu závaží kyvadla bude určen (alespoň kvalitativně) směr celkového zrychlení*

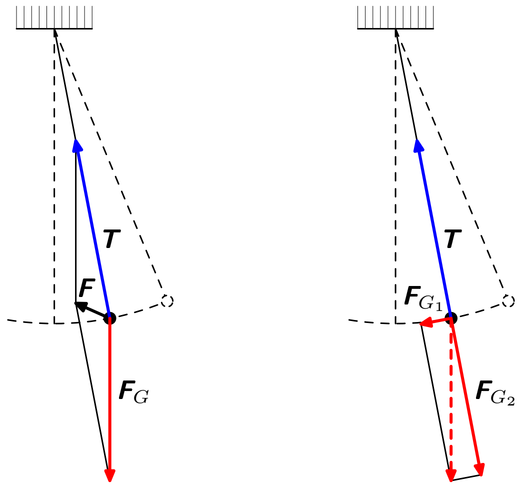
Vzpomeňme si, kolik času mnozí z nás skládání a rozkládání sil ve výuce fyziky věnují.

a podle 2. Newtonova pohybového zákona také směr výsledné síly. Ta bude následně rozložena do složek, které odpovídají působení okolních těles na závaží.

Je jasné, že se závaží kyvadla po vychýlení do krajní polohy a uvolnění z ní (počáteční rychlost je nulová) pohybuje po části kružnice. Závaží kyvadla má tedy ve všech bodech svojí trajektorie nenulové dostředivé (normálové) zrychlení (kromě krajních poloh, kdy má nulovou rychlost).

Dále je zřejmé, že se velikost rychlosti závaží při pohybu z krajní polohy do rovnovážné polohy zvětšuje a z rovnovážné polohy do druhé krajní polohy se symetricky velikost rychlosti zmenšuje. Závaží má tedy nenulové zrychlení ve směru pohybu (tj. tečné zrychlení), a to s výjimkou rovnovážné polohy, kde dosahuje rychlost maximální velikosti.

Celkové zrychlení závaží je tedy v obecné poloze (mimo krajní polohy a rovnovážnou polohu) tvořeno nenulovým tečným a nenulovým dostředivým zrychlením, tj. má směr „šikmo do vnitřní oblasti kružnice“. Stejný směr má podle 2. Newtonova pohybového zákona výsledná síla (označena $\boldsymbol{F}$ v obr. 5 vlevo).



Obr. 5

Nyní je vhodné položit si otázku, která tělesa na závaží kyvadla působí. Je zřejmé, že je to jednak Země, která působí na závaží prostřednictvím tíhového pole, a tudíž na závaží působí tíhová síla (označena $\boldsymbol{F}_G$ v obr. 5 vlevo). Závaží je ale zároveň připevněno na vlákně (niti, provázku apod.), tj. působí síla přenášená vláknem (označena $\boldsymbol{T}$; jedná se o tahovou sílu, kterou prostřednictvím vlákna na závaží působí bod úchytu, např. část stojanu, na kterém je kyvadlo upevněno). V souladu s těmito zjištěními rozložíme výslednici do svislého směru a do směru vlákna (zkonstruujeme příslušný rovnoběžník sil). Je zřejmé, že daná výslednice jde takto rozložit jednoznačným způsobem, tj. nevzniká diskuze (a případné dilema), jakou má mít síla přenášená vláknem velikost vůči tíhové síle apod.

Tíhovou sílu je dále vhodné rozložit do tečného a radiálního směru (složky $\boldsymbol{F}_{G_1}$ a $\boldsymbol{F}_{G_2}$ v obr. 5 vpravo). Pro další popis pohybu matematického kyvadla a zejména pro odvození vztahu pro jeho periodu má největší význam tečná složka tíhové síly, která je v případě kmitů s malou výchylkou téměř vodorovná a která bývá výstižně označována jako vratná síla [16, s. 412].[7]

Závěr

V česky psaných učebnicích a dalších textech, které žáci a učitelé k přípravě na výuku fyziky využívají, se objevuje několik různých diagramů sil působících na závaží matematického kyvadla. Na výzkumnou otázku uvedenou v úvodu je možné odpovědět tak, že v silových diagramech je vždy zobrazována tíhová síla, která je někdy rozložena do tečné a radiální složky. V některých případech bývá zobrazena navíc síla vlákna (stejně velká nebo menší než radiální složka tíhové síly). Byly identifikovány také ale diagramy, kde je zobrazena tíhová síla (bez složek), síla vlákna a jejich výslednice, která je zobrazena v tečném směru ke kružnicové trajektorii.

Je tedy zřejmé, že silové diagramy jsou buď neúplné (není znázorněna některá z působících sil) nebo jsou síly znázorněny disproporčně (některá síla má neadekvátní velikost vůči ostatním). Fyzikální neadekvátnosti se v některých učebnicových textech objevují i v dalších jejich vydáních. V některých případech se v různých vydáních téhož titulu objevují různé silové diagramy. Žádný z analyzovaných silových diagramů neznázorňuje výslednici sil působící na závaží kyvadla v obecné poloze. Přitom otázka, jaká je výslednice sil (zejména otázka jejího směru), je relevantní.

[7] Je samozřejmě možné jít v úvaze a diskuzi do větších podrobností a provést odvození vztahu pro souřadnice výslednice sil (což umožní určit směr výslednice přesně). Kromě vztahu pro dostředivou sílu a zákona zachování mechanické energie je třeba využít již jen poměrně jednoduchou trigonometrii. Souřadnice výslednice kromě hmotnosti závaží a velikosti tíhového zrychlení závisí na počáteční a okamžité úhlové výchylce kyvadla. Zájemci mohou výsledek a jeho odvození diskutovat s autorem tohoto článku.

V tomto článku jsme uvedli jiný způsob diskuze a zobrazení sil působících na závaží matematického kyvadla. Výchozím bodem je zde poznatek, že závaží se po uvolnění z krajní polohy pohybuje po části kružnice (než se omezíme na malé výchylky), a to s rostoucí velikostí rychlosti (než se dostane do rovnovážné polohy); má tedy v obecné poloze nenulové normálové (dostředivé) a nenulové tečné zrychlení. Z toho vyplývá, že výsledná síla působící na závaží v obecné poloze má nenulovou dostředivou a nenulovou tečnou složku, tj. „míří šikmo do vnitřní oblasti kružnice". Dále je možné přejít k pohybu při malých výchylkách a tečné síle, která je důležitá v odvození vztahu pro periodu matematického kyvadla.

Problematické z hlediska výuky na středních školách je, že zejména pojmu tečné zrychlení není věnována pozornost, s čímž souvisí, že diskuze pohybu po kružnici se zužuje na rovnoměrný pohyb. Je vůbec otázkou, zda rozbor sil působících na závaží matematického kyvadla do výuky fyziky na střední škole zařazovat. Tuto otázku nechme otevřenou a její odpověď přenechejme mimo jiné tvůrcům učebnic. Tento článek ovšem reaguje na situaci, že v učebnicích a obdobných textech silové diagramy matematického kyvadla bývají uvedeny, a snaží se učitelům a žákům zprostředkovat ucelenější pohled na tento problém. Nakonec uveďme, že nepovažujeme za vhodné na základě zobrazení jednoho určitého silového diagramu (a jeho případné neadekvátnosti) usuzovat na kvalitu příslušných učebnic (a dalších textů) jako celku.

Literatura

[1] RVP ZV. Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (verze platná od 1. 9. 2013). MŠMT, Praha, 2013.

[2] RVP G. Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. Výzkumný ústav pedagogický v Praze, Praha, 2007.

[3] *Smetana, F. J.*: Počátkové silozpytu čili fysiky pro nižší gymnasia a reálky. Kněhkupectví J. G. Calve, Praha, 1852.

[4] *Mechlová, E., Košťál, K. a kol.*: Výkladový slovník fyziky pro základní vysokoškolský kurz. Prometheus, Praha, 1999.

[5] *Mandíková, D., Trna, J.*: Žákovské prekoncepce ve výuce fyziky. Paido, Brno, 2011.

[6] *Musilová, J.*: Fyzikální omyly ve výuce mechaniky. Československý časopis pro fyziku, roč. 62 (2012), č. 5–6, s. 346–357.

[7] *Campanario, J. M.*: Using textbook errors to teach physics: examples of specific activities. European Journal of Physics, roč. 27 (2006), s. 975–981.

[8] *Lepil, O.*: Fyzika pro gymnázia: Mechanické kmitání a vlnění (dotisk 4. vyd.). Prometheus, Praha, 2001.

[9] *Lepil, O.*: Fyzika pro gymnázia: Mechanické kmitání a vlnění. Prometheus, Praha, 1994.
[10] *Lepil, O., Bednařík, M., Hýblová, R.*: Fyzika pro střední školy I (5. přeprac. vyd.). Prometheus, Praha, 2014.
[11] *Štoll, I.*: Fyzika pro netechnické obory SOŠ a SOU. Prometheus, Praha, 2001.
[12] *Svoboda, E., Bartuška, K., Bednařík, M., Lepil, O., Široká, M.*: Přehled středoškolské fyziky (5. přeprac. vyd.). Prometheus, Praha, 2014.
[13] *Svoboda, E., Bartuška, K., Bednařík, M., Lepil, O., Široká, M.*: Přehled středoškolské fyziky (4. uprav. vyd.). Prometheus, Praha, 2006.
[14] *Svoboda, E., Bartuška, K., Bednařík, M., Lepil, O., Široká, M.*: Přehled středoškolské fyziky (3. vyd.). Prometheus, Praha, 1998.
[15] *Lepil, O., Svoboda, E.*: Příručka pro učitele fyziky na střední škole. Prometheus, Praha, 2007.
[16] *Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.*: Fyzika 1 (2. přeprac. vyd.). VUTIUM, Brno, 2013.
[17] *Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.*: Fyzika. Vysokoškolská učebnice obecné fyziky. Část 2: Mechanika – Termodynamika. VUTIUM, Brno & Prometheus, Praha, 2000.
[18] *Lepil, O., Houdek, V., Pecho, A.*: Fyzika pro III. ročník gymnázií (1. vyd.). SPN, Praha, 1986.
[19] *Urgošík, B.*: Fyzika (2. uprav. vyd.). SNTL, Práce, Praha, 1987.
[20] *Tarábek, P., Červinková, P. a kol.*: Odmaturuj z fyziky (2. vyd.). Didaktis, Brno, 2006.
[21] *Lank, V., Vondra, M.*: Fyzika v kostce pro SŠ. Fragment, Praha, 2007.

Poznámka k silám působícím na kyvadlo

OLDŘICH LEPIL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Příspěvek V. Žáka [I] je analýzou metodických postupů při interpretaci sil, které působí na (matematické) kyvadlo. Poněvadž předmětem analýzy jsou i učební texty, na nichž jsem se autorsky podílel [8–10, 12–15, 18],[1] vyjádřím se k problematice učiva o kyvadle obsáhleji. Především je třeba

[1] Čísla odkazů v textu odpovídají citacím literatury v příspěvku V. Žáka [I]. Pro přehlednost jsou odkazy na literaturu v tomto příspěvku označeny římskými číslicemi.

si uvědomit, že význam učiva o kyvadle byl dán historicky tím, že představuje princip, na němž je založena funkce mechanického časoměrného zařízení – hodin, jejichž konstrukce Huygensem v 17. století znamenala revoluci v měření času. Proto je v teorii kyvadla věnována taková pozornost přesnosti určení jeho periody. Tento význam již kyvadlo definitivně pozbylo a stěží bychom hledali nějaké jiné praktické využití kyvadla v podobě známé ze středoškolských učebnic fyziky, popř. soudobou technologii jako důvod, proč by znalost teorie kyvadla měla patřit k všeobecnému vzdělání.

Opodstatnění toho, aby naše učebnice fyziky ještě učivo o kyvadle obsahovaly, vidím v jeho didaktickém významu. Ten spočívá v tom, že jde o jednoduchý, snadno realizovatelný objekt, na němž lze velmi dobře objasnit pojem kmitavý pohyb a jeho harmonický průběh (i když jsem stále přesvědčen, že pružinový oscilátor tuto funkci plní lépe). Pochopení podmínek vzniku a základních charakteristik harmonického kmitání kyvadla může být vhodným prekonceptem k lepšímu pochopení v současnosti podstatně významnějšího, ale z poznávacího hlediska abstraktnějšího elektromagnetického kmitání.

Tento přístup k učivu o kyvadle se odrážel i v tom, že v učebnici [18], která byla pokusem o modernější výklad periodických dějů v podobě integrované poznatkové soustavy učiva o mechanickém a elektromagnetickém kmitání, téma kyvadlo zpracováno není. S kyvadlem se zde žák setká jen v podobě ilustrace pojmu mechanický oscilátor (důsledně není v textu použito slovní spojení matematické kyvadlo). V teoretickém cvičení se pak řešením konkrétního příkladu dospěje ke vztahu pro periodu kmitání kyvadla a didaktický potenciál kyvadla je využit v laboratorním cvičení. V něm je žákovským experimentem ověřována závislost periody kmitání kyvadla na jeho délce. Cenná je také možnost, určit pomocí kyvadla přibližnou hodnotu tíhového zrychlení. Jiné zdůvodnění, proč by kyvadlo mělo v našich učebnicích setrvat, nevidím.

Je ovšem třeba dodat, že na vyšší úrovni fyzikálního vzdělávání může být kyvadlo výchozím modelem i složitějších systémů, jako je třeba kmitání vázaných oscilátorů – spřažených kyvadel. Jiným příkladem je kyvadlo se závěsem v podobě lehké tuhé tyče, jehož pohyb v rovině nemusí být omezen na malé výchylky, jak to požadujeme u matematického kyvadla, ale jeho počáteční úhlová výchylka může být až 180°. Takové kyvadlo (rotátor) může konat kruhový pohyb s proměnnou úhlovou rychlostí a je modelem dynamického systému, který kmitá anharmonicky. Obdobným, často prezentovaným modelem je také dvojité kyvadlo jako příklad systému vykazujícího chaotické chování (viz [II], kap. 7).

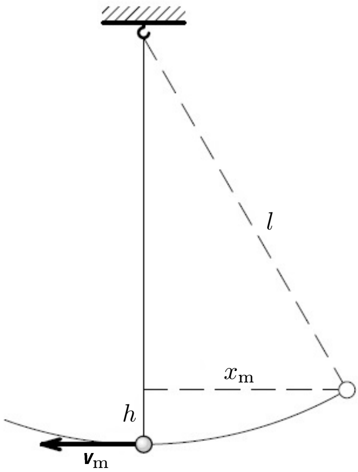
Vývoj didaktických systémů učiva má velmi značnou setrvačnost a tak na počátku 90. let minulého století vznikl určitý tlak zejména ze strany učitelů z praxe, vrátit se k tradiční struktuře učiva, jak se formovala ještě v 2. polovině 19. století. Ústupkem tomuto tlaku je vznik souboru tematických učebnic a mezi nimi i učebnice [9], v níž je učivo o mechanickém kmitání společně s mechanickým vlněním a akustikou. Dalším krokem zpět ke koncepci, která odpovídá uspořádání učiva v prvních poválečných osnovách fyziky pro gymnázium, je Rámcový vzdělávací program gymnaziálního vzdělávání [2], kde je kmitání součástí tematického celku „Pohyby těles a jejich vzájemné působení" a je vymezeno heslem „kmitání mechanického oscilátoru, jeho perioda a frekvence" (s. 28). Je tedy na učiteli, zda svůj výklad bude opírat o pružinový oscilátor nebo kyvadlo a zda vůbec kyvadlo do učiva zařadí.

Aby měl učitel tuto možnost volby, je v učebnici [8] podrobněji než v učebnici [18] zpracováno jak kmitání pružinového oscilátoru, který má jasnou prioritu, tak kyvadlo, včetně jeho abstrakce v podobě matematického kyvadla, bez další návaznosti na výklad kmitání fyzického kyvadla, které v současnosti středoškolským učivem není. Pro jeho smysluplný výklad není totiž v potřebném rozsahu vyložen pojem moment setrvačnosti a jeho závislost na vzdálenosti těžiště od osy otáčení (Steinerova věta).

