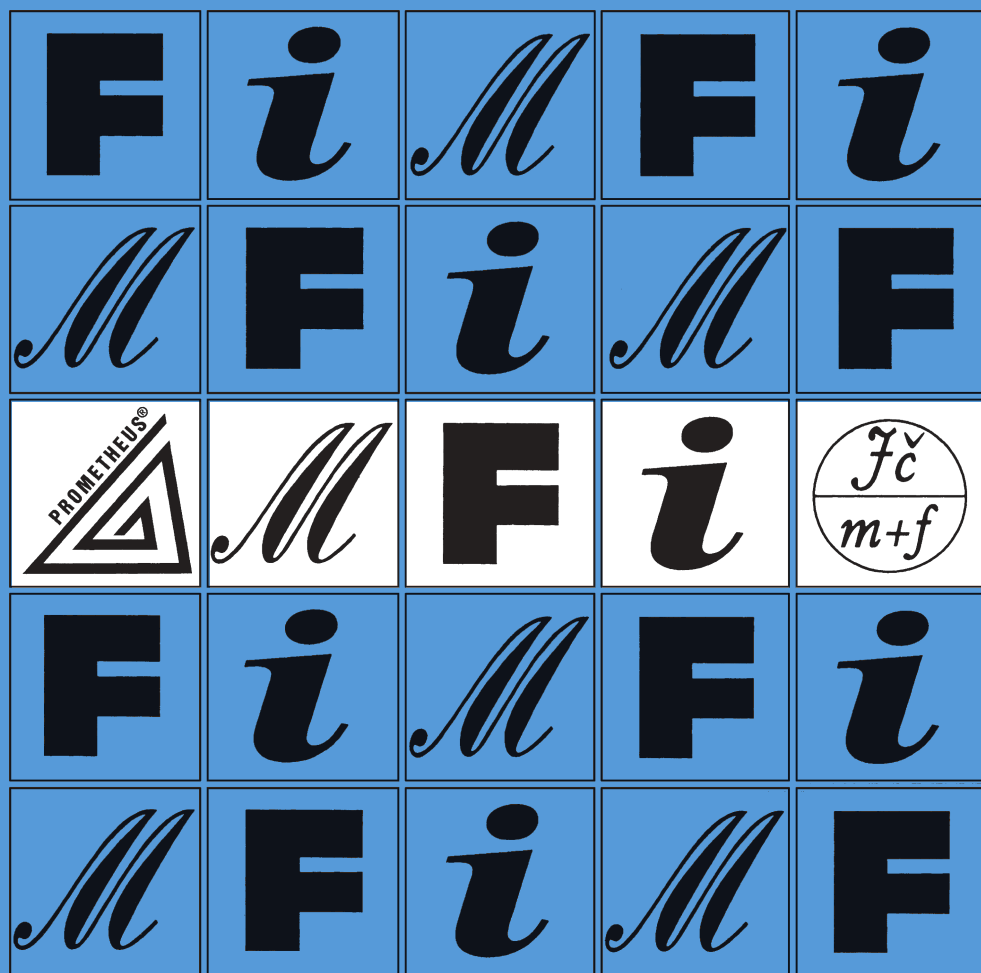


MATEMATIKA 2 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách

Ročník XXVII (2018), číslo 2

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Oldřich Lepil – vedoucí redaktor a redaktor pro fyziku, Jaroslav Švrček – redaktor pro matematiku, Eduard Bartl – redaktor pro informatiku, Lukáš Richterek – redaktor WWW stránek

Redakční rada:

Pavel Calábek, Eduard Bartl, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Štěpán Hubálovský, Růžena Kolářová, Miluše Lachmannová, Pavel Leischner, Dana Mandíková, Oldřich Odvárko, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Emanuel Svoboda, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel Töpfer, Bohumil Vybíral

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc. E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>M. Štěpánová:</i> Metrické vlastnosti hvězdnicových mnohoúhelníků	81
<i>Z. Vrba:</i> Zlatý řez v jedné úloze 67. MO	90
Zajímavé matematické úlohy	96

FYZIKA

<i>Č. Kodejška, J. Říha, S. Ganci:</i> Experimentální ověření rovnováhy atmosférického tlaku a hydrostatického tlaku ve válci	99
<i>D. Mandíková:</i> Zkoumáme ohřívání a chladnutí	110
<i>E. Svoboda:</i> Dekadické a binární předpony používané ve fyzice a ve výpočetní technice	122
<i>B. Vybíral:</i> Praemium Bohemiae 2017 ve zlatě	126
<i>R. Polma:</i> 50 let Mezinárodní fyzikální olympiády (1967–2017)	134

INFORMATIKA

<i>P. Töpfer:</i> Mosty	139
<i>I. Nagyová:</i> Jak počítal první programovatelný počítač?	149

ZPRÁVY A INFORMACE

<i>L. Richterek:</i> Celostátní kolo FO 2018	158
--	-----

Metrické vlastnosti hvězdicových mnohoúhelníků

MARTINA ŠTĚPÁNOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V minulém čísle tohoto časopisu jsme se v článku [1] věnovali základním otázkám, které se váží k problematice hvězdicových mnohoúhelníků. Vůbec jsme se však nezabývali jejich metrickými vlastnostmi. Tento rest odčiníme na následujících stranách.

Přesnou definici hvězdicového n -úhelníku lze nalézt ve zmíněném textu. Zjednodušeně řečeno, *hvězdicový n -úhelník* $\{n, k\}$, kde k a n jsou přirozená čísla, $n \geq 5$, $2 \leq k < \frac{n}{2}$, vznikne takto: uvažujeme n bodů pravidelně rozmístěných na (pomyslné) kružnici a každý z nich spojíme úsečkou s jeho k -tým „sousedem“, počítáme-li body po směru hodinových ručiček. Za hvězdicový n -úhelník přitom nepovažujeme sjednocení uvedených úseček, ale část roviny, kterou ohraničí. Výchozí body nazýváme *vrcholy hvězdicového n -úhelníku*, posun z bodu na bod následující *krokem* (mezi spojenými body tedy musíme vykonat k kroků). Pokud bychom připustili $k = 1$, lze tímto způsobem získat konvexní pravidelný n -úhelník, který budeme značit $\{n, 1\}$.

Velikosti úhlů

Hvězdicový mnohoúhelník je vhodným objektem pro procvičování pojmů středový a obvodový úhel. Pomocí vztahu mezi těmito úhly příslušnými oblouku kružnice opsané hvězdicovému mnohoúhelníku $\{n, k\}$, $k \geq 2$, snadno vypočítáme velikost vnitřního úhlu φ_{nk} při jeho vrcholu (obr. 1).

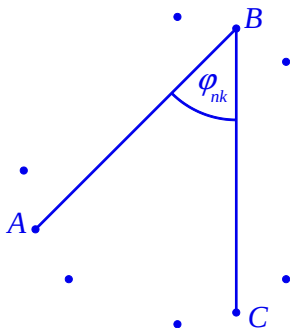
Z kontextu bude vždy zřejmé, zda mluvíme o úhlu, nebo o jeho velikosti, proto budeme v obou případech používat stejné označení, a to malá písmena řecké abecedy.

Nechť A , B a C jsou takové vrcholy hvězdicového mnohoúhelníku $\{n, k\}$, že počet kroků mezi body A , B a také mezi body B , C je k (obr. 1). Potom počet kroků mezi body C , A je $n - 2k$ a konvexní středový úhel příslušný oblouku s krajními body A , C má velikost $(n - 2k) \cdot \frac{360^\circ}{n}$. Pro obvodový úhel φ_{nk} proto platí

$$\varphi_{nk} = (n - 2k) \cdot \frac{180^\circ}{n}. \quad (1)$$

Součet velikostí vnitřních úhlů při vrcholech hvězdicového n -úhelníku je tedy

$$n \cdot (n - 2k) \cdot \frac{180^\circ}{n} = (n - 2k) \cdot 180^\circ.$$



Obr. 1 Vnitřní úhel φ_{nk} při vrcholu n -úhelníku $\{n, k\}$, $k \geq 2$

Uvedený postup lze použít i pro vnitřní úhly pravidelného n -úhelníku $\{n, 1\}$ (mezi body C a A je $n - 2$ kroků), a platí proto následující tvrzení:

Věta

Součet velikostí vnitřních úhlů při vrcholech n -úhelníku $\{n, k\}$ je pro libovolné $k \geq 1$ roven

$$(n - 2k) \cdot 180^\circ.$$

Vypočítejme velikosti vnitřních úhlů útvarů, jimiž je pokryta plocha libovolného n -úhelníku $\{n, k\}$, $k \geq 1$. Uvažujme úhly α_n , β_n , γ_n pravidelného n -úhelníku $\{n, 1\}$ podle obr. 2.

Zřejmě

$$\alpha_n = \frac{360^\circ}{n}, \quad \beta_n = \frac{180^\circ - \alpha_n}{2} = \frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{n}}{2} = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n},$$

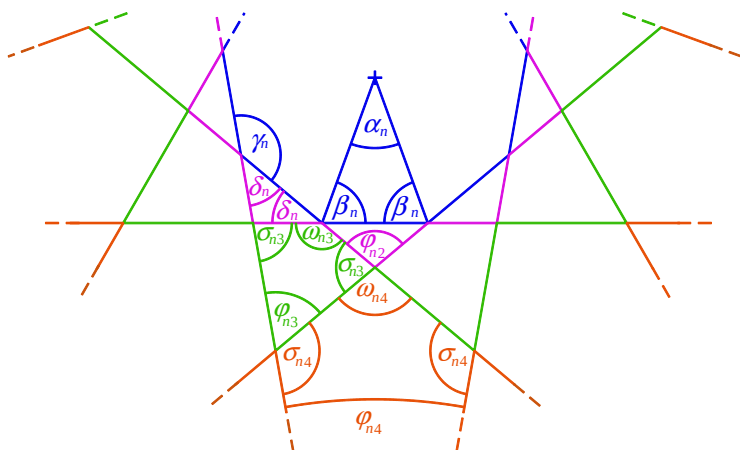
$$\gamma_n = 2\beta_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$

Dále určíme velikosti vnitřních úhlů rovnoramenných trojúhelníků, které vzniknou protažením stran pravidelného n -úhelníku $\{n, 1\}$ a které tedy tvoří „cípy“ hvězdicového n -úhelníku $\{n, 2\}$. Vnitřní úhly při vrcholech n -úhelníku $\{n, 2\}$ označme ve shodě s dříve zavedenou symbolikou φ_{n2} a dvojice shodných úhlů při základnách uvažovaných rovnoramenných trojúhelníků označme δ_n (obr. 2). Potom

$$\delta_n = 180^\circ - \gamma_n = 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n}\right) = \frac{360^\circ}{n} = \alpha_n$$

a

$$\varphi_{n2} = 180^\circ - 2\delta_n = 180^\circ - 2 \cdot \frac{360^\circ}{n} = 180^\circ - \frac{720^\circ}{n}.$$



Obr. 2 Úhly n -úhelníků $\{n, k\}$

Postupným dalším protahováním stran vznikají hvězdicové mnohoúhelníky $\{n, k\}$, $k \geq 3$, jejichž „cípy“ jsou tvořeny deltoidy. Jeden z vnitřních úhlů každého z deltoidů je φ_{nk} , jemu protilehlý necht' je ω_{nk} , zbývající dva shodné úhly necht' jsou σ_{nk} . Potom je jistě

$$\omega_{n3} = 180^\circ - \delta_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$$

a

$$\sigma_{n3} = 180^\circ - \varphi_{n2} = 180^\circ - \left(180^\circ - \frac{720^\circ}{n}\right) = \frac{720^\circ}{n}.$$

Pokud jsou vyjádřeny velikosti úhlů φ_{n2} , $\delta_n = \alpha_n$ a k němu vedlejšího úhlu ω_{n3} , je výpočet velikostí zbývajících úhlů velmi snadný, stačí použít následující vzorce:

$$\sigma_{nk} = 180^\circ - \varphi_{n,k-1}, \quad k \geq 3, \quad (2)$$

$$\omega_{nk} = 180^\circ - \sigma_{n,k-1} \quad \text{nebo} \quad \omega_{nk} = \varphi_{n,k-2}, \quad k \geq 4, \quad (3)$$

$$\varphi_{nk} = 360^\circ - 2\sigma_{nk} - \omega_{nk}, \quad k \geq 3. \quad (4)$$

Dosažením rovností (2) a (3) do vztahu (4) získáme jiná vyjádření velikosti úhlu φ_{nk} , $k \geq 4$:

$$\varphi_{nk} = 360^\circ - 2(180^\circ - \varphi_{n,k-1}) - (180^\circ - \sigma_{n,k-1}) = 2\varphi_{n,k-1} + \sigma_{n,k-1} - 180^\circ,$$

resp.

$$\varphi_{nk} = 360^\circ - 2(180^\circ - \varphi_{n,k-1}) - \varphi_{n,k-2} = 2\varphi_{n,k-1} - \varphi_{n,k-2}.$$

Poslední vztah je rekurentním vyjádřením velikosti vnitřního úhlu při vrcholu hvězdicového mnohoúhelníku $\{n, k\}$, $k \geq 4$, odvozené z velikosti vnitřních úhlů při vrcholech hvězdicových mnohoúhelníků předchozích dvou řádů. Připomeňme, že velikost úhlu φ_{nk} bychom mohli vypočítat také využitím vzorce (1).

Obvody mnohoúhelníků $\{n, k\}$

Věnujme se nyní obvodům n -úhelníků $\{n, k\}$. Délku strany pravidelného n -úhelníku $\{n, 1\}$ označme a_n a délku úsečky, která je nejkratší spojnici vrcholu hvězdicového n -úhelníku $\{n, k\}$ s vrcholem n -úhelníku $\{n, k-1\}$, $k \geq 2$, označme a_{nk} (obr. 3). Jestliže O_{nk} je obvod n -úhelníku $\{n, k\}$, potom platí

$$O_{n1} = na_n \quad \text{a} \quad O_{nk} = 2na_{nk}, \quad k \geq 2.$$

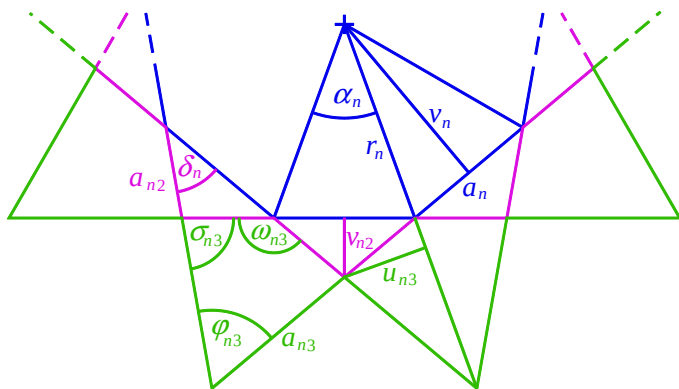
Vyjádríme obvody O_{nk} pro $k = 2$ a $k = 3$ v závislosti na délce a_n . Pokud chceme získat závislost obvodu O_{nk} na poloměru r_n kružnice opsané pravidelnému n -úhelníku $\{n, 1\}$, odvodíme ze vztahů

$$\sin \frac{\alpha_n}{2} = \frac{\frac{a_n}{2}}{r_n}, \quad \frac{\alpha_n}{2} = \frac{180^\circ}{n}$$

závislost

$$a_n = 2r_n \sin \frac{180^\circ}{n},$$

kterou do dále získaných výsledků za a_n dosadíme.



Obr. 3 Používané značení

Nejprve vyjádříme závislost délky a_{n2} na délce a_n . Jelikož

$$\cos \delta_n = \frac{\frac{a_n}{2}}{a_{n2}} \quad \text{a} \quad \delta_n = \frac{360^\circ}{n},$$

je

$$a_{n2} = \frac{a_n}{2 \cos \frac{360^\circ}{n}}. \quad (5)$$

Odtud vyplývá

$$O_{n2} = 2na_{n2} = \frac{na_n}{\cos \frac{360^\circ}{n}}.$$

Nyní vyjádříme délku a_{n3} v závislosti na délce a_n a následně vypočítáme obvod O_{n3} . Délku poloviny vedlejší úhlopříčky deltoidu, který tvoří „cíp“ hvězdicového n -úhelníku $\{n, 3\}$, označme u_{n3} (obr. 3). Potom

$$\sin \frac{\omega_{n3}}{2} = \frac{u_{n3}}{a_{n2}}, \quad \text{kde} \quad \omega_{n3} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n},$$

a proto je s přihlédnutím k rovnosti (5) a vztahu mezi funkcemi sinus a kosinus

$$u_{n3} = \frac{a_n \sin \left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n} \right)}{2 \cos \frac{360^\circ}{n}} = \frac{a_n \cos \frac{180^\circ}{n}}{2 \cos \frac{360^\circ}{n}}. \quad (6)$$

Dále platí

$$\sin \frac{\varphi_{n3}}{2} = \frac{u_{n3}}{a_{n3}},$$

a tedy

$$a_{n3} = \frac{u_{n3}}{\sin \frac{\varphi_{n3}}{2}}. \quad (7)$$

Jelikož je podle (1)

$$\varphi_{n3} = (n - 2 \cdot 3) \cdot \frac{180^\circ}{n} = 180^\circ - \frac{1080^\circ}{n}, \quad (8)$$

získáme dosazením (6) a (8) do rovnosti (7) a užitím vztahu mezi funkcemi sinus a kosinus

$$a_{n3} = \frac{a_n \cos \frac{180^\circ}{n}}{2 \cos \frac{360^\circ}{n} \sin \left(90^\circ - \frac{540^\circ}{n} \right)} = \frac{a_n \cos \frac{180^\circ}{n}}{2 \cos \frac{360^\circ}{n} \cos \frac{540^\circ}{n}}. \quad (9)$$

Nyní je vyjádření obvodu O_{n3} v závislosti na a_n trivialita:

$$O_{n3} = 2na_{n3} = \frac{na_n \cos \frac{180^\circ}{n}}{\cos \frac{360^\circ}{n} \cos \frac{540^\circ}{n}}.$$

Obsahy mnohoúhelníků $\{n, k\}$

Nakonec vyjádříme obsahy S_{n1} , S_{n2} a S_{n3} mnohoúhelníků $\{n, k\}$ pro $k = 1, 2, 3$.

Jestliže v_n značí vzdálenost středu kružnice opsané pravidelnému n -úhelníku a strany tohoto n -úhelníku (obr. 3), je

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha_n}{2} = \frac{\frac{a_n}{2}}{v_n}.$$

Odtud vyplývá

$$v_n = \frac{a_n \operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n}}{2},$$

a proto je obsah S_{n1} pravidelného n -úhelníku $\{n, 1\}$

$$S_{n1} = n \cdot \frac{a_n v_n}{2} = \frac{na_n^2 \operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n}}{4}. \quad (10)$$

Značí-li v_{n2} vzdálenost vrcholu hvězdicového n -úhelníku $\{n, 2\}$ od nejbližší strany pravidelného n -úhelníku $\{n, 1\}$ (obr. 3), je obsah S_{n2} n -úhelníku $\{n, 2\}$

$$S_{n2} = S_{n1} + n \cdot \frac{a_n v_{n2}}{2}. \quad (11)$$

Ze vztahů

$$\operatorname{tg} \delta_n = \frac{v_{n2}}{\frac{a_n}{2}} \quad \text{a} \quad \delta_n = \frac{360^\circ}{n}$$

plyne

$$v_{n2} = \frac{a_n}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{n},$$

což spolu se vztahy (10) a (11) implikuje

$$\begin{aligned} S_{n2} &= \frac{na_n^2 \operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n}}{4} + \frac{na_n \frac{a_n}{2} \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{n}}{2} = \\ &= \frac{na_n^2}{4} \left(\operatorname{cotg} \frac{180^\circ}{n} + \operatorname{tg} \frac{360^\circ}{n} \right). \quad (12) \end{aligned}$$

Obsah S_{n3} hvězdicového mnohoúhelníku $\{n, 3\}$ je součtem obsahu S_{n2} mnohoúhelníku $\{n, 2\}$ a obsahů n deltoidů, jejichž strany mají délky a_{n2} a a_{n3} . Tyto deltoidy jsou svými hlavními úhlopříčkami rozděleny na shodné trojúhelníky a obsah S_t každého z nich je

$$S_t = \frac{1}{2} a_{n2} a_{n3} \sin \sigma_{n3} = \frac{1}{2} a_{n2} a_{n3} \sin \frac{720^\circ}{n}. \quad (13)$$

Vzhledem k (12), (13), (5) a (9) je obsah n -úhelníku $\{n, 3\}$

$$\begin{aligned} S_{n3} &= S_{n2} + 2nS_t = S_{n2} + na_{n2}a_{n3} \sin \frac{720^\circ}{n} = \\ &= \frac{na_n^2}{4} \left(\cotg \frac{180^\circ}{n} + \tg \frac{360^\circ}{n} \right) + \\ &\quad + n \cdot \frac{a_n}{2 \cos \frac{360^\circ}{n}} \cdot \frac{a_n \cos \frac{180^\circ}{n}}{2 \cos \frac{360^\circ}{n} \cos \frac{540^\circ}{n}} \cdot \sin \frac{720^\circ}{n}. \end{aligned}$$

Tento vztah dále zjednodušíme. Použijeme přitom opakovaně vzorec pro sinus dvojnásobného úhlu, hodnotu $\frac{540^\circ}{n}$ vyjádříme jako součet $\frac{360^\circ}{n} + \frac{180^\circ}{n}$ a aplikujeme součtový vzorec pro funkci kosinus:

$$\begin{aligned} S_{n3} &= \frac{na_n^2}{4} \left(\cotg \frac{180^\circ}{n} + \tg \frac{360^\circ}{n} + \frac{\cos \frac{180^\circ}{n} \cdot 2 \sin \frac{360^\circ}{n} \cos \frac{360^\circ}{n}}{\cos^2 \frac{360^\circ}{n} \cos \left(\frac{360^\circ}{n} + \frac{180^\circ}{n} \right)} \right) = \\ &= \frac{na_n^2}{4} \left(\cotg \frac{180^\circ}{n} + \tg \frac{360^\circ}{n} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos \frac{180^\circ}{n} \cdot 2 \sin \frac{360^\circ}{n}}{\cos \frac{360^\circ}{n} \left(\cos \frac{360^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n} - \sin \frac{360^\circ}{n} \sin \frac{180^\circ}{n} \right)} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{na_n^2}{4} \left(\cotg \frac{180^\circ}{n} + \tg \frac{360^\circ}{n} + \right. \\
&\quad \left. + \tg \frac{360^\circ}{n} \cdot \frac{2 \cos \frac{180^\circ}{n}}{\cos \frac{360^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n} - 2 \sin \frac{180^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n} \sin \frac{180^\circ}{n}} \right) = \\
&= \frac{na_n^2}{4} \left[\cotg \frac{180^\circ}{n} + \tg \frac{360^\circ}{n} \left(1 + \frac{2}{\cos \frac{360^\circ}{n} - 2 \sin^2 \frac{180^\circ}{n}} \right) \right].
\end{aligned}$$

Závěr

Domníváme se, že výše uvedené vztahy zvládnou odvodit i nadaní středoškolsí studenti. Při výpočtech si procvičí především vztahy mezi velikostmi různých úhlů a zopakují poznatky z goniometrie.

