

Užití stochastického grafu ke sčítání aritmeticko-geometrické řady

PAVEL TLUSTÝ – IRENEUSZ KRECH

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice – Uniwersytet Pedagogiczny, Kraków

Uvažujme aritmetickou posloupnost s diferencí d , jejíž n -tý člen má tvar $a + (n - 1)d$, a geometrickou posloupnost s kvocientem $|q| < 1$ s n -tým členem bq^{n-1} . Nekonečnou *aritmeticko-geometrickou* řadou nazýváme řadu

$$ab + (a + d)bq + (a + 2d)bq^2 + \dots + (a + (n - 1)d)bq^{n-1} + \dots$$

Její n -tý člen je součinem n -tých členů aritmetické a geometrické posloupnosti.

Cílem našeho příspěvku je ukázat několik přístupů, jak lze odvodit součet s této nekonečné řady. Svoji pozornost zaměříme především na využití stochastického grafu. Vzhledem k tomu, že

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} (a + nd)bq^n,$$

můžeme (po roznásobení a roztržení na dvě sumy¹⁾) upravit s na tvar

$$s = ab \sum_{n=0}^{\infty} q^n + bd \sum_{n=0}^{\infty} nq^n.$$

¹⁾Pro věcnou správnost je třeba poznamenat, že takové manipulace s nekonečnými řadami jsou korektní, pokud jde o tzv. *absolutně konvergentní řady*, což je tento případ.

První suma nepředstavuje žádný problém, neboť se jedná geometrickou řadu s kvocientem $|q| < 1$ a k jejímu součtu užijeme známý vzorec

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

K nalezení součtu řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$$

můžeme použít některý z následujících postupů:

1. (limitní přechod)

Vyjdeme z definice součtu nekonečné řady jako limity posloupnosti částečných součtů. Proto nejprve odvodíme vzorec pro částečný součet

$$s_n = \sum_{k=0}^n kq^k.$$

Úpravou výrazu $s_n - qs_n$ získáme rovnost

$$s_n = \frac{q(1 - q^{n-1})}{(1 - q)^2} - \frac{q^n(n - 1)}{1 - q}.$$

Limitním přechodem pro $n \rightarrow \infty$ dostáváme hledaný vzorec

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1 - q)^2}.$$

Podrobně je tento postup popsán v [1].

2. (derivování vzorce)

Tento přístup vychází ze vzorce

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$$

a věty o derivování řady člen po členu (k tomu je opět nutné, aby derivovaná řada byla absolutně konvergentní). Derivujeme podle q levou a pravou stranu rovnosti

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots = \frac{1}{1 - q},$$

dostaneme

$$0 + 1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1} + \dots = \frac{1}{(1 - q)^2},$$

a tedy platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1 - q)^2}.$$

Po vynásobení rovnosti výrazem q dostaneme hledaný vzorec

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1 - q)^2}.$$

3. (přerovnání řady)

Jednotlivé sčítance řady $q + 2q^2 + 3q^3 + \dots$ přerovnáme a upravíme takto:

q	q					
$2q^2$	q^2	+	q^2			
$3q^3$	q^3	+	q^3	+	q^3	
$4q^4$	q^4	+	q^4	+	q^4	+
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
nq^n	q^n	+	q^n	+	q^n	+
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$	$\frac{q}{1-q}$		$\frac{q^2}{1-q}$		$\frac{q^3}{1-q}$	$\frac{q^4}{1-q}$
						$\cdots$

Nejprve sečteme jednotlivé sloupce, což jsou geometrické řady s kvocien-tem q . Tyto součty jsou v posledním řádku tabulky. Součet všech takových

součtů je roven $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$. Odtud dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{1-q} + \frac{q^3}{1-q} + \frac{q^4}{1-q} + \dots = \\ = \frac{1}{1-q}(q + q^2 + q^3 + q^4 + \dots) = \frac{1}{1-q} \frac{q}{1-q}. \end{aligned}$$

Tím jsme získali vzorec

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

4. (stochastický graf)

Uvažujme pokus mající dva možné výsledky – *úspěch* (nastane s pravděpodobností $1 - q$) a *neúspěch* (nastane s pravděpodobností q). Pokus opakujeme (nezávisle na výsledcích předchozích pokusů) tak dlouho, dokud nenastane první úspěch. Zajímá nás *Kolikrát (v průměru) musíme pokus opakovat, než nastane první úspěch?*

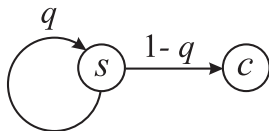
O tom, kolikrát budeme pokus opakovat, rozhoduje náhoda. Úspěch může nastat hned v prvním pokusu (a to s pravděpodobností $1 - q$), nebo ve druhém pokusu (s pravděpodobností $(1 - q) \cdot q$), nebo až ve třetím pokusu (s pravděpodobností $(1 - q) \cdot q^2$), ale teoreticky můžeme na úspěch čekat do nekonečna. Zkoumaná náhodná veličina T tedy nabývá hodnot $1, 2, 3, \dots$ s pravděpodobnostmi

$$P(T = n) = (1 - q) \cdot q^{n-1}.$$

„Průměrný“ počet pokusů, které musíme vykonat, než poprvé nastane úspěch, je střední hodnota ET náhodné veličiny. Střední hodnota představuje vážený průměr možných hodnot, kde váhy jsou pravděpodobnosti těchto hodnot. Tedy

$$ET = 1 \cdot (1 - q) + 2 \cdot (1 - q)q + 3 \cdot (1 - q)q^2 + \dots = (1 - q) \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1}. \quad (1)$$

Hodnotu ET určíme pomocí stochastického grafu na obr. 1. Na začátku stojíme v uzlu ⑤ a provedeme pokus. Pokud byl pokus úspěšný, přejdeme do uzlu ③ a naše čekání na úspěch končí. Byl-li pokus neúspěšný, zůstáváme v uzlu ⑤ a provádíme další pokus.



Obr. 1

Označme ET očekávaný počet pokusů, které musíme vykonat, stojíme-li v bodě ⑤, než přejdeme do uzlu ⑥. Pokud nastane úspěch hned v prvním pokusu, je délka čekání 1. Skončí-li pokus neúspěchem (což nastane s pravděpodobností q), zůstaneme v uzlu ⑤. Situace se vrací na začátek, jen čekání se o 1 prodlužuje. Proto platí vztah

$$ET = 1 + qET.$$

Odtud dostaneme, že

$$ET = \frac{1}{1-q}.$$

Dosazením za ET do vztahu (1) vznikne rovnost

$$\frac{1}{1-q} = (1-q) \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1},$$

ze které po úpravě dostaneme hledaný vzorec

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

Sčítání řad s využitím stochastického grafu je univerzální technika, kterou můžeme využít i pro jiné řady než jen pro řadu aritmeticko-geometrickou.

Literatura

- [1] *Calda, E.*: Součet nekonečné řady aritmeticko-geometrické, MFI, roč. 22 (2013), č. 4.
- [2] *Thustý, P., Krech, I.*: Stochastické grafy jako nástroj řešení matematických úloh, MFI, roč. 19 (2010), č. 5.
- [3] *Krech, I., Thustý, P.*: Stochastické grafy a jejich aplikace, Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2012.
- [4] *Płocki, A., Thustý, P.*: Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé, Prometheus, Praha, 2007.

O rozhodování

ŠÁRKA GERGELITSOVÁ – TOMÁŠ HOLAN

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Rozhodování je těžká věc. Někdo se rozhoduje rád a s chutí, jiný se rozhodování vyhýbá, co jen to jde. Pro ty druhé existují různé triky, třeba rada „Hoďte si korunou!“. Ta rada není tak hloupá, jak vypadá, protože pokračuje „A když nebudete s výsledkem spokojeni a budete mít chuť hodit si znovu, pak si vyberte tu druhou možnost rozhodnutí.“

Ale kdo by dnes, ve věku chytrých telefonů, házel korunou. Tvůrci aplikací hledají, co všechno by mohli uživatelům nabídnout, takže když se podíváte do příslušného obchodu, aplikací na rozhodování tam jsou mraky.

Napsat program, který bude „házet korunou“ a náhodně vypisovat *ANO* nebo *NE*, nevypadá moc přitažlivě (i když i takové aplikace najdete), lepší (důvěryhodnější, i když my víme svoje) by bylo, kdyby program nechal uživatele napsat otázku a teprve potom odpověděl *ANO* nebo *NE*. A ještě lepší by bylo, kdyby na stejnou otázku odpovídal stejně, to pro případ, že by si někdo chtěl ověřit, jestli ten program je solidní nebo jenom hádá.

Aby program na stejnou otázku odpovídal pokaždé stejně, by šlo zařídit. Nešikovně tak, že si bude pamatovat všechny otázky a odpovědi na ně, šikovně tak, že odpověď (stejně na ní nesejde) bude nějak odvozovat z otázky. Třeba tak, že sečte počet písmen nebo přímo číselné kódy příslušných znaků a odpověď *ANO* nebo *NE* poskytne podle toho, zda bude výsledek sudý nebo lichý.

A tady začíná matematika. Když se totiž bude odpověď odvozovat takhle jednoduše, bude výsledek záviset na každém znaku. Třeba když se místo otázky „Mám psát úkol z matiky?“ zeptáme „Mám psát úkol z matematiky?“, je možné, že ta čtyři písmenka navíc způsobí změnu v odpovědi. Dá se tomu zabránit? Částečně ano, ukažme jak.

Představme si, že otázku rozdělíme na 3 části (neřešme zde jak), potom spočteme odpověď pro každou část zvlášť a výsledek určíme „většinou“, tj. jako převládající ze tří dílčích odpovědí. Co když teď místo „matiky“ napíšeme „matematiky“?

Odpovědi na tři části otázky mohly dopadnout osmi různými způsoby (*ANO* a *NE* budeme značit *A* a *N*), které podle navržené „většinou“

strategie povedou k následujícím celkovým odpovědím našeho programu:

$$\begin{aligned}NNN &\rightarrow N \\NNA &\rightarrow N \\NAN &\rightarrow N \\NAA &\rightarrow A \\ANN &\rightarrow N \\ANA &\rightarrow A \\AAN &\rightarrow A \\AAA &\rightarrow A\end{aligned}$$

Co když teď změníme jednu část otázky? Promyslete sami, proč platí následující dva závěry.

Zaprvé, s pravděpodobností jedna polovina ta změna části otázky *nezmění* odpověď na této části.

Za druhé, pokud se odpověď na jedné části změní, tak

- v případech NNN a AAA se tím celková odpověď nezmění,
- v ostatních případech se změní jen tehdy, pokud změna postihla jednu ze dvou částí, jejichž odpověď „vyhrála“ v poměru 2 : 1.

Celkově tedy z $8 \times 3 = 24$ možných změn výsledku jedné části jenom $6 \times 2 = 12$, to je $\frac{1}{2}$ všech změn, povede ke změně celkového výsledku. Když vezmeme v úvahu to, že změna části otázky povede ke změně jí příslušné dílčí odpovědi jen v polovině případů, vychází nám, že při změně jedné části otázky máme pravděpodobnost $\frac{3}{4}$, že naše aplikace vydá stejnou odpověď jako původně.

A teď si představte, že náš nápad zaujal pozornost investora, který by o takovou aplikaci stál a byl by ochoten podporovat její vývoj, jenom požaduje, aby pravděpodobnost změny odpovědi při změně jedné části otázky nebyla $\frac{1}{4}$, ale méně než $\frac{1}{10}$. K tomu asi pomůže zvětšit počet částí, na které celou otázku rozdělíme. Ale kolik jich potřebujeme?

Aby bylo možné „většinově“ určovat celkovou odpověď, musíme rozdělit text otázky na lichý počet částí, řekněme $n = 2k + 1$, kde k je přirozené číslo.

Počítejme nejprve pravděpodobnosti změny výsledku (odpovědi programu), když nastane právě jedna změna ve výsledcích jednotlivých částí (změna jedné části *textu* pak tuto změnu způsobí s poloviční pravděpodobností).

- Počet všech možných odpovědí na $2k + 1$ částí otázky je roven 2^{2k+1} .
- V každé z nich může ona jediná změna nastat na $2k + 1$ místech.

- Máme tedy $2^{2k+1} \cdot (2k+1)$ možností pro změnu výsledku jedné části.
- Významné změny (ty, které způsobí změnu celkové odpovědi) nastanou jen v konfiguracích, kde se počet písmen A a písmen N liší o 1.
- Takových „rizikových“ konfigurací je $2 \cdot \binom{2k+1}{k+1}$ (pro $k+1$ písmen A a k písmen N , či pro $k+1$ písmen N a k písmen A).
- Významná změna je ta, která počty písmen A a N vymění, tj. přepíše jednu z dosud převažujících hodnot – tedy z těch hodnot, kterých bylo $k+1$. Významná změna tedy v každé „rizikové“ konfiguraci může nastat na $k+1$ pozicích.
- Počet všech takových významných změn je proto $(k+1) \cdot 2 \cdot \binom{2k+1}{k+1}$.

Pravděpodobnost, že změna odpovědi na jednu část textu změní celkovou odpověď, proto je

$$P(k) = \frac{(k+1) \cdot 2 \cdot \binom{2k+1}{k+1}}{(2k+1) \cdot 2^{2k+1}} = \frac{k+1}{2k+1} \cdot \frac{\binom{2k+1}{k+1}}{2^{2k}} = \frac{\frac{k+1}{2k+1} \binom{2k+1}{k+1}}{2^{2k}} = \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}.$$

Pravděpodobnost, že změna *textu* jedné části otázky změní celkovou odpověď (pravděpodobnost, že změna *textu* změnila odpověď této části, je $\frac{1}{2}$), proto je

$$Q(k) = \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k+1}}.$$

Upravíme-li uvedený výraz v součin zlomků, dostaneme vzorec

$$Q(k) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \prod_{i=1}^k \frac{2i-1}{2i}.$$

- Pro $k=1$, tj. 3 části: $Q(1) = \frac{\binom{2}{1}}{2^3} = \frac{1}{4}$.
- Pro $k=2$, tj. 5 částí: $Q(2) = \frac{\binom{4}{2}}{2^5} = \frac{3}{16}$.
- Pro $k=3$, tj. 7 částí: $Q(3) = \frac{\binom{6}{3}}{2^7} = \frac{5}{32}$.
- Pro $k=4$, tj. 9 částí: $Q(4) = \frac{\binom{8}{4}}{2^9} = \frac{35}{256} \doteq 0,1367 \dots$

K požadované hodnotě $\frac{1}{10}$ se sice blížíme, ale dosti pomalu, neboť zlomky $\frac{2k-1}{2k}$ z rekurentního vztahu

$$Q(k) = \frac{2k-1}{2k} Q(k-1)$$

se se zvětšujícím se k rychle blíží jedné. A navíc můžeme očekávat, že investor přijde po roce s požadavkem na upgrade a požadovanou pravděpodobnost sníží na $\frac{1}{40}$ ($\frac{1}{100}$, ...). Na kolik částí bude potřeba rozdělit text otázky, aby pravděpodobnost, že změna textu v jedné části změní výsledek, byla menší než požadovaná hodnota? Ukažme v dalším textu, že posloupnost kladných čísel $Q(k)$ má skutečně nulovou limitu pro $k \rightarrow \infty$, takže potřebné dělení textu otázky je alespoň teoreticky možné.

Uvažujme opět pravděpodobnost, že změna jedné z $2k+1$ dílčích odpovědí změní celkovou odpověď, tedy hodnotu

$$P(k) = \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}}.$$

Odhady hodnoty $\binom{2k}{k}$, tj. „prostředního binomického koeficientu“, jsou známy a můžeme je nalézt v literatuře. Odhady námi odvozené pravděpodobnosti nevyžadují žádné pokročilejší znalosti matematiky, proto je zde odvodíme. Vyžadují jen několik „trikových“ úprav spočívajících ve vhodném zápisu součinů. Pro $k=1$ je

$$P(1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

a pro $k > 1$ platí (pro lepší představu vyjádříme $P(k)$ pro „velké“ k):

$$\begin{aligned} P(k) &= \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} = \frac{(2k)!}{2^{2k} \cdot k! \cdot k!} = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k} = \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k}. \end{aligned}$$

Místo hodnoty $P(k)$ budeme odhadovat (shora i zdola) její druhou mocninu.

$$\begin{aligned} P^2(k) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1) \cdot (2k-1)}{2^2 \cdot 4^2 \cdot \dots \cdot (2k)^2} = \\ &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6^2} \cdot \dots \cdot \frac{(2k-1) \cdot (2k+1)}{(2k)^2} \cdot \frac{1}{2k+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Protože pro každé $m \neq 0$ je

$$\frac{(2m-1) \cdot (2m+1)}{(2m)^2} = \frac{(2m)^2 - 1}{(2m)^2} = 1 - \frac{1}{(2m)^2} < 1,$$

je výraz (1) menší než $\frac{1}{2k+1}$, tj.

$$P^2(k) < \frac{1}{2k+1},$$

a tedy

$$P(k) < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} < \frac{1}{\sqrt{2k}}.$$

Pro dolní odhad $P^2(k)$ odhadněme shora převrácenou hodnotu $P^2(k)$. Použijeme přitom analogické rozdělení na zlomky, které jsme již odhadovali:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P^2(k)} &= \frac{2}{1} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k-2) \cdot (2k)}{3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (2k-1)^2} \cdot \frac{2k}{1} = \\ &= \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5^2} \cdot \dots \cdot \frac{(2k-2) \cdot (2k)}{(2k-1)^2} \cdot \frac{2 \cdot 2k}{1}. \end{aligned}$$

Protože pro každé $m \neq \frac{1}{2}$ je

$$\frac{(2m-2) \cdot (2m)}{(2m-1)^2} = \frac{(2m-1)^2 - 1}{(2m-1)^2} = 1 - \frac{1}{(2m-1)^2} < 1,$$

dostáváme pro každé $k > 1$ nerovnost

$$\frac{1}{P^2(k)} < 4k,$$

a tedy kýžený dolní odhad ve tvaru

$$P(k) > \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

Zkoumanou pravděpodobnost jsme tak oboustranně odhadli nerovnostmi

$$\frac{1}{2\sqrt{k}} < P(k) < \frac{1}{\sqrt{2k}}.$$

Proto pravděpodobnost

$$Q(k) = \frac{1}{2}P(k),$$

že totiž změna jedné z $2k + 1$ částí textu otázky vyvolá změnu celkové odpovědi, je odhadnutelná výrazy

$$\frac{1}{4\sqrt{k}} < Q(k) < \frac{1}{2\sqrt{2k}}. \quad (2)$$

Využijme odvozené odhady pro řešení naší úlohy, ve které pro danou (malou) kladnou hodnotu L hledáme co nejmenší číslo k s vlastností $Q(k) < L$. Z levé nerovnosti v (2) plyne, že každé vyhovující k musí splňovat nerovnost

$$\frac{1}{4\sqrt{k}} < L \text{ neboli } k > \frac{1}{16L^2} \quad (\text{nutná podmínka}).$$

Naopak z pravé nerovnosti v (2) plyne, že požadovanou nerovnost $Q(k) < L$ má každé číslo k , pro které

$$\frac{1}{2\sqrt{2k}} < L \text{ neboli } k > \frac{1}{8L^2} \quad (\text{postačující podmínka}).$$

Má-li tudíž být pravděpodobnost, že změna jedné z $2k + 1$ částí textu změni celkovou odpověď, menší než $L = 0,1$, dostáváme pro k postačující podmínku $k > \frac{1}{8} \cdot 10^2$, tj. $k > 12$, a nutnou podmínku $k > \frac{1}{16} \cdot 10^2$, tj. $k > 6$. Skutečná nejmenší hodnota k , při které bude hledaná pravděpodobnost menší než $0,1$, leží mezi těmito hodnotami. Byli bychom se k ní dopočítali po osmi krocích: $k = 8$. Text bude proto nutné rozdělit alespoň na $2 \cdot 8 + 1 = 17$ částí.

Kdyby investor požadoval pravděpodobnost uvedeného jevu menší než $L = 0,025$, dostali bychom pro k postačující podmínku $k > \frac{1}{8} \cdot 40^2$, tj. $k > 200$, a nutnou podmínku $\frac{1}{16} \cdot 40^2$, tj. $k > 100$. Skutečná nejmenší hodnota k , pro které je hledaná pravděpodobnost menší než $0,025$, je $k = 128$, tudíž text bude potřeba dělit na 257 částí.

Konečně, kdybychom pro obzvlášť důležité otázky chtěli jistotu větší než 99 % (tedy pravděpodobnost změny výsledku menší než $0,01$), postačující a nutná podmínka budou po řadě $k > \frac{1}{8} \cdot 100^2$, tj. $k > 1250$, resp. $\frac{1}{16} \cdot 100^2$, tj. $k > 625$, se skutečnou nejmenší hodnotou k rovnou 796. Jenže zkuste rozdělit otázku „Má mě ráda?“ na 1 593 částí...

Newtonova a Maclaurinovy nerovnosti

PAVEL CALÁBEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Úvod do diferenciálního a integrálního počtu může být (s ohledem na RVP a ŠVP) jedním ze závěrečných témat výuky matematiky na středních školách, ať už v povinné nebo rozšířené podobě. Středoškoláci si často uvědomí sílu těchto prostředků zejména při studiu vlastností funkcí. Mnozí z nich si proto své vědomosti rozšiřují samostudiem. To však často vede k tomu, že si při samostudiu neuvědomí některé významné možnosti a důsledky využití diferenciálního počtu, které se objevují např. při zkoumání průběhu reálné funkce jedné reálné proměnné. Jedním z těchto důsledků je velmi zajímavá (nikoliv však známá) Newtonova nerovnost.

Během středoškolského studia se žáci seznamují s různými průměry souborů reálných čísel, odvozuji a používají nerovnosti mezi nimi. Základním z těchto průměrů je aritmetický průměr $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -tice nezáporných reálných čísel, dalším je geometrický průměr $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ této n -tice, často znají též harmonický průměr $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ či kvadratický průměr $K(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -tice kladných reálných čísel. Ti, kteří se hlouběji seznámí s uvedenými průměry, znají i zobecnění těchto průměrů – tzv. mocninný průměr $M_p(x_1, x_2, \dots, x_n)$ reálného stupně p a nerovnosti mezi nimi. Definujme nejprve tyto průměry.

$$A(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n},$$

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}},$$

$$K(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}},$$

$$M_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = G(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$M_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p}{n} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \neq 0.$$

Zvídaví žáci se mohli seznámit s nerovnostmi mezi těmito průměry např. v [2] nebo [3].

Věta

Pro libovolná kladná (nezáporná) reálná čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ platí

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq G(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \\ &\leq A(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq K(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ p < q &\Rightarrow M_p(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq M_q(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned}$$

přítom rovnosti nastávají jediné v případě $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Žáky také často zajímá, zda nějaký „průměr leží mezi“ aritmetickým a geometrickým průměrem. Mezi těmito průměry zřejmě leží libovolný mocninný průměr stupně $p \in (0; 1)$. Následující příspěvek ukazuje, že podobné „průměry“ můžeme konstruovat i jiným způsobem, například pomocí MacLaurinových nerovností.

Symetrické součty

Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou nyní libovolná reálná čísla, definujme $n + 1$ symetrických součtů S_i následujícím způsobem.

$$\begin{aligned} S_0(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 1, \\ S_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= A(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ S_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n}{\binom{n}{2}}, \\ S_3(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n}{\binom{n}{3}}, \\ &\vdots \\ S_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= x_1x_2 \dots x_n. \end{aligned}$$

Nebude-li hrozit nedorozumění, budeme značit $S_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jako S_i . Symetrický součet S_i je tak aritmetickým průměrem všech $\binom{n}{i}$ součinů i různých čísel z n -tice $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Newtonova nerovnost

Nyní dokážeme tzv. Newtonovy nerovnosti, viz např. [4].

Věta

Pro libovolné číslo $i = 1, 2, \dots, n-1$ platí

$$S_{i-1}S_{i+1} \leq S_i^2.$$

Nástin důkazu: Nejdříve prozkoumejme případ tří reálných proměnných x_1, x_2, x_3 . Platí

$$S_0 = 1, \quad S_1 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad S_2 = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{3}, \quad S_3 = x_1x_2x_3.$$

Newtonova nerovnost $S_0S_2 \leq S_1^2$ pro $i = 1$ znamená

$$1 \cdot \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{3} \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \right)^2.$$

Po několika elementárních úpravách zjistíme, že tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2,$$

kteřá je ovšem ekvivalentní s platnou nerovností

$$0 \leq (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2.$$

(Zde dokonce vidíme, proč rovnost nastane pouze v případě $x_1 = x_2 = x_3$.)

Newtonova nerovnost $S_1S_3 \leq S_2^2$ v případě tří proměnných značí

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \cdot x_1x_2x_3 \leq \left(\frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{3} \right)^2.$$

Pokud je některé z čísel x_i rovno nule, tato nerovnost zřejmě platí, protože na její levé straně je 0, na pravé straně je nezáporné číslo. V případě $x_1x_2x_3 \neq 0$ přejdeme vydělením obou stran této nerovnosti kladným číslem $x_1^2x_2^2x_3^2$ k ekvivalentní nerovnosti

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} \leq \left(\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}}{3} \right)^2,$$

která ovšem platí, protože je to již dokázaná nerovnost

$$S_0 \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3} \right) \cdot S_2 \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3} \right) \leq S_1^2 \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3} \right).$$

Tyto úvahy pro tři proměnné nám naznačují způsob, jak dokázat Newtonovu nerovnost v obecném případě n proměnných pro $i = 1$ a $i = n - 1$. Pro obecné n a $i = 1$ postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} S_1^2 - S_0 S_2 &= \left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2 - \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j}{\binom{n}{2}} = \\ &= \frac{(n-1) \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^2 - 2 \cdot \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j}{n^2(n-1)} = \frac{\sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2}{n^2(n-1)}. \end{aligned}$$

Přitom poslední výraz je jistě nezáporný, proto platí $S_1^2 - S_0 S_2 \geq 0$, tedy Newtonova nerovnost platí v případě $i = 1$.