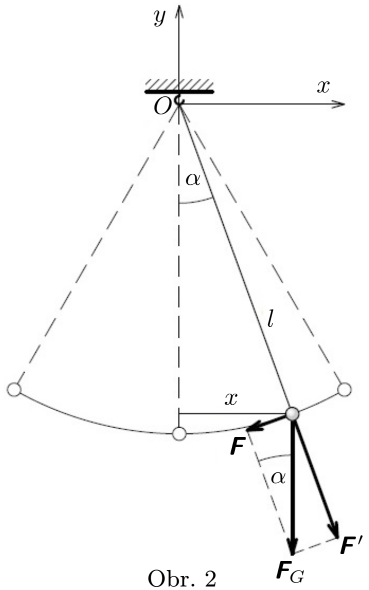
Teorie kyvadla ve středoškolském učivu plní tři základní cíle s obecnějším vztahem k dalším poznatkům:

1. Kyvadlo je příkladem mechanického oscilátoru, který kmitá harmonicky.
2. Perioda vlastního kmitání kyvadla je funkcí jeho parametru (délky) a nezávisí na počátečních podmínkách (na amplitudě výchylky a energii oscilátoru v počátečním okamžiku).
3. Pohyb kyvadla (netlumeného harmonického oscilátoru) charakterizují periodické přeměny dvou forem mechanické energie.

Tím se dostáváme k problému grafického znázornění vektorových veličin, na jejichž interpretaci je další výklad založen. Můžeme zvolit třeba méně častý a matematicky poněkud náročnější metodický postup s užitím zákona zachování energie (viz např. [III], s. 11) a vystačíme s jednoduchým vyobrazením s jedinou vektorovou veličinou – rychlostí $\boldsymbol{v}$ (obr. 1). Odvodíme tak vztah pro periodu T kyvadla, ale zůstávají poněkud skryty důkazy o harmonickém pohybu kyvadla a jeho časovém průběhu. Proto je vhodnější a častější postup, kterým dokážeme, že na těleso kyvadla působí harmonicky proměnná síla. K tomu nám v podstatě postačuje zjistit, že touto silou je složka $\boldsymbol{F}$ tíhové síly $\boldsymbol{F}_G$ do směru tečny k trajektorii (obr. 2, [III]). Ve vztažné soustavě (Oxy) se tato složka mění podle funkce sinus ($F = -mg \sin \alpha$), z čehož intuitivně vyplývá, že také odpovídající kinematické veličiny pohybu kyvadla se budou měnit podle funkce sinus, popř. kosinus. Výklad založený na tomto diagramu sil nutně nevyžaduje, aby jako výchozí situace byla volena krajní poloha závaží odpovídající amplitudě výchylky kyvadla.



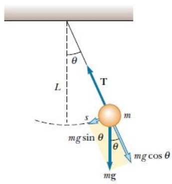
Obr. 1



Obr. 2

Jestliže cílem výkladu je jen ukázat, že příčinou harmonického kmitání kyvadla je periodicky proměnná síla, má podle mého soudu smysl zabývat se jen nalezením této síly a nekomplikovat výklad silami, na nichž velikost a směr síly způsobující harmonický pohyb nezávisí. Proto je zřejmě nejjednodušší, zvolit jako výchozí situaci, odpovídající obr. 1 v [I]. Za ekvivalentní lze považovat i nalezení tzv. „vratné“ síly složením tíhové síly a tahové síly vlákna (obr. 3a v [I]), nebo pomocí vektorového znázornění všech těchto sil, jak je tomu na obr. 2a. Vložením klíčových hesel *kyvadlo* nebo *pendulum*, popř. *fadenpendel* nebo *mathematisches pendel* do vyhledávače se snadno přesvědčíme, že takto řeší výklad kmitání kyvadla naprostá většina učebních textů.

Poznámka. V této souvislosti připomenu, že termín *matematické kyvadlo*, označující abstraktní model „hmotného bodu zavěšeného na nehmotném vlákně“, se v anglicky psaných textech používá jen v menší míře (*mathematical pendulum*). Nejčastěji se setkáváme s obecným termínem *pendulum*, jehož elementárním příkladem je *simple pendulum*. To potvrzuje i úryvek originálu známé učebnice [IV], jejíž český překlad [16, 17] je rovněž součástí analýzy v [I] (obr. 3). Překladatelé zde termín pendulum i simple pendulum ztotožňují s termínem matematické kyvadlo [17, s. 418].



13.4 THE PENDULUM

8.11 & 8.12

The **simple pendulum** is another mechanical system that exhibits periodic motion. It consists of a particle-like bob of mass m suspended by a light string of length L that is fixed at the upper end, as shown in Figure 13.12. The motion occurs in the vertical plane and is driven by the force of gravity. We shall show that, provided the angle θ is small (less than about 10°), the motion is that of a simple harmonic oscillator.

The forces acting on the bob are the force $\mathbf{T}$ exerted by the string and the gravitational force $m\mathbf{g}$. The tangential component of the gravitational force, $mg \sin\theta$, always acts toward $\theta = 0$, opposite the displacement. Therefore, the tangential force is a restoring force, and we can apply Newton's second law for motion in the tangential direction:

$$\sum F_t = -mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

where s is the bob's displacement measured along the arc and the minus sign indicates that the tangential force acts toward the equilibrium (vertical) position. Because $s = L\theta$ (Eq. 10.1a) and L is constant, this equation reduces to

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

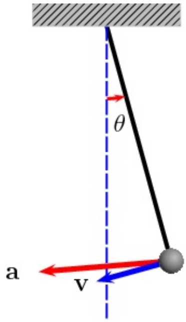
The right side is proportional to $\sin\theta$ rather than to θ; hence, with $\sin\theta$ present, we would not expect simple harmonic motion because this expression is not of the form of Equation 13.17. However, if we assume that θ is small, we can use the approximation $\sin\theta \approx \theta$; thus the equation of motion for the simple pen-

Figure 13.12 When θ is small, a simple pendulum oscillates in simple harmonic motion about the equilibrium position $\theta = 0$. The restoring force is $mg\sin\theta$, the component of the gravitational force tangent to the arc.

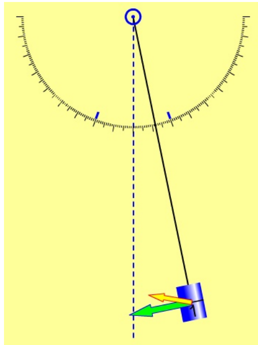
Obr. 3

Od zmíněných vektorových diagramů se odlišuje obr. 3b a 3c v [I], kdy není těleso kyvadla v krajní poloze a má tedy nenulovou rychlost. Diskutovaným problémem je v tomto případě další síla působící na těleso kyvadla, kterou je z hlediska inerciální vztažné soustavy dostředivá síla. Tato síla zvětšuje tahovou sílu vlákna a výslednice všech působících sil již nemá směr tečny k trajektorii kmitajícího tělesa. Směr výslednice se od tečného směru odchyluje a v rovnovážné poloze, kdy má těleso největší rychlost, míří k bodu závěsu kyvadla. Velikost výslednice dosahuje minima a tangenciální složka tíhové síly je nulová.

Snadno to lze ukázat počítačovým modelem, jehož program všechny působící síly zohledňuje, a zobrazuje jejich vektorový součet. Směr výslednice všech sil je patrný ze směru zobrazeného vektoru zrychlení (obr. 4, [V]). Podobně zobrazuje kmitání kyvadla aplet [VI] (obr. 5). Je ovšem otázka, zda je účelné tak podrobným rozborem pohybu kyvadla žáka zatěžovat a výslednicí všech působících sil ho vlastně mást, když víme, že tečná síla, která je pro harmonický pohyb kyvadla určující, dostředivou silou ovlivněna není. Dostředivá síla je v každém okamžiku k trajektorii kmitajícího tělesa kolmá a tudíž nemá tečnou složku.

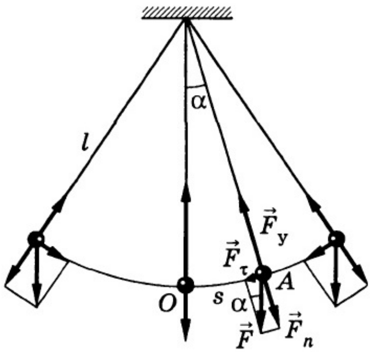


Obr. 4



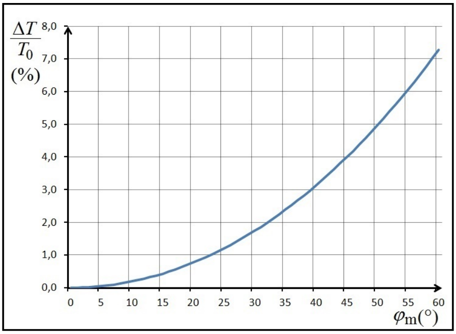
Obr. 5

I když se zcela ojediněle vektorový diagram zohledňující dostředivou sílu v některých zahraničních středoškolských učebnicích objevuje, v žádné se všechny zobrazené síly do teorie kmitání kyvadla nezahrnují. Takové vyobrazení najdeme např. v učebnici [VII, s. 12] (obr. 6), určené pro rozšířenou výuku fyziky na ruské střední škole. Zakresleny jsou změny velikosti tahové síly $\boldsymbol{F}_y$ vlákna v průběhu jednoho kyvu, ale v textu není k těmto změnám žádné vysvětlení. Ve skutečnosti se poněkud mění také velikost síly $\boldsymbol{F}_\mathrm{n}$, což ovšem z obr. 6 patrné není.



Obr. 6

Absence dostředivé síly při výkladu teorie kyvadla odpovídá skutečnosti, že matematickému kyvadlu jako modelu harmonického oscilátoru odpovídá jeho linearizovaná podoba (viz např. [4, s. 104]). Je to tedy systém, který kmitá s malou amplitudou výchylky φ_m, při níž $\sin\varphi_\mathrm{m} \approx \varphi_\mathrm{m}$ (v radiánech). Jen v tomto případě má diferenciální rovnice popisující pohyb kyvadla jednoduché řešení, kterým je rovnice harmonického pohybu s periodou kmitání $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$. Jestliže je amplituda výchylky kyvadla větší, zvětšuje se i perioda T kmitání ($T > T_0$) a kmitání již není přesně harmonické. Relativní odchylka periody $\Delta T/T_0 \approx 0{,}25\sin^2(\varphi_\mathrm{m}/2)$. Na obr. 7 je graficky znázorněna relativní odchylka skutečné periody kyvadla při rostoucí amplitudě úhlové výchylky. Pro některé úhly je relativní odchylka periody $(T - T_0)/T_0$ reálného kyvadla uvedena v tabulce 1.



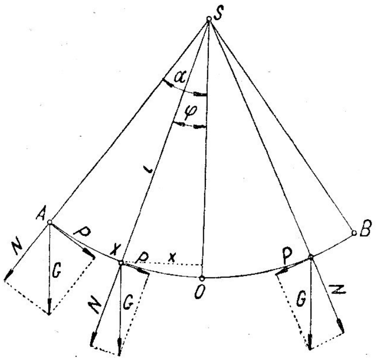
Obr. 7

Tabulka 1

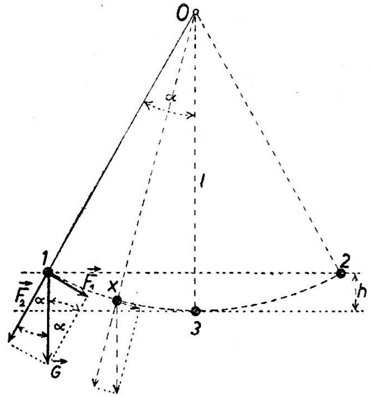
φ_m (°)	5	10	20	30	60
$\frac{\Delta T}{T_0}\,100$ (%)	0,05	0,19	0,77	1,74	7,28

Graf potvrzuje v učebnicích uváděný požadavek, aby amplituda úhlové výchylky $\varphi_\mathrm{m} < 5° \approx 0{,}1$ rad. Relativní odchylka lineárně rostoucí hodnoty φ_m a $\sin\varphi_\mathrm{m}$ je 0,12 % a relativní odchylka periody kyvadla je řádu 10^{-2} %. Ve školské praxi z důvodu názornosti obvykle uvažujeme kyvadlo s větší počáteční výchylkou a relativní odchylku periody kyvadla, která obvykle nepřekročí 2,5 %, tolerujeme. Ovšem i potom je dostředivá síla malá (viz dále). Při školních experimentech se závažím zavěšeným na vlákně bychom tento mechanický oscilátor měli označovat spíše než jako matematické kyvadlo slovním spojením třeba *jednoduché kyvadlo*, jak je to použito např. v učebnici [IV].

V českých učebnicích se rovněž objevují vyobrazení, která naznačují i situace mimo krajní polohy kyvadla. Jako příklad poslouží vyobrazení z učebnic [VIII] (obr. 8) a [IX] (obr. 9), které pochopitelně problém dostředivé síly rovněž neřeší. Podobně je tomu i v současné učebnici [8], které je neoprávněně vytýkáno, že dostředivá síla není do diagramu sil zahrnuta (viz [6]). Pokud bychom nahlédli do některé z vysokoškolských učebnic renomovaných autorů (Horák, Slavík, Nachtikal aj.), v žádné z nich na problém dostředivé síly při pohybu kyvadla nenarazíme.



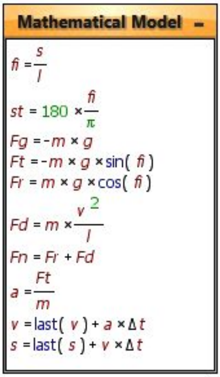
Obr. 8



Obr. 9

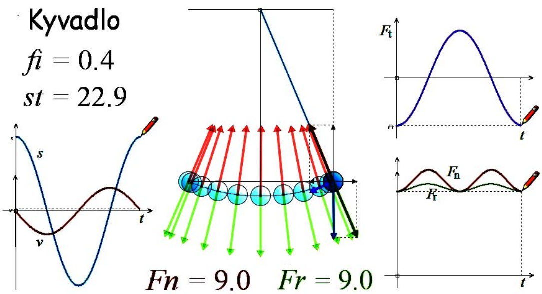
Autor studie [I] se také zmiňuje o možném vzniku miskoncepcí. Domnívám se, že tyto miskoncepce mohou přímo pramenit ze zbytečně komplikovaných silových diagramů, k nimž má nejblíže diagram se zobrazením výsledné síly obdobně, jak je to patrné z obr. 4 a 5. Za krajní situace, kdyby bylo rigorózně požadováno zohlednění dostředivé síly (obr. 5a v [I]) u reálného (nikoliv matematického) kyvadla, lze považovat za optimální návrh diagramu sil, který je na obr. 5b v [I]. Je to v podstatě stejné řešení, jaké je použito v učebnici [VII] (viz obr. 6). Do jaké míry je to však nutné, se můžeme přesvědčit pomocí jednoduchého počítačového modelu, který si popř. mohou ve škole vytvořit i sami žáci a lépe tak proniknout do celého problému. Současně to může být docela zajímavý námět pro rozbor silového působení na zavěšené těleso, které koná zrychlený pohyb po kružnici. Harmonický kmitavý pohyb je pak jeho zvláštním případem pro malé počáteční výchylky. Vytvořením modelu zde obejdeme skutečnost, že na střední škole není zaveden pojem úhlové zrychlení.

Model pro studium pohybu kyvadla je vytvořen programem Modellus 4 [X] a Eulerovou metodou se řeší pohyb kyvadla délky $l = 1$ m se závažím o hmotnosti $m = 1$ kg a s počáteční výchylkou $\varphi_{\mathrm{m}} = 0{,}4$ rad $\approx 23^\circ$, což přibližně odpovídá výchylce závaží vodorovným směrem o 0,4 m od rovnovážné polohy (odchylka φ_{m} a $\sin\varphi_{\mathrm{m}}$ je 2,7 %). Jde tedy o reálnou situaci, s níž se setkáváme při školním experimentu. To umožňuje zobrazit dostředivou sílu, jejíž velikost by při malých úhlech byla v použitém měřítku prakticky nezobrazitelná. Model kyvadla zapsaný v prostředí programu Modellus 4 je na obr. 10.



Obr. 10

Na grafickém výstupu (obr. 11) je vlevo časový diagram kinematických veličin s a v. Vpravo nahoře je graf tečné síly a dole je srovnání velikosti radiální síly $F_{\mathrm{r}} = mg\cos\varphi$ a tahové (normálové) síly vlákna $F_{\mathrm{n}} = F_{\mathrm{r}} + m\frac{v^2}{l}$. Spuštěním programu se přesvědčíme, že se v průběhu periody kmitu periodicky zvětšuje tahová síla vlákna, ale tečná složka síly způsobující kmitavý pohyb kyvadla je v každém okamžiku jen složkou tíhové síly do směru tečny k trajektorii, čili má velikost $F_{\mathrm{t}} = mg\sin\varphi$.