Literatura

- [1] Štěpánová, M.: Hvězdicové mnohoúhelníky. Matematika–fyzika–informatika, roč. 27 (2018), č. 1, s. 13–22.

Zlatý řez v jedné úloze 67. MO

ZBYNĚK VRBA

Gymnázium Český Krumlov

Tento příspěvek je určen především učitelům matematiky na středních školách, kteří se podílejí na přípravě svých žáků na matematické soutěže, zejména pak na Matematickou olympiádu (MO). Jeho cílem je poukázat na neočekávanou souvislost jedné z úloh domácí části I. kola v kategorii B aktuálního 67. ročníku MO s tzv. *zlatým řezem*. Při samostatném řešení nebo studiu úloh domácí části I. kola MO si učitel také často uvědomí další souvislosti a může se tak lépe připravit na případné žákovské (řešitelské) dotazy k jednotlivým úlohám. Vlastní učitelova řešení těchto úloh se mnohdy liší (to je mj. i zkušenost autora článku) od řešení žákovských, popř. i řešení vzorových (autorských). Při tomto způsobu seznámení se s problematikou soutěžních úloh se mnohdy učitelé podaří objevit další dimenze zadané úlohy. V letošním 67. ročníku MO tuto úlohu sehrává např. soutěžní úloha B–I–3 (3. úloha domácí části I. kola):

Nechť $ABCD$ je kosočtverec s kratší úhlopříčkou BD a E vnitřní bod jeho strany CD , který leží na kružnici opsané trojúhelníku ABD . Určete velikost jeho vnitřního úhlu při vrcholu A , mají-li kružnice opsané trojúhelníkům ACD a BCE právě jeden společný bod (obr. 1).

Vzhledem k tomu, že cílem této určovací úlohy je nalézt velikost jistého úhlu, je zřejmé, že pokud úloze vyhovuje některý kosočtverec, pak jí vyhovují i všechny kosočtverce s ním podobné. Můžeme tak bez újmy na obecnosti předpokládat, že strana kosočtverce $ABCD$ má délku 1. Dále předpokládejme, že existuje řešení, které vyhovuje zadání, tj. existují dvě kružnice k a l podle zadání, které mají právě jeden společný bod. Tímto bodem je podle zadání vrchol kosočtverce C . Kružnice k , l v něm proto mají vnitřní dotyk.

Dokážeme nejprve následující tvrzení:

Lemma

Nechť $k(S, r_1)$, $l(R, r_2)$, $r_1 > r_2$ jsou kružnice, které mají vnitřní dotyk v bodě T . Potom existuje stejnolehlost $K(T, r_2/r_1)$, v níž je kružnice l obrazem kružnice k .



91

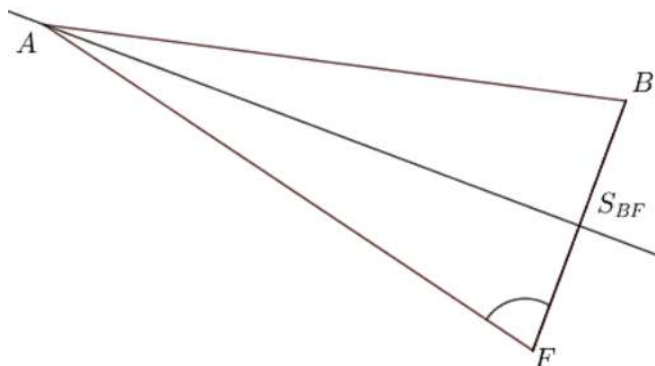
a úhly u vrcholů F a C jsou v tomto lichoběžníku shodné. Trojúhelník FAB je tak shodný s trojúhelníkem CBE (podle věty *sus*). Úhly při vrcholech C a F mají stejnou velikost jako hledaný úhel. Velikost těchto úhlů vyjádříme z trojúhelníků FAB a CBE pomocí funkce kosinus.

Nyní se zaměříme na trojúhelník BFA (obr. 3). Tento trojúhelník je rovnoramenný, a proto jeho těžnice k základně je zároveň jeho výškou. Úsečka BF má tedy délku

$$|BF| = |CF| - |BC| = \kappa - 1.$$

Označme ve shodě s obrázkem S_{BF} střed základny BF . Trojúhelník AFS_{BF} je pravoúhlý, tudíž platí

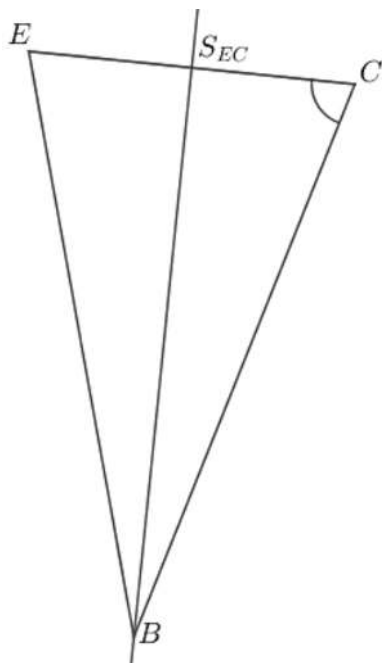
$$\cos |\sphericalangle S_{BF}FA| = \frac{|FS_{BF}|}{|AF|} = \frac{\frac{1}{2}|BF|}{1} = \frac{\kappa - 1}{2}$$



Obr. 3

V trojúhelníku BCE (obr. 4) má úhel při vrcholu C stejnou velikost, jako úhel při vrcholu F v trojúhelníku BFA . Úsečka CE má délku $1/\kappa$, její střed označme S_{EC} . V pravoúhlém trojúhelníku BCS_{EC} tak pro vnitřní úhel při vrcholu C platí

$$\cos |\sphericalangle BCS_{EC}| = \frac{\frac{1}{2\kappa}}{|BC|} = \frac{1}{2\kappa}$$



Obr. 4

Z trojúhelníku BFA (obr. 3) známe hodnotu

$$\cos |\sphericalangle S_{BF}FA| = \frac{\kappa - 1}{2}.$$

Zbývá tedy vyřešit rovnici

$$\frac{1}{2\kappa} = \frac{\kappa - 1}{2}.$$

Protože $\kappa \neq 0$, je tato rovnice ekvivalentní s kvadratickou rovnicí

$$\kappa^2 - \kappa - 1 = 0$$

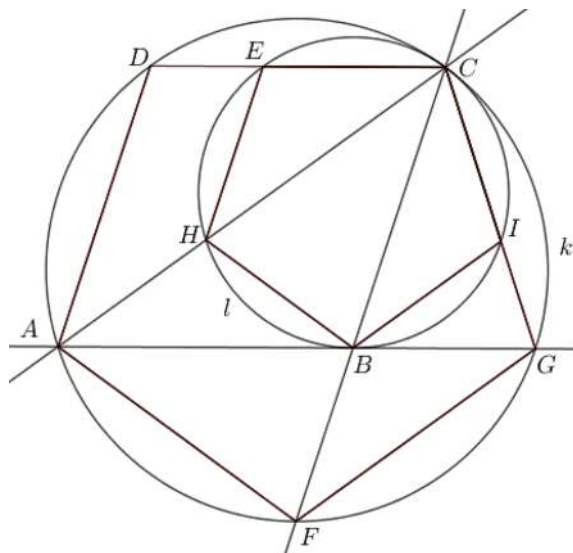
jejímž kladným kořenem, který hledáme, je pouze

$$\kappa = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Pro hodnotu $\cos |\sphericalangle S_{BF}FA|$ tedy platí vztah

$$\cos |\angle S_{BF}FA| = \frac{1}{2\kappa} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Funkce kosinus nabývá hodnotu $\frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$ pro ostrý úhel 72° . V úloze se tak nečekaně objevuje poměr zlatého řezu.



Obr. 5

Závěr

Uvedené zjištění vede k dalšímu zajímavému důsledku:

Průsečík přímky AB s kružnicí k (označme ho například G) doplní lichoběžník $AFCD$ na pravidelný pětiúhelník $AFGCD$ s opsanou kružnicí k (obr. 5). Bod B je totiž průsečíkem jeho úhlopříček AG a CF . Pro bod G tedy platí $|CG| = |FG| = |AB| = 1$. Vzhledem k tomu, že bod E je v této stejnolehlosti vzorem bodu D , existuje pravidelný pětiúhelník, který má stranu délky CE a jeho vrcholy leží na kružnici k . Bod B je jeho vrcholem. Dalším z jeho vrcholů je průsečík H úhlopříčky AC s kružnicí l a také průsečík I přímky CG s kružnicí l .

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 241 a 242 můžete zaslat nejpozději do 20. 3. 2019 na adresu: Redakce časopisu MFI, 1. června 2018, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\TeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz.

Úloha 243

Petr chce na kalkulačce, která umí jen sčítat, odčítat, násobit a dělit, vypočítat $\log_{50} 140$. Jak má postupovat, když zná čísla $a = \log_{20} 40$ a $b = \log_8 35$?

Stanislav Trávníček

Úloha 244

Najdete všechny uspořádané dvojice přirozených čísel, jejichž nejmenší společný násobek je o 2018 větší než jejich největší společný dělitel.

Aleš Kobza

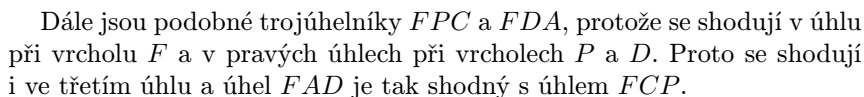
Dále uvádíme řešení úloh 239 a 240, jejichž zadání najdete v závěrečném (pátém) čísle minulého (25.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 239

Označme M střed základny AB rovnoramenného trojúhelníku ABC a F patu kolmice z bodu M na stranu BC . Přímka ℓ je kolmá k AF a prochází bodem C . Dokažte, že přímka ℓ prochází středem úsečky MF .

Robert Geretschläger (Graz)

Řešení podle Jozefa Mészárose. Označme P průsečík přímky ℓ s přímkou AF . Uvažujme dále patu D kolmice z bodu A na přímku BC . Trojúhelníky ABD a MBF jsou podobné, protože se shodují ve vnitřním úhlu při vrcholu B a v pravých úhlech při vrcholech D a F . Jelikož je M střed strany AB , je tak F střed úsečky BD . Úsečka MF je výškou pravoúhlého trojúhelníku BMC , tedy trojúhelník MBF je dále podobný s trojúhelníkem CMF . Trojúhelník ABD je tak podobný s trojúhelníkem CMF .



Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Jozef Mészáros* z Jelky a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

Úloha 240

Jozef Mészáros

Nechť rozklad čísla n na součin prvočísel má tvar

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_s^{\alpha_s},$$

kde p_i jsou navzájem různá prvočísla a α_i přirozená čísla. Počet dělitelů čísla n je pak roven

$$\tau(n) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_s).$$

Číslo $\tau(n)$ bude přitom liché, právě když všechna čísla α_i budou sudá, tedy právě když n bude druhou mocninou přirozeného čísla.

Protože

$$44^2 = 1936 < 2017 < 2025 = 45^2,$$

bude součet všech čísel na kartách obrácených lícem nahoru po 2017 krocích roven

$$1^2 + 2^2 + \dots + 44^2 = \frac{44 \cdot 45 \cdot 89}{6} = 29\,370.$$

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Martin Raszyk* z ETH Zürich.

Pavel Calábek

Experimentální ověření rovnováhy atmosférického tlaku a hydrostatického tlaku ve válci

ČENĚK KODEJŠKA¹ – JAN ŘÍHA¹ – SALVATORE GANCI²

¹Katedra experimentální fyziky, Přírodovědecká fakulta Univerzity Palackého

²Studio di Catalogazione e Conservazione Strumenti Scientifici, Casarza Ligure, GE, Italy

Úvod

Ačkoliv moderní zahraniční literatura [1, 2] popisuje hydrostatický paradox způsobem známým i v našich českých učebnicích fyziky [3], tedy jako jev, kdy různé množství kapaliny v nádobách různých tvarů působí při stejné výšce kapaliny v každé nádobě na stejnou plochu dna nádoby stejnou hydrostatickou silou, někteří autoři, spojují název tohoto jevu i s tlakovou silou vzduchu působící zespodu na papírovou destičku uzavírající kapalinu ve válcové nádobě [4].

Experiment s převrácenou sklenicí zcela naplněnou vodou, zdola uzavřenou listem papíru, patří k efektním motivačním experimentům učitele fyziky. Žáky zcela zaujme skutečnost, že voda, ač je těžší než vzduch, ze sklenice nevyteče (obr. 1a). Obvyklé vysvětlení tohoto jevu spočívá v porovnání velikosti hydrostatického tlaku sloupce vody v nádobě ($p_h \doteq 10^2$ Pa) a atmosférického tlaku působícího vně na papír ($p_a \doteq 10^5$ Pa).

Většina učitelů fyziky ale z vlastní zkušenosti dobře ví, že experiment lze úspěšně provést i v případě, že nádoba bude naplněna obarvenou vodou pouze částečně, aniž by došlo k jejímu vytlití, obr. 1b) a 1c). Vysvětlení rovnováhy mezi atmosférickým tlakem působícím vně nádoby a tlakovými

poměry uvnitř nádoby už není zcela triviální, protože uvnitř nádoby se sčítá hydrostatický tlak sloupce kapaliny s tlakem vzduchu v prostoru nad kapalinou.

Zásadní otázka tedy zní: Jak velký je tento tlak a jak lze tedy v tomto případě vysvětlit, že nedojde k odtržení papírové destičky ode dna nádoby? Žáci středních škol i vysokoškolští studenti fyziky jsou totiž přesvědčeni o tom, že tlak vzduchu nad kapalinou je roven tlaku atmosférickému. Druhá kardinální otázka je, zda můžeme tyto teoretické předpoklady experimentálně ověřit.



Obr. 1 Zcela plná, poloplná a téměř prázdná nádoba při demonstraci tlaku vzduchu

Teoretické odvození vztahu pro tlak vzduchu uzavřeného v nádobě

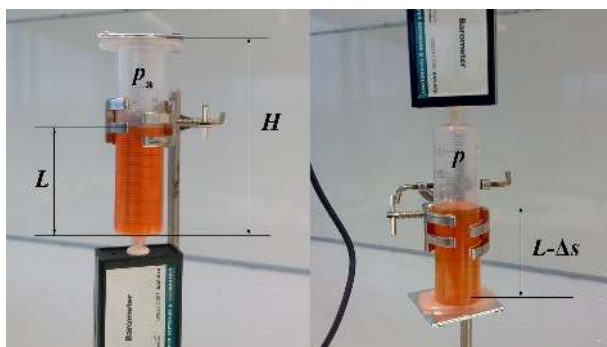
Někteří autoři se při vysvětlení tohoto fenoménu opírají o skutečnost, že zejména u běžného listu papíru (obr. 2d) dojde tlakem kapaliny k jeho deformaci, což se projeví snížením tlaku nad hladinou [5], [6, s. 12]. Nicméně, jakkoli je toto vysvětlení správné v tomto konkrétním případě, nemůže obstát při použití tvrdé papírové destičky impregnované hydrofobním nanesprejem (obr. 2a), obalené hliníkovou fólií (obr. 2b) nebo použijeme-li plastové víčko (obr. 2c). Jiní autoři vysvětlují nepatrné zvětšení prostoru nad kapalinou působením tíhy sloupce kapaliny [7, 8].

Ať již je příčinou změny objemu vzduchu nad kapalinou cokoliv, bez této změny by nebylo možné tento jev pozorovat, jak bude ukázáno v následujících odstavcích textu.



Obr. 2 Různé typy destiček: a) impregnovaný tuhý papír, b) tuhý papír obalený hliníkovou fólií, c) plastové víčko d) list papíru

Obr. 3 ukazuje dvě situace. Vlevo je nádoba postavená na své dno a shora přikrytá destičkou. Tlak vzduchu uvnitř nádoby je v tomto případě roven atmosférickému tlaku a výška kapaliny v nádobě je L . V pravé části obrázku je situace opačná. Nádoba je převrácená dnem vzhůru a výška sloupce kapaliny L se zmenší o velice malou výšku Δs . Značení bylo zachováno v souladu s [4]. Výška kapaliny je tedy rovna $(L - \Delta s)$. V této teoretické části nebudeme rozebírat příčiny tohoto poklesu a vysvětlení ponecháme do části 3.



Obr. 3 Zvýšení objemu a snížení tlaku p (vpravo) oproti atmosférickému tlaku p_a (vlevo)

Podmínky rovnováhy v situaci na obr. 1b) plynou ze dvou rovnic: rovnice (1) pro izotermický děj a rovnosti atmosférického tlaku vně nádoby a součtu tlaků uvnitř nádoby (2):

$$p_a V = p(V + S\Delta s) \quad (1)$$

$$p_a = p + (L - \Delta s)\varrho g \quad (2)$$

Označíme-li výšku nádoby H a za předpokladu stejného průřezu celé nádoby, kdy platí $V = Sh$, můžeme vztah (1) přepsat na následující vztah:

$$p_a(H - L) = p(H - L + \Delta s) \quad (3)$$

Dosazením do rovnice (2) za tlak p vyjádřený z rovnice (3) a po úpravách získáme následující vztah pro Δs :

$$\Delta^2 s + \left(\frac{p_a}{\varrho g} + H - 2L \right) \Delta s - L(H - L) = 0 \quad (4)$$

Protože výraz $\Delta s \doteq 10^{-4}$ m, můžeme výraz $\Delta^2 s \doteq 10^{-8}$ m² oproti ostatním členům rovnice zanedbat a získáme výsledný vztah (5), který odvodil Ganci v [3]:

$$\Delta s = \frac{L(H - L)}{\frac{p_a}{\varrho g} + H - 2L} \quad (5)$$

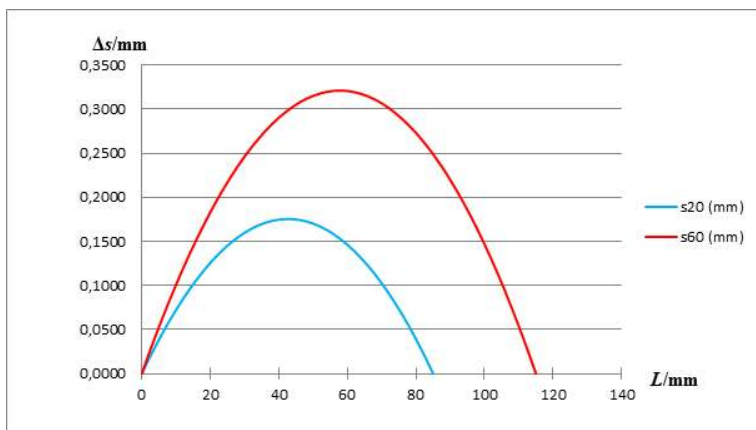
Jak ukazuje obr. 4, je teoretická závislost Δs na výšce L kvadratická funkce s maximem pro $L = H/2$, přičemž $H = 85$ mm pro modrou křivku, resp. $H = 115$ mm pro červenou.

Pokud z rovnic (2) a (3) vyjádříme závislost tlaku vzduchu p v prostoru nad kapalinou na výšce L , získáme následující rovnici:

$$p^2 - (p_a - H\varrho g)p - \varrho g p_a(H - L) = 0 \quad (6)$$

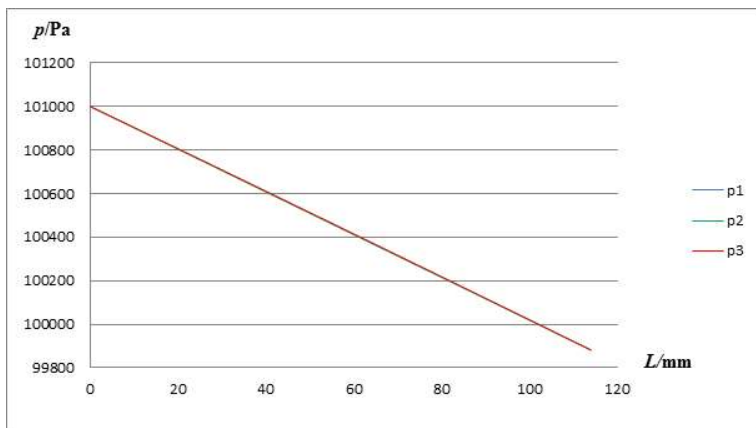
Rovnici (6) můžeme přepsat do tvaru (7), který odpovídá vrcholové rovnici paraboly:

$$\left(p - \frac{p_a - H\varrho g}{2} \right)^2 = -\varrho g p_a \left[L - \left(H + \frac{(p_a - H\varrho g)^2}{4\varrho g p_a} \right) \right] \quad (7)$$



Obr. 4 Graf závislosti poklesu kapaliny Δs na výšce kapalinového sloupce L pro nádobu o objemu 20 ml (modrá křivka) a nádobu o objemu 60 ml (červená křivka) podle vztahu (5)

Vrchol V této paraboly má souřadnice $V \left[H + \frac{(p_a - H \rho g)^2}{4 \rho g p_a}; \frac{p_a - H \rho g}{2} \right]$, konkrétně po dosazení hodnot je to $V[2,632 \text{ m}; 49\,936 \text{ Pa}]$, což je mimo interval měřených hodnot. Měřené hodnoty se pak ve skutečnosti nachází v intervalu, kde lze průběh funkce považovat za lineární, jak je vidět na obr. 5.



Obr. 5 Teoretická závislost tlaku p vzduchu nad kapalinou na výšce sloupce kapaliny L

Exaktní řešení kvadratické rovnice (6) dává mocninovou závislost tlaku p na výšce L , jak plyne z následujícího vztahu:

$$p = \frac{\sqrt{p_a^2 + 2H\varrho gp_a - 4\varrho gp_a L + (H\varrho g)^2} + p_a - H\varrho g}{2} \quad (8)$$

Vztah (8) může být upraven a zjednodušen za předpokladu, že platí $(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx$ pro $x \ll 1$, na lineární tvar (9)

$$p \cong p_a - \varrho g L + \frac{1}{4} \frac{(H\varrho g)^2}{p_a}, \quad (9)$$

který koresponduje s rovnicí (2). Porovnáním obou rovnic zjistíme, že platí vztah

$$\Delta s_{\max} = \frac{1}{4} \frac{H^2 \varrho g}{p_a}, \quad (10)$$

odpovídající vztahu (5) pro $L = H/2$. Jak si lze povšimnout, vztah (10) pro pokles hladiny Δs je nezávislý na výšce kapalinového sloupce L a hodnotou odpovídá maximálnímu možnému poklesu Δs .

