

Polibky kružnic: Jakob Steiner, 2. část

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Představme si n kružnic v rovině takových, že každá z nich se vně dotýká všech ostatních. Pokud je $n = 2$ nebo $n = 3$, lze jejich poloměry zvolit libovolně. Pro $n = 4$ jsou však poloměry kružnic $k_1(O_1; r_1)$, $k_2(O_2; r_2)$, $k_3(O_3; r_3)$ a $k_4(O_4; r_4)$ vázány vztahem, který bez důkazu uvedl roku 1643 René Descartes v dopisu Alžbětě Falcké. V tomto článku se seznámíme s nejstarším známým odvozením této Descartesovy věty o kružnicích z publikace [2]. Pochází z roku 1826 a jeho autor, švýcarský geometr Jakob Steiner, provedl navíc podrobnou analýzu všech konfigurací čtyř navzájem se dotýkajících kružnic.

Uvažujme situaci na obr. 1 a stejně jako Steiner hledejme poloměr r_4 za předpokladu, že jsou dány hodnoty r_1 , r_2 a r_3 . Označme h_j výšku z vrcholu O_j v trojúhelníku $O_1O_2O_3$ a p_j vzdálenost středu O_4 od té strany trojúhelníku, která neobsahuje vrchol O_j . Z předchozího článku víme¹⁾, že pro vzdálenosti h_1 a p_1 platí

$$\frac{p_1}{r_4} = \frac{h_1}{r_1} + 2. \quad (1)$$

Steiner tuto rovnost přepsal na tvar

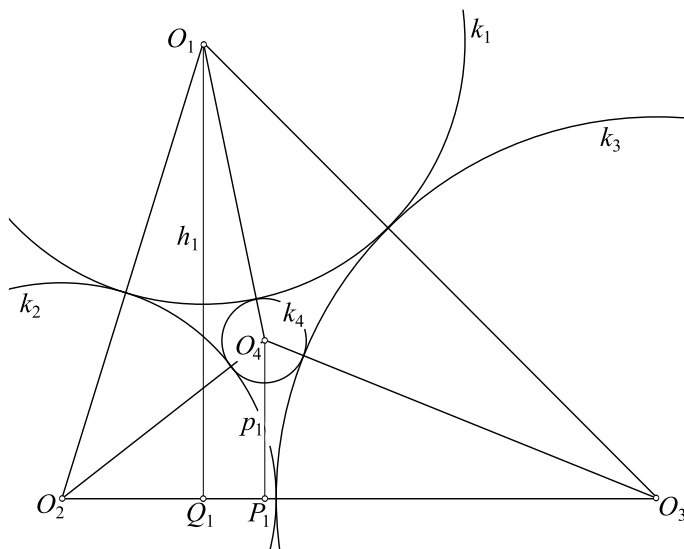
$$\frac{p_1}{h_1} = r_4 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{2}{h_1} \right),$$

¹⁾Viz [1], vztah (8) pro druhou konfiguraci.

který sečetl se dvěma dalšími vztahy, získanými cyklickou záměnou:

$$\frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} = r_4 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{2}{h_1} + \frac{2}{h_2} + \frac{2}{h_3} \right). \quad (2)$$

Jako samozřejmost uvedl, že levá strana rovnosti (2) je rovna jedné. Tento fakt, známý dnes spíše znalcům úloh z matematických olympiád, odvodíme.



Obr. 1 Vzájemné dotyky čtyř kružnic, první situace

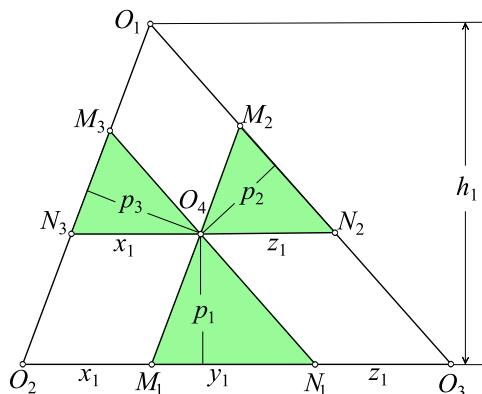
Na obr. 2 je znovu znázorněn trojúhelník $O_1O_2O_3$. Rovnoběžky s jeho stranami sestrojené v bodě O_4 ohraničují spolu s těmito stranami trojúhelníky $O_4M_1N_1$, $M_2O_4N_2$ a $M_3N_3O_4$ podobné trojúhelníku $O_1O_2O_3$. Koeficienty podobností, které převádí trojúhelník $O_1O_2O_3$ na tyto trojúhelníky jsou

$$k_1 = \frac{y_1}{|O_2Q_3|}, \quad k_2 = \frac{z_1}{|O_2Q_3|} \quad \text{a} \quad k_3 = \frac{x_1}{|O_2Q_3|}.$$

Z rovnoběžníků $O_2M_1O_4N_3$ a $N_1O_3N_2O_4$ plyne $y_1 + z_1 + x_1 = |O_2O_3|$. Odtud $k_1 + k_2 + k_3 = 1$. Dosazením $k_i = p_i/h_i$, kde $i \in \{1, 2, 3\}$, do

posledního vztahu zjistíme

$$\frac{p_1}{h_1} + \frac{p_2}{h_2} + \frac{p_3}{h_3} = 1. \quad (3)$$



Obr. 2 K odvození vztahu (3)

Substitucí (3) ve vztahu (2) a dělením obou stran velikostí poloměru r_4 Steiner dále obdržel

$$\frac{1}{r_4} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \left(\frac{2}{h_1} + \frac{2}{h_2} + \frac{2}{h_3} \right). \quad (4)$$

Dvojnásobek obsahu trojúhelníku $O_1O_2O_3$ lze vyjádřit pomocí Heronova vzorce nebo jako součin $|O_2O_3| \cdot h_1$. Rovnost obou vyjádření představuje po úpravě vztah

$$2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)} = (r_2 + r_3)h_1.$$

Odtud plyne

$$\frac{2}{h_1} = \frac{r_2 + r_3}{\sqrt{r_1r_2r_3(r_1 + r_2 + r_3)}}.$$

Steiner tento vztah, spolu s dalšími dvěma vztahy vzniklými cyklickou záměnou, dosadil do (4) a po úpravě dostal

$$\frac{1}{r_4} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + 2 \cdot \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + r_3}{r_1r_2r_3}},$$

resp.

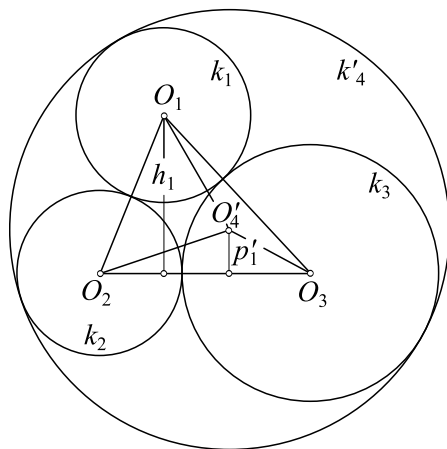
$$\frac{1}{r_4} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1}}. \quad (5)$$

Zkoumal též situaci, v níž má čtvrtá kružnice, označme ji $k'_4(O'_4; r'_4)$, vnější dotyk s kružnicemi k_1 , k_2 a k_3 (obr. 3). Jak již z [1] víme, je to třetí Pappova konfigurace kružnic. Proto rovnost (1) nahradil vztahem

$$\frac{p_1}{r_4} = 2 - \frac{h_1}{r_1}$$

a analogicky pak získal rovnost

$$\frac{1}{r'_4} = -\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{r_1 r_2} + \frac{1}{r_2 r_3} + \frac{1}{r_3 r_1}}. \quad (6)$$



Obr. 3 Vzájemné dotyky čtyř kružnic, druhá situace

Steiner počítal pouze s kladnými poloměry kružnic. Nepřipouštěl možnost přiřazení záporného znaménka poloměru některé kružnice. Proto byly jeho další úvahy poněkud zdlouhavé. Musel situaci s kružnicí k_4 odlišit od situace s kružnicí k'_4 . Aby „vynikla symetrie“, nahradil poloměry kružnic jejich převrácenými hodnotami. Z dnešního pohledu to byly křivosti κ_i kružnic.

Na rozdíl od něj si další úvahy zjednodušíme dohodou o znaménkách:

Znaménková dohoda. Mají-li tři navzájem se dotýkající kružnice různé dotykové body a dvě z nich mají s třetí kružnicí vnitřní dotyk, přiřadíme poloměru (a tedy i křivosti) třetí kružnice záporné znaménko.

Po substituci $\kappa_i = 1/r_i$ mají rovnosti (5) a (6) tvar

$$\kappa_4 = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2\kappa_3 + \kappa_3\kappa_1} \quad (7)$$

a

$$\kappa'_4 = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_2\kappa_3 + \kappa_3\kappa_1}. \quad (8)$$

Vidíme, že je lze považovat za kořeny kvadratické rovnice

$$\kappa^2 - (\kappa_4 + \kappa'_4)\kappa + \kappa_4\kappa'_4 = 0.$$

Využitím rovností (7) a (8) v poslední rovnici snadno získáme vztah

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa^2 = 2(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3 + \kappa_1\kappa + \kappa_2\kappa + \kappa_3\kappa), \quad (9)$$

platný pro obě situace z obrázků 1 a 3. Steiner, který neužíval znaménkovou dohodu, získal pro situaci z obr. 1 vztah (9) a pro situaci z obr. 3 vztah, jenž se od (9) lišil jen znaménky u posledních tří sčítanců na pravé straně rovnosti.

Provedením formální substituce $\kappa = \kappa_4$ (resp. $r = r_4$), kde κ_4 (resp. r_4) značí od nynějška křivost (poloměr) libovolné kružnice, jež se dotýká všech tří kružnic k_1 , k_2 a k_3 , nabývá poslední rovnost při vyjádření v poloměrech symetrický tvar

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} + \frac{1}{r_4^2} = 2 \left(\frac{1}{r_1r_2} + \frac{1}{r_1r_3} + \frac{1}{r_2r_3} + \frac{1}{r_1r_4} + \frac{1}{r_2r_4} + \frac{1}{r_3r_4} \right), \quad (10)$$

ze kterého po vynásobení součinem $r_1^2r_2^2r_3^2r_4^2$ dostaneme *Descartesův vztah*

$$\begin{aligned} & r_1^2r_2^2r_3^2 + r_1^2r_2^2r_4^2 + r_1^2r_3^2r_4^2 + r_2^2r_3^2r_4^2 = \\ & = 2(r_1r_2r_3^2r_4^2 + r_1r_2^2r_3r_4 + r_1r_2^2r_3r_4^2 + r_1^2r_2r_3^2r_4 + r_1^2r_2r_3r_4^2 + r_1^2r_2^2r_3r_4) \end{aligned}$$

z prvního dílu seriálu.

Jestliže obě strany vztahu (9) zvětšíme o výraz na jeho levé straně, obdržíme (po zmíněné substituci) tzv. *Soddyho rovnost* v poloměrech křivosti

$$2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2) = (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)^2. \quad (11)$$

Anglický matematik *Philip Beecroft* zvolil roku 1842 k odvození vztahu (11) pozoruhodný a podstatně jiný přístup. Uvedeme jej v příštím, závěrečném dílu tohoto seriálu.

Literatura

- [1] *Leischner, P.*: Polibky kružnic: Jakob Steiner, 1.část. MFI, roč. 26 (2017), č. 1, s. 6–13.
- [2] *Steiner, J.*: Einige geometrische Betrachtungen (1826), Verlag von Wilhelm Engelmann, Leipzig, 1901.

Od rodiny se třemi dětmi ke spolehlivosti testů

ŠÁRKA GERGELITSOVÁ – TOMÁŠ HOLAN

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V tomto článku rozvineme úvahy o podmíněné pravděpodobnosti. Nejprve si zopakujeme základní pojmy: budeme předpokládat, že máme nějaký *náhodný pokus*, u kterého jsme schopni předem vyjmenovat všechny jeho možné *výsledky*, které se navzájem vylučují a jeden z nich nastane vždy. *Jevem* nazveme podmnožinu množiny všech možných výsledků náhodného pokusu. Výsledky patřící jevu A nazýváme *výsledky příznivé jevu A* .

Pravděpodobnost jevu je součtem pravděpodobností výsledků, které jsou tomuto jevu příznivé. Pokud jsou všechny možné výsledky náhodného pokusu stejně pravděpodobné, je pravděpodobnost jevu rovna podílu

$$\frac{\text{počet výsledků příznivých danému jevu}}{\text{počet všech možných výsledků}}.$$

Úloha 1

Jaká je pravděpodobnost, že rodina se třemi dětmi má samé dívky?

Řešení. Pravděpodobnost narození chlapce považujeme za rovnou pravděpodobnosti narození dívky, $P(h) = P(d) = \frac{1}{2}$. Pohlaví jednotlivých dětí považujeme za navzájem nezávislé. Proto pravděpodobnost, že v rodině jsou tři dívky, je $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

Úloha 2

Jaká je pravděpodobnost, že rodina se třemi dětmi má samé dívky, jestliže víme, že jednu dívku mají? (tj. jestliže známe jednu dívku z rodiny, ale nevíme nic o jejích dvou sourozencích)

Řešení. Podle výše uvedené úvahy mohou být v rodině se stejnou pravděpodobností trojice dětí (od nejmladšího po nejstarší): (h, h, h) ; (h, h, d) ; (h, d, h) ; (d, h, h) ; (h, d, d) ; (d, h, d) ; (d, d, h) ; (d, d, d) . Víme, že první možnost nenastává (nejsou tam tři bratři). Ze zbývajících sedmi stejně pravděpodobných možností vyhovuje jediná. Pravděpodobnost, že v rodině jsou tři sestry, je proto $1/7$.

Úloha 3

Anička je nejstarší ze tří sourozenců. Jaká je pravděpodobnost, že má dvě sestry?

Řešení. Dívka Anička je v rodině nejstarším dítětem. Řešíme proto pouze pravděpodobnost toho, že následující dvě děti jsou dívky, tedy úlohu o dvou dětech, ne třech. Pravděpodobnost, že mladší z nich je chlapec, je rovná pravděpodobnosti, že to je dívka, je tedy rovná $\frac{1}{2}$. Pravděpodobnost, že starší sourozenec je dívka, je také $\frac{1}{2}$. Pohlaví mladšího a staršího sourozence je nezávislé, proto pravděpodobnost, že dívka Anička má dvě sestry, je $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Jiné řešení. Řešíme úlohu jako úlohu o třech dětech: Je-li první dítě dívka, mohou být v rodině pouze ty trojice, které mají na prvním místě dívku, tedy: (d, h, h) ; (d, h, d) ; (d, d, h) ; (d, d, d) . Všechny mají stejnou pravděpodobnost, navzájem se vylučují a jejich sjednocení dává jistý jev. Příznivá je z nich jediná, proto je hledaná pravděpodobnost rovná $\frac{1}{4}$.

Proč je *úloha 3* jiná než *úloha 2*? Stručně řečeno: protože v *úloze 2* nevíme, kolikátým dítětem ona dívka je, a to způsobí změny pravděpodobnosti nahlížených jevů. Při řešení úloh o pravděpodobnosti rozebereme

zadání úlohy a snažíme se najít odpovídající „model“, který umíme vyjádřit pomocí známých pravděpodobností. A mnohdy dojdeme ke správnému řešení různými úvahami. *Úloha 2* bývá někdy označována pro svou záměnu s *úlohou 3* jako paradox. Ukažme si několik „bludných“ úvah, jejichž vinou to opravdu jako paradox vypadá.

Různé chybné úvahy o druhé úloze

Bludná úvaha 1. Vezmeme v úvahu všechny možnosti (a pojmenujeme zmíněnou dívku Anička): Anička může být nejmladší, prostřední nebo nejstarší. *Tyto možnosti se navzájem vylučují* a dohromady dávají jev jistý. Pravděpodobnost, že Anička je nejmladší, prostřední či nejstarší, je stejná, tedy $\frac{1}{3}$. V každém ze zmíněných případů je pravděpodobnost, že Anička má dvě sestry, rovna $\frac{1}{4}$ (viz úloha 3). Celková pravděpodobnost je tedy $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

Bludná úvaha 2. Dívka, o které už víme, má tedy dva sourozence. *Pravděpodobnost, že mladší z nich je chlapec, je rovna pravděpodobnosti, že to je dívka, je tedy $\frac{1}{2}$.* *Pravděpodobnost, že starší sourozenec je dívka, je také $\frac{1}{2}$.* *Pohlaví mladšího a staršího sourozence je nezávislé, proto pravděpodobnost, že dívka má dvě sestry je $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.*

Kde je chyba?

Ukažme si, kde se v jednotlivých úvahách stala chyba. (Pozorný čtenář si zajisté všiml, že v každé z úvah je část textu vyznačena kurzívou.)

Co nás mate v úvaze 1? Jméno. Chceme-li počítat pravděpodobnost jevu jako

$$\frac{\text{počet výsledků příznivých danému jevu}}{\text{počet všech možných výsledků}},$$

musí mít ony počítané výsledky stejnou pravděpodobnost.

Často ale posuzujeme jevy, jejichž různé výsledky stejnou pravděpodobnost nemají. Příkladem výsledků pokusu, které stejnou pravděpodobnost nemají, jsou například součty ok na dvou vržených kostkách: výsledek „padne součet 2“ má jistě menší pravděpodobnost než výsledek „padne součet 7“. Takové výsledky se pro výpočet pravděpodobnosti podle zmíněného schématu použít nedají.

Dalším typickým příkladem pokusů, kde výsledky stejnou pravděpodobnost nemají, je vznik skupin prvků, v nichž se prvky opakují („kombinace

s opakováním“). Proto při řešení úloh o pravděpodobnosti prvky rozlišujeme (hrnečky číslujeme, dětem dáváme jména...). A právě to nás teď zmátlo. Kdyby Anička v úvaze 1 byla opět jen „dívka“, asi bychom nenapsali: „Vezmeme v úvahu všechny možnosti: dívka může být nejmladší, prostřední nebo nejstarší. Tyto možnosti se navzájem vylučují...“ Je-li v rodině více dívek než jedna, uvedené možnosti se nevylučují.

- Tomu, že dívka je v rodině nejmladší, odpovídají trojice: (d, h, h) ; (d, h, d) ; (d, d, h) ; (d, d, d) .
- Tomu, že dívka je v rodině prostřední, odpovídají trojice: (h, d, h) ; (h, d, d) ; (d, d, h) ; (d, d, d) .
- Tomu, že dívka je v rodině nejstarší, odpovídají trojice: (h, h, d) ; (h, d, d) ; (d, h, d) ; (d, d, d) .

Trojice se dvěma dívkami jsme započítali dvakrát, trojici samých dívek dokonce třikrát. O stejné pravděpodobnosti nemůže být řeč.

Budiž, úvaha 1 není v pořádku. Ale co lze vytknout úvaze 2? Kurziva napovídá, že je to špatně celé...?

Již z minulých úvah vidíme, že pravděpodobnost, že jsou v rodině právě dva chlapci (trojice (h, h, d) ; (h, d, h) ; (d, h, h)), a pravděpodobnost, že další dvě děti v rodině jsou různého pohlaví (trojice (h, d, d) ; (d, d, h) ; (d, h, d)), je stejná a rovná trojnásobku pravděpodobnosti, že v rodině jsou jen dívky (trojice (d, d, d)), což je, jak víme $\frac{1}{7}$.

Řešit proto pravděpodobnost toho, že v rodině je další dívka, když tam již jedna dívka je, je matoucí. Úvahy nás přivádí zpět k předchozím argumentům. Nevíme-li, kolikátým dítětem ona dívka je, nemůžeme předpokládat, že to, že sourozenec je chlapec či dívka, má stejnou pravděpodobnost, a už vůbec nejsou tyto jevy nezávislé. Nejde o narození nového jedince (tam by pravděpodobnost opravdu $\frac{1}{2}$ byla), ale o zkoumání rodin, kde již 3 děti jsou. (Kdyby šlo o ještě nenarozené sourozence, byla by ona dívka nejstarší – a ten případ jsme již vyřešili.)

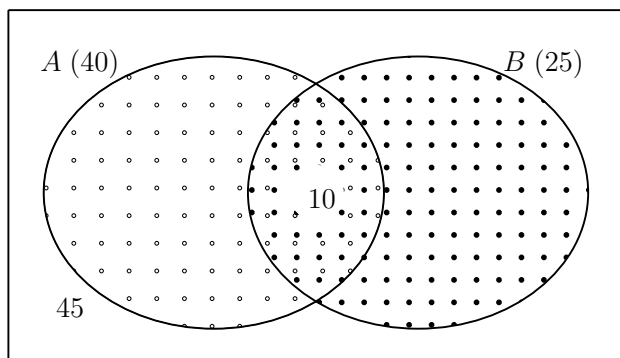
Situaci si můžeme představit jako losování. S pravděpodobností $\frac{3}{7}$ v něm vybereme rodinu, která má další děti dva hochy, z ní tedy sourozenec dívka nebude. S pravděpodobností $\frac{3}{7}$ vybereme rodinu, která má další děti hoch a dívku, z ní tedy (mladší) sourozenec bude dívka s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. S pravděpodobností $\frac{1}{7}$ vybereme rodinu, která má další děti dvě dívky, z ní tedy sourozenec dívka je jev jistý, pravděpodobnost je 1. Jenže tento výběr zároveň odpověděl na otázku, jaké pohlaví má starší ze sourozenců, a tedy oba sourozenci. Dívka to byla právě v $\frac{1}{7}$ rodin.

Podmíněná pravděpodobnost

Veškeré pochyby si ušetříme, podíváme-li se na problém tak, jak je formulován: jako na podmíněnou pravděpodobnost. Připomeňme nejprve, co rozumíme podmíněnou pravděpodobností, a uvedme několik pravidel pro její určení.

Máme dva různé jevy A, B . Předpokládejme, že známe pravděpodobnosti toho, že nastane jev A , že nastane jev B a že nastanou oba jevy zároveň. Budeme dále zkoumat, jak je pravděpodobnost jednoho jevu v náhodném pokusu ovlivněna tím, že již známe výsledek jevu druhého. Označme pravděpodobnosti toho, že nastane jev A , jev B a oba jevy $A \cap B$, po řadě $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$. Zápisem $P(A|B)$ budeme rozumět pravděpodobnost, že nastal jev A za předpokladu, že nastal jev B .

Víme-li, že nastal jev B , pak to, že nastal jev A znamená, že nastaly oba jevy současně. Protože pravděpodobnost, že nastal jev B , má hodnotu $P(B)$, platí $P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$.



Obr. 1

Ilustrujme si uvedenou úvahu na příkladu relativních četností provedených pokusů z pohledu jevů A, B na obr. 1. Zde platí:

$$P(A) = \frac{40}{100}, \quad P(B) = \frac{25}{100}, \quad P(A \cap B) = \frac{10}{100}.$$

Pokud nastal jev B , je množinou všech možných výsledků celá množina B , příznivými výsledky jevu A zůstávají jen ty, které leží zároveň v množině B , a tedy $P(A|B) = \frac{10}{25}$. Potom

$$P(A|B) \cdot P(B) = \frac{10}{25} \cdot \frac{25}{100} = \frac{10}{100} = P(A \cap B).$$

Analogicky platí $P(B|A) \cdot P(A) = P(B \cap A)$. Z rovnosti pravděpodobností $P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$ odvodíme pro $P(A) > 0$ a $P(B) > 0$ vztahy pro obě podmíněné pravděpodobnosti:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}, \quad P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}.$$

Tyto vztahy jsou známy jako *Bayesův vzorec*.

Vraťme se k naší úloze. Otázka „Jaká je pravděpodobnost, že rodina se třemi dětmi má samé dívky, jestliže víme, že jednu dívku mají?“ je zřejmou formulací podmíněné pravděpodobnosti.