Obr. 11

Z obr. 11 je patrné, že i při poměrně velké výchylce kyvadla je vliv dostředivé síly F_{d} na velikost normálové složky F_{n} malý a méně pozorný žák změnu ani nepostřehne. Ještě lépe je to zřejmé z tabulky 2, kde je v procentech vyjádřen rozdíl velikostí sil F_{r} a F_{n} při různých počátečních výchylkách kyvadla. Velikost síly F_{r} odpovídá počáteční hodnotě při výchylce s kyvadla z rovnovážné polohy ve vodorovném směru (v rovnovážné poloze $F_{\mathrm{r}} = F_G = 9{,}8$ N). Normálová síla $F_{\mathrm{n}} = F_{\mathrm{r}} + F_{\mathrm{d}}$ a v tabulce je uvedena největší možná hodnota velikosti této síly v průběhu periody.

Tabulka 2

s (m)	φ_{m} (°)	F_{r} (N)	F_{n} (N)	ΔF (%)
0,50	30	8,6	12,2	24,5
0,40	23	9,0	11,4	15,8
0,30	17	9,4	10,7	8,9
0,20	11	9,6	10,2	4,0
0,15	8,6	9,7	10,0	2,2
0,10	5,7	9,8	9,9	1,0

Závěr

Obr. 11 a tabulka 2 dokládají, že teorie kyvadla na středoškolské úrovni nevyžaduje, aby do výkladu jeho harmonického kmitání byla zahrnuta také dostředivá síla. Žádný učební text u nás, ale zřejmě ani v zahraničí k ní při výkladu kyvadla nepřihlíží. Z mnoha odkazů na webu se zcela ojediněle podařilo najít text jen s kvalitativní ilustrací zahrnující dostředivou sílu (např. [XI, XII, XIII]). Na základě uvedených poznatků autor tohoto příspěvku v nově připravovaném vydání přepracovaného textu učebnice [8] o interpretaci dostředivé síly při výkladu kyvadla neuvažuje.

Literatura

[I] *Žák, V.*: Síly působící na matematické kyvadlo na 7 + 1 způsob. MFI roč. 25 (2016), č. 4, s. 266–276.

[II] *Lepil, O. a kol.*: Fyzika aktuálně, příručka nejen pro učitele fyziky, Prometheus, Praha, 2009.

[III] *Šedivý, P., Volf, I., Horáková, R.*: Harmonické kmity mechanických soustav. MAFY, Hradec Králové, 2000. Dostupné na: http://fyzikalniolympiada.cz/texty/kmity.pdf.

[IV] *Halliday, D., Resnick. R., Walker, J.*: Fundamentals of Physics, 9th edition. John Wiley & Sons, 2011.

[V] https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/24/Oscillating_pendulum.gif.

[VI] https://phet.colorado.edu/sims/pendulum-lab/pendulum-lab_cs.html.

[VII] *Mjakišev, G. Ja., Sinjakov, A. Z.*: Fizika: Kolebanija i volny, Učebnik dlja uglublennogo izučenija fiziky, Drofa, Moskva, 2002.
Dostupné na: http://slovo.ws/urok/fizika/11/001/012.html.

[VIII] *Chytilová, M. a kol.*: Fysika pro třetí třídu gymnasií, SPN, Praha, 1953.

[IX] *Vanovič, J. a kol.*: Fyzika pro II. ročník SVVŠ, SPN, Praha, 1965.

[X] http://modellus.fct.unl.pt.

[XI] http://www.physicsclassroom.com/class/waves/Lesson-0/Pendulum-Motion.

[XII] http://www.kostenlose-referate.de/das-fadenpendel-108.html.

[XIII] http://www.sciencesphysiques2010.esy.es/tsch05.htm.

Přesýpací hodiny v hodině fyziky

RENATA HOLUBOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Zamysleli jste se někdy nad tím, jak fungují přesýpací hodiny? Co je na vytékání písku zajímavého? Přesýpací hodiny byly běžně používány ve středověku k měření časových intervalů v délce od jedné minuty až do tří hodin, výjimečně intervalů delších. Rozšíření přesýpacích hodin bylo podmíněno rozvojem sklářského průmyslu – dovednost výroby baňky z průhledného skla. Jako náplň přesýpacích hodin se používaly různé granuláty – písek, kovový prášek, rozemletý mramor, vaječné skořápky. Nevýhodou těchto hodin bylo, že se musely překlápět a dlouhodobým používáním se předcházely. Zrníčka se omílala, otvor, kterým propadávala, se zvětšoval. Koncem 18. stol. byly nahrazeny mechanickými hodinami. Přesto se s různými variantami přesýpacích hodin můžete setkat i dnes.

Vlastnosti písku – granulátu

Písek se chová jako kapalina či jako pevná látka. U kapaliny závisí rychlost výtoku z otvoru ve stěně nádoby na výšce kapaliny nad otvorem, u písku tato zákonitost neplatí. Protože rychlost výtoku nezávisí na výšce sloupce písku nad otvorem a písek vytéká stále stejnou rychlostí, lze písek použít k měření časových intervalů. Písek řadíme mezi granuláty.

Vlastností granulátu je, že vlivem vnějších sil v důsledku tření a v bodech dotyku jednotlivých granulí vznikají tzv. „sítě sil", které nehomogenně rozdělují silové působení v granulátu. V důsledku toho vznikají oblouky, podobně jako je klenutý oblouk ve stavitelství. V přesýpacích hodinách může takovýto oblouk v krajním případě přemostit otvor, kterým písek vytéká, a tím výtok písku přerušit. Tyto oblouky lze uměle vytvořit, když budeme hodinami pohybovat zrychleně nahoru nebo dolů, popř. lze výtok písku přerušit, když zahřejeme spodní zásobník. V důsledku zvýšení tlaku se vzduch snaží proudit do chladnějšího horního zásobníku. Tím je tok písku tak narušen, že vnikají přemostění a výtok se zastaví. K zahřátí lze použít ruce, fén.

Konstantní rychlost proudění písku závisí na přenosu sil v mezi granulemi, které se děje prostřednictvím bodů dotyku jednotlivých zrnek.

Obr. 1 Dotyk jednotlivých zrnek písku

Při běžném uspořádání tvoří zrnka síť, kde mohou vznikat zakřivené oblouky – mosty (jako v gotické katedrále), které převádějí tlak na boční stěny přesýpacích hodin. Vrstvy písku ležící dole jsou více či méně odlehčeny od tíhy horních vrstev, takže „střední" tlak nad zúžením v hodinách zůstává i při změně výšky písku konstantní. Třecí síly mezi částicemi a stěnou jsou dostatečné ke kompenzaci tíhové síly zrn, které leží v horních vrstvách granulátu.

Pokus 1

Naplňte zkumavku pískem a dobře jej setřepejte. Na stůl položte arch bílého papíru. Nad tímto papírem zkumavku otočte vzhůru nohama – část písku vypadne. Prozkoumejte tvar hladiny písku ve zkumavce a tvar písku na papíře.

Ve zkumavce můžete po odtržení pozorovat tvar klenby. Pokud se uvolní další vrstva písku, zbylý tvar povrch bude mít opět tvar klenby.

Obr. 2 Tvar písku po odtržení

Studium granulátu ve srovnání s tekutinami

Protože se jedná o mnohačásticové systémy, je třeba použít zákony statistické fyziky. Ale na rozdíl od tekutin (kapaliny a plyny) je energie $k_{\mathrm{B}}T$, kde k_{B} je Boltzmannova konstanta, T termodynamická teplota, zanedbatelná. Zanedbatelné jsou také kohezní síly mezi zrnky. Pokud použijeme model, že jedno zrnko písku je jedna molekula (v plynu), narazíme na základní odlišnost granulí a tekutin – zrnka jsou v klidu, jejich kinetická energie je rovna nule a také jejich termodynamická teplota je nulová. Je to nehomogenní systém, jehož mechanické vlastnosti se liší od místa k místu. Z hlediska dynamiky, budeme-li zkoumat tok písku, tak není Newtonovský. Existuje zde hraniční vrstva, kde granule tečou, ostatní vrstvy zůstávají v klidu (v případě hromady písku).

Tok granulovaných pevných látek studoval *Beverloo*. Odvodil, že objemový průtok W je úměrný průměru výtokového otvoru D, hustotě částic ρ a tíhovému zrychlení g:

$$W \sim D^{\mathrm{a}} \rho^{\mathrm{b}} g^{\mathrm{c}}$$

Napíšeme-li rozměrovou rovnici

$$\frac{[M]}{[T]} = [L]^{\mathrm{a}} \left[\frac{M}{L^3}\right]^{\mathrm{b}} \left[\frac{L}{T^2}\right]^{\mathrm{c}},$$

odkud $b = 1$, $c = 0{,}5$, $a = 2{,}5$, pak po dosazení v ideálním případě máme

$$W = \rho\sqrt{g} D^{2,5}.$$

Tento vztah byl na základě experimentálních měření upraven na tvar

$$W = \rho\sqrt{g}(D - kd)^{2,5},$$

kde byl zaveden průměr částic d a faktor k (bezrozměrová konstanta) charakterizující polohu částice.

Budeme-li tvořit hromadu z písku, potom v případě suchého písku lze vytvořit jen kužel s pevně daným úhlem sklonu stěn, který je asi 35°. Pokud chceme vytvořit homoli s větším sklonem a přidáme další písek, zrnka písku začnou téct dolů po povrchu stěny a úhel zůstane zase stejný. V suchém písku nelze vytvořit tunel – stěny se hroutí. Pokud na vrstvu písku působíme vnější silou, zvýšíme hustotu granulátu, ale úhel sklonu kužele zůstane přibližně stejný. Výška kužele závisí také na tvaru zrnek – hranatá zrnka umožňují strmější stěny než zrnka kulatá … zkuste udělat hromadu z kuliček!

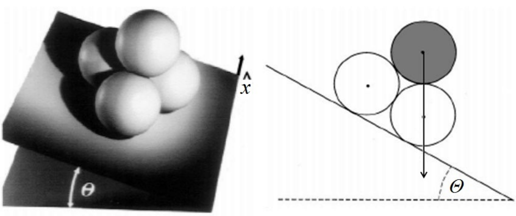
Situace se změní přidáním vody – vlivem povrchového napětí zde vznikají kohezní síly. Nyní lze formovat útvary, které mají sklon stěn až 90° (hrady z písku).

Určení úhlu resistence (nehybnosti, angl. repose)

Tvar přesýpacích hodin není náhodný, je spojen s vlastností, kterou má hromada písku. Granulované materiály mají určitý parametr, tzv. úhel nehybnosti Θ_r, což je úhel, který svírá stěna hromady písku s horizontální rovinou. Podobně platí, že když nasypeme písek do nádoby se zvýšeným okrajem a rovnou podstavou, uhladíme, bude tato vrstva stabilní, pokud nádobu neskloníme pod určitým maximálním úhlem Θ_m. Po překročení této meze (zvětšení úhlu), se začnou jednotlivá zrnka kutálet, až se vytvoří lavina padajících granulí.

Pokus 2

Úkolem pokusu je stanovit úhel stability Θ_m. Tento úhel nemusí být stejný jako úhel resistence, záleží na vlastnostech písku. Na základě znalosti úhlu Θ_m lze stanovit vnitřní koeficient tření mezi jednotlivými granulemi písku (nebo podobného materiálu – lze použít krupici, krystalový cukr apod.).

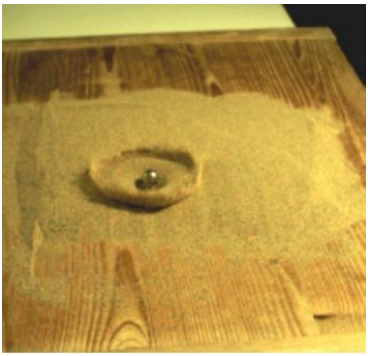


Obr. 3 Úhel resistence

V přírodě narazíme na pískovny, které mají svahy strmější než uvedených 35°. Je to dáno tím, že písek obsahuje vodu z podloží, která navíc obsahuje další vazebné látky (vápník, železo).

Naplníme-li hodiny pískem s různě velkými zrnky, při přesýpání zjistíme, že jak nahoře, tak i v dolní baňce, se mezi velkými zrny narušuje promíchávání.

Dolní nádoba – jak zrnka padají, dělá se kupole, další dopadající zrnka spouští malé laviny. Padající zrnka se uspořádají podle velikosti – velké se hromadí u paty hromady, nad nimi pár větších a menších zrnek – malá zrnka při pohybu propadnou mezi velkými, ta zůstanou ležet nahoře a také se snadněji kutálejí po svahu dolů. V horní nádobě probíhá totéž – vytvoří se trychtýř. Protože je písek v pohybu, vrstvení se neustále narušuje. Nad otvorem se vytvoří hrubozrnný pás směrem nahoru – k hromadění velkých zrn dochází od paty trychtýře.



Obr. 4 Vznik nerovností v písku (záznam vysokorychlostní kamery, autor M. Dudka, Š. Bártová; pracoviště autora)

Písek se pohybuje i např. vlivem větru, vody – tento pohyb je chaotický, přesto vznikají útvary – žebra – v roce 1910 je popsala *Hertha Ayrton* na základě jednoduchých experimentů.

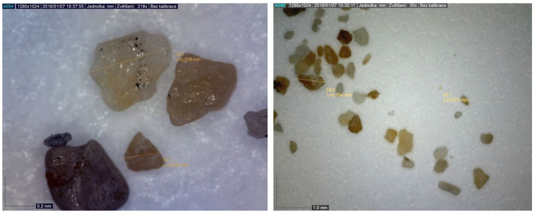
Pokus 3

V průhledném akváriu stejnoměrně rozprostřeme písek po dně, poté začneme pohybovat akváriem v horizontální rovině. V písku vznikají vlny a „žebra“. Na počátku je proces náhodný, i malé nerovnosti na dně způsobí turbulence, v blízkosti dna jde o samozesilující proces. Oscilační žebra jsou symetrická, proudící jsou asymetrická.

Geometrie písečných zrn

Kolik zrnek písku je na planetě? Odpověď neznáme, jejich počet můžeme jen odhadnout.

Průměr velkého zrna písku je 2 mm, což odpovídá asi 31 průměrům mini zrnek. Velké zrnko (na pláži) je kutáleno, obrušováno, až získá kulový tvar $V = 4/3\pi r^3$.



Obr. 5 Zrnka písku

Předpokládejme, že maxi zrnko o průměru 2 mm je obklopeno mini zrnky o průměru 0,063 mm a 0,125 mm.

$V_{\min} = 4/3\,\pi \cdot 0{,}031\,5^3 \text{ mm}^3 \doteq 0{,}000\,131 \text{ mm}^3$

$V_{\max} = 4/3\,\pi \cdot 1^3 \text{ mm}^3 \doteq 4{,}19 \text{ mm}^3$

Objem velkého zrnka je 31 993 objemů minizrnek. Vezmeme-li v úvahu i prázdný prostor, který zůstává mezi zrnky, mělo by tam místo dalších 20 000 minizrníček.

Odhadněme počet zrnek v krychli o hraně 10 cm.

Předpokládejme stejné kuličky a těsné uspořádání – jedna koule je obklopena 12 kuličkami, které se jí dotýkají. Lze vypočítat maximální počet kuliček v kostce. V tabulce 1 jsou počty kuliček pro jejich různé velikosti.

Tabulka 1 Počty kuliček (zrnek)

Průměr (mm)	Počet kuliček (zaokrouhleno)
0,063	$5{,}6 \cdot 10^9$
0,125	$720 \cdot 10^6$
0,25	$90 \cdot 10^6$
0,5	$11{,}2 \cdot 10^6$
1,0	$1{,}4 \cdot 10^6$
2,0	$1{,}72 \cdot 10^5$

Při nejtěsnějším uspořádání póry zabírají 26 % celkového objemu kostky. V přírodě je objem mezer většinou asi 40 %. Při volnějším uspořádání se do kostky vejde méně zrnek, objem pórů se zvětšuje. Zrnka nejsou navíc kuličky, ale jsou nepravidelná, jsou mezi nimi větší mezery. Máme-li směs velkých a malých zrn, malá zrnka zaplňují mezery, a tím zmenšují objem pórů. Čím nestejnorodější směs, tím více zrnek se vejde do daného objemu.