Obr. 5 znázorňuje grafickou závislost tlaku p_1 na výšce L podle rovnice (2), do které je za Δs dosazeno ze vztahu (5), tlaku p_2 podle vztahu podle rovnice (2) se zanedbáním Δs ($\Delta s = 0$) a tlaku p_3 podle vztahu (8). Vidíme, že všechny křivky jsou téměř identické. Výpočtem bylo ověřeno, že hodnoty tlaku p se v těchto třech modelech liší maximálně v jednotkách pascalů. Výpočty byly provedeny pro tyto konstanty: $p_a = 101\,000$ Pa, $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $\varrho = 1\,000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $H = 0,115 \text{ m}$.

Experimentální ověření a naměřená data

Základní otázkou při návrhu experimentu bylo, jakým způsobem můžeme vůbec změřit tlak v uzavřené nádobě nad hladinou kapaliny. K měření jsme nakonec využili tlakoměr od firmy Vernier a plastové injekční stříkačky o objemu 20 ml a 60 ml. Hlavním úkolem bylo ověřit teoretické závislosti popsané ve výše uvedených rovnicích (5) a (8), zjistit, zda je měření významně ovlivněno průměrem nádoby a jaká existují limitní omezení při použití různých typů destiček o různých hmotnostech.

Použití injekčních stříkaček různého objemu a průměru vyplynulo nakonec přirozeně ze skutečnosti, že tyto stříkačky mají válcový tvar a dají se připojit přímo k měřiči tlaku, jak je vidět na obr. 6.



Obr. 6 Připojení injekční stříkačky k tlakoměru Vernier

Výšku hladiny kapaliny ve stříkačce (dále jen v nádobě) jsme určovali pomocí posuvného měřidla s přesností na jednotky mm. Celkové uspořádání experimentu je na obr. 7 s detailem destičky v pravém horním rohu obrázku.

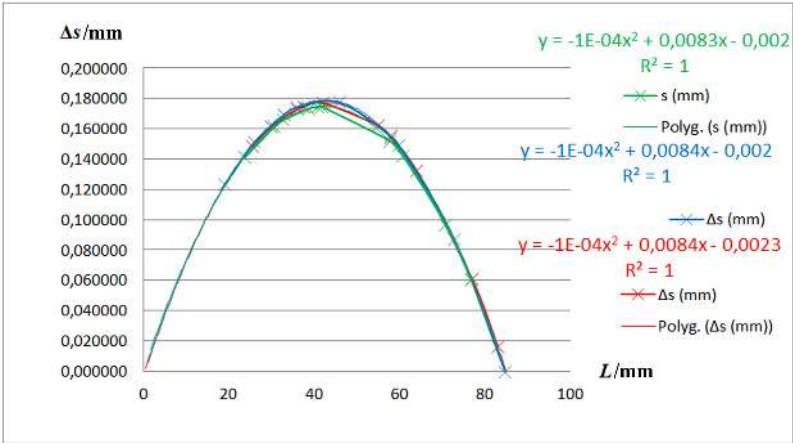


Obr. 7 Uspořádání experimentu s detailem na destičku

Měření bylo provedeno tak, že jsme změřili nejprve hodnotu atmosférického tlaku v prázdné nádobě, pak jsme do nádoby nalili určité množství vody, uzavřeli shora destičkou, obrátili o 180° a změřili tlak vzduchu v uzavřeném prostoru nad kapalinou.

Tabulka 1 Hodnoty tlaku vzduchu p v závislosti na výšce kapaliny L v nádobě o objemu 20 ml

Papír s hliníkovou fólií			Plastové víčko			Papír		
$\frac{p_a}{\text{kPa}}$	$\frac{p}{\text{kPa}}$	$\frac{L}{\text{mm}}$	$\frac{p_a}{\text{kPa}}$	$\frac{p}{\text{kPa}}$	$\frac{L}{\text{mm}}$	$\frac{p_a}{\text{kPa}}$	$\frac{p}{\text{kPa}}$	$\frac{L}{\text{mm}}$
99,961	99,172	83	100,437	99,771	88	101,220	99,907	77
99,995	99,296	77	100,618	100,015	60	101,222	100,810	42
100,041	99,394	64	100,654	100,286	36	101,222	100,400	71
100,063	99,498	55	100,675	100,300	33	101,220	100,575	61
100,041	99,620	42	100,722	100,423	19	101,221	100,790	41
100,028	99,630	38	100,675	99,923	73	101,215	100,895	31
99,996	99,691	30	100,682	100,082	58	101,210	100,872	33
99,987	99,626	36	100,716	100,230	46	101,272	100,973	24
99,989	99,730	26	100,689	100,325	33	101,276	100,635	58
99,982	99,412	58	100,661	100,340	27	101,230	100,769	39



Obr. 8 Graf závislosti poklesu hladiny Δs na výšce kapalinového sloupce L podle tabulky 1

Experiment byl proveden pro vodu, která byla pro větší názornost obarvena, a jako destička byly v případě nádoby o objemu 20 ml postupně použity plastové víčko, tuhý papír obalený hliníkovou fólií a obyčejný papír.

Pro úplnost uvedme i hmotnosti jednotlivých typů destiček podle rostoucí hmotnosti: tuhý papírový čtverec o straně 5 cm obalený hliníkovou fólií o hmotnosti 1,9 g, plastové víčko o hmotnosti 2,7 g, impregnovaný papír o hmotnosti 5,5 g.

Tabulka 1 uvádí naměřené hodnoty tlaku vzduchu p nad kapalinou pro nádobu o objemu 20 ml pro danou výšku kapaliny L a výšku $H = 90$ mm, tabulka 2 uvádí analogicky hodnoty pro nádobu o objemu 60 ml a výšku $H = 115$ mm.

Na obr. 8 jsou zobrazeny získané hodnoty Δs v závislosti na výšce L podle vztahu (5) a tabulky 1. Červená křivka odpovídá použití tuhého papíru obaleného hliníkovou fólií, modrá křivka odpovídá plastovému víčku a zelená obyčejnému papíru. Zatímco červená a modrá se téměř identicky překrývají, zelená křivka se v oblasti maxima kvadratické funkce mírně liší od ostatních dvou.

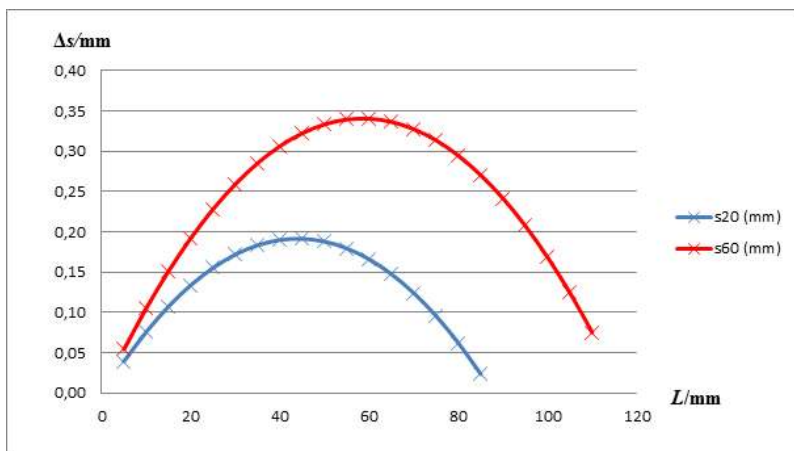
Statistická analýza pomocí dvouvýběrového t-testu s rovností rozptylů v programu MS Excel nicméně prokázala platnost nulové hypotézy, tj. že na hladině statistické významnosti $\alpha = 0,05$ se hodnoty Δs při vzájemném porovnání dvou souborů hodnot (hliník-plast, hliník-papír, plast-papír) významně statisticky neliší.

Tabulka 2 Hodnoty tlaku vzduchu p v závislosti na výšce kapaliny L v nádobě o objemu 60 ml

Papír s hliníkovou fólií			Plastové víčko			Papír		
$\frac{p_a}{\text{kPa}}$	$\frac{p}{\text{kPa}}$	$\frac{L}{\text{mm}}$	$\frac{p_a}{\text{kPa}}$	$\frac{p}{\text{kPa}}$	$\frac{L}{\text{mm}}$	$\frac{p_a}{\text{kPa}}$	$\frac{p}{\text{kPa}}$	$\frac{L}{\text{mm}}$
99,812	99,732	10	100,600	100,541	8	101,216	101,096	23
99,811	99,612	23	100,600	100,480	17	101,296	101,018	26
99,816	99,512	32	100,600	100,373	26	101,143	100,916	36
99,854	99,322	50	100,600	100,250	40	100,630	100,165	46
99,782	99,250	58	100,600	100,115	53	100,620	100,101	52
98,858	99,150	65	100,590	100,042	59	100,670	99,970	65
99,821	99,112	78	100,630	99,985	66	101,396	100,715	69
99,821	99,003	82	100,660	99,920	76	100,670	99,864	77
99,810	98,873	97	100,670	99,737	94	100,670	99,736	91
99,822	98,768	106	100,600	99,605	110	100,550	99,663	96

Jak plyne z hodnot uvedených v tabulce 1 i v tabulce 2, průměrná hodnota rozdílu atmosférického tlaku a tlaku vzduchu nad povrchem kapaliny je přibližně 500 Pa. Tento rozdíl je dostačující pro udržení destičky zabráňující výtoku kapaliny v klidové poloze, kdy nedojde k jejímu odtržení ode dna nádoby.

Na obr. 9 je pro úplnost zobrazeno porovnání experimentálně naměřené parabolické závislosti Δs na výšce L pro nádobu o objemu 20 ml (modře), resp. 60 ml (červeně), za použití plastové destičky.



Obr. 9 Porovnání závislosti poklesu hladiny Δs na výšce kapalinového sloupce L pro nádoby o objemu 20 ml a 60 ml pro plastovou destičku

Závěr

V naší práci jsme se zabývali experimentálním ověřením závislosti poklesu hladiny Δs na výšce kapalinového sloupce L pro různé výšky H nádoby a různé materiály destičky umístěné na spodku nádoby, která zabráňuje výtoku kapaliny.

Experimentálně naměřené hodnoty potvrdily teoretické předpoklady navržené Gancim [4]. Byla ověřena parabolická závislost poklesu hladiny Δs na výšce kapalinového sloupce L i skutečnost, že není-li nádoba zcela zaplněna kapalinou, k největšímu poklesu Δs dochází pro výšku kapalinového sloupce pro hodnotu $H/2$.

Experimentálně byl také ověřen s negativním závěrem miskoncept studentů, že v prostoru nad hladinou kapaliny je vzduch, jehož tlak je roven

tlaku atmosférickému. Jak bylo jednoznačně prokázáno ve všech provedených experimentech, tlak vzduchu je vždy v průměru o 500 Pa nižší. Tento pokles je dostačující k tomu, aby nedošlo k odtržení destičky zabráňující výtoku kapaliny ode dna nádoby.

Statistická analýza, provedená pomocí párového t-testu s rovností rozptylů, prokázala dále platnost nulových hypotéz na hladině statistické významnosti $\alpha = 0,05$.

Zaprvé, teoretické hodnoty se od experimentálně naměřených na výše uvedené hladině významně statisticky neliší. Zadruhé, experimentálně naměřené hodnoty pro různé typy destiček se také vzájemně významně statisticky neliší.

Poděkování

Autoři děkují všem studentům zapojeným do výzkumu. Výzkum je podpořen z prostředků projektu No. CZ.02.3.68/0.0/0.0/16.011/0000669 (PŘÍRodovědné Oborové Didaktiky A praktikující učitel). Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Literatura

- [1] *Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.*: Fyzika. VUTIUM, Brno, 2000.
- [2] *Fontana, F., Di Capua, R.*: Role of hydrostatic paradoxes towards the formation of the scientific thought of students at academic level Eur. J. Phys. 26 (2005), 1017–1030.
- [3] *Bednařík, M., Šíroková, M., Bujok, P.*: Fyzika pro gymnázia – Mechanika. Prometheus, Praha, 2006.
- [4] *Ganci, S.*: A hydrostatic paradox revisited. Phys. Educ. 47 (2012), 2.
- [5] *O'Connel, J.*: Boyle saves the spill. Phys. Teach. 36 (1998), 74.
- [6] *Erlich, R.*: Why Toast Lands Jelly-Side Down, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997.
- [7] *Socratic* 2016 [online]. [cit. 2017-06-20].
Dostupné z: <https://socratic.org/questions/in-the-experiment-where-you-turn-a-glass-of-water-with-a-piece-of-cardboard-on-t>
- [8] *Sciphile.org* 2016 [online]. [cit. 2017-06-20].
Dostupné z: <http://sciphile.org/lessons/upside-down-water>

Zkoumáme ohřívání a chladnutí

DANA MANDÍKOVÁ

MFF UK, Praha

Článek se věnuje některým miskoncepcím žáků z oblasti termiky spojeným s chladnutím a ohříváním látek. Nabízí také experimentální aktivity, které je mohou pomoci odbourávat. Vychází z širšího výzkumu provedeného u českých středoškoláků [1]. Navazuje tak na článek [2] z tohoto časopisu, který upozorňoval na některé miskoncepce spojené s pojmy teplo a teplota u českých žáků základních škol.

Základní informace o výzkumu

Ve školním roce 2014/15 provedl Michal Čechák výzkum miskoncepí z oblasti termiky u českých středoškoláků. Konkrétně u žáků sedmi tříd ze čtyř různých gymnázií. Výzkum byl proveden formou standardizovaného testu HTCE¹⁾ (The Heat and Temperature Concept Evaluation). Test byl zadán účastníkům výzkumu dvakrát (pokaždé stejný), jednou před a podruhé po výuce termiky na vyšším stupni gymnázia, aby se dalo zjistit, zda miskoncepce přetrvávají i po probrání a seznámení se s učivem o teple a teplotě ve školní výuce. Tyto dva testy jsou dále označovány jako pretest a posttest. Pretestu se zúčastnilo 154 žáků a posttestu pak 147 žáků. Podrobné informace o výzkumu a jeho výsledcích lze nalézt v [1].

Test HTCE obsahuje celkem 28 otázek z oblastí týkajících se tepla a teploty. Jedna otázka je otevřená s tvorbou odpovědi, zbývající jsou uzavřené a žáci volí právě jednu z nabízených možností. Celková průměrná úspěšnost v pretestu byla 48 %, v posttestu pak 56 %. Článek se dále věnuje jen části otázek, které se týkají dodávání tepla a ohřívání látek a naopak také chladnutí látek.

Výsledky v otázkách zaměřených na ohřívání a chladnutí látek

Uvedené problematiky se týkaly tři série otázek. První obsahovala čtyři otázky (v testu odpovídaly čísly 1–4), kde bylo úkolem porovnat přijaté teplo pro dvě nádoby s vodou s různými parametry (různá počáteční či koncová teplota vody, různá hmotnost vody). Obtížnost úloh se postupně

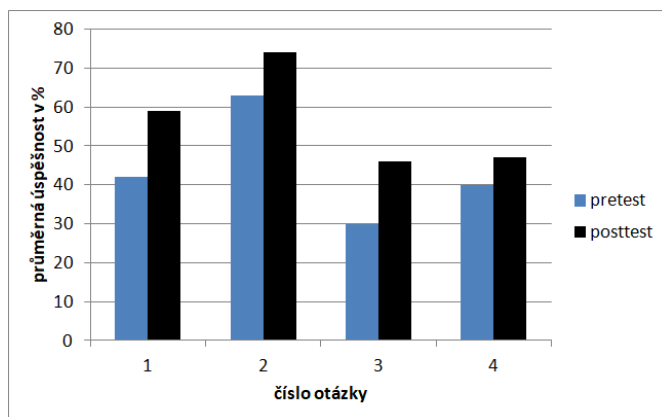
¹⁾Verzi v českém jazyce lze získat u autorky článku.

zvyšovala. Úlohy zkoumají, zda žáci vědí, že přijaté teplo je přímo úměrné změně teploty a hmotnosti dané látky.

Tyto úlohy by měly odhalit následující miskoncepce:

1. Vyšší konečná teplota má za důsledek více přijatého tepla bez ohledu na hmotnost látky.
2. Větší množství vody znamená více přijatého tepla bez ohledu na změnu teploty.

Průměrnou úspěšnost v těchto otázkách zachycuje graf na obr. 1.



Obr. 1 Průměrná úspěšnost v 1. sérii otázek

Průměrná úspěšnost celé první série otázek v pretestu byla 42 %, v posttestu již 58 %. Zajímavá je odlišnost úspěšnosti u otázek 1 a 2, které jsou si svojí obtížností podobny. Jednalo se o úvodní otázky celého testu a lze to vysvětlit počáteční nervozitou a nesoustředěností žáků. Nejnížší průměrnou úspěšnost v sérii získala otázka číslo 3. Tuto neúspěšnost si vysvětlujeme tím, že jako jediná otázka ze série měla pro výpočet náročnější číselné hodnoty. Nejčastější chybné odpovědi na otázky 1, 3 a 4 byly typické pro obě výše uvedené zkoumané miskoncepce. U otázky 2 byla typickou chybná odpověď vyjadřující myšlenku, že nezáleží na počáteční teplotě vody, pouze na hmotnosti a konečné teplotě vody. Průměrné výsledky se v této sérii se sice zlepšily, ale zkoumané miskoncepce přetrvaly u značného počtu žáků.

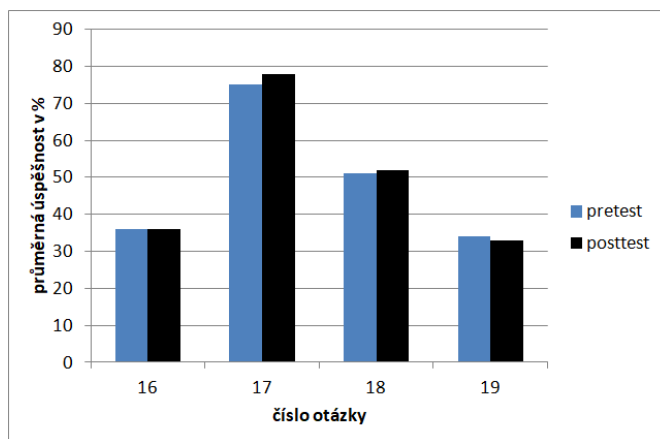
Druhá série úloh zaměřená na ohřívání měla též čtyři otázky (v testu odpovídaly číslům 16–19). V první bylo třeba vybrat graf, který nejlépe

vystihuje nárůst teploty vody (do začátku jejího varu) v tepelně izolované nádobě při ohřevu topnou spirálou. V následujících otázkách se pak měnily podmínky ohřevu (množství dodávaného tepla, hmotnost vody, jiná kapalina s odlišnou měrnou tepelnou kapacitou) a úkolem bylo určit změnu teploty (kolikrát bude větší či menší). Otázky opět sledovaly, zda žáci správně chápou přímou úměrnost tepla a různých veličin. Zajímavé bylo, že správná odpověď se v těchto otázkách vždy skrývala pod stejným písmenem. Toto má zřejmě svůj účel, když si žák není jistý, rozhodně neodpoví na tři po sobě jdoucí otázky stejně. Proto ten, kdo odpoví správně, si je těmito odpověďmi jistý.

Zkoumané miskoncepce v této sérii byly:

1. Změna teploty látky závisí jen na dodávaném teple.
2. Změna teploty látky závisí na její hmotnosti a měrné tepelné kapacitě přímo úměrně.

Průměrnou úspěšnost v těchto otázkách zachycuje graf na obr. 2.



Obr. 2 Průměrná úspěšnost v 2. sérii otázek

Na otázku 16 žáci odpovídali s velmi nízkou úspěšností (36 %), která i u posttestu zůstala na stejné úrovni. Žáci měli zřejmě problém s grafickým vyjádřením výsledku. Objevily se dvě typické chybné odpovědi. První odpovídá představě, že čím vyšší je teplota látky, tím lépe se látka zahřívá. Druhá naopak předpokládá, že s rostoucí dobou ohřevu narůstá teplota pomaleji. Je možné, že při této úvaze žáci nevzali v úvahu, že nádoba je tepelně izolovaná a uvažovali ztráty do okolí. S otázkou 17, kde se

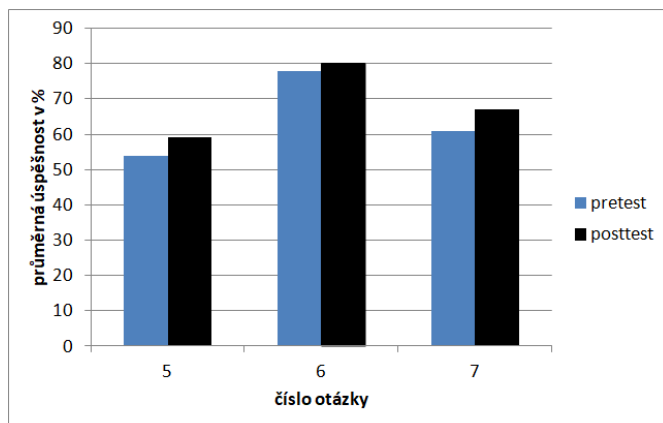
měnilo dodávané teplo, neměli žáci problém. U otázky 18, kde se měnila hmotnost vody, se vyskytly dvě časté chybné odpovědi. Nejčastější odpovídá miskoncepci o přímé úměrnosti změny teploty a hmotnosti vody při dodání stejného tepla. U druhé můžeme hovořit o představě kvadratické úměrnosti nárůstu teploty a množství vody. V otázce 19 byla voda zaměněna za kapalinu o jiné měrné tepelné kapacitě. Typická chybná odpověď odpovídá miskoncepci, že změna teploty látky je přímo úměrná její měrné tepelné kapacitě (při konstantním dodávání tepla a hmotnosti látky) a měla vyšší relativní zastoupení u posttestu než u pretestu.

Třetí série o třech otázkách (v testu odpovídaly čísly 5–7) se zabývala chladnutím vody. V prvních dvou se srovnávala rychlost chladnutí a čas, za který se vyrovná teplota při různých počátečních teplotách vody. Ve třetí se pak měl vybrat graf, který nejlépe vystihuje časový průběh teploty při ochlazování vody.