V případě obecného n a $i = n - 1$ opět zjistíme, že pokud je některé z čísel x_i rovno nule, pak nerovnost

$$S_{n-2} S_n \leq S_{n-1}^2$$

platí, protože vlevo je 0 a vpravo nezáporné číslo. V případě $x_1 x_2 \dots x_n \neq 0$ vydělením obou stran této nerovnosti kladným číslem $x_1^2 x_2^2 \dots x_n^2$ ekvivalentně přejdeme k již dokázané nerovnosti

$$S_0 \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n} \right) \cdot S_2 \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n} \right) \leq S_1^2 \left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n} \right).$$

Dále použijeme základních poznatků diferenciálního počtu k tomu, abychom dokázali Newtonovu nerovnost i pro zbývající $i = 2, 3, \dots, n - 2$.

Uveďme dále jednu důležitou větu, kterou v důkazu využijeme.

Věta (Rolleova)

Necht je funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, má derivaci na intervalu (a, b) a platí $f(a) = f(b)$. Potom existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že $f'(\xi) = 0$.

Čísla x_i uspořádejme podle velikosti a pro jednoduchost dále předpokládejme, že platí

$$x_1 < x_2 < \dots < x_n.$$

Uvažujme polynom

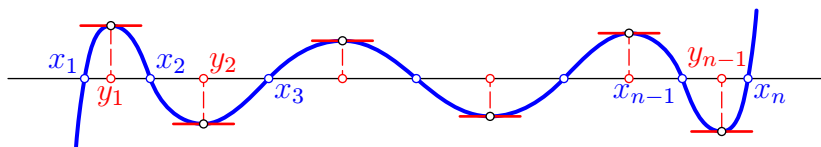
$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Každý polynom je funkce, která je spojitá a má derivaci pro všechna reálná čísla. Užitím Viètových vztahů mezi kořeny a koeficienty dostáváme

$$P(x) = x^n - nS_1x^{n-1} + \binom{n}{2}S_2x^{n-2} - \dots + (-1)^nS_n.$$

Podle Rolleovy věty existuje (alespoň) $n - 1$ různých čísel $y_i \in (x_i, x_{i+1})$, která jsou kořeny rovnice

$$P'(x) = 0. \quad (1)$$



Obr. 1

Podle základní věty algebry však víme, že existuje nejvýše $n - 1$ reálných kořenů rovnice (1), proto jsou to právě čísla $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Derivováním polynomu $P(x)$ dostaneme

$$P'(x) = nx^{n-1} - (n-1)nS_1x^{n-2} + (n-2)\binom{n}{2}S_2x^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1}S_{n-1}.$$

Označme symbolem T_i symetrické součty proměnných $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ pro $i = 1, \dots, n - 1$, tedy

$$T_0 = 1, T_1 = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}}{n-1}, T_2 = \frac{y_1y_2 + y_1y_3 + \dots + y_{n-2}y_{n-1}}{\binom{n-1}{2}}, \dots$$

Opětovným užitím Viètových vztahů obdržíme

$$\begin{aligned} P'(x) &= n(x - y_1) \dots (x - y_{n-1}) = \\ &= n \left[x^{n-1} - (n-1)T_1x^{n-2} + \binom{n-1}{2}T_2x^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1}T_{n-1} \right]. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u jednotlivých mocnin x ve dvojitým vyjádření $P'(x)$ tak dostaneme

$$\begin{aligned} n(n-1)T_1 &= (n-1)nS_1, \\ n\binom{n-1}{2}T_2 &= (n-2)\binom{n}{2}S_2, \\ n\binom{n-1}{3}T_3 &= (n-3)\binom{n}{3}S_3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Užitím známé kombinatorické identity (pro $0 \leq k \leq n-1$)

$$n\binom{n-1}{k} = (n-k)\binom{n}{k}$$

tak dostaneme (ke zřejmému $S_0 = 1 = T_0$)

$$S_1 = T_1, \quad S_2 = T_2, \quad \dots, \quad S_{n-1} = T_{n-1}. \quad (2)$$

Podobně bychom mohli postupovat i v případě, kdyby se některá z čísel x_i sobě rovnala, pak bychom uvažovali o násobných kořenech polynomů a dostali bychom stejné tvrzení. To znamená, že libovolnou n -tici reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$ můžeme nahradit $(n-1)$ -ticí $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ tak, že platí (2).

Protože už výše jsme pro $(n-1)$ -tici $y_1, \dots, y_{n-1}$ a $i = n-2$ dokázali, že $T_{n-3}T_{n-1} \leq T_{n-2}^2$, plyne odtud

$$S_{n-3}S_{n-1} \leq S_{n-2}^2.$$

Podobným nahrazováním můžeme dále dokazovat Newtonovu nerovnost pro všechna zbývající čísla $i > 1$.

Maclaurinovy nerovnosti

Nyní na rozdíl od Newtonovy nerovnosti předpokládejme, že x_i jsou pro $i = 1, 2, \dots, n$ *kladná* reálná čísla. Potom všechny symetrické součty S_i jsou kladná čísla.

Z Newtonovy nerovnosti

$$S_0S_2 \leq S_1^2$$

při využití $S_0 = 1$ dostaneme odmocněním (které je v případě kladných čísel ekvivalentní úpravou) nerovnost

$$\sqrt{S_2} \leq S_1.$$

Odtud a z Newtonovy nerovnosti

$$S_1 S_3 \leq S_2^2$$

dostaneme dohromady dvojici nerovností

$$\sqrt{S_2} S_3 \leq S_1 S_3 \leq S_2^2,$$

z níž porovnáním krajních výrazů po odmocnění získáme

$$\sqrt[3]{S_3} \leq \sqrt{S_2}.$$

Tuto nerovnost můžeme podobně vhodně uplatnit k další nerovnosti. Takto opakovaně dojdeme k výsledku zvanému *Maclaurinovy nerovnosti*.

Věta

Nechť $x_1, x_2, \dots, x_n$ je n -tice kladných reálných čísel. Potom platí

$$S_1 \geq \sqrt{S_2} \geq \sqrt[3]{S_3} \geq \dots \geq \sqrt[n]{S_n}.$$

Jednoduchým zobecněním můžeme dostat, že Maclaurinovy nerovnosti platí dokonce pro libovolnou n -tici nezáporných reálných čísel. Pokud si rozmyslíme důkaz Newtonových nerovností, tak v případě kladných reálných čísel nemáme problémy s dělením 0 a můžeme dokonce dokázat, že rovnost v Maclaurinových nerovnostech nastává pouze v případě, když $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Pokud uvážíme, že S_1 je aritmetický průměr čísel $x_1, \dots, x_n$ a $\sqrt[n]{S_n}$ je geometrický průměr těchto čísel, Maclaurinova nerovnost nám dává další „průměry“, které se nacházejí mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

Ještě jedna aplikace

V předchozích kapitolách jsme viděli, jaké zajímavé netriviální důsledky mají pozorování o průběhu funkce, se kterými se studenti seznamují na

střední škole. Nyní uveďme jeden příklad, při jehož řešení se s výhodou dají použít tyto poznatky o průběhu funkce.

Příklad (60. MO–A–III–3)

Předpokládejme, že reálná čísla x, y, z vyhovují soustavě

$$x + y + z = 12, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 54.$$

Dokažte, že pak platí následující tvrzení:

- a) Každé z čísel xy, yz, zx je alespoň 9, avšak nejvýše 25.
- b) Některé z čísel x, y, z je nejvýše 3 a jiné z nich je alespoň 5.

V [1] se můžete seznámit s několika řešeními tohoto příkladu. Nyní uveďme ještě další, které využívá poznatků o průběhu funkce.

Z rovnosti

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

dostaneme při využití předpokladů úlohy

$$xy + yz + zx = 45.$$

Podle Viètových vztahů jsou čísla x, y, z kořeny rovnice

$$t^3 - 12t^2 + 45t - S = 0,$$

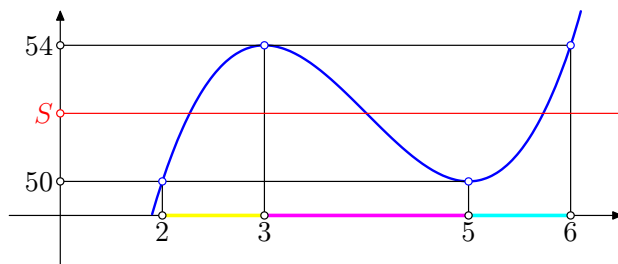
kde $S = xyz$ je reálné číslo, které budeme dále považovat za parametr.

Pro řešení získané rovnice

$$t^3 - 12t^2 + 45t = S.$$

vyšetříme užitím diferenciálního počtu průběh kubické funkce $f(t) = t^3 - 12t^2 + 45t$ (obr. 2). Mimo jiné zjistíme, že tato funkce nabývá svého lokálního maxima 54 v bodě 3 a lokálního minima 50 v bodě 5. Dále můžeme snadno ověřit, že $f(2) = 50$ a $f(6) = 54$.

Rovnice $f(t) = S$ tak má tři reálné kořeny, právě když S je z intervalu $(50; 54)$.



Obr. 2

Z obr. 2 pak jednoduše vidíme, že jeden z kořenů této rovnice leží v intervalu $\langle 2; 3 \rangle$, druhý v intervalu $\langle 3; 5 \rangle$ a třetí v intervalu $\langle 5; 6 \rangle$. Tím jsme dokázali část b).

Čísla xy , yz , zx jsou hodnoty funkce

$$S/t = t^2 - 12t + 45 = (t - 6)^2 + 9$$

po řadě v bodech z , x a y . Protože tyto kořeny rovnice $f(t) = S$ leží v intervalu $\langle 2; 6 \rangle$, nabývá funkce S/t na tomto intervalu zřejmě hodnot z intervalu $\langle 9; 25 \rangle$, což dokazuje část a).

Závěr

V předloženém textu jsme čtenáře seznámili s několika zajímavými důsledky užití diferenciálního počtu při zkoumání průběhu funkce, které může učitel na střední škole použít jako rozšiřující materiál pro talentované žáky při výuce tématu užití diferenciálního počtu při vyšetřování průběhu funkce.

Literatura

- [1] <http://www.matematickaolympiada.cz/media/440775/A60iii.pdf> [cit. 2017-06-07].
- [2] Herman J., Kučera R., Šimša J.: Metody řešení matematických úloh I, Masarykova univerzita, Brno, 1996.
- [3] Kufner A.: *Nerovnosti a odhady*, Škola mladých matematiků sv. 39, ÚV Matematické olympiády, Mladá fronta, Praha, 1976, [online]. <http://www.dml.cz/handle/10338.dmlcz/403877>
- [4] Přinosil, M.: Důkazy nerovností prostředky matematické analýzy, disertační práce, MU Brno, 2011, [online]. https://is.muni.cz/th/52068/prif_d/disertace.pdf

Geometrické pojmy na základní škole

MARIE CHODOROVÁ – LENKA JUKLOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Článek je určen učitelům geometrie na základních a středních školách. Jeho cílem je upozornit na mezery v pochopení základních geometrických pojmů. Stále častěji se na nás obraceli kolegové s dotazy, jak učíme studenty, budoucí středoškolské učitele matematiky, vysvětlovat pojmy úsečka, polopřímka apod., protože i oni se stále častěji setkávali v praxi s tím, že žáci a studenti mají o těchto pojmech chybnou představu. Sestavily jsme krátký dotazník, který byl primárně určen pro žáky 4. a 5. tříd základních škol. Zajímalo nás však, jak budou na stejné otázky odpovídat budoucí učitelé, proto jsme dotazníkové šetření rozšířily na tři skupiny. Dotazníky vyplňovali žáci čtvrtých a pátých tříd základních škol (ZŠ) v Olomouci a blízkém okolí, studenti Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci studující učitelství matematiky pro střední školy (M–X PřF UP) a studenti Pedagogické fakulty Univerzity Palackého v Olomouci studující učitelství pro 1. stupeň základní školy (1ZŠ PdF UP). Ze základních škol se nám vrátilo 350 vyplněných dotazníků, studenti M–X PřF UP odevzdali 51 vyplněných dotazníků, studenti 1ZŠ PdF UP odevzdali 242 vyplněných dotazníků.

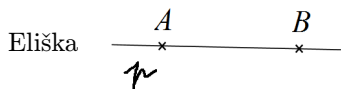
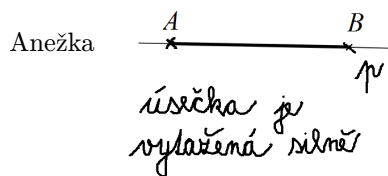
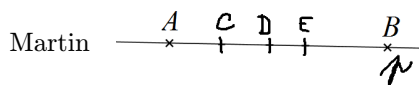
Základní zkoumané pojmy v dotazníku

Otázka č. 1:

Děti měly v prověrce z geometrie následující příklad: Na obrázku jsou dány dva různé body A , B . Vyznačte všechny body, které patří úsečce AB .

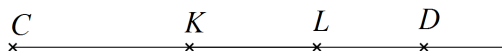


Odpovědi Martina, Anežky, Jirky a Elišky vidíte na obrázku. Zakroužkujte jména všech dětí, které odpověděly správně.



Otázka č. 2:

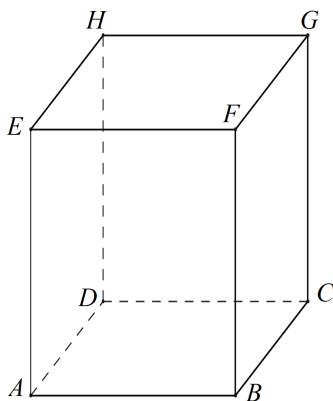
Na obrázku jsou znázorněny polopřímky CD a KL . Zakroužkujte všechna tvrzení, která jsou pravdivá.



- Všechny body polopřímky CD patří také polopřímce KL .
- Všechny body polopřímky KL patří také polopřímce CD .
- Na polopřímce CD existují body, které neleží na polopřímce KL .
- Polopřímky KL a CD leží na různých přímkách.
- Polopřímky CD a KL jsou opačné.

Otázka č. 3:

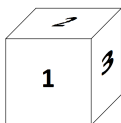
Na obrázku vidíte kvádr $ABCDEFGH$. Zakroužkujte všechna tvrzení, která jsou pravdivá.



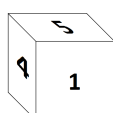
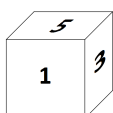
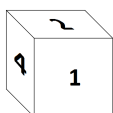
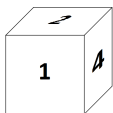
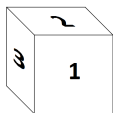
- a) Přímka AB je kolmá na přímkou DH .
- b) Přímky BF a DH jsou rovnoběžné.
- c) Přímky CD a BF jsou různoběžné.
- d) Přímky CD a BF nejsou různoběžné.
- e) Přímky BF a DH se protínají.

Otázka č. 4:

Lukáš si postavil doprostřed stolu krychli, která má na každé stěně právě jedno z čísel 1 až 6, součet čísel na protějších stěnách je vždy 7. Na krychli se díval z pravé strany stolu (jako na obrázku).

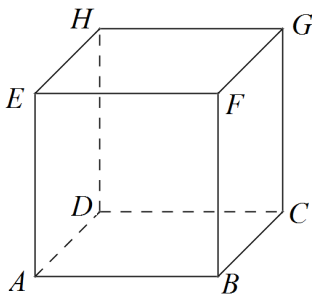


Potom přešel na levou stranu stolu. Zakroužkujte ten obrázek, na kterém je nakreslená krychle tak, jak ji viděl z levé strany.

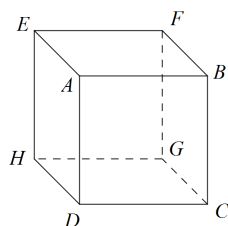
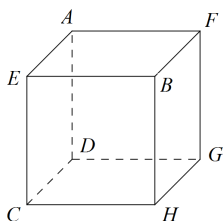
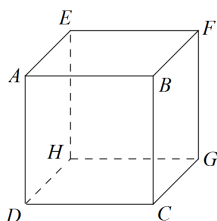


Otázka č. 5:

Na stole je položena krychle $ABCDEFGH$, její stěna $ABCD$ na stole leží (jako na obrázku).



Krychli otočíme tak, aby na stole ležela stěna $DCGH$. Zakroužkujte všechny obrázky, které mohou ukazovat takto otočenou krychli.



Otázka č. 6:

Baví tě geometrie? (zakroužkuj odpověď)

Ano

Ne

Nevím

Výsledky

Správné odpovědi na otázku č. 1 jsou *Anežka*, *Jirka*.

Poměrně malé procento dětí zodpovědělo tuto otázku správně (tj. děti měly označeny všechny správné odpovědi a pouze tyto odpovědi), rozložení četností mezi jednotlivými odpověďmi je bez výrazných výkyvů, jejich četnosti se pohybují od necelých 30 % (*Martin*) po necelých 50 % (*Anežka*). Téměř polovina dětí zvolila odpověď *Anežka* a odpověď *Jirka* byla druhá nejčastější. Položily jsme si proto otázku, kolik dětí zvolilo alespoň jednu ze správných odpovědí a přitom neoznačilo jako správnou odpověď *Martin*. Takovou volbu lze vysvětlit například tak, že dítě intuitivně chápe fakt, že úsečka má nekonečně mnoho bodů a nemůže tedy všechny body po jednom vyznačit. Otázkou zůstává, zda chápe rozdíl mezi obsahem a formou, tedy rozdíl mezi tím, jak je úsečka definovaná a tím, jak se ve škole učí úsečku narýsovat. Více než 85 % dětí, které nevybraly jako správnou odpověď *Martin*, však vybralo alespoň jednu ze správných odpovědí, ne však obě současně. Můžeme tedy usuzovat, že děti, které nevolily *Martina* (což bylo více než 70 % dětí), chápe pojem úsečka správně. Je však možné, že váhají, jestli si mohou úsečku dovolit narýsovat pouze „od bodu k bodu“ nebo musí být sestavená pouze jako úsečka na přímce. Skupina dětí, které označily odpověď *Martin* jako správnou, je rozdělena přibližně na poloviny

podle toho, zda měly nebo neměly dále zvolenu alespoň jednu správnou odpověď. U této skupiny lze předpokládat, že děti tápou v pochopení pojmu úsečka a odpovědi volily spíše náhodně.

U studentů jsme očekávaly, že položku *Martin* nezvolí žádný student. Předpoklad byl správný u studentů M–X PřF UP, 90 % z nich také mělo celou otázku č. 1 správně. Ve zbývajících desetině studentů se objevili jednotlivci, kteří nezvolili za správné obě odpovědi nebo ke správné volbě přidali i odpověď *Eliška*, 98 % studentů mělo zvoleno alespoň jednu ze správných odpovědí.

Tři čtvrtiny studentů 1ZŠ PdF UP měly celou první otázku správně a překvapivě asi 9 % studentů 1ZŠ PdF UP označilo jako správnou odpověď *Martin*. Přibližně stejné procento mělo odpověď *Eliška*. Také mezi studenty 1ZŠ PdF UP, kteří neoznačili jako správnou odpověď *Martin*, bylo 98 % těch, kteří označili alespoň jednu správnou odpověď. Studenti, kteří označili jako správnou odpověď *Martin* byli rozděleni v poměru 2 : 1 ve prospěch těch, co měli označenu alespoň jednu ze správných odpovědí, přičemž několik studentů do komentáře dopsalo, že v odpovědích *Martin*, *Anežka*, *Eliška* je narysovaná přímka $p = \overleftrightarrow{AB}$, proto jsou všechny odpovědi správné (případně vynechali pouze *Jirku*). U těchto studentů lze usuzovat, že jim není zcela jasná definice pojmu úsečka, za úsečku považují obrázek přímky s vyznačenými (krajními) body, ale nejsou schopni určit, které body náleží úsečce!

Vzhledem k tomu, že pojem úsečka je celkem zásadní, nepředpokládaly jsme u studentů u této otázky problém, naopak, očekávaly jsme relativní četnost u položky 1S (celá otázka č. 1 správně) blížící se 100 % u obou skupin studentů. Navzdory očekávání se ukázalo, že máme asi desetinu studentů „Učitelství M–X pro SŠ“ na PřF UP a čtvrtinu (sic!) studentů „Učitelství 1. stupně pro ZŠ“ na PdF UP, kteří nemají zcela jasno v pojmu úsečka! Dokonce se vyskytují i tací studenti učitelství (byť v malém počtu), kteří označí za úsečku i jednotlivé izolované body!

Správné odpovědi na otázku č. 2 jsou b), c).

Druhá otázka ověřovala pochopení pojmu polopřímka. První tři odpovědi byly voleny tak, aby se děti musely zamyslet nad vztahy mezi polopřímkami na těžce přímce a uvážit incidenci bodů a daných polopřímek. Zřejmě nepravdivé odpovědi d), e) jsme doplnili proto, aby nám ukázaly, kolik dětí vůbec nepochopilo pojem polopřímka či vztah mezi polopřímkou a přímkou, jejíž je tato částí.

V této otázce správné odpovědi a žádné jiné označila skoro dvacet tři procenta dětí, přičemž odpověď b) volily téměř dvě třetiny dětí. Relativní četnost odpovědi a), c) se pohybuje v okolí hranice 40 %, je tedy zřejmé, že část dětí označila protichůdná tvrzení. Necelých 20 % dětí označilo za správné odpovědi a), b) – všechny body polopřímky CD patří také polopřímce KL a současně také všechny body polopřímky KL patří polopřímce CD . Přibližně 7,5 % dětí si myslí, že všechny body polopřímky CD patří polopřímce KL a současně na polopřímce CD existují body, které polopřímce KL nepatří (tedy odpovědi a), c)). Současně první tři tvrzení označila asi dvě procenta dětí. Kombinace protikladných tvrzení může mít několik důvodů. Dětem není jasná incidence bodů a polopřímek nebo nechápou pojem polopřímka nebo se jedná o neporozumění psanému textu.

Ve srovnání s prvními třemi odpověďmi zvolilo odpověď d), resp. e) přibližně 10 % dětí, obě tyto odpovědi současně měla dokonce pouhá 2 % dětí, lze tedy konstatovat, že většina dětí chápe pojem „opačné polopřímky“ a „různé přímky“.

Studentů M–X PřF UP, kteří měli celou druhou otázku správně, bylo o málo více než 88 %. Nikdo z nich neoznačil chybné odpovědi d), e), ale ani správné odpovědi b), c) nedosáhly relativní četnosti 100 %. Mezi studenty, kteří označili pouze jednu ze správných odpovědi a žádnou jinou, převažovali ti, kteří vybrali za správnou odpověď pouze b). Vědí tedy, že všechny body polopřímky KL patří polopřímce CD , ale už si nemyslí, že na polopřímce CD existují body, které nepatří polopřímce KL . Objevily se i odpovědi a), ale pouze v kombinaci s odpovědí c), tedy více než 16 % studentů M–X PřF UP si myslí, že je pravdivé tvrzení i jeho negace! Znamená to tedy, že mají potíže s porozuměním matematickému textu? Je zarážející, že ze všech respondentů, kteří považují za tautologii $A \wedge \neg A$ byla právě skupina studentů M–X PřF UP nejpočetnější!

Druhou otázku mělo správně 75 % studentů 1ZŠ PdF UP, ani zde však nedosáhla relativní četnost žádné ze správných odpovědi 100 %. Nikdo ze studentů nezvolil jako správnou odpověď e), avšak přibližně 1 % studentů 1ZŠ PdF UP si myslí, že polopřímky KL a CD leží na různých přímkách (odpověď d)), přitom však všichni z této malé skupiny také označili, že všechny body polopřímky KL patří polopřímce CD (odpověď b)) a většina z nich ještě označila za správnou i odpověď c). Tito studenti buď mají zásadní mezery již v základech geometrie, nebo mají potíže s porozuměním psaného textu, v obou případech se však jeví, že odpovědi volili náhodně.

Rovněž mezi studenty 1ZŠ PdF UP z těch, kteří označili pouze jednu ze správných odpovědí a žádnou jinou, převažovali ti, kteří vybrali správnou odpověď pouze b). Odpověď a) zvolila více než desetina studentů 1ZŠ PdF UP, přičemž vždy okolo 4 % studentů zvolilo kombinaci odpovědí a), b), resp. a), c) a je zde také malá skupina (1,5 %) studentů, kteří zvolili současně a), b), c).

V nezanedbatelném počtu označovali respondenti všech tří skupin za pravdivá protikladná tvrzení. Tuto skutečnost lze (mimo výše uvedeného) také interpretovat tak, že pro část respondentů z těch, kteří označili některá protichůdná tvrzení, bylo rozhodující to, že na obrázku byl bod C krajním bodem, „čára“ pokračovala jen na jednu stranu od něj a tuto skutečnost si vyložili tak, že na obrázku je dána jedna polopřímka, která může být pojmenována libovolnými dvěma písmeny vyznačenými na „čáře“, čili polopřímky KL a CD jsou pro ně shodné (tak by se dala vyložit například volba odpovědi a), b) nebo pouze b)). Polopřímka, jako další stěžejní pojem geometrie, tak zůstává nepochopena větším počtem budoucích učitelů než pojem úsečka, překvapivě však (na rozdíl od úsečky) podstatně více dětí má jasnou představu o tom, co je polopřímka!

Správné odpovědi na otázku č. 3 jsou a), b), d).

Otázka č. 3 byla pro všechny skupiny respondentů zřejmě nejnáročnější, počet správných odpovědí výrazně klesl ve všech skupinách. Nejmenší potíže ve všech třech skupinách respondentů činilo rozhodnout o pravdivosti tvrzení b), e), protože tvrzení b) má nejvyšší relativní četnost ve všech skupinách a tvrzení e) nejmenší.

Téměř tři čtvrtiny žáků ZŠ ví, že přímky BF a DH jsou rovnoběžné (tvrzení b)). Z jedné třídy ZŠ (což odpovídá 4,5 % respondentů ze ZŠ) se nám vrátily dotazníky s upravenou otázkou č. 3. Tři čtvrtiny dětí z této třídy v odpovědi b) přeškrtnly slovo „rovnoběžné“, nahradily jej slovem „mimoběžné“ a odpověď zakroužkovaly jako správnou. Zbylé děti ze třídy sice nepřepsaly odpověď b), ale také ji neoznačily jako správnou. V této třídě také žádné z dětí nevybralo možnost, že přímky CD a BF jsou různoběžné, téměř celá třída tak měla zvolenu jediné odpověď d). V otázce č. 1 také většina této třídy volila jako správnou odpověď pouze *Anežka*. Lze téměř s jistotou konstatovat, že v této třídě se v základních geometrických pojmech neorientuje ani jejich vyučující!