Označme D tvrzení „v rodině je dívka“, $D3$ tvrzení „v rodině jsou tři dívky“. Dále $D3|D$ je zkoumané tvrzení a $D|D3$ je triviálně pravdivé tvrzení „v rodině je dívka, jsou-li tam tři dívky“.

Potom naše otázka je otázkou na pravděpodobnost $P(D3|D)$ a podle vzorce pro podmíněnou pravděpodobnost platí:

$$P(D3|D) = \frac{P(D|D3) \cdot P(D3)}{P(D)}.$$

V naší úloze platí $P(D) = \frac{7}{8}$, $P(D3) = \frac{1}{8}$, $P(D|D3) = 1$. Proto

$$P(D3|D) = \frac{1 \cdot \frac{1}{8}}{\frac{7}{8}} = \frac{1}{7}.$$

Podmíněná pravděpodobnost tak, jak je užita ve výše uvedeném příkladu, je velmi jednoduchá. Jeden jev je zde podjevem (tj. podmnožinou) druhého. V obecnějších případech je podmíněná pravděpodobnost velmi důležitá, například při zkoumání pravděpodobností, jak nějaký test určí pravděpodobnost výskytu poruchy, odchylky, onemocnění. . .

Bayesův vzorec pro dílčí jevy

Představme si dva různé jevy A , B , přičemž jev B je sjednocením navzájem neslučitelných jevů $B1$, $B2$, $B3$. Potom

$$P(B) = P(B1) + P(B2) + P(B3).$$

Proto

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B1) + P(B2) + P(B3)}.$$

Ukažme si jeho použití na příkladu.

Z dětí starších 10 let, které žijí na vesnici, umí sekat trávu kosou 50 %. Z těch, které na vesnici tráví jen prázdniny, to umí 20 %. Z dětí, které opustí město jen na výlety, tábory a podobně, to umí jen 2 %. Jarda umí sekat trávu kosou. Jardu jsme náhodně vylosovali z 1000 dětí, z nichž je 300 z vesnice, 550 z města, ale jezdí na prázdniny na vesnici, a 150 tráví většinu času ve městě. Jaká je pravděpodobnost, že Jarda je z města?

U je jev „umí sekat kosou“, přičemž $U1$ znamená „umí sekat kosou a je z města“, $U2$ „umí sekat kosou a jezdí na prázdniny“ a $U3$ znamená „umí sekat kosou a je z vesnice“. M je jev „je z města“, L je jev „jezdí na prázdniny“, V je jev „je z vesnice“.

$$\begin{aligned} P(M|U) &= \frac{P(U|M) \cdot P(M)}{P(U1) + P(U2) + P(U3)} = \\ &= \frac{P(U|M) \cdot P(M)}{P(U|M) \cdot P(M) + P(U|L) \cdot P(L) + P(U|V) \cdot P(V)} = \\ &= \frac{0,02 \cdot 0,15}{0,02 \cdot 0,15 + 0,2 \cdot 0,55 + 0,5 \cdot 0,3} = \frac{0,003}{0,003 + 0,11 + 0,15} = \frac{3}{263} \doteq 0,014. \end{aligned}$$

Chceme-li si vzorec lépe představit, pak při uvedených počtech dětí a uvedených pravděpodobnostech, že umí sekat kosou, máme z 1 000 dětí 150 „sekačů“ z vesnice, 110 z prázdninových a 3 z města. Jarda je z města, pokud je jedním z oněch tří, přičemž všech dětí, které umí sekat kosou, je 263. Proto je hledaná pravděpodobnost $\frac{3}{263} \doteq 0,014$.

Na závěr si ukažme jeden často uváděný příklad (podobný najdete například v [2]).

Screeningové programy

Odborníci na lidské zdraví nepochybuji o tom, že včasné podchycení rizika vážných onemocnění významně zvyšuje šanci na dlouhý život bez vážných komplikací. Proto existují tzv. screeningové programy, při nichž jsou vyšetřeni všichni jedinci z určité (skupiny) populace. Jenže žádný test není stoprocentně spolehlivý. Dobrý test bude mít jednak vysokou schopnost podchytit danou vadu (tj. vysokou *senzitivitu* – procento zachycených výskytů), jednak nebude vyvolávat falešné poplachy (bude mít vysokou *specifitu* – procento nálezů, které jsou „oprávněné“).

To, že daným testem projdete jako pozitivní, tedy signalizuje danou vadu pouze s nějakou pravděpodobností, která podle výše uvedených úvah

závisí také na tom, jak často se zmíněná diagnóza v populaci vyskytuje. Uveďme (smyšlený) příklad.

Ve sledované skupině obyvatel se vada V vyskytuje u každého tisíceho člověka. Dostupný test má senzitivitu 98 % (tj. pouhých 2 % případů neodhalí) a specificitu 95 % (tj. 5 % zdravých lidí má pozitivní test).

Otázka: Jaká je pravděpodobnost, že člověk A trpí danou vadou, pokud byl jeho test pozitivní?

Odpověď: Označme $P(V)$ pravděpodobnost, že člověk A trpí vadou V ,

$P(T)$ pravděpodobnost, že byl pozitivně testován,

$P(V|T)$ pravděpodobnost, že trpí vadou, byl-li pozitivně testován,

$P(T|V)$ pravděpodobnost, že byl pozitivně testován, trpí-li vadou,

$P(T|V')$ pravděpodobnost, že byl pozitivně testován, netrpí-li vadou.

Tedy v našem příkladu $P(V) = 0,001$, $P(T|V) = 0,98$, $P(T|V') = 0,05$. Pak podle Bayesova vzorce platí

$$\begin{aligned} P(V|T) &= \frac{P(T|V) \cdot P(V)}{P(T)} = \frac{P(T|V) \cdot P(V)}{P(T|V) \cdot P(V) + P(T|V') \cdot P(V')} = \\ &= \frac{0,98 \cdot 0,001}{0,98 \cdot 0,001 + 0,05 \cdot 0,999} \doteq 0,019. \end{aligned}$$

Pravděpodobnost, že pozitivně testovaný člověk má opravdu problém, tedy není oněch obávaných 95 %, ale necelá dvě procenta.

Poznámka: Ověřte, že pokud je výskyt vady v populaci desetkrát vyšší, tj. $P(V) = 0,01$, pak při nezměněné senzitivitě a specificitě bude zkoumaná pravděpodobnost $P(V|T) \doteq 0,165$.

V článku jsme uvedli několik příkladů určení pravděpodobnosti podmínených jevů. Do této skupiny spadají také mnohé úlohy uváděné v různých kvízech či sadách úloh pro volné chvíle. Klíčem ke správnému řešení zde bývá nejen znalost metod výpočtu pravděpodobnosti, ale hlavně schopnost správně zformulovat problém. Jednu podobnou úlohu najdete i v učebnici [1] (úloha *2.96).

Literatura

- [1] *Calda, E.–Dupač, V.*: Matematika – Kombinatorika, pravděpodobnost, statistika, vyd. 4., Prometheus, Praha, 2002.
- [2] *Gonick, L.*: The Cartoon Guide to Statistics, HarperCollins, 1993.
- [3] *Poskitt, K.*: Děsivá věda: Vrtkavé štěstí, překlad Pipek, J., EGMONT ČR, Praha, 2005.

Chyby, omyly a matematika

FRANTIŠEK KUŘINA

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

Jestliž matematika při vši náramné obecnosti svých pojmů předce znamenitě srozumitelná a podává, v jiných vědách upotřebena, nejen kvalitativně, nýbrž i kvantitativně výsledky, tj. ukazuje, jaký daný předmět jest, a jak velký. Mimo to nutí počet přesně mysliti; jelikož při něm téměř každý omyl zmatek způsobí, a jako nějaká bludička do bažin a bezcestí zavede.

V. Šimerka, Síla přesvědčení, s. 75.

Většinu chyb, kterých se dopouštíme, si neuvědomujeme jen proto, že svou vlastní práci nezkoumáme stejnýma očima, jako by to činil cizí člověk, nýbrž v zaslepenosti své sebelásky vidíme jen to dobré, kdežto slabší místa mineme.

B. Bolzano, Vědosloví, s. 426.

Úvod

Problematika chyb ve školské matematice je kardinální otázkou pojetí vzdělávání. Je-li vyučování matematice pouhé předávání poznatků formou výkladu či přednášky, musí se vyučující snažit jakýchkoliv chyb se vyvarovat – aby nešířil nesprávné informace. Každá chyba žáků pak musí být potrestána, neboť se „správnou vědu“ nenaučili. Má-li ovšem mít vyučování aspoň zčásti charakter poznávacího procesu, jsou omyly přirozenými milníky na této cestě, neboť ukazují směry hledání a umožňují nalézání správných výsledků. Vyučování matematice se tak realizuje mezi póly:

CHYBO, BUDIŽ PROKLETA — CHYBO, BUDIŽ VÍTÁNA.

Slova *omyl* a *chyba* chápou, snad v souladu s běžnou jazykovou praxí, jako synonyma. Znamenají výsledek jednání, které nedosáhlo svého cíle, jako nesprávný výkon. Ten může být nejen projevem selhání jistých psychických funkcí (např. pozornosti, paměti, myšlení, ...), jak to obvykle chápe psychologie, ale i aktuální úrovní poznání v příslušné oblasti.

V příspěvku se zamýšlím nad chybami školské matematiky, ale pro ilustraci skutečnosti, že chybami je lemována i cesta odborného matematického poznávání, uvedu i několik příkladů z historie.

Některé omyly jsou úsměvné. Např. americká herečka Joan Riversová prý čte rukopisný zápis „World War II“ jako „jedenáctá světová válka“, neboť Američané píší jednotky „bez zobáčků“ a evropská historie jí byla cizí.

Jiné jsou trapné. Setkal jsem se s absolventem střední školy, který pythagorejskou rovnost $a^2 + b^2 = c^2$ přepsal na tvar $a + b = c$.

Snad v každém případě poskytuje omyl informaci o jeho autorovi. I z tohoto hlediska je existence chyb ve vzdělávání užitečná.

Nerespektování konvencí

Mám ve své archivu vysvědčení jakési Anny Kuřinové z Obecné školy v Blsku z r. 1881, na němž pan ředitel Karel Fritz hodnotil její školní výsledky takto: *návštěva školní*: zcela náležitě (ačkoliv podle stupnice známek byly možnosti velmi pilně, pilně, méně pilně, nedbale), *v mravném chování*: zcela náležitě (možnosti: úplně přiměřeně, přiměřeně, méně přiměřeně), *v jazyce vyučovacím*: pilně (možnosti: velmi dobře, dobře, prostředně, nedostatečně), ... Jak asi přijal tyto informace můj pradědeček?

V roce 1998 se americká sonda *Mars Climate Orbiter*, která měla kroužit ve svrchní atmosféře Marsu, rozbila o jeho povrch, neboť společnost, která řídila operaci během letu, posílala do řídicího centra NASA údaje o poloze rakety v mílich a stopách, tam se však domnívali, že jde o metrické jednotky.

V učebnici geometrie pro základní školy z r. 1950 se můžeme dočíst, že „čtverec je takový čtyřúhelník, který je zároveň obdélníkem a kosočtvercem“. Definujeme-li obdélník jako čtyřúhelník, jehož každé dvě sousední strany jsou k sobě kolmé, a kosočtverec, jako čtyřúhelník, jehož všechny strany jsou shodné, musíme uvedenou formulaci uznat za správnou. Ovšem, pojmy se do myšlenkového světa žáka nedostávají definicemi, ale zkušenostmi a rozvíjením jazykového citu. Dítě, které se od samých začátků geometrického vzdělávání seznamuje s „protáhlými“ obdélníky a slyší ve slově obdélník vyjádření, že strany jsou jen ob jednu shodné, nebude považovat čtverec za zvláštní případ obdélníku, ale ani za kosočtverec, neboť jazyk mu napovídá, že sousední strany kosočtverce jsou „k sobě kosé“... Slova popisující pojmy mají sice charakter konvencí, definice by však měly respektovat dříve získané představy a pěstovat jazykový cit

žáků. S postupem geometrického vzdělávání bychom ovšem mohli zavést pojem pravoúhelník, který zahrnuje čtverce i obdélníky.

Přijmeme-li konvenci, že na soutoku dvou řek se vlévá menší do větší, musíme považovat za omyl, že se u Mělníka vlévá Vltava do Labe. Mělo by to být naopak. Skutečně. Upřesněme nejdříve pojem *menší řeka*. Je to řeka, která je od pramene k soutoku kratší, má na soutoku menší průměrný průtok a menší povodí. Ve všech těchto parametrech vítězí Vltava (je o 200 km delší, má průtok o $50 \text{ m}^3/\text{sec}$ větší a má i větší povodí než Labe). „Kdyby ve světě řek existovala spravedlnost, protékala by Hamburkem Vltava“, posteskl si *Ludvík Souček* v *Obrazovém opravníku obecně oblíbených omylů* z r. 1981.

Problémy s určováním velikostí geometrických útvarů nemají jen někteří žáci základních škol. *Václav Větvíčka* uvádí, že „v letech 1563–1566 se pokusil změřit Sněžku Slezan *Kryštof Scholing*, ale dobral se závratné výšky 5880 m. Jeho přístroj viditelně nadhodnocoval. K jinému číslu došel *Jiřík z Řásně* v roce. 1569, totiž k 2035 m. Dnešní údaje o její výšce se ustálily na 1602 m n. m.“

Tři příklady z historie

Některé omyly můžeme sledovat po tisíciletí vývoje matematické vědy, jiné pouze po desetiletí.

Ve třinácté knize *Eukleidových Základů* jsou nejdříve popsány konstrukce všech pěti typů pravidelných mnohostěnů a pak je uveden závěr: „Pravím ještě, že kromě řečených pěti útvarů nesestrojíš útvaru jiného, jenž by byl omezen stejnými úhelníky stejnostrannými a stejnoúhlými.“ Toto tvrzení není ovšem správné, neboť podle něho bychom měli počítat mezi platónská tělesa např. šestistěn, který je sjednocením dvou pravidelných čtyřstěnů, které mají jednu stěnu společnou, nebo „prostorový kříž“, který je sjednocením sedmi shodných krychlí. V podstatě stejně nesprávnou definici uvádí po více než 2 000 letech *Emil Kraemer* v knize *Zobrazovací metody*: Pravidelný mnohostěn je takový mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky. Existuje však i definice ještě méně vhodná. Např. podle oxfordského slovníku z r. 1991 je „regular polyhedron a solid bounded by a number of equal figures“. Této definici vyhovuje např. libovolný čtyřstěn, jehož protilehlé hrany jsou shodné. Takovýto čtyřstěn je ohraničen čtyřmi shodnými ostroúhlými trojúhelníky. Správnou definici pravidelného mnohoúhelníku uvádí např. gymnaziální učebnice stereometrie *Evy Pomykalové*.

Omyly mnohých významných matematiků je lemována dlouhá cesta k objevu neeuklidovské geometrie. Tuto cestu završili, jak známo, kolem r. 1826 ruský matematik *Nikolaj I. Lobačevskij*, maďarský vědec *Janos Bolyai* a německý genius *Carl F. Gauss*. Již v Eukleidově době se pokoušeli někteří řečtí matematici odvodit V. Eukleidův postulát „Dvě přímky v rovině, které protínají jinou přímku této roviny a tvoří s ní po jedné straně vnitřní úhly, jejichž součet je menší dvou pravých, se vždy protínají a to po té straně přímky, kde je součet menší“ z ostatních axiomů. Jejich omyly spočívaly většinou v tom, že se opírali nevědomky o některou z vět s pátým postulátem ekvivalentní, např. o věty:

Daným bodem lze vést k dané přímce právě jednu přímku rovnoběžnou.

Každá přímka, která protíná jednu ze dvou rovnoběžných přímek, protíná i druhou.

Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku je 180° .

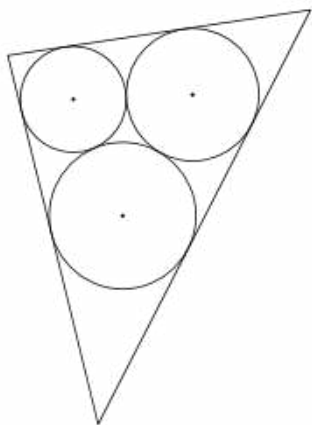
Ekvidistantou přímky je přímka.

Existují dva trojúhelníky, které mají shodné úhly, ale nejsou shodné.

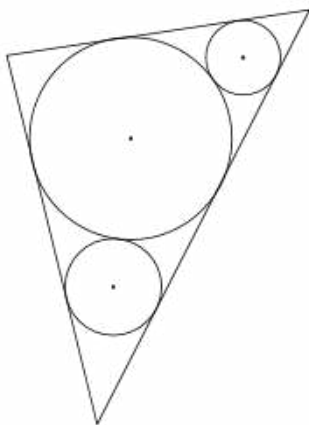
Je pozoruhodné, že mylné přesvědčení o dokazatelnosti pátého postulátu můžeme dnes vyvrátit vhodnou interpretací axiomů. Tak např. ve známém Beltrami–Kleinově modelu jsou splněny všechny axiomy geometrie roviny, až na V. Eukleidův postulát, což by nebylo možné, kdyby byl tento axiom z předchozích odvoditelný.

Problematiku nastíněnou v tomto odstavci podrobně a poutavě zpracoval *J. B. Pavlíček* v knize *Základy neeukleidovské geometrie Lobačevského* z r. 1952.

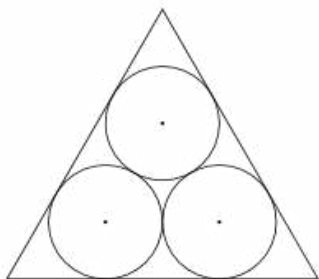
Roku 1803 formuloval italský matematik *Gian Francesco Malfatti* tvrzení, že tři navzájem se vně dotýkající kruhy, z nichž každý se dotýká dvou stran daného trojúhelníku (obr. 1), zaujímají v součtu maximálně možnou část obsahu tohoto trojúhelníku. Konstrukci takovýchto kruhů, která je popsána v Hadamardových přednáškách z geometrie, našel r. 1823 švýcarský matematik *Jakob Steiner*. Avšak již s geometrickými znalostmi žáka základní školy lze ukázat, že Malfattiho hypotéza neplatí pro rovnostranný trojúhelník. Součet obsahů kruhů na obr. 2a je menší než součet obsahů kruhů na obrátku 2b. Tento výsledek je známý od r. 1903. Roku 1965 zjistil *Howard Eves* neplatnost Malfattiho tvrzení pro „úzké dlouhé trojúhelníky“. A roku 1967 dokázal ruský matematik *Michael Goldberg*, že v libovolném trojúhelníku mají maximální součet obsahů tři kruhy, z nichž jeden je trojúhelníku vepsán, zbývající dva s ním mají vnější dotyk a každý se dotýká dvou stran trojúhelníku (obr. 3).



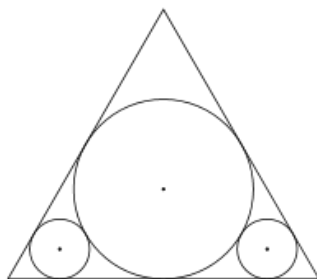
Obr. 1



Obr. 3



Obr. 2a



Obr. 2b

Matematika a jazyk

Řada problémů ve vyučování matematice souvisí se stále se snižující úrovní jazykové kultury žáků a studentů. Přitom komunikace mezi učitelem a žáky, mezi žáky navzájem a „komunikace žáků s médii“ je nepostradatelnou složkou vzdělávání. Matematika vyžaduje porozumění, její jazyk obsahuje kromě vyjadřování v obecném jazyku znalost terminologie, zvládnutí jazyka vzorců, jazyka algebry, ale i porozumění neverbálnímu vyjadřování pomocí schémat a obrázků. To všechno vyžaduje soustředěné zaměření i na problémy jazykové.

Žák musí dobře rozumět, že platí a proč platí např.: Druhá mocnina součtu se nerovná součtu druhých mocnin:

$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$$

ačkoliv druhá mocnina součinu se rovná součinu druhých mocnin

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2.$$

Přitom platí: Derivace součtu funkcí se rovná součtu derivací těchto funkcí:

$$(f + g)' = f' + g',$$

ale derivace součinu funkcí se nerovná součinu jejich derivací

$$(f \cdot g)' \neq f' \cdot g'.$$

Snad stojí za připomenutí, že bychom žáky měli upozornit, že analogické „jemnosti“ nejsou specifické pro matematické vyjadřování.

Připomeňme např. formulace:

„Statistika úmrtí“ není totéž jako „úmrtí statistika“.

„Potíže růstu“ je něco zcela jiného než „růst potíží“.

„Moc bezmocných“ není totéž jak „bezmoc mocných“, ...

Rovněž řada problémů logického vyjadřování, např. pomocí kvantifikátorů, tkví svými kořeny v realitě světa žáků.

Větě „Není pravda, že všichni přišli pozdě“ rozumí dítě na začátku školní docházky správně: „Aspoň jeden žák přišel včas.“

$$\neg(\forall x [V(x)]) \Rightarrow \exists x [\neg V(x)].$$

Chyby v matematickém jazyku se vyskytují (snad dosti zřídka) i v matematických textech.

Např. v jedné učebnici matematické analýzy z r. 1978 můžeme najít tuto definici:

Funkce $y = f(x)$ je omezená v definičním oboru D , právě když platí

$$\forall x \in D \exists k \in \mathbb{R} [f(x) \leq k],$$

místo správné formulace

$$\exists k \in \mathbb{R} \forall x \in D [f(x) \leq k].$$

Tuto problematiku můžeme opět přiblížit žákům vhodnými příklady. Jestliže XmY znamená osoba X má za matku osobu Y , pak zřejmě platí

$$\forall X \exists Y [XmY],$$

ale neplatí

$$\exists Y \forall X [XmY].$$

Jestliže $X \circ Y$ znamená trojúhelníku X je opsaná kružnice Y , pak platí

$$\forall X \exists Y [X \circ Y],$$

ale neplatí

$$\exists Y \forall X [X \circ Y].$$

Užívám zde pro stručnost symbolické vyjadřování, které je zavedeno v gymnaziální učebnici matematické analýzy autorů Dag Hrubý a Josef Kubát; podle mého názoru bychom měli tuto symboliku zavádět uváženě. Pro některé žáky může být překážkou v porozumění matematice.

V českém překladu *Thieleho* knihy *Matematické důkazy* je formulována „věta o oprávněnosti matematické indukce“ takto: Nechť výroková funkce $A(n)$ je definována pro všechna přirozená n a nechť

- a) $A(1)$ je pravdivý výrok,
 - b) z platnosti výroku $A(n)$ pro každé n plyne též platnost výroku $A(n+1)$.
- Potom platí $A(n)$ pro všechna přirozená čísla.

Vlastnost b) zde není formulována správně. Měla by znít např. takto:
b') z platnosti výroku $A(n)$ plyne platnost výroku $A(n+1)$ pro každé n .

V roce 1967 napsali polští autoři *Šlupecki* a *Borkowski*: „V *Principiích matematiky*, významném díle z historie logiky napsaném *B. Russellem* a *A. N. Whiteheadem* je uvedeno nesprávné čtení logické spojky implikace „ $A \Rightarrow B$ “ jako „ B je důsledek A “. Tato interpretace vede k paradoxním závěrům, např. že ze dvou libovolných výroků je první důsledkem druhého nebo druhý důsledkem prvního.“

Skutečnost, že $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$ je vždy pravdivý výrok, lze snadno ověřit. Interpretace logické spojky implikace jako důsledku je ovšem záležitost jazyková a není věcně chybná. Považuji ji však z didaktického hlediska za nevhodnou. Jazyk školní matematiky by měl být v co největším souladu s žákovskou zkušeností. Vzhledem k tomu, že věty typu:

Když padne šestka, házíš ještě jednou.