Zkoumaly se následující miskoncepce:

1. Teplota vody při ochlazování klesá přímo úměrně s časem.
2. Nezáleží na počáteční teplotě vody, teplota klesá stejně rychle u obou nádob.

Průměrnou úspěšnost v těchto otázkách zachycuje graf na obr. 3.



Obr. 3 Průměrná úspěšnost v 3. sérii otázek

Průměrná úspěšnost této série byla nad průměrným výsledkem celého testu, v pretestu to bylo 64 %, v posttestu 68 %. Může to souviset s tím, že otázky jsou blízké praktickému životu a každý člověk se již setkal s podobnou situací v reálném kontextu.

Nejčastější chybná odpověď v otázce 5 odpovídá miskoncepci, že nezáleží na počáteční teplotě vody, teplota klesá stejně rychle u obou nádob. V otázce 7 se nejčastěji objevovala chybná představa, že teplota při ochlazování klesá s časem přímo úměrně.

Ochlazování vody se týkala i jediná otevřená otázka v testu (číslo 24). Žáci měli do připraveného grafu nakreslit křivku zachycující časový průběh chladnutí horké vody v otevřené nádobě volně stojící v místnosti. Do stejného grafu pak měli zakreslit další křivku pro případ, kdy vodu necháme chladnout ve vodní lázni se stejnou teplotou jako okolí.

Zkoumaly se miskoncepce:

1. Teplota při ochlazování klesá přímo úměrně s časem.
2. Rychlost chladnutí látky nezávisí na prostředí, kde látka chladne.

Za správnou byla považována ta odpověď, která splňovala všechna tři následující kritéria.

1. Křivka závislosti teploty na čase má správný tvar.
2. Křivka závislosti se vyrovnává na pokojové teplotě.
3. Křivka vodní lázně dosáhne pokojové teploty za kratší čas.

Otázka 24 dosáhla nejhorší úspěšnosti vůbec, 16 % v pretestu a 24 % v posttestu. Značná část žáků na otázku neodpověděla vůbec. Zastoupení chyb, kterých se žáci dopouštěli, je patrné z následující tabulky 1.

Tab. 1 Relativní četnost odpovědí v otázce 24

	pretest	posttest
Graf je zakreslen zcela správně v rámci zkoumaných parametrů.	16 %	24 %
Křivka grafu časové závislosti nemá správný tvar.	33 %	36 %
Křivka ochlazování je stejná pro chladnutí ve vodní lázni i v místnosti.	37 %	43 %
Křivky chladnutí se nevyrovnají na teplotě 20 °C (pokojová teplota).	12 %	5 %
Na otázku žák neodpověděl.	35 %	19 %

Po sečtení relativních četností v tabulce 1 nedostaneme výsledek 100 %, což je dáno tím, že v jedné odpovědi se mohlo kombinovat několik druhů

chyb. Jednou z nejčastějších chyb bylo zakreslování lineární závislosti pro pokles teploty s časem, což odpovídá výše uvedené zkoumané miskoncepci. Často se také objevovala představa, že průběh ochlazování nezáleží na prostředí, ve kterém látka chladne.

Z uvedených výsledků je vidět, že si žáci i po absolvování školní výuky uchovávají řadu chybných představ. V další části článku nabízíme několik experimentálních aktivit, které by mohly pomoci k jejich korekci.

Pracovní list zaměřený na korekci miskoncepcí

Jednou z možností, jak můžeme pracovat s miskoncepce, je předvést pokus či provést měření, kde se žáci na vlastní oči přesvědčí, že se mýlili. Autoři testu HTCE Sokoloff a Thorton vytvořili publikaci [3], která obsahuje velké množství pracovních listů týkajících se různých oblastí fyziky zaměřených právě na práci s miskoncepce, které se objevují při řešení konceptuálních testů z těchto oblastí. Publikace mimo jiné obsahuje i pracovní listy zaměřené na problémy, které se ukazují ve výsledcích testu HTCE. Žáci při plnění úkolů reálně pracují se situacemi, které jim byly v testu pouze nastíněny. Díky tomu mohou své mylné představy snadněji opravit a dále se jich vyvarovat.

Přílohou 1 tohoto článku je překlad jednoho z pracovních listů ze zmiňované publikace ([3], s. 193). V pracovním listu je popsáno několik situací, které se týkají chlazení a ohřevu různých materiálů. Nejdříve necháme chladnout kousek kovu v místnosti, tedy na vzduchu. Ve druhé situaci chladne ten samý kousek kovu ponořený do vody, která má stejnou teplotu jako vzduch v místnosti v předchozí situaci. Žáci mají za úkol nejprve odhadnout, jak bude vypadat časová závislost teploty kovu, a poté ji i reálně změřit. Oba své výsledky mají žáci porovnat. Součástí úkolů jsou také otázky, na jaké hodnotě se nakonec ustálí teplota kovu. V dalším úkolu se pracuje s malou nádobkou vody místo s kouskem kovu a je třeba provést porovnání s předchozí situací. Žáci opět mají odhadnout časovou závislost teploty vody v nádobce a pak ji reálně změřit. Vzhledem k tomu, že nemáme pulsující zdroj tepla, který by dodával přesně stanovené teplo v jednom pulsu, zůstávají další úkoly na úrovni myšlenkového experimentu.

V Příloze 2 jsou uvedeny naměřené závislosti v úkolech z pracovního listu i řešení teoretických otázek.

Pracovní list byl vyzkoušen přímo ve výuce. Pracovali s ním jednak žáci 9. třídy základní školy a také žáci kvinty a sexty víceletého gymnázia. Žáci

ZŠ pracovali ve čtyřlenných skupinách. Nejprve se zamýšleli nad tím, jak budou jednotlivé závislosti vypadat a odpovídali na připravené otázky. Vypracovali také odpovědi u pokusů, které byly pouze myšlenkové. V další fázi žáci prováděli měření reálně. Žáci víceletého gymnázia pracovali ve dvojicích a byla jim ponechána větší samostatnost. Kromě teoretických úkolů provedla každá dvojice i všechna měření. Práce na pracovním listu trvala přibližně 60 minut. K měření byla využita měřicí čidla Vernier připojená USB portem k počítači. Jako kousek kovu bylo v prvním úkolu využito samotné teplotní čidlo. K ohřevu vody i k ohřevu kousku kovu používali žáci rychlovarnou konvici, ta byla ve čtvrtém úkolu využita i jako izolovaná nádoba. V tomto úkolu je potřeba, aby byl v konvici dostatek vody a nezačala vřít dříve, než je zadán časový interval. Pokus je potřeba předem vyzkoušet a časový interval v případě potřeby zkrátit.

Závěr

V článku jsou na základě výsledků výzkumu provedeného pomocí testu HTCE shrnuty některé chybné představy žáků o ohřívání a chladnutí látek. Dále je uvedeno několik experimentálních i teoretických úkolů tvořících pracovní list, které jsou zaměřené na korekci miskoncepcí, které se objevily při řešení testu.

Literatura

- [1] Čečák, M.: Prekoncepce studentů o teple a teplotě. Diplomová práce, MFF UK, Praha, 2015.
- [2] Mandíková, D., Schamberger, J.: Prekoncepce žáků v termice. MFI, roč. 24 (2015), č. 5, s. 347–356.
- [3] Sokoloff, R., Thornton, R., Thornton, K.: Interactive lecture demonstrations: active learning in introductory physics. John Wiley, New York, 2004.

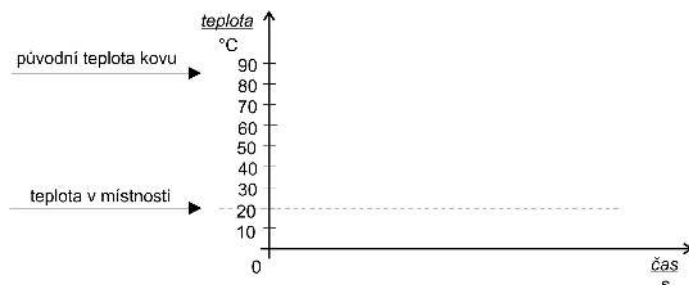
Příloha 1

Pracovní list: Teplo a teplota

Pokyny: Doplňte pracovní list podle popsaných úkolů.

Úkol č. 1: Malý kousek kovu zahřejeme na vysokou teplotu, okolo 80 °C až 90 °C. Načrtněte do grafu pod textem závislost teploty na čase pro chlazenou kousek kovu, necháme-li ho volně v místnosti. Dávejte pozor, abyste správně vystihli tvar křivky.

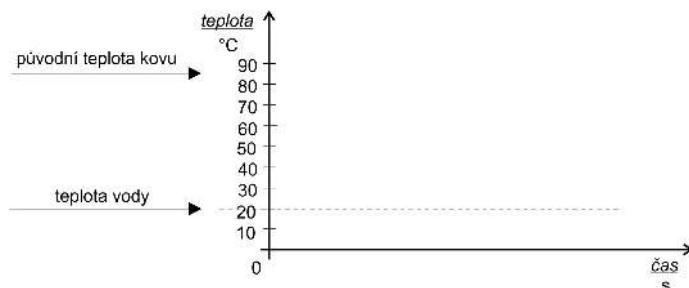
Co myslíte, jaká bude výsledná teplota kovu? $0\text{ }^{\circ}\text{C}$? Teplota jako v místnosti? Nebo jiná?



Popsanou situaci reálně proměřte. Zaznamenejte výsledek do stejné oblasti grafu. Byla vaše předpověď správná?

Úkol č. 2: Nyní zahřejeme ten samý kousek kovu opět na vysokou teplotu stejně jako v první situaci (okolo $80\text{ }^{\circ}\text{C}$ až $90\text{ }^{\circ}\text{C}$) a ponoříme ho tentokrát do studené vody (o teplotě okolo $20\text{ }^{\circ}\text{C}$). Načrtněte časovou závislost teploty kovu ponořeného do vody. Dávejte pozor na správný tvar křivky.

Co myslíte, jaká bude výsledná teplota? ($0\text{ }^{\circ}\text{C}$? Uprostřed mezi teplotou vody a kovu? Blíže teplotě vody? Blíže teplotě kovu? Jinak?)

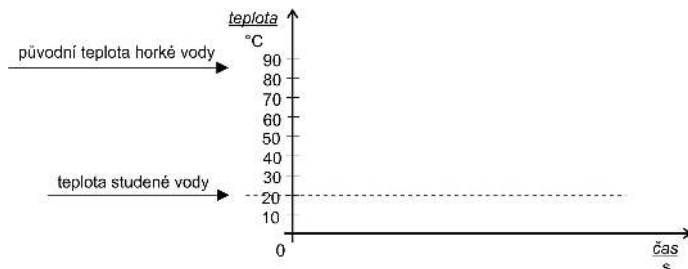


Popsanou situaci reálně proměřte. Zaznamenejte výsledek do stejné oblasti grafu. Byla vaše předpověď správná?

Úkol č. 3: Nyní vezmeme nádobu plnou horké vody (okolo $80\text{ }^{\circ}\text{C}$ až $90\text{ }^{\circ}\text{C}$). Nádobu s horkou vodou dáme do jiné větší nádoby plné vody o pokojové teplotě (okolo $20\text{ }^{\circ}\text{C}$). Načrtněte do grafu vaši předpověď, jak se bude měnit s časem teplota horké vody. Dávejte pozor na správný tvar křivky. Porovnejte průběh teploty s úkolem 2.

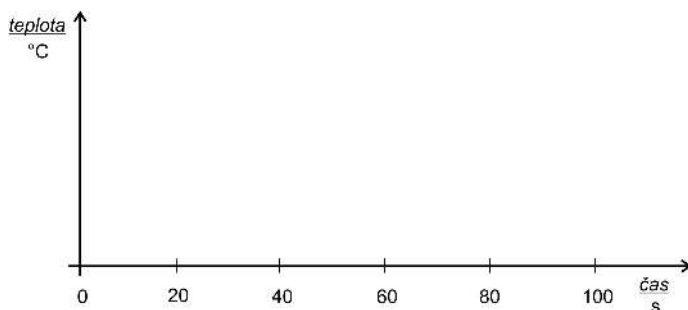
Co myslíte, jaká bude výsledná teplota? ($0\text{ }^{\circ}\text{C}$? Uprostřed mezi teplotou horké a studené vody? Blíže teplotě studené vody? Blíže teplotě horké vody? Jinak?)

Jaká bude výsledná teplota vody ve větší nádobě?



Popsanou situaci reálně proměřte. Zaznamenejte výsledek do stejné oblasti grafu. Byla vaše předpověď správná?

Úkol č. 4: Máme izolovanou nádobu (žádné teplo z ní nemůže uniknout) s vodou. Do této nádoby dodáváme, konstantně v čase, teplo po dobu 90 s a poté se žádné další teplo nepřenáší. Načrtněte do grafu pod zadáním křivku závislosti teploty na čase pro zahřívání této vody.



Popsanou situaci reálně změřte. Zaznamenejte výsledek do stejné oblasti grafu. Byla vaše předpověď správná?

Úkol č. 5: Představte si pulsující zdroj tepla. Ten dokáže během jednoho pulsu dodat předem definované teplo. Malému množství vody byla zvýšena teplota o $5\text{ }^{\circ}\text{C}$ pomocí 3 těchto pulsů.

Jak se změní teplota, když tomuto množství vody dodáme 6 pulsů tepla?

.....

Co se stane, když 3 pulsy tepla dodáme dvojnásobnému množství vody?
Jak se změní její teplota?

Způsobí stejné teplo vždy stejnou změnu teploty i v rozdílném množství vody?

Úkol č. 6: Víte již, jak chladne kousek kovu při pokojové teplotě. Stejně tak víte, jak chladne horká voda. Také již víte, jak roste teplota vody při dodávání tepla. Nyní udržujeme nádobu s vodou na teplotě $80\text{ }^{\circ}\text{C}$ po dobu 100 s v pokoji, kde je teplota $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Potřebujeme na to 12 pulsů ze zdroje tepla. Jaký počet pulsů budeme potřebovat na udržení stejného množství vody na teplotě $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ po dobu 100 s ? Vysvětlete svůj závěr.

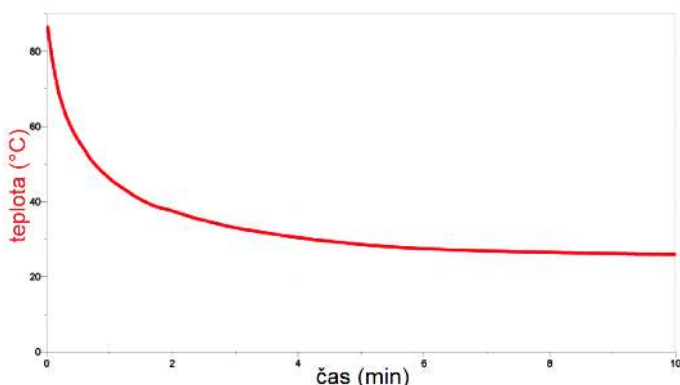
Jaký počet pulsů budeme potřebovat na udržení teploty této vody na $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ (pokojová teplota)?

Příloha 2

Pracovní list: Naměřené závislosti a řešení teoretických otázek

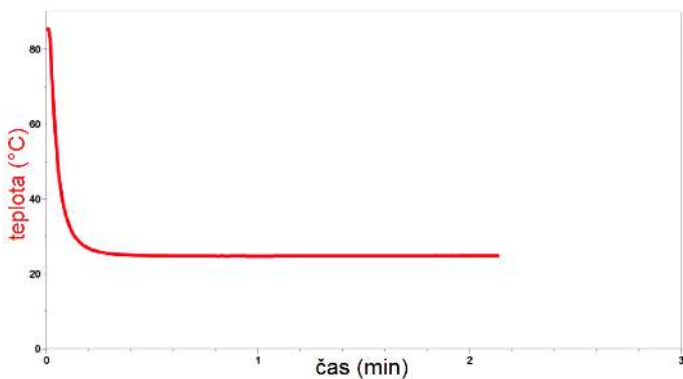
Úkol č. 1: Jako kousek kovu bylo použito samotné teplotní čidlo.

Výsledná teplota kovu se ustálí na teplotě místnosti.



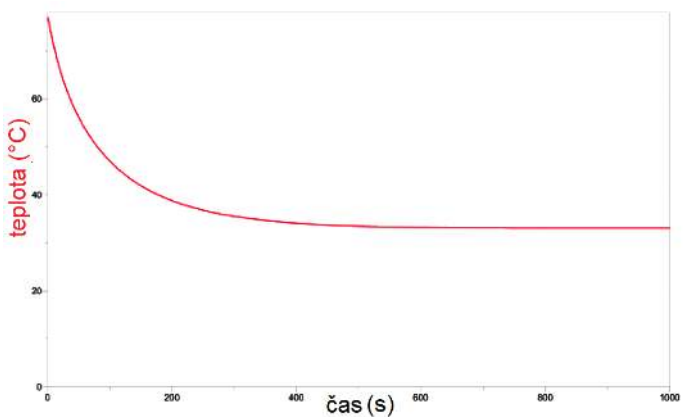
Úkol č. 2: Jako kousek kovu bylo použito samotné teplotní čidlo. Chlazené bylo v zavařovací sklenici s přibližně $0,5\text{ l}$ vody pokojové teploty.

Výsledná teplota kovu bude stejná jako teplota vody.

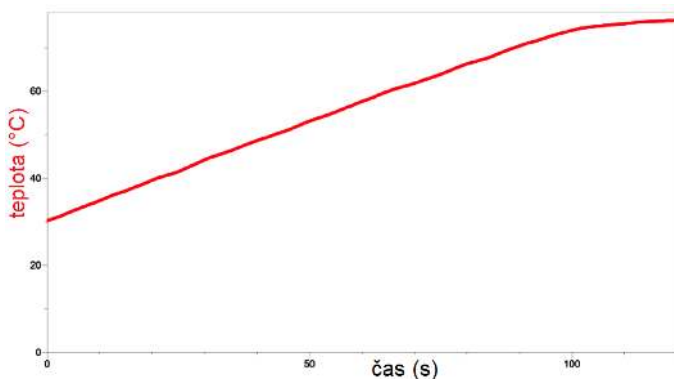


Úkol č. 3: Použito bylo asi 80 ml horké vody v kádince, která byla ponořená do zavařovací sklenice s asi 250 ml vody pokojové teploty.

Teplota chladnoucí vody (i kádinky) se nejprve vyrovná s teplotou chladící lázně, a to na hodnotě o něco vyšší než pokojová teplota, záleží na poměru množství použité horké a studené vody. Pak se bude voda postupně ochlazovat na pokojovou teplotu.



Úkol č. 4: Při měření byla použita malá varná konvice o příkonu 1 000 W s 0,5 l vody.



Úkol č. 5: Při dodání 6 pulsů tepla se teplota zvýší o $10\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Při dodání 3 pulsů tepla dvojnásobnému množství vody se teplota zvýší o $2,5\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Ne, změna teploty je při dodání stejného tepla nepřímo úměrná množství vody.

Úkol č. 6: Na udržení stejného množství vody na teplotě $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ po dobu 100 s bude potřeba 6 pulsů, jelikož je rozdíl teplot pokoje a vody v nádobě ve druhém případě poloviční.

Na udržení teploty vody na $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ (pokojová teplota) není potřeba žádných pulsů, teplota vody je vyrovnaná s teplotou místnosti.

Dekadické a binární předpony používané ve fyzice a ve výpočetní technice

EMANUEL SVOBODA

MÚVS ČVUT, Praha

V úvodních částech výuky fyziky či elektrotechniky na středních školách se studenti zpravidla podrobněji seznamují se základními veličinami, jejich jednotkami, uvádějí se jim příklady odvozených veličin a jejich jednotek. Probírají se také a pak se prakticky při řešení úloh používají násobné a dílčí jednotky (tj. příslušné *dekadické předpony jednotek* vyjadřující mocninu 10), např. kilo-, mega-, giga-, mili-, mikro- atp. Tedy násobky a díly stanovené mezinárodní normou ISO/EC 80000-1, pol. 6.5.4 a tab. 4. Výjimku tvoří jednotky pro veličinu čas (rok, měsíc, týden, hodina, minuta, sekunda, ale používají se samozřejmě dílčí jednotky pro sekundu, např. milisekunda, mikrosekunda, nanosekunda).

V této souvislosti např. učebnice *Fyzika pro gymnázia – Mechanika* [1] nebo publikace *Přehled středoškolské fyziky* [2] doplňují v poznámce pod čarou informaci o dekadických předponách také informací o binárních předponách (tj. předponách jednotek vyjadřujících 2. mocninu) používaných v informatice, resp. ve výpočetní technice. Konkrétně se ve výše citovaných publikacích uvádí, že v informatice uvedené dekadické předpony ale neplatí a je uvedeno několik příkladů: 1 kB (kilobajt) = 2^{10} B (bajtů), 1 MB = 2^{20} B, 1 GB = 2^{30} B.

Tuto zastaralou informaci (a s tím spojená mnohá nedorozumění) je třeba v učebnicích a při výuce poopravit¹⁾ ve smyslu doporučení Mezinárodní elektrotechnické komise (*International Electrotechnical Commission*, IEC). Komise vydala mezinárodní standard číslo IEC 60027-2, který byl s platností od 1. 4. 2004 převzat do systému českých technických norem pod číslem ČSN IEC 60027-2.

¹⁾Oprava bude provedena v nejbližším dotisku učebnice *Mechanika* a v elektronickém doplňku *Přehled plus* k publikaci *Přehled středoškolské fyziky*.

V čem je problém? V informačních technologiích se v naprosté většině případů používá binární soustava, tedy přepočít $2^{10} = 1\,024$. To často má (ale hlavně mělo) za následek nesprávné použití předpony ze soustavy SI ve vztahu k binární předponě, protože $1\,000 \neq 1\,024$.²⁾ Konkrétně ke zmatkům docházelo, a ještě může docházet, např. u kapacity pevných disků, která se běžně uvádí v gigabytech. Velmi často máme na mysli opravdovou miliardu, i když v informatice se předponou giga (GB) naopak myslí $2^{30} = 1\,073\,741\,824$. Výrobci zase někdy směšují binární a dekadické předpony, když uvádějí např. kapacitu disku odvozenou od počtu sektorů, přičemž používají binární kilobyty ($1\text{ kB} = 2$ sektory na disku o velikosti 512 B) a dekadické gigabyty (10^6 kB). Často pak neznalí zákazníci zjistí po zformátování disku, že koupili disk s menší kapacitou, než předpokládali. Tedy v prvním příkladu přibližně o 7 %, ve druhém asi o 5 %. Nebo naopak uživatel operační paměti může být potěšen, že je k němu výrobce takové paměti šetrný, když jím uváděná kapacita paměti např. 4 GB (mylné označení, viz dále) je ve skutečnosti kapacita paměti přibližně 4,3 GB. Podobně se snadno může stát, že ukládaný „dvoumegový“ soubor se nevejde na „dvoumegové“ místo v úložišti, protože tento ukládaný soubor má kapacitu 2048 kB, ale volného místa v úložišti je jen 2000 kB.