Celou třetí otázku správně mělo 8 % dětí. Odpovědi b), e) současně (přímky BF a DH jsou rovnoběžné a také se protínají) označila asi 2 %

dětí, odpovědi c), d) (přímky CD a BF jsou i nejsou různoběžné) 4 % dětí. Lze opět předpokládat, že tyto děti odpovědi označily náhodně a vzájemnou polohu přímk v prostoru si neumí představit.

Otázku č. 3 zodpovědělo zcela správně 37 % studentů M–X PřF UP. Odpověď a) volila více než polovina z nich, odpověď b) byla první (a bohužel jedinou, a to v celém testu a ze všech skupin) správnou odpovědí, která dosáhla relativní četnosti 100 %. Chybnou odpověď c) označila téměř čtvrtina studentů M–X PřF UP! Správnou odpověď d) volily necelé tři čtvrtiny, ale žádný student tentokrát neoznačil tvrzení i negaci (tj. c), d) současně), ale necelá 2 % studentů označila odpověď e). Všichni studenti, kteří označili jako správnou odpověď e), označili také jako správnou odpověď i b) a odpověď e) měli doplněnu komentářem – „v nekonečnu“. Je zřejmé, že jednak opominuli fakt, že dotazník je určen pro žáky prvního stupně základní školy, kteří nepracují v rozšířeném eukleidovském prostoru a jednak tito studenti také tápou v pochopení některých základních geometrických pojmů. Zřejmě nerozlišují, že jedna z odpovědí je správná pouze v eukleidovském prostoru, druhá pouze v rozšířeném eukleidovském prostoru.

Pouze 15 % studentů 1ZŠ PdF UP mělo celou třetí otázku správně, odpověď a) označilo 53 % studentů, b) volili v 96 %. Chybnou odpověď c) označilo skoro 66 % studentů 1ZŠ PdF UP (podstatně více, než žáků ZŠ) a správnou odpověď d) mělo 29 % studentů 1ZŠ PdF UP (podstatně méně než žáků ZŠ)! Odpověď e) označilo přibližně půl procenta studentů 1ZŠ PdF UP, žádný ze studentů, který e) vybral jako správnou odpověď, neoznačil současně jako správnou odpověď b).

Ve všech skupinách respondenti volili současně některá protikladná tvrzení a poměrně vysoký počet respondentů označil mimoběžné přímky jako různoběžné (c)) a naopak, málo respondentů označilo mimoběžky AB a DH za kolmé (a)). V praxi se často setkáváme se studenty, budoucími učiteli matematiky, kteří se až na VŠ seznámí s tím, že i mimoběžné přímky mohou být kolmé, do té doby ve škole slyšeli pouze to, že kolmice jsou zvláštním případem různoběžek. Několik studentů 1ZŠ PdF UP v dotazníku dopsalo k odpovědi 3a) komentář, že kolmé k přímce AB jsou pouze přímky AE a BF , nikoli přímka DH . Šestina žáků ke správné odpovědi chybělo pouze označení a), pokud by ve třetí otázce nebyla tato volba, měla by otázku správně téměř čtvrtina dětí. Ze studentů M–X PřF UP odpověď a) ignorovala celá třetina, bez ní by téměř 70 % studentů mělo otázku 3 dobře. Studentů 1ZŠ PdF UP, kteří měli ve třetí otázce jen správné odpovědi bez označené odpovědi a), byla pouze devítina, bez ní by jich více

než čtvrtina měla třetí otázku dobře. U dětí a studentů M–X PřF UP se výrazně zvýšil počet těch, kteří by bez dotazu na kolmice měli otázku dobře, lze tedy usuzovat, že velká část respondentů z těchto dvou skupin vidí na kvádru vzájemnou polohu přímek správně, avšak odmítá připustit, že i mimoběžné přímky mohou být k sobě kolmé. U studentů 1ZŠ PdF UP nebyl nárůst tak velký a navíc, druhá jimi nejčastěji volená odpověď byla chybná odpověď c), což nás přivedlo k domněnce, že někteří studenti načrt kvádrů ve volném rovnoběžném promítání chápou pouze jako rovinný obrazec a podle něj posuzují vzájemnou polohu přímek (byť je v zadání jasně napsáno, že se jedná o přímky dané hranami kvádrů)! Vzhledem k tomu, že se ptáme na kolmost přímek AB , DH , které se v daném volném rovnoběžném promítání také zobrazí jako kolmice, je možné, že tito studenti právě proto volili odpověď a) jako správnou? Téměř třetina studentů 1ZŠ PdF UP zvolila za správné odpovědi a), c) a nezvolila d) (tj. považují přímky AB , DH za kolmice a přímky CD a BF za různoběžky)! Stejnou kombinaci odpovědí uvedlo také 16 % studentů M–X PřF UP! Žáci ZŠ jsou na tom podstatně lépe než budoucí učitelé. Pouze desetina z nich označila uvedenou kombinaci odpovědí. Lze říci, že většina z nich chápe fakt, že rovinný obrazec je náčrt kvádrů v prostoru. Úkolem bylo určit vzájemnou polohu přímek v prostoru. Je alarmující, že budoucí učitelé matematiky a učitelé, kteří budou formovat děti na 1. stupni ZŠ, sami nezvládají základy geometrie a s velkou pravděpodobností se geometrii (a možná i celou matematiku) učí pouze formálně, z paměti a bez porozumění. Jak pak vedou děti k tomu, aby je matematika (potažmo geometrie) bavila nebo dokonce, aby jí rozuměli a neviděli v ní strašáka?

Poslední dvě otázky byly pro většinu respondentů bezproblémové, ukázalo se, že většina z nich má dobrou prostorovou představivost, umí si spojit průmět tělesa s jeho polohou v prostoru.

Dobře zobrazená krychle v otázce č. 4 je prostřední krychle.

Správnou krychli označily tři čtvrtiny dětí a jak studenti M–X PřF UP, tak studenti 1ZŠ PdF UP volili tuto krychli přibližně v 96 %. Studenti M–X PřF UP byli jediní, kteří označili právě tuto krychli a žádnou jinou. Zbývajících 4 % studentů M–X PřF UP psala, že v odpovědích není nabízena žádná správně zobrazená krychle, z jednoho komentáře vyplynulo, že s největší pravděpodobností tito studenti neuvažovali pohled na krychli zprava a zleva, ale zepředu a zezadu.

U dětí i studentů 1ZŠ PdF UP klesl počet těch, kteří měli celou otázku

správně, u dětí o více než čtvrtinu (na 43 %), zatímco u studentů 1ZŠ PdF UP pouze minimálně – cca o půl procenta. Žáci, kteří volili i jiné krychle, podstatně více vybírali nadhledy zleva, takže si dovedli představit, že když krychli vidí zprava a pak přejdou doleva, musí vidět krychli v nadhledu zleva. Co si už neuměli tak dobře představit, byla poloha čísel na jednotlivých stěnách.

Oproti tomu, druhá nejčastější volba studentů 1ZŠ PdF UP byla druhá krychle, zobrazená opět v nadhledu zprava, která se od zadané krychle lišila ve viditelné části pouze číslem na pravé stěně. Usuzujeme, že studenti neporozuměli otázce, neboť tato poloha krychle naznačuje, že pozorovatel stojí stále na stejném místě, jen mu někdo na stole vymění jednu krychli za jinou.

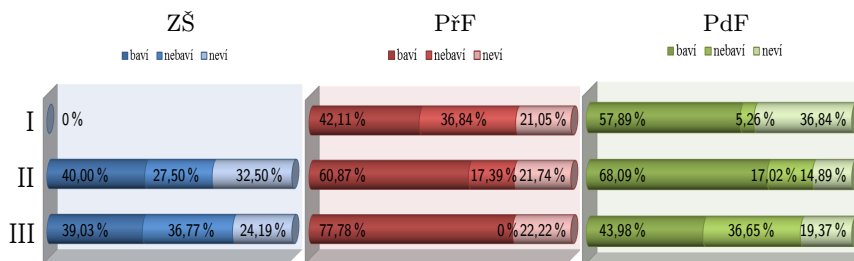
Správně zobrazené krychle v otázce č. 5 jsou obě krajní krychle.

Prostřední krychle v otázce 5 nemohla zobrazovat otočenou krychli ze zadání už na první pohled, vrcholy A , B , leží na úhlopříčce stěny, přesto tuto krychli vybralo necelých 17 % dětí. Ze studentů M–X PřF UP ani 1ZŠ PdF UP nikdo neoznačil tuto krychli za správnou odpověď. Žádná z relativních četností u správných krychlí se neshoduje s relativní četností správně zodpovězené otázky č. 5. Krychli vlevo za správnou vybraly tři čtvrtiny dětí, 98 % studentů M–X PřF UP a 96 % studentů 1ZŠ PdF UP. Krychli vpravo označilo za správnou 63 % dětí, 88 % studentů M–X PřF UP a 81 % studentů 1ZŠ PdF UP. Vždy více než desetina respondentů všech tří skupin opomíjela nadhledy zleva. Obě správně zobrazené krychle vidělo 43 % dětí, 86 % studentů M–X PřF UP (ti měli nejmenší pokles mezi četností pravé krychle a četností celé otázky 5) a 78 % studentů 1ZŠ PdF UP.

Šestá otázka zjišťovala zájem o geometrii, ten se sice v jednotlivých skupinách respondentů lišil v rozdělení, ale všechny tři skupiny respondentů měly nakonec relativní četnosti po řadě odpovídající odpovědím „baví“, „nebaví“, „nevím“ seřazeny do nerostoucí posloupnosti. Žáci, kteří uvedli, že je geometrie nebaví, často doplňovali komentáře typu „určitě ne“, „jak se můžete takhle ptát“, „geometrie je hrozná“ apod.

Celkový výsledek testu je zarážející. Celý test správně nemá nikdo ze žáků ZŠ. Ze studentů jej má správně necelá třetina studentů M–X PřF UP (hlavní podíl v této kategorii mají studenti navazujícího magisterského studia, všichni se 100% úspěšností) a pouze necelá desetina (7 %) studentů 1ZŠ PdF UP! Pouze správné odpovědi (nikoliv všechny) mělo 11,5 % žáků

ZŠ, 45 % studentů M–X PřF UP a 18 % studentů 1ZŠ PdF UP. Nejpočetnější skupinou jak mezi žáky ZŠ (téměř 90 %), tak mezi studenty 1ZŠ PdF UP (necelé tři čtvrtiny!) byli ti, kteří měli v testu chyby! Studenti M–X PřF UP byli nejvíce zastoupeni ve skupině, která měla jen správné odpovědi (nikoliv všechny), a potom ti, kteří měli celý test dobře (což koresponduje se skutečností, že do navazujícího magisterského studia postoupí M–X PřF UP z bakalářského pouze ti lepší). Pro zajímavost uvádíme v jednotlivých skupinách respondentů rozložení odpovědí na otázku č. 6 v kategoriích I – „celý test dobře“, II – „pouze správné odpovědi, ale ne všechny“, III – „chyby“



Test odkryl neznalosti a nepochopení základních geometrických pojmů nejen žáky základních škol. Ukazuje se, že i nezanedbatelná část studentů učitelství matematiky a dokonce podstatná část studentů učitelství 1. stupně ZŠ nemá v těchto pojmech jasno, studenti se geometrii (a pravděpodobně často i matematiku) učí pouze zpaměti, bez jakéhokoli pochopení, někteří vysokoškolští studenti učitelství nejsou dokonce ani schopni porozumět psanému textu. Dostáváme se tak do začarovaného kruhu – na vysokou školu přichází studovat budoucí učitelé, kteří nechápou základní pojmy, a pokud se tito studenti dostanou do praxe jako učitelé, budou nadále děti učit pouze poučky zpaměti bez pochopení, děti budou mít nadále nechut ke geometrii a budou stavět na špatně pochopených pojmech. Je třeba, abychom se více zaměřili na výuku budoucích učitelů tak, aby uměli tyto pojmy správně interpretovat a žákům je dobře objasnit. V opačném případě se totiž často setkáváme s nechutí žáka věnovat se geometrii, resp. dále rozvíjet nabyté geometrické vědomosti.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 237 a 238 můžete zaslat nejpozději do 20. 11. 2017 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: *mfi@upol.cz*.

Úloha 237

Je dán pravoúhlý čtyřstěn $ABCD$ s pravými úhly při vrcholu D . Na jeho hranách AD , BD , CD uvažujeme po řadě body X , Y , Z , pro něž platí

$$\frac{|AX|}{|XD|} + \frac{|BY|}{|YD|} + \frac{|CZ|}{|ZD|} = 1.$$

Dokažte, že těžiště tohoto čtyřstěnu leží v rovině XYZ .

Jaroslav Švrček

Úloha 238

Určete všechna celá čísla n , pro která je číslo

$$4n^2 - 9n + 16$$

druhou mocninou některého přirozeného čísla.

Pavel Calábek

Dále uvádíme řešení úloh 233 a 234, jejichž zadání byla zveřejněna ve druhém čísle aktuálního ročníku našeho časopisu.

Úloha 233

Dokažte, že desítkový zápis nekonečně mnoha přirozených mocnin čísla 4 začíná číslicí 9.

Jacek Uryga & Pavel Calábek

Řešení. Důkaz tvrzení úlohy provedeme sporem. Předpokládejme, že takových mocnin existuje jen konečný počet. Potom existuje takové přirozené číslo a , že všechny přirozené mocniny čísla 4 začínající číslicí 9 jsou menší než 4^a . V dalším označme $\lfloor x \rfloor$ celou část reálného čísla x , tedy největší celé číslo, které není větší než x a $\{x\}$ desetinnou část reálného čísla x , tj číslo $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in (0; 1)$.

Uvědomme si, že desítkový zápis přirozeného čísla A začíná číslicí 9, právě když $\log 9 \leq \{\log A\} < 1$. Tato nerovnost je totiž ekvivalentní s nerovností

$$9 \leq 10^{\log A - \lfloor \log A \rfloor} < 10,$$

a tedy i s nerovností

$$9 \cdot 10^{\lfloor \log A \rfloor} \leq A < 10 \cdot 10^{\lfloor \log A \rfloor},$$

která už uvedené tvrzení dokazuje, protože pro přirozené číslo A je $\lfloor \log A \rfloor$ celé nezáporné číslo. Číslo 4^a nezačíná číslicí 9, tedy platí $\{\log 4^a\} < \log 9$.

V další části si uvědomme, že číslo $4^5 = 1024$ je „velmi blízko“ třetí mocnině desítky. Vynásobením čísla 4^a číslem 4^5 se desetinná část jeho logaritmu zvětší o desetinnou část logaritmu čísla 4^5 , tedy o číslo

$$\{\log 4^5\} = 5 \log 4 - 3 \doteq 0,0103.$$

Protože $\{\log 4^5\} < 1 - \log 9 \doteq 0,0456$, po jistém počtu k násobení číslem 4^5 bude desetinná část logaritmu čísla 4^{a+5k} ležet mezi čísly $\log 9$ a 1, přesněji řečeno po k vynásobeních, kde

$$k = \left\lfloor \frac{\log 9 - \{\log 4^a\}}{5 \log 4 - 3} \right\rfloor + 1.$$

Tím jsme dostali větší mocninu čísla 4 než 4^a , tedy číslo 4^{a+5k} , která začíná číslicí 9, což je hledaný spor.

Poznámka. Číslicí 9 začínají mocniny 4^a pro

$$a = 78, 83, 88, 93, 176, 181, 186, 191, \dots$$

Správná řešení zaslali *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

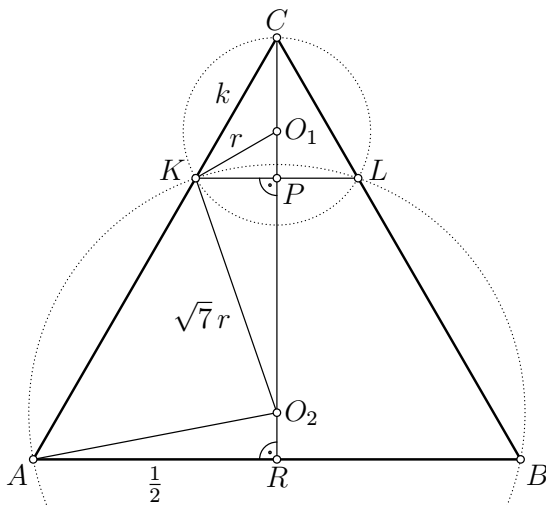
Úloha 234

Na stranách AC a BC rovnostranného trojúhelníku ABC leží po řadě body K a L tak, že čtyřúhelníku $ABLK$ lze opsat kružnici. Poloměr této kružnice je $\sqrt{7}$ krát větší než poloměr kružnice opsané trojúhelníku CKL . Určete poměr, ve kterém dělí body K a L strany AC a BC .

Jaroslav Zhouf

Řešení podle Karola Gajdoše.

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že délka strany rovnostranného trojúhelníku ABC je 1. Vnitřní úhly při vrcholech A, B tětiového čtyřúhelníku $ABKL$ mají velikost 60° , proto velikosti jejich protějších úhlů mají velikost 120° , tedy $ABKL$ je rovnoramenný lichoběžník. Body K a L tak dělí strany AC a BC ve stejném poměru a trojúhelník CKL je rovnostranný. Označme k velikost jeho strany a r poloměr kružnice jemu opsané. Zřejmě platí $k = \sqrt{3}r$.



Označme O_1 střed kružnice opsané trojúhelníku CKL , P střed jeho strany KL , O_2 střed kružnice opsané čtyřúhelníku $ABLK$ a R střed jeho strany AB . Body C, O_1, P, O_2 a R zřejmě leží na společné ose úseček KL a AB . Velikost přepony KO_2 pravoúhlého trojúhelníku PKO_2 je dle zadání $\sqrt{7}r$, velikost jeho odvěsny je

$$|PK| = \frac{1}{2}k = \frac{1}{2}\sqrt{3}r.$$

Podle Pythagorovy věty platí

$$|PO_2| = \frac{5}{2} r.$$

Dále podle Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku AO_2R s přeponou AO_2 délky $\sqrt{7}r$ a odvěsnou AR délky $\frac{1}{2}r$ platí

$$|RO_2| = \sqrt{7r^2 - \frac{1}{4}}.$$

Výška PR lichoběžníku $ABKL$ má velikost

$$|PR| = |CR| - |CP| = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}r.$$

Tedy platí

$$(|PR| - |PO_2|)^2 = |RO_2|^2,$$

což po dosazení dává

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} - 4r\right)^2 = 7r^2 - \frac{1}{4}.$$

(Tato rovnice pokrývá oba případy, kdy bod O_2 může ležet uvnitř nebo vně lichoběžníku $ABKL$.) Po úpravě dostaneme kvadratickou rovnici

$$9r^2 - 4\sqrt{3}r + 1 = 0$$

s kořeny $r_1 = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ a $r_2 = \frac{1}{9}\sqrt{3}$. Odtud vychází $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{1}{3}$. V prvním případě nejsou body K , L vnitřními body úseček AC a BC . Ve druhém dělí úsečky AC a BC ve shodném poměru

$$\frac{|AK|}{|KC|} = \frac{|BL|}{|LC|} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{1}.$$

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Martin Raszyk* z ETH Zürich a *Alexy Walczak* z II LO v Tarnowskich Górach (Polsko).

Pavel Calábek

Zaokrouhlování výpočtů při řešení kvantitativních úloh na střední škole

EMANUEL SVOBODA

Jednou z etap doporučené strategie řešení kvantitativních úloh (viz např. [1, 2]) s fyzikálním či technickým námětem je numerický (číselný) výpočet hledané veličiny. S tímto výpočtem je spojeno také zaokrouhlování číselné hodnoty nalezené veličiny. Při tomto zaokrouhlování výsledku často dochází k mnoha nepřesnostem. Z nich jsou dvě podstatné. Buď je přesnost konečného výsledku větší, než přesnost zadaných číselných hodnot veličin (pouhým výpočtem, např. na kalkulačce, nesprávně zvyšujeme přesnost výsledku), nebo se zbytečně výsledek ochuzuje o platné číslice (platná místa, platné cifry). Cílem tohoto příspěvku je jednak zdůvodnění požadavku na zaokrouhlování číselných hodnot veličin získaných výpočtem, jednak probrat pravidla zaokrouhlování v souvislosti s řešením kvantitativních úloh na střední škole.

Na číselné hodnoty fyzikálních či technických veličin zadaných v textu úloh je třeba pohlížet jako na číselné hodnoty, které byly získány *měřením*. Pokud máme informace o přesnosti měření (tj. je např. udána relativní nebo absolutní chyba měření), je situace jednodušší. Tak je tomu např. při zpracování výsledků v protokolech o laboratorním měření. Podrobně je tato problematika rozebrána např. v [3]; o zpracování výsledků měření je pojednáno v Úvodu do laboratorního měření v učebnici [4] (na přiloženém CD).

Není-li k zadaným údajům připojena chyba měření, a tak je tomu nejčastěji v zadání úloh, předpokládáme, že absolutní chyba měření daných veličin není větší než 0,5 posledního platného místa (tj. nejistota číselné hodnoty je na posledním platném místě). Např. údaj o délce $d_1 = 51$ cm (zadaný na 2 platné číslice) znamená, že $50,5 \text{ cm} \leq d_1 \leq 51,5 \text{ cm}$ a relativní chyba je 1 %. Údaj $d_2 = 51,0$ cm (zadaný na tři platné číslice, nejistota je v desetinách cm) dává relativní chybu měření 0,1 %. Přesnost měření je tedy určena zavedeným počtem platných číslic (platných míst). Proto také zaokrouhlování výsledků při řešení úloh se řídí jejich počtem.

Zaměřme se proto nejdříve na určování počtu platných číslic v čísle (v číselné hodnotě $\{x\}$ hledané veličiny x). Z matematického hlediska je pro stanovení tohoto počtu rozhodující, zda se jedná o číslo s desetinnou čárkou či nikoliv.

Pokud má číslo *desetinnou čárku*, začínáme při určení počtu platných číslic zprava u poslední číslice příslušné číselné hodnoty a postupujeme doleva tak dlouho, dokud nenarazíme na první nenulovou číslici. Schematicky je to znázorněno např. u čísla 5,060_←. Takto nalezenou nenulovou číslici a jakoukoliv číslici vpravo od ní považujeme za platné číslice. Nuly, které jsou na konci čísla s desetinnou čárkou, a nuly ležící za nebo před desetinnou čárkou, jsou platnými číslicemi. Uveďme si příklady:

- číslo 5,060 má 4 platné číslice
- číslo 90,632 má 5 platných číslic
- číslo $0,625 \cdot 10^2 = 62,5$ má 3 platné číslice (bez ohledu na zápis)
- číslo 77,00 má 4 platné číslice
- číslo $0,0038 = 0,38 \cdot 10^{-2} = 38 \cdot 10^{-4}$ má 2 platné číslice (bez ohledu na zápis)

Můžeme také říci, že platné cifry daného čísla jsou všechny od první nenulové číslice zleva do poslední zapsané číslice zprava. První nenulová číslice zleva v zápise dané číselné hodnoty zaujímá nejvyšší platné místo. Např. v čísle 5,060 je to podtržená pětka, v čísle 0,0038 podtržená trojka. U čísel s desetinnou čárkou zaujímá poslední udaná číslice včetně nuly nejnižší platné místo. Na příklad u čísla 5,060 je to podtržená nula.

Číslo 2800, (zapsáno s čárkou na konci) má také 4 platné číslice, ale číslo 2800 (bez čárky na konci) má jen dvě platné číslice. Neboli u čísel, která jsou uváděna *bez desetinné čárky*, nejsou nuly vyskytující se na okraji čísla ať již zleva nebo zprava považovány za platné číslice.

Jak je vidět, uvádění desetinné čárky celou záležitost vyjasňuje. Problém je ale v tom, že na výše napsanou desetinou čárku (např. 2800,) nejsme většinou zvyklí. Proto se doporučuje používání tzv. *vědeckého zápisu čísel* (někdy se také používá termín *smíšený tvar čísla*). To znamená, že číselnou hodnotu veličin zapisujeme tak, aby před desetinnou čárkou byla jedna platná číslice ležící v polouzavřeném intervalu $\langle 1, 10 \rangle$. Takže zápisy veličin např. $428 \cdot 10^{-8}$ m nebo $0,428 \cdot 10^{-5}$ m jsou sice rovnocenné matematicky, ale nejsou nejvhodnější pro zaokrouhlování výsledků při výpočtech. Tomu vyhovuje zápis $4,28 \cdot 10^{-6}$ m. Exponent -6 pak udává *řád čísla, číselné hodnoty* (tedy nikoliv -8 nebo -5). Tedy je vhodné vlastní číselnou hodnotu veličin zapsat vždy tak, aby před desetinnou čárkou byla jen jedna platná číslice. Výhoda vědeckého zápisu čísel je také v tom, že bez složitých numerických výpočtů a bez použití kalkulačky můžeme *odhadnout řád konečného výsledku*. To je také jedna z etap strategie řešení kvantitativních úloh. A nutno dodat, že řádová chyba při řešení úloh se již považuje za hrubou chybu. Drobná nepřesnost v číselné hodnotě veličiny lze řešiteli úlohy i prominout při jinak správném jeho postupu a správném odhadu řádu čísla.

Dodejme ještě, že nenulové číslice jsou vždy číslicemi platnými a to bez ohledu na to, zda číslo obsahuje nebo neobsahuje desetinnou čárku. Takže např. číslo 98 má dvě platné číslice, číslo 9,81 má tři platné číslice.

Při numerickém výpočtu pak u konečného výsledku získaného běžnými aritmetickými operacemi se zadanými veličinami (sčítání a odečítání u stejnojmenných veličin; násobení a dělení; umocňování a odmocňování jako obdoba násobení a dělení) pak určujeme buď počet platných desetinných míst, nebo celkový počet platných míst výsledné hodnoty následovně:

1. Při sčítání a odečítání číselných hodnot při výpočtu hledané veličiny (např. hledáme velikost výslednice F_v několika sil působících v jedné přímce – souhlasného nebo nesouhlasného směru nebo chceme vypočítat relativní molekulovou hmotnost M_r sloučeniny apod.) výsledek zaokrouhlujeme na stejný počet desetinných míst, jako má zadaná číselná hodnota (sčítanec, resp. sčítanec se zápornou hodnotou) s nejmenším počtem platných desetinných míst.