Pokud smícháme 300 ml jemného písku a 300 ml hrubého písku, výsledný objem nebude roven 600 ml.

Hustota křemíku je 2,65 g/cm^3 (= 0,002 65 g/mm^3). Naše minizrníčko ($d = 0{,}063$ mm) a maxizrno ($d = 2$ mm) mají tudíž hmotnost:

$m = 0{,}000\,131\ \mathrm{mm}^3 \cdot 0{,}002\,63\ \mathrm{g/mm}^3 = 0{,}000\,000\,347\ \mathrm{g}$

$M = 4,188\ \mathrm{mm}^3 \cdot 0{,}002\,65\ \mathrm{g/mm}^3 = 0{,}011\,0982\ \mathrm{g}$

V tabulce 2 je uvedeno, kolik zrnek dané velikosti je potřeba, abychom dostali 1 g křemičitého písku. Je vidět, jak je statistika ovlivněna nejmenšími částicemi. Potřebujeme 32 g zrnek o průměru 2 mm, abychom měli stejný počet minizrnek o průměru 0,063 mm, která tvoří 1 g písku.

Tabulka 2 Hmotnost zrnek a jejich počet

Průměr (mm)	Hmotnost jednoho zrnka (g) (zaokrouhleno)	Počet zrnek na 1 gram (zaokrouhleno)
0,063	$3{,}5 \cdot 10^{-7}$	$2{,}8 \cdot 10^{6}$
0,125	$2{,}7 \cdot 10^{-6}$	370 000
0,25	$2{,}2 \cdot 10^{-5}$	46 000
0,5	$1{,}7 \cdot 10^{-4}$	5 800
1,0	$1{,}4 \cdot 10^{-3}$	720
2,0	$1{,}1 \cdot 10^{-2}$	90

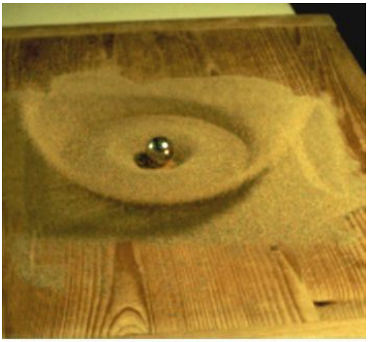
Příklad

Mějme 1 m^3 písku, který obsahuje drobná zrnka, normální zrnka a hlínu. Pórovitost je 40 % a podíl jemného písku 50 %. Potom jemný písek sám o sobě obsahuje 71,6 miliard zrn (o velikosti 0,2 mm) a 2,29 bilionů zrn, pokud jsou jen velmi jemná (jen o průměru 0,063 mm). U hlíny jsou částečky ještě mnohem menší.

Abychom počítali zrnka na pláži nebo v duně, museli bychom určit její objem (hmotnost), pórovitost, rozdělení zrnek podle velikosti atd.

Pokus 4

Zajímavé je studovat pád předmětu do písku, např. kuličky. Po dopadu vznikají fontány písku a vlny. Kinetická energie kuličky je ve zlomku sekundy přenesena na velké množství zrnek písku. Zatímco se koule po nárazu zastaví, energie je přenesena na písek – dochází k bezpočtu kolizí zrníček, která se vzájemně třou, otáčejí, poskakují – dochází k disipaci energie. Tato vlastnost byla využita během války – pytle s pískem byly ochranou proti střelám.



Obr. 6 Pád kuličky do písku (záznam vysokorychlostní kamery, autor M. Dudka, Š. Bártová; pracoviště autora)

Pokus 5

Známý je také následující pokus. Tyč postavíme do nádoby s pevnými stěnami, potom do této nádoby nasypeme písek. Na nádobu opatrně klepeme, písek si tzv. „sedne“ (vytvoříme hustší uspořádání). Nyní lze nádobu s pískem zvednout pomocí této tyče. Toto chování písku je ovlivněno *dilatací* písku. Vytažení tyče vyžaduje uvolnění vytvořených vazeb, ale v důsledku pevné stěny nádoby to není možné. Totéž lze pozorovat u vakuově balené kávy – dilatace je znemožněna atmosférickým tlakem působícím na balení. Dalším příkladem této vlastnosti je chování písku na pláži – stopa ve vlhkém písku se zdá být suchá – naší vahou jsou zrnka písku odtlačena od sebe, velikost pórů se zvětší a je tak více prostoru pro okolní vodu přitékající do stopy. V silně zhuštěném granulátu se vlivem vnější síly zvětší celkový objem pórů.

Pokus 6

Průhlednou PET láhev naplníme do poloviny pískem a přilijeme tolik vody, aby hladina ležela těsně nad vrstvou písku. Nyní zatlačíme na boční stěny láhve. Pozorujeme, že úroveň hladiny vody poklesla a povrch písku je suchý.

Vhodnou láhev naplníme až po okraj pískem. Údery na láhev písek „setřepeme". Nyní do láhve nalijeme vodu až téměř po okraj. Otvor uzavřeme zátkou, kterou prochází kapilára. Dbáme, aby pod zátkou nezůstala vzduchová bublina. Poté pomocí injekční stříkačky doplníme do kapiláry tolik vody, aby sahala do výšky nejméně 10 cm. Nyní stlačíme stěny láhve. Pozorujeme, že úroveň hladiny vody v kapiláře viditelně poklesne.

Vraťme se k přesýpacím hodinám. Pomocí pokusu nyní srovnejte výtok kapaliny z otvoru v nádobě s výtokem písku. Postupujte tak, že během zvoleného časového intervalu budete měřit hmotnost vyteklé látky. V případě písku získáte lineární závislost.

Závěr

Problematika pevných látek ve tvaru granulí je určitě pro žáky zajímavá, s mnoha fenomény se setkávají v každodenním životě. Výklad lze doplnit celou řadou jednoduchých experimentů. Přesýpací hodiny si žáci mohou vyrobit i z PET lahví. Jako plnivo lze použít např. krupici, či sůl. Daná problematika zahrnuje celou řadu aspektů, které lze studovat a aplikovat např. v geologii, technice (sklady obilí – sila, těžba písků) atd. A nezapomeňte – pokud půjdete stavět hrady z písku – použijte písek s malým obsahem vody (asi 1 % – povrchové napětí vody drží zrnka pohromadě) a stavějte za dne, kdy je pod mrakem.

Literatura

[1] *Barabási, A. L., Albert, R., Schiffer, P.*: The physics of sand castles: maximum angle of stability in wet and dry granular media.

[2] *Tanin, E. H., Putra, A.*: Medco Problem – Experiment on granular material. WOPHO, 2015.

[3] *Jaeger, H. M., Nagel, S. R.*: Physics of the granular state. Science, roč. 255 (1992), s. 1523–1557.

[4] *Mills, A. A., Day, S., Parkes, S.*: Mechanics of the sandglass. Eur. J. Pys., roč. 17 (1996), s. 97–109.

[5] *Serrano, D. A:, Sanches-Silva Zacatenco*: The Hagen-Beverloo law for outflow of granular solids from holes on side walls. Revista Mexicana de Física, roč. 61 (2015), s. 207–210. Dostupné na: http://www.scielo.org.mx/pdf/rmf/v61n3/v61n3a8.pdf.

[6] *Weber, S. M.*: Granulare Materie I. PIKO, MNU, 2015.

[7] http://www.antik-kant.cz/poradna/poradce/presyp.html.

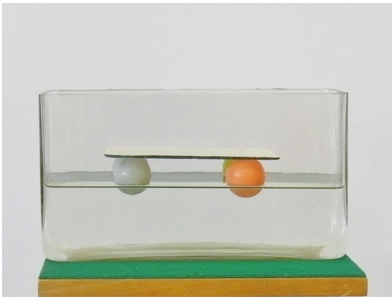
[8] http://www.sand-abc.de/sandphysik/sandphysik6.htm.

Vor a užití Archimedova zákona

FRANTIŠEK JÁCHIM

Základní škola Volyně

Pro porozumění jevům souvisejícím s učivem o Archimedovu zákonu je možné provést několik zajímavých pokusů s velmi jednoduchou pomůckou – lehkým vorem. K jeho zhotovení postačuje tenká polystyrénová destička a několik pingpongových míčků. Přilepením míčků do rohů destičky získáme základní vor (obr. 1).



Obr. 1

Když vyzkoušíme, že je na hladině stabilní, můžeme začít řešit různé úlohy – částečně pokusem, výpočtem nebo kombinací obojího. Všechny činnosti a výpočty s výjimkou výpočtu objemu míčku prováděli žáci.[1] Pro snazší výpočty je použita hustota vody $\rho = 1\ \mathrm{g/cm^3}$, pro určování tíhy je vhodné užít přibližnou hodnotu $g \doteq 10\ \mathrm{N/kg}$. Většinu výpočtů lze potom provádět zpaměti. Postupně jsme řešili následující úkoly.

1) *Zjištění hmotnosti voru. Výpočet velikosti vztlakové síly působící na prázdný plovoucí vor.*

Hmotnost použitého voru se čtyřmi míčky $m = 15$ g byla zjištěna vážením. Tomu odpovídá tíha 0,15 N, což je současně i velikost vztlakové síly působící na prázdný plovoucí vor.

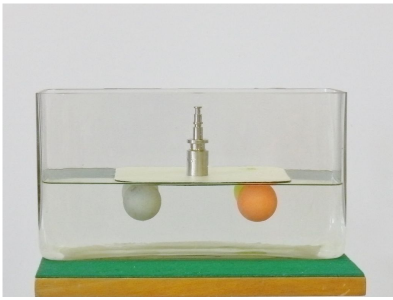
[1]V době provádění činnosti žáci neznali vzorec pro výpočet objemu koule.

2) *Výpočet objemu ponořené části míčků u plovoucího prázdného voru.*

Při velikosti vztlakové síly 0,15 N je objem ponořené části tělesa 15 cm^3. Celkový objem ponořené části míčků je tedy přibližně 15 cm^3.

3) *Nalezení největší hmotnosti, jakou lze zatížit vor, přičemž deska musí zůstat ještě nad hladinou.*

Úloha byla nejprve řešena pokusem. Na vor byla postupně kladena různá závaží, až se podařilo dosáhnout úplného ponoření míčků bez smočení desky. Na vor byla postupně dávána závaží o hmotnosti od 100 g, přičemž při zatížení 115 g již došlo k dotyku desky s hladinou (obr. 2). Takto určovaná zátěž je orientační, neboť se prakticky nepodaří dosáhnout úplného ponoření míčků bez dotyku desky voru s hladinou. Pokus ukázal na nosnost voru v rozmezí 105–110 g.



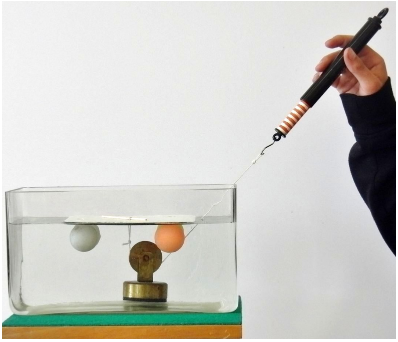
Obr. 2

4) *Výpočet nosnost voru pro situaci z úkolu* 3) *a porovnání s pokusem.*

Žákům bylo sděleno, že míček o průměru 38 mm (žáci průměr změřili) má objem 28,7 cm^3. Při úplném ponoření čtyř míčků (objem čtyř míčků je přibližně 115 cm^3) je tedy nosnost voru 115 g. Jelikož hmotnost prázdného voru je 15 g, lze uvažovat o zátěži přibližně 100 g. Pokusem ověřenou nosnost cca 105 g až 110 g jsme pro tento případ považovali za přiměřeně přesnou.

5) *Navržení způsobu, jak přímo změřit velikost vztlakové síly působící na vor a měření provést.*

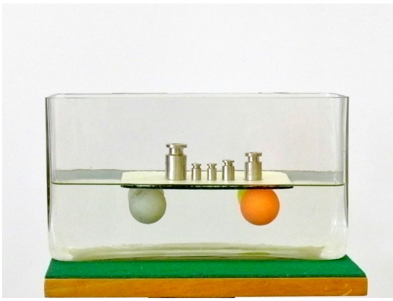
Provedli jsme pokus podle obr. 3. Vor jsme vtahovali do vody silou přenášenou přes kladku pevnou. V našem případě siloměr ukázal hodnotu 1,15 N, čemuž odpovídá výpočet v bodě 4).



Obr. 3

6) *Stanovení nosnosti voru při využití vztlakové síly působící také na desku.*

Použitá deska s rozměry 17 cm × 13 cm × 0,3 cm má objem přibližně 66 cm^3. Při provedení pokusu z úkolu 3) by bylo možné na desku dát ještě závaží o hmotnosti 66 g. Pokus ukázal, že vor unese celkem 180 g (obr. 4), tedy o 65 g více než v úloze 3).

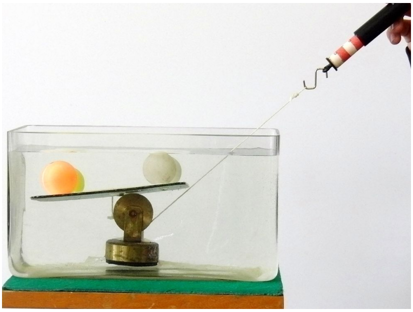


Obr. 4

7) *Výpočet velikosti vztlakové síly působící na prázdný úplně ponořený vor a ověření pokusem.*

Objem celého tělesa voru je 180 cm^3, vztlaková síla působící na zcela ponořený vor je 1,8 N. Ověření proběhlo pokusem podle obr. 5.[2] Siloměr ukázal sílu 1,8 N.

[2]Provádění tohoto pokusu ukázalo, že technicky je jednodušší vztahovat vor pod hladinu míčky obrácenými nahoru.



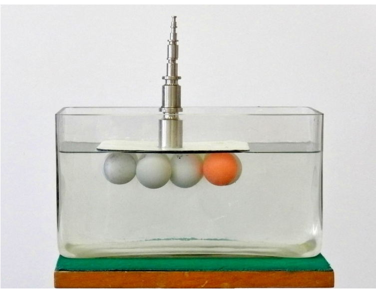
Obr. 5

8) *Navržení zvýšení nosnosti voru a ověření pokusem (uvažujme, že deska má zůstat nad hladinou).*

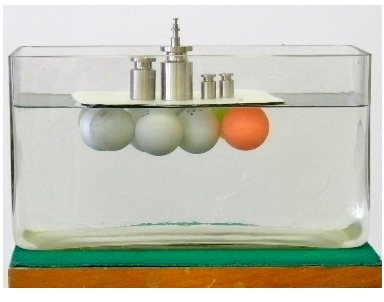
Žáci navrhli několik způsobů: Podlepit nosnou desku voru např. polystyrénovým kvádrem vloženým mezi míčky, nebo doplnit několik míčků, popř. kolem nosné desky přilepit mantinely. Poslední uvedený námět však činí z voru loďku, proto jsme jej nevyužili.

Pro závěrečný pokus byl vor upraven tak, že jeho nosnost zajišťovalo 12 míčků s celkovým objemem asi 345 cm^3. Takto upravený vor se zatížením 346 g ukazuje obr. 6.

Pokus byl mj. zajímavý i tím, jak obtížné bylo položit na vor závaží, aniž by se převrhl. K překvapení žáků se ukázalo, že snáze lze na vor umístit závaží podle obr. 6 než podle obr. 7.



Obr. 6



Obr. 7

Informatika jako obor

RADIM BĚLOHLÁVEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Proč se zabývat otázkou, co je informatika?

Denně čteme a slýcháme o tom, že žijeme v informační společnosti, že dnešnímu světu vládnou informační technologie (IT) a že bez jejich znalosti se nelze obejít.[1] Ve firmách i ve státních organizacích existují oddělení informatiky nebo IT, v letech 2003–2007 v České republice dokonce existovalo Ministerstvo informatiky. Předměty s informatickou náplní se staly součástí učiva na základních a středních školách.

Všeobecně rozšířená představa o tom, co informatika vlastně je, je ale chybná. Tuto představu bohužel velmi často získávají i žáci základních a studenti středních škol. Základní důvody jsou přitom prosté: za prvé, nesprávnou představu mají jejich učitelé, kteří ve většině případů informatiku nevystudovali; za druhé, výuka vychází ze špatných učebních osnov.[2] Žáci a studenti jsou tímto stavem pochopitelně ochuzeni. V mnoha evropských zemích včetně České republiky se pro výuku informatiky na zá-

[1] Zajímavým aspektem zmíněné nabídnuté představy o dnešní společnosti jako společnosti informační, popřípadě o dnešní době jako o éře informací, je – přes nesporný zásadní význam, který informační technologie v dnešní společnost mají – mnohdy zcela nekritické přijímaní této představy i představ podobných, jako je představa o tzv. znalostní společnosti. Jako by informace a znalosti dříve zásadní roli neměly.