Aby k takovým častým nedorozuměním, omylům či zmatkům nedocházelo, zavedl mezinárodní standard magické písmenko „i“ označující, že se jedná u uvedeného číselného údaje o binární jednotku a při převodu se použije koeficient 1 024. Nový systém označování binárních předpon (kibi-, mebi-, gibi-, tebi-, ...) definovaných také v normě ISO/IEC 80000 ve vztahu k dekadickým násobkům uvádí tabulka 1 (převzato z [3] a upraveno).

Příklad převodů

Potřebujeme-li např. převést 20 KiB (kibibajtů) na kB (kilobajty), musíme číslo 20 vynásobit číslem 1,024, takže dostaneme 20,48 kB. Naopak, jestliže chceme převést kB na KiB, tak číslem 1,024 dělíme. Např. 150 kB odpovídá přibližně 146,5 KiB. V případě převodů mezi jednotkami MB a MiB je třeba použít koeficient $(1,024)^2$, u jednotek GB a GiB koeficient $(1,024)^3$ atp.

²⁾V informatice se pro předponu kilo- začalo dříve používat písmeno velké K (tzv. velké KILO = $2^{10} = 1\,024$) až do doby, kdy pro toto velké KILO ($1\,024\text{ B}$) bylo zavedeno označení kibibajt (KiB), viz dále.

Tab. 1 Převod dekadických a binárních předpon

Jednotka	Značka	B	kB	KiB	MB	MiB	GB	GiB	TB	TiB
kilobajt	kB	1 000	1	$\doteq 0,976\,6$						
kibibajt	KiB	1 024	1,024	1						
megabajt	MB	1 000 000	1 000	$\doteq 976,6$	1	$\doteq 0,953\,7$				
mebibajt	MiB	1 048 576	$\doteq 1\,048,6$	1 024	$\doteq 1,049$	1				
gigabajt	GB	10^9	1 000 000	976 562,5	1 000	$\doteq 953,7$	1	$\doteq 0,931\,4$		
gibibajt	GiB	$\doteq 1,074 \cdot 10^9$	$\doteq 1\,073\,742$	1 048 576	$\doteq 1\,074$	1 024	$\doteq 1,074$	1		
terabajt	TB	10^{12}	10^9	$\doteq 0,976\,6 \cdot 10^9$	1 000 000	$\doteq 953\,674,3$	1 000	$\doteq 931,3$	1	$\doteq 0,91$
tebibajt	TiB	$\doteq 1,074 \cdot 10^{12}$	$\doteq 1,1 \cdot 10^9$	$\doteq 1,074 \cdot 10^9$	$\doteq 1\,099\,512$	1 048 576	$\doteq 1\,099,5$	1 024	$\doteq 1,1$	1

Následující tabulka 2 uvádí kromě výše uvedených binárních násobků ještě další binární násobky (převzato z [3] a upraveno):

Tab. 2 Binární násobky

Jednotka	Značka	Mocnina 2	Kapacita v B (bajtech)
kibibajt	KiB	2^{10}	1 024
mebibajt	MiB	2^{20}	1 048 576
gigibajt	GiB	2^{30}	1 073 741 824
tebibajt	TiB	2^{40}	1 099 511 627 776
pebibajt	PiB	2^{50}	1 125 899 906 842 624
exbibajt	EiB	2^{60}	1 152 921 504 606 846 976
zibibajt	ZiB	2^{70}	1 180 591 620 717 411 303 424
yobibajt	YiB	2^{80}	1 208 925 819 614 629 174 706 176

Na závěr ještě uvedme poznámku k termínům používaných jednotek a jejich značek. Pro anglický termín jednotky informace *byte* (značka B), který byl zaveden v r. 1956, se častěji používá v české verzi názvu *bajt*. Přitom 1 byte (resp. bajt) = 8 bitů. Pro jednotku *bit* (z angl. binary digit, tj. dvojková číslice) jako základní a současně nejmenší existující množství informace, se používá značky b (tedy malé písmeno). Pro jednoznačnost vyjadřování se někdy název bit nezkracuje, ponechává se, např. Mbit. Z hlediska soustavy SI je ale velké písmeno B pro označení jednotky byte problematické, protože písmeno B je v této soustavě značkou jednotky bel pro hladinu akustického výkonu. Navíc v soustavě SI jsou značky jednotek začínající velkým písmenem (např. N – newton, Pa – pascal) převážně používány pro jednotky na počest významných osobností fyziky nebo techniky.

Literatura

- [1] Svoboda, E. a kol.: Fyzika pro gymnázia – Mechanika. Prometheus, Praha, 2013.
- [2] Svoboda, E. a kol.: Přehled středoškolské fyziky. Prometheus, Praha, 2014.
- [3] Přehled násobných jednotek s dekadickými a binárními předponami. Dostupné na: <https://cs.Wikipedia.org/wiki/Bajt> [2018-02-05]
- [4] https://wikisofia.cz/wiki/Byte_%E2%80%93_jednotka_informace [2018-02-05]

PRÆMIUM BOHEMIÆ 2017

ve zlatě

BOHUMIL VYBÍRAL – JAN KRÍŽ

Univerzita Hradec Králové



Již po sedmnácté byli nejlepší čeští přírodovědci, medailisté z mezinárodních přírodovědných olympiád s celosvětovou účastí, ocenění prestižní cenou PRÆMIUM BOHEMIÆ. Ceny uděluje rodinná *Nadace Bohuslava Jana Horáčka Českému ráji* v den výročí narození jejího zakladatele, mecenáše a filantropa Bohuslava Jana Horáčka (4. prosince) na státním zámku Sychrov u Turnova. Nadace českým studentům v letech 2001 až 2017 udělila celkem 354 cen PRAEMIUM BOHEMIAE (z toho 27 v roce 2017). Studenti za 17 ročníků získali finanční ocenění v celkové významné částce 6,440 miliónu Kč (z toho 620 tisíc Kč v roce 2017). Co tato cena českému medailistovi, mimo morální prestiž, přináší? Je to medaile B. J. Horáčka ze stejného kovu jako medaile olympijská (s vyraženým jménem laureáta na rubu), diplom a finanční odměna. Za zlatou medaili za rok 2017 činila 50 tisíc Kč, za stříbrnou 25 tisíc Kč a za bronzovou 15 tisíc Kč. Mimo 24 hlavních cen (za 4 zlaté, 9 stříbrných a 11 bronzových) byly uděleny také 3 mimořádné ceny 2017 PRÆMIUM BOHEMIÆ, každá v hodnotě 10 tisíc Kč tříčlennému českému zlatému týmu z evropské přírodovědné soutěže EUSO 2017. Mimořádným celkovým ziskem sedmi zlatých medailí lze ročník 2017 PRÆMIUM BOHEMIÆ označit za zlatý.

Přírodovědné olympiády v České republice

V České republice se v přírodovědné oblasti pro středoškoláky organizuje šest olympiád, které mají celosvětové vyústění: ve fyzice (FO), chemii (ChO), biologii (BiO), matematice (MO), informatice – programování (organizuje se v rámci MO jako kategorie P). Rovněž olympiáda v astronomii s astrofyzikou (AO). Soutěže jsou u nás dlouhodobě zakořeněny, jak plyne z ročníků pořádaných ve školním roce 2016/17: FO 58., ChO 53., BiO 51., MO 66., MO/P 32., AO 14. Olympiády si především kladou za cíl vy-

hledávat a pěstovat talenty v uvedených oborech, které jsou významným činitelem pro rozvoj vzdělanosti, tvořivosti a prosperity na národní i světové úrovni. S olympioniky, zejména s těmi úspěšnými, je třeba pracovat systematicky. Jde např. o semináře, soustředění, letní tábory a vydávání studijní brožurky. Škola totiž nemůže vybavit talentované studenty znalostmi a dovednostmi potřebnými pro úspěch na vrcholných mezinárodních soutěžích. Nejlepší řešitelé nejvyšší kategorie národních olympiád postupují do mezinárodní – světové – soutěže.



Obr. 1 Studenti ocenění PRÆMIUM BOHEMIÆ 2017 (foto B. Vybíral)

Mezinárodní (světové) přírodovědné olympiády v roce 2017

Mezinárodní olympiády pořádá na svém území vždy jiná ze zúčastněných zemí a tak bývají místa konání na různých místech světa. Vydejme se nyní společně na dlouhou poznávací cestu po světě s cílem mapovat kroky českých olympioniků na jejich poutích za medailemi. Sběrka medailí v roce 2017 je navíc rekordní, okořeněna sedmi medailemi z kovu nejcennějšího.

Naši cestu začneme v daleké jihovýchodní Asii, na **Mezinárodní fyzikální olympiádě** v pořadí již 48. Konala se v Indonésii, na ostrově Jáva, ve městě Yogyakarta. Pětice českých mladých fyziků se na tomto exotickém kolbišti utkala s dalšími 395 soutěžícími z 86 zemí pěti kontinentů. Všichni naši studenti uspěli a výsledkem jsou čtyři bronzové medaile a jedna medaile stříbrná.

Zůstaneme ještě v jihovýchodní Asii, ale posuňme se na sever. Do thajského města Nakhon Pathom vyrazila na již 49. ročník **Mezinárodní chemické olympiády** čtveřice českých chemických nadějí a svedla souboje s 297 vrstevníky ze 76 světových zemí. Naši studenti si v nich vedli nadmíru úspěšně a vybojovali tři stříbrné a jednu bronzovou medaili.

Vydáme se nyní západním směrem přes Bengálský záliv do Indie a zastavíme se v městě Bhubaneswar. Právě tam proběhla v prosinci 2016 jubilejní **10. mezinárodní olympiáda v astronomii a astrofyzice**. Mezi rekordním počtem 234 soutěžících se naši mladí astronomové vůbec neztratili a domů přivezli předvánoční dárek v podobě jedné zlaté medaile, jedné bronzové medaile a tří čestných uznání.

Pokračujeme dále v severozápadním kursu a zastavme se v Íránu. Zde probíhal 29. ročník **Mezinárodní olympiády v informatice**. Hostila jej metropole Teherán. Zúčastnilo se jí 304 řešitelů z 83 států celého světa. Čtveřice mladých českých programátorů dokázala zvítězit nad záludnostmi algoritmů a získala poklad v podobě kompletní sady medailí: zlatou, stříbrnou a dvě bronzové medaile.

Pojedme ještě dále na severozápad a zastavme se krátce v Evropě. V dánské Kodani se konala letošní, celkově **15. přírodovědná olympiáda zemí Evropské unie (EUSO)**. Mezi 48 tříčlennými týmy pracujícími ve složení fyzik–chemik–biolog, z 24 států Evropské unie, se zaskvěl i český tým, který získal zlatou medaili. Za tento evropský úspěch získávají naši zlatí mimořádné ceny PRÆMIUM BOHEMIÆ.

Naše další cesta nebude dlouhá. V anglickém městě Coventry si dalo dostaveníčko světové mládež z biologie na **28. mezinárodní biologické olympiádě**. Dvě české dívky a dva mladíci bojovali s 245 přírodovědci z 64 zemí. A i na britských ostrovech cinkala celá sada medailí, ve které byly, mimo nejceněnější zlaté, dvě medaile stříbrná a medaile bronzová. Česká republika se stala nejúspěšnější evropskou delegací.

Čeká nás nejdelsí přesun na naší cestě. Ze severozápadního kursu se odchýlíme na jihozápadní a zastavíme se až v brazilském Rio de Janeiru. Tam měla své dějiště nejstarší a také největší **58. mezinárodní matematická olympiáda**. Šest českých mladých matematiků změřilo své síly v osmapadesátileté historii rekordní konkurenci 615 soutěžících ze 111 zemí. Historicky nejlepší výkon české reprezentace přinesl jednu medaili zlatou, dvě stříbrné, dvě bronzové a skvělé 14. místo v neoficiálním žebříčku zúčastněných zemí z celého světa. Zisk této sady medailí je největším úspěchem české (resp. československé) reprezentace za 58 ročníků účasti.



Obr. 2 Bohuslav Jan Horáček (1924–2002) ve středu oceněných studentů na prvním ročníku udílení cen v roce 2001 (foto B. Vybíral)

Slavnost udílení cen

Slavnostní udílení cen se konalo v den 93. narozenin mecenáše Bohuslava Jana Horáčka – v pondělí 4. prosince 2017 v zámeckém divadle na státním zámku Sychrov. Zúčastnili se nejen ocenění studenti a studentky s rodinným doprovodem, nýbrž i vzácní hosté. Mezi ně patřili představitelé přírodovědných olympiád ČR, zástupci některých škol, předseda správní rady Nadace Mgr. František Horáček a členové správní a dozorčí rady Nadace a rovněž zástupci sdělovacích prostředků. Za *Učenou společnost ČR* promluvil prof. MUDr. Jan Štěpán, DrSc. a předseda *Jednoty českých matematiků a fyziků* RNDr. Josef Kubát. Doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D., prorektor Univerzity Hradec Králové a předseda FO ve svém vystoupení seznámil přítomné s úspěchy jednotlivých českých reprezentací na světových přírodovědných olympiádách v roce 2017. Poté Mgr. František Horáček (předseda správní rady), Jan Horáček (člen správní rady a syn mecenáše) a prof. Ing. Bohumil Vybíral, CSc. předali studentům a studentkám ocenění. Za vyznamenané studenty promluvila Kateřina Kubíková, která získala na Mezinárodní biologické olympiádě zlatou medaili. Hudební vystoupení zajistili žáci Základní umělecké školy Turnov pod vedením Jiřího Richtera. Krátkou reportáž o udílení cen PRÆMIUM BOHEMIÆ 2017 zařa-

díla do večerních Událostí 4. 12. 2017 Česká televize (viz Archiv ČT na webu). Byl rovněž profesionálně pořizován videozáznam podstatných částí slavnosti a byly natočeny rozhovory s některými účastníky (videozáznam bude umístěn na internet, na stránkách You Tube).

Z děkovného projevu laureátky ceny Præmium Bohemiæ Kateřiny Kubíkové

Když jsem před mnoha lety jako malá zvědavá holčička nadšeně běhala po louce a v potoce a fascinované zkoumala všechna zvířátka, která zde žila, a kytičky, které zde rostly, ani ve snu by mě nenapadlo, že jednou budu stát zde a mluvit k vám jménem studentů oceněných tak prestižní cenou. Od chvíle, kdy byli poprvé uhranuti fungováním světa kolem, nás všechny čekala ještě dlouhá a klikatá cesta, která nás dovedla až na mezinárodní přírodovědné olympiády. Byla to ale cesta plná poznání, zážitků, zábavy a hlavně cesta, během které jsme se potkali se spoustou skvělých lidí, a z některých z nich se stali naši přátelé na celý život. Zato že jsme tuto cestu mohli projít, až do konce vděčíme především lidem v našem okolí, kteří nás při ní podporovali, ukazovali směr a možnosti – a vůbec umožnili nám dostat se až tam, kde jsme nyní.



Obr. 3 Studentka Kateřina Kubíková při děkovném projevu (foto B. Vybíral)

Možná úplně největší dík si proto zaslouží naše rodiny, přátelé a další blízcí, kteří nám položili ty úplně základy, podporovali nás nejen po dobu studia a nejen v rozvoji našich znalostí a schopností na poli přírodních

věd, poskytovali nám zázemí a vždycky jsme v nich měli obrovskou oporu. A to v mnoha chvílích u mnoha z nás vyžadovalo opravdu velkou dávku tolerance, pochopení a především trpělivosti.

Obrovský dík ale patří i našim školám a učitelům, ať již proto, že v nás svým nadšením a zápallem probudili nebo podpořili zájem o přírodní vědy, mnohdy se nám věnovali i ve svých volných chvílích, nebo proto, že díky jejich toleranci a pomoci se nám podařilo skloubit rozvoj našich zájmů, potažmo přípravu na olympiádu, se studiem. Další skupinou lidí, o kterých by zde nepochybně měla být řeč, jsou všichni ti, kteří se nějakým způsobem podílejí na chodu olympiád, a to jak na mezinárodní – ale především – na národní úrovni. Všichni lektori, organizátoři soustředění, přednášející, autoři studijních textů i zajímavých soutěžních úloh. Protože tato komunita lidí je to, co nás nejvíce odlišuje od ostatních států, kde jsou olympiády často jen ryzí testováním, organizátoři jsou odměření zkoušející, kteří považují za svůj hlavní úkol jen vybrat ty s nejlepšími schopnostmi a ne prohlubovat naše dovednosti a znalosti a hlavně předávat svůj zápal dál a motivovat tak všechny studenty, kteří o to stojí. A mnohdy právě tito lidé dali ten zásadní impuls našemu směřování a i díky nim můžeme být dnes zde. Děkujeme. A v neposlední řadě děkujeme Nadaci Bohuslava Jana Horáčka a jejím představitelům, za to, že už více než 15 let oceňují úspěchy studentů v přírodovědných oborech a dávají tak i běžné společnosti podprahový signál, existuje někdo, kdo rozvoj zájmů studentů ocení. Nesmírně si toho vážíme a ještě jednou proto nadaci děkuji.

Na závěr chci popřát všem studentům, aby měli tu možnost věnovat se naplno svým zájmům a těm, kteří budou v příštích letech Českou republiku reprezentovat, aby byli ještě úspěšnější než my, ale hlavně aby si soutěž užili a odnesli si z ní spoustu nezapomenutelných zážitků, vřelých přátelství a neocenitelných zkušeností, tak jako my.

Laureáti Præmium Bohemiæ 2017

- *Jindřich Jelínek*, zlatá medaile na 10. mezinárodní olympiádě v astronomii a astrofyzice 2016 v Indii, stříbrná medaile na 48. Mezinárodní fyzikální olympiádě 2017 v Indonésii, zlatá medaile na EUSO. Student Gymnázia v Olomouci–Hejčíně.
- *Filip Bialas*, zlatá medaile na 29. Mezinárodní olympiádě v informatice IOI 2017 v Iránu a stříbrná medaile na 58. mezinárodní matematické olympiádě 2017 v Brazílii. Absolvent Gymnázia Opatov v Praze 4, student Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

- *Kateřina Kubíková*, zlatá medaile na 28. mezinárodní biologické olympiádě v Anglii. Absolventka Gymnázia v Botičské ulici v Praze 2, studentka Přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy v Praze.
- *Pavel Turek*, zlatá medaile na 58. Mezinárodní matematické olympiádě v Brazílii. Absolvent Gymnázia v Olomouci-Hejčíně, student University of Cambridge.
- *Richard Veselý*, stříbrná medaile na 49. mezinárodní chemické olympiádě 2017 v Thajsku. Student Gymnázia Budějovická v Praze 4.
- *Jiří Ledvinka*, stříbrná medaile na 49. mezinárodní chemické olympiádě 2017 v Thajsku. Absolvent Gymnázia Opatov v Praze 4, student Fakulty chemicko-inženýrské Vysoké školy chemicko-technologické v Praze.
- *Josef Tomeček*, stříbrná medaile na 49. mezinárodní chemické olympiádě 2017 v Thajsku. Student Gymnázia Slavičín.
- *Vojtěch Brož*, stříbrná medaile na 28. mezinárodní biologické olympiádě v Anglii. Student Gymnázia Budějovická v Praze 4.
- *Lukáš Fiedler*, stříbrná medaile na 28. mezinárodní biologické olympiádě v Anglii. Student Gymnázia České Budějovice, Jírovcova 8.
- *Pavel Hudec*, stříbrná medaile na 58. mezinárodní matematické olympiádě 2017 v Brazílii. Student Gymnázia Jiřího Gutha-Jarkovského v Praze 1.
- *Richard Hladík*, stříbrná medaile na 29. mezinárodní olympiádě v informatice IOI 2017 v Íránu. Absolvent Gymnázia v Ruské ulici v Mariánských Lázních, student Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.
- *Šimon Karch*, bronzová medaile na 48. mezinárodní fyzikální olympiádě 2017 v Indonéské republice. Student Gymnázia Komenského v Havířově.
- *Ondřej Knopp*, bronzová medaile na 48. mezinárodní fyzikální olympiádě 2017 v Indonéské republice. Student Gymnázia Christiana Dopplera v Praze.
- *Matěj Mezera*, bronzová medaile na 48. mezinárodní fyzikální olympiádě 2017 v Indonéské republice. Absolvent Gymnázia Havlíčkův Brod, student Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.
- *Daniel Pajer*, bronzová medaile na 48. mezinárodní fyzikální olympiádě 2017 v Indonéské republice. Absolvent Gymnázia Jana Keplera v Praze, student Imperial College London.

- *Miroslava Novoveská*, bronzová medaile na 49. mezinárodní chemické olympiádě 2017 v Thajsku. Studentka Masarykova gymnázia v Plzni.
- *Klára Pekařová*, bronzová medaile na 28. mezinárodní biologické olympiádě v Anglii. Absolventka Gymnázia Jiřího Wolкера v Prostějově, studentka Lékařské fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.
- *Daniil Koževnikov*, bronzová medaile 58. mezinárodní matematické olympiádě 2017 v Brazílii. Student Gymnázia Jana Keplera v Praze 6.
- *Jan Petr*, bronzová medaile na 58. mezinárodní matematické olympiádě 2017 v Brazílii. Absolvent Gymnázia Jana Keplera Praha 6, student Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.
- *Jan Priessnitz*, bronzová medaile na 29. mezinárodní olympiádě v informatice IOI 2017 v Iránu. Absolvent Gymnázia na třídě Kpt. Jaroše v Brně, student Fakulty informatiky Masarykovy univerzity v Brně.
- *Jakub Suchánek*, bronzová medaile na 29. mezinárodní olympiádě v informatice IOI 2017 v Iránu. Student Gymnázia Opatov v Praze 4.
- *Lukáš Supík*, bronzová medaile na 10. mezinárodní olympiádě v astronomii a astrofyzice 2016 v Indii. Absolvent Gymnázia Třinec, student Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.
- Mimořádné ceny za zisk zlatých medailí na Přírodovědné olympiádě zemí Evropské unie EUSO 2017 v Dánsku byly uděleny týmu ve složení:
- *Jindřich Jelínek*, z Gymnázia Olomouc-Hejčín, *Richard Veselý* z Gymnázia Budějovická v Praze 4 a *Jiří Janoušek* z Gymnázia Budějovická v Praze 4.