Např.:

$$F_v = (10,1 + 5,24 - 8,6) \text{ N} = 6,74 \text{ N} \doteq 6,7 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} M_r(\text{C}_{17}\text{H}_{33}\text{COOH}) &= 18 \cdot 12,01 + 34 \cdot 1,0079 + 2 \cdot 15,9994 = \\ &= 216,18 + 34,2686 + 31,9988 = 282,4474 \doteq 282,4 \end{aligned}$$

Poznámka. Ve starší literatuře se uváděl postup při sčítání nebo odečítání čísel tak, že veličiny, které máme sčítat nebo odečítat, mají být udány na stejný počet desetinných míst, tedy se stejnou absolutní přesností, bez ohledu na počet platných číslic. Neboli když byly zadány hodnoty na různý počet desetinných míst, zaokrouhlovaly se všechny sčítance na takový počet desetinných míst, jako měl sčítanec s nejmenším počtem desetinných míst a až potom se sčítalo. S nástupem kalkulaček pro výpočty se tato zásada opustila a výsledek kalkulačkou vypočítaný se považuje v podstatě za správný. V obou případech počet platných číslic neovlivnil řád výsledku.

2. Při násobení a dělení výsledek zaokrouhluje číselnou hodnotu tak, aby obsahovala stejný počet platných číslic jako číslo ve výpočtu s nejmenším počtem platných číslic.

Např. při výpočtu velikosti síly F_g , kterou se navzájem přitahují Země o hmotnosti M_Z a Měsíc o hmotnosti M_M , je-li r vzdálenost středů těchto těles, vycházíme ze vztahu:

$$F_g = G \frac{M_Z M_M}{r^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,972 \cdot 10^{24} \cdot 7,4 \cdot 10^{22}}{(3,84 \cdot 10^8)^2} \text{ N}$$

$$F_g \doteq 19,990\,097\,1 \cdot 10^{19} \text{ N} \doteq 2,0 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

Protože číselná hodnota hmotnosti Měsíce byla zadána jen na dvě platné číslice ($7,4 \cdot 10^{22}$), musí mít výsledek také jen dvě platné číslice.

3. Při kombinacích matematických operací sčítání, odečítání, násobení a dělení (pokud tyto operace vyžadujeme od žáků rozepisovat, např. pro kontrolní činnost zabraňující opisování) zapisujeme dílčí výsledky s větším počtem platných číslic, než odpovídá výše uvedeným pravidlům a teprve konečný výsledek zaokrouhlíme na příslušný počet platných míst.

Např. pro práci W' ideálního plynu při izobarickém ději dostáváme řešením úlohy vztah, do kterého dosazuje zadané hodnoty, např.:

$$W' = p_1 V_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = 1,013 \cdot 10^5 \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} \left(\frac{303}{293} - 1 \right) \text{ J}$$

$$W' = 1,519\,5 \cdot 10^2 (1,034\,13 - 1) \text{ J} = 5,186\,1 \text{ J} \doteq 5,2 \text{ J}$$

Počáteční objem plynu byl zadán jen na dvě platné číslice, proto i výsledek musí být zaokrouhlen (podle pravidel o zaokrouhlování) jen na dvě platné číslice. Pokud nevyžadujeme od žáků vypisovat průběžné mezihodnoty, pak použitím kalkulačky rovnou žáci např. zapíší $W' = 5,186\,006 \text{ J} \doteq 5,2 \text{ J}$.

Při řešení kvantitativních úloh se často v textech úloh v našich učebnicích setkáváme se zadáním číselných hodnot veličin tak, že z tohoto zadání není počet platných číslic příliš zřejmý. Např. je zadána hustota vody $1\,000\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (Je to údaj jen s jednou platnou číslicí nebo se čtyřmi?), délka tyče 2 m (Měření s přesností $0,5\text{ m}$?), podobně zadání teploty $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, $500\text{ }^{\circ}\text{C}$, napětí zdroje 10 V atp. V takových případech při řešení kvantitativních úloh tzv. „mlčky“ předpokládáme (jako *nepsané dohody*), že všechny nuly ve výrazech typu $1\,000\text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ či $500\text{ }^{\circ}\text{C}$ nebo 10 V jsou platné číslice. Není-li zadáno jinak (více platných míst), jsou údaje zadány na dvě platné číslice. Tedy např. údaj 2 m „chápeme“ jako $2,0\text{ m}$ a teplotu $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ jako $0,0\text{ }^{\circ}\text{C}$ (aniž bychom to zapisovali). Někdy nepsanou dohodu uplatňujeme bezprostředně při převodu jednotek, např. u času $t = 1\text{ min} = 60\text{ s}$. Podobně v mnoha dalších případech.

Můžeme tedy shrnout: Zadané hodnoty veličin v textu úlohy zapisujeme ve výpisu opěrných bodů nejvhodněji tak, aby číselné hodnoty byly zapsány ve smíšeném tvaru s odpovídající nenásobnou či nedílčí jednotkou. Tedy např. zadanou velikost síly $F = 35\text{ kN}$ zapíšeme $F = 3,5 \cdot 10^4\text{ N}$, hodnotu hmotnosti $m = 350\text{ g}$ jako $m = 3,50 \cdot 10^{-1}\text{ kg}$, hodnotu elektrické kapacity $C = 55\text{ nF}$ jako $C = 5,5 \cdot 10^{-8}\text{ F}$ atp.

Není tedy vhodný zápis například pro hmotnost $m = 100\text{ g} = 0,1\text{ kg}$, protože s neuplatněním nepsané dohody jsme „ztratili“ dvě platné číslice. Podobně zápisem pro poloměr $r = 10\text{ cm} = 0,1\text{ m}$ ztrácíme jednu platnou číslici, proto je správnější zápis $r = 0,10\text{ m}$, pokud nechceme tento údaj zapsat ve smíšeném tvaru.

Při numerických výpočtech respektujeme počet platných číslic tak, že u konečného výsledku nemůže být počet platných číslic větší (ale nemá být ani zbytečně menší), než je nejmenší počet platných číslic u zadaných hodnot.

Na závěr si uvedme komentované řešení jedné komplexní úlohy s fyzikálně-technickým námětem.

Úloha

Elektromechanika se chystá opravit přepálenou spirálu z chromniklového drátu u varné konvice. Voda o objemu $2,0\text{ litru}$ a počáteční teploty $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ se má touto opravenou konvicí uvést do varu ($100\text{ }^{\circ}\text{C}$ za normálního tlaku) za dobu 5 min . Konvice se připojuje k síťovému napětí 230 V a měla by mít účinnost aspoň 80% . Jak přibližně dlouhý musí být chromniklový drát o průmětu $0,40\text{ mm}$ použitý k opravě topné spirály? Řešte nejdříve obecně, pak pro zadané hodnoty.

Řešení : Po pozorném čtení textu vybereme tzv. *opěrná slova* potřebná pro úspěšné řešení úlohy. V našem případě to budou v podstatě zadané veličiny nutné pro výpočet požadované délky drátu. Veličiny zapíšeme předepsanými (dohodnutými) značkami. Protože se v textu vyskytuje údaj o teplotě a času, je potřeba rozhodnout vhodné rozlišovací značky, např. pro teplotu zvolíme t a pro čas τ . Dvě veličiny zadané v jednotkách, které nejsou součástí SI (litr, min), a jednu veličinu uvedenou s dílčí jednotkou (mm), vyjádříme v nedílčích jednotkách SI. Současně respektujeme zápis zachovávající počet platných cifer s užitím mocnin 10. Zápis zadání úlohy se doporučuje v následující přehledné podobě:¹⁾

$$\begin{array}{lll} V = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 & \tau = 300 \text{ s} & d = 0,40 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ t_1 = 10 \text{ }^\circ\text{C} & U = 230 \text{ V} & \\ t_2 = 100 \text{ }^\circ\text{C} & \eta = 0,80 & \\ \hline l = ? & & \end{array}$$

Při *rozboru* si musíme uvědomit situaci, kterou máme řešit. Protože se jedná jak o vedení elektrického proudu topnou spirálou, tak o tepelnou výměnu mezi touto spirálou a vodou v konvici, budeme se opírat o vztahy platné pro tyto děje. Pro *obecné řešení* se nabízí postupovat analytickou metodou, kdy jednotlivé závislosti veličin budeme vyjadřovat analyticky a přitom začneme vztahem, který bude východiskem – tj. vhodným vztahem pro délku l (postup od neznámého k známému).

Takovým vhodným vztahem je závislost elektrického odporu R topné spirály na délce l drátu, ze kterého je vytvořena, tj. vztah

$$R = \rho \frac{l}{S},$$

kde ρ je rezistivita drátu. Obsah příčného řezu drátu vyjádříme vztahem

$$S = \pi \frac{d^2}{4}.$$

Vyjádřením l z prvního vztahu a dosazením za S dostáváme vhodný výchozí vztah (východisko) pro naše řešení, tj. vztah

$$l = \frac{\pi d^2 R}{4\rho}.$$

¹⁾V učebnicích u řešených úloh jsou zapisovány zadané hodnoty z úsporných důvodů většinou vedle sebe.

V získaném vztahu neznáme celkový odpor R spirály, proto musíme přibrat další vztah a to pro výkon topné spirály, tj.

$$P = \frac{U^2}{R}.$$

Dosazením za R do výchozího vztahu pro délku l dostaneme

$$l = \frac{\pi d^2 U^2}{4 \rho P}.$$

V tomto vztahu neznáme P (nyní v roli příkonu pro vodu), proto přibereme další vztah a to pro účinnost topné spirály, při čemž její tepelný výkon ηP vyjádříme odevzdaným teplem Q za jednotku času (Q/τ) vodě o objemu V , hustotě ρ_v a měrné tepelné kapacitě c , ohřeje-li se o teplotu $\Delta t = t - t_1$. Neboli platí

$$\eta P = \frac{Q}{\tau} = \frac{mc\Delta t}{\tau} = \frac{V\rho_v c\Delta t}{\tau}.$$

Odtud

$$P = \frac{V\rho_v c\Delta t}{\eta\tau}.$$

Dosazením P do vztahu pro délku l dostaneme po úpravě, že pro hledanou délku drátu platí vztah

$$l = \frac{\pi d^2 U^2 \eta \tau}{4 \rho V \rho_v c \Delta t}.$$

Jednou z kontrol správnosti obecného řešení je určení jednotky získaného výsledku, neboli provedení *jednotkové zkoušky* (zkoušky jednotek).²⁾ V našem případě jednotkovou zkoušku zapíšeme ve tvaru

$$\begin{aligned} [l] &= \frac{\text{m}^2 \cdot \text{V}^2 \cdot \text{s}}{\Omega \cdot \text{m} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{K}} = \\ &= \frac{\text{m}^2 \cdot \text{V}^2 \cdot \text{s}}{\text{V} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{m} \cdot \text{V} \cdot \text{A} \cdot \text{s}} = \text{m}. \end{aligned}$$

Jednotka metr vyšla správně, vztah by mohl být také správný. Tento podmíněný závěr vyplývá z toho, že nemáme zcela jistotu o správnosti

²⁾Není správné používat termín *rozměrová zkouška* v souvislosti s nalezením jednotky výsledku, protože na základní a střední škole se pojem rozměr veličiny nezavádí.

získaného vztahu. Mohlo totiž dojít v obecném případě k eliminaci chyb tak, že byly v průběhu řešení provedeny chyby, které se pak v konečném výsledku vzájemně kompenzovaly. V našem případě by se spíše jednalo o to, zda byly správně zapsány ve zlomku čísla 4 a π a veličina účinnost η s jednotkou 1 (záměna čitatele za jmenovatel a obráceně). Další ověření správnosti provedeme v diskusi po číselném výpočtu hledané veličiny (viz dále).

Provedeme nyní *číselný výpočet* dosazením číselných hodnot zadaných veličin a dohledaných tří veličin v tabulkách – hustoty vody, rezistivity a měrné tepelné kapacity vody. Je vhodné tyto dohledané veličiny dopsat do výpisu opěrných bodů, takže pak by dodatečný výpis měl např. tuto podobu:

$V = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$	$\tau = 300 \text{ s}$	$d = 0,40 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	$\rho_v = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
$t_1 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$	$U = 230 \text{ V}$	$\rho = 1,2 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$	
$t_2 = 100 \text{ }^\circ\text{C}$	$\eta = 0,80$	$c = 4,2 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	
$l = ?$			

$$l = \frac{3,14 \cdot (0,40 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 230^2 \cdot 0,80 \cdot 300}{4 \cdot 4,2 \cdot 10^3 \cdot 2,0 \cdot 10^{-3} \cdot 1\,000 \cdot 1,2 \cdot 10^{-6} \cdot 90} \text{ m} \doteq 1,7577 \text{ m} \doteq 1,8 \text{ m}$$

Výslednou hodnotu hledané délky zaokrouhlíme směrem nahoru na dvě platné číslice vzhledem k nejmenšímu počtu platných číslic zadaných veličin. Přitom uplatníme u času nepsanou dohodu, že je čas zadán na dvě platné číslice (ačkoliv jsme neuvedli v textu hodnotu 5,0 min.)

V *diskusi* se zaměříme na dvě okolnosti. Za prvé zkontrolujeme *správnost řešení* tak, že na základě úvah v rozboru úlohy vypočítáme teplo přijaté vodou, odpor vytvořené topné spirály a Jouleovo teplo. V našem případě za pomoci kalkulačky dostaneme, že voda k ohřátí o $90 \text{ }^\circ\text{C}$ potřebuje teplo asi 0,76 MJ. Topná spirála má odpor asi 17Ω a Jouleovo teplo je přibližně 0,95 MJ, takže vodě předané teplo s uvážením účinnosti je asi 0,76 MJ. Tedy dostáváme souhlas. Podobně bychom postupovali bez kalkulačky při řádovém odhadování hodnot.

K tomuto kroku ve strategii řešení úlohy ještě poznamenejme, že tato činnost se žáky není vůbec zbytečná také proto, že se opakují probírané vztahy, žáci se učí počítat odhadem, zopakuje se postup řešení (zvláště u složitějších úloh) apod. V této části strategie se mohou zapojit do řešení úlohy i další žáci.

Za druhé můžeme v rámci diskuse posoudit případ, že bychom uvažovali tepelnou kapacitu varné konvice místo její účinnosti.

U číselně zadaných úloh se v *odpovědi* většinou zaměřujeme na výstižnou formulaci s číselným výsledkem a jednotkou. V našem případě bychom uvedli, že: K opravě topné spirály varné konvice je zapotřebí chromniklový drát o délce asi 1,1 m. Ani tento závěr použité strategie řešení úlohy není formální a to ze dvou důvodů. Za prvé chceme od žáků, aby se slovně správně mluvnicky i fyzikálně vyjadřovali, za druhé je to poslední příležitost zamyslet se nad získanou hodnotou z hlediska její reálnosti.

Literatura

- [1] Svoboda, E., Kolářová, R.: Didaktika fyziky základní a střední školy. Vybrané kapitoly. Nakladatelství Karolinum, Praha, 2006.
- [2] Vaněček, D., Svoboda, E. a kol.: Didaktika technických odborných předmětů. Česká technika – nakladatelství ČVUT, Praha, 2016.
- [3] Vybíral, B.: Zpracování dat fyzikálních měření. [cit. 20. 2. 2017]. Dostupné na: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/mereni.pdf>
- [4] Svoboda, E. a kol.: Mechanika. Učebnice pro 1. ročník gymnázií. Prometheus, Praha, 2014.

Fyzika kapalin ve spojení s problémy každodenního života

RENATA HOLUBOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Motivace žáků dnešní generace Z je obtížná, proto se opakovaně snažíme hledat cesty, jak přiblížit problémy, prezentované během výuky fyziky ve škole, co nejvíce každodennímu životu žáků. Z tohoto pohledu nalézáme velmi mnoho motivačních podnětů také v oblasti klasické fyziky – termiky, termodynamiky, popř. vlnění či akustiky a také mechaniky kapalin. Zamysleme se nad fyzikou v šálku kávy či kakaa a hledejme vysvětlení jevů, se kterými se běžně setkáváme.

„Coffee to go“

Fenoménem dnešní uspěchané doby se stal mimo jiné také prodej kávy „coffee to go“ – káva s sebou. Proč je káva prodávána v kelímku s víčkem – tak ji obdržíme i u dopravců (ve vlaku), naproti tomu např. v letadle vám nikdy nenalijí plný šálek nápoje? Máte to nějaký fyzikální důvod či jen nechceme, aby okolí vidělo, co si odnášíme?

Pokud si nalijeme nápoj do šálku nebo sklenice a poneseme jej ke vzdálenému stolu, často se nám stane, že během chůze nám nápoj ze sklenice vystříkne. Tento jev studoval na kalifornské univerzitě *Rouslan Krechetnikov*, který se pokusil vysvětlit tento problém na základě poznatků fyziky kapalin a mechaniky kmitů a vln, tj. vlivu povrchového napětí, zrychlení, momentu setrvačnosti a šíření vlnění v látkovém prostředí. Kromě toho ukázal na závislost na velikosti nádoby a charakteru chůze člověka, která je ovlivněna věkem, zdravím a schopností reakce. Při pravidelné chůzi tekutina osciluje směrem vpřed a vzad. Při narušení tohoto rytmu dochází k rychlejšímu rozkmitání kapaliny a ta vystříkne. Bylo zjištěno, že tomuto nežádoucímu jevu lze zabránit, když nádobu naplníme jen do výšky $7/8$ jejího průměru. Podstatou je to, že naše dolní končetiny tvoří při chůzi kyvadla a spolu s pohybující se nádobou jsou to kyvadla spřažená.

Frekvenci vlastních kmitů nohy lze vypočítat pomocí vztahů pro výpočet periody kmitů fyzického kyvadla

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgd}},$$

kde J je moment setrvačnosti, d označuje vzdálenost těžiště od osy otáčení. Moment setrvačnosti určíme na základě Steinerovy věty

$$J = \frac{1}{12}ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2,$$

těžiště nohy je ve $2/5$ její délky. Po dosazení číselných hodnot máme pro $T = 1,8$ s, tj. $f = 0,55$ Hz. Ke stejnému výsledku dojdeme i při použití zjednodušeného vztahu

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{d}}.$$

Počítáme-li s délkou končetiny $d = 0,95$ m, potom po dosazení do vztahu pro výpočet frekvence fyzického (reverzního) kyvadla dojdeme k přibližně stejné hodnotě $f = 0,51$ Hz, pro krokový rytmus 2 nohou to je 1,02 Hz.

Když člověk vykročí s kávou v ruce, při prvním kroku se káva zhoupne směrem dozadu, při dalších krocích se začne kapalina pravidelně pohybovat vpřed a vzad. Základní frekvenci kmitů kapaliny v cylindrické nádobě o průřezu D a výšce h kapaliny lze vypočítat pomocí vztahu

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3,68g \tanh(3,68h/D)}{D}}.$$

Jestliže dosadíme do tohoto vztahu typické rozměry nádoby na kávu $h = 0,1$ m, $D = 0,07$ m, dostaneme frekvenci $f = 1,09$ Hz. To je nejmenší frekvence antisymetrického modu kmitání kapaliny. Při srovnání s frekvencí chůze dostáváme hodnoty, které se pro různé nádoby na kávu liší jen nepatrně a excitační frekvence pro uvedení kapaliny do pohybu leží v intervalu 1 až 2,5 Hz. Protože se jedná o sprzęžená kyvadla spojená pevnou vazbou, může při chůzi dojít k rezonanci. Výsledkem je „vyšpláchnutí“ nápoje z nádoby.

Marangoniho efekt

Pokud nám steče kapka kávy na hladkou podložku, po jejím vyschnutí zůstane na podložce kroužek a nikoli kolečko, jak bychom mohli očekávat. Tento jev souvisí s Marangoniho efektem, který je popisován jako vznik proudění podél rozhraní dvou kapalin vlivem gradientu povrchového napětí (viz např. [9]).

V příspěvku Fyzika v kape kávy [3] je stručně objasněn právě vznik těchto kroužků (nikoliv koleček), které zůstanou na hladkém povrchu když vyschne kapka kávy a za jakých podmínek k tomuto jevu *nedochází*.

Vysychání kapek vody je ovlivněno celou řadou faktorů – kvalitou povrchu, velikostí kapky, teplotou kapky (ta klesá vlivem skupenského tepla vypařování) a teplotou okolí, vlhkostí vzduchu, prouděním vzduchu. Představa, že při odpařování vody se kapka zmenšuje, není přesná. Na obr. 1 je vidět, že dochází ke dvěma procesům. Levý obrázek ukazuje situaci, kdy při vypařování (schnutí kapky) zůstává konstantní kontaktní úhel a zmenšuje se styčná plocha mezi kapkou vody a povrchem. V pravé části obrázku je schematicky zobrazen případ, kdy se kontaktní úhel zmenšuje, ale styčná plocha zůstává konstantní. Vyjádříme-li difúzní tok vztahem $\mathbf{J} = -D\nabla c$, kde D je koeficient difuze a c koncentrace okolního prostředí, lze odhadnout změnu rozměru kapky s časem pomocí závislosti $R(t) \sim \sqrt{D(t_f - t)}$. Symbol t_f označuje celkový čas difuze, tj. dobu potřebnou pro úplné vyschnutí kapky. Předpokládali jsme, že doba difuze $t_d = \frac{R^2}{D}$ a objem kapky

se mění s časem podle vztahu

$$\frac{dV}{dT} \sim -\frac{R^2}{t_d} = -DR.$$



Obr. 1 Vypařování kapky (<http://www.ramehart.com/glossary.htm>)

V případě Marangoniho efektu kapalina v kapce musí proudit směrem do středu kapky, a to do té doby, než kapka vyschne. Je-li povrch hydrofobní, kapka má konstantní poloměr, odpařuje se nejvíce v místě největšího zakřivení povrchu (na okraji). Jak je dále vysvětleno [3], kapka se stává plošší, v okrajových částech kapky je nedostatek kapaliny a tak voda proudí ze středu k okraji. Proud je schopen unášet drobné částice, které jsou v kapce rozptýleny. Vznikne kávový kroužek.

Výše popsany mechanismus může být narušen právě vlivem Marangoniho efektu (vysvětlení jevu podal *Subrahmanyam Chandrasekhar* v roce 1961). Na rozrání dvou prostředí dochází vlivem gradientu povrchového napětí k tomu, že kapalina s nižším povrchovým napětím proudí do oblasti kapaliny s vyšším povrchovým napětím (odpařující se kapka má nižší teplotu, a tím vyšší povrchové napětí). Rozptýlené částice se proto shlukují uprostřed kapky. Vliv na velikost povrchového napětí může mít různá koncentrace složek (to znamená také částic rozptýlených v kapce) a počáteční teplota vody.

Měření závislosti povrchového napětí na teplotě je běžná laboratorní úloha. Výsledky měření žáci obvykle prezentují ve tvaru tabulky popř. křivky, kterou proloží naměřenými body. Obecnou regresní funkci této závislosti lze popsat rovnicí

$$\sigma = B \left[\frac{T_c - T}{T_c} \right]^\mu \left[1 + b \left(\frac{T_c - T}{T_c} \right) \right],$$

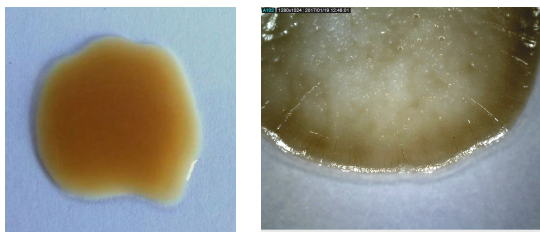
kde T_c je kritická teplota (647,45 K) a konstanty mají hodnoty

$$B = 235,8 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, \quad b = -0,625, \quad \mu = 1,256.$$

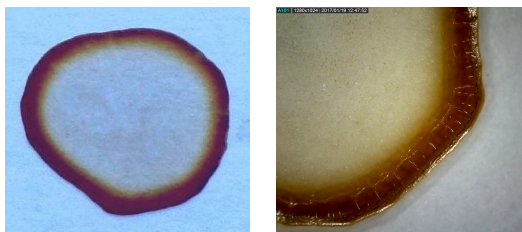
V rámci laboratorní práce jsme získali konkrétní tvar této závislosti

$$\sigma = -0,167t + 76,1.$$

Na obr. 2, 3 a 4 je vidět vznik kroužku kávy po vyschnutí kapky na skle – jak na klasické fotografii, tak pod mikroskopem.



Obr. 2 Kapka kávy na skle – fotografie a obrázek z USB mikroskopu



Obr. 3 Kávový kroužek po vyschnutí kapky a jeho okraj v USB mikroskopu (vpravo)



Obr. 4 Kapka kávy s rozptýlenými částicemi, rozptýlené částice se tlačí do středu kapky, na okraji žádné nejsou (vpravo)

Zvuk lžičky při míchání kávy (piva, sifonu)

Jistě jste již někdy pozorovali, že když mícháte nápoj (kapučíno, napěněné kakao) v šálku a poklepete lžičkou na dno, zvuk, který slyšíte, se mění, když několikrát nápoj promícháte. Jak lze tento jev vysvětlit pomocí fyziky?