Jestliže přijdeš včas, dostaneš odměnu.

vyjadřují vztahy mezi předpoklady a závěry, považují za účelné, chápat ve vyučování implikaci jako vztah mezi výroky, nikoliv jako logickou spojku. Tuto ideu formuloval r. 1837 *Bernard Bolzano* a nově pak formuloval pojem tzv. logického vyplývání *Alfred Tarski* v r. 1935. Didaktické zpracování této problematiky lze najít např. v mém článku *Logika a vyučování matematice* z r. 1974.

Mnoho chyb se vyskytuje v neverbálním vyjadřování pomocí schémat a obrázků. Dosti podrobně jsem psal o této problematice v článku *Nevyléčitelná choroba vizuální kultury* v r. 2015.

Chyby ve školské matematice

Všimněme si nejdříve několika chyb z běžné školní praxe. Jejich příčinou bývá formální zvládnutí matematických poznatků, někdy ovšem např. i nepozornost. U některých chyb uvádím i argumenty autorů, že výsledek je správný. To může být začátek plodné diskuse k nápravě chyb.

$\sqrt{25,4} = 5,2$. Vždyť přece $5^2 = 25$ a $2^2 = 4$.

V rovnoramenném trojúhelníku s rameny r , základnou a a úhlem proti základně α platí $\sin \alpha = \frac{a}{r}$. Vždyť přece α je proti straně a a r je přepona. (Žák si nakreslil v rovnoramenném trojúhelníku výšku k základně.)

Má-li strana pravidelného šestiúhelníku délku 4 cm, má strana pravidelného dvanáctiúhelníku délku 2 cm. Když se zvětší počet stran dvakrát, musí se dvakrát zmenšit délka strany.

V libovolném trojúhelníku platí $a : b : c = \alpha : \beta : \gamma$. Vždyť proti větší straně leží větší úhel.

Tělesová úhlopříčka krychle se protíná s úhlopříčkou stěnovou. Vždyť jejich průsečík vidím na obrázku.

Snad každý učitel může uvést řadu podobných perliček ze své praxe.

Dosti častou žakovskou chybou je dílčí řešení úlohy, které není zcela špatně.

Uveďme několik typických příkladů.

Platí-li $0 \cdot x = 0$, pak $x = 0$.

Je-li $x^2 = 4$, pak $x = 2$.

$\sqrt{x^2} = x$.

Řešením rovnice $0 \cdot x = 0$ je libovolné reálné číslo.

Řešením rovnice $x^2 = 4$ jsou čísla 2 a -2 .

$\sqrt{x^2} = |x|$.

Dílčí pohled na řešení problému, místo jeho celkového postižení, lze ovšem nalézt i v učebnicích dosti často. Uvedme několik příkladů ze současných nebo starších českých učebnic.

Výška trojúhelníku je vzdálenost jeho vrcholu od protilehlé strany.

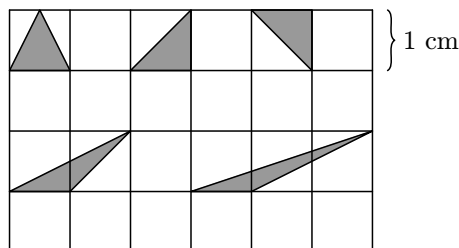
Výška lichoběžníku je vzdálenost jeho základen.

Osa úhlu je množina všech bodů jeho roviny, které mají stejnou vzdálenost od jeho ramen.

Těmto chybným formulacím můžeme účelně předcházet vhodnými přípravnými úlohami.

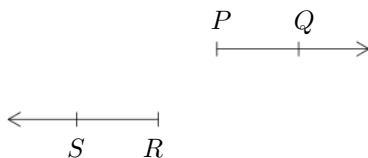
Např. v souvislosti s odvozením vzorce pro obsah trojúhelníku můžeme řešit úlohu:

Určete obsah trojúhelníků na obr. 4.



Obr. 4

Před větou o ose úhlu je účelné položit otázku: Jaká je vzdálenost polopřímek PQ a RS na obr. 5.



Obr. 5

Nesprávné je rovněž zavedení komplexních čísel a vektorů jako množin uspořádaných dvojic reálných čísel, aniž by se v definici uvedly početní operace s nimi.

V množinových diagramech neznázorňujeme jednotlivé množiny oblastmi. Hranicemi oblastí je pouze vyznačeno, kam bychom měli zařazovat obrazy prvků příslušných množin.

Setkal jsem se u univerzitních studentů např. s těmito „výpočty“:

$$22^2 + 31^2 + 35^2 = v^2 \Rightarrow 22 + 31 + 35 = v$$
$$v^2 = \sqrt{37} - 37 \Rightarrow v = \sqrt[3]{37} - \sqrt{37}.$$

Takovéto příklady ukazují na nulové povědomí jejich autorů o aritmetických zákonitostech. Zdá se mi však, že příčiny těchto chyb nelze hledat jen ve špatně realizovaném vyučování matematice. Co lze očekávat od vysokoškoláků, kteří píší např. „Očekávaly“ jsme, že „gymnázia“ nás „připravý“ na univerzitu, kde budeme „pjestovat“ vědu. Všechny tyto chyby mohou adresně doložit.

Tři úlohy pro čtenáře a jejich žáky

Inspirace Kořínkovými Základy algebry. Najděte chybu v této úvaze: Ze symetričnosti a tranzitivnosti relace R plyne její reflexivnost. Symetričnost relace R znamená: $\forall x, y [xRy \Rightarrow yRx]$. Aplikujeme-li tento výsledek na tranzitivnost relace $R \forall x, y, z [xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz]$, dostáváme $\forall x [xRx]$.

Vzorec pro prvočísla. Rozhodněte o pravdivosti tvrzení: Neexistuje vzorec, který by pro libovolné přirozené číslo dával prvočísla. Svě tvrzení zdůvodněte. (Takový vzorec existuje.)

Pohádka o likvidaci vozového parku. Vysvětlete tuto situaci: Podnik má rozdělit 17 automobilů mezi tři podílníky tak, že první dostane polovinu, druhý třetinu a třetí devítinu z celkového počtu vozů. Správce, který vidí potíže s požadovaným dělením, se rozhodl, že dá podniku k dispozici svůj vlastní vůz. Pak bez potíží vyřešil celou situaci: první podílník dostal 9 vozů, druhý 6 a třetí 2 vozy. Správce nasedne do svého automobilu a odjede.

Závěry

Učitelé patrně učí tak, jak se sami ve školách učili. Nedostatky v matematickém vzdělání v učivu základní školy stěžejí odstranění škola střední, nedostatky středoškolského vzdělání neodstraní univerzita. Problémy naší školy jsou především problémy nás, učitelů.

Věda chyby, ba i domnělé chyby, tvrdě trestá. Doložme to dvěma příklady. Někdy kolem roku 500 před naším letopočtem dospěl Pythagorův žák *Hippasos z Mezoponta* k závěru, že $\sqrt{2}$ není racionální číslo. *Pythagoras* byl však přesvědčen, že taková čísla neexistují. Odsoudil proto Hippase

k trestu smrti utopením. *S. Singh* o tom píše v knize *Velká Fermatova věta* toto: „Otec logiky a matematických metod se uchýlí k použití síly, místo aby uznal, že se mýlil. Odmítnutí iracionálních čísel je jeho největší chybou a možná největší tragédií v dějinách řecké matematiky. Iracionální čísla tak mohla vstát z mrtvých po Pythagorově smrti.“

Petr Vopěnka ovšem pokládá tuto historku za neprokázanou legendu a je přesvědčen, že k nesouměřitelnosti strany a úhlopříčky čtverce dospěl sám Pythagoras. Chyby v historii (nejen matematiky) jsou patrně časté a lze o nich těžko rozhodovat.

S výrazným odsouzením objevu neeukleidovské geometrie se setkal u představitelů tehdejší vědy *I. N. Lobačevskij*. Např. akademik *Ostroggradskij* napsal: „Vše, co jsem pochopil z geometrie p. Lobačevského je více než podprůměrné. Všechno, co jsem nepochopil, bylo zřejmě špatně vyloženo. Kniha p. rektora Lobačevského je poskvrněna chybou, je nebdale napsána a nezasluhuje tudíž pozornosti Akademie.“ Vypořádávat se s chybami ve školské matematice tresty je neúčinné. Chyby žáků by měly být jednak informacemi o úrovni porozumění matematice, ale hlavně prostředkem k nalézání správné cesty k matematickým poznatkům. Je to cesta obtížná, podle mého názoru však správná. O problematice chyb ve vzdělávání z hlediska psychologického a společenského napsal řadu článků *Milan Hejný*. Z novějších uveďme např. jeho stať *Chyba jako prvek edukační strategie učitele* ve sborníku *Dvacet kapitol z didaktiky matematiky* z r. 2004.

Přestože jsme se v tomto příspěvku zabývali převážně problematikou chyb, tvoří omyly jen velmi malou část matematické produkce. Vřele souhlasím s názorem *Jaroslava Kurzweila*: „Matematika je krásná. Co platilo včera, platí i dnes.“

Nakonec si dovoluji citovat známý aforismus: Existují tři typy lidí: Ti, kteří dovedou počítat a ti, kteří počítat nedovedou.

Literatura

- [1] *Hadamard, J.*: Lessons in Geometry. AMS, Newton, 2008.
- [2] *Hejný, M. a kol.*: Dvacet kapitol z didaktiky matematiky. Univerzita Karlova, Praha, 2004.
- [3] *Kuřina, F.*: Logika a vyučování matematice. Matematika a fyzika ve škole, roč. 6,7 (1975).
- [4] *Kuřina, F.*: Nevyléčitelná choroba vizuální kultury. Učitel matematiky, roč. 23 (2015), č. 3, s. 185–192.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 233 a 234 můžete zaslat nejpozději do 20. 9. 2017 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz.

Úloha 235

Na jednotkové kružnici se středem S je dána konečná množina oblouků délek menších než π , přitom součet délek všech oblouků je větší než 2π . Dokažte, že existuje přímka procházející bodem S , která protíná aspoň tři z těchto oblouků.

Jacek Uryga (Katowice)

Úloha 236

Uvnitř pravoúhlého trojúhelníku ABC s přeponou BC je dán bod D tak, že $|DB| = |DC|$. Pro vnitřní bod E odvěsny AB platí $DE \parallel AC$. Pro vnitřní bod F přepony BC platí $|EB| = |EF|$. Dokažte, že AF je kolmé na BD .

Patrik Bak

Dále uvádíme řešení úloh 231 a 232, jejichž zadání byla zveřejněna v prvním čísle aktuálního ročníku našeho časopisu.

Úloha 231

Nechť S je střed pravidelného dvanáctiúhelníku $A_1A_2 \dots A_{12}$. Označme R průsečík přímek A_4A_9 a A_6A_{11} . Dokažte, že čtyřúhelník A_9RSA_{11} je tětivový.

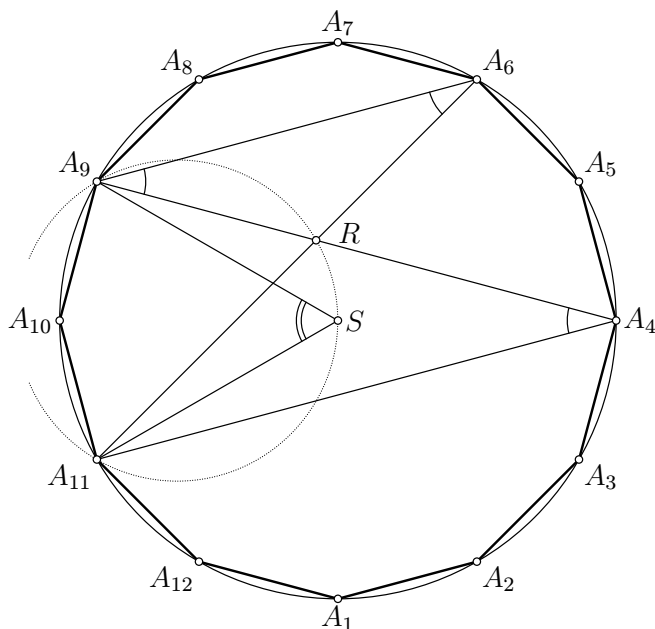
Karel Pazourek

Řešení. Podle věty o obvodovém úhlu stačí dokázat, že úhly A_9SA_{11} a A_9RA_{11} mají stejnou velikost.

Uvědomme si, že vrcholy pravidelného dvanáctiúhelníku leží na kružnici se středem S . Velikost úhlu A_9SA_{11} je zřejmě

$$\frac{2}{12} \cdot 360^\circ = 60^\circ.$$

Podle věty o obvodovém úhlu jsou velikosti úhlů $A_9A_4A_{11}$ a $A_9A_6A_{11}$ rovny polovině velikosti středového úhlu A_9SA_{11} , tedy 30° . Úsečky A_4A_6 a A_9A_{11} mají shodnou velikost, čtyřúhelník $A_4A_6A_9A_{11}$ je tak rovnoramenný lichoběžník a úhly $A_9A_4A_{11}$ a $A_4A_9A_6$ jsou shodné. Velikost vnějšího úhlu A_9RA_{11} trojúhelníku A_6A_9R je rovna součtu velikostí jeho vnitřních úhlů u vrcholů A_9 a A_6 , tedy 60° , což jsme chtěli dokázat.



Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně a *Martin Raszyk* z ETH Zürich,

Úloha 232

Je dán obdélník O s celočíselnými délkami stran a obvodem 28. Dokažte, že z kruhu o poloměru 10 lze vystříhnout čtyři kopie obdélníku O .

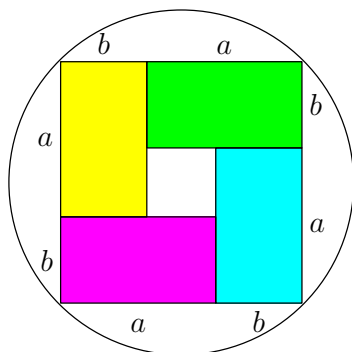
Josef Tkadlec

Řešení podle Martina Raszyka.

Označme a, b délky stran obdélníku O . Jeho obvod je 28, platí tedy

$$a + b = 14.$$

Ze čtverce se stranou 14 lze podle obrázku vystříhnout čtyři kopie obdélníku O .



Pro délku u úhlopříčky tohoto čtverce platí

$$u = \sqrt{2 \cdot 14^2} = \sqrt{392} < \sqrt{400} = 20.$$

Existuje proto kruh s průměrem 20 (a poloměrem 10), který ho celý pokrývá. Tím je tvrzení úlohy dokázáno.

Správná řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan a *Karol Gajdoš* z Trnavy. *František Jáchim* z Volyně a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

Pavel Calábek

Výsledky českých žáků v šetření PISA 2015

DANA MANDÍKOVÁ – RADEK BLAŽEK

MFF UK, Praha – Česká školní inspekce, Praha

PISA (*Programme for International Student Assessment*) je mezinárodním výzkumem čtenářské, matematické a přírodovědné gramotnosti patnáctiletých žáků, který pořádá Organizace pro hospodářskou spolupráci (OECD). V současné době představuje PISA největší mezinárodní šetření v oblasti měření výsledků vzdělávání. Jeho cílem je pravidelně zjišťovat, zda si žáci na konci povinné školní docházky osvojili vědomosti a dovednosti, které jsou nezbytné pro úspěšné uplatnění v reálném životě. Záměrem není zkoumat, jak žáci umí nabyté vědomosti reprodukovat, ale to, jak je dokáží využít v úlohách vycházejících ze situací běžného života.

Článek podává základní informaci o celkových výsledcích českých žáků v šetření PISA 2015 a o jejich časovém vývoji.

Výzkum PISA

Cykly výzkumu

Výzkum probíhá ve tříletých cyklech, v každém z nich je jedné ze tří sledovaných oblastí věnována zvýšená pozornost. Přehled uskutečněných cyklů je v tabulce 1.

V roce 2015 byla navíc testovaná schopnost týmového řešení problémů, výsledky této části budou zveřejněny v průběhu roku 2017 a čtenáři časopisu MFI budou včas informováni.

Testování žáci

Testování byli žáci narození v roce 1999. V České republice jsou to žáci 9. ročníků základních škol či odpovídajících ročníků víceletých gymnázií nebo 1. ročníků středních škol.

Vzorek je v České republice vybírán tak, aby bylo možné srovnávat výsledky žáků různých druhů škol a aby byla zajištěna reprezentativnost vzorku žáků na úrovni základních škol a víceletých gymnázií na úrovni krajů.

Tab. 1 Cykly výzkumu PISA

Rok	Hlavní testovaná oblast	Počet zemí	Počet škol v ČR	Počet žáků v ČR
2000	Čtenářská gramotnost	32	253	9 400
2003	Matematická gramotnost	41	260	9 900
2006	Přírodovědná gramotnost	56	246	9 000
2009	Čtenářská gramotnost	65	290	7 500
2012	Matematická gramotnost	69	297	6 535
2015	Přírodovědná gramotnost	72	345	7 000

Testy a dotazníky

Úroveň gramotnosti žáků ve všech sledovaných oblastech byla zjišťována pomocí elektronického testu, na jehož vyplnění měli žáci dvě hodiny. Testové úlohy vycházejí z reálných situací, obsahují jak otázky s výběrem odpovědi, tak otázky, kde žáci formulují vlastní odpověď. Pro přírodovědný test byly vytvořeny kvalitativně nové interaktivní úlohy obsahující simulace, modelování pokusů a další interaktivní prvky (viz ukázka úlohy Pouštní lednička na konci článku). Součástí každého šetření jsou také dotazníky pro žáky a školní dotazníky. Údaje z nich umožňují posuzovat např. závislost výsledků žáků na socioekonomickém zázemí, rozdíly mezi chlapci a dívkami či vliv školních faktorů na výsledky. V roce 2015 vyplňovali dotazník i učitelé. Otázky se týkaly jejich kvalifikovanosti, názorů na školu, u učitelů přírodovědných předmětů pak hlavně používaných metod a forem výuky.

Prezentace výsledků

Ve výzkumu PISA jsou výsledky žáků jednotlivých zemí prezentovány dvěma různými způsoby:

- Pomocí skóre (počtu bodů) na škálách výsledků, které vyjadřují úspěšnost žáků při řešení testových úloh.

Uvádí se průměrné výsledky zemí na třech celkových škálách pro čtenářskou, matematickou a přírodovědnou gramotnost. Pro každou gramotnost pak lze vytvořit další dílčí škály pro testované dovednosti, znalosti a oblasti.

- Pomocí šesti gramotnostních úrovní.

Podle toho, jakého skóre žák v testu dosáhl, je zařazen do jedné ze šesti úrovní. Žáci na první úrovni dosahují nejnižších výsledků a ovládají pouze nejjednodušší dovednosti, šestá úroveň odpovídá nejlepším výsledkům a nejsložitějším dovednostem. V projektu PISA je za základní stanovena druhá úroveň. Žáci, kteří této úrovni nedosáhnou, mohou mít problémy v dalším vzdělávání nebo v zaměstnání. (Podrobné vymezení toho, co by měli žáci na jednotlivých úrovních umět, lze nalézt v [1], příloha 1.)

Vymezení přírodovědné gramotnosti (podle [6])

Definice přírodovědné gramotnosti pro šetření v roce 2015 byla následující:

Přírodovědná gramotnost je schopnost přemýšlet a jednat ve všech věcech souvisejících s přírodními vědami a jejich principy jako aktivní občan.

Přírodovědně gramotný člověk je schopen a ochoten zapojit se do věcné debaty o přírodních vědách a technologiích, k čemuž musí mít následující dovednosti:

1. *Vysvětlovat jevy vědecky.*

Rozpoznávat, nabízet a hodnotit vysvětlení různorodých přírodních jevů a technologií.

2. *Vyhodnocovat a navrhnout přírodovědný výzkum.*

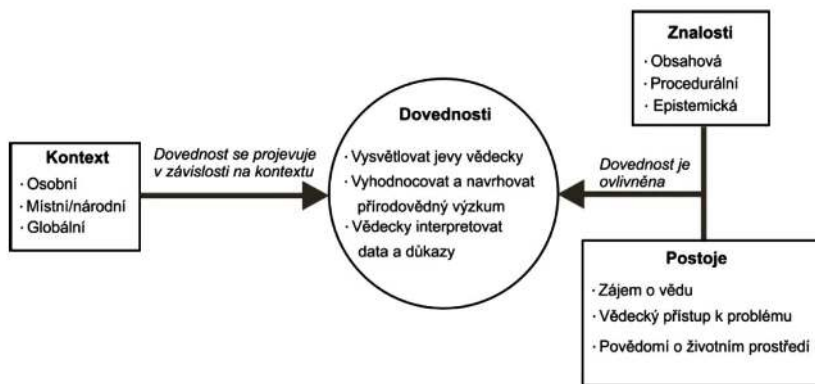
Popisovat a hodnotit přírodovědná zkoumání a navrhnout vědeckovýzkumné otázky.

3. *Vědecky interpretovat data a důkazy.*

Analyzovat a vyhodnocovat různé podoby dat, tvrzení a důkazů a vyvozovat odpovídající vědecké závěry.

Přírodovědnou gramotnost tvoří čtyři vzájemně propojené části. Jsou to výše uvedené *dovednosti*, dále *kontexty*, *znalosti* (znalosti přírody a technologií – obsahová znalost; znalost, jakými procesy jsou získávány – procedurální znalost a pochopení důvodů pro vznik těchto postupů a zdůvodnění jejich použití – epistemická znalost) a *postoje*.

Propojení jednotlivých částí zachycuje následující schéma:



Novým prvkem v koncepčním rámci PISA 2015 je vymezení požadované úrovně poznání. Je třeba odlišovat obtížnost úlohy a požadovanou úroveň poznání. Obtížnost úlohy se odvozuje empiricky z podílu testované populace, která je v řešení úlohy úspěšná. Požadovaná úroveň poznání je daná požadovanými způsoby práce se znalostmi.

Úrovně poznání jsou následující:

- **Nízká**

Provádění jednoduchých postupů například vybavení si faktu, termínu, zákona nebo koncepce či vyhledání jednoho bodu z grafu nebo jednoho údaje z tabulky.

- **Střední**

Použití a uplatnění konceptuální znalosti k popisu nebo vysvětlení jevu, volba vhodného postupu zahrnujícího dva nebo více kroků, třídění a zobrazení dat, vysvětlení nebo použití jednoduché tabulky nebo grafu.

- Vysoká

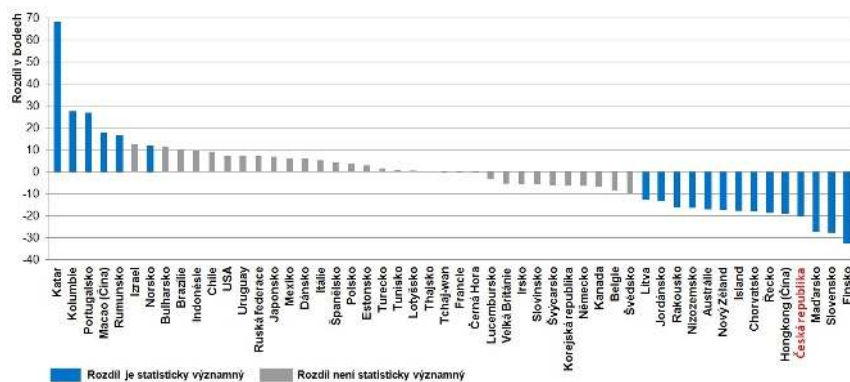
Analýza složité informace nebo údajů, shrnutí a zhodnocení faktů, zdůvodnění, ověření z různých zdrojů, vypracování plánu nebo sledu kroků k vyřešení úkolu.

Celkové výsledky a jejich vývoj

Přírodovědná gramotnost

Čeští žáci dosáhli v přírodních vědách výsledků na úrovni průměru zemí OECD (493 bodů), srovnatelný například s výsledkem žáků Švédska, Španělska, Francie, Rakouska, USA, Lotyšska, Norska a Ruska. Jednoznačně nejlepší výsledky měli žáci Singapuru (556 bodů), následovaní žáky Japonska, Estonska a Finska. Významně horšího výsledku než čeští žáci pak dosáhli například žáci Lucemburska, Itálie, Maďarska a Slovenska.