Obr. 4 Nejúspěšnější oceněný Jindřich Jelínek, nositel tří cen PREMIUM BOHEMIE 2017

50 let Mezinárodní fyzikální olympiády (1967–2017)

RICHARD POLMA

Ústřední komise Fyzikální olympiády, Univerzita Hradec Králové

Mezinárodní fyzikální olympiáda (IPhO) je každoroční celosvětová soutěž ve fyzice pro středoškolské studenty. Koná se od r. 1967 a Československo stálo u jejího vzniku. Za její zakladatele jsou považováni 3 učitelé fyziky: *Rostislav Košťál* (Československo), *Czesław Ściśkowski* (Polsko) a *Rudolf Kunfalvi* (Maďarsko).

Zprvu soutěžily pouze země tzv. východního bloku, kde se soutěž těšila podpore od komunistických vlád. První zemí západu byla Francie (1972) souběžně s první neevropskou (Kuba) téhož roku. První nesocialistická země, která zorganizovala IPhO v Malente, byla Federativní republika Německo r. 1982. Zároveň se přistoupilo poprvé k řešení 2 experimentů [1].

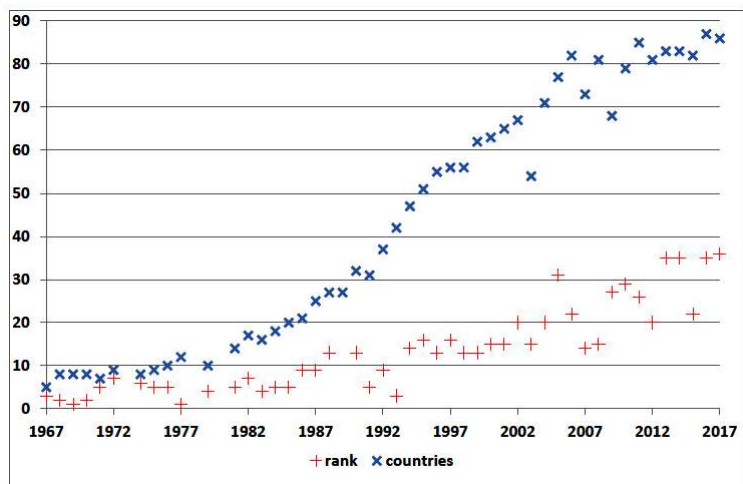
První IPhO se konala ve Varšavě v roce 1967 a účastnilo se jí 15 studentů z 5 zemí (Československo, Polsko, Maďarsko, Bulharsko a Rumunsko). Řešily se 4 teoretické úlohy a 1 experiment. V roce 2017 se účastnilo 395 soutěžících z 86 zemí – počítali 3 teoretické problémy a 2 experimenty. Ze středoevropské soutěže východního bloku se stalo celosvětově nejprestižnější utkání ve fyzice.

Za každou zemi soutěží 5 studentů a již výběr této reprezentace znamená obrovské úsilí učitelů fyziky i organizátorů olympiády. Co může být motivací pro několikaletou pilnou přípravu studenta na IPhO? Samozřejmě tato akce nabízí lákadla, a to v podobě exotiky (často ji hostí vzdálená asijská či americká země u moře), návštěvy památek, koncertů, ukázky lidových zvyků, pobytu u moře, v horách, přednášky nositele Nobelovy ceny. Ale hlavní je něco docela jiného – živý kontakt s vrstevníky, možnost porovnání se takřka face-to-face!

Taktéž za svůj vývoj pamatuje IPhO množství obtíží a skandálů. Roku 1969 probíhala v Brně za bouřlivých okolností okupace ČSSR sovětskými tanky. Celkem třikrát se nekonala, protože se nenašla pořadatelská země (1973, 78 a 80). Po nástupu asijských zemí do IPhO k tomu nedochází, neboť v případě zrušení pořádání jsou Asiaté schopni IPhO uskutečnit – jak se např. stalo na poslední chvíli pro r. 2011, kdy Belgie kvůli finanční

krizi soutěž odřekla a zorganizovalo ji Thajsko. Dvakrát byla málem zrušena v důsledku epidemie chřipky – tzv. ptačí na Taiwanu r. 2003 a prasečí v Mexiku r. 2009. Obě byly poznamenány propadem v počtu účastníků. Nejhorší organizaci pak zažila na poslední olympiádě v Indonésii 2017, kdy po celodenním čekání byl experiment o den posunut a pro nejjasnosti v hodnocení bylo upuštěno od pořadí a bodů.

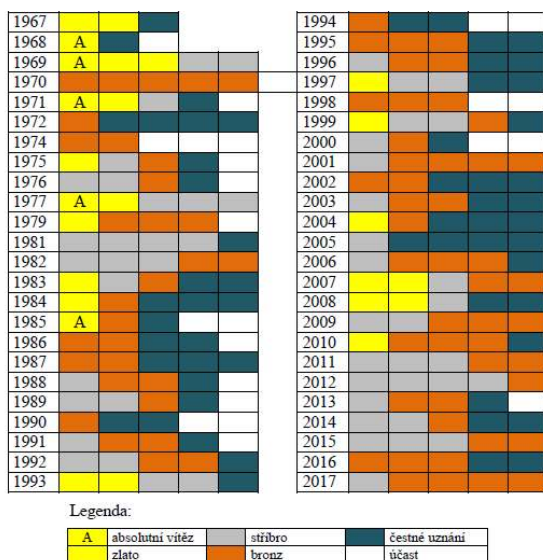
V současné době je evidentní na čelních pozicích dominance asijských zemí (Čína, Jižní Korea, Taiwan), kde jde o společenskou prestiž. Dokazuje to i např. přítomnost prezidentů Jižní Korey či Indonésie při zahájení olympiády v této zemi. Volf a Vybíral uvádějí v [2], že v rozmezí 28.–40. IPhO získalo ze 60ti Číňanů 52 zlatou medaili a 8 stříbrnou, následuje Rusko se ziskem 32 zlatých, 23 stříbrných, 3 bronzů a 2 čestných uznání. Pro srovnání: ČR získala 7 zlatých, 13 stříbrných, 22 bronzových medailí a 19 čestných uznání. Kritiku získává počet reprezentantů zemí – 5 z ČR i z Číny (10 vs. 1 400 milionů lidí). ČR se umísťuje v první třetině zemí. Blíže viz graf na obr. 1 – spodní graf ukazuje umístění ČSSR, resp. ČR a horní počet zúčastněných zemí.



Obr. 1

Za historii IPhO získali naši účastníci 25 zlatých medailí (z toho 5 absolutních vítězství – naposledy r. 1985), 53 stříbrných, 76 bronzových a 59 čestných uznání. Úspěšnost studentů je 89,9 %. Československo hostilo IPhO dvakrát (1969 a 1977).

Zajímavostí jsou též vícenásobné účasti. IPhO stanovuje jen horní věkový limit soutěžícího a neomezuje počet účastí. Ze 190 účastníků za Československo, resp. Českou republiku se jich 25 účastnilo vícekrát. Rekord se 3 účastmi drží Jan Houštěk (1998-2000) a Pavel Motloch (2005-2007). Oba mají doma kompletní sadu medailí (bronzovou, stříbrnou i zlatou). Získat 2 zlaté medaile z IPhO se povedlo jen 2 našim účastníkům – Patriku Španělovi (1984–1985 se 3. místem a absolutním vítězstvím) a Dalimilu Mazačovi (2007–2008). Za ČSR, resp. ČR, reprezentovalo na IPhO pouze 5 žen (Katarína Kis-Petríková dokonce dvakrát).



Obr. 2 Ceny IPhO 1967–2017

Jako zlatá léta výuky fyziky se u nás označují 80. léta. Např. 27. ročníku fyzikální olympiády (1985/6) se účastnilo 8 500 středoškoláků a 20 086 žáků ZŠ, v roce 1987/88 9 846 středoškoláků a 22 487 základoškoláků [3]! O takových číslech si dnes můžeme v rámci součtu ČR a SR nechat zdát. Nevedou se detailní statistiky, ale domníváme se, že jde o desetinu těchto čísel dnes.

Stojí též za srovnání vliv rozdělení ČSSR r. 1993 – Československo se účastnilo 23 IPhO a Česká republika 25. Jde tedy přibližně o stejný počet účastí. Vidíme z tabulky na obr. 2, že ubylo neúspěšných účastníků a zlatých medailí vč. absolutního vítězství. Přestože považujeme dnes úroveň

maturantů ve fyzice vzdálenou úrovní před sametovou revolucí, stále se najde skupinka nadšenců fyziky, kteří drží reprezentaci na velmi vysoké úrovni.

Nově jsem sestavil zajímavou statistiku škol ČR, které vyslaly reprezentanta na IPhO. V současné době je celostátní kolo FO doménou gymnázií. Nebylo tomu tak vždy – r. 1965 bylo 9 úspěšných průmyslováků v celostátním kole FO (ze 77), tedy 12 %. Roku 2017 stěží 1 z 50.

V následující tabulce 1 přehledně shrnuji účasti na IPhO podle středních škol. Z mého výzkumu r. 2017 vyplývá, že naši reprezentanti na IPhO 1967–2017 byli ze 77 středních škol v České republice (z celkem 1 307 středních škol v ČR, tj. 5,9 % dle statistik MŠMT z r. 2017), 70 gymnázií (z celkem 359 gymnázií, tj. 19,5 %) a 7 středních průmyslových škol. Posledními účastníky z průmyslové školy byli r. 2004 *Jana Matějová* ze SPŠ Chrudim (čestné uznání) a *Václav Potoček* ze SPŠST v Praze (bronz).

Celkem v tomto období proběhlo 237 účastí na IPhO pro 190 účastníků (někteří se účastnili víckrát). Nejvíce škol má po jedné účasti, naopak 10 a více dosáhla pouze 3 gymnázia – Dopplerovo v Praze (s neuvěřitelnými 25 účastmi z 237, tj. 10,5 %!), Kapitána Jaroše v Brně (obě považována za prestižní i v matematice) a Dašická v Pardubicích (v posledních letech s hojnou účastí na mezinárodních přírodovědných olympiádách). Za zmínku též stojí též Gymnázium Pelhřimov, jehož vyšvihli na přední místo tabulky bratři Jan Houštěk a Petr Houštěk, kteří mají 5 účastí.

Svědčí to nejen o závislosti na talentovaných jedincích, ale též na učitelích zběhlých v přípravě na FO. Naopak individualnost soutěže potvrzuje účast z gymnázií malých měst, např. Semil či Dobrušky, kde se taková reprezentace stává legendární po desetiletí.

A jak se bývalí účastníci uplatňují v praxi? Tak namátkou: Ondřej Krivánek, čestné uznání z r. 1968, založil úspěšnou firmu Nion Co. s rastrovacími mikroskopy v USA. Karel Šafařík, bronzový a zlatý medailista (absolutní vítěz) IPhO z let 1969, resp. 1971 pracuje v CERNu jako člen kolaborace experimentu ALICE a patří do elitní skupiny vědců v této instituci. Kateřina Herynková, účastnice 1990, se zabývá křemíkovými nanostrukturami ve Fyzikálním ústavu AV ČR. Petr Pošta, bronz 2003, programuje pro Allianz pojišťovnu, Arnošt Kobylka, stříbrný r. 1989, pro Microsoft. A podobných rozmanitých příkladů by bylo bezpočet. Jsem rád, že se ve světě neztratili. Všem učitelům a příznivcům fyzikální olympiády patří velký dík za podporu na této cestě! Brzy se přehoupne počet účastníků IPhO přes 400 – tolik jmen možná čeká obdobná životní dráha!

Tabulka 1 Účast na IPhO podle středních škol

počet účastí	název školy
25	G Dopplera, Praha
10	G Dašická, Pardubice, GKJ Brno
9	GJK Praha, GJKT Hradec Králové
8	G a OA Pelhřimov, G Mikulášské náměstí, Plzeň
6	G Jírovcova, České Budějovice, GPB Frýdek Místek
5	GMK Bílovec
4	G Přerov, GFMP Rychnov nad Kněžnou, GPC Karlovy Vary
3	G a SOŠPG Nová Paka, G Heyrovského, Praha, G Nad Alejí, Praha, G Sušice, G Žďár nad Sázavou, GJN, Praha, GPC Tábor
2	G Broumov, G Hejčín, Olomouc, G Křenová, Brno, G Lesní čtvrť, Zlín, G Moravský Krumlov, G Nad Štolou, Praha, G U Libeňského zámku, Praha, G Velké Meziříčí. G Vídeňská, Brno, GBN Hradec Králové, GJGJ Praha, GJV Klatovy, GJVJ České Budějovice, GLP Plzeň, GML Brno, SPŠ jaderné techniky, Praha
1	G a SOŠ Moravské Budějovice, G Blansko, G Bruntál, G Budějovická, Praha, G Česká Lípa, G Český Krumlov, G Dobruška, G Elgartova, Brno, G Havířov, G Havlíčkův Brod, G Jevíčko, G Jihlava, G Karviná, G Kladno, G Kroměříž, G Litoměřická, Praha, G Masarykovo, Vsetín, G Mladá Boleslav, G Na Pražačce, Praha, G Ohradní, Praha, G Opatov, Praha, G Polička, G Příbram, G Sladkovského, Praha, G Trutnov, G Třebíč, G Třinec, G Uherské Hradiště, G Židlochovice, GFXŠ Liberec, GIO Semily, GJAK Havířov, GJP Poděbrady, GJW Prostějov, GZW Rakovník, SPŠ a VOŠ Kutná Hora, SPŠ Chrudim, SPŠ Přerov, SPŠST Praha, SŠIEŘ Rožnov pod Radhoštěm, VOŠ a SPŠE F. Křížika, Praha

Literatura

- [1] *Gorzkowski, W.*: International Physics Olympiads (IPhO): Their history, structure and future. Dostupné z: <http://www.jyu.fi/tdk/kastdk/olympiads/>
- [2] *Volf, I.; Vybíral, B.*: Čtyřicet let mezinárodní fyzikální olympiády. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 56 (2011), č. 1, s. 64–73. Dostupné z: <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/141988>
- [3] *Volf, I., Kluvanec, D.*: Čtyřicet let fyzikální olympiády, 1999. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/dokumenty/40letF0.pdf>

Mosty (Úlohy z MO kategorie P, 36. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V tomto článku se budeme věnovat zajímavé grafové úloze, kterou jsme již vícekrát využili jako přípravnou úlohu na přednáškách pro řešitele Matematické olympiády kategorie P. Přesně v této podobě nikdy nebyla soutěžní úlohou, vznikla ovšem úpravou a rozšířením jedné praktické soutěžní úlohy z ústředního kola 47. ročníku MO-P (školní rok 1997/98). Původní soutěžní úloha nám také posloužila jako námět úplně prvního dílu našeho dlouhodobého seriálu o úlohách kategorie P matematické olympiády [1], který začal vycházet v časopise Matematika – fyzika – informatika již v roce 2000.

* * * * *

V jisté zemi mají N měst označených celými čísly od 1 do N . Mezi městy je vybudována silniční síť tvořená M obousměrnými silnicemi. Každá silnice spojuje vždy dvojici měst a je známa její délka. Všechna případná křížení silnic jsou mimoúrovňová, takže mimo města nelze přejet z jedné silnice na druhou. Některé silnice jsou vedeny přes mosty, které mají omezenou nosnost. Pro takové silnice je stanovena maximální povolená hmotnost vozidla, jaké může po silnici projet. Mezi některými dvojicemi měst přímá silnice nevede, ale z každého města lze dojet po silnicích do libovolného jiného města. Mezi každými dvěma městy vede nejvýše jedna přímá silnice. Potřebujeme převézt náklad autem z města A do města B .

- a) Zjistěte délku nejkratší cesty z města A do města B . Určete, přes která města tato cesta vede. Pokud existuje více různých cest téže minimální délky, zvolte z nich jednu libovolnou.

- b) Zjistíte hmotnost nejtěžšího možného vozidla s nákladem, jaké může přejet po silnicích z města A do města B . Určete, přes která města povede cesta takového vozidla. Pokud existuje více různých cest, po nichž lze přepravit maximální náklad, zvolte z nich jednu libovolnou.
- c) Zjistíte délku nejkratší cesty z města A do města B . Určete, přes která města tato cesta vede. Pokud existuje více různých cest téže minimální délky, vyberte z nich tu, po které můžeme převézt co nejtěžší náklad. Existuje-li více takových cest, zvolte z nich jednu libovolnou. Určete také maximální hmotnost vozidla s nákladem, jaké může projet po nejkratší cestě z města A do města B .
- d) Zjistíte hmotnost nejtěžšího možného vozidla s nákladem, jaké může přejet po silnicích z města A do města B . Určete, přes která města povede cesta tohoto vozidla. Pokud existuje více různých cest, po nichž lze přepravit maximální náklad, vyberte z nich tu nejkratší. Existuje-li více takových cest, zvolte z nich jednu libovolnou. Určete také délku nejkratší cesty z města A do města B , po níž lze převézt maximální možný náklad.
- e) Jak se změni řešení úloh a), b), c), d), když připustíme, že mezi některými dvojicemi měst vede více přímých silnic s různým ohodnocením (silnice jsou různě dlouhé, resp. mají různá omezení maximální povolené hmotnosti vozidla)? Může se tedy třeba stát, že mezi jistými městy X a Y vede jednak krátká přímá silnice, na níž je ale značně omezena hmotnost vozidel, a zároveň jiná delší silnice, kde ale žádné omezení hmotnosti vozidel není.

Vstupní data:

Na prvním řádku vstupu jsou zadána čtyři kladná celá čísla N , M , A , B . První z nich N udává počet měst, předpokládejte $N < 1\,000$. Druhé číslo M určuje celkový počet silnic. Následující čísla A , B představují výchozí a cílové město hledané trasy – jsou to celá čísla z rozmezí od 1 do N . Na dalších M řádcích vstupu jsou zadány informace o jednotlivých silnicích. Každý z těchto řádků je tvořen čtyřmi kladnými celými čísly popisujícími vždy jednu silnici: první dvě z nich jsou čísla měst, mezi nimiž silnice vede (čísla z rozmezí od 1 do N), třetí číslo udává délku silnice v kilometrech (celé číslo z rozmezí od 1 do 100) a čtvrté maximální povolenou hmotnost vozidla v kilogramech (celé číslo z rozmezí od 1 do 10 000). Je-li čtvrtou hodnotou na řádku 0, znamená to, že hmotnost vozidel na této silnici není omezena.

Na první pohled je zřejmé, že se jedná o grafovou úlohu. Silniční síť představuje souvislý neorientovaný graf s ohodnocenými hranami. Každá hrana grafu má přiřazeny dvě hodnoty – délku silnice a případné omezení maximální přípustné hmotnosti vozidel. Pro jednoduchost si můžeme představit, že omezení hmotnosti vozidel je stanoveno pro každou hranu a že má hodnotu „nekonečno“, jestliže na příslušné silnici žádný most není. V základním zadání úlohy graf neobsahuje žádné mutihrany (tj. více hran spojujících stejnou dvojici vrcholů). Na závěr se v podúloze e) ještě zamyslíme, co by se na našem řešení změnilo, kdybychom multihrany připustili.

Zadaný graf si můžeme reprezentovat nejlépe pomocí seznamů následníků jednotlivých vrcholů. Jedná se o neorientovaný graf, takže přímou silnici mezi městy X , Y si musíme uložit dvakrát: vrchol X bude zařazen do seznamu následníků vrcholu Y a také naopak vrchol Y bude zařazen do seznamu následníků vrcholu X . Silnice mají dvoje ohodnocení – délku a maximální přípustnou hmotnost vozidel. V každém záznamu v seznamu následníků proto budou zapsány také tyto dvě hodnoty.

Jinou možností uložení grafu by byla matice vzdáleností. To je matice velikosti $N \times N$, jejíž prvky obsahují ohodnocení jednotlivých hran. V našem případě by tedy každý prvek matice obsahoval dvě hodnoty, a to délku silnice a její hmotnostní omezení. Tato reprezentace grafu je ovšem pro naši úlohu méně vhodná. Představuje větší paměťové nároky i pomalejší výpočet – kdykoliv potřebujeme najít všechny sousedy zvoleného vrcholu, museli bychom v matici projít celý řádek délky N . Navíc bychom v části e) ještě narazili na technický problém, jak si uložit multihrany. Tuto variantu reprezentace grafu v programu proto raději nepoužijeme.

Úloha a)

V této části úlohy chceme nalézt nejkratší cestu z města A do města B bez ohledu na případné omezení hmotnosti vozidel. Všechna ohodnocení hran grafu jsou kladná, takže pro hledání nejkratší cesty v grafu mezi danými dvěma vrcholy můžeme využít dobře známý Dijkstrův algoritmus. Připomeňme si ve stručnosti, jak Dijkstrův algoritmus pracuje (podrobnější popis včetně programu najdete například v učebnici [2] nebo na internetu v textu [3]). Pro každý vrchol U budeme počítat jeho hodnotu, která udává délku dosud nejkratší nalezené cesty z počátečního vrcholu A do příslušného vrcholu U . Navíc budeme evidovat, zda je tato hodnota zatím jenom dočasná (možná ji ještě zlepšíme, tzn. snížíme), nebo zda je již trvalá. Na začátku výpočtu má vrchol A má hodnotu 0 (jsme tam,

nemusíme nikam chodit) a všechny ostatní vrcholy grafu mají hodnotu „nekonečno“ (zatím jsme do nich žádnou cestou nedorazili). Všechny vrcholy mají dočasnou hodnotu.

Vlastní výpočet se odehrává v postupných krocích. V každém kroku výpočtu nejprve najdeme vrchol X s nejmenší dočasnou hodnotou a tuto hodnotu prohlásíme za trvalou. To si můžeme dovolit díky nezápornému ohodnocení hran, v grafu se záporně ohodnocenými hranami by toto nemuselo platit. Následně všem vrcholům sousedícím s vrcholem X , které zatím mají dočasnou hodnotu, zkusíme tuto jejich dočasnou hodnotu zlepšit. Pokud se do takového vrcholu Y dostaneme přes vrchol X kratší cestou, než jakou nejlepší cestu z A do Y jsme dosud našli, pak hodnotu vrcholu Y patřičně snížíme. Novou hodnotou vrcholu Y se v tom případě stane součet hodnoty vrcholu X a délky hrany XY . Zároveň si poznamenáme, že nejlepší hodnotu vrcholu Y jsme získali pomocí vrcholu X , neboli že předchůdcem vrcholu Y na nejkratší cestě z A do Y je právě vrchol X . Výpočet probíhá tak dlouho, dokud nezíská cílový vrchol B trvalou hodnotu. Ta potom určuje délku nejkratší cesty z A do B .