[2] Státní kurikulární dokumenty, tj. dokumenty předepisující obsah vzdělávacích oblastí a oborů v jednotlivých etapách vzdělávání, jsou pro informatiku neuspokojivé. Nejde o počty hodin těchto předmětů, ale o jejich náplň. Jako symbolický doklad uveďme, že v současném rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia [7] je vzdělávací obor „Informatika a informační a komunikační technologie“ uveden za obory „Výtvarný obor“, „Výchova ke zdraví“ a „Tělesná výchova“. V podobně neutěšené situaci je i ekonomie.

kladních a středních školách chystají změny.[3] Zatímco takové změny jsou během na dlouhou trať, pokusit se uvést nesprávnou představu o informatice na správnou míru lze hned. Pokusíme se o to v tomto článku.

Článek je určen zejména středoškolským studentům a učitelům. Studentům může pomoci v rozhodování o dalším studiu. Zatímco představa o podstatě matematiky, fyziky nebo chemie získaná na střední škole v zásadě umožňuje kompetentně se rozhodnout, zda tento obor studovat dále, případný zájemce o vysokoškolské studium informatiky je na tom hůř – střední škola mu totiž mnohdy nabízí představu matoucí. Učitelům, zvláště těm, kteří informatiku nestudovali, snad článek poskytne osvětlující pohled na informatiku jako obor, dá chuť dovědět se o některých oblastech více a třeba i začít vyučovat informatiku jinak.

Chceme ukázat, že informatika je samostatný vědní obor, který má kromě četných, viditelných a dnes a denně všemi využívaných aplikací také – jako jiné obory – své hodnotné teoretické jádro, a že povědomí o tomto jádře – stejně jako povědomí o elementárních fyzikálních, chemických, matematických či ekonomických principech a zákonech – člověku umožňuje lépe se orientovat ve světě a zvládat problémy, se kterými se potýká.

Co informatika není

Informatik je podle rozšířené představy ten, kdo „rozumí počítačům, vyzná se ve všech těch programech a aplikacích, hlavně od Microsoftu, jako třeba Word, Excel a Internet Explorer, umí je nainstalovat, umí spravit, když něco na počítači nefunguje, umí připojit počítač k síti, rozšířit mu paměť, když je pomalý, zprovoznit tiskárnu, vyzná se v internetu, umí vytvářet webové stránky, ví, jak synchronizovat počítač a mobil s cloudem, umí třeba i pracovat s databázemi . . . a ještě spoustu dalších věcí“. Vyzná se prostě v informačních technologiích, je to tedy „ajťák“. Patří k němu i to, že pořád sedí u počítače, což dělat musí, protože IT se tak rychle vyvíjí, že je pořád něco nového a úplně jiného. Sledovat ten vývoj je tedy jediná možnost, jak se v tom vyznat.[4] Tuto nesprávnou představu dobře ilustruje

[3] Situace v jednotlivých evropských zemích analyzuje studie [1]. Vláda ČR přijala 12. listopadu 2014 jako usnesení vlády ČR č. 927/2014 strategii digitálního vzdělávání [8].

[4] Výše popsaná představa vychází z toho, že většina lidí sama s počítačem a IT pracuje, a setkává se tedy například s prodejci počítačů, správci počítačů nebo správci sítí. Nechceme zde nijak snižovat tyto náročné profese. Odráží však jen zlomek toho, co informatika představuje. Je to podobné, jako kdyby člověk na základě toho, že zná, co dělá ekonomické oddělení jeho zaměstnavatele, odvodil, že ekonomie je vědou o účetnictví.

následující rozhovor mezi prarodiči a vnukem z populárního seriálu Ulice, který vysílá TV Nova:[5]

> Babička: „Kdybys šel na informatiku, tak ji budeš dělat levou zadní. Počítače máš přece v malíku.“
>
> Vnuk: „Hm, přesně, tohle je jenom ztráta času. Navíc, ty věci jdou tak rychle dopředu, že to, co se voni dneska naučej, už je za dva roky zastaralý.“
>
> Babička: „No jestli je to tak, tak co tam pak lidi studujou pět let?“
>
> Děda: „A neměly by se vysoký školy zavřít, když jsou tak zbytečný?“
>
> Vnuk: „Ale já neříkám, že jsou zbytečný. Pro někoho jsou třeba užitečný.“
>
> Děda: „Ale pro tebe ne, že?“
>
> Vnuk: „Nevím, no, teď mám pocit, že ne.“

Co tedy informatika je?

Definice informatiky

Informatika je obor mladý a k tomu navíc značně různorodý. Pokusíme-li se ho charakterizovat stručnou definicí, bude to nutně definice abstraktní, a tedy možná hůře srozumitelná. Pokusíme-li se ho charakterizovat výčtem oblastí nebo problémů, kterými se zabývá, bude to výčet poměrně dlouhý, navíc vzhledem k mládí tohoto oboru a jeho stále ještě rychlému vývoji výčet nestabilní (objevují se nové problémy, členění do oblastí se mění). Přesto se pokusíme o obojí. Začneme stručnou definicí, která míří k jádru věci:

> *Informatika se zabývá studiem procesů zpracovávajících informace, jejich teoretickými základy, analýzou, návrhem, efektivitou, implementací a aplikacemi, ať už jde o informace uložené ve formě bitů v paměti počítače, nacházející se v dokumentech na internetu nebo zapsané v genech živých organismů. Základní otázkou, která se promítá do všech oblastí informatiky, je: Co vše lze efektivně mechanicky spočítat?*

Existuje celá řada jiných, více či méně podobných definicí. Ta naše vychází z klasického článku [4]. Za pozornost stojí také [6], zřejmě první

[5] 2975. díl, 19. února 2016. Děkuji paní Aleně Kolovrátníkové, že mě na něj upozornila a dala mi jeho přepis.

článek, který se pokusil informatiku definovat, a dále pak celá řada zajímavých článků o informatice jako oboru a profesi, viz například [2, 3], jejichž autorem nebo spoluautorem je Peter J. Denning.[6]

V angličtině se pro pojem informatika používají dva termíny: „computer science“, který je používaný zejména v Severní Americe, a „informatics“, který je běžněji užívaný v evropských zemích, protože – stejně jako v češtině – je bližší místně používanému termínu („Informatik“ v němčině, „informatique“ ve francouzštině, „informatica“ v italštině, „informática“ ve španělštině, „informatyka“ v polštině).[7] Doslovný překlad termínu „computer science“, tedy „věda o počítačích“, nás přivádí k důležité otázce: jaký je vztah informatiky a počítačů?

Už v práci [6] autoři správně poznamenali, že chceme-li uvažovat o „computer science“ jako o oboru, který studuje počítače, je třeba „počítač“ chápat jako „žijící počítač“, tj. nejen hardware, ale i počítačové programy, algoritmy a vše, co s tím souvisí. Spíše než o počítače jde tedy o fenomény, které počítače doprovázejí a které je díky nim možné studovat. Popisovaný vztah pěkně vyjadřuje citát, který je připisován jednomu z průkopníků informatiky Edgaru Dijkstrovi:

> *Informatika není o počítačích o nic víc, než je astronomie o dalekohledech.*[8]

Počítač je pro informatiku zejména nástrojem, i když samozřejmě nástrojem nezbytným a zásadním. Právě na počítačích se totiž implementují a realizují zmíněné procesy zpracovávající informace, které informatika studuje. Prvořadé jsou ale ty procesy, ne počítače.

Jak informatici pracují

Počítače konstruují a jejich návrhem se zabývají elektroinženýři. Je ovšem pravdou, že poznatky informatiky návrh počítačů ovlivňují (procesory se navrhují tak, aby určité typy výpočtů byly rychlé) a naopak, že soudobé možnosti počítačů ovlivňují metody zpracování informací, kterými se informatika zabývá (zkoumají se ty metody, které jsou na dostup-

[6] Americký informatik a bývalý prezident hlavní informatické společnosti Association for Computing Machinery (ACM).

[7] Jako první tento termín použil německý průkopník informatiky Karl Steinbuch v článku „Informatik: Automatische Informationsverarbeitung“, který vyšel v roce 1957 v SEG-Nachrichten, Heft 4.

[8] Computer science is no more about computers than astronomy is about telescopes. Dijkstra je známý i jinými podobně trefnými výroky, například: Nemusím ztrácet svůj čas prací u počítače jen proto, že jsem informatik (I don't need to waste my time with a computer just because I am a computer scientist); překlady vlastní.

ných počítačích realizovatelné). Ostrá hranice mezi informatikou a elektroinženýrstvím neexistuje. Někteří by řekli, že návrh počítačů a hardware je jednou z oblastí informatiky, někteří, že to už není informatika, ale elektroinženýrství. Většina by se však shodla na tom, že to je hraniční oblast, kde se informatika s elektroinženýrstvím prolíná.

Oblastí, které představují prolínání informatiky s jinými obory, je celá řada. Tak například s matematikou se informatika prolíná ve výpočetní matematice, při studiu konečných a diskrétních struktur nebo v logice a automatickém dokazování, s fyzikou v oblasti kvantových výpočtů a kvantové kryptografie, s chemií v oblasti výpočetní chemie a počítačového modelování chemických procesů, s biologií v oblasti bioinformatiky a biologicky inspirovaných výpočetních procesů, s psychologií v oblasti umělé inteligence a HCI (human-computer interaction, interakce člověka a počítače) a mohli bychom uvést mnoho dalších příkladů. Typické také je, že v mnohých z těchto oblastí se prolíná oborů více. Například v umělé inteligenci je to kromě informatiky a psychologie podstatnou měrou také matematika a elektroinženýrství. Tyto oblasti prolínání existují i u jiných oborů, než je informatika (prolíná se například matematika a fyzika, fyzika a chemie, matematika a psychologie nebo ekonomie a psychologie). Pro informatiku jsou ale takové oblasti prolínání typické a četné, byť tyto oblasti informatiku zdaleka nevyčerpávají.

Stejně jako prolínání matematiky s fyzikou neznamená, že by fyzika byla jen odvětvím matematiky nebo naopak, neznamená prolínání informatiky s matematikou, že by informatika byla odvětvím matematiky.[9] S touto představou se nicméně setkáváme, stejně jako s představou, že informatika je odvětvím elektroinženýrství. Obě pramení z toho, že v počátcích informatiku rozvíjeli lidé, kteří byli původem zejména matematici nebo elektroinženýři, a že teprve postupem času se informatika etablovala jako samostatný obor. Dnešní informatici – výzkumníci i lidé z praxe – jsou již většinou absolventy informatických studijních oborů a takto neuvažují. Informatika je prostě jejich oborem a za samostatný obor ji samozřejmě považují. Setrvačnost a také nedostatek povědomí o tom, čím se vlastně informatika zabývá, však vedou k tomu, že představa o informatice jako odnoži matematiky nebo elektroinženýrství u neinformatiků zatím přetrvává.

[9] Poznamenejme, že toto prolínání je „obousměrné“ a nespočívá jen v tom, že informatika využívá matematické metody. Například v numerické matematice se metody informatiky používají při řešení matematických problémů.

Jak tedy informatika jako obor vypadá? Jakému z klasických oborů se nejvíc podobá? Každý má základní představu o tom, že matematikova práce spočívá zejména v tom, že definuje pojmy (například prvočíslo, kvadratická rovnice apod.) a o těchto pojmech dokazuje teorémy (tj. matematická tvrzení, například že prvočísel je nekonečně mnoho nebo že řešení kvadratické rovnice je dáno určitým vzorcem). Fyzik, chemik nebo biolog pozoruje přírodu (každý na jiné úrovni), formuluje o chování přírody hypotézy a tyto hypotézy pak experimentálně ověřuje. Inženýři pak zejména navrhují a vyvíjejí umělé systémy (televize, letadla, domy, komunikační sítě), tyto systémy konstruují, analyzují a uvádějí do provozu. To jsou určující rysy tří základních vědeckých paradigmat – matematického, přírodovědeckého a inženýrského. V informatice nalézáme kombinaci těchto paradigmat. Některé oblasti mají – stylem a metodami práce – povahu matematiky: teoretičtí informatici definují pojmy a dokazují teorémy; tyto teorémy ale nejsou jen o obvyklých matematických pojmech jako celé číslo, kvadratická funkce nebo hyperbola, ale o přesných, formálně definovaných pojmech informatiky jako je časová složitost výpočtu, uváznutí v distribuovaném systému nebo suboptimální řešení problému. Některé oblasti mají povahu inženýrskou: návrh operačních systémů, vývoj softwarových aplikací a softwarové inženýrství, návrh komunikačních protokolů pro počítačové sítě. Některé mají povahu přírodních věd: experimentální algoritmika formuluje a ověřuje hypotézy o chování složitých algoritmů, které nelze analyzovat jinak než pomocí experimentů; vědci v umělé inteligenci se zabývají hypotézami o tom, jak řeší problémy člověk, a testují je na počítači; testují se hypotézy o tom, jak funguje životní cyklus softwaru a jak vznikají chyby. Dalo by se říci, že metody informatiky jsou směsí metodických přístupů matematických, inženýrských a přírodovědeckých. Ne každý informatik všechny tyto přístupy uplatňuje. Například teoretičtí informatici si velmi často vystačí s tužkou a papírem, a tedy neexperimentují ani nepoužívají inženýrské metody; vývojáři software naopak téměř nikdy nedokazují teorémy. Tedy:

Informatika používá metody matematické, inženýrské i přírodovědecké. V některých oblastech převažují matematické, v jiných inženýrské, v některých přírodovědecké. Typická pro informatiku je kombinace těchto přístupů.

Existuje ale nějaký obecný rys společný všem oblastem informatiky? Rys, který by informatiku dobře charakterizoval? Vzhledem k rozmanitosti informatiky to je obtížná otázka. Jednu možnou odpověď dává hnutí

Great Principles of Computing Petera Denninga, které definuje několik základních principů společných různým oblastem informatiky.[10]

Algoritmus jako základní pojem

Druhá možná odpověď vychází ze skutečnosti, že základním konceptem, přítomným v každé oblasti informatiky, je pojem *algoritmus*. Stručně řečeno, *algoritmus je konečná posloupnost instrukcí pro řešení nějakého problému, které lze vykonávat mechanicky, tj. vykonávání nevyžaduje důvtip nebo dodatečný vhled do problému.* Slovo „algoritmus“ pochází ze jména významného perského matematika al-Chvárizmího, které bylo v latině přetvořeno na Algorismi.[11]

Příkladem algoritmu, který zná každý už od základní školy, je algoritmus pro sčítání čísel v desítkové soustavě: dvě sčítaná čísla napíšeme pod sebe a sčítání provádíme po jednotlivých číslicích zprava s přenášením jedničky, pokud součet přesáhne 10. V informatice mají algoritmy zásadní roli: všechny výdobytky informatiky mají někde uvnitř dobře navržený algoritmus. Informační technologie, které v dnešní době často považujeme za samozřejmé, nám pomáhají jen díky tomu, že někde uvnitř „běží“, neboli je procesorem vykonáván, vhodný algoritmus. Říkáme-li „chytrý telefon“, „chytrý internetový vyhledávač“, „dobrý kompresní program“, „inteligentní robotický vysavač“, „bezpečná komunikace“, „dobrý textový procesor“, „kvalitní filtr spamových e-mailů“, pak – jdeme-li k jádru věci – to vždy znamená dobře navržený algoritmus. Například algoritmus pro vyhledávání na internetu, který prohledá vše, ale vrátí jen to významné a relevantní; algoritmus komprese dat, který má velký kompresní poměr a je rychlý; algoritmus, který umožňuje odesílateli data spolehlivě zašifrovat a příjemci je pak dešifrovat; algoritmus, který rozpozná, že e-mail je spam, a podobně.