Klepeme-li na dno nádoby, vznikne tak vlnění, které se přenáší do okolního prostředí. Tím může být vzduch nebo kapalina, která se nachází v nádobě. Vznikne stojatá podélná vlna, v případě prázdné nádoby má základní frekvenci – tón je hluboký. Je-li v nádobě kapalina, změní se rychlost v šíření vlnění (rychlost se zvýší asi 4krát). Platí $f = \frac{v}{\lambda}$, proto čím větší je rychlost šíření vlnění, tím vyšší je frekvence tónu. Šíření zvuku v kapalinách a jeho popis však ve skutečnosti není takto jednoduchý. Rychlost zvuku v kapalinách závisí nejen na hustotě, ale také na stlačitelnosti kapalin. Hustota vody může být mnohonásobně (téměř 1 000krát) větší než je hustota vzduchu. Pokud by rychlost zvuku ve vodě byla závislá jen na hustotě, byla by rychlost šíření zvuku ve vodě ve srovnání se vzduchem asi 30krát menší. Naměřená rychlost zvuku ve vodě je ale asi 4krát větší než ve vzduchu. Rychlost zvuku závisí také na kompresibilitě kapaliny – její stlačitelnosti a je vyjádřena vztahem

$$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}},$$

kde K je objemový modul pružnosti

$$K = -V \frac{dp}{dV}.$$

Platí

$$V = V_0 \left(1 - \frac{p}{K}\right), \quad \rho = \frac{m}{V}, \quad \rho = \rho_0 \left(1 + \frac{p}{K}\right)$$

a tedy

$$\frac{d\rho}{dp} \approx \frac{\rho_0}{K} \approx \frac{\rho}{K}, \quad v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}.$$

Objemový modul pružnosti vody je $K = 2 \cdot 10^9$ Pa, tomu odpovídá rychlost zvuku $v \doteq 1\,500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Hodnota K pro vodu je asi 10 000krát větší než pro vzduch. Uvedený vztah lze zapsat i pomocí modulu objemové stlačitelnosti κ , tj.

$$v = \sqrt{\frac{1}{\rho\kappa}}.$$

Jednoduché vysvětlení daného jevu je následující. Mícháme-li nápoj s mlékem, usazené bublinky vzduchu v mléce či pěně se takto dostanou do celého objemu kapaliny a brzdí pohyb zvukové vlny, frekvence se sníží,

vydáváný zvuk je hlubší. Když lžičku odložíme, celý proces se opakuje. Vzduchové bublinky se shromáždí u povrchu a rychlost šíření zvuku v kapalině se opět zvýší. Tento experiment si můžete jednoduše vyzkoušet v laboratoři. Porovnejte výšku tónu za různých podmínek:

- a) nádoba je prázdná;
- b) nádoby jsou naplněné do různé výšky;
- c) nádoba je naplněná horkou vodou z vodovodního kohoutku (tato voda obsahuje velké množství rozpuštěného vzduchu, výška tónu může klesnout až o tři oktávy);
- d) nádoba je naplněná destilovanou vodou;
- e) nádoba je naplněná kapucínem (nebo kávou se smetanou).

Upozornění: uvedený efekt je pozorovatelný jen několik málo sekund.

Diskutované problémy jsou jen výběrem z celé řady dalších zajímavých jevů, které lze pozorovat v každodenním životě a které také dokážeme vysvětlit pomocí poznatků, získaných žáky v rámci výuky středoškolské fyziky. Uvedená vysvětlení jsou zjednodušená. Mnoho z uvedených problémů lze diskutovat i kvalitativně na základě experimentů, do kterých se zajisté žáci rádi zapojí.

Literatura

- [1] *Yunker, P. J. et al.*: Suppression of the coffee-ring effect by shape-dependent capillarity. <http://www.nature.com/nature/journal/v476/n7360/full/nature10344.html>
- [2] <http://www.sueddeutsche.de/wissen/alltags-forschung-physik-im-kaffeebecher-1.1350780>
- [3] *Kopecký, V. jr.*: Fyzika v kapce kávy. *Vesmír* 92, březen 2013, s. 156–159.
- [4] <http://mrsec.uchicago.edu/research/highlights/coffee-ring-effect>
- [5] *Bush, J. W. M.*: Interfacial Phenomena. Marangoni Flows. MIT OCW:18.357, s. 31–41.
- [6] *Mayer, H. C., Krechetnikov, R.*: Walking with coffee: Why does it spill? *Physical Review E* 85, 046117 (2012), s. 1–4.
- [7] <http://www.ramehart.com/glossary.htm>
- [8] *Schlichting, H. J.*: Katastrophenabwehr beim Coffee to go. *Spektrum der Wissenschaft* 4 (2014), s. 56–57.
- [9] http://147.33.74.135/knihy/uid_es-001/hesla/marangoniho_efekt.html
- [10] *Bochníček, Z.*: Chůze z pohledu fyziky. *Školská fyzika: praktický časopis pro učitele fyziky*, Plzeň, Pedagogická fakulta v Plzni, (1996), s. 1211–1511.

Demonstrace hydrostatického paradoxu pomocí plastových lahví a LabQuest Vernier

ČENĚK KODEJŠKA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Při podrobném zkoumání problematiky demonstrace hydrostatického paradoxu bylo zjištěno, že se tímto experimentem, provedeným se soupravou Vernier, dosud nikdo nezabýval. Pokus není popsán ani v originální příručce experimentů se soupravou Vernier [1]. Demonstrace hydrostatického paradoxu přitom patří ke klasickým experimentům hydromechaniky. Žáky většinou zaujme problémová otázka, ve které ze tří nádob bude tlaková síla na dno největší, a zcela logicky volí většinou nádobu s největším objemem kapaliny. Tento mylný názor žáků pak snadno vyvrátíme provedením experimentu pomocí Hartlova přístroje (obr. 1).



Obr. 1 Hartlův přístroj k ověření hydrostatického paradoxu

Tradiční provedení experimentu Hartlovým přístrojem spočívá v měření síly působící na dno nádoby pomocí mechanismu, který převádí tlakovou sílu kapaliny, tlačící na pružnou blánu, na výchylku mechanické ručky. Ne vždy je ale experiment zcela průkazný, zejména když blána již ztratila svoji pružnost, nebo je-li nějakým způsobem poškozena mechanická část

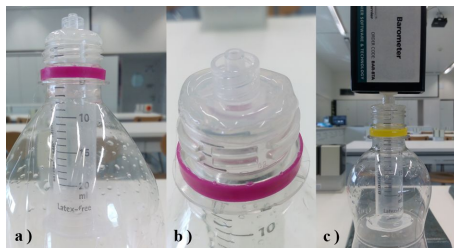
přístroje. Určitou nevýhodou je také nutnost postupné výměny několika nádob různých tvarů.

Východiskem může být výroba jednoduchého zařízení z plastových lahví, pomocí kterého můžeme měřičem tlaku Vernier změřit tlakové působení kapaliny na dno nádoby až u čtyř nádob různých tvarů a velikostí současně.

Příprava experimentu

K výrobě přístroje pro ověření hydrostatického paradoxu budeme potřebovat tři až čtyři různé průhledné plastové lahve, tavnou pistoli, plastové injekční stříkačky Braun Omnifix o objemu 20 ml se závitem (pozor, jiné typy mají mírně větší průměr a nedají se zasunout do hrdla lahve) a měřiče tlaku Vernier s připojením na datalogger LabQuest.

Protože se stejná výška hladiny ve všech prázdných lahvích označuje špatně, je dobré při vytvoření rysky na lahvi postupovat opačně. Nejprve si upravíme plastové lahve tak, že odstraníme dno a část lahve tak, aby zbývající výška láhve byla přibližně 20 cm. Lahve uzavřeme víčkem, postavíme na hrdlo, nalejeme kapalinu do námi zvolené výšky stejné ve všech nádobách a permanentním fixem vyznačíme na všech lahvích rysky. Kvůli rychlým výpočtům po provedení měření je vhodné volit výšku vody např. 15 cm, 20 cm.



Obr. 2 Příprava plastových lahví: a) stříkačka v lahvi, b) detail hrdla, c) připojení tlakoměru

Z injekční stříkačky dále vyndáme píst a zasuneme ji do takto připravené plastové lahve tak, aby konec opatřený závitem přesahoval asi 1 cm hrdlo lahve. Poté tavnou pistolí nanese kolem dokola konce injekční stříkačky lepidlo a stříkačku zasuneme do hrdla tak, aby plochý konec stříkačky byl v rovině s koncem hrdla lahve (obr. 2a). Z důvodu lepší těsnosti lepidlo nanese ještě po obvodu hrdla lahve, jak je patrné z obr. 2b. Obr. 2c ilustruje závěrečné připojení tlakoměru Vernier ke stříkačce, který zlehka dotáhneme, abychom nestrhli plastový závit.

Experimentální ověření a naměřená data

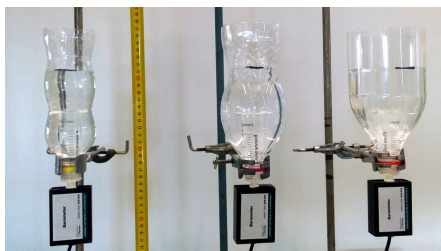
Tím je přístroj připraven k měření a můžeme přistoupit k provedení samotné demonstrace hydrostatického paradoxu.

Nejprve vynulujeme všechna tlaková čidla (obr. 3a). V položce *Senzory* zvolíme *Vynulovat* a dále *Všechny senzory* (červený rámeček na obr. 3). Pokud jsou čidla v pořádku, měli bychom získat výsledek podobný zobrazenému na obr. 3b.



Obr. 3 Vynulování dataloggeru Vernier

Do prázdných lahví naléváme postupně vodu po rysku, kterou jsme si vytvořili na začátku práce. Případnou korekci množství vody uděláme opět za pomoci větší injekční stříkačky. Obr. 4 ilustruje výsledné uspořádání experimentu.



Obr. 4 Ověření hydrostatického paradoxu

Pomocí metru můžeme hrdla všech lahví nastavit do stejné výšky nad katedrou, čímž zvýšíme názornost pokusu vzhledem k obrázku, který mají žáci zpravidla v učebnici. Na tom jsou všechny nádoby ve stejné výšce a ve všech je kapalina nalita do stejné výšky nad dnem nádoby. Kapalinu můžeme pro lepší viditelnost obarvit potravinářským barvivem.

Na závěr můžeme provést výpočet hodnoty hydrostatického tlaku pro námi zvolenou výšku hladiny ve všech lahvích a porovnat ji s naměřenými hodnotami pomocí tlakoměrů Vernier. V našem případě jsme dospěli k výsledku $p_h = h\rho g = 0,15 \cdot 1000 \cdot 10 \text{ Pa} = 1,5 \text{ kPa}$. Experimentálně naměřená

průměrná hodnota je $p_h = (1,42 \pm 0,01)$ kPa. Výrobce uvádí v technické dokumentaci (<http://www.vernier.cz/katalog/manualy/cz/bar-bta.pdf>) šum přístroje až ± 50 Pa. Rozdíl mezi experimentálně naměřenou průměrnou hodnotou a teoreticky vypočítanou je přibližně 80 Pa. Zbývajících 30 Pa, které odpovídají přibližně 3 mm vodního sloupce, lze pravděpodobně přičíst na vrub nepřesnosti při konstrukci rysky na lahvi a nepřesného naplnění lahve. Naměřené hodnoty zobrazíme žákům na projektoru pomocí dokumentové kamery nebo vyzveme nějakého žáka k zápisu hodnot na tabuli. Ukázka různých naměřených hodnot pro výšku vodního sloupce 15 cm je na následujícím obr. 5.



Obr. 5 Ukázka naměřených hodnot

Zabývali jsme se experimentálním ověřením hydrostatického paradoxu, při kterém jsme k demonstraci využili plastové lahve různých tvarů a tlakoměry Vernier s dataloggerem LabQuest. Experimentálně naměřené hodnoty potvrdily teoretický předpoklad rovnosti tlakových sil na dna nádob za předpokladu stejných průřezů dna a stejné výšky kapaliny nad dnem ve všech nádobách.

Experimentálně byl také ověřen s negativním závěrem miskoncept studentů, že největší tlaková síla, a tedy i tlak, působí na čidlo v lahvi s největším objemem. V rámci nejistoty měření a šumu přístroje jsou v dobré shodě i experimentálně naměřené hodnoty s teoreticky vypočítanými.

Závěrem lze konstatovat, že demonstrace hydrostatického paradoxu pomocí plastových lahví a tlakoměrů Vernier poskytuje žákům názornější pohled na tento jev, než provedení klasickým způsobem pomocí Hartlova přístroje. Současné využití ICT při této demonstraci posiluje také mezipředmětové vazby a zvyšuje pro žáky atraktivitu motivačního problémového experimentu.

Literatura

- [1] Appel, K. et al.: Physics with Vernier (Vernier Software & Technology). 2007, [online] <http://www.vernier.com/products/books/pwv/>

Plazmová koule

PETR DUCHÁČEK

Gymnázium J. Nerudy, Praha

Plazmová koule se poprvé objevuje na začátku 70. let 20. století, když ji sestrojil student MIT *Bill Parker* při laboratorních experimentech. Plazma jako zdroj světla ale poprvé použil již *Nikola Tesla* při svých experimentech s vysokofrekvenčním střídavým napětím.

Vnitřek plazmové koule je vyplněn vzácnými plyny o tlaku 2 až 10 torr (což odpovídá tlaku 300 až 1 300 Pa). Nejčastěji se používá neon. Typ plynu určuje barvu výboje. Při malém tlaku by hustota plazmatu nebyla dostatečná na to, aby vznikla vlákna (filamenty) plazmatu. Při velkém tlaku by nedošlo k dostatečné ionizaci vlivem přiloženého napětí. Napětí, které se používá, je v řádech jednotek kV při frekvencích kolem 35 kHz. Vysokofrekvenční střídavé napětí je generováno pomocí Teslova transformátoru. Proudů jsou malé a i po rozebrání je možné sahat na drát vyčnívající kolmo na desku s elektrickými obvody. Toto je primární cívka Teslova transformátoru. Sekundární cívka transformátoru je přímo vidět pod sklem plazmové koule (obr. 1). Navíc vlivem vysokofrekvenčního napětí dochází ke skinovému jevu, tzn. že proud vzniká pouze po povrchu předmětů, kterými prochází. Čím vyšší je frekvence střídavého proudu, tím do nižší hloubky ve vodiči proud proniká. V případě lidského těla to znamená, že proud teče po kůži.



Obr. 1



Obr. 2

Po zapnutí plazmové koule můžeme pozorovat, že vlákna jsou rovnoměrně rozložena v prostoru (obr. 2). Příčinou je vzájemné odpuzování jednotlivých filamentů. Důvod, proč směřují ke sklu nádoby je, že hledají

nejsnazší cestu k zemi, která směřuje přes sklo a vzduch. Vlivem vysoko-frekvenčního napětí se okolní objekty chovají jako kondenzátor a proud je schopen jimi hůře či lépe procházet. To závisí na jejich impedanci, která je primárně určená kapacitancí. Čili plyn uvnitř koule je jedna deska kondenzátoru a vnější vzduch je deskou druhou a sklo je vrstva dielektrika takového kondenzátoru.

Nejjednodušší experiment, který můžeme provést, je přiložit prsty ruky ke sklu plazmové koule. To, co okamžitě pozorujeme, je zformování filamentů pod konci našich prstů (obr. 3). Naše tělo je vodivé a umožňuje tak snazší cestu do země, než okolní vzduch, takže si filameny vyberou cestu k našim prstům. Tělo se stane vodičem s nižší impedancí, než je okolní vzduch. Prsty jsou sice odděleny od vláken sklem, které je dielektrické, ale vlivem toho, že jde o střídavý proud, tvoří soustava plazma, sklo a prsty kondenzátor, který je principiálně propustný pro střídavý proud vlivem elektrostatické indukce na deskách kondenzátoru.

Pokud se prstem dotkneme ze strany koule, tak vlákno stoupá směrem vzhůru a neudrží stálý tvar. Vlivem vyšší teploty vlákna stoupá ionizovaný plyn výše a tak se pohybuje i vlákno výše. Pokud se prstem dotkneme seshora, tak filament plazmatu stoupá přímo nahoru a drží tvar (obr. 4).



Obr. 3



Obr. 4

Když prst umístíme do menší vzdálenosti od skla než 1 mm, můžeme pozorovat výboj ve vzduchu mezi sklem a prstem. K tomu dochází vlivem průrazu vzduchu na tuto malou vzdálenost dostatečným velkým napětím. Pokud bychom přilepili kus alobalu na povrch plazmové koule a potom těsně nad něj přiložili prst, může být vzdálenost prstu od alobalu větší a výboj bude mnohem silnější. Takový výboj je mnohem jasnější a je schopný propálit i list papíru. Pokud přiložíme list papíru nad alobal a držíme-li v blízkosti papíru prst nebo klíč, dojde k viditelnému propálení papíru. Papír lze takto i zapálit. Pokud v tomto případě necháme prst chvilku

nad alobalem, tak nám výboj v prstu vypálí na kůži černou tečku. Teplý výboj snadno spálí během chvíle lidskou pokožku a vytvoří tak malou spáleninu, která během několika dní zmizí. Současně cítíme i proud procházející prstem. Vysvětlení tohoto jevu je, že přidáním alobalu se změnila vlastnosti druhé desky kondenzátoru. Plocha alobalu je větší než povrch prstu, zvětší se tedy kapacita a zmenší kapacitance vzniklého kondenzátoru. To se projeví zmenšenou impedancí v obvodu, zvětší se proud a výboj je jasnější.

Magnet nebude nijak pozorovatelně vychylovat vlákna plazmatu, protože střídavý proud výboje má vyšší frekvenci a vlákno se jen rozkmitá s malou amplitudou. Když použijeme koncovku jack od reproduktorů, a dotkneme se jí koule, nebo použijeme lidské tělo jako anténu (čili dotkneme se koule jednou rukou a jacku druhou), tak jsme schopni slyšet plazmovou kouli v reproduktorech. Jistě to nebude na frekvenci kolem 35 kHz, protože to je mimo rozsah sluchu i reproduktorů, přesto lze slyšet šum plazmové koule. Při zapojení sondy do osciloskopu můžeme na osciloskopu zaznamenávat průběh elektrického pole v závislosti na vzdálenosti od koule, měřit frekvenci střídavého napětí a určit i jeho amplitudu. Mnou provedeným měřením na osciloskopu bylo zjištěno napětí kolem 80 V mezi kolíkem zásuvky (tedy zemí) a povrchem plazmové koule. Při přibližování ruky ke kouli ale napětí klesalo, čili není to tvrdý zdroj. Frekvenci jsem změřil necelých 25 kHz, což se liší od na internetu uváděných 35 kHz. Tyto hodnoty mohou být pro různé plazmové koule jistě mírně odlišné.

Elektrické pole kolem plazmové koule může rozsvítit i zářivky. Když dáme jeden konec zářivky dostatečně blízko k plazmové kouli (několik cm), aby byl ještě ve větším elektrickém poli, tak jsme schopni rozsvítit zářivku (obr. 5). Mezi koncem zářivky blízko plazmové koule a místem uchopení se vytvoří dostatečné napětí a dochází ke svícení luminoforu zářivky vlivem proudu procházejícího zářivkou. V místě dotyku ruky zářivka přestane svítit a toto místo lze měnit posouváním ruky. Průchod proudu mezi vnitřkem zářivky a naší rukou je opět na principu kondenzátoru. Máme teď soustavu několika kondenzátorů spojených sériově. První kondenzátor je koule a vzduch. Druhý je vzduch a vnitřek zářivky a třetí je vnitřek zářivky a naše ruka. Sériově spojené kondenzátory mají tu vlastnost, že jejich kapacita se přibližuje nejvíce nejmenší zapojené kapacitě. Pokud například mezi ruku a zářivku dáme suchý hadr, který by měl elektricky izolovat, tak dojde k přidání dalšího kondenzátoru do obvodu. Tento kondenzátor nemá nejmenší kapacitu (tu má ten, kde je lidská ruka) a tak

prakticky nijak nezmění vlastnosti obvodu a zářivka svítí dále, i když se jí dotýkáme přes suchý hadr. Pokud se přímo dotkneme plazmové koule jednou rukou a druhou rukou se dotkneme kolíku na zásuvce, ucítíme v ruce proud procházející naším tělem.



Obr. 5

Plazmová koule také může vyvolat katodové záření v Thomsonově trubici či výboje ve výbojových trubicích bez nutnosti použití Ruhmkorffův transformátor. Stačí tyto trubice přiblížit k plazmové kouli.

Plazmové koule stojí pár set korun a není důvod, aby dnes nebyly v každém fyzikálním kabinetu. Lze na nich ukázat celkem velký počet jevů, ale na vysvětlení nejsou úplně nejjednodušší.

Představy mladších žáků o gravitačním působení

EVA HEJNOVÁ

Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem

(Dokončení z minulého čísla)

Závěry z výzkumu a diskuse k učebnicím přírodovědy

Co se týče naší výzkumné otázky, u všech úloh se ukázalo, že zatímco v nižších ročnících si žáci vybírají svou odpověď víceméně mezi všemi nabízenými možnostmi, děti v 6. ročníku se soustředí téměř výhradně na

dvě představy, z nichž jedna je správná a druhá představuje tu nejodolnější miskoncepci. Hypotéza, že se budou u žáků objevovat všechny miskoncepce i ve vyšším ročníku, se tedy nepotvrdila.

Co se týče studentů učitelství, vzhledem k malému počtu respondentů (navíc omezeného pouze na jednu vysokou školu), jsme neformulovali žádnou hypotézu. Výsledky průzkumu ukázaly, že miskoncepce se u nich objevují také, ale v menší míře (což lze očekávat a není to nic překvapivého). Výsledky průzkumu ale ukázaly značnou podobnost s tím, co bylo zjištěno u žáků v 6. ročníku, tedy že některé miskoncepce studenti již téměř nemají, ale u každé úlohy se objevuje jedna chybná představa, kterou stále ještě nezanedbatelná část studentů zastává.

Skutečnost, že někteří budoucí učitelé ještě nemají vytvořené správné představy o gravitaci, může být problémem v jejich budoucím pedagogickém působení v rámci přírodovědného vzdělávání žáků na 1. stupni základní školy. Proto je třeba dbát na jejich dobrou přípravu ve fyzikální části přírodovědy již v rámci jejich pregraduálního vzdělávání.

U jednotlivých úloh jsme také porovnávali výsledky našich žáků s výsledky jejich vrstevníků, které byly získány v rámci výzkumu realizovaném na Novém Zélandu na přelomu 70. a 80. let (tedy zhruba před 35 lety). Porovnání těchto výsledků s našimi naznačuje, že u našich žáků pravděpodobně přetrvávají některé chybné představy ve větší míře i ve vyšších ročnících. Důvody k tomu mohou být různé a může mezi ně např. patřit i menší míra zařazování informací o miskoncepcích do metodických příruček i poměrně malá nabídka literatury o této problematice v českém jazyce.

Na základě toho, co bylo uvedeno, považujeme za důležité, aby učitelé na 1. stupni znali základní chybné představy žáků a aby také věděli, že u mladších žáků bývá jejich škála širší. Učitelé 2. stupně by pak měli vědět, které chybné představy u žáků přetrvávají, aby na ně mohli při výuce zaměřit svoji pozornost. Je také třeba dbát na to, aby texty v učebnicích a v metodických příručkách byly srozumitelně a jasně formulované a také fyzikálně správné.

Abychom přispěli k vyjasnění některých možných problematických míst ve výkladu o gravitačním působení, uvedme některé vybrané texty z učebnic a metodických příruček a upozorníme na možná nedorozumění a chybné interpretace.

1. Text v učebnici [8, s. 11]: *Země má mnohem větší hmotnost než jablko, proto pozorujeme, že si Země přitáhne nejen jablko, ale také veškerou vodu, půdu, rostliny, zvířata apod. ke svému středu, a ne naopak.*

Problém v této formulaci může být ve slovním spojení „a ne naopak“. Síla je vždy spojena se vzájemným působením těles, proto na sebe působí Země i např. zvířata stejně velkými silami, a tedy také zvířata přitahují Zemi. Této skutečnosti by si učitelé měli být vědomi, aby u dětí nevytvářeli chybnou představu, že hmotnější tělesa působí na méně hmotná tělesa větší silou (případně že méně hmotná tělesa na ta hmotnější žádnou silou nepůsobí). Tato miskoncepce patří k těm nejodolnějším a přetrvává často i u starších žáků a studentů [2, 12]. To potvrzují i výsledky našeho průzkumu, který jsme prováděli u studentů učitelství pro 1. stupeň základní školy. Jim jsme zadali mimo výše uvedené úlohy i následující problém (obr. 4), který byl zaměřen na představu o vzájemném působení dvou těles s velmi odlišnými hmotnostmi.

Gravitace **Míček a Země**

A

Malý míček padá na povrch Země.

Země přitahuje gravitační silou míček, ale míček na Zemi žádnou silou nepůsobí.

Martina

B

Země i míček na sebe působí stejně velkými přitažlivými silami.

Petr

C

Země i míček na sebe působí přitažlivými silami, ale Země působí na míček mnohem větší silou, protože má oproti míčku obrovskou hmotnost.

Katka

D

Nemáte pravdu. Já si myslím, že ...

Lukáš

Obr. 4 Zadání úlohy Míček a Země

Typicky chybnou odpověď (C) zvolila více než polovina studentů (52 %), přibližně čtvrtina studentů (22 %) si myslí, že míček na Zemi žádnou silou nepůsobí (odpověď A). Pouze zhruba čtvrtina studentů (26 %) má vytvořenou správnou představu (odpověď B), tj. že Země i míček na sebe působí stejně velkými přitažlivými silami.

I když v rámci přírodovědy se zpravidla mluví zejména o přitahování předmětů k Zemi, tedy pouze o jednostranném gravitačním působení Země, měl by si učitel být vědom toho, že každá dvě tělesa na sebe působí stejně velkými přitažlivými silami. Pro žáky na 1. stupni základní školy je pochopení této skutečnosti velmi obtížné. Nejjednodušeji jim to lze vysvětlit

tak, že i když na sebe působí každá dvě tělesa stejně velkými silami, to hmotnější zpravidla „zacloumá“ tím lehčím. Děti se také mohou v této souvislosti ptát, proč se tedy všechna tělesa „nepřitáhnou k sobě“, když na sebe působí gravitačními silami. Důvodem, proč tomu tak není, je jejich velmi malá hmotnost (vůči hmotnosti Země).

2. Otázka v učebnici [9, s. 28]: *Uvaž, co udržuje umělé družice v pohybu kolem Země. Odpověď: Gravitační pole Země působí i na umělé družice a udržuje je v pohybu. Není však již tak silné, aby družice přitáhlo k povrchu Země.*

Vysvětlení je v tomto případě zavádějící, co se týče „síly“ gravitačního pole ve větší vzdálenosti od Země. Lidé se často mylně domnívají, že gravitační síla je ve výškách, v nichž obvykle obíhají družice, velmi malá. Pokud by se však družice Země nacházela např. ve vzdálenosti přibližně 300 km nad Zemí, byla by gravitační síla v této výšce jen o něco menší než na povrchu Země, její úbytek by činil cca 10 % [17, s. 30].

Učitel by měl žáky vést ke správné představě, že gravitační pole Země sahá velmi daleko. Lze např. poukázat na to, že musí být nejméně do vzdálenosti, ve které obíhá Měsíc kolem Země, neboť Země na něj musí působit přitažlivou silou, aby „neodlétnul“.