Po určení délky nejkratší cesty z A do B zbývá ještě zjistit, kudy tato cesta vede. K tomu nám poslouží uložené informace o tom, kdo je předchůdcem kterého vrcholu na nejkratší cestě. Celou cestu zrekonstruujeme odzadu tzv. zpětným chodem. Začneme od cílového vrcholu B , ten zná svého předchůdce, ten zase svého předchůdce atd. Takto postupujeme, dokud nedojdeme až do počátečního vrcholu A . Pokud z vrcholu A do vrcholu B existuje více různých cest téže minimální délky, pak popsany algoritmus vyhledá tu z nich, kterou našel jako první.

Časová složitost závisí na způsobu implementace. Výpočet nejkratších vzdáleností vyžaduje provést v nejhorším případě až N kroků, pokud koncový vrchol B získá trvalou hodnotu až jako poslední. V každém kroku výpočtu představuje nalezení vrcholu s minimální dočasnou hodnotou práci $O(N)$, jsou-li hodnoty vrcholů uloženy jednoduše v poli, které musíme sekvencně procházet. Následné přepočítání hodnot sousedních vrcholů zvládneme jistě také v čase $O(N)$. To vede k hornímu odhadu časové složitosti celého algoritmu $O(N^2)$. Zpětný chod je pak už jednoduchý průchod nejvýše N vrcholy s časovou složitostí $O(N)$. V odborné literatuře se můžete dočíst o časově výhodnější implementaci Dijkstrova algoritmu, pokud si hodnoty vrcholů ukládáme například do haldy. Možnostem takové časové optimalizace se v našem článku nebudeme věnovat, jsou uvedeny třeba ve studijním textu [3].

Úloha b)

K řešení úlohy b) můžeme přistoupit různými způsoby. Jednou možností je vyjít z pozorování, že hmotnost nejtěžšího možného vozidla s nákladem, jaké může přejet po silnicích z města A do města B , bude jistě rovna hmotnostnímu limitu některé z existujících silnic. Takových různých hodnot je nejvýše M . Pro každou z těchto hodnot stačí ověřit, zda vozidlo příslušné hmotnosti dokáže přejet po silnicích z města A do města B , neboli zda vrcholy A, B leží ve stejné komponentě souvislosti, jestliže z grafu vynecháme všechny hrany s nižším hmotnostním limitem. Z vyhovujících hodnot vezmeme tu nejvyšší. Tím máme určenu optimální hmotnost vozidla a pro takové vozidlo pak již snadno najdeme nějakou cestu z města A do města B po vyhovujících silnicích například prohledáváním grafu do šířky. Časová složitost tohoto algoritmu je $O(M(M + N))$. Uvažujeme až M různých hmotností vozidla a pro každou z nich určujeme komponentu souvislosti grafu obsahující vrchol A , což představuje práci $O(M + N)$. Závěrečné vyhledání cesty z A do B prohledáváním do šířky má časovou složitost $O(M + N)$, což výslednou asymptotickou složitost celého řešení $O(M(M + N))$ nijak neovlivní.

Výpočet můžeme urychlit, pokud nebudeme zkoušet všech M potenciálních hodnot hmotnosti vozidla. Tyto hodnoty můžeme v čase $O(M \log M)$ uspořádat v poli a nejvyšší použitelnou pak mezi nimi vyhledat metodou půlení intervalů. To vyžaduje provést pouze $\log M$ kroků, v nichž stejně jako dosud testujeme, zda vrcholy A, B leží v téže komponentě souvislosti grafu. Asymptotická časová složitost celého výpočtu se tím sníží na $O(M \log M + (M + N) \log M)$, což můžeme zjednodušit na $O((M + N) \log M)$. V grafu bez multihran můžeme celkový počet hran M shora odhadnout pomocí N^2 , takže odhad výsledné časové složitosti můžeme zapsat také jako $O((M + N) \log N)$.

Ukážeme si ještě jiný způsob řešení. Úloha b) vypadá na první pohled velmi podobně jako úloha a), takže se nabízí také ji řešit obdobným způsobem a použít k řešení Dijkstrův algoritmus. Musíme ale navrhnout jeho vhodnou modifikaci, jelikož s hodnotami vrcholů grafu nyní budeme počítat trochu odlišným způsobem. Každému vrcholu V našeho grafu přiřadíme hodnotu, která bude určovat nejvyšší hmotnost vozidla, jaké jsme zatím dokázali dopravit z města A do města V . Opět si zavedeme evidenci, zda je tato hodnota dočasná (mohla by se ještě zlepšit, tzn. zvýšit), nebo už trvalá. Na začátku výpočtu mají všechny vrcholy dočasnou hodnotu – vrchol A má hodnotu „nekonečno“ (jsme tam s jakýmkoliv vozidlem bez

omezení hmotnosti) a všechny ostatní vrcholy grafu mají hodnotu 0 (zatím jsme do nich nedojeli s žádným nákladem).

V každém kroku výpočtu najdeme vrchol X s největší dočasnou hodnotou a tu označíme za trvalou. Poté všem vrcholům sousedícím s vrcholem X , které zatím mají dočasnou hodnotu, zkusíme tuto jejich dočasnou hodnotu zlepšit. Pokud se do takového vrcholu Y dostaneme přes vrchol X s těžším vozidlem, než jaké jsme dosud z A do Y dopravili, pak hodnotu vrcholu Y patřičně zvýšíme. Novou hodnotou vrcholu Y se v tom případě stane minimum z hodnoty vrcholu X a hmotnostního limitu hrany XY . Do města Y totiž může dojet po přímé silnici z města X nejvýše takové vozidlo, jaké dojede z A do X a může pak také dále pokračovat po silnici XY . Zároveň si poznamenáme, že nejlepší hodnotu vrcholu Y jsme získali pomocí vrcholu X , neboli že předchůdcem vrcholu Y na nejvýhodnější cestě z A do Y je právě vrchol X . Výpočet probíhá tak dlouho, dokud nezíská cílový vrchol B trvalou hodnotu. Ta potom určuje hmotnost nejtěžšího vozidla, jaké dojede z A do B . Nalezení průběhu optimální cesty zpětným chodem pomocí zaznamenaných předchůdců se oproti klasickému Dijkstrovu algoritmu nijak nezmění.

Vidíme, že průběh popsání řešení přesně kopíruje Dijkstrův algoritmus z řešení úlohy a), jenom místo výběru minima vybíráme ve vrcholech maximum a místo počítání součtu počítáme minimum. Stejná proto zůstane i asymptotická časová složitost algoritmu – při jednoduché implementaci s hodnotami vrcholů uloženými v poli je to $O(N^2)$.

Úloha c)

Úloha c) přímo navazuje na obě předchozí úlohy a), b). Nyní chceme zvolit nejlepší cestu podle dvou kritérií. Chceme nalézt co nejkratší cestu z města A do města B a existuje-li více takových různých cest téže minimální délky, máme vybrat tu z nich, kudy převezeme co nejtěžší náklad.

Základem řešení bude Dijkstrův algoritmus popsáný v řešení úlohy a). Algoritmus ovšem musíme trochu doplnit, aby z více cest téže optimální délky nebral jednoduše první nalezenou, ale aby se v takovém případě rozhodoval podle druhého kritéria. Tím je co největší hmotnost vozidla, které může projet po nalezené cestě. K úpravě algoritmu dojde pouze v jednom místě. Když hodnotu vrcholu X prohlásíme za trvalou a zkoumáme, zda můžeme zlepšit hodnotu sousedního vrcholu Y , může se stát, že se dosaďadní hodnota vrcholu Y přesně rovná součtu hodnoty vrcholu X a délky hrany XY . To znamená, že nyní přicházíme do vrcholu Y z vrcholu X po cestě stejné délky, jakou měla dosud nejlepší nalezená cesta vedoucí

z vrcholu A do vrcholu Y . Z hlediska určení nejkratší cesty z A do B je v takovém případě jedno, zda záznam o předchůdci vrcholu Y ponecháme beze změny, nebo zda ho změníme na X . Ovlivníme tím jenom to, kterou z více možných cest téže minimální délky algoritmus nakonec při zpětném chodu vyhledá (pokud ovšem vůbec bude vrchol Y ležet na nejkratší cestě z A do B). A to je přesně ten okamžik, kdy k rozhodnutí o předchůdci vrcholu Y použijeme druhé kritérium.

Zbývá ukázat, jak popsanou myšlenku zrealizujeme. Hodnotám jednotlivých vrcholů, s nimiž počítá řešení úlohy a), budeme nadále říkat „první hodnota“. Ke každému vrcholu grafu si teď uložíme ještě jeho „druhou hodnotu“, která bude určovat maximální hmotnost vozidla, jaké může do tohoto vrcholu dojet z výchozího vrcholu A – ovšem pouze po dosud nejkratší nalezené cestě!

Kdykoliv přijdeme z vrcholu X do vrcholu Y po nějaké kratší cestě a budeme díky tomu snižovat první hodnotu vrcholu Y a zároveň měnit záznam o předchůdci vrcholu Y , přepočítáme zároveň i druhou hodnotu vrcholu Y . Novou druhou hodnotou vrcholu Y se stane minimum z druhé hodnoty vrcholu X a hmotnostního omezení hrany XY . Do vrcholu Y může totiž přijet z vrcholu X nejvýše tak těžké vozidlo, jaké může dojet ze startu A do vrcholu X a následně může také projet po přímé silnici z X do Y . Je to úplně stejný způsob výpočtu, jaký jsme použili již v řešení úlohy b). Poznamenejme, že druhá hodnota vrcholu Y se tím může i snížit oproti stávajícímu stavu, tedy může se zhoršit. K tomu dojde v případě, že jsme našli kratší cestu z A do Y , která ale připouští pouze lehčí vozidla.

Kdykoliv přijdeme z vrcholu X do vrcholu Y po cestě stejné délky, jakou jsme našli již dříve, rozhodneme se o případné změně předchůdce vrcholu Y podle druhého kritéria. Spočítáme si minimum z druhé hodnoty vrcholu X a z hmotnostního omezení hrany XY . Toto číslo porovnáme s dosavadní druhou hodnotou vrcholu Y . Je-li spočtené číslo větší, znamená to, že jsme se právě dostali do vrcholu Y po cestě sice stejné délky, ale s těžším vozidlem. To je pro nás zlepšení. V takovém případě proto druhou hodnotu vrcholu Y patřičně zvýšíme a záznam o nejlepším předchůdci vrcholu Y změníme na X .

Na vyhledání cesty zpětným chodem podle zaznamenaných předchůdců se pak už nic nemění. Provedenou úpravou se nijak nezmění ani asymptotická časová složitost algoritmu, stejně jako v úloze a) bude rovna $O(N^2)$. Podrobnější popis jiné varianty Dijkstrova algoritmu s více kritérii včetně programové realizace si můžete přečíst v učebnici [2].

Úloha d)

Úloha d) vypadá velmi podobně jako úloha c), prohazuje pouze prioritu obou kritérií při výběru cesty. Chceme nalézt cestu z A do B umožňující převezení co nejtěžšího nákladu a z více takových cest zvolit tu nejkratší. Mohlo by se tedy zdát, že řešení obou těchto úloh budou prakticky stejná, jenom se prohodí pořadí obou použitých kritérií. Tak by tomu skutečně bylo v případě jiné dvojice uvažovaných kritérií, například kdybychom pro každou silnici znali vedle její délky ještě očekávanou dobu jízdy, chtěli bychom nalézt nejkratší cestu z města A do města B a z více takových stejně dobrých možností zvolit tu s nejkratší dobou jízdy. Doby jízdy v jednotlivých navazujících úsecích cesty se totiž stejně jako délky cest jednoduše sčítají. V zadané úloze ale pracujeme s maximální povolenou hmotností vozidla a v tomto případě se namísto součtu počítá minimum. Tato zdánlivá maličkost vede k tomu, že pouhé prohození pořadí obou kritérií výběru nefunguje. Ukážeme si to nejlépe na jednoduchém příkladu.

Použijeme Dijkstrův algoritmus se dvěma kritérii, kde prvním kritériem nyní bude maximální přípustná hmotnost vozidla a druhým minimální délka cesty. Algoritmus se tedy snaží do každého vrcholu především dopravit z počátečního vrcholu A co nejtěžší vozidlo a pokud toho lze dosáhnout více způsoby, zvolí z nich tu cestu, která je co nejkratší. Podle toho budeme v jednotlivých vrcholech průběžně přepisovat záznamy o předchůdci na nejlepší cestě obdobným způsobem, jako jsme to dělali v řešení úlohy c). Předpokládejme, že z vrcholu A vede přímá silnice do vrcholu Y délky 10 km s omezením hmotnosti vozidel do 5 000 kg. Dále je možné jet z vrcholu A do vrcholu Y oklikou přes vrchol X po cestě o celkové délce 20 km, kudy ale mohou projet vozidla o hmotnosti až 8 000 kg. Konečně z vrcholu Y vede přímá silnice do vrcholu B délky 5 km s omezením hmotnosti vozidel do 3 000 kg. Jiné silnice v grafu nejsou. Uvažovaný algoritmus označí za trvalé vrcholy v pořadí A , X , Y , B . Při zpracování vrcholu Y zvolí za výhodnější tu cestu, která vede přes vrchol X , neboť tato cesta umožňuje dopravit do vrcholu Y těžší náklad (8 000 kg), než přímá silnice z A do Y (5 000 kg). Předchůdcem vrcholu Y na nejlepší cestě se proto definitivně stane vrchol X . V té době algoritmus ještě netuší, že vzhledem k hmotnostnímu omezení následující silnice YB se stejně do cíle dostane nejvýše vozidlo o hmotnosti 3 000 kg. Cílový vrchol B tak nakonec dostane správnou výslednou hodnotu 3 000 kg, ale při výpisu optimální cesty zpětným chodem pomocí zaznamenaných předchůdců dostaneme chybně cestu $A-X-Y-B$ (25 km), ačkoliv cesta $A-Y-B$ také umožňuje projet vozidlo o hmotnosti 3 000 kg a je navíc kratší (15 km).

Vidíme, že Dijkstrův algoritmus se dvěma kritérii v tomto případě nelze použít a k řešení budeme muset přistoupit jiným způsobem. V první fázi určíme pouze hmotnost nejtěžšího vozidla, jaké může dojet z vrcholu A do vrcholu B (označme ji V). Hodnotu V získáme kterýmkoliv ze způsobů uvedených v řešení úlohy b). Můžeme použít třeba výše uvedenou modifikaci Dijkstrova algoritmu, kde se místo součtů budou počítat minima a v každém kroku se bude uzavírat vrchol s dosud maximální, nikoliv minimální dočasnou hodnotou. Výsledkem této fáze výpočtu je hmotnost V , nebudeme zatím hledat průběh cesty zpětným chodem. Ve druhé fázi pak chceme nalézt nejkratší cestu vozidla o hmotnosti V z města A do města B . Přitom již víme, že taková cesta existuje. Z grafu můžeme vypustit všechny hrany s hmotnostním limitem menším než V , tzn. nebudeme uvažovat ty silnice, po nichž nesmí projet vozidlo této váhy. V takto upraveném grafu najdeme nejkratší cestu z A do B použitím standardního Dijkstrova algoritmu, tzn. stejně jako v řešení úlohy a).

Obě fáze výpočtu mají při jednoduché implementaci s hodnotami uloženými v poli asymptotickou časovou složitost $O(N^2)$, vypuštění zakázaných hran mezi oběma fázemi jistě zvládneme v čase $O(M)$, což lze v grafu bez multihran shora odhadnout také pomocí $O(N^2)$. Celková časová složitost celého řešení je tudíž opět rovna $O(N^2)$.

Úloha e)

Dosud jsme neuvažovali možnost, že by mezi některými dvojicemi měst vedlo více silnic s různými parametry, tedy že by v grafu existovaly multihrany. Pokud takovou možnost připustíme, v řešení úlohy a) se vůbec nic nezmění. Jediným kritériem je zde pro nás délka zvolené cesty. Kdyby mezi dvojicí měst X , Y vedly dvě silnice různé délky, delší z nich se ve výsledné cestě zcela jistě neuplatní. Kdyby takové dvě silnice XY měly stejnou délku, pak stačí uvažovat jednu libovolnou z nich. Problém multihran tedy snadno vyřešíme již při čtení vstupních dat, kdy si pro každou dvojici měst zapamatujeme pouze jednu ze spojujících silnic – vždy tu nejkratší.

Stejným způsobem vyřešíme případné multihrany také v úloze b). Zde nás na silnicích zajímají pouze omezení hmotnosti vozidel. Z více přímých silnic spojujících dvojici měst X , Y stačí při hledání cesty co nejtěžšího vozidla uvažovat pouze jednu – tu, která je nejméně vhodná, která připouští co největší hmotnost projíždějících vozidel. Všechny ostatní silnice můžeme opět vynechat již při čtení vstupních dat.

Podobná situace nastává i při řešení úlohy c), v níž pracujeme již se dvěma výběrovými kritérii. Prioritním kritériem je zde pro nás délka zvolené cesty. Proto stejně jako v úloze a) platí, že kdyby mezi dvojicí měst X , Y vedly dvě silnice různé délky, delší z nich se ve výsledné cestě zcela jistě nepoužije. Pokud by takové dvě silnice měly stejnou délku, ale lišily by se v omezení hmotnosti vozidla, stačí zase uvažovat jenom tu z nich, která připouští průjezd těžšího vozidla. Problém multihran tak opět vyřešíme při čtení vstupních dat, kdy si pro každou dvojici měst uložíme pouze jednu nejvýhodnější ze spojujících hran (co nejkratší, příp. z více takových tu s nejvyšším hmotnostním limitem).

V úloze d) je ovšem situace odlišná. Pokud mezi městy X , Y vedou dvě přímé silnice, z nichž první umožňuje převézt těžší náklad, ale druhá je kratší, nemůžeme předem vyloučit ani jednu z nich. Nyní má při výběru cesty přednost maximální povolená hmotnost vozidla, takže by se zdálo, že vždy dáme přednost té první silnici. Hmotnostní omezení platná na silnicích v ostatních částech výsledné cesty mohou však způsobit, že stejně nemůžeme z města A do města B žádným způsobem dovézt těžší náklad, než kolik připouští druhá z uvažovaných silnic mezi městy X , Y . Přitom volba této druhé silnice povede k celkově kratší cestě z A do B , takže součástí optimální cesty ve skutečnosti bude druhá silnice. Popsanou situaci dobře demonstruje jednoduchý příklad uvedený v řešení úlohy d). V tomto případě se tedy nemůžeme předem zbavit multihran již při čtení vstupních dat, jako jsme to udělali v předchozích třech úlohách. Musíme si všechny přímé silnice uložit do vhodné datové struktury reprezentující naši silniční síť a pracovat s nimi při hledání výsledné cesty. Vypustit bychom mohli jediné takovou přímou silnici mezi městy X , Y , která by byla horší z obou uvažovaných hledisek ve srovnání s nějakou jinou přímou silnicí spojující města X , Y (tzn. zrušit můžeme pouze takovou silnici, která je delší a zároveň také povoluje průjezd pouze pro lehčí vozidla).

Na závěr pro úplnost dodejme, že v původní soutěžní úloze 47. ročníku Matematické olympiády kategorie P se řešila pouze jistá varianta naší podúlohy d). Na silnicích se místo mostů nacházely tunely, které omezovaly maximální možnou výšku vozidel. To je ovšem změna pouze kosmetická, která na principu řešení vůbec nic nemění. Druhou odlišností bylo, že nebyly zadány délky jednotlivých silnic. Místo hledání nejkratší cesty pro nejvyšší možné vozidlo se hledala taková cesta, kudy nejvyšší možné vozidlo projede z výchozího do cílového města přes co nejmenší počet měst. Hledanou cestu v neohodnoceném grafu tak bylo možné získat prohledává-

ním grafu do šířky, zatímco my jsme v naší úloze pracovali s ohodnoceným grafem a využili jsme proto Dijkstrův algoritmus. Zadání i řešení původní soutěžní úlohy uvádí internetový archiv úloh MO kat. P uložený na adrese [4] a podrobněji ho popisuje článek [1].

Literatura

- [1] *Töpfer, P.*: Úlohy z MO – kategorie P. MFI, roč. 9 (1999–2000), č. 6, s. 375–379.
- [2] *Töpfer, P.*: Algoritmy a programovací techniky. Prometheus, Praha, 1995 a 2007.
- [3] <http://ksp.mff.cuni.cz/kucharky/halda-a-cesty/>
- [4] <http://mo.mff.cuni.cz/p/archiv.html>

Jak počítal první programovatelný počítač?

INGRID NAGYOVÁ

Pedagogická fakulta OU, Ostrava

Prvenství v konstrukci programovatelného počítače je přisuzováno německému inženýrovi Konrádovi Zuse, který v roce 1938 sestrojil první elektromechanický stroj. Tento stroj s názvem Z1 pracoval s čísly ve dvojkové soustavě a byl ovladatelný pomocí programu zadávaného na děrné pásce. Počítač Z1 byl velmi poruchový a proto nevhodný pro praktické využití. Odstartoval však vývoj dalších, daleko sofistikovanějších počítačích strojů a vedl nakonec ke konstrukci počítače tak, jak jej známe dnes. Počítače Konráda Zuse byly využity ve válce a před koncem války byly zničeny při náletu. Archiv prací Konráda Zuse lze dnes najít i na internetu [1]. K záznamům o konstrukci počítačů se o několik desetiletí později vrátil profesor Raúl Rojas, který ukázal, že počítače Z1 a Z3 jsou i přes absenci podmíněných skoků Turingovsky úplné. Zaměřil se také na rekonstrukci počítačích strojů Konráda Zuse [2]. Replika počítače Z1 se dnes nachází v Technickém muzeu v Berlíně. Panoramatickou vizualizaci počítače a simulaci výpočetního procesu lze také sledovat na [3].

Dále se seznámíme se stavbou a principy práce prvních počítačů. Jejich konstrukce je velice jednoduchá, lze ji vysvětlit žákům sedmých ročníků základní školy. I přesto, že předpokládá znalosti počítání ve dvojkové soustavě, kromě převodů čísel z a do dvojkové soustavy není pro simulaci práce prvních počítačů potřeba dalších matematických znalostí. Poznání principů práce prvních počítačů a výpočty na schématech reprezentujících model počítače mohou naopak objasnit spojitost počítačů s počítáním ve dvojkové soustavě.

Na začátku naznačíme nutné úpravy algoritmu pro sčítání čísel ve dvojkové soustavě s ohledem na konstrukci počítačů. Algoritmus bude dále aplikován na modelu prvního počítače. V závěru článku naznačíme, jak uvedené informace použít při seznámení žáků základní nebo střední školy s historií vzniku počítačů a s jeho základními principy, které platí dodnes.