V letech 2006 a 2015 byla přírodovědná gramotnost hlavní testovanou oblastí a v tomto období lze srovnávat výsledky. Změny ve výsledcích zemí, které se obou šetření zúčastnily, zachycuje obr. 1. Výsledky českých žáků se v tomto období významně zhoršily, a to o 20 bodů.



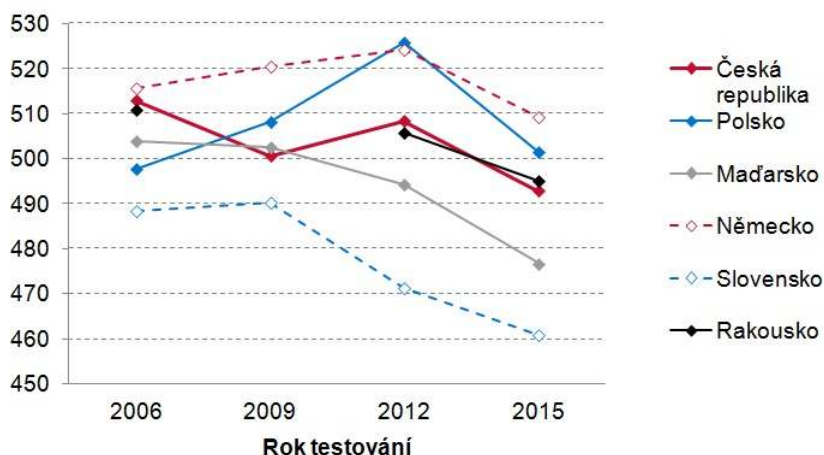
Obr. 1 Změny ve výsledcích mezi roky 2006 a 2015 – přírodovědná gramotnost

Průběh výsledků některých středoevropských zemí v přírodovědné gramotnosti v období 2006 až 2015 ukazuje obr. 2.

Zastoupení českých žáků na různých gramotnostních úrovních od roku 2006 je v následující tabulce 2. Oproti předchozím letům vzrostl počet žáků (21 %), kteří nedosahují ani úrovně 2, která je považovaná za základní. Ze

zemí OECD má nejmenší zastoupení těchto žáků Estonsko (9 %), Japonsko (10 %), Kanada a Finsko (11 %). Je vidět, že v České republice od roku 2006 klesá zastoupení žáků na dvou nejvyšších úrovních.

Čeští chlapci byli v oblasti přírodních věd statisticky významně lepší (o 9 bodů) než dívky. V průměru zemí OECD je rozdíl ve prospěch chlapců o 4 body. V zastoupení českých dívek a chlapců pod druhou gramotnostní úrovní není významný rozdíl. Na dvou nejvyšších úrovních je v České republice významně více chlapců (9 %) než dívek (6 %).



Obr. 2 Změny ve výsledcích středoevropských zemí 2006–2015 – přírodovědná gramotnost¹⁾

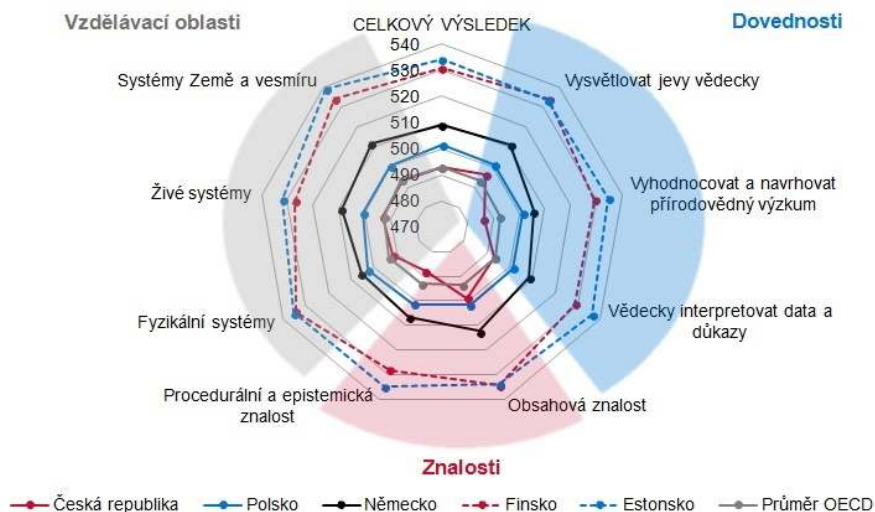
Tab. 2 Zastoupení českých žáků na různých gramotnostních úrovních v % – přírodovědná gramotnost

	pod úrovní 1	úroveň 1	úroveň 2	úroveň 3	úroveň 4	úroveň 5	úroveň 6
2006	3,5	12,1	23,4	27,8	21,7	9,8	1,8
2009	4,7	12,6	25,6	28,8	19,9	7,2	1,2
2012	3,3	10,5	24,7	31,7	22,2	6,7	0,9
2015	4,6	16,1	25,9	27,7	18,4	6,3	0,9

¹⁾Data pro Rakousko za rok 2009 nejsou dostupná.

Výsledky na dílčích škálách

Kromě srovnávání celkových výsledků, jichž žáci v testu dosáhli, lze také porovnávat, jak byli žáci úspěšní v jednotlivých dovednostech, znalostech a vzdělávacích oblastech (živé systémy, fyzikální systémy, systémy Země a vesmíru). Čeští žáci zvládají lépe vysvětlování jevů vědecky, horší jsou ve vyhodnocování a navrhování přírodovědného výzkumu, mají lepší znalost obsahu přírodních věd než procedurální a epistemickou znalost. Obr. 3 ukazuje pro srovnání výsledky vybraných zemí na dílčích škálách.



Obr. 3 Výsledky na dílčích škálách přírodovědné gramotnosti pro vybrané země

Matematická gramotnost

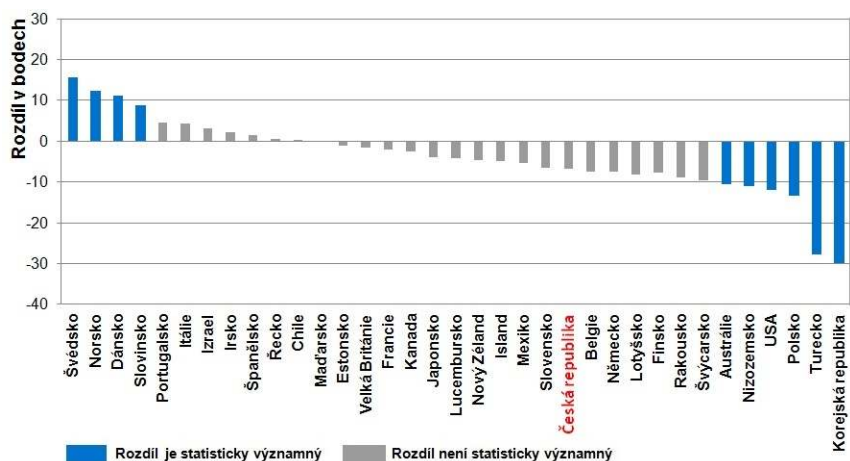
Vymezení matematické gramotnosti ve výzkumu PISA:

Matematická gramotnost je schopnost jedince formulovat, používat a interpretovat matematiku v různých kontextech. Zahrnuje matematické myšlení, používání matematických pojmů, postupů, faktů a nástrojů k popisu, vysvětlování a předpovídání jevů. Pomáhá jedinci si uvědomit, jakou roli matematika hraje ve světě, a díky tomu správně usuzovat a rozhodovat se tak, jak to vyžaduje konstruktivní, angažované a reflektivní občanství.

Nejlepšího výsledku v matematickém testu dosáhli žáci ze Singapuru (564 bodů), následovali je žáci z Číny a Japonska. Z evropských zemí byli nejlepší žáci Švýcarska a Estonska. Výsledek českých žáků (492 bodů) byl na úrovni průměru OECD (490 bodů). Srovnatelný je například s výsledky žáků z Nového Zélandu, Austrálie, Francie, Velké Británie, Portugalska a Itálie. Výrazně je předčili žáci ze sousedního Polska a Německa, naopak maďarští a slovenští žáci byli významně horší.

Mezi roky 2003 a 2012, kdy byla matematika hlavní testovanou oblastí, se výsledek českých žáků významně zhoršil (o 17 bodů). Mezi roky 2012 a 2015 pak došlo k dalšímu zhoršení (o 7 bodů), které je již statisticky nevýznamné. Následující obr. 4 zachycuje změny ve výsledcích zemí OECD mezi roky 2012 a 2015.

V průměru zemí OECD byli chlapci o 8 bodů lepší než dívky. Výsledky českých chlapců a dívek byly srovnatelné, což je rozdíl oproti roku 2012, kdy byli chlapci o 12 bodů lepší.



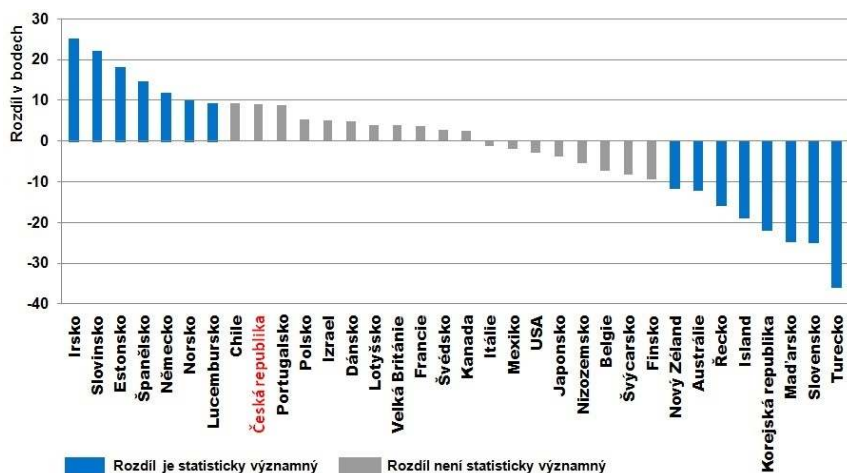
Obr. 4 Změny ve výsledcích zemí OECD mezi roky 2003 a 2015 – matematická gramotnost

Čtenářská gramotnost

Vymezení čtenářské gramotnosti ve výzkumu PISA:

Čtenářská gramotnost představuje porozumění, využívání, posuzování a angažování se v psaných textech za účelem dosažení cílů jedince, rozšíření jeho znalostí a potenciálu a jeho aktivní účasti ve společnosti.

Nejllepší výsledek měli v oblasti čtenářské gramotnosti opět žáci Singapuru (535 bodů), následovali je žáci Hongkongu, Kanady, Finska, Irsko a Estonska. Výsledek českých žáků (487 bodů) byl mírně pod průměrem zemí OECD (493 bodů). Srovnatelného výsledku dosáhli například žáci Ruska, Švýcarska, Lotyšska, Rakouska a Vietnamu. Čtenářská gramotnost byla hlavní testovanou oblastí v letech 2000 a 2009, v tomto období se výsledek českých žáků výrazně zhoršil (o 13 bodů). Mezi roky 2009 a 2015 se pak čeští žáci zlepšili o 9 bodů, zlepšení je ale statisticky nevýznamné. Rozdíly ve výsledcích žáků zemí OECD mezi roky 2009 a 2015 jsou znázorněny v následujícím obr. 5.



Obr. 5 Změny ve výsledcích zemí OECD mezi roky 2009 a 2015 – čtenářská gramotnost

Ve všech zemích dosáhly v roce 2015 dívky lepšího výsledku než chlapci. V případě českých dívek se jednalo o rozdíl statisticky významný (27 bodů). Oproti roku 2009 se ale rozdíl snížil, tehdy činil 48 bodů.

Rozdíly ve výsledcích českých žáků různých typů škol

Vzorek žáků v České republice byl vybrán tak, aby bylo možné porovnat mezi sebou výsledky žáků navštěvujících různé druhy škol. V tab. 3–5 jsou uvedeny průměrné výsledky žáků různých škol v jednotlivých oblastech gramotnosti. Vývoj výsledků čtenářské gramotnosti lze sledovat od roku

2000, kdy byla hlavní testovanou oblastí; výsledky v matematice lze takto sledovat od roku 2003 a v přírodních vědách až od roku 2006.

Od roku 2006 se výsledky žáků všech druhů škol v přírodních vědách zhoršily. Po přechodném zlepšení žáků základních škol mezi roky 2009 a 2012 se jejich výsledek opět zhoršil. Zhoršili se i žáci středních škol s maturitou i bez ní. Srovnatelný výsledek s rokem 2012 měli žáci víceletých i čtyřletých gymnázií.

Tab. 3 Výsledky podle typů škol – přírodovědná gramotnost

Přírodovědná gramotnost	Průměrný výsledek			
	2006	2009	2012	2015
Základní škola	488	473	490	468
Víceleté gymnázium	628	613	601	602
Čtyřleté gymnázium	613	596	583	578
SOŠ a SOU s maturitou	542	521	519	503
SOŠ a SOU bez maturity	443	448	444	413
Speciální škola	375	314	331	367
ČR	513	501	508	493

Tab. 4 Výsledky podle typů škol – matematická gramotnost

Přírodovědná gramotnost	Průměrný výsledek				
	2003	2006	2009	2012	2015
Základní škola	495	482	460	476	469
Víceleté gymnázium	631	635	614	602	594
Čtyřleté gymnázium	610	614	583	585	574
SOŠ a SOU s maturitou	541	542	515	514	505
SOŠ a SOU bez maturity	458	440	438	425	418
Speciální škola	369	363	372	310	341
ČR	516	510	493	499	492

Z tabulky 4 je vidět, že i v oblasti matematické gramotnosti došlo od roku 2012 v průměru ke zhoršení u všech typů škol kromě speciálních.

Ve čtenářské gramotnosti se oproti roku 2012 zlepšily výsledky žáků čtyřletých gymnázií. Žáci víceletých gymnázií a základních škol se mírně zhoršili, znatelné zhoršení pak bylo u nematuritních oborů středních škol.

Tab. 5 Výsledky podle typů škol – čtenářská gramotnost

Přírodovědná gramotnost	Průměrný výsledek					
	2000	2003	2006	2009	2012	2015
Základní škola	474	469	457	449	470	462
Víceleté gymnázium	592	593	609	587	593	589
Čtyřleté gymnázium	582	584	603	581	568	582
SOŠ a SOU s maturitou	525	517	522	502	506	506
SOŠ a SOU bez maturity	436	433	386	414	424	397
Speciální škola	267	300	314	338	346	332
ČR	492	489	483	478	493	487

Některá další zjištění výzkumu PISA 2015

Údaje z dotazníkového šetření umožňují dát výsledky žáků v testech do souvislosti s dalšími faktory, např. socioekonomickými či školními.

Jedním ze sledovaných faktorů jsou náklady vynaložené na vzdělání jednoho žáka od 6 do 15 let a jejich souvislost s výsledkem v přírodovědném testu. Ukazuje se, že průměrné výsledky rostou se stoupajícími výdaji na vzdělání. Výsledek českých žáků je v kontextu zemí OECD lepší, než by odpovídalo nákladům vynaloženým na jejich vzdělání. Ovšem např. polští a estonští žáci dosahují při obdobných nákladech ještě lepších výsledků.

Dalším faktorem, který může ovlivnit výsledky žáků, je úroveň vzdělání dospělých. Sledovala se věková kategorie 35-44 let, ve které se nachází většina rodičů testovaných žáků. V České republice je ve srovnání se zeměmi OECD výsledek v testu přírodovědné gramotnosti výrazně lepší, než by odpovídalo podílu dospělých v uvedeném věku s ukončeným terciárním vzděláním.

Dobrý vzdělávací systém by měl poskytovat žákům rovné vzdělávací příležitosti. Sledují se proto také rozdíly ve výsledcích žáků uvnitř škol a mezi školami. V České republice byly rozdíly ve výsledcích žáků v přírodovědném testu uvnitř škol podprůměrné, ale rozdíly mezi školami naopak

nadprůměrné. Výsledek žáka tak do jisté míry záleží na tom, do jaké školy žák chodí. Vzdělávací systém u nás tedy funguje podle této charakteristiky spíše selektivně. Ke stejnému závěru dospělo i minulé šetření v roce 2012 v oblasti matematické gramotnosti.

Z odpovědí žáků v dotaznících týkajících se některých aktivit zařazovaných do hodin přírodovědných předmětů lze usuzovat na jejich vliv na výsledky v testu. Žáci ze zemí OECD například dosahovali lepších výsledků (v průměru o 27 bodů), pokud uvedli, že jim učitelé vysvětlují vědecké myšlenky v mnoha hodinách nebo každou či téměř každou hodinu. Lepších výsledků (v průměru o 14 a 13 bodů) dosáhli i žáci, podle nichž se o jejich dotazech diskutuje a jejichž učitelé názorně demonstrují nějakou myšlenku v mnoha hodinách nebo každou či téměř každou hodinu. Naproti tomu vliv pouhé diskuze celé třídy se na výsledku v přírodovědném testu neprojevil. Výše uvedené aktivity jsou v České republice zařazované podprůměrně.

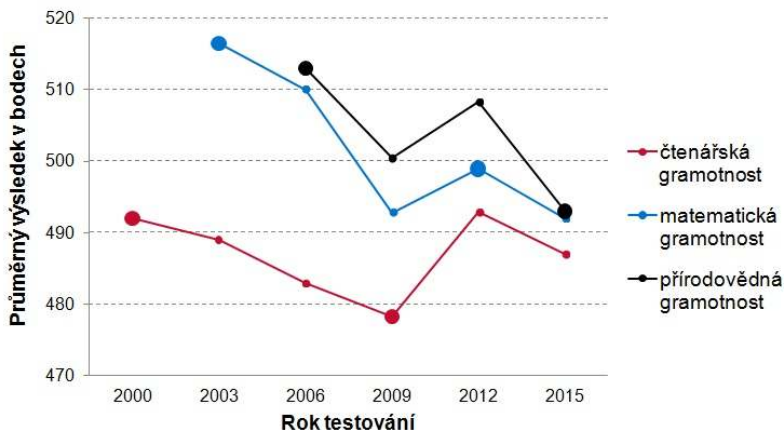
Závěr

Hlavní testovanou oblastí šetření PISA 2015 byla přírodovědná gramotnost. Novinkou bylo elektronické zadávání i vyhodnocování testů. Elektronické testování umožnilo zařazení nového typu přírodovědných úloh, které obsahují různé simulace, modelování pokusů a další interaktivní prvky. Je třeba říci, že s takovými úlohami se čeští žáci v hodinách běžně nesetkávají.

Výsledky českých žáků byly v přírodovědné a matematické gramotnosti na úrovni průměru zemí OECD a ve čtenářské gramotnosti dosáhli výsledku, který byl mírně pod průměrem zemí OECD. Z obr. 6 je vidět, že se tyto výsledky s výjimkou období 2009–2012 postupně zhoršují. Snižuje se také podíl českých žáků s výbornými výsledky a zvyšuje se podíl těch s výsledky nedostatečnými. Pro náš vzdělávací systém stále platí, že je selektivní a jsou zde velké rozdíly mezi školami.

Výsledky českých žáků jsou ale lepší, než by odpovídalo vynaloženým nákladům na jejich vzdělání i dosaženému vzdělání jejich rodičů.

Při interpretaci výsledků šetření a vyvozování závěrů je třeba velká opatrnost a nutnost brát v úvahu, co daná šetření zjišťují a za jakým účelem, i jakými prostředky. V každém případě by zhoršující se výsledky našich žáků neměly zůstat bez povšimnutí. Veškerá data z výzkumu jsou volně dostupná a bylo by dobré podrobit je dalším analýzám a pokusit se najít příčiny neúspěchů našich žáků.



Obr. 6 Vývoj výsledků českých žáků v jednotlivých gramotnostech

Literatura

- [1] Blažek, R., Příhodová, S.: Mezinárodní šetření PISA 2015. Národní zpráva. Přírodovědná gramotnost. ČŠI, Praha 2016.
- [2] Mandíková, D., Palečková, J.: Výsledky českých žáků ve výzkumu PISA 2012 – mírný optimismus. MFI, roč. 23 (2014), č. 5, s. 370–384.
- [3] Mandíková, D., Palečková, J.: Výsledky českých žáků ve výzkumu PISA 2009 – zhoršení v matematice i přírodních vědách. MFI, roč. 21 (2011), č. 4, s. 210–222.
- [4] Mandíková, D., Palečková, J.: Přírodovědná gramotnost českých žáků – výsledky výzkumu PISA 2006 MFI, roč. 18 (2008), č. 4, s. 214–229.
- [5] OECD (2016), PISA 2015 Results (Volume I, Volume II) PISA, OECD Publishing. [cit.17-01-25] Online:
http://www.oecd-ilibrary.org/education/pisa-2015-results-volume-i_9789264266490-en;jsessionid=bdrgr6immh9ks.x-oecd-live-03;
http://www.oecd-ilibrary.org/education/pisa-2015-results-volume-ii_9789264267510-en;jsessionid=bdrgr6immh9ks.x-oecd-live-03
- [6] PISA 2015 koncepční rámec hodnocení přírodovědné gramotnosti. Pracovní překlad draftu.

Další informace a materiály k výzkumu PISA lze nalézt na adresách:

Mezinárodní stránky: <http://www.pisa.oecd.org>

Národní stránky: <http://www.csicr.cz/Prave-menu/Mezinarodni-setreni/PISA>

Ukázky interaktivních testových úloh: <http://www.oecd.org/pisa/test>

Ukázka testové otázky využívající simulace

Úloha Pouštní lednička

Úvod

PISA 2015 Pouštní lednička

Úvod

Pouštní lednička je zařízení, které se používá převážně v afrických zemích k udržení jídla v chladu bez elektrické energie.

Malá hliněná nádoba je umístěná do větší hliněné nádoby s plátěným víkem. Prostor mezi hrnci je vysypán pískem. Ten tvoří izolaci kolem menšího hrnce. Písek se pravidelně vlhčí vodou. Když se voda odpařuje, snižuje se uvnitř menšího hrnce teplota.

Domorodci si pouštní ledničky zhotovují z běžného místního materiálu, z hlíny.

Pouštní lednička

Vnitřní hliněný hrnec, zde jsou umístěné potraviny

Vrstva vlhkého písku

Vnější hliněný hrnec

Plátěné víko

Podstavec

Otázka 1

PISA 2015 Pouštní lednička

Otázka 1/4

V rámci školního úkolu máš zjistit, jaká je nejlepší konstrukce pouštní ledničky, aby celé rodině uchovala potraviny v chladu. Bakterie se přestávají množit při 4 °C, a jídlo tak zůstane nejdéle čerstvé.

Použij simulátor na pravé straně, abys zjistil nejvyšší hmotnost jídla, kterou lze mít při 4 °C s použitím různé tloušťky a vlhkosti vrstvy písku.

Simulaci můžeš spustit kolikrát potřebuješ a můžeš libovolně měnit nastavení.

Nejvyšší možná hmotnost potravin uchovávaných při 4 °C je kg.

Vnitřní hrnec, **Vnější hrnec**, **Vrstva písku**, **Podstavec**, **Víko**

Tloušťka vrstvy písku (cm)	Hmotnost potravin (kg)	Vlhkost písku (vlhký/suchý)	Teplota (°C)

Proměnné hodnoty

Teplota Vzdruhu 38 °C

Vlhkost 20 %

Tloušťka vrstvy písku (cm): 1 2 3 4 5

Hmotnost potravin (kg): 0 8 12 16 20

Vlhkost písku: Vlhký Suchý

Uložit data Vymazat data

Představy mladších žáků o gravitačním působení

EVA HEJNOVÁ

Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem

Období primárního vzdělávání lze považovat z hlediska vytváření vztahu k přírodním vědám za velmi důležité, ne-li klíčové [1]. V tomto věku děti rádi něco pozorují, zkoumají a také přemýšlejí o správném vysvětlení různých jevů. Dětskou zvědavost lze tak dobře využít pro motivaci i pro budování pozitivního postoje k přírodním vědám. Významnou úlohu v tomto procesu mají učitelé, kteří mohou poskytovat dětem vhodné náměty k přemýšlení a experimentování a také mohou své žáky vést k vytváření správných představ o tom, jak svět kolem nich funguje.