Aby mohly být algoritmy vykonávány počítačem, musí být zapsány v programovacím jazyce, tj. v symbolické formě, které počítač rozumí. Tvorba algoritmů je ale něco jiného než programování. Programování je jen zápis algoritmů ve formě vhodné pro počítač, i když „jen“ by mělo být v uvozovkách. Samo o sobě je programování náročným oborem a s tvorbou algoritmů je velmi úzce provázáno. Složitější programové systémy, například rozsáhlé informační systémy, software v automatických pilotech

[10] http://greatprinciples.org/

[11] Žil přibližně v letech 780–850. Český překlad jeho díla je nyní k dispozici s rozsáhlým historickým komentářem: Al-Chvárizmí, *Aritmetický a algebraický traktát* (Nymburk: OPS, 2009).

dopravních letadel nebo operační systémy počítačů, obsahují celou řadu algoritmů – algoritmy tvoří základní stavební bloky takových systémů.

Algoritmy může pochopitelně vykonávat člověk, tak jako když na papíře sčítáme dvě čísla. Fascinující užitečnost algoritmů je ale dána tím, že je můžeme vykonávat na počítačích, tj. velmi rychle (nejrychlejší počítače umí vykonávat desítky biliard aritmetických operací za sekundu[12]), opakovaně (počítač se totiž neunaví) a bez zásahu člověka.

Prvním zařízením pro vykonávání algoritmů byl abakus, kuličkové počítadlo, které se používalo už v Sumeru před více než čtyřmi tisíci roky. Myšlenka sestrojit samočinný počítací stroj prošla dlouhou cestou. Je značkována milníky v podobě mechanické kalkulačky Blaise Pascala z roku 1642, na kterou navázal Gottfried Leibniz pokročilejší kalkulačkou Step Reckoner sestrojenou v roce 1673. V roce 1837 popsal Charles Babbage první univerzálně programovatelný počítač, mechanický Analytical Engine. V roce 1843 napsala Ada Lovelace první program pro takový počítač. Trvalo však dalších sto let, než byl univerzálně programovatelný počítač sestrojen. Byl jím první programovatelný elektronický počítač Colossus Mark 1, který byl uvedený do provozu v prosinci 1943. Byl pak používán v Bletchley Park v Anglii ve známém projektu britské vlády, jehož cílem bylo luštit šifrované zprávy německé armády. Poznamenejme také, že již v roce 1937 ale americký fyzik Howard Aiken navrhl první elektromechanický počítač Harvard Mark 1. Ten byl pak v roce 1944 sestrojen firmou IBM v americkém Endicottu. Ohromující užitek, který počítače přinesly zejména pro vojenské operace druhé světové války, vedl k nevídaně rychlému vývoji v oblasti počítačů a počítačové techniky, který trvá dodnes.

Lidé se zabývají algoritmy již po dlouhá staletí. Například velký řecký matematik Eukleides (cca 325–260 př. Kr.) popsal známý algoritmus pro nalezení největšího společného dělitele dvou čísel ve svých *Základech* už kolem roku 300 př. Kr.[13] Lze říci, že teprve moderní počítače a jejich dostupnost ukázaly, jak mocným vynálezem algoritmus je. Bez nadsázky lze říct, že pojem algoritmus patří mezi nejvýznamnější plody lidského

---

[12] Přesně řečeno desítky biliard FLOPS (floating-point operations per second, tj. operací v tzv. plovoucí řádové čárce za sekundu). Jedna biliarda je 10^{15}, tj. 1 000 000 000 000 000. Viz také seznam 500 nejrychlejších počítačů na světě na `https://en.wikipedia.org/wiki/TOP500`.

[13] Český překlad tohoto významného díla evropské vědy vyšel s podrobnými komentáři Petra Vopěnky nedávno: Eukleides, *Základy. Knihy I–XIII* (Nymburk: OPS, 2008–2012).

ducha. Pěkně to vystihují následující citáty:[14]

Na sametu klenotníka září dvě ideje. První je kalkulus,[15] druhý je algoritmus. Kalkulus a bohatý repertoár matematické analýzy, který byl díky němu vytvořen, umožnil vznik moderní vědy; ale byl to algoritmus, díky němuž mohl vzniknout moderní svět.

–D. Berlinski, *The Advent of the Algorithm*, 2000

Člověk s informatickým vzděláním ví, jak nakládat s algoritmy: jak je vytvářet, zacházet s nimi, rozumět jim, analyzovat je. Tato schopnost nás připravuje na mnohem více než jen na psaní dobrých počítačových programů; je to obecný myšlenkový nástroj, který nám pomáhá porozumět jiným oblastem, ať už chemii, lingvistice nebo třeba hudbě. Důvod této skutečnosti je následující. Často se říká, že člověk dané věci nerozumí, dokud ji nevysvětlí jinému. Ve skutečnosti ale člověk dané věci nerozumí, dokud ji nevysvětlí počítači, tj. nevyjádří ji formou algoritmu… Přístup spočívající ve formalizaci prostřednictvím algoritmů vede k mnohem hlubšímu porozumění, než když se věcem snažíme porozumět tradičním způsobem.

–D. E. Knuth, *Selected Papers on Computer Science*, 1996

Druhý citát explicitně upozorňuje na všeobecnou užitečnost algoritmů. Již v padesátých letech 20. století se začal objevovat termín *algorithmic thinking*, tedy *algoritmické myšlení*. Vlivem práce [9] se později začal používat, prakticky pro totéž, termín *computational thinking*, což lze přeložit jako výpočetní nebo výpočetně-orientované myšlení. Tento pojem představuje přístup k řešení problémů používaný v informatice: formulaci problému jako transformaci přesně popsaných vstupů na přesně popsané výstupy a hledání algoritmů provádějících takovou transformaci. Důsledné uplatnění tohoto v principu jednoduchého přístupu zahrnuje řadu koncepčně důležitých a technicky někdy i značně netriviálních kroků, které jsou jádrem způsobu práce informatiků. Musíme si při něm uvědomit mimo jiné toto: jak je vlastně problém přesně formulován, včetně případných dodatečných omezení, a jak ho vhodným způsobem přesně, tedy formálně reprezentovat; co vlastně je správným řešením problému, zda a do jaké míry je přijatelné řešení přibližné, suboptimální; jak problém strukturo-

[14] Překlady vlastní.

[15] „Kalkulus“ zde znamená diferenciální a integrální počet, tj. nauku o derivování a integrování funkcí.

vat, rozložit na podproblémy a zda a jak je řešení těchto podproblémů navzájem provázáno; že v mnoha případech lze díky vhodné abstrakci převádět tyto podproblémy na problémy, pro něž řešení už známe; jaká je složitost daného problému a jak ji kvantifikovat; zda dostupné zdroje pro řešení problému vůbec umožňují daný problém vyřešit; jaká je složitost jednotlivých kroků navrhovaného výpočtu, jak ji kvantifikovat (např. vyjádřit, kolik času kroky zaberou); zda je tato složitost přijatelná, popř. zda je potřebné a možné jednotlivé kroky dělat jinak, efektivněji.

Snad je patrné, že algoritmické myšlení zahrnuje soubor všeobecně prospěšných dovedností, jejichž osvojení je užitečné nejen informatikům, ale každému, kdo chce být dobře vzdělaný, a tedy dobře připravený pro život. Význam algoritmického myšlení pro člověka se odráží ve snahách – pozorovatelných v posledních deseti letech v Evropě i v USA – změnit způsob výuky informatiky na základních a středních školách. Základní myšlenka zní: ze stejného důvodu, pro který jsou do výuky zařazovány matematika a přírodní vědy, by do ní měly být zařazeny základy algoritmického myšlení. Ne proto, že bychom chtěli v prvé řadě vychovat více informatiků, ale proto, že algoritmické myšlení je dobrou průpravou pro život (stejně tak matematiku neučíme v prvé řadě proto, že bychom chtěli vychovat více matematiků). Takový záměr je obsažen i ve strategii Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy [8], ve které se termín „computational thinking“ překládá souslovím „informatické myšlení“. Tuto vítanou snahu lze charakterizovat slovy, která by nejspíš podepsala naprostá většina zasvěcených: více výuky algoritmického myšlení, méně výuky soudobých informačních technologií a počítačové gramotnosti, které mají z podstaty věci menší hodnotu a jen dočasnou platnost.[16]

Informatika jako vědní obor

V mnohých kruzích je informatika chápána jako užitečný pomocník ostatních oborů, jako nástroj, spíše než jako plnohodnotný, samostatný vědní obor. Že jde o samostatný obor, jsme do jisté míry objasnili výše. Pojďme se ale na věc podívat podrobněji a začněme důležitou otázkou: Má informatika – podobně jako matematika, fyzika, chemie nebo biologie – nějaké fascinující penzum poznatků, které má neoddiskutovatelnou intelektuální hodnotu, dokáže uchvátit laika nebo zlákat pro obor studenta? Má tedy informatika něco podobně poutavého jako je teorie relativity nebo

[16]Kromě toho, jak každý rodič ví, děti se používání informačních technologií učí snadno a rychle samy.

kvantová mechanika ve fyzice, geometrie vícerozměrných prostorů nebo teorie nekonečných množin v matematice či evoluce a genetika v biologii? Má. Takových oblastí je řada. Příkladem jsou šifrování (kryptografie), umělá inteligence, strojové učení, teorie informace nebo teorie výpočtů a výpočetní složitost. O všech těchto oblastech se pro jejich atraktivitu píšou populární knížky. Pro úplnost uveďme i některé další – zda je považujeme za zajímavé, je koneckonců otázka vkusu. Mezi další oblasti informatiky tedy patří: programovací jazyky a překladače, programování, vývoj softwaru a softwarové inženýrství, architektura počítačů, operační systémy, počítačové sítě, paralelní a distribuované systémy, databázové systémy, informační systémy, dolování znalostí z dat (data mining), numerické a symbolické výpočty, zpracování signálů, počítačová grafika a počítačové vidění, komprese dat a další. V tomto článku se všem oblastem podrobněji věnovat nemůžeme. Omezíme se proto na jedinou z nich, teorii výpočtů a výpočetní složitosti, která představuje teoretický základ celé informatiky.

Základní otázky, kterými se teorie výpočtů zabývá, jsou: co je to algoritmus, co je to výpočet a co vlastně lze pomocí algoritmů na počítačích řešit? Bez důkladného porozumění těmto otázkám bychom přísně vzato nevěděli, o čem mluvíme, když se o informatice bavíme. Skeptik řekne: „Nejsou ale přeci jen tyto otázky zbytečné? Vždyť co je algoritmus, jsme už řekli. Co je to výpočet, je taky vcelku jasné. A co že lze na počítačích spočítat? Má nás vůbec tato otázka zajímat? Vždyť v praxi to je jinak: dostaneme problém a my prostě navrhneme algoritmus a napíšeme program, který tento problém vyřeší. A tím se také dostáváme k odpovědi na tuto poněkud teoretickou otázku, pokud na ní tedy tazatel trvá: jakýkoli výpočetní problém, který je přesně zadaný – to znamená, že je přesně popsáno, jak vypadají vstupy a odpovídající výstupy – je v principu počítačem zvládnutelný. Může to být pracné, ale požadovaný program je možné napsat.“

Byť se tyto skeptikovy úvahy zdají být rozumné, jsou zásadně chybné. Za prvé, výše uvedená definice pojmu algoritmus není žádná definice. Definice má být přesná, naše však přesná není. Naše „definice“ je jen intuitivní vysvětlení, se kterým se nedá přesně pracovat. Toho si byli vědomi průkopníci moderní informatiky, zejména Alonzo Church a Alan Turing, který vytvořil přesnou definici toho, čemu se dnes říká Turingův stroj. Turingův stroj je přesně definovaný matematický model jednoduchého počítače.[17]

[17]Není to tedy fyzický počítač. Je to abstrakce, přesně popsané schéma, podle kte-

Churchova–Turingova teze je tvrzení, které říká, že problémy intuitivně řešitelné pomocí algoritmů na běžných počítačích jsou právě problémy řešitelné na Turingových strojích. Tuto tezi nelze dokázat, protože spojuje intuitivní pojem (výpočet podle algoritmu) s pojmem přesně definovaným (výpočet na Turingově stroji). Jinými slovy, teze říká, že pojem Turingova stroje bychom měli brát za přesnou definici pojmu algoritmus, a informatici tuto tezi skutečně přijímají.

Kromě přesné definice algoritmu přináší pojem Turingova stroje možnost konečně uchopit naši otázku, co všechno lze pomocí algoritmů řešit. Ta je už teď totiž přesně definovaná. Čeká nás překvapení, které koncem třicátých let objevili nezávisle na sobě výše zmínění Church a Turing a které v té době vědce šokovalo: existují jednoduché, přesně formulované výpočetní problémy, které nejsou Turingovými stroji řešitelné, tedy nejsou na počítači řešitelné žádným algoritmem. Těchto takzvaně *algoritmicky neřešitelných problémů* existuje celá řada, ve skutečnosti více než algoritmicky řešitelných.[18] Zmíníme se o dvou z nich.

Prvním je *problém zastavení* (halting problem). Jedna z jeho variant je tato:[19] na vstupu je zdrojový kód algoritmu (v nějakém předem zvoleném programovacím jazyce); úkolem je rozhodnout, zda se tento algoritmus vždy, tj. pro libovolná vstupní data, zastaví.[20] To je ryze praktický problém. Představme si, že softwarová firma ví, že její programátoři dělají chyby často vedoucí k tomu, že se program zacyklí. Vedení firmy se rozhodne, že je třeba vyvinout testovací program, který takové chyby pomůže odhalovat. Takový program, označme ho T, má pracovat následovně. Na vstup dostane zdrojový kód testovaného programu P. Testovací program T má odpovědět „ano“, pokud je testovaný program P v pořádku, tj. P by se zastavil pro jakákoli vstupní data, a „ne“ v opačném případě, tj.

---

rého by se fyzický počítač dal postavit. Church navrhl místo pojmu Turingův stroj jiný teoretický pojem, takzvaný λ-kalkul. Oba stavěli na tehdy čerstvých výsledcích fenomenálního logika, brněnského rodáka Kurta Gödela.

[18] Algoritmicky neřešitelných problémů je nekonečně mnoho, dokonce nespočetně mnoho. Algoritmicky řešitelných problémů existuje také nekonečné množství, toto množství je ale spočetné. Neřešitelných je tedy více než řešitelných: pokud bychom se pokusili řešitelné problémy s neřešitelnými spárovat, nějaké neřešitelné vždy zbydou.

[19] V původní formulaci je na vstupu zdrojový kód algoritmu a data pro tento algoritmus; úkolem je rozhodnout, zda se algoritmus spuštěný s těmito daty na vstupu zastaví.

[20] Mohl by se totiž takzvaně zacyklit, a tedy nikdy neskončit. Jako příklad uveďme algoritmus, který obsahuje po sobě následující instrukce „do proměnné i vlož hodnotu 3“ a „pokud $i > 3$, pokračuj další instrukcí, jinak se vrať k předchozí instrukci“.

pokud se testovaný program P pro nějaká vstupní data zacyklí.[21] Takový program T by jistě bylo užitečné mít. Háček je v tom, že žádný takový program neexistuje, tj. nejen že ho nikdo dosud nevytvořil, ale ani ho nikdy nevytvoří, protože je matematicky dokázáno, že neexistuje. Tento poznatek je jedním z elementárních výsledků teoretické informatiky.

Druhý algoritmicky neřešitelný problém souvisí s dávným snem o strojích, které by byly schopné samostatně myslet. Zjednodušená podoba tohoto mnohovrstevného snu může znít následovně. Máme dána nějaká tvrzení, ze kterých chceme vycházet a která považujeme za pravdivá. Takovým tvrzením říkáme axiomy. Množinu daných axiomů označme S. Označme dále symbolem t nějaké další dané tvrzení. S může být systém axiomů popisujících vlastnosti přirozených čísel, operací sčítání a násobení a podobně, t může být tvrzení „když x je dělitelem y a y je dělitelem z, pak x je dělitelem z". V principu ale může jít o jakékoli axiomy a tvrzení, které můžeme zapsat pomocí klasické logiky. Úkolem je rozhodnout, zda tvrzení t z axiomů S plyne.[22] Tento problém, takzvaný *Entscheidungsproblem* (problém rozhodnutí), předložil v roce 1928 známý německý matematik David Hilbert jako zásadní matematický problém. Pokud by existoval algoritmus, který by *Entscheidungsproblem* řešil, znamenalo by to mimo jiné, že značnou část práce matematiků, ale i jiného formalizovaného usuzování a odvozování, by bylo možné provádět mechanicky pomocí počítače. Bylo ovšem dokázáno, opět k velkému překvapení Hilberta i ostatních, že takový algoritmus neexistuje. V určitých případech mechanické odvozování možné je, obecně ale ne.