3. Text v učebnici [7, s. 37]: „Když vyhodíme do vzduchu míč, letí chvíli vzhůru, pak ale začne padat k Zemi. Podobně po výskoku – ať se odrazíme sebevíc – dopadneme zpátky na zem. Země si nás k sobě přitáhne.“

Tento výklad může děti vést k představě, že těleso letí vzhůru, protože na něj nejprve po dobu jeho pohybu směrem nahoru gravitační síla nepůsobí. V bodě obratu pak na něj začne působit zemská přitažlivost, a těleso tedy padá zpátky na zem. Ve skutečnosti na těleso působí gravitační síla po celou dobu jeho pohybu, což si děti často neuvědomují (viz úloha Delfín odpověď D, kterou ve 4. ročníku volilo 23 % dětí a v 5. ročníku 18 % dětí).

Učitel by měl o této časté chybné představě vědět a upozornit žáky na to, že gravitační síla působí na tělesa stále (tj. i na míč, když ho vyhodíme vzhůru) a nelze ji jednoduše „vypnout“ nebo nějak odstínit.

I v metodických příručkách pro učitele nalezneme nepřesné formulace, které mohou učitele vést k nesprávným představám a výkladům, které pak budou předávat dětem. Uvedme dále některé z nich.

4. Text v metodické příručce [18, s. 87]: *Je nutné, aby učitel rozlišoval pojmy gravitační síla (působí mezi každými dvěma tělesy) a gravitační síla Země (gravitační síla, kterou je těleso přitahováno k Zemi).*

Tato formulace může podporovat chybnou představu, že Země a těleso na Zemi (např. padající kámen nebo ležící kámen) na sebe navzájem gravitačními silami nepůsobí (tj. na kámen působí gravitační síla Země, ale kámen již žádnou silou na Zemi nepůsobí). Síla je vždy spojena se vzájemným působením těles, proto také gravitační síla je „jen jedna“ (tj. z fyzikálního hlediska nelze odlišovat gravitační sílu působící mezi dvěma tělesy a gravitační sílu Země) a jako taková působí vždy mezi dvěma tělesy. Z toho důvodu může být výše uvedené rozlišování zavádějící.

5. Text v metodické příručce [18, s. 88]: *Změř gravitační sílu různých těles. ... V tomto úkolu nejsou důležité naměřené hodnoty, ale získání dovednosti v měření gravitační síly Země.*

V tomto případě je nevhodně formulované zadání úkolu. Neměříme gravitační sílu tělesa, ale gravitační sílu, kterou působí Země na těleso. Učitel by měl otázky týkající se síly formulovat vždy tak, aby bylo zřejmé, že nějaké těleso působí silou na jiné těleso. Žáci si jinak mohou vytvářet chybnou představu, že gravitační síla je nějaká vlastnost těles [2, s. 106].

Jak zlepšit výuku fyzikální části přírodovědy?

Úlohy typu concept cartoons, které byly použity pro zjišťování představ dětí i studentů, mohou posloužit nejen k identifikaci miskoncepcí, ale učitelé mohou také pomoci při vytváření správných představ u jejich žáků. V rámci výuky je možné s úlohou pracovat tak, že nejprve si každé dítě vybere odpověď, se kterou souhlasí, poté následuje diskuse v menších skupinách a nakonec společná diskuze v celé třídě. Klíčové při tom je, aby žák pochopil, v čem se mýlil a osvojil si představu správnou. Ta musí být ale dobře zdůvodněná, aby ji dítě přijalo skutečně za svou.

Při vytváření správných představ je také vhodné vycházet z jednoduchých experimentů, které mohou děti provádět samy a které mohou jejich správné představy podpořit. Například odpověď O10 „... , ale můžeme to určitě vědět jen pro padající (že působí gravitační síla)“ u úlohy Strom a jablka naznačuje, že je velmi důležité žákům ukázat, že gravitační síla se projevuje v případě visícího jablka jako tahová síla na větev (jednoduše lze ukázat např. tak, že nějaký předmět zavěsíme na vodorovně natažený provázek, který se pod jeho tíhou prohne) a v případě ležícího jablka jako tlaková síla na podložku (lze ukázat např. tak, že jablko položíme na molitan nebo jinou měkkou podložku, která se pod jablkem zdeformuje).

Již výše jsme uvedli, že děti často spojují gravitační působení se zemským magnetismem a tato dvě pole pak ztotožňují. I v našem průzkumu se

jedna taková odpověď objevila u úlohy Padající míček (viz odpověď O8). Abychom těmto problémům předešli, je vhodnější učivo o magnetismu a gravitaci časově více oddělit a nespojovat je např. do jedné vyučovací hodiny. Analogii magnetického a gravitačního pole lze využít prostřednictvím provádění jednoduchých pokusů k vybudování představy něčeho „neviditelného“ (silového pole), co se projevuje silovými účinky na těleso. Další zdůrazňování podobnosti gravitačního a magnetického pole však může být kontraproduktivní a matoucí. Pro vytvoření správných představ je spíše důležité neustále znovu připomínat rozdíly mezi oběma druhy polí (tj. magnetická síla může být přitažlivá i odpuzivá, zatímco gravitační síla je vždy přitažlivá; magnetickou sílu můžeme odstínit, gravitační ne; každé těleso přitahuje jiná tělesa gravitační silou ke svému středu, zatímco magnet má dva póly, k nimž jsou přitahována pouze některá tělesa).

Závěr

V našem příspěvku jsme se věnovali některým vybraným miskoncepcím, na kterých jsme chtěli ilustrovat, jak se představy o gravitaci s věkem dětí mění a které z chybných představ přetrvávají u studentů učitelství pro 1. stupeň základní školy. Jsme si vědomi toho, některé skutečnosti spojené s problematikou gravitačního působení není jednoduché dítěti na 1. stupni základní školy vysvětlit fyzikálně zcela správně a zároveň pro něj jednoduše a srozumitelně. Důvodem je nedostatečně rozvinuté abstraktní myšlení a také výskyt mnoha nových, obtížně srozumitelných pojmů (např. síla, gravitační a magnetické pole apod.). Pokud mají navíc děti s pojmem gravitace spojeno velké množství miskoncepcí, stojí před učiteli poměrně obtížný úkol, jak děti dovést ke správným představám a porozumění.

Výše uvedené skutečnosti ukazují, že přípravné vzdělávání učitelů pro výuku přírodovědy by mělo zahrnovat nejen fyzikální znalosti a dovednosti, ale mělo by také studenty upozorňovat na typické chybné představy dětí a seznámit je s možnostmi, jak tyto představy diagnostikovat a následně také odbourávat. Na prvním místě je ale třeba, aby i sami učitelé měli o fyzikálních jevech správné představy. K tomu mohou posloužit i úlohy typu *concept cartoons*, které lze využít i v dalším vzdělávání učitelů.

Úlohy k některým fyzikálním tématům jsou dostupné – včetně metodických poznámek s komentářem a řešením – na internetové stránce http://physics.ujep.cz/~ehejnova/Pro_ucitele/.

Literatura

- [1] Janoušková, S. a kol.: Přírodovědná gramotnost v premimárním a raném období primárního vzdělávání jako prostředek zvýšení zájmu o studium přírodovědných a technických oborů. *Scientia in educatione*, roč. 5 (2014), č. 1, s. 36–49.
- [2] Mandíková, D., Trna, J.: Žákovské prekoncepce ve výuce fyziky. Paido, Brno, 2011.
- [3] Stead, K., Osborne, R.: What is Gravity? Some Children's Ideas. *Science Teacher*, 1981, 30, s. 5–12.
- [4] Mandíková, D.: Intuitivní představy o pohybu a síle. (Kandidátská disertační práce). MFF UK, Praha, 1990.
- [5] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (verze platná od 1. 9. 2013). MŠMT, Praha, 2013.
- [6] Mladá, J., Podroužek, L., Randa, M., Šolc, M.: Přírodověda pro 5. ročník základní školy. SPN, Praha, 2004.
- [7] Čechurová, M., Havlíčková, J., Podroužek, L.: Přírodověda pro 5. ročník základní školy. SPN, Praha, 2011.
- [8] Frýzová, I., Dvořák, L., Jízlová, P.: Příroda (učebnice pro 4. ročník základní školy). Fraus, Plzeň, 2010.
- [9] Kvasničková, D., Froněk, J., Šolc, M.: Přírodověda pro 5. ročník základní školy (Od vesmíru k člověku). Fortuna, Praha, 1997.
- [10] Holovská, H., Růkl, A.: Přírodověda pro 5. ročník (Země ve vesmíru), 1. díl. Alter, Praha, 1996.
- [11] Podroužek, L.: Úvod do didaktiky přírodovědy. Vyd. a nakl. Aleš Čeněk, Dobrá Voda, 2003.
- [12] Driver, R., Squires, A., Rushfords, P., Wood-Robinson, V.: Making Sense of Secondary Science. Routledge Falmer, New York, 2003.
- [13] Hejný M., Houfková, J., Jírotková, D., Mandíková D. a kol.: TIMSS 2007 – Matematické a přírodovědné úlohy pro první stupeň základního vzdělávání. UIV, Praha, 2011.
- [14] Kolářová, R., Bohuněk, J.: Fyzika pro 6. roč. základní školy. Prometheus, Praha, 2002.
- [15] Naylor, S., Keogh, B.: Concept Cartoons in Science Education. Milgate House Publishers, Sandbach, 2010.
- [16] Hejnová, E.: Realizace konstruktivistického přístupu ve výuce fyziky prostřednictvím úloh zadaných formou diskuze. *Matematika-fyzika-informatika*, roč. 25 (2016), č. 2, s. 102–115.
- [17] Rojko, M.: Omyly, které ovládly svět. Pražské centrum vzdělávání pedagogických pracovníků, Praha, 1993.
- [18] Mladá, J., Podroužek, L., Randa, M.: Příručka pro učitele k učebnicím a pracovním sešitům Přírodověda pro 4.–5. ročník základní školy. SPN, Praha, 1999.

Bobřík učí informatiku

7. díl – Úlohy na digitální gramotnost

JIŘÍ VANÍČEK

Pedagogická fakulta, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích

Šestkrát jsme se v našem seriálu zabývali úlohami rozvíjejícími informatické myšlení, pokaždé jsme vybrali jinou oblast informatiky. Je ovšem třeba přiznat, že v soutěži Bobřík informatiky i v jeho mezinárodní verzi Bebras se vyskytují také jiné úlohy, a to úlohy zaměřené na digitální gramotnost. Řekněme, že jde o úlohy, u nichž není pochopení nějakého informatického principu nebo pojmu klíčové, soutěžící nepotřebují abstrahovat, algoritmizovat, generalizovat, strukturovat apod. Jde o úlohy týkající se uživatelského přístupu k digitálním technologiím s potřebou spíše porozumět situaci z každodenní práce s počítačem. Soutěžící se v těchto úlohách často potřebuje zorientovat v určitém konkrétním softwarovém prostředí, mít s danou činností zkušenosti. U těchto úloh, kterých zařazujeme jen malé procento, má ovšem výhodu ten, kdo daný typ softwaru ovládá nebo s ním častěji pracuje.

Do soutěže jsou úlohy rozvíjející digitální gramotnost zařazovány proto, aby byla soutěž více propojena s obsahem vzdělávání na školách. Právě informatické úlohy připadají především učitelům často jako neinformatické, protože oni takovou informatiku na školách neučí. Pokud testy obsahují aspoň nějaké úlohy „o počítačích“, je laická veřejnost více spokojena, protože soutěž více odpovídá jejich představám o tom, jaké problémy informatika řeší.

Mezi uživatelské úlohy jsou řazeny také úlohy o společenských souvislostech používání technologií, jako např. úlohy týkající se bezpečnosti, ochrany autorských práv, antivirové problematiky nebo vztahů mezi lidmi,

kterí komunikují nebo sdílejí obsah na Internetu. U těchto úloh je největším problémem aktuálnost, protože musí odpovídat právnímu pořádku v době, kdy je soutěž pořádána. Právní situace se např. u zveřejňování obsahu na Internetu občas mění a je také v různých zemích rozdílná. Někdy i experti na problematiku autorských práv a licencí software nejsou ochotni vynést rezolutní stanovisko k dané situaci. Pak je taková úloha nutně problematická, na druhou stranu tyto úlohy jsou žádané, aktuální.

V této kapitole seriálu představujeme několik soutěžních úloh Bobříka informatiky z oblasti uživatelského přístupu k počítači a společenských aspektů používání technologií. Chceme ukázat, že i takové úlohy vedou k přemýšlení a nejsou vždy snadné k vyřešení. Pro zajímavost u úloh uvádíme úspěšnost soutěžících, tedy kolik procent soutěžících danou úlohu během ostré soutěže zodpovědělo správně. Kategorie Senior je určena studentům 3. a 4. ročníků, Junior 1. a 2. ročníků SŠ a Kadet pro nejvyšší ročníky ZŠ.

Antivirus

Kategorie Junior, Kadet, autor Václav Šimandl, úspěšnost Junior 80 %, Kadet 70 %.

Zadání

Markétin antivirový program v jejím novém notebooku hlásí, že virová databáze je zastaralá. Co to znamená?

- A) Antivirový program je mimo provoz, soubory nejsou kontrolovány.
- B) Antivirový program není schopen odhalit nové hrozby.
- C) Antivirový program pouze hlásí, že za posledních 24 hodin se ve světě neobjevila žádná nová virová nákaza.
- D) Antivirový program oznamuje, že v počítači již 168 hodin nebyl nalezen žádný nakažený soubor.

Komentář k úloze

Otázka se týká informační bezpečnosti, která také patří do informatiky. Každý počítač s připojením k Internetu je vystaven nebezpečí útoku malware (virů a dalších zákeřných programů). To může vést např. ke ztrátě nebo odcizení dat. Obranou proti těmto útokům je používání antiviru a firewallu. Oba musí být aktuální, antivir navíc potřebuje aktuální virovou databázi. Když je tato databáze zastaralá, antivir se na tuto skutečnost snaží uživatele upozornit. Počítačově gramotný člověk na toto upozornění dokáže správně zareagovat.

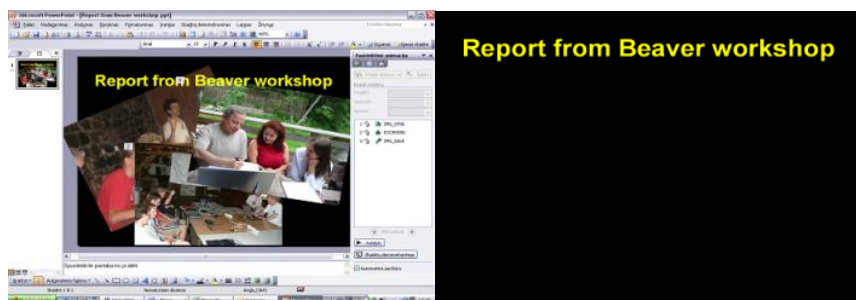
Zdůvodnění správné odpovědi

Správná odpověď je B). Antivir pracuje na principu porovnávání částí testovaných souborů se vzorky virů ve své virové databázi. Za tím účelem obsahuje databázi virových vzorků – jednoznačných identifikátorů známých počítačových virů. Tato databáze se pravidelně aktualizuje prostřednictvím Internetu. Program může poznat pouze ty viry, které má popsány v databázi. Jestliže je tato databáze zastaralá (není aktualizovaná), antivir sice dokáže odhalovat starší hrozby, ovšem ty, které se nově objevily, nikoliv.

Předvádění prezentace

Kategorie Kadet, autorka Monika Tomcsányiová.

Zadání



Během přípravy prezentace vidí Alenka toto (obrázek vlevo). Když začne prezentaci přehrávat, objeví se toto (obrázek vpravo). Kde je chyba?

- A) Při přehrávání se bitmapové obrázky nikdy nezobrazují, musí být převedeny do vektorového formátu.
- B) Při přehrávání prezentace se příliš velké obrázky ztrácejí, je třeba je zmenšit.
- C) Obrázky mají nastavenou animaci a objeví se, když Alenka stiskne klávesu.
- D) Alenčin monitor neumí správně zobrazit všechny barvy. Na jiném monitoru obrázky budou vidět.

Komentář k úloze

Toto je úloha na to „se vyznat“; ke správnému vyřešení úlohy je potřeba se orientovat v daném softwarovém prostředí a rozumět termínům,

které se prezentace a jejího předvádění týkají. Takovéto úlohy se objevovaly v počátečních ročnících soutěže; později byl přijat úzus, že soutěžní úlohy by neměly vyžadovat předchozí znalosti nějakého typu uživatelského prostředí.

Zdůvodnění správné odpovědi

Jestliže monitor špatně zobrazuje barvy, není možné, aby správně zobrazil barevný text. Je-li monitor poškozený, tak buď nezobrazuje jeden či dva ze tří barevných kanálů (pak budou obrázky vidět, ale se špatnými barvami), nebo nezobrazuje nic. Odpověď D) není správná.

Programy pro tvorbu prezentací umí zobrazovat bitmapové obrázky. Příliš velké obrázky nebudou vidět celé, ale není pravda, že by zmizely. Ani odpovědi A) a B) nejsou správné.

Zbývá tedy možnost, že obrázky mají nastavenou animaci a objeví se, když Alenka stiskne klávesu. A takováto situace při předvádění prezentace může běžně nastat. Nezkoušený uživatel pak může být zmaten, zvláště pokud obrázek kopíruje z jiné prezentace a s obrázkem se zkopírují i jeho vlastnosti, třeba že se obrázek objeví až v průběhu předvádění snímku po kliknutí. Správná odpověď je C).

Kopie videa – zachoval se správně?

Kategorie Junior, autor Jiří Vaníček, úspěšnost 42 %.

Zadání

Boleslav si v internetovém obchodě koupil videosoubor se svým oblíbeným filmem. Chtěl mít film stále u sebe, a tak si vytvořil kopii, kterou následně převedl do formátu pro svůj mobilní telefon. Vytvořený soubor pak uložil do paměti svého telefonu. Porušil přitom autorská práva?

- A) Ne, vše bylo legální.
- B) Ano, nesměl převést video do formátu pro mobilní telefon.
- C) Ano, nesměl uložit kopii filmu do paměti mobilního telefonu.
- D) Ano, nesměl ani převést video do formátu mobilního telefonu ani uložit kopii filmu do paměti mobilního telefonu.

Komentář k úloze

Každý občan by měl znát, co je nebo není legální při práci s počítači. Především je důležité být informován v oblasti získávání, užívání a šíření počítačového software i dat. Neznalost zákona neomlouvá a je nutno se podle něj řídit. U autorských práv to platí dvojnásob.

Otázka je problematická právě z hlediska právní dynamičnosti v této oblasti. Úloha z roku 2011 je stále platná v r. 2017, ale až tento článek někdo bude číst v budoucnu, odpověď označená autorem úlohy za správnou možná bude špatná. A možná je špatná již nyní v některé jiné z více než 40 zemí světa, kde soutěž probíhá.

Zdůvodnění správné odpovědi

Zákazník má právo vytvořit si záložní kopii legálně zakoupeného videa nebo hudby. Zákazník má právo převádět data do jiného formátu pro svoji potřebu. Proto Boleslav autorský zákon neporušil.

Majáles

Kategorie Junior, autorka Judith Helgers, úspěšnost 61 %.

Zadání

Škola pořádá v kulturním domě Majáles. Studenti starší 18 let tam mohou pít alkohol, mladší nikoliv. Aby se obsluze u baru usnadnila práce, starší 18 let dostanou při vstupu plastový náramek.

Škola má databázi studentů. Každý student má svůj studentský průkaz s fotografií a čárkovým kódem s kódovaným identifikačním číslem studenta. Pořadatelé při vstupu zkontrolují foto a čtečkou přečtou čárkový kód průkazu. Číslo studenta se uloží do databáze a porovnáním v databázi počítač rozhodne, zda student dostane plastový náramek.

Která z informací *není* důležitá pro správné fungování databáze?

- A) příjmení studenta,
- B) identifikační číslo studenta,
- C) datum narození studenta,
- D) zaškrtačací políčko pro označení, zda student již dostal náramek.

Komentář k úloze

Jde o otázku z informační gramotnosti, konkrétně z porozumění fungování a použití databází v praxi. Zdá se, že právě oblastem, kdy bude uživatel muset rozumět základnímu principu fungování informačních systémů, se bude muset škola v příštích letech věnovat více. Zde nebude stačit, aby se žák něco naučil nazpaměť jako vlastivědu; bez porozumění principů, které jsou jednoduché, ale které jsou založené na obeznámení se s daným typem práce, na praktické zkušenosti s podobným typem problému, budoucí uživatel nebude schopen řešit problémové úlohy každodenního života. Na dokreslení si v této úloze představme situaci, kdy u navrženého

způsobu řešení dojde k mimořádné události (např. něco přestane fungovat nebo nadřízení změni nařízení) a obsluha vstupu do sálu bude muset rychle reagovat a pracovat tak, aby se systém nezhroutil.

Zdůvodnění správné odpovědi

Správná odpověď je příjmení studenta. Bez identifikačního čísla studenta nelze zkontrolovat příchozí osobu v databázi. Bez data narození nelze zjistit, zda je student starší 18 let. Bez zaškrtnutí políčka se nedá zabránit podvodu, že někdo půjde na stejný průkaz vícekrát. Nepotřebné je příjmení studenta – podle příjmení nelze studenta jednoznačně identifikovat a k ničemu dalšímu se použít nedá.

Prezentace

Kategorie Kadet, Junior, autorka Michala Křížová, úspěšnost Kadet 36 %, Junior 49 %.

Zadání

Honza připravuje prezentaci – referát do hodiny přírodopisu. Má již vytvořené snímky, ale nemá je uspořádané. Pomoz Honzovi správně poskládat snímky tak, aby na sebe logicky navazovaly.

Rysy bobrů

Jsou bobrovití

- tělo: 600–800 mm
- ocas: 250–450 mm
- srst: hnědá, lesklá
- zadní nohy: blány mezi prsty
- čelist: výrazné 2 dolní řezáky

Bobr
Jan Novotný
referát z přírodopisu

Rysy bobrů

Jsou hlodavci

- hlodáky
- přední řezáky s tvrdou přední sklovinou a měkkou zadní zubovinou
- špičáky chybí
- býložravci

Rysy bobrů

Bobr evropský (Euroasie)

- černo hnědá srst
- až 30 Kg (2. největší na světě)

Bobr kanadský (Severní Amerika)

- rezavě červená srst
- až 26 Kg (3. největší na světě)

Kam bobr patří
(vědecká klasifikace)

Ríše: Živočišné
Řád: Hlodavci
Čeleď: Bobrovití
Rod: Bobr
Druhy: Bobr evropský
Bobr kanadský

Úloha je interaktivní – soutěžící přiřazuje obrázkům čísla snímků v prezentaci.

Komentář k úloze

Při tvorbě prezentací je důležité nejen umět správně ovládat program určený k jejich tvorbě, ale zároveň přemýšlet o obsahu prezentace z pohledu zamýšleného sdělení a typu cílového posluchače. V té to úloze najdeme i základy informatického myšlení, ukryté ve schopnosti abstrahovat, jít od obecného ke konkrétnímu a tuto schopnost použít při řazení snímků v prezentaci.

Úloha rozvíjí uživatelské dovednosti při práci s technologiemi. Základní dovedností každého tvůrce prezentací je správná interpretace získaných informací. V případě, že budou data přeházená či chaoticky uspořádána, nebude prezentace posluchačům dávat smysl a bude hrozit riziko, že její myšlenku nepochopí.

Zdůvodnění správné odpovědi

Správnou odpověď je toto pořadí snímků:



Prezentace jistě začne titulním snímkem. Po něm bude následovat klasifikace bobrů, zařazení bobrů do říše zvířat. Tato klasifikace je zároveň obsahem prezentace a tvoří osnovu pro další snímky. V dalších snímcích by měly být informace postupně konkretizující, hovořící o postupně se zmenšující skupině zvířat. 3. snímek hovoří o bobrech jako hlodavcích a 4. snímek o čeledi bobrovitých. Poslední snímek je nejkonkrétnější, hovoří o jednotlivých druzích bobrů.

Sestava počítače

Kategorie Senior, úspěšnost 74 %.

Zadání

V katalogu prodejce použitých a repasovaných počítačů jsou o jednom počítači uvedeny následující údaje:

Intel Celeron M Processor 530 (1.73GHz, 533MHz FSB, 1MB L2 cache) - Intel GM965 - 512MB DDRII 667MHz (1) - 250 GB 5.4krpm S-ATA - 15.4" TFT WXGA 1280 x 800 BrightView - Intel Graphics Media Accelerator X3100 384MB shared - DVD+/-RW SuperMulti DL fixed - Modem56K/LAN10/100 -

802.11b/g WLAN - no Bluetooth - ports: 3x USB 2.0, audio in/out, VGA, RJ-11, RJ-45 - 6-cell Li-Ion Battery - ExpressCard/54 slot - Secure Digital slot - travel battery connector - no dock - 32,3x358x266 - 2.49kg - FREE DOS

Jak velkou operační paměť má tento počítač?

- A) 1 MB B) 250 GB C) 384 MB D) 0,5 GB

Komentář k úloze

Umět se vyznat v různých zkratkách a číslech je důležité pro každého, kdo si chce koupit kvalitní a levný počítač, nebo pro toho, kdo si chce koupit např. počítačovou hru a potřebuje zjistit, zda bude na jeho počítači spustitelná nebo zda nepoběží pomalu, nebude trhaná atd. Otázka se tedy týká technických termínů, jednotek a jejich převodů a testuje uživatelské znalosti.

Je dobré vědět, že předpony kilo-, mega-, giga- atd. mají v informatice často jiný význam než třeba ve fyzice. Původně mocniny deseti, jak byly tyto předpony pro praktické převody jednotek v desítkové soustavě navrženy, jsou pro digitální technologie poněkud nepraktické. Velikosti paměťových jednotek jsou totiž vždy mocninami dvou. Mocnina dvou nejbližší číslu 1000 je 1024 (2^{10} , to je užitečné znát z paměti). Proto se ustálil význam předpony kilo v informatice jako 1024.

Tato úloha nepůsobí zrovna jako uživatelská, ale spíše jako „ajťácká“, technická. Nicméně k jejímu zodpovězení není zapotřebí informatického myšlení. Daleko více je potřeba se v dané oblasti vyznat, znát zkratky a další odborná slovíčka.