V našem příspěvku chceme ukázat, jaké jsou představy mladších žáků (4. až 6. ročník základní školy) o gravitačním působení. Téma gravitace jsme vybrali proto, že se s ním žáci setkávají již na 1. stupni základní školy, na který se chceme v našem článku zejména zaměřit. Zároveň je to téma pro vytváření správných představ poměrně obtížné, neboť je s ním spojeno mnoho miskonceptů [2].

Výzkumy intuitivních představ o gravitačním působení byly provedeny v mnoha zahraničních i tuzemských výzkumech [2]. Většina z těchto výzkumů však pochází zejména z 80. let minulého století (např. [3]), proto nás zajímal současný stav představ o gravitaci u mladších žáků. V návaznosti na naše zjištění chceme také poukázat na některá problematická místa v současných učebnicích přírodovědy a metodických textech pro učitele (podrobnější rozbor některých starších učebnic přírodovědy s ohledem na intuitivní představy prováděla Mandíková [4]).

Naši výzkumnou otázkou bylo zjistit, *jak se představy mladších žáků o gravitaci s věkem mění, resp. které miskoncepce u žáků přetrvávají*. Naši hypotézou bylo, že *mladší žáci budou v určité míře zastávat i ve vyšším ročníku širší škálu miskonceptů*.

Náš příspěvek je vzhledem k jeho zaměření určen zejména budoucím i stávajícím učitelům přírodovědy pro 1. stupeň základní školy, ale užitečný bude i pro učitele fyziky na základních i středních školách.

V dalším textu uvádíme nejprve přehled poznatků o gravitaci, se kterými se děti seznamují v rámci přírodovědy na 1. stupni základní školy. Poté prezentujeme realizaci výzkumu a jeho výsledky. Pro srovnání uvádíme také výsledky průzkumu, který jsme provedli u studentů učitelství pro 1. stupeň základní školy. V diskuzi na závěr příspěvku upozorňujeme na některá problémová místa v metodických textech a v učebnicích přírodovědy pro 4. a 5. ročník a předkládáme doporučení pro výuku, jež mohou učitelům pomoci, aby u svých žáků rozvíjeli správné představy o gravitačním působení.

Učivo o gravitaci v učebnicích přírodovědy pro 4. a 5. ročník a v učebnicích fyziky pro 6. ročník

V Rámcovém vzdělávacím programu pro základní vzdělávání [5] poznatky o gravitaci, co se týče 1. stupně základní školy, explicitně uvedeny nejsou. V rámci výuky přírodovědy bývá učivo o gravitačním působení zpravidla zařazeno do vzdělávací oblasti Člověk a jeho svět, konkrétně do tematického okruhu Rozmanitost přírody.

K analýze učiva o gravitaci jsme využili několik učebnic přírodovědy, v nichž je toto učivo obsaženo. Konkrétně jsme pracovali s učebnicemi ze Státního pedagogického nakladatelství [6, 7], dále z nakladatelství Fraus [8], Fortuna [9] a Alter [10].

S gravitační silou se žáci na 1. stupni základní školy setkávají nejčastěji v 5. ročníku [6, 7, 9, 10], výjimečně je učivo o gravitační síle zařazeno již do učebnice pro 4. ročník [8]. Učebnice přírodovědy zpracovávají učivo o gravitaci v různém rozsahu i různými způsoby. Poznatky o gravitační síle a gravitačním poli bývají zpravidla zahrnuty do učiva o vesmíru a Zemi.

Uveďme nyní stručný přehled základních poznatků o gravitaci, s nimiž se žáci v hodinách přírodovědy setkávají.

- Země přitahuje vše na svém povrchu ke svému středu.
- Gravitační síla působí nejen na předměty na jejím povrchu, ale i na ty, které se jí nedotýkají, tj. jsou v jejím okolí.
- Přitažlivost mezi Zemí a tělesy je vzájemná.
- Kolem Země je prostor (gravitační pole Země), ve kterém působí její přitažlivá síla.
- Čím větší hmotnost má těleso, tím větší silou je přitahováno do středu Země.
- S rostoucí vzdáleností od Země se gravitační síla zmenšuje.

Výše uvedené učivo o gravitaci je vesměs zařazeno ve všech učebnicích přírodovědy pro 4. nebo 5. ročník. V některých učebnicích se pak objevují i další poznatky, které učivo na jedné straně obohacují, na druhé straně ale také mohou být zdrojem různých chybných představ nebo nejasností, proto na některé z nich v následujícím textu upozorníme (příklady konkrétních nevhodně formulovaných textů pak uvedeme v kapitole „Závěry z výzkumu a diskuse k učebnicím přírodovědy“).

Jestliže dětem sdělíme, že gravitační síla Slunce je mnohem větší než gravitační síla Země, a proto Slunce svou přitažlivostí udržuje v oběhu i nejvzdálenější planety [7, s. 38], budou logicky přemýšlet, proč se tedy všechny planety nepřitáhnou ke Slunci a „nespadnou na něj“. Některé učebnice pro vysvětlení využívají analogie otáčivého pohybu, např. na řetízkovém kolotoči [8, s. 9], při kterém na nás působí „síla, která nás nutí odletět“. V [9, s. 27] můžeme nalézt námět na jednoduchý pokus, při němž roztočíme kuličku na provázku. Síla (pevnost) provázku nedovolí kuličce odlétnout. Při provádění tohoto pokusu je ale třeba žáky upozornit, že planety nemusejí nutně obíhat kolem Slunce, aby na ně působila gravitační síla. Např. Země a Slunce by na sebe působily gravitačními silami, i kdyby se nepohybovaly. Při obíhání Země kolem Slunce gravitační síla Slunce působí jako dostředivá síla, která zakřivuje trajektorii, po níž Země obíhá.

Děti se také často mylně domnívají, že gravitační působení Země na předměty je způsobeno rotací Země kolem své osy [3, s. 10]. Je proto třeba děti upozornit také na to, že těleso nemusí rotovat, aby kolem něho existovalo gravitační pole.

Pro děti je dále velmi obtížná představa „neviditelného“ gravitačního pole a také to, že na sebe gravitační silou působí všechna tělesa (pro mladší žáky je to nový poznatek, který navíc odporuje jejich běžné zkušenosti). Proto bývá gravitační síla v některých učebnicích srovnávána s magnetickou silou, což má dětem pomoci pochopit její účinky. Např. v učebnici přírodovědy pro 5. ročník [7, s. 38] je zařazena kapitola „Země přitažlivá“, v níž autoři poukazují na to, že Země je z hlediska přitažlivých sil také magnetem (i když slabým) a že tedy přitahuje všechny železné předměty k magnetickým pólům Země. Využití analogie magnetického a gravitačního pole také často doporučují i některé metodické příručky [11, s. 117].

Spojení učiva o gravitační a magnetické síle však bohužel nezřídka vede ke zmatení představ o gravitačním působení Země. Častou miskoncepcí v této oblasti je, že děti gravitaci spojují se zemským magnetismem a myslí

si, že Země přitahuje věci podobně jako magnet [2]. Žáci pak mohou mít velmi bizarní představy, ve kterých spojují různé pojmy dohromady, aby to „dobře fungovalo“ (např. si myslí, že Země může přitahovat gravitační silou jen ty předměty, které v sobě obsahují nějaké železo, podrobněji viz [2, s. 105]). Některé zahraniční výzkumy ukázaly [12, s. 126], [13, s. 69], že žáci také někdy chápou magnetickou sílu jako jistý druh gravitační síly.

V 6. ročníku se žáci setkávají s učivem o gravitaci zpravidla na začátku výuky fyziky, přičemž gravitační síle a gravitačnímu poli bývá nejčastěji věnována samostatná kapitola. Nejprve jsou zopakovány poznatky z přírodovědy, poté následuje zpřesnění představ o gravitaci a také doplnění dalšího učiva, např. co se týče různých kvantitativních údajů a grafického vyjádření závislosti velikosti gravitační síly, kterou působí Země na těleso, na jeho vzdálenosti od Země; určování svislého a vodorovného směru atd. (viz např. [14, s. 20–23]). Magnetické síle a magnetickému poli je pak zpravidla věnována samostatná kapitola, což pomáhá zabránit nežádoucímu směšování učiva o gravitaci a magnetismu.

Metodologie výzkumu

Z metodologického hlediska byl pro zjišťování představ žáků použit kvantitativní přístup, ve kterém jsme k získání dat použili úlohy zadané formou diskuse, jež jsou v zahraničí známy jako concept cartoons [15]. O tomto typu úloh bylo podrobněji pojednáno v tomto časopise již dříve v příspěvku [16]. Dále proto uvedeme pouze stručnou charakteristiku úloh, které žáci řešili.

V každé úloze byla situace, ke které se děti měly vyjadřovat, uvozena jednoduchou oznamovací větou a pro lepší představu byla ještě doplněna fotografií nebo jednoduchou kresbou (obr. 1). V jednotlivých úlohách vystupovali tři nebo čtyři mluvčí, jejichž tvrzení představovaly typické miskoncepce. Pro zjišťování představ o gravitačním působení byly použity tři úlohy (Delfin, Padávající míček a Strom a jablka), které zahrnovaly vybrané miskoncepce. Zajímalo nás zejména, jak žáci chápou gravitaci jakožto sílu; kdy tato síla podle nich působí, resp. nepůsobí; a jak je její působení ovlivněno prostředím.

S těmito dvěma oblastmi jsou spojeny některé typické miskoncepce, které byly již dříve v mnoha výzkumech identifikovány (v níže uvedeném přehledu je označujeme písmenem M s pořadovou číslicí a v dalším textu se na ně pod tímto označením odkazujeme). Dále uvádíme jejich výčet podle [2].

- M1. *Gravitace je tendence těles padat dolů, často není považována za sílu.*
- M2. *Působení gravitace se neuplatňuje ihned po puštění či vržení tělesa, ale až s jistým zpožděním nebo až poté, co přestanou působit jiné síly.*
- M3. *Po dopadu tělesa gravitace přestane působit.*
- M4. *Gravitace je velmi velká síla, když působí na tolik věcí najednou.*
- M5. *Gravitační působení je závislé na prostředí (ve vakuu je slabší nebo neexistuje, ve vodě je slabší, popř. působí směrem vzhůru).*

Úlohy jsme zadali v listopadu 2015 žákům čtvrtých, pátých a šestých ročníků na základních školách v Praze, Teplicích a Rumburku. Výzkumu se zúčastnilo celkem 259 žáků ze (75 žáků 4. ročníků, 121 žáků 5. ročníků a 63 žáků 6. ročníků). Ačkoliv náš statistický soubor nebyl příliš rozsáhlý (zejména ve srovnání se zahraničními výzkumy), některé skutečnosti se opakovaně objevily ve výsledcích u všech zadaných úloh, a je proto užitečné a zajímavé se nad nimi zamyslet.

Pro porovnání a také pro ucelenější představu o odolnosti některých miskoncepí uvádíme i výsledky průzkumu, ve kterém jsme představy o gravitaci zjišťovali u studentů oboru Učitelství pro 1. stupeň ZŠ na Pedagogické fakultě v Ústí nad Labem. Studenti řešili stejné úlohy jako žáci (u úlohy Strom a jablka byl text v žákovské verzi zkrácen). Průzkum proběhnul v březnu 2015 a zúčastnilo se ho 23 studentů 3. ročníku (některé výsledky z tohoto průzkumu byly uvedeny v [16]). Cílem tohoto průzkumu bylo zjistit, v jaké míře chybné představy budoucí učitelé ještě mají, abychom mohli identifikovat možné problémy v jejich budoucím působení na žáky.

Co se týče způsobu zadání úloh, byly promítány dataprojektorem. Odpovědi psali žáci i studenti do připravených odpovědních lístků, ve kterých mohli zakroužkovat písmeno odpovídající vybrané odpovědi, nebo mohli doplnit vlastní odpověď (viz možnost „Já si myslím, že. . .“). Na základních školách mohli učitelé rozhodnout, zda žáci budou odpovídat anonymně, či zda se podepíší; studenti učitelství odpovídali anonymně. Před zadáním úloh byli žáci informováni, že se nejedná o žádný test nebo písemku a učitelé byli instruováni, aby žákům stručně vysvětlili, jakým způsobem mají na otázky odpovídat.

Výsledky

V dalším textu uvádíme jednotlivé úlohy (v pořadí, v jakém byly žákům zadávány) a podrobné komentáře, zahrnující rozbor základních chybných představ a jejich četností v jednotlivých ročnících.

Úloha Delfín (obr. 1)

Jak je to správně? **Delfin**

A Delfin vyskočil nad hladinu moře.

B Na delfina působí stejně velká gravitační síla nad hladinou moře i pod vodou.

C Pod vodou působí na delfina menší gravitační síla.

D Když je delfin pod vodou, působí na něj gravitační síla směrem nahoru.

E Když delfin vyskočí nad hladinu, gravitační síla na něj po dobu skoku nepůsobí.

F Nemáte pravdu. Já si myslím, že ...

Jana **Jirka** **Katka** **Vojta** **Martina**

Zdroj: <http://www.mojepauza.estranky.cz/>

Obr. 1 Zadání úlohy Delfín

Řešení : Nejpříjemnější je odpověď A¹⁾, tj. ve vodě i ve vzduchu působí na delfina stejně velká gravitační síla, která stále směřuje dolů.

Výsledky k úloze Delfín

V tabulce 1 jsou uvedeny četnosti odpovědí pro jednotlivá tvrzení a ročníky. V posledním řádku jsou uvedeny četnosti odpovědí studentů učitelství. Četnosti správné odpovědi (A) jsou uvedeny tučně, četnosti nejčastější miskoncepce (tvrzení B) jsou vyznačeny kurzívou.

¹⁾S ohledem na možné zkomplikování situace různými úvahami (např. o změně tíhového zrychlení s výškou), neoznačujeme odpověď jako správnou, ale jako (z vědeckého hlediska) „nejpříjemnější“. V textu však budeme pro jednoduchost používat označení „správná odpověď“. Totéž platí pro úlohu Padající míček a úlohu Strom a jablko.

Tab. 1 Četnosti odpovědí žáků u úlohy Delfín

Ročník	Četnosti odpovědí žáků v % pro jednotlivá tvrzení				
	A	B	C	D	E
4.	30	27	15	23	5
5.	22	45	9	18	6
6.	38	53	8	1	0
studenti VŠ	62	38	0	0	0

Zajímavá byla i některá tvrzení, jež žáci uváděli jako vlastní odpověď v možnosti E („Já si myslím, že. . .“). Několik odpovědí proto pro ilustraci dále uvádíme (v závorce je ročník, který žák navštěvoval).

- O1. *Když delfín vyskočí nad hladinu moře, tak na něj gravitační síla působí méně než ve vodě.* (4. roč.)
- O2. *Na delfína působí do 10 m pod hladinou gravitační síla nahoru, pod 10 m směrem dolů.* (5. roč.)
- O3. *Když delfín skočí, gravitační síla ho přitáhne zpátky a jeho síla přestane působit.* (5. roč.)
- O4. *Gravitaci přerušíme skokem, síla v skoku vyprchá a gravitace nás přitáhne ke středu Země.* (5. roč.)
- O5. *Když delfín vyskočí nad hladinu, tak na něj gravitační síla působí, a když je pod vodou, tak na něj gravitační síla nepůsobí.* (6. roč.)

Diskuse k úloze Delfín

Jak je z výše uvedených odpovědí vidět, děti si často myslí, že gravitační působení je závislé na prostředí (viz miskoncepce M5), konkrétně že se gravitační síla ve vodě zmenšuje, zvětšuje (odpověď O1), nebo zaniká (odpověď O5²⁾), případně mění svůj směr (odpověď O2). Žáci se také často

²⁾Zahraníční výzkum [3, s. 8] ukázal, že zhruba třetina mladších žáků (konkrétně se jednalo o 4. ročník) si myslí, že gravitační síla pod vodou nepůsobí. V 5. ročníku tuto představu ale zastává již pouze 12 % a v 6. ročníku 5 % dětí. Co se týče číslování ročníků, je zde třeba upozornit na to, že na Novém Zélandu žáci vstupují do 1. ročníku již v pěti letech, proto náš čtvrtý ročník odpovídá spíše jejich pátému ročníku, náš pátý ročník jejich šestému atd. Ročníky uváděné v novozélandském výzkumu jsou proto v textu upraveny tak, aby odpovídaly našemu číslování.

mylně domnívají, že na delfína během skoku působí nějaká „síla skoku“ nebo „síla delfína“, která se postupně zmenšuje nebo „vyprchá“ (odpověď O3 a O4). Děti se dále mylně domnívají, že působení gravitační síly se neuplatňuje ihned po výskoku, ale až s určitým zpožděním, nebo poté, co přestanou působit jiné síly (nejčastěji „síla skoku“). Mezi odpověďmi se objevila i častá chybná představa, že v nejvyšším bodě skoku přestane působit „síla skoku“, která byla příčinou pohybu delfína směrem nahoru, a začne působit gravitační síla, díky níž delfín padá dolů (odpověď O4).

Co se týče četností odpovědí, z tabulky 1 je zřejmé, že počet správných odpovědí (viz představa A „Na delfína působí stejně velká gravitační síla nad hladinou moře i pod vodou.“) se s věkem zvyšuje. Všimněme si dále podrobněji, jak se s věkem mění četnosti nesprávných odpovědí. Zatímco v nižších ročnících žáci volí zhruba rovnoměrně všechny nabízené možnosti, žáci 6. ročníku volí buď správnou odpověď, nebo se většina z nich přiklání k jedné miskoncepci (B), přičemž ostatní představy (D a C) více či méně opouštějí. Dobře je to vidět např. u představy D („Po dobu skoku gravitační síla na delfína nepůsobí.“). Ve 4. ročníku tuto představu upřednostňuje téměř čtvrtina dětí (23 %), zatímco žáci 6. ročníku již tuto představu v podstatě opustili (volilo ji pouze 1 % žáků). U odpovědi C („Gravitační síla působí směrem nahoru.“) je to patrné také, i když změna četností není tak výrazná jako u představy D.

Zajímavé je sledovat, jak se mění četnosti u nesprávné představy B („Pod vodou působí na delfína menší gravitační síla.“). Z tabulky 1 je vidět, že četnost volby odpovědi B se zvýšila mezi 4. a 6. ročníkem téměř na dvojnásobek, tato představa se tedy s rostoucím věkem stává pro děti přitažlivější. Zřejmě vycházejí ze své běžné zkušenosti, že tělesa jsou ve vodě „nadlehčována“, ale neuvědomují si, že síla působící na delfína pod vodou je výslednicí gravitační a vztlakové síly (s pojmem vztlaková síla se v 6. ročníku zpravidla děti ještě nesetkávají, nicméně to nevylučuje, že o její existenci již mohou vědět).

Co se týče studentů učitelství, volili, podobně jako žáci 6. ročníku, také mezi dvěma možnostmi, tj. vybírali si buď správnou odpověď (A), nebo chybnou odpověď (B). Poměrně vysoká četnost u odpovědi B, volila ji téměř třetina respondentů (32 %), naznačuje, že značná část studentů ještě dobře nerozlišuje mezi gravitační silou a výslednicí gravitační a vztlakové síly, případně že se skládáním sil vůbec nezabývají a jednoduše si myslí, že velikost gravitační síly je ve vodě menší než ve vzduchu (tj. že její velikost závisí na prostředí).

Úloha Padající míček (obr. 2)

Jak je to správně? **Padající míček**



A
Míček se zkutálí k okraji stolu a volně z něj padá.

Jana
Jestliže míček padá, působí na něj po celou dobu pohybu stále stejně velká gravitační síla.

C
Když míček padá ze stolu, gravitační síla na něj nepůsobí. Míček padá k zemi samovolně, není k tomu potřeba žádná síla.

Vojta
Gravitační síla na míček při pádu působí, není ale pořád stejně velká. Je tím větší, čím rychleji míček padá.

B
Jirka
Nemáte pravdu. Já si myslím, že...

D
Martina

Obr. 2 Zadání úlohy Padající míček

Řešení : Nejlepší je odpověď A.

Výsledky k úloze Padající míček

V tabulce 2 jsou opět uvedeny četnosti správných odpovědí pro jednotlivé ročníky a v posledním řádku pro studenty učitelství. Četnosti správné odpovědi (A) jsou uvedeny tučně, četnosti nejčastější miskoncepce (tvrzení C) jsou vyznačeny kurzívou.

Tab. 2 Četnosti odpovědí žáků u úlohy Padající míček

Ročník	Četnosti odpovědí žáků v % pro jednotlivá tvrzení			
	A	B	<i>C</i>	D
4.	16	43	<i>40</i>	23
5.	32	19	<i>45</i>	18
6.	46	5	<i>49</i>	1
studenti VŠ	78	0	<i>22</i>	0

V této úloze zejména žáci 4. a 5. ročníku uváděli své vlastní odpovědi (možnost D). Několik takových odpovědí pro ilustraci uvádíme.

- O6. *Když míček padá, působí na něj gravitace, ale na stole ne.* (4. roč.)
O7. *Když míček padá, působí na něj malá gravitační síla.* (5. roč.)
O8. *Když míček padá, tak gravitační síla ho přitahuje ke středu magnetického pole.* (5. roč.)

Diskuse k úloze Padající míček

Mezi odpověďmi dětí se objevila typická mylná představa, že pokud je těleso v klidu, gravitace na něj nepůsobí (O6). Odpověď O7 naznačuje také jednu velmi častou představu dětí, že gravitace je jakási tendence padat dolů a že tedy k padání tělesa není potřeba žádná síla (případně jen malá síla, jako je tomu v odpovědi O7). V odpovědi O8 se objevuje další typická mylná představa související s tím, jak si děti vysvětlují původ zemské gravitace. Jak již bylo uvedeno výše, gravitační působení žáci často spojují s magnetismem, tj. mají představu, že Země přitahuje věci podobně jako magnet [2]. Odpověď O8 naznačuje, že žák si zřejmě ztotožňuje gravitační a magnetické pole, neboť přisuzuje magnetickému poli jakýsi střed.

Četnosti v tabulce 2 ukazují, že počet správných odpovědí (viz představa A „Po celou dobu pohybu působí stejně velká gravitační síla.“) se opět s věkem zvyšuje, a to poměrně výrazně (v 6. ročníku se četnost správných odpovědí oproti 4. ročníku téměř ztrojnásobila). Co se týče nesprávných odpovědí, je opět patrné, že některé představy postupně oslabují a v 6. ročníku se již téměř nevyskytují. Dobře je to patrné u představy B („Gravitační síla na míček při jeho pádu nepůsobí. Míček padá k zemi samovolně, není k tomu potřeba žádná síla.“), kterou ve 4. ročníku volilo nejvíce dětí, zatímco v 6. ročníku se vyskytuje už jen u 5 % žáků. Podobný výzkum provedený u mladších žáků na Novém Zélandu [3, s. 9] na přelomu 70. a 80. let ukázal, že ve 4. a v 5. ročníku si toto myslelo pouze 1 % žáků, v 6. ročníku pak už nikdo³⁾. Výsledky našeho výzkumu naznačují, že našich žáků se tuto představu daří odbourávat později.