Příběh má ovšem zajímavé pokračování a vede k jedné z nejdůležitějších otevřených otázek současné informatiky, otázce *P versus NP*. Pokud se ukáže, že problém, který řešíme, je algoritmicky řešitelný, nemáme ještě vyhráno. Důležité totiž je, jak rychlý je algoritmus, který pro řešení tohoto problému máme, tj. jak je náročný na čas. Tato časová náročnost, nazývaná v teorii výpočtů *časová složitost algoritmu*, se – zhruba řečeno – měří v počtech instrukcí, které musí algoritmus pro vyřešení problému vykonat.

Řekneme-li, že časová složitost algoritmu je n^2, znamená to, že bude-li tento algoritmus zpracovávat vstup velikosti n, pak v nejhorším možném případě bude k provedení výpočtu zapotřebí provést n^2 instrukcí. Tedy pokud problém spočívá v setřídění vstupní posloupnosti n čísel od nejmen-

[21] S touto úlohou se na nás na Katedře informatiky Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci skutečně firmy obracejí.

[22] Přesněji: zda z nich vyplývá ve smyslu klasické predikátové logiky.

šího po největší, pak pro posloupnost, pro kterou trvá výpočet nejdéle, algoritmus vykoná n^2 instrukcí. Předpokládáme-li, že výpočet probíhá na superpočítači, který provede 10^{15} instrukcí za sekundu, pak i setřídění posloupnosti milionu čísel, tj. $n = 10^6$, je velmi rychlé – trvá jednu tisícinu sekundy. Potřebný čas je totiž

$$\frac{\text{počet instrukcí}}{10^{15}} = \frac{n^2}{10^{15}} = \frac{(10^6)^2}{10^{15}} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001 \text{ sekundy.}$$

Pokud by ale algoritmus měl časovou složitost $n!$,[23] byla by situace katastrofická. Předpokládejme, že takový algoritmus budeme chtít použít pro setřídění mnohem kratší posloupnosti, která obsahuje deset tisíc čísel, tj. vstup bude mít velikost $n = 10^4$. Potřebný čas pak je

$$\frac{\text{počet instrukcí}}{10^{15}} = \frac{n!}{10^{15}} \approx \frac{2{,}85 \cdot 10^{35659}}{10^{15}} = 2{,}85 \cdot 10^{35644} \text{ sekundy,}$$

což je asi $9 \cdot 10^{35636}$ let. Uvědomíme-li si, že planeta Země existuje asi $4{,}54 \cdot 10^9$ let, je jasné, že výpočtu tímto algoritmem by se nikdo nedočkal a vůbec o něm nemá smysl uvažovat. Podobně by to dopadlo s algoritmem o časové složitosti 2^n, tedy exponenciální: výpočet pro vstup velikosti $n = 10^2$, tj. setřídění pouhého sta čísel, by trval asi $4 \cdot 10^7$ let, tedy asi 40 milionů let (před 65 miliony let vyhynuli dinosauři). Že máme pro daný problém algoritmus, tedy ještě nic neznamená. Důležité je, jakou má tento algoritmus časovou složitost.

Díky výzkumu v teorii výpočtů dnes víme mnoho zajímavých věcí. Jsou například známy problémy, pro které je dokázáno, že k nim žádný algoritmus s menší než exponenciální časovou složitostí neexistuje. Takové problémy jsou tedy sice algoritmicky řešitelné, ale prakticky vlastně neřešitelné, protože výsledků výpočtu pro větší vstupní data by se nikdo nedočkal. Mnoho zajímavých otázek je ale zatím nevyřešeno. Je například známa celá množina problémů, nazývají se NP úplné, která obsahuje stovky prakticky velmi významných problémů, pro něž se lidé snažili najít

[23] $n!$ je takzvaný faktoriál přirozeného čísla n a je definován takto: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$. Algoritmem se složitostí $n!$ by byl například algoritmus, značně naivní, který by zkoušel všechny možné permutace vstupní n-prvkové posloupnosti a pro každou z nich zjistil, zda je setříděná; pokud ano, skončí, pokud ne, vezme další permutaci. Protože všech takových permutací je, jak známo, $n!$, algoritmus potřebuje v nejhorším případě (zhruba) $n!$ instrukcí.

efektivní, rychlé algoritmy dlouhé desítky let.[24] Nikomu se to ale zatím nepodařilo. Jedním z nich je známý *problém obchodního cestujícího*: je dáno n míst a vzdálenosti mezi nimi; je možné navštívit všechna tato místa tak, aby celková vzdálenost, kterou při tom urazíme, byla nejvýše d? S tímto problémem nebo jeho variantami se potýkají například dopravní společnosti, které mají rozvést do určených míst zboží a přitom spotřebovat co nejméně paliva. Ví se, že pokud by se podařilo najít rychlý algoritmus pro jeden jediný z těchto problémů z množiny NP úplných (libovolný z nich), znamenalo by to, že každý z těchto problémů je řešitelný rychlým algoritmem – tyto problémy jsou jeden na druhý redukovatelné, tj. převoditelné. Nikomu se však zatím takový algoritmus pro žádný z těchto problémů najít nepodařilo. Co když ale takový rychlý algoritmus prostě neexistuje? To je sice možné, ale ani to se zatím matematicky dokázat nepodařilo. Přitom je této otázce věnováno velké úsilí již více než 40 let.[25] Uvedená otázka, známá jako otázka P versus NP, tj. otázka, zda pro problém obchodního cestujícího a další problémy z množiny NP úplných existují rychlé algoritmy, je považována za snad nejdůležitější otevřenou otázku informatiky a za její vyřešení je vypsána odměna jeden milion dolarů.[26] Jak tedy vidíme, informatika nabízí jak fascinující poznatky, tak důležité, zatím nezodpovězené otázky.

Informatika jako obor ke studiu

Proč informatiku studovat

O vysokoškolské studium informatiky je dlouhodobě velký zájem. Je to jednak tím, že všude kolem nás jsou počítače. Práce s nimi je zajímavá a student, ať už pronikl či nepronikl hlouběji než k běžným uživatelským dovednostem, si prostě může říct: „To by mě asi bavilo.“ Druhým faktorem je skutečnost, že vystudovaný informatik velmi dobře najde uplatnění. Tak je to v pořádku, dodejme ale jednu poznámku. Vzhledem k nesprávné představě široké veřejnosti o tom, co informatika obnáší, a tedy nesprávné představě většiny studentů, dochází – možná ve větší míře než u jiných oborů – k tomu, že studovat informatiku se rozhodnou i studenti, kteří si

[24] Rychlým algoritmem se zde rozumí algoritmus, jehož časová složitost je polynomická, tj. například n^2, n^3 nebo n^4. Množina problémů, pro které existují tyto rychlé algoritmy, se značí P. Odtud název „P versus NP“.

[25] Neznamená to ale, že bychom při setkání s těmito problémy byli bezbranní. Byly vyvinuty různé *heuristické algoritmy*, pomocí kterých je možné hledat přibližná řešení. Neumíme sice rychle spočítat délku optimální, tj. nejkratší cesty obchodního cestujícího, ale umíme poměrně spolehlivě rychle spočítat délku téměř optimální cesty.

[26] `http://www.claymath.org/millennium-problems/p-vs-np-problem`.

představují, že to bude snadné, a pak studium nezvládnou. Stejný důvod ale vede studenty, kteří se chtějí naučit „něco pořádného“, k tomu, že se na informatiku nepřihlásí, protože si myslí, že informatika není „pořádný“, plnohodnotný obor a že už stejně většinu informatiky znají. Že to tak není, jsme vysvětlili výše. Podtrhněme následující:

> *Studiem informatiky získá student nejen konkrétní znalosti a dovednosti, které bude potřebovat v praxi informatika, ale i schopnosti obecného matematického, logického i inženýrského myšlení. Získá tak nejen předpoklady pro výkon profese informatika, ale i pro výkon povolání vyžadujících analytické schopnosti a racionální, fakty a daty podložené rozhodování.*

Kde lze informatiku studovat

V České republice se vysoké školy tradičně dělí na univerzity a technické školy. Je ale třeba říct, že toto dělení se postupně stírá. Univerzity poskytují vzdělání zejména v přírodovědných, lékařských a humanitních oborech, techniky pak v inženýrských oborech a v ekonomii. Vzhledem k povaze informatiky není divu, že se u nás dá tento obor studovat jak na univerzitách, tak na technikách. Na univerzitách je více než na technikách zastoupena matematická složka, ve studiu je více předmětů o principech informatiky, například o algoritmech a jejich analýze. Na technikách obvykle převládá inženýrská složka informatiky, ve studiu jsou více zastoupeny informační technologie. Na technikách se informatika obvykle studuje na fakultách, které mají slovo „informatika“ v názvu, na univerzitách obvykle na fakultách přírodovědně zaměřených. Z obou typů škol však vycházejí informatici a více než na typu školy záleží na její kvalitě. Kvalitu školy, resp. pracoviště (fakulty, katedry) zabezpečujícího informatické obory, však nelze posuzovat podle žebříčků, které vycházejí v českých denících. Ty jsou nespolehlivé a některá pracoviště se jich už odmítají účastnit. Spolehlivější jsou různá hodnocení zahraniční nebo – což je velmi přínosné – návštěva dne otevřených dveří na dané škole, popřípadě návštěva webových stránek daného pracoviště, které obvykle obsahují podrobné informace o studiu, o zaměření i o vědeckých výsledcích daného pracoviště.

Na předních českých univerzitách[27] lze informatické obory studovat na Univerzitě Karlově v Praze (Matematicko-fyzikální fakulta), Masarykově univerzitě v Brně (Fakulta informatiky) a Univerzitě Palackého v Olomouci (Přírodovědecká fakulta). Na předních technikách pak například na

[27] Posuzováno tradicí a mezinárodními žebříčky kvality.

Českém vysokém učení technickém v Praze (zejm. Fakulta informačních technologií a Fakulta elektrotechnická), Vysokém učení technickém v Brně (Fakulta informačních technologií) a Vysoké škole báňské – Technické univerzitě Ostrava (Fakulta elektrotechniky a informatiky).

Literatura

[1] *Computing Our Future. Computer Programming and Coding: Priorities, School Curricula and Initiatives.* European Schoolnet, Brusel, 2015.

[2] *Denning, P.*: Is computer science science? Communications of ACM, roč. 48 (2005), č. 4, s. 27–31.

[3] *Denning, P.*: The great principles of computing. American Scientist, roč. 98 (2010), s. 369–372.

[4] *Denning, P. et al.*: Computing as a discipline. Communications of ACM, roč. 32 (1989), č. 1, s. 9–23.

[5] National Research Council of the National Academies. Computer Science: Reflections on the Field, Reflections from the Field. National Academies Press, Washington, DC, 2004.

[6] *Newell, A., Perlis, A. J., Simon, H. A.*: Computer science. Science, roč. 157 (1967), s. 1373–1374.

[7] Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. Výzkymný ústav pedagogický v Praze, Praha, 2007, http://www.msmt.cz/uploads/Vzdelavani/Skolska_reforma/RVP/RVP_gymnazia.pdf.

[8] Strategie digitálního vzdělávání do roku 2020. MŠMT, 2014, http://www.msmt.cz/ministerstvo/strategie-digitalniho-vzdelavani-do-roku-2020.

[9] *Wing, J. M.*: Computational thinking. Communications of ACM, roč. 49 (2006), č. 3, s. 33–35.

Z HISTORIE

Jméno experimentálního fyzika Augustina Žáčka je spojeno s vynálezem radaru i „mikrovlnky“

Tímto příspěvkem připomeneme českého vědce a vynálezce, od jehož narození letos uplynulo 130 let a od úmrtí 55 let.

Dnes téměř každý ví, že mikrovlnná trouba je kuchyňský elektrický přístroj na tepelnou úpravu pokrmů. Ne všichni ale slyšeli jméno českého fyzika *Augustina Žáčka*, přestože právě on má co do činění s jeho vynálezem. To však zdaleka není jediný výsledek jeho studia elektromagnetických kmitů a zdrojů mikrovlnné energie, jehož výsledkem byl objev magnetronů. Bez nich by nebyl myslitelný vynález vojenského radaru, který nejdříve významně pomohl spojencům ve druhé světové válce k vítězství nad nacistickým Německem, ale poté se stal spolu s dalšími radiolokačními a sdělovacími zařízeními nepostradatelný v oblasti letecké a námořní navigace.

Psal se rok 1948 a koncem měsíce února byly u nás na základě výzvy Komunistické strany Československa ve všech městech a obcích, podnicích, úřadech, školách a dalších institucích ustavovány – zcela v rozporu s ústavou a platným právním řádem – tzv. akční výbory Národní fronty. Cílem této nezákonné akce bylo provedení politické a existenční likvidace stoupenců demokracie – jejich odvoláním ze zastávaných funkcí, propouštěním ze zaměstnání či vylučováním z veřejného života.

Jednou z prvních obětí těchto čistek akčního výboru Národní fronty na Přírodovědecké fakultě Univerzity Karlovy byl tehdy již dvaašedesátiletý profesor experimentální fyziky PhDr. Augustin Žáček. Zrudlí studenti a zaměstnanci – členové fakultní organizace KSČ převzali „po dělnicku“ školu rázně do rukou. Především začali s prověrkami profesorů, zvláště těch, kterých se potřebovali posluchači pro usnadnění svého dalšího studentského života zbavit. Pověstně přísného a při zkouškách náročného učitele prostě, jak se tehdy říkalo, „vyakčnili“. Protože se veřejně odmítl smířit s nastoupenou cestou nedemokratického vývoje naší republiky, skončilo v roce 1949 natrvalo jeho téměř čtyřicetileté pedagogické a vědecké působení na pražské univerzitě.

Dalším důvodem, proč byl mezi prvními propuštěnými profesory, byla četná setkání s americkými odborníky po roce 1945, kteří se zajímali o jeho práci. Údajně se s vysokými důstojníky americké armády dveře do Žáčkovy pracovny takřka netrhly. To si ovšem zapamatovali ostražití komunisté na „věčné časy“. Proto bylo Žáčkovo jméno po téměř půl století úmyslně skryto ve stínu zapomnění i před odbornou a zejména studentskou veřejností, včetně jeho vypuštění z učebnic. Znovu se objevilo až počátkem 90. let minulého století a v následujících letech, kdy osobnost prof. Žáčka zaujala oprávněné postavení v historii české i světové vědy a techniky v oblasti průmyslové elektroniky a rádiové komunikace.

Dne 13. ledna 2016 uplynulo 130 let, co se Augustin Žáček (v některých pramenech August) narodil v malé obci Dobešicích u Protivína. Absolvoval s vyznamenáním českobudějovické gymnázium a v letech 1905 až 1910 studoval matematiku a zejména fyziku na Filozofické fakultě pražské české univerzity. Po státnicích v prosinci 1909 předložil disertační práci *O zjevech kapilárních*, na jejímž základě byl v následujícím roce promován na doktora filozofie (philosophiae doctor). Se svojí alma mater pak zůstal spjat po celý život. V roce 1910, právě v den svých narozenin, se stal druhým asistentem C. k. Fyzikálního ústavu v Praze. V jeho čele tehdy stál profesor experimentální fyziky *Čeněk Strouhal* (1950–1922). K jeho učitelům patřil také profesor *PhDr. František Koláček* a předčasně zesnulý profesor *PhDr. Bohumil Kučera*, který byl považován za nejtalentovanějšího českého fyzika první čtvrtiny 20. století.

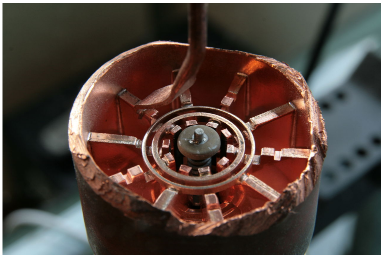
Ve školním roce 1911/1912 Žáček pobýval na Filozofické fakultě göttingenské univerzity, kde se v laboratořích Ústavu pro aplikovanou nauku o elektřině zabýval problematikou generování elektromagnetických vln pomocí obloukového výboje. Svůj pobyt na jedné z nejvýznamnějších německých univerzit zúročil při habilitačním řízení na Přírodovědecké fakultě pražské české univerzity. Na základě předložené *Studie o kondenzátorových kruzích*, která byla publikována v roce 1917 ve Věstníku Královské společnosti nauk a s přihlédnutím k jeho dosavadní vědecké a pedagogické činnosti se v roce 1918 habilitoval jako soukromý docent.