Zdůvodnění správné odpovědi

Správný výsledek je 0,5 GB. O velikosti operační paměti počítače informuje tento údaj: 512 MB DDRII 667MHz (1). Protože 1 GB je 1024 MB, 512 MB odpovídá 0,5 GB.

Údaj 1MB L2 cache se týká vnitřní paměti procesoru, údaj 250 GB 5.4krpm S-ATA se týká velikosti pevného disku, údaj X3100 384MB shared se týká velikosti paměti grafické karty.

Na správnou hodnotu operační paměti lze přijít prakticky bez čtení zadání, pouze z nabízených odpovědí. Údaje 1 MB a 250 GB nemohou být velikostmi operační paměti počítače (pokud se nenacházíme v daleké minulosti nebo v naopak v budoucnosti). Údaj 384 MB je zase hodně netypickou velikostí (velikost paměti bývá mocninou čísla 2, např. 128,

256, 512). Hodnota $384 = 256 + 128$; to by znamenalo, že počítač je osazen dvěma různě velkými paměťovými čipy, což je velice neobvyklé.

Film na mobilu

Kategorie Junior, úspěšnost 50 %.

Zadání

Maturantka Lucka dostala od kamarádky CD s filmem, který se právě hraje v kinech. Napadlo ji dát si ten film do mobilu. Stáhla si z Internetu volně šiřitelný (open source) program, který umí převést video do formátu, aby šlo na mobilu spustit. V tomto programu film převedla do formátu vhodného pro mobily a pak si jej na svůj mobil nahrála. Velice si pochvalovala, jak se jí to podařilo. Rozhodla se, že video umístí na svůj web, aby si ho mohly kamarádky stáhnout a také prohlédnout.

Nedopustila se Lucka něčeho nelegálního?

- A) Šlo o trestněprávní čin a Lucka za něj může být pohnána před soud a být odsouzena.
- B) No, asi by se to dělat nemělo, ale Luce za to nic nehrozí.
- C) Nedopustila, protože stažený software byl volně šiřitelný a Lucka film neukradla.
- D) Kdyby Lucka nezveřejnila video na webu, ale posílala jej na mobily kamarádek např. přes Bluetooth, bylo by vše v pořádku.

Poznámka k úloze

Problematika ochrany autorských práv a společenských souvislostí používání informačních technologií patří do povinné výbavy každého moderního občana.

Zdůvodnění správné odpovědi

Film, který se právě hraje v kinech, s velkou pravděpodobností není k dispozici v legálních kopiích, navíc je podezřelý formát filmu, jestliže se vejde na CD. Zde se patrně jedná o první porušení zákona.

Zálohování videa a převedení do formátu na svůj mobil je legální. Sdílení takovéto kopie, ať již zveřejněním na webu, nebo posláním na jiné mobily, je ovšem trestné. Jde o porušování autorských práv, protože se ke kopii filmu dostaly další osoby, které za něj neplatily. Nepomůže ani polehčující okolnost, že za tyto kopie Lucka nebrala žádné peníze. Není pravda, že Luce za porušení zákona nic nehrozí. Správná odpověď je A).

ZPRÁVY

Ústřední kolo 66. ročníku MO (kategorie A)

Uspořádáním ústředního kola 66. ročníku Matematické olympiády v kategoriích A a P byl pověřena Ústřední komise MO ČR Krajská komise MO v Libereckém kraji, která se tohoto úkolu ujala ve spolupráci s Technickou univerzitou v Liberci (TUL). Finále soutěže v kategoriích A i P se uskutečnilo v prostorách TUL v termínu 26. – 29. března 2017. Slavnostní zahájení soutěže proběhlo v neděli 26. března v prostorách TUL za přítomnosti představitelů Libereckého kraje, statutárního města Liberce, vedení TUL a dalších hostů z oblasti společenského života. Jednotu českých matematiků a fyziků zastupoval ředitel MÚ AV ČR RNDr. Jiří Rákosník, CSc.

Na základě jednotné koordinace úloh krajského (II.) kola v kategorii A pozvala Ústřední komise MO k účasti ve III. kole 44 nejlepších úspěšných řešitelů II. kola z celé České republiky, mezi nimi bylo 6 dívek. Na řešení obou trojic soutěžních úloh měli žáci již tradičně vyhrazeny po oba soutěžní dny, jimiž byly 27. a 28. březen, vždy 4,5 hodiny čistého času. Za každou úlohu mohli soutěžící získat nejvýše 7 bodů.

Liberečtí organizátoři ústředního kola připravili pro soutěžící i pro členy ústřední komise MO zajímavý doprovodný program. Účastníci soutěže nejvíce ocenili koncert souboru Spektrum (v pondělí večer) a dále společnou návštěvu technického parku iQLANDIA v Liberci – v úterý odpoledne po soutěži.

Ubytování všech soutěžících a členů ÚK MO bylo zajištěno v centru města, v libereckém Unihotelu. Vlastní soutěž pak po oba soutěžní dny proběhla v jedné z větších poslucháren TUL.

Vyhlášení výsledků soutěže a předání cen nejlepším řešitelům III. kola v kategorii A se uskutečnilo ve středu 29. března dopoledne opět v prostorách liberecké univerzity. Slavnostní akt proběhl za přítomnosti zástupců Libereckého kraje, TUL Liberec, členů ÚK MO a zástupců některých sponzorů soutěže (Precioza, ČEZ a dalších). Předseda ÚK MO – *doc. Jaromír Šimša* v závěrečném projevu poděkoval celému týmu organizátorů III. kola v kategorii A v čele s předsedou Krajské komise MO v Libereckém kraji – *PhDr. Milanem Cvrčkem, Ph.D.*, za kvalitní přípravu a zdařilý průběh celého ústředního kola 66. ročníku MO v kategorii A.

Závěrem uvádíme texty soutěžních úloh ústředního kola v kategorii A a dále přehled vítězů a úspěšných řešitelů 66. ročníku MO v kategorii A.

27. března 2017

1. Na hromádce leží 100 očíslovaných diamantů, z nichž 50 je pravých a 50 falešných. Pozvali jsme svérázného znalce, který jediný dovede rozpoznat, které jsou které. Pokaždé, když mu ukážeme nějaké tři diamanty, řekne čísla dvou z nich a (pravdivě) oznámí, zda jsou pravé oba, jeden, nebo žádný. Rozhodněte, zda můžeme zaručeně odhalit všechny pravé diamanty bez ohledu na to, jak znalec volí posuzované dvojice.

Michal Rolínek, Josef Tkadlec

2. Najděte všechny dvojice reálných čísel k, l takové, že nerovnost

$$ka^2 + lb^2 > c^2$$

platí pro délky stran a, b, c libovolného trojúhelníku.

Patrik Bak

3. Najděte všechny funkce $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že pro všechna reálná čísla x, y platí

$$f(x - xy) = f(x)y + (x - 1)^2 f(y).$$

Pavel Calábek

28. března 2017

4. Každé posloupnosti složené z n nul a n jedniček přiřadíme číslo, které je počtem maximálních úseků stejných číslic v ní. (Například posloupnost 00111001 má 4 takové úseky 00, 111, 00, 1.) Pro dané n sečteme všechna čísla přiřazena jednotlivým takovým posloupnostem. Dokažte, že výsledný součet je roven

$$(n+1) \binom{2n}{n}.$$

Patrik Bak

5. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC s průsečíkem výšek H . Osa úhlu BHC protíná stranu BC v bodě D . Označme postupně E a F obrazy bodu D v osových souměrnostech podle přímk AB a AC . Dokažte, že kružnice opsaná trojúhelníku AEF prochází středem G kružnicového oblouku BAC .

Patrik Bak

6. Je dáno nenulové celé číslo k . Dokažte, že rovnici

$$k = \frac{x^2 - xy + 2y^2}{x + y}$$

vyhovuje lichý počet uspořádaných dvojic celých čísel (x, y) , právě když k je dělitelné sedmi.

Patrik Bak

Nejúspěšnější řešitelé ústředního kola 66. ročníku MO v kategorii A:

Vítězové:

1. *Pavel Turek* (8/8, G, Olomouc-Hejčín) 42 b., 2. *Jan Petr* (8/8, GJK, Praha 6) 39 b., 3. *Filip Bialas* (8/8, G Opatov, Praha 4) 36 b., 4. *Daniil Koževnikov* (7/8, GJK, Praha 6) 34 b. 5. *Filip Svoboda* (3/4, G, Brno, Elgartova) 29 b., 6. *Pavel Hudec* (7/8, GJGJ., Praha 1) 27 b., 7. *Radek Olšák* (6/8, Menza G, Praha 6) 27 b. 8. *Martin Raška* (7/8, WG, Ostava-Poruba)

26 b., 9. *Jáchym Bártík* (8/8, G, Havlíčkův Brod) 25 b. 10. *Richard Hladík* (8/8, G, Mariánské Lázně) 24 b.

Úspěšní řešitelé:

11. *Ondřej Svoboda* (8/8, G, Brno, tř. Kpt. Jaroše) 23 b., 12. *Ondřej Motlíček* (8/8, G, Šumperk) 23 b., 13. *Tomáš Konečný* (8/8, GJVJ, České Budějovice) 22 b., 14. *Josef Minařík* (6/8, G, Brno, tř. Kpt. Jaroše) 22 b., 15. *Matěj Doležálek* (6/8, G, Humpolec) 22 b., 16. *Tomáš Perutka* (7/8, G, Brno, tř. Kpt. Jaroše) 21 b., 17. *Jiří Škrobánek* (7/8, WG, Ostava-Poruba) 21 b., 16. *Zuzana Urbanová* (3/4, GFXŠ, Liberec) 20 b., 19. *Filip Čermák* (3/4, MG, Opava) 19 b., 20. *Matěj Mezera* (4/4, G, Havlíčkův Brod) 19 b., 21. *Hedvika Ranošová* (7/8, G, Praha 4, Budějovická) 18 b.

V případě rovnosti bodů rozhodla o pořadí vítězů a úspěšných řešitelů pravidla uvedená v soutěžním řádu MO. Kompletní výsledkovou listinu můžete najít na oficiálních stránkách MO www.math.muni.cz/mo.

K účasti na výběrovém soustředění před 58. Mezinárodní MO (IMO), které se konalo na konci dubna v Kostelci nad Černými lesy, byli pozváni vítězové ústředního kola v kategorii A. Z nich pak bylo vybráno šestičlenné české reprezentační družstvo pro aktuální IMO, která se uskutečnila v první polovině července v Brazílii (Rio de Janeiro). Na tomto soustředění bylo vybráno také šestičlenné družstvo (sestavené z dalších úspěšných řešitelů a úspěšných účastníků ústředního kola – nematurantů) pro 11. ročník Středoevropské MO (MEMO), která konala koncem srpna 2017 v litevském hlavním městě – Vilnius.

Podrobné zprávy o účasti českých reprezentačních týmů na 58. IMO a na 11. MEMO najdete v této rubrice v následujících číslech našeho časopisu.

Jaroslav Švrček

Ústřední kolo 66. ročníku MO (kategorie P)

Ústřední kolo 66. ročníku Matematické olympiády kategorie P (programování) se konalo v Liberci ve dnech 29. – 31. 3. 2017. Pro kategorii P to byl její 32. ročník, v této nejmladší kategorii Matematické olympiády se soutěží od školního roku 1985/86. Letošní ústřední kolo MO výborně připravili a organizačně zajistili pracovníci Krajské komise MO v Liberci a Technické univerzity Liberec. V budovách univerzity bylo zajištěno ubytování a stravování všech účastníků, učebny pro vlastní soutěž, prostory pro zahájení i pro vyhlášení výsledků. Ústřední kolo kategorie P jako obvykle bezprostředně navázalo na kategorii A. Zajímavostí letošního ročníku byla skutečnost, že rekordních 17 soutěžících postoupilo do ústředního kola Matematické olympiády v obou kategoriích A a P a strávili tak v Liberci celý týden.

K účasti v ústředním kole MO-P bylo vybráno třicet nejlepších řešitelů krajských kol, z nichž se jeden předem omluvil. Soutěžilo zde tedy 29 nejlepších mladých programátorů z celé republiky. Z krajů měla největší zastoupení Praha s 10 řešiteli, ze škol mělo nejvíce soutěžících brněnské gymnázium na tř. Kpt. Jaroše, odkud přijelo pět studentů. Celkem 11 z 29 účastníků ústředního kola bylo z nematuritních ročníků.

Soutěž byla zahájena ve středu večer. Po krátkém přivítání se soutěžící seznámili s pravidly soutěže a dostali také nezbytné organizační pokyny. Poté následovala zajímavá přednáška zakladatele firmy ABRA Software *Ing. Jaroslava Řasy*, jak se v praxi vytváří software. Na základě vlastních zkušeností hovořil o tom, jak vzniká a funguje úspěšná softwarová firma. ABRA Software je významným sponzorem MO kategorie P, díky němuž jsme letos mohli poprvé uspořádat výběrové soustředění úspěšných řešitelů ústředního kola a také zorganizovat v Čechách přípravě

česko-polsko-slovenské soustředění vybraných reprezentantů před mezinárodními olympiádami v informatice.

Ve čtvrtek dopoledne proběhla teoretická část soutěže. Soutěžící v ní řešili tři úlohy zaměřené na návrh efektivního algoritmu. V této části soutěže se nepracuje na počítačích, soutěžící odevzdávají svoje řešení zpracovaná v písemné podobě. Jedna z teoretických úloh každoročně využívá nějaký netradiční výpočetní model, který připraví autoři úloh vždy pro všechna soutěžní kola příslušného ročníku Matematické olympiády. V 66. ročníku MO byl tímto modelem tzv. stromochod – prostředek pro řešení jisté skupiny úloh z teorie grafů.

Zatímco ve čtvrtek odpoledne měli soutěžící volno s možností navštívit známý liberecký vědecko-technický park iQLANDIA, organizátoři se věnovali přípravě počítačů a opravování odevzdaných řešení teoretických úloh. V podvečer pak ještě následovala návštěva počítačových učeben, kde si všichni mohli prakticky vyzkoušet práci na počítačích se soutěžním a vyhodnocovacím prostředím CMS, které se využívá v praktické části soutěže. Soutěžící k němu přistupují pomocí webového rozhraní, jehož prostřednictvím mohou nejen odevzdávat k vyhodnocení svá vypracovaná řešení soutěžních úloh, ale mohou také klást dotazy k úlohám a dozvídají se, jak byla odevzdaná řešení ohodnocena. Jedná se o stejné prostředí, jaké se používá i na mezinárodních olympiádách v informatice.

Druhý soutěžní den v pátek probíhal u počítačů. Soutěžící řešili tři praktické úlohy, v nichž je třeba napsat a odladit kompletní funkční program. Odevzdaná řešení se v průběhu soutěže okamžité automaticky vyhodnocují pomocí předem připravené sady testovacích dat. Při těchto testech se uplatňují časové limity na dobu výpočtu, což umožňuje rozlišit efektivitu zvoleného postupu a tím i kvalitu odevzdaného řešení. Každý soutěžící se ihned dozví

výsledky testů a má možnost svůj program opravit a znovu odevzdat, pokud nedosáhl očekávaného bodového zisku.

Při přípravě soutěžních úloh MO kategorie P se pravidelně střídají česká a slovenská strana, v Čechách a na Slovensku probíhá soutěž ve stejném termínu a se stejnými úlohami. Úlohy celého letošního ročníku připravili pracovníci a studenti z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Ti také na místě připravili soutěžní prostředí na počítačích, zajistili opravování odevzdaných řešení a zpracování výsledků.

Za každou soutěžní úlohu bylo možné dostat nejvýše 10 bodů, v celé soutěži tedy až 60 bodů. Tohoto výsledku nikdo nedosáhl, nejlepší řešitel získal 56 bodů. Podle počtu získaných bodů se stanovuje výsledné pořadí, přičemž vzájemné umístění řešitelů se stejným bodovým součtem je odvozeno na základě dalších pomocných pravidel. Úspěšnými řešiteli letošního ústředního kola MO kategorie P se stali soutěžící na 1. až 13. místě v celkovém pořadí, tedy všichni, kteří získali alespoň 30 bodů. Nejlepších šest z nich bylo vyhlášeno vítězi ústředního kola.

Výsledky ústředního kola 66. ročníku Matematické olympiády kategorie P:

Vítězové:

1. *Filip Bialas*, 8/8, G Opatov, Praha 4, 56 b., 2. *Václav Volhejn*, 8/8, GJK, Praha 6, 55 b., 3. *Jan Priessnitz*, 8/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 41 b., 4. *Martin Kurečka*, 7/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 37 b., 5. *Pavel Turek*, 8/8, G, Olomouc-Hejčín, 37 b., 6. *Richard Hladík*, 8/8, G a OA, Mariánské Lázně, 36 b.

Úspěšní řešitelé:

7. *Ronald Luc*, 8/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 34 b., 8. *Josef Minařík*, 6/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 34 b., 9. *Tomáš Konečný*, 8/8, G J. V. Jirsíka, České Budějovice, 34 b., 10. *Stanislav Lukeš*, 8/8, Gymnázium, Písnická, Praha 4, 33 b., 11. *Ja-*

kub Suchánek, 7/8, G Opatov, Praha 4, 33 b., 12. *Pavel Hudec*, 3/4, G J. Gutha-Jarkovského, Praha 1, 32 b., 13. *Radek Olšák*, 6/8, Mensa gymnázium, Praha 6, 30 b.

Na základě dosažených výsledků obdrželo dvanáct vybraných řešitelů pozvání na krátké výběrové soustředění, které se uskutečnilo ve dnech 7.–9. 4. 2017 na Matematicko-fyzikální fakultě UK v Praze. Byli to všichni soutěžící, kteří se umístili na prvních čtrnácti místech, s výjimkou dvou z nich, kteří překračují věkový limit potřebný k účasti na mezinárodní olympiádě v informatice. Na výběrovém soustředění proběhla další tři praktická soutěžní kola, program soustředění byl navíc doplněn přednáškami s rozborem všech řešených úloh.

V závěru výběrového soustředění byla jmenována dvě čtyčlenná reprezentační družstva pro obě mezinárodní olympiády v informatice. Na celosvětovou Mezinárodní olympiádu v informatice IOI vysíláme vždy naše nejúspěšnější řešitele. Její 29. ročník se bude konat na přelomu července a srpna 2017 v Teheránu. Na IOI pojedou soutěžit Filip Bialas, Richard Hladík, Jan Priessnitz a Jakub Suchánek.

Na středoevropské olympiádě v informatice CEOI nás pravidelně reprezentují mladší úspěšní řešitelé ústředního kola MO-P, kteří v příslušném roce ještě nebudou maturovat. Letos proběhne 24. ročník CEOI v první polovině července v Lublani. Na CEOI nás budou reprezentovat Martin Kurečka, Josef Minařík, Pavel Hudec a Danil Koževnikov.

Na <http://mo.mff.cuni.cz/> najdete podrobnější informace o průběhu celého 66. ročníku Matematické olympiády kategorie P, kompletní výsledkovou listinu, texty soutěžních úloh i jejich vzorová řešení. Na stejném místě se můžete seznámit i se staršími ročníky této soutěže a vždy také se všemi aktuálními informacemi.

Pavel Töpfer

6. česko–polsko–slovenská MO juniorů

V letošním roce se se uskutečnil v beskydském příhraničním rekreačním středisku Szczyrk již 6. ročník Česko–polsko–slovenské matematické olympiády juniorů CPS JMO). Soutěže, která se letos konala od 14. do 17. května, se tradičně účastní šestičlenná reprezentační družstva České republiky, Polska a Slovenska sestavená z žáků mladších 16 let (věkové to odpovídá naší kategorii C v MO). Vlastní soutěž měla tradičně dvě části – soutěž jednotlivců a následující den pak soutěž družstev. Podrobněji se o struktuře soutěže můžete dočíst např. v příspěvku věnovanému 5. ročníku CPS JMO, který byl publikován v uplynulém ročníku našeho časopisu – v čísle 4 (str. 246–255).

Definitivní složení šestičlenného českého týmu bylo stanoveno na výběrovém soustředění, které se uskutečnilo zhruba týden před soutěží v Karlově pod Pradědem. Zúčastnilo se ho 11 pozvaných žáků z celé republiky, a to na základě jejich výsledků v krajském kole kategorie C a po konzultaci s předsedy příslušných krajských komisí MO. České reprezentační družstvo pro soutěž tvořili tito žáci a záskyne: *Vojtěch David* z WG v Ostravě-Porubě, *Viktor Fukala* z GJK v Praze 6, *Karel Chwistek* ze ZŠ Otická v Opavě, *Adam Křivka* z BG v Brně, *Jakub Petr* z G GJK v Praze 6 a *Michaela Svatošová* z GMK v Bilovci. Vedoucími českého týmu byli doc. RNDr. *Jaromír Šimša*, CSc., z PřF MU v Brně a RNDr. *Jaroslav Švrček*, CSc., z PřF UP v Olomouci, kteří byli současně také členy mezinárodní jury.

V předešlých ročnících soutěže jednoznačně dominovali polští soutěžící. Projevila jejich větší zkušenost z celostátního kola Olympiady matematyczne juniorów (OMJ) Pro drtivou našich (i slovenských) žáků se jednalo o jejich první cenné zkušenosti v mezinárodní konkurenci. Je však potěšitelné, že naše družstvo proká-

zalo velmi dobrou kvalitu. Na velmi pěkném 4. místě skončil *Viktor Fukala* a na děleném 9. místě pak skončila *Michaela Svatošová*. *Karel Chwistek* byl navíc členem vítězného týmu v soutěži družstev.

Veškeré informace o soutěži, včetně řešení všech soutěžních úloh z prvních šesti ročníků CPS JMO můžete najít mj. na oficiálních stránkách polské Olympiady Matematyczne (<http://www.om.edu.pl>). O náročnosti soutěžních úloh se můžete přesvědčit v další části. Dlužno podotknout, že na přípravě úloh pro obě soutěže (jednotlivců i družstev) se vždy rovnoměrně podílejí všechny tři zúčastněné země. Za Českou republiku se v letošním ročníku soutěže na úlohách autorsky podíleli *Jaromír Šimša*, *Jaroslav Švrček* a *Libuše Hozová*.

Závěrem uvádíme na ukázkou texty všech letošních soutěžních úloh pro individuální soutěž.

Soutěž jednotlivců (15. 5. 2017)

1. Najděte největší celé číslo $n \geq 3$, pro které existuje n -místné číslo

$$\overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$$

s nenulovými číslicemi a_1 , a_2 a a_n , které je dělitelné číslem

$$\overline{a_2 a_3 \dots a_n}.$$

2. Je dán trojúhelník ABC , v němž

$$|AB| + |AC| = 3 \cdot |BC|.$$

Uvažujme takové body D a E , že $BCDA$ a $CBEA$ jsou rovnoběžníky. Označme F a G po řadě body na stranách AC a AB , pro něž platí

$$|AF| = |AG| = |BC|.$$

Dokažte, že přímky DF a EG se protínají na úsečce BC .

3. Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x , y platí nerovnost

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) \geq 2(xy - 1)(x + y).$$

Pro která celá čísla x , y nastane v této nerovnosti rovnost?

4. Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C a obvodem 2. Necht S značí střed kružnice vně připsané straně AB daného trojúhelníku a H značí průsečík výšek trojúhelníku ABS . Určete, jakou nejmenší délku může mít úsečka HS .
5. Do každého pole tabulky

$$(mn + 1) \times (mn + 1)$$

je vepsáno reálné číslo z uzavřeného intervalu $\langle 0,1 \rangle$ tak, že součet všech čísel vepsaných do polí každé podtabulky $n \times n$ je roven n . Určete, jaký je největší možný součet všech čísel v dané tabulce. Svou odpověď zdůvodněte.

Jaroslav Švrček

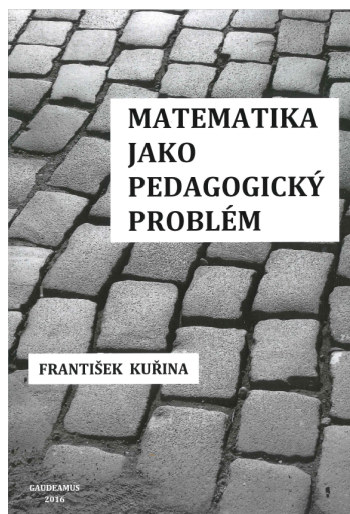
LITERATURA

Didaktické krédo Františka Kuřiny

V roce 2016 vyšla v hradeckém nakladatelství Gaudeamus kniha učitele a didaktika matematiky Františka Kuřiny *Matematika jako pedagogický problém*. Publikace má výmluvný podtitul *Mé didaktické krédo*. Autor se v ní ohlíží nejen za svou profesní dráhou, ale připomíná i řadu našich a zahraničních autorů, kteří různým způsobem ovlivnili didaktiku matematiky.

Jméno profesora Františka Kuřiny je učitelům matematiky dobře známo – nejen z řady jeho učebnic matematiky (MÚ AV ČR a Prometheus), ale i z mnoha jeho odborných publikací (monografií, článků v časopisech a sbornících), vystoupení a přednášek. Připomeňme na ukázkou alespoň nové rozšířené vydání dnes již kultovní knihy *Dítě, škola a matematika* (2015), napsané společně s prof. M. Hejným, *Podivuhodný svět elementární ma-*

tematiky (2006), na které se spolupodílel prof. Z. Půlpán, *Matematika a porozumění světu* (2009), kde stál v čele autorského kolektivu, podobně jako i v případě publikace *Matematická gramotnost a vyučování matematice* (2011). V posledních letech navázal na své samostatné práce z předchozích let knihami *Matematika a řešení úloh* (2011), *Elementární matematika a kultura* (2012) a právě touto nejnovější publikací *Matematika jako pedagogický problém*.