Podobně jako u předchozí úlohy je zajímavý vývoj četností u jedné z nesprávných představ, a to u představy C („Gravitační síla je tím větší, čím

³⁾ V novozélandském výzkumu žáci odpovídali na otázku, zda na člověka, který padá (vyskočil z letadla a nemá otevřený padák), působí gravitační síla. Svoji odpověď mohli vybrat ze čtyř nabídnutých možností (a. Ano, stejná jako na zemi, b. Ano, ale mnohem menší než na zemi, c. Ano, ale mnohem větší než na zemi, d. Ne, nepůsobí na něj žádná gravitace).

rychleji míček padá.“). Četnost volby této odpovědi od 4. do 6. ročníku mírně narůstá, přičemž v 6. ročníku se pro tuto možnost rozhodla téměř polovina dětí, takže četnost této mylné představy je zhruba srovnatelná s četností správné představy. Lze se domnívat, že starší žáci (z 6. ročníku) již více uvažují o změně rychlosti a její příčině, ale mylně ji vidí v rostoucí gravitační síle, což souvisí s tím, že žáci si často myslí, že ke zrychlenému pohybu je potřeba rostoucí síla (tato představa patří k těm nejrozšířenějším a zároveň k nejodolnějším [2]).

Co se týče studentů učitelství, pětina z nich (22 %) zvolila nesprávnou odpověď C. Lze tedy konstatovat, že nezanedbatelná část studentů ještě nemá vytvořenou správnou představu o velikosti gravitační síly v průběhu padání těles.

Úloha Strom a jablka (obr. 3)

Jak je to správně? *Strom a jablka*



A



Na obrázku některá jablka visí na stromě, jedno jablko padá a jedno leží na zemi.

B



Gravitační síla působí pouze na padající jablko. Když jablko visí na větvi nebo když leží na zemi, gravitační síla na něj nepůsobí.

C



Gravitační síla působí na všechna jablka na obrázku, ale největší je v případě, když jablko padá.

D



Na všechna jablka na obrázku působí stejná gravitační síla.

Jana

Jirka

Vojta

Katka

Nemáte pravdu. Já si myslím, že ...

Obr. 3 Zadání úlohy Strom a jablka

Řešení : Nejpříjemnější je odpověď C.

Výsledky k úloze Strom a jablka

V tabulce 3 jsou opět tučně uvedeny četnosti správných odpovědí (C) pro jednotlivé ročníky a studenty VŠ, kurzívou jsou vyznačeny četnosti nejčastější miskoncepce (tvrzení B).

Tab. 3 Četnosti odpovědí žáků u úlohy Strom a jablka

Ročník	Četnosti odpovědí žáků v % pro jednotlivá tvrzení			
	A	B	C	D
4.	27	33	39	1
5.	20	50	28	2
6.	0	49	51	0
studenti VŠ	0	30	61	9

Pro ilustraci uvádíme dvě vybrané odpovědi žáků, které formulovali v možnosti D.

O9. *Gravitační síla působí více na jablko padající a ležící.* (5. roč.)

O10. *..., ale můžeme to určitě vědět jen pro padající.* (že působí gravitační síla – pozn. aut.). (5. roč.)

Diskuse k úloze Strom a jablka

Žáci si často myslí, že na jablko, které visí na stromě nebo leží na zemi, gravitační síla nepůsobí, nebo na něj působí síla menší (odpověď O9). Zajímavá je i odpověď O10, ve které žák zjevně potřebuje k důkazu existence gravitační síly nějaké její účinky (např. to, že jablko padá).

Četnosti v tabulce 3 ukazují, že počet správných odpovědí (viz představa C „Na všechna jablka na obrázku působí stejná gravitační síla.“) mezi jednotlivými ročníky výrazněji kolísá, nicméně lze říci, že u starších dětí je procento správných odpovědí nejvyšší (51 %). V případě nesprávných představ je opět patrné, že některé představy postupně oslabují. V tomto případě je to patrné u představy A („Gravitační síla působí pouze na padající jablko.“). Zatímco ve 4. ročníku má tuto představu více jak čtvrtina dětí, v 6. ročníku se již neobjevuje u žádného dítěte. Podobné výsledky ukázal i výzkum představ malých dětí provedený na Novém Zélandu [3], o kterém jsme již zmínili u předchozí úlohy.

I u této úlohy se objevuje mylná představa, u níž četnost odpovědí se zvyšujícím věkem roste (viz představa B „Gravitační síla působí na

všechna jablka, ale největší je v případě, že jablko padá.“). Žáci si často myslí, že jestliže se těleso pohybuje, je k tomu potřeba větší gravitační síla, než je-li v klidu. Z výzkumu představ o gravitaci provedeném na Novém Zélandu [3, s. 9] vyplynulo, že 20 % dětí ve 4. ročníku si myslí, že při pádu z letadla působí na člověka větší gravitační síla, než když stojí na zemi. V 5. ročníku to bylo ale již jen 12 % a v 6. ročníku 8 %. Počet dětí zastávající tuto představu se s rostoucím věkem zmenšuje; náš výzkum však naznačuje, že u našich žáků je tomu spíše naopak.

Z tabulky 3 je také vidět, že 30 % studentů učitelství pro 1. stupeň stále ještě zastává nesprávnou představu B, což je v tomto případě poměrně závažné zjištění.

(Pokračování)

Literatura

- [1] Janoušková, S. a kol.: Přírodovědná gramotnost v premimárním a raném období primárního vzdělávání jako prostředek zvýšení zájmu o studium přírodovědných a technických oborů. *Scientia in educatione*, roč. 5 (2014), č. 1, s. 36–49.
- [2] Mandíková, D., Trna, J.: Žákovské prekoncepce ve výuce fyziky. Paido, Brno, 2011.
- [3] Stead, K., Osborne, R.: What is Gravity? Some Children's Ideas. *Science Teacher*, 1981, 30, s. 5–12.
- [4] Mandíková, D.: Intuitivní představy o pohybu a síle. (Kandidátská disertační práce). MFF UK, Praha, 1990.
- [5] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (verze platná od 1. 9. 2013). MŠMT, Praha, 2013.
- [6] Mladá, J., Podroužek, L., Randa, M., Šolc, M.: Přírodověda pro 5. ročník základní školy. SPN, Praha, 2004.
- [7] Čechurová, M., Havlíčková, J., Podroužek, L.: Přírodověda pro 5. ročník základní školy. SPN, Praha, 2011.
- [8] Frýzová, I., Dvořák, L., Jůzlová, P.: Příroda (učebnice pro 4. ročník základní školy). Fraus, Plzeň, 2010.
- [9] Kvasničková, D., Froněk, J., Šolc, M.: Přírodověda pro 5. ročník základní školy (Od vesmíru k člověku). Fortuna, Praha, 1997.
- [10] Holovská, H., Růkl, A.: Přírodověda pro 5. ročník (Země ve vesmíru), 1. díl. Alter, Praha, 1996.
- [11] Podroužek, L.: Úvod do didaktiky přírodovědy. Vyd. a nakl. Aleš Čeněk, Dobrá Voda, 2003.
- [12] Driver, R., Squires, A., Rushfords, P., Wood-Robinson, V.: Making Sense of Secondary Science. Routledge Falmer, New York, 2003.
- [13] Hejný M., Houfková, J., Jirotková, D., Mandíková D. a kol.: TIMSS 2007 – Matematické a přírodovědné úlohy pro první stupeň základního vzdělávání. UIV, Praha, 2011.

- [14] Kolářová, R., Bohuněk, J.: Fyzika pro 6. roč. základní školy. Prometheus, Praha, 2002.
- [15] Naylor, S., Keogh, B.: Concept Cartoons in Science Education. Milgate House Publishers, Sandbach, 2010.
- [16] Hejnová, E.: Realizace konstruktivistického přístupu ve výuce fyziky prostřednictvím úloh zadaných formou diskuze. Matematika-fyzika-informatika, roč. 25 (2016), č. 2, s. 102–115.
- [17] Rojko, M.: Omyly, které ovládly svět. Pražské centrum vzdělávání pedagogických pracovníků, Praha, 1993.
- [18] Mladá, J., Podroužek, L., Randa, M.: Příručka pro učitele k učebnicím a pracovním sešitům Přírodověda pro 4.–5. ročník základní školy. SPN, Praha, 1999.

Jednoduché pomůcky pro výuku vlnění

LEONTÝNA BRÍZOVÁ – MICHAELA KRÍŽOVÁ – JAN ŠLÉGR

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

Protože ceny didaktických pomůcek jsou jakousi virtuální realitou, kde cena téměř nekoreluje s výrobními náklady či kvalitou, zajímalo nás, jak levně vyrobit stroboskop pro školní použití. Vzhledem k tomu, že jsme se z bezpečnostních důvodů chtěli vyhnout použití vysokonapěťových výbojek, padla volba na svítivé diody. Ceny výkonových modulů s velkou svítivostí v poslední době značně klesly, což z nich činí dobrého kandidáta na zdroj stroboskopických záblesků. Naše obavy, že luminofor bude mít jistou světelnou „setrvačnost“ a nebude v impulzním režimu dostatečně rychle zhasínat, se nenaplnily.

K tomuto stroboskopu byl následně sestaven generátor mechanických kmitů pro použití ve výuce.

Konstrukce zdroje kmitů

Na obr. 1 je zdroj kmitů. Základem je generátor funkcí dostupný poměrně levně v [1]. Výhodou tohoto generátoru je možnost digitálního (a

tedy velmi přesného) nastavení frekvence, což je důležité zvláště pro pokusy s rezonancí (viz dále). Za tímto zdrojem elektrických kmitů následuje modul výkonového zesilovače [2]. Výstup zesilovače může být pomocí kolébkového přepínače přepnut na levé nebo pravé svorky. Toto uspořádání bylo zvoleno z toho důvodu, že k jedné svorkám byl připojen reproduktor s plastovou membránou, ve kterém byla newtonovská tekutina, a ke druhé svorkám byl připojen mechanický generátor Chladniho obrazců.



Obr. 1 Zdroj elektrických kmitů

Jednoduchý mechanický generátor Chladniho obrazců vznikne z reproduktoru odstraněním větší části kmitající membrány. Prostřední část je ponechána a je na ni připevněna závitová tyč, která prochází otvorem v dřevěné příčce (obr. 2).



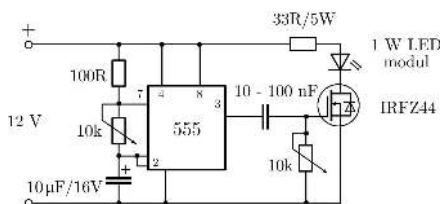
Obr. 2 Mechanický generátor a jeho použití

Ačkoliv toto uspořádání vypadá dosti „humpolácky“, je až překvapivě funkční. Mezi dvě matky lze na tyč připevnit čtverec z tenkého a z jedné strany začerněného plexiskla a po posypání vhodným materiálem (světlý

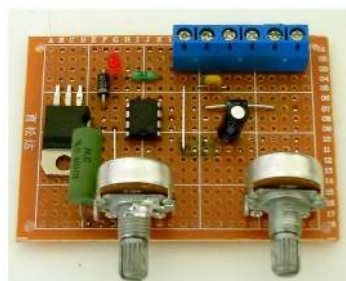
suchý písek, cukr krystal, v nouzi nejvyšší i sůl) lze při různých frekvencích kmitání pozorovat různé Chladniho obrazce. Podobně lze tímto zařízením rozkmitávat i nataženou strunu (nebo lépe bílou plastovou šňůru na prádlo) a ve světle stroboskopu pozorovat stojaté vlnění.

Konstrukce stroboskopu

Schéma stroboskopu je na obr. 3. Jako zdroj impulzů je použit oblíbený obvod NE555, jehož výstup je přiveden na bázi tranzistoru, který spíná LED. S použitými součástkami je možné měnit potenciometrem P1 frekvenci v rozsahu 7 Hz až 1,3 kHz. Z tohoto důvodu je P1 desetitáčkový. Trimrem P2 je možné měnit tvar výstupního impulsu (derivační RC člen z obdélníkového impulsu vytváří kratší špičku). Pro použití např. 1 W LED modulu je zapotřebí předřadný rezistor, na kterém vzniká nemalá výkonová ztráta. Proto je možné místo jednoho LED modulu použít vhodnou sérioparalelní kombinaci bílých LED tak, aby v sérii byl vhodný počet diod pro napájení napětím 12 V. Toto řešení je při použití obyčejných bílých LED o průměru 5 mm navíc levnější než jeden 1 W modul. Zapojení lze snadno realizovat na univerzální desce plošných spojů (obr. 4), případně lze na stránkách autorů [3] stáhnout navrženou desku plošných spojů.



Obr. 3 Schéma stroboskopu



Obr. 4 Realizace stroboskopu na univerzální desce

Experimenty s popsanými pomůckami

Před použitím stroboskopu k požadovanému experimentu je vhodné žákům vysvětlit princip a demonstrovat jej např. na oblíbeném pokusu s větrákem: V zatemněné místnosti je stroboskopem osvětlena vrtule větráku. Při vhodné volbě frekvence se větrák zastaví, při ještě vhodnější volbě frekvence vypadá, že má větší počet lopatek než ve skutečnosti.

Na závěr uvádíme velmi efektní pokus s rezonancí sklenice na víno podle [4]. Chceme-li pozorovat kmitání sklenice na víno a případně ji i rozbít, je nejdříve nezbytné najít její rezonanční frekvenci. To lze provést několika způsoby, ovšem jako nejlepší se jeví přejíždět po horním okraji sklenice navlhčeným prstem a vzniklý zvuk o rezonanční frekvenci snímat pomocí mikrofonu v reálném čase. V našem případě byl použit radioamatérský program SpectrumLab [5], který ukazuje spektrum, ve kterém lze frekvenci odečíst kurzorem. K výše popsanému generátoru byl připojen obyčejný reproduktor o průměru 5 cm, který byl uchycen v laboratorním stojanu. Sklenice samotná byla přilepena ke stolu lepicí páskou. Při prvním zapnutí generátoru je vhodné nastavit frekvenci o něco nižší, než byla naměřena, umístit reproduktor alespoň pět centimetrů od sklenice a do sklenice vložit kousek špejle. První dva body zabrání destrukci sklenice hned po zapnutí, špejle pak divokým tancem zhruba ukáže rezonanci. Po dosažení rezonance je vhodné zhasnout světla a zapnout stroboskop. Žáky obvykle velmi překvapí, jaké amplitudy dosahuje stojaté vlnění na horním okraji sklenice. Při přisunutí reproduktoru blíže se amplituda zvýší a může dojít k destrukci sklenice. K puknutí sklenice dochází při frekvenci přibližně o 1 až 2 Hz vyšší, než je rezonanční frekvence. Videá z rychlokamery i pořízená běžným fotoaparátem lze najít na webu autorů [3].

Didaktická poznámka: U žáků mladších osmnácti let lze místo sklenice na víno použít např. kádinku nebo jinou nezávadnou nádobu.

Závěr

Popsaná zařízení jsou velmi jednoduchá a jejich realizace není ve školním prostředí problematická. Cena odpovídá přibližně pětině ceny požadované dodavateli didaktických pomůcek (tento jev byl autory pozorován i v případě dalších pomůcek k výuce fyziky). Pokud na škole působí přírodovědný či technický kroužek, je zcela ideální tato zařízení konstruovat přímo s žáky.

Literatura

- [1] 0–50kHz DDS Function Signal Generator. [online]. [cit. 2016-07-09]. Dostupné z: <http://ebay.to/1TZaSwy>
- [2] Modul zesilovače Kemo M034N, 40 W. [online]. [cit. 2016-07-09]. Dostupné z: <http://www.conrad.cz/modul-zesilovace-kemo-m034n-40-w.k191010>

- [3] Experimenty ve výuce vlnění. [online]. [cit. 2016-07-09]. Dostupné z: <http://lide.uhk.cz/prf/ucitel/slegreja1/vlny/>
- [4] Rueckner, W.: Lecture demonstration of wineglass resonances. *American Journal of Physics*, roč. 61 (1993), č. 2, s. 184–186.
- [5] DL4YHF's Amateur Radio Software: Audio Spectrum Analyzer ("Spectrum Lab"). [online]. [cit. 2016-07-09]. Dostupné z: <http://www.qsl.net/dl4yhf/spectra1.html>

Rozvíjanie fyzikálneho poznania prostredníctvom podujatí neformálneho vzdelávania

JANKA RAGANOVÁ – TOMÁŠ PIVARČI

Fakulta prírodných vied, Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, Slovensko

Dlhodobým vážnym problémom prírodovedného vzdelávania v európskych krajinách, vrátane Slovenska, je neustále klesajúci záujem mladých ľudí o štúdium prírodných vied a ich neochota vykonávať učiteľskú profesiu, ktorá je najväčšia v prípade predmetu fyzika. Hoci sa fyzikálne poznanie a vzťah detí a mládeže k fyzike rozvíja najmä na hodinách fyziky v škole, v ostatných rokoch narastá význam mimoškolského, t.j. neformálneho, fyzikálneho vzdelávania, ktoré dopĺňa formálne – školské – vzdelávanie. Rozličné vzdelávacie inštitúcie sa snažia propagovať fyziku a ostatné prírodné vedy školskej mládeži aj širšej verejnosti čo najatraktívnejším spôsobom. Aktivity neformálneho prírodovedného vzdelávania sa tak stávajú dôležitou súčasťou voľnočasových aktivít, špeciálne pre rodiny s deťmi, ktoré hľadajú príležitosť zabaviť sa a zároveň sa aj učiť novým veciam.

Fakulta prírodných vied Univerzity Mateja Bela v Banskej Bystrici (FPV UMB) sa tiež radí k inštitúciám, ktoré si kladú za cieľ novými príťažlivými spôsobmi prezentovať prírodné vedy deťom, mládeži aj širšej verejnosti. Popri zapojení sa do národných a medzinárodných iniciatív

a projektov, ktoré majú za cieľ zmeniť spôsob vyučovania a zlepšiť vzťah mladých ľudí k prírodovedným predmetom, ako aj sústavnej metodologickej pomoci a tvorbe materiálov učiteľom z praxe, sa čoraz väčšia pozornosť venuje rozličným popularizačným aktivitám. Tradičné podujatia, ako je napr. Deň otvorených dverí a Týždeň vedy a techniky, dopĺňa už šesť rokov detský letný tábor Mladý prírodovedec [1] určený pre žiakov základných škôl a šesťročná je aj spolupráca UMB s organizátormi podujatia Noc výskumníkov, na ktorom sa pravidelne zúčastňuje aj Katedra fyziky FPV UMB.

V tomto príspevku zhrňujeme naše skúsenosti získané v rámci prezentovania vedeckých stánkov na podujatí Noc výskumníkov v uplynulých šiestich rokoch. Na základe výsledkov ankety, ktorú sme realizovali na ostatnom ročníku podujatia, sa zameriavame najmä na význam tejto aktivity pre podporu školského fyzikálneho vzdelávania a rozvíjania fyzikálneho poznania žiakov základných a stredných škôl. Pre učiteľov a ostatných záujemcov prinášame návod na zhotovenie pomôcky, ktorá návštevníkov fyzikálneho stánku na Noci výskumníkov 2016 najviac zaujala.

Popularizácia fyziky v rámci podujatia Noc výskumníkov

Noc výskumníkov je unikátny popularizačný projekt podporovaný novým rámcovým programom Európskej komisie na podporu výskumu, vývoja a inovácií – Horizon 2020, v časti – Marie Skłodowska-Curie actions, ktorý sa pravidelne koná v septembri paralelne v 33 štátoch Európy. Hlavnou myšlienkou projektu je priblížiť verejnosti výskumníkov a vedcov ako „obyčajných ľudí“ s neobyčajným povolaním, pričom návštevníci majú možnosť sa priamo „dotknúť sveta vedy a výskumu“ [2]. Podujatie umožňuje nielen priblížiť deťom aj ostatnej verejnosti vedecké poznanie, ale zároveň ich aj motivovať k učeniu, k technike, k ochrane životného prostredia. Učitelia tu nachádzajú inšpiráciu pre prácu so žiakmi v triede. V Banskej Bystrici sa jednotlivé aktivity podujatia – prednášky, vedecké stánky a vedecké kaviarne – konajú v nákupnom centre Europa Shopping Center.

Tradičnou aktivitou Katedry fyziky FPV UMB na Noci výskumníkov je demonštrácia atraktívnych fyzikálnych pokusov v rámci vedeckého stánku, čo umožňuje predstaviť verejnosti výsledky práce Katedry v oblasti rozvíjania prostriedkov a metód fyzikálneho experimentu a tvorby nových učebných pomôcok. Kolektív z Katedry fyziky pod vedením *Mgr. Martiny Hrušku, PhD.* v spolupráci s doktorandom *Mgr. Tomášom Pivarčim*

a študentmi učiteľstva aj v septembri 2016 pripravil zaujímavé fyzikálne pokusy na tému Svet očami fyziky, ktoré demonštrovali javy a deje súvisiace s mechanickým a elektromagnetickým vlnením, optikou a zvukom. Všetky pripravené demonštrácie mali interaktívny charakter, návštevníci si ich mohli sami vyskúšať a získať pritom nové, prípadne oprášiť zabudnuté fyzikálne znalosti.

Noc výskumníkov vnímame nielen z pohľadu predstavenia vedcov a ich práce, ale najmä ako príležitosť neformálneho vzdelávania širokej verejnosti z oblasti fyziky. Z takéhoto vnímania vychádza aj koncepcia celého vedeckého stánku Katedry fyziky. Popri podpore školského fyzikálneho vzdelávania má táto aktivita veľký význam aj pre budúcich učiteľov fyziky. Príprava demonštrácií a prezentovanie fyzikálneho obsahu študentmi učiteľstva na verejnosti, komunikácia s návštevníkmi rozličného veku a vzdelania je pre študentov vynikajúca skúsenosť a príležitosť rozvíjať si komunikačné a praktické zručnosti pri práci s fyzikálnym obsahom.

Význam podujatia Noc výskumníkov pre rozvíjanie fyzikálneho poznania

Šesťročná účasť Katedry fyziky FPV UMB na podujatí Noc výskumníkov, uvedomovanie si náročnosti prípravy a samotnej realizácie v deň D nás vedie k zamýšľaniu sa nad tým, prečo ľudia navštevujú toto podujatie a čo im náš fyzikálny stánok prináša. Na Noci výskumníkov 2016 sme preto realizovali prieskum, ktoré cieľom bolo zistiť, či návštevníci nášho stánku prišli na toto podujatie cielavedome, s nejakým zámerom, ktoré demonštrácie ich v našom stánku najviac oslovili a či sami vnímajú, že sa na takomto podujatí aj naučili nejaké nové poznatky.

Prieskum sme realizovali formou písomnej ankety s tromi otázkami:

- Prečo ste prišli na Noc výskumníkov?
- Čo sa vám najviac páčilo v našom stánku?
- Čo ste sa u nás naučili?

Respondentmi boli náhodne vybraní návštevníci, ktorých sme počas celého dňa oslovovali, keď odchádzali od nášho stánku. Keďže úlohou návštevníkov bolo odpovedať na anketové otázky písomne, neoslovovali sme deti predškolského veku. Takto sme v priebehu 12 hodín trvania podujatia získali reakcie od 85 náhodne vybraných návštevníkov.

Analýza výsledkov prieskumu

Prvá otázka ankety bola zacielená na identifikáciu dôvodov, pre ktoré ľudia navštevujú podujatie Noc výskumníkov, a zároveň slúžila na prvotné roztriedenie návštevníkov do jednotlivých skupín. Výsledky ukázali, že z celkového počtu 85 respondentov bolo 25 respondentov (29 %), ktorí na Noc výskumníkov prišli v rámci školskej akcie, 46 respondentov (54 %), ktorí prišli s cieľovým zámerom a 14 ľudí (17 %), ktorí „náhodou šli okolo“, resp. prišli z iného dôvodu. Návštevníci zo škôl pritom výrazne dominovali v dopoludňajších hodinách podujatia, popoludní prichádzali na podujatie najmä návštevníci, ktorí jasne deklarovali záujem o pokusy, prírodné vedy, poznávanie, prípadne o stretnutie so samotnými prezentujúcimi. Piaty návštevníci uviedli, že prišli za zábavou, traja „kvôli deťom“, čo sme tiež zahrnuli do skupiny návštevníkov s cieľovým zámerom.