Po vzniku Československé republiky v roce 1918 bylo 24. června 1920 vyhlášeno zřízení další fakulty na Karlově univerzitě – samostatné fakulty přírodovědecké. Záhy zde byl Žáček jmenován vedoucím nově zřízené stolice pro užitou fyziku, současně se v roce 1921 stal mimořádným a po ročním osvědčení řádným profesorem pro obor experimentální fyzika. Obsahem jeho přednášek byla teorie střídavých proudů, elektrických oscilací, bezdrátové telegrafie a telefonie, elektronových lamp a jejich technických aplikací, termodynamiky a encyklopedie elektrotechniky. Tehdy také napsal několik odborných prací: *Elektronové lampy* (1922), *Nová metoda k výrobě ultrakrátkých vln* (1924) a *Metoda k měření malých vzájemných indukcí* (1930).

Již rok po vzniku ČSR proběhly první pokusy s bezdrátovým vysíláním slova a hudby, organizované docentem Žáčkem. 28. října 1919 se z vojenského vysílače na petřínské rozhledně v Praze ozvalo zkušební hodinové vysílání s cílem vyzkoušet bezdrátový přenos (tehdy nazývaný radiotelefonií). Žáček se na provedení domluvil se dvěma techniky tohoto pracoviště, *Prokopem Ryvolou* a *Jaroslavem Kejřem.* Ti připojili uhlíkový mikrofon k francouzské armádní vysílačce a asi hodinu před ním zpívali, recitovali básně a hráli na housle. Docent Žáček poslouchal jejich produkci ve fyzikálním kabinetu a s průběhem „svého" prvního bezdrátového přenosu na čs. území byl prý spokojený. Tyto přenosy z Petřína se pak opakovaly v letech 1920 a 1921, také za velkého zájmu presidenta T. G. Masaryka. Řádné vysílání pak začalo v květnu 1923 prostřednictvím vysílače o výkonu 1 kW umístěném na kbelském vojenském letišti.

Ve školním roce 1923/1924 byl Žáček pozván na univerzitu do švédského Lundu, kde spolupracoval s *Karlem Mannem Georgem Siegbahnem* (1886–1978) na problematice rentgenové spektroskopie. Ten za objevy a výzkumy v této oblasti získal sám již v roce 1924 Nobelovu cenu za fyziku, ale tento rok se stal úspěšným i pro Žáčka, který svoji další výzkumnou práci nasměroval na dynamicky se rozvíjející vědeckotechnický obor, *elektroniku* (název navrhl již v roce 1904 fyzik *Johannes Stark*).

Po návratu ze zahraniční stáže se Žáček soustředil na studium zdrojů záření pro vlnová pásma 10 až 30 cm. Vycházel z poznatku, že ke generaci extrémně vysokých kmitočtů nelze používat klasické rezonátory, ale elektrická vedení s definovanou délkou. Proto zvolil ke svému výzkumu koaxiální diodu umístěnou v magnetickém poli. Při překročení prahové hodnoty pole prokázal vznik oscilací na vlnové délce 29 cm. Odvodil vzorce pro vlnovou délku generované vysokofrekvenční energie, respektující vliv prostorového náboje. To vše jej přivedlo k objevu výkonového generátoru centimetrových elektromagnetických vln – *magnetronu*, vhodného například k provozu radiolokačních a sdělovacích systémů.

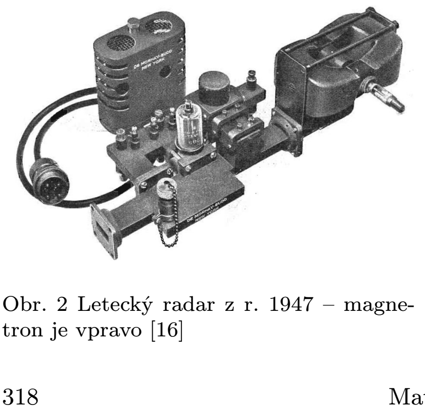


Obr. 1 Pohled do magnetronu [16]

Magnetron je v podstatě vakuová dioda s válcovou anodou a axiální přímo žhavenou katodou, procházející osou válcové anody. Tímto uspořádáním je vytvořeno radiální elektrické pole. Kolmo k němu, ve směru osy válcové anody, působí magnetické pole, které se obvykle vytváří vnějším permanentním magnetem. Magnetické pole tak působí na elektrony, pohybující se od katody k anodě, a zakřivuje jejich dráhu, takže při určité intenzitě magnetického pole elektrony nemohou dosáhnout katody. Součástí magnetronu jsou laděné rezonanční obvody ve tvaru dutinových rezonátorů, připojených k jednotlivým segmentům anody. Tyto rezonátory kmitají netlumenými kmity, přičemž hradí své ztráty z pohybové energie elektronů.

O svém objevu zveřejnil A. Žáček pouze krátkou zprávu *Nová metoda k vytvoření netlumených oscilací (předběžná zpráva)*, uveřejněnou v Časopise pro pěstování matematiky a fysiky v květnu 1924 a současně svůj objev přihlásil k patentování. Čs. patent č. 20293 pod názvem *Spojení pro výrobu elektrických vln* mu byl udělen Patentním úřadem Republiky československé v roce 1926. Pravděpodobně první popis (ideu) magnetronu uvedl v roce 1921 americký fyzik a technik *Albert Wallace Hull* z General Electric Company, jenž byl zpočátku považován za jeho hlavního tvůrce. První funkční magnetron však v roce 1924 jako první sestrojil Augustin Žáček. Světová priorita jeho magnetronového generátoru mu byla přiznána až v roce 1929.

Významným pokrokem v této oblasti byl v roce 1939 skupinou britských vědců z univerzity v Birminghamu vynalezený dutinový magnetron. Speciální elektronku, která měla mít rozhodující podíl pro konstrukci radaru pracujícího i na větší vzdálenosti, hledali už od 30. let minulého století konstruktéři po celém světě. Až právě Žáčkovo zdokonalení magnetronu, které popsal ve vědeckém časopise *Zeitschrift für Hochfrequenztechnik* v listopadu 1928, náhodou objevil – a použil – *Sir Robert Alexander Watson-Watt.* Na nyní již funkční radar mu byl udělen v dubnu 1935 britský patent.



Obr. 2 Letecký radar z r. 1947 – magnetron je vpravo [16]

Pojmenování *radar* se začalo používat v americkém námořnictvu, a je to vlastně zkratka z anglického *Radio-Detection and Ranging* (radiový systém vyhledávání a zaměření). První vojenský radiolokátor, díky využití magnetronů pro ještě kratší vlnové délky, byl zkonstruován v roce 1938 techniky v *Royal Radar Establisments* (Královský radarový ústav) ve Velké Británii. Jak se říká, stalo se to v hodině dvanácté, neboť zahájení druhé světové války bylo již otázkou krátké doby.

Žáčkova vědecká a pedagogická činnost byla úzce spjata s četnými aktivitami ve vědeckých a odborných společnostech a v akademickém životě. Dlouhá léta spolupracoval s Jednotou českých matematiků a fyziků a Elektrotechnickým svazem československým, od roku 1921 byl řádným členem Královské české společnosti nauk a řádným členem II. třídy (vědy matematické, přírodovědecké a geografické) Československé akademie pro vědy a umění (1946), po vzniku Masarykovy akademie práce se v roce 1920 stal tajemníkem přírodovědecko-lékařské třídy, působil v České vědecké zkušební komisi pro učitele na středních školách jako examinátor pro fyziku. To vše stihnul vedle vedení Fyzikálního ústavu, kde se zaměřil zejména na výchovu nové generace odborníků v oblasti aplikované elektrotechniky.

Před více než půl stoletím u nás koncipoval obor vysokoškolského studia užité fyziky, dnešního fyzikálního inženýrství. Při svých vlastních výzkumných pracích spolupracoval se svými tehdejšími asistenty, později významnými představiteli české vědy a techniky *Rudolfem Šimůnkem*, *Václavem Dolejškem*, *Václavem Petržílkou* a *Bohuslavem Pavlíkem.* Výrazem úcty k Žáčkovu pedagogickému působení bylo jeho zvolení děkanem Přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy ve školním roce 1931/1932.

Zajímavou epizodu v Žáčkově životě představují jeho jediné známé komplikované mezilidské vztahy s dalším vynikajícím experimentálním fyzikem s mezinárodním renomé a později také univerzitním profesorem *PhDr. Jaroslavem Šafránkem* (1890–1957), vyvolané Šafránkovou osobní averzí vůči nadřízenému kolegovi, kterého vinil ze svého dlouholetého zařazení jen jako asistenta, negativními postoji k jeho habilitaci a později ke jmenování profesorem. Koneckonců i vědci jsou jen lidé, se svými vášněmi, ctižádostmi a urputností, často se cítící neuznáni. Šafránek se ještě jako asistent stal propagátorem vysílání a příjmu nízkořádkové mechanické televize, kterou slavnostně předvedl 5. prosince 1935 před četným publikem v Praze. Technickou problematiku televizního vysílání zvládl natolik, že o rok později mohl vydal knihu *Televize*, první komplexní pojednání o televizi v podmínkách ČSR.

Po uzavření českých vysokých škol v roce 1939 byl Žáček zproštěn činné služby a odešel podobně jako ostatní členové profesorského sboru na *dovolenou s čekatelným*. Je až ohromující představit si německé vědce zoufale hledající klíčovou součást radaru a netušící, že její vynálezce sedí ve svém bytě v okupované Praze u radiového přijímače a na přísně zakázaných krátkých vlnách poslouchá zprávy o vzdušné bitvě o Anglii, ve které také „jeho“ radar hraje velkou roli. Na východním a jihovýchodním pobřeží totiž Angličané vybudovali v roce 1940 řetěz radarů, jejichž antény byly umístěny na 120 m vysokých stožárech a mohly včas lokalizovat (až do vzdálenostu 160 km) nepřátelská letadla a sledovat jejich manévrování.

Ve spolupráci se svým asistentem *Dr. Václavem Petržílkou* (později profesorem na ČVUT a jedním ze zakladatelů Ústavu jaderné fyziky v Řeži) se mu podařilo v průběhu druhé světové války riskantně zachránit většinu vybavení Fyzikálního ústavu před jeho odvezením do Německa, takže po válce mohly výzkumy pokračovat v původních třech odděleních ústavu experimentální fyziky – spektroskopie, vědecké fotografie a fotochemie.

Ve svém působení již nemohli pokračovat dva Žáčkovi kolegové, kteří patřili k šesti obětem na životech z řad profesorů a docentů pro podezření, že se podíleli na odbojové protiněmecké činnosti – profesor experimentální fyziky *Václav Dolejšek* (1895–1945) a profesor teoretické fyziky *František Záviška* (1879–1945).

Přednáškové sály zaplnily stovky nových i staronových posluchačů, učitelé za vydatné pomoci studentů v poválečném entusiasmu urychleně obnovili provoz v jednotlivých ústavech. Zdálo se, že po téměř šestileté nucené přestávce, se otevřela také profesoru Žáčkovi nová kapitola v pedagogické a výzkumné činnosti. V otevřeném dopise adresovaném profesorskému sboru Přírodovědecké fakulty dne 7. listopadu 1945 s cílem iniciovat přípravu fyziků pro potřeby obnovy a rozvoje československého průmyslu, uvedl:

„Fyzika je podkladem všech odvětví techniky. Jest známo, že jak dříve, tak i v nejnovější době vznikla prací fyziků nebo spoluprací fyziků a techniků celá důležitá průmyslová odvětví: tak například rozsáhlý obor vysokofrekvenční techniky, televize, osvětlovací a filmové techniky je toho typickým dokladem. Ale i v těch odvětvích průmyslu, která se již v dřívějších dobách do jisté míry od fyziky osamostatnila a kde vedoucí místa zastávali inženýři, se začíná v posledních desetiletích ukazovat nutnost úzké spolupráce techniků s fyziky: velké závody zařizují výzkumné a zkušební ústavy, kde hlavní slovo mají fyzikové. Fyzik nemá v průmyslu nahradit inženýra, nýbrž jej doplnit. Školení inženýrů vede totiž již na technice k jakémusi druhu specializace. A jde-li o vyhledávání vyšších souvislostí, hledání nových cest apod., nestačí k tomu normální inženýr se svým dosavadním školením, k tomu se daleko lépe hodí fyzik s hlubším a všeobecnějším fyzikálním vzděláním…“

Bohužel, on sám se ke splnění nastíněných úkolů do svého fyzikálního kabinetu Na Karlově vrátil jen na krátkou dobu.

Začal znovu přednášet již v červnu 1945 v tzv. přechodném letním semestru. Jako ředitel Fyzikálního ústavu pražské univerzity vedle jeho vedení a vlastních přednášek vyučoval experimentální fyziku také pro mediky, farmaceuty a posluchače dalších oborů. Psal nová skripta a učebnice, podílel se na obnově činnosti odborných společností, na pozvání Mezinárodní fyzikální unie se v roce 1947 zúčastnil konference o kosmickém záření v Krakově.

Brzy však také akademickou půdu zasáhly politické události, které vyvrcholily „vítězným únorem“ v roce 1948 a na dlouhých 40 let ovlivnily osudy naší vlasti. Aby se vyhnul již zmíněným politickým prověrkám a celkové tísnivé atmosféře na své milované alma mater, přijal pozvání na dlouhodobou vědeckou stáž spojenou s přednáškami na vysokých školách ve Švédsku, ale nebylo mu to povoleno a jeho vědecká aktivita skončila 1. dubna 1949, kdy byl na základě rozhodnutí Ústředního akčního výboru Národní fronty přeložen do trvalé výslužby.

Ovdovělý, bezdětný vědec, který se naráz stal jen soukromou osobou bez možnosti jakékoliv odborné činnosti, neprožíval poslední roky svého života snadno. Dochovalo se vyprávění paní *Ludmily Klimešové*, která manželům Žáčkovým pomáhala s domácími pracemi, ve kterém po letech vzpomínala, že „někdy nebylo ani na mléko a housky“. Univerzitní profesor, významný experimentální fyzik, jehož vědeckou práci a prioritu v objevu funkčního zdroje mikrovlnné energie (magnetronu) uznával celý svět, zemřel ve věku 75 let 26. října 1961 v anonymním ústraní v Praze a pohřben je v Protivíně.

Výběr z použité literatury

[1] *Bober, J.*: Laureáti Nobelovy ceny. Obzor, Bratislava, 1971.

[2] *Efmertová, M.*: Elektrotechnika v českých zemích a v Československu do poloviny 20. století: studie k vývoji elektrotechnickýchoborů. Libri, Praha, 1999.

[3] *Efmertová, M.*: Osobnosti české elektrotechniky. ČVUT, Praha, 1998.

[4] *Heřman, J.*: Od jantaru k tranzistoru: elektřina a magnetismus v průběhu staletí. FCC Public, Praha, 2006.

[5] *Kolektiv*: Ottův slovník. Osobnosti Česko. Ottovo nakladatelství, Praha, 2008.

[6] *Kraus, I.*: Století fyzikálních objevů. Academia, Praha, 2014.

[7] *Kubín, M.*: Proměny české energetiky. Historie. Osobnosti. Vědeckotechnický rozvoj. ČSZE, Praha, 2009.

[8] *Kvítek, M.*: Průkopníci vědy a techniky v českých zemích. Fragment, Praha, 1994.

[9] *Mayer, D.*: Pohledy do minulosti elektrotechniky: objevy, myšlenky, vynálezy, osobnosti. Kopp, České Budějovice, 2004.

[10] *Meidenbauer, J.*: Objevy & vynálezy. Rebo Productions, Čestlice, 2005.

[11] *Mikeš, J., Efmertová, M.*: Elektřina na dlani. Kapitoly z historie elektrotechniky v českých zemích. Milpo Media, Praha, 2008.

[12] *Pickover, C. A.*: Kniha o fyzice. Argo/Dokořán, Praha, 2015.

[13] *Stránský, J.*: Od bezdrátové telegrafie k dnešní radiotechnice. Academia, Praha, 1983.

[14] *Toufar, P.*: [Sedm] divů Česka. Edice ČT, Praha, 2010.

[15] *Žáček, A.*: Nová metoda k vytvoření netlumených oscilací. Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, 053.4 (1924): 378–380.

[16] *Wikipedia*: Cavity magnetron. https://en.wikipedia.org/wiki/Cavity_magnetron.

Bohumil Tesařík