František Kuřina ve své poslední knize vyjadřuje osobní pohled na školní matematiku a její vyučování a objasňuje své představy o tom, jak by mělo dobré vyučování matematice v praxi školy vypadat. Hned v úvodu se zamýšlí nad otázkou, která učitele matematiky tíží po řadu desetiletí „Jak je možné, že značná část společnosti má k matematice záporný poměr?“

V kapitole nazvané *Má léta učednická*, se zmiňuje o několika osobách, dílech a institucích, které měly na jeho matematický vývoj vliv. Píše například: ... *Byl bych rád, aby kniha byla podnětem pro*

vás, případné čtenáře, abyste se zamysleli nad vlastní cestou k matematice, nad vašimi matematickými a pedagogickými setkáními, nad možnými způsoby, jak zlepšovat matematické vzdělávání v naší republice. Autor uvádí, že jeho učednická léta trvají od jeho narození až k současnosti. Jako důležité osoby, které jeho vývoj ovlivnily, uvádí své učitele Bohumila Bydžovského a Eduarda Čecha (snad nejvýznamnějšího českého matematika dvacátého století), zmiňuje ale i „množinové omyly“ didaktiky – tzv. „modernizaci vyučování matematice“. Věnuje se i dalším didaktickým problémům a snahám o jejich řešení. Kniha přináší i zajímavý historický pohled na didaktiku matematiky, který u nás doposud chyběl a nemá patrně obdoby. Sám autor v úvodu své knihy vzpomíná, jak toto bilancování započalo: *Před více než deseti lety, dne 16. 3. 2005, jsem měl na pražském didaktickém semináři přednášku o A. Z. Krygowské. V diskusi po této přednášce vystoupil Milan Hejný s výzvou, aby „pamětníci“ zhodnotili éru klasiků české didaktiky (Hruša, Vyšín, ...), a Naďa Vondrová se pak obrátila na mne s otázkou, zda hodlám reflektovat vývoj svých didaktických názorů, neboť v přednášce jsem upozornil, že Komenskému dopřáno nebylo, aby se za svým dílem kriticky ohlédl.*

Kapitola *Mé didaktické krédo* přináší ucelený pohled na myšlenky a závěry, které si František Kuřina za léta své učitelské praxe utvořil o didaktice matematiky. Uvádí dimenze poznávání světa, které jsou pro pochopení fungování učení a pro dobré vyučování nezbytné. Porovnává různé způsoby vyučování a vyučovací přístupy mezi póly ppp (pouhé předávání poznatků) a PPP (přirozený poznávací proces). Podrobně se věnuje kultivaci myšlení žáka i učitele. Zdůrazňuje důležitou roli vizualizace. Zamýšlí se i nad naléhavou otázkou tvorby kurikula.

Kniha prozrazuje čtyři autorovy zájmy – geometrii, didaktiku matematiky, fotografování, studium literatury odborné a četbu literatury krásné. Citace z literatury i publicistických článků, které autora ovlivnily a zajímavě ilustrují předchozí kapitoly jeho knihy, se navzájem prolínají ve čtvrté kapitole, nazvané *Má setkání*, s jeho fotografiemi dokumentujícími minulé setkání s významnými osobnostmi naší didaktiky, ale i jeho vidění geometrie v přírodě, technice, architektuře i kultuře.

V závěru knihy uvádí své didaktické krédo, krédo učitele matematiky druhé poloviny dvacátého století:

Podle mého přesvědčení by mělo vyučování matematice usilovat o dosažení těchto cílů:

- a) *Dovést všechny žáky na úroveň matematické gramotnosti potřebné pro život a další studium.*
- b) *Rozvinout matematickou kulturu nadaných žáků k prvním krokům tvořivosti.*
- c) *Pěstovat důležité psychologické funkce, zejména vnímání, soustředění, myšlení, citění.*
- d) *Kultivovat důležité společenské funkce, zejména odpovědnost, pracovitost, vytrvalost, kritičnost.*

Kniha je zakončena naléhavou výzvou: *Podarí se nám, aby každý žák školy orientovaný na přirozený poznávací proces vyzrál v prostředí realistického konstruktivismu za pomoci rodiny a spolupůsobení společnosti v dobrého občana, vzdělaného laika nebo dokonce znalce či experta? Pokusme se o to.*

Kniha *Matematika jako pedagogický problém* byla pokřtěna na semináři Matematika a společnost, pořádaném 28. června 2017 na Přírodovědecké fakultě Univerzity Hradec Králové k životnímu jubileu pana profesora. Seminář byl spojen s vernisáží výstavy fotografií Františka Kuřiny.

Jana Cachová

Příloha časopisu
MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA
Ročník 26 (2017), číslo 4

Úlohy I. kola (domácí část)
67. ročníku MO (kategorie P)

Úlohy P-I-1 a P-I-2 jsou praktické, vaším úkolem v nich je vytvořit a odladit efektivní program v jazyce Pascal, C nebo C++. Řešení těchto dvou úloh odevzdávejte ve formě zdrojového kódu přes webové rozhraní přístupné na stránce <http://mo.mff.cuni.cz/submit/>, kde také naleznete další informace. Odevzdaná řešení budou automaticky vyhodnocena pomocí připravených vstupních dat a výsledky vyhodnocení se dozvíte krátce po odevzdání. Pokud váš program nezíská plný počet 10 bodů, můžete své řešení opravit a znovu odevzdat.

Úlohy P-I-3 a P-I-4 jsou teoretické a skládají se z několika částí. Hodnocení jednotlivých částí je uvedeno přímo v zadání úlohy, celkem lze za každou úlohu získat až 10 bodů. Řešení úlohy P-I-3 bude obsahovat požadované výsledky, případně popis použitých algoritmů, zdůvodnění jejich správnosti a odhad časové a paměťové složitosti. Řešení úlohy P-I-4 bude popisovat, jak se sestrojí požadované funkce pomocí prostředků uvedených ve studijním textu. Řešení obou teoretických úloh odevzdávejte ve formě souboru typu PDF přes výše uvedené webové rozhraní.

Řešení všech úloh můžete odevzdávat do 15. listopadu 2017. Opravená řešení a seznam postupujících do krajského kola najdete na webových stránkách olympiády na adrese <http://mo.mff.cuni.cz/>, kde jsou také k dispozici další informace o kategorii P.

P-I-1 Trojice

Martin si vyrobil n kartiček a na každou napsal jedno přirozené číslo. Potom se postupně podíval na všechny možné (neuspořádané) trojice kartiček. Pro každou trojici spočítal součet jejich čísel a výsledek si zapsal na papír.

Soutěžní úloha

Je dáno přirozené číslo n a seznam čísel na kartičkách. Dále je dáno rozumně malé přirozené číslo k . Určete k -té nejmenší číslo zapsané na Martinově papíru – tedy k -tý nejmenší součet mezi všemi součty trojic čísel na kartičkách.

Pokud vznikne nějaký součet více různými způsoby, počítáme každý jeho výskyt zvlášť (viz první příklad).

Formát vstupu a výstupu

Program čte data ze standardního vstupu. Na prvním řádku vstupu jsou dvě přirozená čísla n a k . Na druhém řádku vstupu je n navzájem různých přirozených čísel $a_1, \dots, a_n$. Čísla jsou uspořádána od nejmenšího k největšímu.

Program vypíše na standardní výstup jediný řádek obsahující jedno číslo: k -tý nejmenší mezi všemi součty trojic.

Hodnocení

Váš program bude testován na deseti sadách testovacích vstupů, za každou můžete získat 1 bod.

Ve všech sadách platí $3 \leq n \leq 100\,000$, $1 \leq k \leq 1\,000\,000$, $k \leq \binom{n}{3}$ a $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n \leq 10^{12}$. Pozor, na uložení hodnot a_i použijte proměnné s dostatečným rozsahem!

V prvních třech sadách platí $n \leq 500$. V dalších třech sadách platí $n \leq 7\,000$.

Příklady

Vstup:	Výstup:
5 4	8
1 2 3 4 5	

Toto je všech 10 možných součtů: 6, 7, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 11, 12. Pro $k = 3$ i pro $k = 4$ je tedy správným výstupem číslo 8. Pro $k = 9$ by bylo správným výstupem číslo 11.

Vstup:	Výstup:
5 4	1110
1 10 100 1000 10000	

Tentokrát jsou všechny součty trojic navzájem různé.

P-I-2 Telenovela

V televizi vysílají novou telenovelu. Jakub by ji chtěl sledovat, ale má hodně práce. Ještě že všechny díly ve vysílání tak často opakuji. A tak

Jakub sedí, v jedné ruce má svůj diář, v druhé televizní program, a vymýšlí, na které díly se má vlastně dívat.

Při sledování telenovely platí následující zásady:

- Úplně na začátku je třeba vidět první díl, v němž se seznámíme s hlavními postavami.
- Není nutné vidět všechny díly. Všechno důležité se opakuje, takže můžeme libovolné množství dílů vynechat.
- Je ale důležité sledovat díly ve správném pořadí. Jakmile shlédnete nějaký díl telenovely mimo pořadí (tedy nejprve pozdější a potom teprve dřívější díl), už nikdy se neorientujete v tom, co se vlastně kdy stalo.
- Žádný díl nechceme sledovat dvakrát.
- Úplně na konci je třeba vidět poslední díl, ve kterém přijde happyend.

Soutěžní úloha

Je dána posloupnost $a_1, \dots, a_n$ čísel těch dílů telenovely, na jejichž vysílání by se Jakub mohl dívat. Některá čísla se mohou v posloupnosti opakovat (když má Jakub čas sledovat více vysílání téže epizody), některá mohou v posloupnosti chybět (když Jakub nemá čas sledovat ani jedno vysílání příslušné epizody). Zjistěte, zda může Jakub shlédnout telenovelu tak, aby dodržel výše uvedené zásady. Pokud ano, určete také, kolik nejvýše dílů může vidět.

Formát vstupu a výstupu

Program čte data ze standardního vstupu. Na prvním řádku vstupu jsou dvě celá čísla n (počet dílů, které Jakub může sledovat) a e (počet všech epizod telenovely). Epizody jsou očíslovány od 1 do e . Na druhém řádku je posloupnost n celých čísel $a_1, \dots, a_n$: čísla epizod v chronologickém pořadí, jak po sobě následují ve vysílání.

Program vypíše na standardní výstup jediný řádek a na něm jedno číslo: maximální počet dílů, které může Jakub vidět při správném sledování telenovely. Jestliže telenovelu nemůže sledovat správným způsobem, program vypíše číslo -1 .

Hodnocení

Váš program bude testován s deseti sadami testovacích vstupů, za každou můžete získat 1 bod.

Ve všech sadách platí $1 \leq n \leq 100\,000$, $2 \leq e \leq 10^9$ a pro každé i platí $1 \leq a_i \leq e$.

Různé sady mají různě velkou (postupně rostoucí) maximální hodnotu n . Speciálně v druhé sadě je $n = 10$, ve třetí sadě je $n = 14$, v páté sadě je $n = 100$, v sedmé sadě je $n = 7\,000$.

V sadách s lichým číslem platí, že v každém testovacím vstupu jsou všechna a_i navzájem různá.

Příklady

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
5 50	2
33 1 50 20 47	

Jakub se podívá na první a poté na poslední epizodu.

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
8 50	3
1 3 3 3 3 50 1 4	

Jakub se podívá na epizodu 1, na jedno ze čtyř vysílání epizody 3 a nakonec na epizodu 50.

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
6 50	-1
47 4 6 3 5 1	

Když se Jakub podívá na první epizodu, už nestihne žádnou další. Navíc nikdy neuvidí poslední epizodu (s číslem 50).

<i>Vstup:</i>	<i>Výstup:</i>
6 6	5
1 2 4 3 5 6	

Z epizod 3 a 4 si Jakub vybere jednu, ostatní uvidí všechny.

P-I-3 Převrácení prefixů

Ve všech částech této úlohy máme na začátku pole $A[1..n]$, v němž je uložena nějaká permutace čísel od 1 do n . Jinými slovy, každé z čísel od 1 do n se v poli A nachází právě jednou.

Obsah pole A můžeme měnit pouze pomocí operace $flip(k)$. Hodnota k přitom musí být z rozmezí od 1 do n (včetně). Provedením této operace převrátíme pořadí prvních k prvků v poli A .

Např. z pole $A = (1, 2, 3, 5, 4)$ dostaneme operací $flip(3)$ pole $(3, 2, 1, 5, 4)$.

Část A (2 body) Nalezněte algoritmus s polynomiální časovou složitostí, který libovolné vstupní pole A uspořádá.

Část B (2 body) David se rozhodl, že bude stále opakovat operaci $flip(A[1])$. V každém kroku se tedy podívá na první prvek pole A a následně převrátí pořadí tolika prvků, jakou hodnotu měl první prvek pole. Když tedy například na začátku pole bude číslo 4, provede $flip(4)$.

Davidovi se zdá, že ať začne s jakýmkoliv polem, vždy se časem stane, že se na začátek pole dostane číslo 1. Tím samozřejmě všechna zábava končí, protože od tohoto okamžiku už bude David opakovat jenom operaci $flip(1)$, která obsah pole nijak nemění.

Ověřte tuto hypotézu pro $n = 10$. Zjistěte, pro kterou z $10!$ počátečních permutací provede David nejvíce kroků, než se na začátek pole dostane jednička.

Část C (3 body) Pro $n = 47$ určete nějakou permutaci, pro kterou David provede velké množství kroků, než poprvé nastane $A[1] = 1$.

Za permutaci, pro kterou vykoná aspoň 500 kroků, dostanete 1 bod.

Za permutaci, pro kterou vykoná aspoň 650 kroků, dostanete 2 body.

Za permutaci, pro kterou vykoná aspoň 750 kroků, dostanete 3 body.

Část D (3 body) Platí skutečně, že se pro každou hodnotu n a pro každou permutaci čísel v poli A dostane časem na začátek pole A číslo 1? Dokažte toto tvrzení, nebo nalezněte protipříklad.

P-I-4 Stavebnice funkcí

K této úloze se vztahuje studijní text uvedený na následujících stranách. Doporučujeme vám nejprve prostudovat studijní text a až potom se vrátit k samotným soutěžním úlohám.

Jednotlivé části úlohy lze řešit v libovolném pořadí. Požadovanou funkci můžete sestrojit „ve více krocích“ – tedy nejprve si vytvořit nějaké jednodušší pomocné funkce.

Část A (2 body)

Sestrojte funkci zzz^3 : funkci se třemi vstupy, která vždy vrátí na výstupu nulu. Formálně řečeno, musí platit

$$\forall a, b, c: zzz^3(a, b, c) = 0.$$

Část B (2 body)

Máte k dispozici nějakou funkci φ^4 , ale nevíte nic o tom, co počítá. Sestrojte funkci ψ^3 definovanou následovně:

$$\forall a, b, c: \psi^3(a, b, c) = \varphi^4(b, a, c, a)$$

Část C (2 body)

Sestrojte násobení: binární funkci mul takovou, že pro všechna čísla a , b platí $mul(a, b) = a \cdot b$.

Část D (2 body)

Sestrojte předchůdce: unární funkci p takovou, že $p(0) = 0$ (neboť záporná čísla nemáme) a $\forall n: p(n+1) = n$.

Část E (2 body)

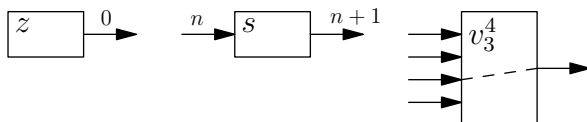
Sestrojte odčítání, resp. funkci, která se co nejvíce podobá odčítání. Přesně řečeno, sestrojte binární funkci sub takovou, že pro $x > y$ je $sub(x, y) = x - y$ a pro $x \leq y$ je $sub(x, y) = 0$.

Studijní text

Tomáš dostal k narozeninám zvláštní dárek: stavebnici funkcí. Když balíček rozbalil, našel v něm hned několik různých věcí. Nejprve uviděl tři sáčky s hotovými funkcemi. Každá funkce je malá krabička, která má několik vstupů a právě jeden výstup.

- V prvním sáčku byla jediná funkce. Jmenovala se z (z anglického „zero“, tedy nula), neměla žádné vstupy a na výstupu vracela stále číslo 0.
- Také ve druhém sáčku byla jen jedna funkce. Tato se nazývala s (z anglického „successor“, tedy následník). Měla jeden vstup a jeden výstup. Když na vstupu dostala číslo n , vrátila nám na výstupu číslo $n + 1$.
- Třetí sáček byl o něco plnější – bylo v něm nekonečně mnoho funkcí. Pro každé k a n (takové, že $1 \leq k \leq n$) tam byla funkce v_k^n („vyber k -tý z n vstupů“), která měla n vstupů a na výstup vždy vrátila tu hodnotu, kterou dostala na svém k -tém vstupu.

Na obrázku jsou znázorněny funkce z , s a v_3^4 .



Zbytek balíčku obsahoval dva přístroje, které zjevně slouží k výrobě nových funkcí. Na jednom z nich byl nápis *Kompozitor*, na druhém *Cyklovač*. Každý z přístrojů funguje tak, že dovnitř vložíme ve správném pořadí nějaké funkce, zatočíme klikou a vypadne nám nová funkce. Ta je vhodně

poskládána z funkcí, které jsme do přístroje vložili. Než si podrobněji popíšeme fungování Kompozitoru a Cyklovače, potřebujeme si o našich funkcích něco říci formálněji.

V této úloze považujeme nulu za přirozené číslo. Přirozená čísla pro nás tedy tvoří množinu $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

Všechny funkce, s nimiž budeme pracovat, budou definovány na celém oboru přirozených čísel. Na vstupu budeme tedy funkci zadávat přirozená čísla a pro každý možný vstup nám funkce vrátí na výstupu jedno přirozené číslo.

Počet vstupů funkce se nazývá *arita*. Například funkce s jedním vstupem se nazývá *unární*, funkce se dvěma vstupy *binární* atd. Funkce v_2^7 má aritu 7. Funkce z má aritu 0. Aritu funkce budeme někdy explicitně zapisovat jako horní index. Mohli bychom tedy například říci, že v prvním sáčku byla funkce z^0 a ve druhém funkce s^1 . U vybíracích funkcí v_k^n musíme aritu uvádět vždy, jelikož třeba v_1^4 a v_1^7 jsou dvě různé funkce.

Jakmile nějakou funkci vytvoříme, máme navždy k dispozici libovolné množství jejích kopií. Speciálně platí, že když funkci použijeme při výrobě jiné, složitější funkce, původní funkci tím neztratíme.

Kompozitor

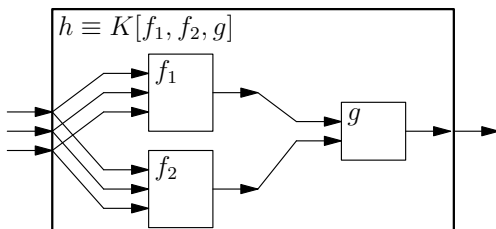
Kompozitor umí funkce skládat (v běžném matematickém smyslu tohoto slova). Musíme ovšem dávat pozor na správné arity funkcí. Použití Kompozitoru se skládá z následujících kroků:

1. Zvolíme si aritu $a \geq 0$ funkce, kterou chceme vytvořit.
2. Zvolíme si funkci g^b (tedy funkci g s nějakou aritou b , třeba i jinou než a), kterou použijeme ve druhé fázi výpočtu. Hodnota b musí být kladná – jinými slovy, funkce g musí mít aspoň jeden vstup.
3. Zvolíme si b funkcí $f_1^a, \dots, f_b^a$, které použijeme v první fázi výpočtu.
4. Zatočíme klikou na Kompozitoru a vypadne nám z něj nová funkce h definovaná následujícím pseudokódem:

```
def h ( x_1, ..., x_a ) :
    tmp_1 = f_1 ( x_1, ..., x_a )
    tmp_2 = f_2 ( x_1, ..., x_a )
    ...
    tmp_b = f_b ( x_1, ..., x_a )
    return g ( tmp_1, ..., tmp_b )
```

Jak vidíte, funkce h vezme a vstupů, které dostala. Pomocí funkcí f_1 až f_b z nich vypočítá b pomocných hodnot. Nakonec pomocí funkce g

spočítá z pomocných hodnot výstup celé funkce h .



Na obrázku je graficky znázorněna funkce vyrobená Kompozitorem pro $a = 3$ a $b = 2$.

Cyklovač

Cyklovač umí provádět for-cykly. Také při jeho použití musíme dbát na správné arity funkcí a pořadí jejich parametrů. Správné použití Cyklovače vypadá takto:

1. Zvolíme si aritu $a \geq 1$ funkce, kterou chceme vytvořit. Prvním parametrem této funkce (označíme ho x) bude speciální proměnná, která určuje, kolikrát se má for-cyklus provést. Ostatní parametry (označíme je $y_1, \dots, y_{a-1}$) budou zůstatvat beze změny.
2. Zvolíme si funkci f^{a-1} , jejímž provedením bude výpočet začínat.
3. Zvolíme si funkci g^{a+1} , která počítá, co se stane při jedné iteraci cyklu. Funkce g má $a + 1$ vstupů: všechny proměnné, které bude mít i výsledná funkce, a navíc ještě hodnotu, která byla výstupem předchozí iterace cyklu.
4. Zatočíme klikou na Cyklovači a vypadne nám z něj nová funkce h definovaná následujícím pseudokódem:

```
def h ( x, y_1, ..., y_{a-1} ):
    tmp = f ( y_1, ..., y_{a-1} )
    for i = 0 to x-1:
        tmp = g ( i, y_1, ..., y_{a-1}, tmp )
    return tmp
```

Výpočet tedy začne tím, že funkcí f spočítáme (z ostatních parametrů) výstup pro $x = 0$. Z něho potom funkcí g vypočítáme výstup pro $x = 1$, z něj opět funkcí g výstup pro $x = 2$ a tak dále až po požadovanou hodnotu prvního parametru.

Značení

Rovnost dvou funkcí budeme zapisovat symbolem $\equiv$. Zápis $f \equiv g$ tedy znamená, že funkce f a g mají stejnou aritu a na každém vstupu dávají stejný výstup.

Funkci, která vznikne Kompozitorem z funkcí $f_1, \dots, f_b$ a g , budeme označovat $K[f_1, \dots, f_b, g]$.

Funkci, která vznikne Cyklovačem z funkcí f a g , budeme značit $C[f, g]$.

Příklad 1

Pojďme se nyní společně podívat na to, jak si Tomáš začal vytvářet nové funkce. Pěknou jednoduchou funkcí je například identita: unární funkce i taková, že pro každé n je $i(n) = n$. Víte, jak ji vyrobit?

To byla triková otázka. Identitu vytvářet nepotřebujeme, dostali jsme ji ve třetím sáčku. Identitou je totiž funkce v_1^1 . Můžeme proto psát $i \equiv v_1^1$.

Příklad 2

Vyrobíme si funkci j^0 : konstantní funkci, která nemá žádný vstup a na výstupu vrací hodnotu 1.

Tuto funkci vytvoříme Kompozitorem. V prvním kroku použijeme funkci z , která nemá žádný vstup a na výstupu vrátí 0. Tuto 0 potom „pošleme dále“ do funkce s , která ji zvýší na 1.

Dostáváme tedy $j^0 \equiv K[z, s]$.

Příklad 3

Unární funkci *plus3*, která svůj jediný vstup zvýší o 3, získáme například jako $K[K[s, s], s]$. Nejprve si tedy vytvoříme funkci $K[s, s]$, která svůj vstup zvýší o 2, a tuto funkci potom opět vložíme do Kompozitoru s další funkcí s .

Příklad 4

Nyní si ukážeme, jak si Tomáš může vyrobit sčítání – tedy binární funkci *add* takovou, že

$$\forall x, y : add(x, y) = x + y.$$

Základním pozorováním je, že sčítání je vlastně opakované použití funkce „+1“, tedy následníka. Výpočet $x + y$ si můžeme zformulovat takto: „začni s hodnotou y a potom na ni x -krát použij funkci s “. Vypadá to jako cyklus, takže na výrobu sčítání budeme chtít použít Cyklovač.

Podívejme se na pseudokód funkce, kterou vytvořil Cyklovač (s tím, že si ho už upravíme konkrétně na funkci se dvěma vstupů).

```

def add(x,y):
    tmp = f(y)
    for i = 0 to x-1:
        tmp = g(i,y,tmp)
    return tmp

```

Jaké funkce f a g potřebujeme vložit do Cyklovače, když chceme dostat funkci pro sčítání?

Funkce f má jednoduše vrátit hodnotu y , kterou dostala na vstupu – takže f bude identita.

Funkce g má v každé iteraci cyklu vzít starou hodnotu (uloženou v proměnné `tmp`) a zvýšit ji použitím funkce s . Potřebujeme tedy funkci se třemi vstupy, která první dvě vstupní hodnoty ignoruje, na třetí použije funkci s a vrátí výsledek této operace. Takovou funkci sice ještě nemáme, ale umíme si ji snadno vytvořit Kompozitorem: je to funkce $K[v_1^3, s]$.

Dohromady tedy dostáváme

$$add \equiv C[v_1^1, K[v_1^3, s]].$$

Příklad 5

Další jednoduchou funkcí je unární konstantní nula, tedy funkce zz^1 , která má jeden vstup a na výstupu vždy vrací nulu. (Zapsáno formálně: $\forall n: zz^1(n) = 0$.)

Než si ukážeme, jak zz^1 vyrobit, poznamenejme, že zz^1 a z^0 (což je funkce z , kterou jsme dostali v prvním sáčku) jsou dvě různé funkce.

Zdálo by se, že funkci zz^1 půjde nějak vyrobit z funkce z^0 pomocí Kompozitoru. Jenže jak? Kdybychom použili funkci z^0 v prvním kroku, tak bez ohledu na to, jakou funkci použijeme ve druhém kroku, určitě získáme funkci s aritou 0. V druhém kroku funkci z^0 použít nesmíme, neboť funkce použitá v druhém kroku musí mít kladnou aritu.

Přes Kompozitor tedy cesta nevede. Ukážeme si ale, že funkci zz^1 dokážeme vytvořit pomocí Cyklovače. Nejprve se opět podíváme, jak to vypadá, když chceme pomocí Cyklovače vyrobit unární funkci. My dodáme funkce f^0 a g^2 a Cyklovač nám z nich sestaví funkci h^1 definovanou následovně:

```

def h(x):
    tmp = f()
    for i = 0 to x-1:
        tmp = g(i,tmp)
    return tmp

```

Jak zvolíme funkce f a g , aby funkce h pro každý vstup vracela nulu? Zjevně musíme zvolit $f \equiv z^0$, aby bylo $h(0) = 0$. Za funkci g můžeme jednoduše vzít $g \equiv v_2^2$. Tím se z příkazu `tmp = g(i,tmp)` stane příkaz `tmp = tmp`, a proto v proměnné `tmp` zůstane stále nula bez ohledu na hodnotu x .

Touto poměrně umělou konstrukcí jsme si tedy ukázali, že funkci zz^1 můžeme sestrojit jako $C[z, v_2^2]$.