Najviac pozitívnych ohlasov v druhej otázke ankety zisťujúcej, ktorý z pokusov v stánku Svet očami fyziky ich najviac zaujal, získali pokusy: Camera obscura (32), Arduino syntetizátor a optický modulátor (10), Chladniho obrazce (9), Kreslenie pred zrkadlom (6) a Solárny varič (5). Ostatné pokusy získali porovnateľný počet bodov od jedného po maximálne štyri body. Z výsledku pri druhej otázke je vidieť, že návštevníkov najviac oslovila Camera obscura, za ktorú zahlasovalo najviac ľudí v každej skupine návštevníkov.

Zámerom tretej otázky bolo zistiť, či si návštevníci z návštevy fyzikálneho stánku odnášajú nejaké nové poznatky. Na túto otázku odpovedalo len 68 respondentov. Iba piati z nich, t. j. 7 %, odpovedalo na otázku „Čo ste sa u nás naučili?“ negatívne: „Nič“, resp. „Všetko som už vedel“. Pozitívne odpovede, ktorých bolo 93 %, možno rozdeliť do troch kategórií:

- a) návštevník uviedol konkrétny poznatok, ktorému sa naučil – takých odpovedí bolo 34 (50 %),
- b) návštevník uviedol len všeobecné tvrdenie o tom, že sa niečo naučil – 20 odpovedí (30 %)
- c) návštevník uviedol konkrétny poznatok, ale tento bol chybný, resp. šlo o nepochopenie prezentovaných dejov – 9 odpovedí (13 %).

V prvej kategórii návštevníci najviac uvítali, že sa naučili, ako funguje oko, pochopili princíp fotoaparátu pomocou tmavej komory (lat. *camera obscura*) – 23 odpovedí. V ďalších, síce menej početných, odpovediach sme zaznamenali pekné príklady naučenia sa niečoho nového, napr. „magnetická sila dokáže rozhýbať dva nespojené predmety“, „zvuk sa šíri pomal-

šie ako svetlo“, „žiarovku nie je počuť, ale má frekvenciu“, „zvuk môže vytvárať obraz“. a pod.

Druhou najpočetnejšou kategóriou boli všeobecné pomenovania prezentovaných dejov, ktoré nepreukazovali konkrétne znaky novej vedomosti, ako napr. „zvuk a vlnenie“, „frekvencia pružiny“, „šírenie zvuku“, resp. vyjadrenia komentujúce všeobecný prínos stánku pre návštevníka, napr. „zopakoval som si“, „fyzika môže byť aj zábavná“, „v prírode sa nachádza veľa zaujímavostí“ a pod.

Pri študovaní jednotlivých odpovedí sme si uvedomili, že to, čo povieme, môže byť poslucháčom z rôznych dôvodov pochopené inak, a môžu vzniknúť aj mylné predstavy o danom jave. V poslednej kategórii napr. štyria návštevníci odpovedali, že sa môže variť na satelite, prípadne, že sa na satelite dá uvariť jedlo ľahšie, čo je mylná predstava súvisiaca s experimentom nazvanom Slniečny varič, ktorý znázorňoval princíp dutého zrkadla a smerovanie svetelných lúčov do ohniska, v ktorom sa sústreďuje dostatočná energia umožňujúca aj varenie. Zaznamenali sme aj ďalšie mylné predstavy, napr. „zvuk je svetlo“, „polarizačné okuliare vlnia svetlo“, alebo „hudobník môže byť každý, kto vie pracovať s technikou“.

Diskusia získaných výsledkov

Analýza výsledkov prieskumu realizovaného na podujatí Noc výskumníkov 30. septembra 2016 v Banskej Bystrici ukázala, že väčšina návštevníkov vedeckého stánku Svet očami fyziky prišla na toto podujatie zámerne, očakávajúc, že na podujatí uvidí zaujímavé pokusy, dozvie sa nové poznatky, načerpá inšpiráciu, stretne zaujímavých ľudí, zabaví sa. V dopoludňajších hodinách medzi návštevníkmi prevládajú školské výpravy, čo sa odrazilo aj v niektorých odpovediach na prvú otázku našej ankety: siedmi žiaci odpovedali, že prišli z donútenia, lebo museli. V popoludňajších hodinách sa žiadna podobná odpoveď nevyskytla. To nás vedie k zamysleniu, prečo niekto pociťuje, že musí (je donútený) ísť na takúto akciu. Ako bolo podujatie vysvetlené a spropagované zo strany učiteľa a pochopené zo strany žiakov? Je to len výlet, alebo sa ide cielene za poznaním? Zaujímavé by bolo zistenie, ako a či vôbec sa pracuje ďalej na hodinách s informáciami (zážitkami), ktoré žiaci mohli získať na Noci výskumníkov.

So spätnou väzbou na hodinách súvisí aj posledná otázka „Čo ste sa u nás naučili?“, pri ktorej sme si uvedomili, že pri vysvetľovaní môže nastať okrem naučenia aj mylné poňatie daného fyzikálneho javu, čo môže spôsobiť u poslucháča vytvorenie miskoncepce. Uvedomujeme si, že je možné

pri tak veľkom počte návštevníkov, slovnom a názornom opakovaní daného javu vysloviť aj nepresnú myšlienku. Preto považujeme za dôležité a odporúčame učiteľom, aby sa cielene na hodinách vrátili k tomu, čo žiaci zažili, dozvedeli sa na Noci výskumníkov a prípadnú nezrovnalosť ujasnili.

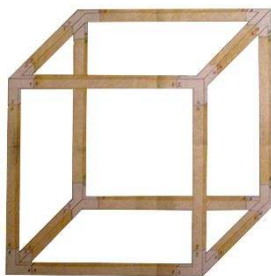
Poznávanie fyzikálnych vlastností ľudského oka

Výsledky prieskumu ukázali, že najpozitívnejšie hodnotili návštevníci tie exponáty, s ktorými sa bežne nestretávajú v škole a ktoré boli pre nich nové. Najväčší úspech u návštevníkov počas celého dňa získal exponát s názvom „Vstúpte do oka“, ktorý predstavoval veľký model ľudského oka, resp. tmavej komory (camera obscura). S týmto exponátom súviselo aj najviac poznatkov, ktoré si návštevníci zo stánku Svet očami fyziky odniesli.

Použitá camera obscura vznikla ako jeden z výstupov diplomovej práce *M. Mešterovej* [3], pre potreby Noci výskumníkov nám ju zapožičala Stredoslovenská galéria v Banskej Bystrici. Hoci pôvodným zámerom autorky bolo využitie tohto exponátu v zážitkovom učení sa výtvarnej výchovy, exponát možno vhodne využiť aj v školskom alebo mimoškolskom fyzikálnom vzdelávaní. Pomôcku, ktorá tak veľmi zaujala návštevníkov Noci výskumníkov, si pritom môže jednoducho vyrobiť každý učiteľ fyziky, aj v spolupráci so svojimi žiakmi. Konštrukčné možnosti ponúkajú viacero príležitostí na realizáciu či už veľkosti, tvaru, alebo jej účelu. Rozmery takejto kamery môžu byť od niekoľko centimetrov, až po veľkosť triedy. V našom prípade sme pomocou camery obscury ukazovali návštevníkom, ako vidí ľudské oko, a bolo pre nás dôležité, aby sa do kamery na výšku mohol dostať dospelý človek. Práve v zážitku „vchádzania do oka“, v možnosti objavovať tajomstvo vzniku obrazu priamo zvnútra obrovskej čiernej komory, spočíval veľký motivačný náboj a edukačný efekt tohto exponátu.

Použitá camera obscura má tvar kocky s rozmermi $2\text{ m} \times 2\text{ m} \times 2\text{ m}$ a je ľahko skladateľná a prenosná. Konštrukciu (obr. 1) tvorí osem drevených hranolov o veľkosti $2\text{ cm} \times 2\text{ cm} \times 2\text{ cm}$, ktoré sú pospájané pomocou kovových spojov. Spoje sú urobené, tak aby sa do nich mohli vsunúť drevené hranoly. Po poskladaní konštrukcie sa cez ňu natiahne svetlonepriepustná fólia (obr. 2) s rozmermi minimálne $6\text{ m} \times 6\text{ m}$ (odporúčame kvôli rezerve a lepšiemu uchytieniu $7\text{ m} \times 7\text{ m}$). Do fólie už bol dopredu urobený otvor, podľa ktorého sa fólia natahovala tak, aby bol umiestnený v strede bočnej steny. Tento otvor je možné urobiť aj pri prvom natiahnutí. Namiesto tmavej fólie sa môžu použiť aj dosky alebo tmavý záves, ale potom treba

zvoliť pevnejšie hranoly. Pri riešení s drevenými stenami treba pamätať na to, že jedna stena má slúžiť aj na vstupovanie do komory.



Obr. 1 Stavebný plán camery obscury



Obr. 2 Stavba camery obscury [3]

Záver

Pozitívne ohlasy, ktoré vyjadrili návštevníci fyzikálneho stánku na podujatí Noc výskumníkov 2016 v Banskej Bystrici, ako aj naše predchádzajúce skúsenosti z tohto podujatia, nás oprávňujú konštatovať, že aj takéto jednorazové akcie majú význam pre budovanie kladného vzťahu detí, mládeže i širšej verejnosti k fyzike a ostatným prírodným vedám.

Akcie realizované v podobnom duchu sú náročné pre organizátorov, výskumníkov a vedcov, pretože pri ich stánkoch sa v priebehu jedného dňa vystrieda niekoľko stovák návštevníkov a okrem toho treba zohľadniť aj niekoľko týždennú prípravu. Veríme však, že táto naša spoločná snaha v budúcnosti prinesie nových vedcov a výskumníkov, ktorí aj vďaka pozitívnej a motivujúcej akcii, akou Noc výskumníkov určite je, si vyberú štúdium prírodných vied.

Sme presvedčení, že aktivity neformálneho vzdelávania je potrebné realizovať pravidelne a cieľavedome dopĺňať týmto spôsobom obsah formálneho vzdelávania. Popularizáciu fyziky a ostatných prírodovedných predmetov so zameraním sa na všetky vekové kategórie, už od detí predškolského veku, považujeme za nevyhnutný spôsob, ako prispieť k zlepšeniu prírodovednej gramotnosti a fyzikálneho poznania.

Príspevok vznikol v rámci projektu KEGA 049UMB-4/2016 s názvom Rozvoj poznávacích operácií žiakov prostredníctvom experimentálnych aktivít vo výučbe školskej fyziky.

Literatúra

- [1] Raganová, J. et al.: Development of positive attitudes towards science at the children summer camp. In: HSCI2013. Proceedings of the 10th International Conference on Hands-on Science. Education for Science and through Science. Košice: Pavol Jozef Šafárik University, 2013, s. 193–197.
- [2] O projekte Noc výskumníkov [online]. [cit. 2017-01-13]. In: <http://www.nocvyskumnikov.sk/o-projekte.html>
- [3] Mešterová, M.: Priestor v médiu fotografie (udalosť camery obscure). Diplomová práca. Banská Bystrica: Univerzita Mateja Bela v Banskej Bystrici, Fakulta humanitných vied, 2008.

Lyžařské středisko (Úlohy z MO kategorie P, 35. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V jedné soutěžní úloze krajského kola 65. ročníku Matematické olympiády kategorie P (školní rok 2015/16) jsme se pokusili vyřešit problém lyžaře, který si v zimním středisku vybírá trasu s ohledem na rozmístění bufetů u sjezdovek. Jedná se zjevně o úlohu grafovou, v níž ale nestačí jenom mechanicky použít některý ze známých grafových algoritmů. Nějaké neefektivní řešení založené na zkoušení všech možností hrubou silou vymyslel při soutěži skoro každý, poměrně málo řešitelů však našlo jednoduché a efektivní řešení, které si zde v článku ukážeme. Z celkových 67 účastníků loňských krajských kol MO kategorie P řešilo tuto úlohu 61 studentů, z nich ji pouze 12 vyřešilo zcela správně a dalších 8 víceméně správně (získali aspoň 7 bodů z 10 možných).

Pro pořádek ještě poznamenejme, že všechny soutěžní úlohy 65. ročníku MO kategorie P připravili naši slovenští kolegové z Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislavě. Zadání úlohy uvádíme v českém překladu jenom s mírnými textovými úpravami.

* * * * *

Zimní lyžařské středisko se skládá z n lokalit očíslovaných od 0 do $n - 1$ a je zde také jedna sedačková lanovka. Spodní stanice lanovky je umístěna v lokalitě 0, horní stanice je v lokalitě 1. Všechny lokality mají navzájem různé nadmořské výšky, tyto výšky ale neznáme. V některých lokalitách jsou umístěny bufety, kde si lyžaři mohou zakoupit občerstvení.

V lyžařském středisku je celkem z sjezdovek. Každá sjezdovka vede směrem dolů z jedné lokality do druhé. Občas se mohou některé sjezdovky křížit, ale všechna taková křížení jsou řešena mimoúrovňově (pomocí tunelů). Přejet z jedné sjezdovky na druhou je tedy možné jedině v lokalitě, kde první sjezdovka končí a druhá začíná.

Soutěžní úloha

Úkol A (3 body)

Lyžař chce v lokalitě 0 nasednout na lanovku, nechat se vyvézt do lokality 1 a odtud sjet nějakou posloupností sjezdovek zpět do lokality 0. Cestou chce navštívit právě jeden bufet. (Může ovšem projet okolo jiných bufetů, v nichž se nezastaví.) Napište program, který určí, kolik bufetů má lyžař na výběr.

Úkol B (7 bodů)

Lyžař chce podniknout stejnou jízdu jako v úkolu A, tentokrát se ale chce cestou postupně zastavit v co nejvíce bufetech. Napište program, který určí, kolik nejvýše bufetů může lyžař při jedné své cestě navštívit.

Omezení a hodnocení

Plných 10 bodů získáte za správné řešení, které v obou úkolech efektivně vyřeší libovolný vstup s $n \leq 100\,000$, $z \leq 250\,000$.

Za libovolné polynomiální řešení dostanete až 2 body v úkolu A a až 5 bodů v úkolu B. Za libovolné správné řešení bez ohledu na jeho efektivitu můžete získat 1 bod v úkolu A a 3 body v úkolu B.

Formát vstupu a výstupu

Na prvním řádku vstupu jsou zadána čísla n , z , b – počet lokalit, sjezdovek a bufetů. Na druhém řádku vstupu jsou čísla $u_0, \dots, u_{b-1}$ – čísla lokalit, kde jsou bufety. Všechna tato čísla jsou z rozsahu hodnot od 2 do $n-1$ a jsou navzájem různá. Zbytek vstupu tvoří z řádků, na každém z nich je popis jedné sjezdovky ve tvaru „odkud kam“. Všechny dvojice „odkud kam“ jsou navzájem různé. Sjezdovky zadané na vstupu odpovídají výše uvedenému popisu lyžařského střediska.

Na výstup vypíšete jedno celé číslo – řešení příslušného úkolu A nebo B. V následujícím příkladu uvádíme na výstupu řešení obou úkolů.

Příklad

Vstup:

11 10 7
2 3 4 6 7 8 10
1 2
1 7
3 5
3 6
4 0
5 4
6 0
7 3
8 0
9 10

Výstup:

4
3

Vysvětlení: Když se chce lyžař cestou zastavit v jednom bufetu, má na výběr čtyři možnosti: může zvolit bufet v lokalitě 3, 4, 6 nebo 7.

Při jedné cestě může lyžař navštívit nejvýše tři bufety: buď trojici bufetů v lokalitách (7, 3, 4), nebo trojici bufetů (7, 3, 6).

Úkol A

Ze zadání úlohy je zřejmé, že soustava lokalit a sjezdovek v lyžařském středisku představuje orientovaný graf. Lokality odpovídají vrcholům grafu, sjezdovky pak hranám grafu s orientací danou tím, jak se jede po sjezdovce shora dolů (tak jsou sjezdovky také zadány na vstupu). V některých lokalitách jsou umístěny bufety, což znamená, že odpovídající vrcholy grafu jsou nějak speciálně označeny (budeme jim říkat *označené vrcholy*).

Úkol A snadno vyřešíme obyčejným prohledáváním tohoto grafu. Chceme určit počet označených vrcholů (bufetů), které leží na některé orientované cestě vedoucí z vrcholu 1 (horní stanice lanovky) do vrcholu 0 (dolní stanice lanovky). Potřebujeme tedy nalézt a spočítat všechny označené vrcholy, které mají zároveň dvě vlastnosti: jsou dosažitelné z vrcholu 1 a je z nich dosažitelný vrchol 0.

Všechny vrcholy dosažitelné z vrcholu 1 najdeme tak, že z vrcholu 1 spustíme prohledávání grafu – například do hloubky nebo do šířky, to pro výsledek výpočtu není podstatné. Stejným postupem získáme i všechny vrcholy, z nichž je dosažitelný vrchol 0, jenom tentokrát budeme zkoumaný graf prohledávat od vrcholu 0 proti směru orientace hran (jako kdybychom

zjišťovali, kam všude se dostaneme, když půjdeme od dolní stanice lanovky po sjezdovkách směrem nahoru). Potom už stačí spočítat ty označené vrcholy, do nichž jsme se dostali při obou uvedených prohledáváních grafu. Při vhodné reprezentaci grafu v paměti má toto řešení časovou i paměťovou složitost $O(n + z)$.

V následující programové ukázce máme graf reprezentován pomocí seznamů následníků jednotlivých vrcholů. Tyto seznamy následníků implementujeme ve tvaru lineárních spojových seznamů. Seznamy následníků ovšem neumožňují efektivně procházet hrany proti směru jejich orientace, proto graf ukládáme ještě duplicitně jako seznamy předchůdců jednotlivých vrcholů. K procházení grafu zde použijeme prohledávání do hloubky pomocí rekurze. Pro práci s čísly vrcholů v programu používáme standardní datový typ `integer`. V případě větších vstupních hodnot n by bylo třeba změnit ho na `longint`.

```

program Lyzar1;      {řešení úkolu A}

const MaxN = 10000;      {maximální počet lokalit}
type PUzel = ^TUzel;
    TUzel = record
        Cislo: integer;
        Dalsi: PUzel
    end;

var N, Z, B: integer;      {počet lokalit, sjezdovek, bufetů}
    Bufet: array [0..MaxN-1] of boolean;      {kde je bufet}
    {Kam a Odkud vede sjezdovka}
    Kam, Odkud: array [0..MaxN-1] of PUzel;
    {dosažitelnost lokality}
    Shora, Zdola: array [0..MaxN-1] of boolean;
    i, j, k: integer;
    P: PUzel;

procedure PruchodShora(V: integer);
    {prohledávání od vrcholu V ve směru sjezdovek; podle pole Kam}
var P: PUzel;
begin
    P:=Kam[V];
while P <> nil do
    begin
        if not Shora[P^.Cislo] then
            begin Shora[P^.Cislo]:=true; PruchodShora(P^.Cislo) end;
            P:=P^.Dalsi
        end
    end;
end; {procedure PruchodShora}

```

```

procedure PruchodZdola(V: integer);
{prohledávání od vrcholu V proti směru sjezdovek,
 tzn. podle pole Odkud}
var P: PUzel;
begin
P:=Odkud[V];
while P  $\diamond$  nil do
  begin
    if not Zdola[P^.Cislo] then
      begin Zdola[P^.Cislo]:=true; PruchodZdola(P^.Cislo) end;
      P:=P^.Dalsi
    end
  end; {procedure PruchodZdola}

begin
readln(N, Z, B);
for i:=0 to N-1 do                                     {inicializace}
  begin
    Bufet[i]:=false;                                     {nemáme bufety}
    Kam[i]:=nil; Odkud[i]:=nil;                         {nemáme sjezdovky}
    Shora[i]:=false; Zdola[i]:=false;                   {nemáme dostupnost}
  end;
for i:=1 to B do    {načtení vstupu, kde jsou bufety}
  begin read(j); Bufet[j]:=true end;
for i:=1 to Z do    {načtení vstupu, jak vedou sjezdovky}
  begin
    read(k, j);    {sjezdovka k->j}
    new(P); P^.Cislo:=j; P^.Dalsi:=Kam[k]; Kam[k]:=P; {následník}
    new(P); P^.Cislo:=k; P^.Dalsi:=Odkud[j]; Odkud[j]:=P;
                                                    {předchůdce}
  end;

PruchodShora(1);
PruchodZdola(0);

j:=0;
for i:=0 to N-1 do
  if Bufet[i] and Shora[i] and Zdola[i] then inc(j);
writeln(j)
end.

```

Úkol B

V úkolu B vede k optimálnímu řešení jednoduché použití dynamického programování. Pracujeme se stejným orientovaným grafem jako v úloze A a chceme v něm určit, jaký maximální počet označených vrcholů leží na

nějaké orientované cestě vedoucí z vrcholu 1 do vrcholu 0. Tento hledaný počet si označíme $T[1]$. Analogicky pro každý vrchol v bude hodnota $T[v]$ znamenat maximální počet označených vrcholů, které leží na nějaké cestě z vrcholu v do vrcholu 0. Jinými slovy: kolik nejvýše bufetů můžeme navštívit při jízdě po sjezdovkách z lokality v k dolní stanici lanovky.

Jak už naznačuje zavedené označení, údaje $T[v]$ si budeme ukládat jako hodnoty prvků jednorozměrného pole T . Prvky pole T budeme počítat ve vhodném pořadí „zdola nahoru“ (od dolní stanice lanovky nahoru do kopce). Víme, že $T[0] = 0$, protože podle zadání úlohy v lokalitě 0 není bufet. Jak jsme již uvedli, řešením úlohy bude hodnota $T[1]$. Zbývá ukázat, jak spočítáme hodnotu $T[v]$ pro obecný vrchol v , $v > 0$. Z vrcholu v vede několik hran do nějakých vrcholů $u_1, u_2, \dots, u_k$. Z hodnot $T[u_1], T[u_2], \dots, T[u_k]$ tedy vezmeme maximum (to odpovídá nejvýhodnější cestě z vrcholu v do cíle) a pokud je označen vrchol v , ještě toto maximum zvýšíme o 1.

Uvedený postup výpočtu můžeme implementovat dvěma základními způsoby, jako je to ostatně u dynamického programování obvyklé: buď rekurzivně shora (s ukládáním již spočítaných hodnot pro zvýšení efektivity), nebo iteračně zdola. Ukážeme si obě tyto možnosti.

První varianta znamená zapsat výše uvedený vztah pro výpočet hodnoty $T[v]$ jako rekurzivní funkci s parametrem v . Samotné použití rekurze by ale mohlo vést k velmi neefektivnímu algoritmu s exponenciální časovou složitostí, některé hodnoty $T[v]$ bychom mohli počítat opakovaně mnohokrát (když do téže lokality můžeme přijet po více různých sjezdovkách). Abychom dostali efektivní algoritmus, přidáme do programu výše zmíněné pole T , v němž si budeme ukládat všechny již spočítané hodnoty. Když pak budeme v dalším výpočtu potřebovat opakovaně hodnotu $T[v]$, nebudeme ji podruhé počítat znovu, ale použijeme uloženou hodnotu. Pro každý vrchol v budeme díky tomu počítat hodnotu $T[v]$ jenom jednou.

Uvedenou úpravou dostaneme program, který nejvýše jednou zpracuje každý vrchol grafu a rovněž nejvýše jednou zpracuje každou hranu – vždy při zpracování lokality postupně projdeme všechny sjezdovky, které z ní vedou. Při vhodné reprezentaci grafu bude časová i paměťová složitost $O(n + z)$. Toto řešení je zjevně optimální, když už jenom na přečtení vstupu potřebujeme řádově stejný počet kroků výpočtu.

V následujícím programu co nejvíce dodržujeme stejné značení, jako v řešení úkolu A. Použijeme stejnou reprezentaci grafu pomocí seznamů následníků implementovaných lineárními spojovými seznamy. Tentokrát

ale nebudeme potřebovat duplicitní uložení grafu pomocí seznamů předchůdců. Pro práci s čísly lokalit v programu opět používáme datový typ integer, který by bylo třeba změnit na longint v případě větších vstupních hodnot n . Rekurzivní funkce TT zajišťuje výpočet hodnot T popsanych výše v textu.

```

program Lyzar2;
{řešení úkolu B rekurzivně}

const MaxN = 10000;      {maximální počet lokalit}
type PUzel = ^TUzel;
      TUzel = record
          Cislo: integer;
          Dalsi: PUzel
      end;

var N, Z, B: integer;      {počet lokalit, sjezdovek, bufetů}
      Bufet: array [0..MaxN-1] of boolean; {kde je bufet}
      Kam: array [0..MaxN-1] of PUzel;     {kam vede sjezdovka}
      T: array [0..MaxN-1] of integer;
          {max. počet bufetů na cestě do cíle}
      i, j, k: integer;
      P: PUzel;

function TT(V: integer): integer;
{rekurzivní funkce na výpočet hodnot T}
var X: integer;
      P: PUzel;
begin
X:= -maxint;
P:=Kam[V];
while P <> nil do
    begin
        if T[P^.Cislo] = -1 then T[P^.Cislo]:=TT(P^.Cislo);
        if T[P^.Cislo] > X then X:=T[P^.Cislo];
        P:=P^.Dalsi
    end;
if (X <> -maxint) and (Bufet[V]) then inc(X);
T[V]:=X;
TT:=X
end; {function TT}

begin
readln(N, Z, B);
for i:=0 to N-1 do                                {inicializace}
    begin
        Bufet[i]:=false;                            {nemáme bufety}
        Kam[i]:=nil;                                {nemáme sjezdovky}
    end

```

```

T[i]:=-1;                {údaj zatím neznáme}
end;
T[0]:=0;
for i:=1 to B do         {načtení vstupu, kde jsou bufety}
  begin read(j); Bufet[j]:=true end;
for i:=1 to Z do         {načtení vstupu, jak vedou sjezdovky}
  begin
    read(k, j);          {sjezdovka k->j}
    new(P); P^.Cislo:=j; P^.Dalsi:=Kam[k]; Kam[k]:=P; {následník}
  end;
writeln(TT(1))
end.

```

Stejný postup řešení můžeme implementovat také bez použití rekurze. Začneme tím, že si všechny vrcholy grafu vhodně uspořádáme. Najdeme tzv. *topologické uspořádání* vrcholů našeho grafu, což je jedno z přípustných uspořádání lokalit podle jejich nadmořské výšky. V tomto pořadí (počínaje od nejnižše položených lokalit) potom postupně každý vrchol jednou zpracujeme pomocí výše uvedeného vzorce pro výpočet hodnoty $T[v]$ a odpověď si uložíme v poli T pro další použití. Díky počátečnímu uspořádání vrcholů máme zajištěno, že při každém výpočtu $T[v]$ budeme již znát všechny hodnoty, které vzorec pro výpočet $T[v]$ používá – jsou to totiž hodnoty odpovídající níže položeným lokalitám.

Tento iterační postup zdola provádí ve skutečnosti naprosto stejný výpočet, jako předchozí rekurzivní řešení s ukládáním spočítaných hodnot do pole T . Má proto i stejnou časovou složitost $O(n+z)$. Výslednou časovou složitost nám nepokazí ani potřebné topologické uspořádání grafu, neboť i to dokážeme spočítat v čase $O(n+z)$.

Zbývá uvést, jak najdeme topologické uspořádání zadaného orientovaného grafu. Existuje více možných postupů, nejjednodušší pro nás bude použít prohledávání grafu do hloubky, s nímž jsme se již setkali v obou předchozích programech. Topologické uspořádání grafu (v opačném pořadí) je pak dáno pořadím, v němž během prohledávání grafu uzavíráme (tzn. opouštíme) jednotlivé vrcholy grafu.

Poznamenejme ještě, že orientovaný graf může mít více různých topologických uspořádání. Naš algoritmus najde nějaké jedno z nich, což pro řešení úlohy naprosto vyhovuje. Různá topologická uspořádání grafu se mohou lišit vzájemným pořadím těch vrcholů, mezi nimiž nevede žádná orientovaná cesta, a ze zadání grafu tudíž neplyne, který z vrcholů má být zpracován dříve (tzn. která z uvažovaných lokalit má nižší nadmořskou výšku).

```

program Lyzar3;
{řešení úkolu B iteračně zdola}

const MaxN = 10000;           {maximální počet lokalit}
type PUzel = ^TUzel;
    TUzel = record
        Cislo: integer;
        Dalsi: PUzel
    end;

var N, Z, B: integer;         {počet lokalit, sjezdovek, bufetů}
    Bufet: array [0..MaxN-1] of boolean;      {kde je bufet}
    Kam: array [0..MaxN-1] of PUzel;          {kam vede sjezdovka}
    T: array [0..MaxN-1] of integer;
        {max. počet bufetů na cestě do cíle}
    Shora: array [0..MaxN-1] of boolean; {dosažitelnost lokality}
    Poradi: array [1..MaxN] of integer;
        {topologické uspořádání lokalit}

    vPoradi: integer;
    i, j, k: integer;
    X, V: integer;
    P: PUzel;

procedure PruchodShora(V: integer);
{prohledávání od vrcholu V ve směru sjezdovek,
 tzn. podle pole Kam}
var P: PUzel;
begin
P:=Kam[V];
while P <> nil do
    begin
        if not Shora[P^.Cislo] then
            begin Shora[P^.Cislo]:=true; PruchodShora(P^.Cislo) end;
            P:=P^.Dalsi
        end;
    inc (vPoradi);
    Poradi[vPoradi]:=V      {uzavíraný vrchol uložíme do pole Poradi}
end; {procedure PruchodShora}

begin
readln(N, Z, B);
for i:=0 to N-1 do           {inicializace}
    begin
        Bufet[i]:=false;      {nemáme bufety}
        Kam[i]:=nil;          {nemáme sjezdovky}
        T[i]:=-1;             {údaj zatím neznáme}
    end;
T[0]:=0;

```

```

for i:=1 to B do                                {načtení vstupu, kde jsou bufety}
  begin read(j); Bufet[j]:=true end;
for i:=1 to Z do                                {načtení vstupu, jak vedou sjezdovky}
  begin
    read(k, j);                                {sjezdovka k->j}
    new(P); P^.Cislo:=j; P^.Dalsi:=Kam[k]; Kam[k]:=P; {následník}
  end;

vPoradi:=0;
PruchodShora(1);    {topologické uspořádání lokalit}
for i:=1 to vPoradi do
  begin
    V:=Poradi[i];    {počítáme hodnotu T[V]}
    if V= 0 then continue;
    X:=-maxint;
    P:=Kam[V];
    while P <> nil do
      begin
        if T[P^.Cislo] > X then X:=T[P^.Cislo];
        P:=P^.Dalsi
      end;
    if (X <> -maxint) and (Bufet[V]) then inc(X);
    T[v]:=X;
  end;
writeln(T[1])
end.

```

Ústřední kolo 66. ročníku Matematické olympiády kategorie P

Ve dnech 29.–31. 3. 2017 se v Liberci konalo ústřední kolo 66. ročníku Matematické olympiády kategorie P (programování). Letošní ústřední kolo MO výborně připravili a organizačně zajistili pracovníci Krajské komise MO v Liberci a Technické univerzity Liberec.

K účasti v ústředním kole MO-P bylo vybráno třicet nejlepších řešitelů krajských kol, z nichž se jeden omluvil. Soutěžilo tedy 29 nejlepších mladých programátorů z celé republiky.

Vítězi se stali:

1. *Filip Bialas*, 8/8, Gymnázium Opatov, Praha 4, 56 bodů
2. *Václav Volhejn*, 8/8, Gymnázium Jana Keplera, Praha 6, 55 bodů
3. *Jan Priessnitz*, 8/8, Gymnázium tř. Kpt. Jaroše, Brno, 41 bodů
4. *Martin Kurečka*, 7/8, Gymnázium tř. Kpt. Jaroše, Brno, 37 bodů
5. *Pavel Turek*, 8/8, Gymnázium Olomouc-Hejčín, 37 bodů
6. *Richard Hladík*, 8/8, Gymnázium a OA Mariánské Lázně, 36 bodů

Úplnou výsledkovou listinu, texty soutěžních úloh i jejich vzorová řešení a další informace o 66. ročníku MO-P najdete na adrese: <http://mo.mff.cuni.cz/>

Podrobná zpráva o Ústředním kole 66. ročníku MO-P bude ve 4. čísle MFI.

ZPRÁVY

Celostátní kolo FO 2017

Celostátní kolo kategorie A 58. ročníku Fyzikální olympiády ve školním roce 2016/2017 proběhlo v nejsevernějším, Šluknovském výběžku České republiky. Jeho hostitelem bylo *Gymnázium Rumburk* (<http://www.gymrumburk.cz>), nad soutěží převzal záštitu hejtmán Ústeckého kraje *Oldřich Bubeníček*. Na základě výsledků krajských kol soutěže, jež proběhla 18. 1. 2017, přijelo změřit své síly celkem 49 soutěžících (z toho 6 dívek).

Slavnostní zahájení proběhlo v sále Domu kultury Střelnice Rumburk v úterý 7. 2. večer za účasti představitelů kraje, města a sponzorujících organizací. Účastníky z celé republiky spolu se členy Ústřední komise FO a dalšími pozvanými hosty přivítala hlavní organizátorka *Mgr. Jana Vlasáková*. Následovala pěvecká vystoupení studentů a studentek pořádající školy a pozdravné projevy pozvaných hostů. Jménem ministryně školství pozdravil soutěžící i členy komise náměstek MŠMT *Mgr. Jaroslav Fidrmuc*, dále promluvil náměstek hejtmana *Mgr. Petr Šmíd*, první místostarosta města Rumburk *Jiří Pimpara* a ředitelka gymnázia *Mgr. Lenka Laubrová*.

Ve středu 8. 2. dopoledne čekaly soutěžící v učebnách secesní budovy gymnázia čtyři teoretické úlohy, s nimiž se museli vypořádat během pěti hodin. Autorem všech úloh byl stejně jako v předchozím roce *RNDr. Jan Thomas* (První české gymnázium Karlovy Vary). První úloha s názvem *Radon 222* se zabývala radioaktivním rozpadem, energiemi a rychlostmi vzniklých částic. Řešitelé za ni získali v průměru 7,0 bodu z deseti možných, a podle názoru poroty nejoriginálnější řešení vypracoval *Martin Štyks* (Gymnázium J. Keplera Praha). Druhá úloha s názvem *Volný pád kuličky* navazovala na stu-

dijní text [1] a řešení vyžadovalo i využití integrálního počtu. Vynesla soutěžícím v průměru nejvíce – 7,6 bodu; porota ocenila zejména postup *Šimona Karcha* (Gymnázium Havířov-Město). Třetí úloha *Pokusy Jeana Perrina* se zabývala sedimentací a odstředováním drobných částic rozptýlených ve vodě. Pro soutěžící byla zřejmě nejobtížnější, neboť dosáhli v průměru nejméně, 2,3 bodu, a nejvíce zaujalo řešení *Ondřeje Knoppa* (Gymnázium Ch. Dopplera Praha). Ve čtvrté úloze s názvem *Kde byla čočka* soutěžící měli za úkol nalézt polohu tenké čočky z polohy ohniska, předmětu a obrazu; získali v průměru 6,1 bodu a porota ocenila jako nejzdařilejší přístup *Filipa Bialase* (Gymnázium Opatov Praha). Závěrečnou redakci zadání i autorského řešení úloh provedl *RNDr. Jan Šlégr, Ph.D.* (Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové).

Ve čtvrtek 9. 2. dopoledne soutěžící ve dvou skupinách řešili praktickou úlohu, jejímž autorem byl *RNDr. Jan Šlégr, Ph.D.*, která se týkala kmitů fyzického kyvadla tvořeného hliníkovou trubicí s řadou otvorů k zavěšení a ocelové kuličky připevněné v pevně vzdálenosti od okraje trubky. Soutěžící získali v průměru 15,6 bodu a nejlepším experimentátorem porota vyhlásila *Jaromíra Mielece* (G Ostrava-Zábřeh, Volgogradská).

K celostátnímu kolu již tradičně patří i bohatý navazující program. Ve středu 8. 2. byla připravena přednáška a beseda *Václava Sojky* o nedaleké, turisticky atraktivní oblasti Českosaského Švýcarska. Večer si nejen soutěžící, ale také členové Ústřední komise v sále knihovny města Rumburk vyslechli přednášku *prof. RNDr. Jiřího Podolského, CSc., DSc.* (MFF UK Praha), na aktuální téma „Maxwell a Einstein – elektromagnetické a gravitační vlny“. Ve čtvrtek 4. 2. odpoledne, po skončení praktické úlohy, si účastníci prohlédli významnou historickou památku – areál rumburské Lorety. Večer čekala na studenty i členy ústřední komise další zají-

mává přednáška *prof. RNDr. Petra Kulhánka, CSc.* (ČVUT Praha), pod názvem „Plazma ve vesmíru a v laboratoři“.

Poslední den, v pátek 10. 2. dopoledne, proběhlo v aule Gymnázia Rumburk slavnostní vyhlášení vítězů, opět s bohatou účastí představitelů sponzorských organizací, zástupců města i kraje. Tři nejúspěšnější řešitelé dostali každý kromě jiných cen šek na 10 000 Kč od společnosti ČEZ. Uvedme základní statistické údaje: devět účastníků se stalo vítězi, třicet čtyři úspěšnými řešiteli a šest účastníků soutěže. Celkové průměrné hodnocení všech úloh bylo 38,6 bodu, tj. 64,3 % z možných 60. Na vítěze kromě zajímavých cen čekala i pozvánka na výběrové soustředění pořádané Katedrou fyziky Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové, z něhož vzejde pětice reprezentantů na 48. Mezinárodní fyzikální olympiádu, která proběhne od 16. do 24. července 2017 v Indonésii (viz <http://www.ipho2017.id>). Přejme našim zástupcům podobně úspěšnou účast jako v roce 2016 (viz [2]). Pomyslnou zlatou medaili vybojoval *Jindřich Jelínek* (Gymnázium Olomouc-Hejčín), stříbrnou *Filip Bialas* (Gymnázium Opatov Praha) a bronzovou *Ondřej Knopp* (Ch. Dopplera Praha). Všichni soutěžící obdrželi věcné dary od sponzorů, vítězové poukazy na odběr zboží u společnosti Alza v odstupňované hodnotě (5 500 Kč pro vítěze, 4 500 Kč za druhé místo, 3 500 Kč za třetí místo a 1 500 Kč pro další vítěze v pořadí).

Uspořádání celostátního kola je nemyslitelné bez podpory a pomoci řady organizací a společností v regionu. Uspořádání soutěže finančně věcnými i finančními dary podpořili: *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Ústecký kraj, město Rumburk, Matematicko-fyzikální fakulta UK v Praze, Univerzita Jana Evangelisty Purkyně Ústí nad Labem, Czech Software First, spol. s r. o., TOS Varnsdorf a. s., skupina ČEZ, Benteler Automotive Rumburk, Schäfer a Šykora s. r. o., MUDr. Pavla Beránková a Velveta a. s.*

Varnsdorf. Zejména je však třeba poděkovat obětavé organizátorce z rumburského gymnázia *Mgr. Janě Vlasákové*, která se rozhodující měrou zasloužila hladký průběh soutěže a příjemnou pracovní atmosféru.

Pro příští školní rok v 59. ročníku Fyzikální olympiády přebírá organizátorskou štafetu Liberecký kraj, kam účastníky pozval *Mgr. Jindřich Pulíček*. Zájemci a příznivci soutěže najdou všechny potřebné aktuální informace včetně zadání i řešení úloh na čtenářům MFI jistě dobře známých internetových stránkách ÚKFO <http://www.fyzikalniolympiada.cz>.

Literatura

- [1] *Vybíral, B. – Zdeborová L.:* Pohyb těles s vlivem odporových sil. Knihovnička FO č. 55. MAFY, Hradec Králové 2002. Dostupné z: <http://fo.cuni.cz/texty/odpory.pdf>
- [2] *Studnička, F. – Kříž, J.:* Pět úspěchů na 47. ročníku Mezinárodní fyzikální olympiády. MFI, **25**, 5 (2016), 396–397.

Výsledková listina celostátního kola

Vítězové

1. Jindřich Jelínek (G Olomouc-Hejčín, 58,5 b, 248,67 mb), 2. Filip Bialas (G Opatov, Praha 4, 58 b, 244,84 mb), 3. Ondřej Knopp (G Ch. Dopplera Praha, 57,5 b, 247,51 mb), 4. Šimon Karch (G Havířov-Město, 55,5 b, 232,78 mb), 5. Štěpán Stenclák (G Třinec, 53,5 b, 223,97 mb), 6. David Vokrouhlický (G J. Keplera Praha, 52 b, 207,42 mb), 7. Jan Priessnitz (G tř. Kpt. Jaroše Brno, 49 b, 197,07 mb), 8. Pavel Turek (G Olomouc-Hejčín, 48 b, 189,6 mb), 9. Matěj Mezera (G Havlíčkův Brod, 47,5 b, 182,51 mb).

Úspěšní řešitelé

10. Daniel Pajer (G J. Keplera Praha, 46,5 b, 182,91 mb), 11. Jaromír Mielec (G Ostrava-Zábřeh, Volgogradská, 46,5 b, 178,36 mb), 12. Tomáš Kalva (G Olomouc-Hejčín, 46 b, 184,95 mb), 13. Ka-

teřina Rosická (G J. Ortena Kutná Hora, 45,5 b, 170,59 mb), 14. Jáchym Bártík (G Havlíčkův Brod, 45 b, 175,85 mb), 15. Martin Horáček (G Šumperk, 44,5 b, 172,1 mb), 16. Václav Mikeska (G Valašské Meziříčí, 44 b, 171,46 mb), 17. Viktor Rosman (G Pelhřimov, 43,5 b, 161,63 mb), 18. Tomáš Konečný (G J. V. Jirsíka České Budějovice, 42 b, 153,29 mb), 19. Petr Zelina (G tř. Kpt. Jaroše Brno, 41 b, 147,34 mb), 20. Martin Štyks (G J. Keplera Praha, 40 b, 147,38 mb), 21. Vít Pískovský (G O. Havlové, Ostrava-Poruba, 39 b, 153,24 mb), 22. Adam Poloček (Polské G Český Těšín, 39 b, 138,18 mb), 23. Vít Beran (Masarykovo G Plzeň, 38 b, 142,48 mb), 24. Ondřej Motlíček (G Šumperk, 38 b, 134,31 mb), 25. Martin Kovanda (G Žďár nad Sázavou, 37,5 b, 137,91 mb), 26. Tomáš Březina (G, SPŠ, OA a JŠ Znojmo, 36,5 b, 131,93 mb), 27. Přemysl Šťastný (G Žamberk, 35,5 b, 124,9 mb), 28. Michal Ivičič (G a JŠ Břeclav, 35 b, 131,92 mb),

29. Antonín Baďura (G tř. Kpt. Jaroše Brno, 34,5 b, 128,43 mb), 30. Jiří Löfelfmann (G Praha 9, Litoměřická, 34,5 b, 123,65 mb), 31. Jiří Perner (G Teplice, 34 b, 139,18 mb), 32. Veronika Hladíková (G Plzeň, Mikulášské nám., 34 b, 133,04 mb), 33. František Zach (G A. Jiráka Litomyšl, 33,5 b, 118,69 mb), 34. Anežka Doležalová (G Pardubice, Dašická, 33 b, 137,24 mb), 35. Jakub Suchánek (G Opatov, Praha 4, 33 b, 135,8 mb), 36. Adéla Hanková (První české G Karlovy Vary, 33 b, 130,42 mb), 37. Martin Orság (G a SOŠ Vyškov, 32 b, 131,94 mb), 38. Taylor Lei (G Na Pražáče, Praha 3, 32 b, 125,76 mb), 39. Ronald Luc (G tř. Kpt. Jaroše Brno, 32 b, 118,42 mb), 40. Jan Hrůza (G Kadaň, 31,5 b, 122,26 mb), 41. Hana Lounová (G Olomouc-Hejčín, 29,5 b, 109,19 mb), 42. Tomáš Hons (G V. Hlavatého Louny, 29 b, 107,17 mb), 43. Jindřich Dušek (G J. Keplera Praha 29 b, 101,16 mb).

Lukáš Richterek

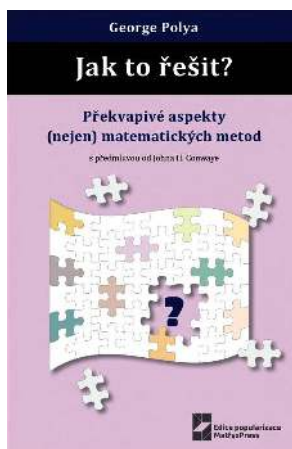


Řešení teoretických úloh

LITERATURA

George Polya: Jak to řešit? Překvapivé aspekty (nejen) matematických metod

Kniha významného matematika maďarského původu, která byla přeložena do téměř dvaceti jazyků, se stala jednou z nejprodávanějších knih o matematice. Je proto třeba uvítat, že se kniha dočkala i českého překladu a stala se tak přístupnou všem zájemcům o matematiku v ČR. Kniha vyšla v Edici popularizace nakladatelství MatfyzPress v Praze v roce 2016, přeložil ji *O. Kowalski* (ISBN 978-80-7378-325-9).



Když knihu otevřeme, tak asi mnohé čtenáře překvapí, že je zde minimum matematických výrazů, převažuje běžný text. Obsahem knihy je řešení matematických problémů. Kniha ukazuje různé pohledy a přístupy, jak při řešení matematických problémů postupovat. Autor se věnuje nejen logické struktuře daných problému, ale zabývá se i mentálními kroky, které řešení daných problémů doprovází. Na konkrétních příkladech je vysvětlena proble-

matika převádění omezujících podmínek na jednotlivé kroky řešení.

Publikace není určena jen učitelům matematiky, ale své si v ní najdou i například žáci středních škol. V předmluvě *Johna H. Conwaye* se dočteme, že kniha položila pro matematické vzdělávání a svět řešení úloh demarkační linii mezi dvěma epochami. Epochou řešení matematických úloh před Polyou a tou po něm. V předmluvě se také čtenáři seznámí s autorovým životem. Celá kniha v rozsahu 253 stran je členěna do čtyř částí s těmito názvy:

1. Ve třídě
2. Jak řešit matematickou úlohu
3. Stručný slovník heuristiky
4. Úlohy, nápovědy a řešení

Nejrozsáhlejší část knihy, téměř 200 stran, je věnována *Stručnému slovníku heuristiky*. Tato část obsahuje velké množství nápadů a doporučení, které lze využít při řešení matematických úloh. Nejedná se ale jen o strategie logického charakteru, ale také o psychologické postřehy, poznámky z historie matematiky. Nechybí ani úvahy o přístupu učitelů a jejich žáků. Toto vše je dokumentováno na celé řadě příkladů.

Při řešení úloh jsou doporučeny čtyři fáze postupu. Za prvé: musíme *porozumět úloze*, vědět, co se od nás žádá. Za druhé: musíme vidět, jak jsou různé prvky úlohy propojeny, jak je neznámá spojena s údaji. A abychom našli způsob řešení, musíme *mít plán*. Za třetí: *realizujeme náš plán*. Za čtvrté: podíváme se znovu na ukončené řešení a *provedeme jeho kontrolu a rozbor*. Celý tento postup je pak podrobně popsán při řešení úlohy, ve které máme najít velikost úhlopříčky kvádra, u nějž známe délku, šířku a výšku. V knize ale nejsou jen úlohy z elementární matematiky, setkáme se i s použitím derivace funkce.

Publikaci by měli číst především učitelé matematiky, mohou ji ale také použít žáci středních škol. Hlavním posláním knihy je ukázat, jak překonávat problémy při cestě k cíli, který se v danou chvíli zdá stěží dosažitelný.

Dag Hrubý