Sčítání čísel ve dvojkové soustavě

Sčítání čísel ve dvojkové soustavě se řídí následujícími pravidly:

$$0 + 0 = 0 \quad (1)$$

$$1 + 0 = 0 + 1 = 1 \quad (2)$$

$$1 + 1 = 10 \quad (3)$$

Vztah (3) znamená, že jedna plus jedna je nula, s tím, že jednička v čísle $(10)_2$ se přenáší do vyššího řádu.

Pomocí vztahů (1) až (3) lze sečíst libovolná čísla ve dvojkové soustavě běžným způsobem odzadu. Výpočet je jednoduchý, pokud nemusí být uplatněno pravidlo (3), nebo pokud je toto pravidlo použito pouze v nejvyšším řádu.

1001	1010	1001
0010	100	1100
1011	1110	10101

Další postup sčítání při uplatnění pravidla (3) představíme a upravíme tak, aby byl později realizovatelný na jednoduchém počítacím stroji. Navíc v informatice je strukturou paměti omezena práce s čísly jednotlivými bajty. Pro jednoduchost využijeme velikost jednoho bajtu, tj. 8 bitů a jednotlivá čísla ve výpočtu budeme zapisovat jako osmici čísel 0 nebo 1 – dané číslo ve dvojkové soustavě doplněné zleva vedoucími nulami.

V prvním kroku sečteme jednotlivá dvojková čísla běžným způsobem uplatněním pravidel (1) až (3) odzadu.

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad (\text{A})$$

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 1 & 10 & 10 \end{array} \quad (4)$$

Výsledek kroku (A) tvoří posloupnost $c_1 \dots c_8$ čísel ve dvojkové soustavě, kde c_1 je první číslice zleva (0), c_2 je druhá číslice (opět 0) atd., c_8 je poslední číslice $(10)_2$.

Dále převedeme jedničky z čísel $(10)_2$ v posloupnosti $c_1 \dots c_8$ do vyššího řádu jejich přičtením k aktuálnímu výsledku. V první řádce následujícího výpočtu se nachází cifry posloupnosti $c_1 \dots c_8$ v řádu jednotek (viz posloupnost $c_1 \dots c_8$, pouze místo čísel $(10)_2$ jsou zde uvedeny 0). Do druhého řádku sepíšeme jedničky z čísel $(10)_2$ posloupnosti $c_1 \dots c_8$, které ale připočítáme o řád výše, tj. zapisujeme je posunuté o jedno místo vlevo.

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \quad (\text{B})$$

$$\begin{array}{cccccccc} & & & 1 & & 1 & 1 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 10 & 1 & 0 \end{array} \quad (5)$$

Výsledek kroku (B) tvoří posloupnost $a_1 \dots a_8$ čísel ve dvojkové soustavě. Tato posloupnost nemusí být konečným výsledkem sčítání dvou čísel ve dvojkové soustavě. Mohou se zde vyskytovat čísla $(10)_2$ vyžadující přenos do vyššího řádu (viz výsledek kroku (B)). Opakovaně proto uplatníme pravidlo z kroku (5). Pro získání konečného výsledku je v našem případě nutné uplatnit toto pravidlo ještě dvakrát.

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 1 & & & & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & 1 & & & & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Počet opětovných úprav výsledku podle pravidla (5) může být i vyšší (než třikrát v našem případě). Opakování je sice přirozenou činností počítače, snížení počtu opakování vede ale k úspoře času výpočtu a paměťového místa v počítači. Vraťme se proto k posloupnosti $a_1 \dots a_8$, která vznikla jako výsledek kroku (B) a sledujme její vlastnosti.

Věta o úpravě výsledku

Pro posloupnost $a_1 \dots a_8$ platí následující tvrzení:

- Hodnota $a_n \neq (10)_2$.
- Pokud $a_i = (10)_2$ pro $i \neq n$, pak $a_{i-1} \neq (10)_2$ a $a_{i+1} \neq (10)_2$.

- c) Pokud $a_i = (10)_2$ a $a_j = (10)_2$ pro $i < j$, pak existuje k , $i < k < j$ tak, že $a_k = 0$.

Při důkazu tvrzení je potřeba vyjít z konstrukce posloupnosti $a_1 \dots a_n$, viz kroky (A) a (B).

ad a) Tvrzení vyplývá přímo z konstrukce posloupnosti. Hodnota a_n odpovídá nultému řádu výsledného čísla. V kroku (B) se zde již nic nepřipočítává. Hodnota se upravuje pouze v případě, že $c_n = (10)_2$, tehdy je po úpravě hodnota $a_n = 0$.

ad b) Hodnota $a_i = (10)_2$ vznikne v kroku (B) pouze v případě, že $c_i = 1$ a $c_{i+1} = (10)_2$.

Hodnota a_{i+1} vzniká z $c_{i+1} = (10)_2$. Proto $a_{i+1} = 0$, pokud c_{i+2} neexistuje nebo pokud existuje a je jednociferné, nebo $a_{i+1} = 1$, pokud $c_{i+2} = (10)_2$. V obou případech je a_{i+1} jednociferné, tj. $a_{i+1} \neq (10)_2$.

Víme, že $c_i = 1$, pak $a_{i-1} = c_{i-1}$, pokud je c_{i-1} jednociferné, nebo $a_{i-1} = 0$, pokud je $c_{i-1} = (10)_2$. V obou případech je $a_{i-1} \neq (10)_2$.

ad c) Existence jednociferného čísla a_k v posloupnosti vyplývá z bodu b), pro $k = j - 1$ je $a_{j-1} \neq (10)_2$.

Pokud $a_i = (10)_2$, pak $c_{i+1} = (10)_2$. Pak existuje $n \geq 1$, že $\forall p \in \langle 1, n \rangle$, $p \in \mathbb{N}$: $c_{i+p} = (10)_2$. Pak uplatněním pravidla (4) $a_{i+n} = 0$ a $\forall p \in \langle 1, n \rangle$: $a_{i+p} = 1$. Hledané $k = i + n$. Podle předpokladu je $a_j = (10)_2$, tj. $k < j$.

Tvrzení b) říká, že v posloupnosti $a_1 \dots a_n$ se vyskytuje číslo $(10)_2$ vždy izolovaně, jako jednotlivé dvojciferné číslo. Z tvrzení c) vyplývá, že mezi dvěma hodnotami $(10)_2$ se vždy vyskytuje hodnota 0. Výpočet součtu dvou čísel v dvojkové soustavě může být dokončen tak, že posloupnost vzniklou v kroku (B) upravíme následovně:

Pokud $\exists j$: $a_j = (10)_2$, pak vyhledáme $k < j$: $a_k = 0$ a vybereme největší takové k . Výsledná posloupnost $t_1 \dots t_n$ vznikne z posloupnosti $a_1 \dots a_n$ tak, že $t_j = 0$, $t_k = 1$ a $\forall i \in \mathbb{N}$, $i \in \langle k + 1, j - 1 \rangle$: $t_i = 0$. (C)

Řečeno slovy – jednička se přenáší do vyššího řádu odzadu postupnou změnou všech jedniček před ní na nuly, až dokud nenarazíme na první nulu. Přepisem nuly na jedničku přenos končí.

Je důležité si uvědomit, že hodnota k nemusí obecně existovat, tj. $\forall k < j$: $a_k \neq 0$. Pokud by existovalo $a_k = (10)_2$ pro nějaké $k < j$, pak podle tvrzení c) existuje l , $k < l < j$ a $a_l = 0$. Pak bychom položili $k = l$ a pravidlo (C) by mohlo být uplatněno. Proto hledané k neexistuje pouze v případě, že $\forall k < j$: $a_k = 1$. V matematice problém řešíme přidáním dalšího číselného řádu – připsáním jedničky před výsledek. V informatice je číselné počítání omezeno strukturou paměti a „připsání jedničky

před výsledek“ nemusí být z důvodu tzv. přetečení možné. V dalším budeme pro jednoduchost předpokládat, že k přetečení při výpočtech nedochází, tj. že součet čísel je omezen velikostí jednoho bajtu (číselně 0 až 255). Aplikací kroku (C) na posloupnost (5) dostáváme výsledné řešení: $00101(10)10 \rightarrow 00110010$.

Ukážeme si, jak lze naznačený algoritmus sčítání aplikovat při seznámení se s principy práce prvních programovatelných počítačů. Nejprve vystavíme schéma části počítače určené pro výpočty. Na schématu ukážeme proces sčítání dvou čísel v dvojkové soustavě. Současně s jednotlivými kroky algoritmu sčítání uvádíme úlohy, které lze pro nácvik algoritmu v dané etapě řešit.

Sčítání na prvních počítačích

Základní pravidla (1) až (3) pro sčítání dvojkových čísel lze vyjádřit pomocí dvou logických funkcí – exklusivního logického součtu (XOR) a logického součinu (AND) – viz tabulka 1. Funkce XOR určuje hodnotu výsledku sčítání a funkce AND případný přenos do vyššího řádu.

Tab. 1 Součet dvojkových čísel a funkce AND a XOR

A	B	+	A AND B	A XOR B
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	10	1	0

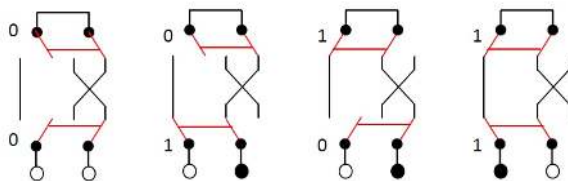
Logickou funkci AND mohou zastoupit dva spínače řazené za sebou (obr. 1 vlevo). Proud obvodem prochází pouze v případě, že jsou oba spínače zapnuté. Logickou funkci XOR dostaneme překřížením spojení mezi spínači (obr. 1 vpravo) (křížení bez vodivého spojení). Proud obvodem prochází pouze v případě, že je jeden spínač v poloze nahoře a druhý v poloze dole, tj. jeden spínač je zapnutý a druhý vypnutý.



Obr. 1 Zapojené spínače – logické funkce AND a XOR

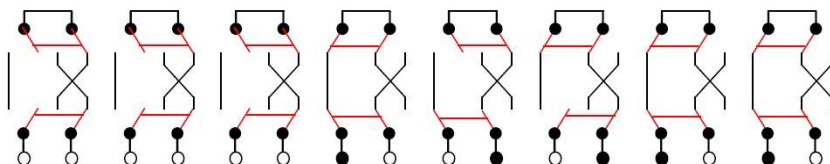
Kombinací propojení pro logické funkce AND a XOR lze získat hradlo, které dokáže sečíst dvě jednociferná dvojková čísla (obr. 2). Jedno hradlo obsahuje čtyři prepínače, vždy dva a dva jsou spřažené – spojují a rozpojují se současně. Každá dvojice spínačů umožňuje nastavit dva stavy:

0 (vypnuto) a 1 (zapnuto). Vlevo je propojení pro funkci AND – její výsledek je vlevo dole. Propojení vpravo odpovídá logické funkci XOR (výsledek funkce je vpravo dole). Výsledky funkcí jsou vypočteny automaticky na základě propojení spínačů.



Obr. 2 Hradlo pro sčítání dvou jednociferných dvojkových čísel

Podle předpokladu práce s jedním bajtem budeme sčítat maximálně osmiciferná dvojková celá čísla, tj. čísla v rozmezí 0 až 255 (jeden bajt). K provedení kroku (A) podle naznačeného algoritmu budeme potřebovat osm hradel (obr. 3), součet čísel $(101)_2 = (5)_{10}$ a $(11010)_2 = (26)_{10}$ (na obrázku jsou čísla doplněna zleva vedoucími nulami). Dolu na hradlech (větší kolečka) získáváme výsledek výpočtu. Pokud výpočet nevyžaduje přenos do vyššího řádu, je výsledek na hradlech konečný a lze ho odečíst podle hodnot na hradlech vpravo: $(0001111)_2 = (31)_{10}$.



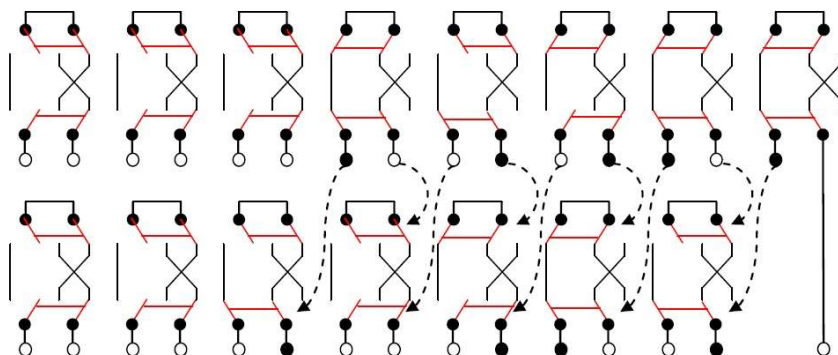
Obr. 3 Sčítání dvojkových čísel na řadě hradel

Úloha 1

Na řadě osmi hradel sečtěte daná čísla. Odečtěte výsledky a zkontrolujte správnost převodem do desítkové soustavy.

- a) $(1001)_2 + (10)_2$ b) $(101011)_2 + (10000)_2$ c) $(20)_{10} + (5)_{10}$

Situace je komplikovanější, pokud je v některém kroku výpočtu nutný přenos do vyššího řádu, tj. když je nutný převod jedniček z dvojkových čísel $(10)_2$ (obr. 2, hradlo vpravo). K provedení kroku (B) budeme potřebovat řadu dalších sedmi hradel (obr. 4). Výsledné hodnoty na horní řadě hradel ovlivní nastavení dolní řady hradel následovně (značeno na obr. 4 šipkami):



Obr. 4 Přenos jedniček do vyššího řádu

- Hodnota na výstupu horního hradla vpravo ovlivní horní spínač dolního hradla.
- Hodnota na výstupu horního hradla vlevo ovlivní dolní spínač dolního hradla nacházejícího se v řadě na předchozím místě (přenos do vyššího řádu).

Úloha 2

Na dvouřadové soustavě hradel sečtete daná čísla. Odečtete výsledky a zkontrolujte správnost převodem do desítkové soustavy.

a) $(1001)_2 + (1010)_2$ b) $(101011)_2 + (100010)_2$ c) $(24)_{10} + (19)_{10}$

Na závěr je nutné provést konečnou úpravu výsledku. Postupujeme podle závěrů vyplývajících z věty o úpravě výsledku – krok (C). Přenos provedeme v dolní řadě spínačů dolních hradel (obr. 5), přenos opět naznačují šipky. Konečný výsledek lze odečíst z dolní řady hradel podle hodnoty na hradle vpravo – označeno šedými kolečky.

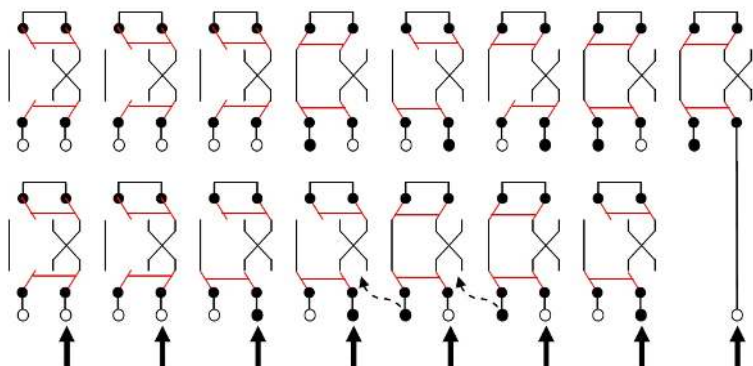
V praxi na prvním počítači Konráda Zuseho bylo nutné přenos (viz krok (C)) realizovat pomocí dalších hradel a jejich speciálního zapojení, které zde nebudeme dále rozebírat. Princip spočívá v opakovaném využití dolní řady spínačů, jak je to v úvodu naznačeno v kroku (B).

Vzhledem k omezení počtu hradel v řadě na 8 lze naznačeným algoritmem správně sečítat libovolná čísla, jejichž součet nepřekročí 255.

Úloha 3

Na dvouřadové soustavě hradel sečtete daná čísla. Odečtete výsledky a zkontrolujte správnost převodem do desítkové soustavy.

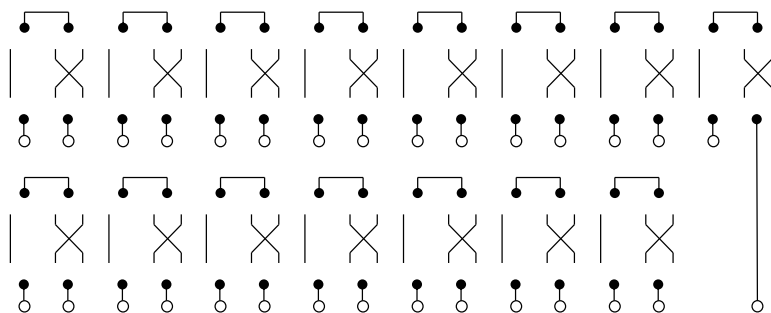
a) $(1111)_2 + (1010)_2$ b) $(101011)_2 + (100110)_2$ c) $(25)_{10} + (19)_{10}$



Obr. 5 Konečná úprava – přenos do vyššího řádu

Využití ve výuce

Kromě základních historických faktů, poměrně málo známých, lze uvedený postup použít při práci s žáky základní nebo střední školy. Žáci pracují s šablonou (obr. 6) a postupně se seznamují s postupem výpočtu. Využíváme k tomu úlohy se stoupající obtížností tak, jak jsou uvedené výše.



Obr. 6 Šablona pro práci žáků

Čísla podle zadání žáci nejprve převedou do dvojkové soustavy. Podle dvojkové reprezentace čísel vyznačí situaci na horní řadě hradel – naznačí polohu spínačů a výsledek v hodní řadě hradel (větší kolečka). Pro jednoduché příklady (viz úloha 1) zde výpočet skončí.

Složitější úlohy vyžadují využití dolní řady spínačů. Postup je naznačen v textu – od nastavení spínačů dolní řady podle výsledků v horní řadě až po přenos (viz krok (C)).

V praktické výuce se ukazuje pro žáky paradoxně nejobtížnější krok A, a to zejména zápis čísel do horní řady hradel. Pochopení práce spřažených spínačů se ukazuje značně obtížné i přesto, že se jedná o jednoduché překreslování z tabule (dataprojektoru) podle obr. 2. Žáci, ale ze zkušenosti ani studenti na vysoké škole, se s podobnými koncepty obvykle ještě neselekali a ve výuce je nutné počítat s delším časem než lze s žáky postoupit dále. Samotný algoritmus pak už není pro pochopení natolik obtížný.

Nutno poznamenat, že při práci s žáky nezmiňujeme důvody, proč sčítání doopravdy funguje, jak to naznačuje tento článek. Zaměřujeme se pouze na zvládnutí práce podle daného algoritmu. Vybrané části algoritmu vysvětlujeme pouze žákům, kteří projeví o tyto informace zájem, a to vždy s ohledem na jejich schopnost porozumění.

Ze zkušenosti lze doložit, že práci se schématem prvního počítače podle daného algoritmu zvládnou žáci 7. třídy.

Téma prvních počítačů a jejich konstrukce je podle informací učitelů ve výuce informatiky velice časté. Učitele ho rádi zapojují, protože jako jedno z mála témat umožňuje frontální výklad. Přesto obecné povědomí o konstrukci prvních počítačů je, podle rozhovorů se studenty učitelství informatiky, poměrně zkreslené.

Domníváme se, že výklad pravdivých historických faktů doplněný o konkrétní praktickou ukázkou práce prvního počítače může být dobrou a hlavně správnou motivací pro žáky a jejich vztah k informatice. Schéma prvního počítače, pochopení algoritmu výpočtu a schopnost postupovat podle tohoto algoritmu, jsou základními koncepty informatiky a informatického myšlení. Tyto koncepty, přesto, že ukazují na pravou podstatu informatiky jako vědy, jsou ve výuce informatiky na školách často opomíjeny.

V rozhovoru se studenty učitelství informatiky se často ukazuje, že práce s dvojkovou soustavou vnímají jako matematické téma, které s informatikou souvisí pouze okrajově. Práce se schématem prvního počítače dává smysl a význam výuce převodů mezi číselnými soustavami a umožňuje pochopit myšlenky, které stály u zrodu prvních počítačů.

Literatura

- [1] Konrad Zuse Internet Archive. [online] [cit. 2016-07-15] Dostupné z: <http://zuse.zib.de/>
- [2] Rojas, R.: Reconstruction of the Z1 computer. [online] [cit. 2016-07-15] Dostupné z: <http://dcis.inf.fu-berlin.de/rojas/reconstruction-of-the-z1-computer/>
- [3] Architecture and Simulation of the Z1 Computer. [online] [cit. 2016-07-15] Dostupné z: <http://zuse-z1.zib.de/index.html>

ZPRÁVY

Celostátní kolo FO 2018

LUKÁŠ RICHTERK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Celostátní kolo kategorie A 58. ročníku Fyzikální olympiády (FO) hostil ve školním roce 2017/2018 Liberecký kraj. Pořadatelem bylo *Gymnázium Dr. Antona Randy* v Jablonci nad Nisou (<https://randovka.cz>) a nad soutěží převzal záštitu náměstek hejtmana pro resort školství, mládeže, tělovýchovy, sportu a zaměstnanosti *Petr Tulpa*. Na základě výsledků krajských kol soutěže, jež proběhla 24. 1. 2018, přijelo změřit své síly celkem 47 soutěžících (z toho 5 dívek).

Atmosféru začátku soutěže podtrhl i ohňostroj, kterým město navzdory mrazivému počasí velkolepě vítalo jiné olympioniky – 14 sportovců, kteří ČR reprezentovali na nedávných ZOH v Pchjongčchangu.

Slavnostní zahájení samotného celostátního kola FO proběhlo v historickém sále Hotelu Praha v úterý 27. února 2018. Večer s přehledem moderoval ředitel gymnázia *RNDr. Tomáš Hofrichter, Ph.D.* a účastníky z celé republiky spolu se členy Ústřední komise FO a dalšími pozvanými hosty pozdravili rektor Technické univerzity v Liberci *doc. RNDr. Miroslav Brzezina, CSc.* a děkan Fakulty mechatroniky, informatiky a mezioborových studií *TUL prof. Ing. Zdeněk Plíva, Ph.D.* Hudební doprovod zajistila studentská skupina *Jazztet z jablonecké ZUŠ*. Poté pořadatelé pozvali všechny účastníky na raut.

Ve středu 28. 2. dopoledne čekaly soutěžící v učebnách gymnázia čtyři teoretické úlohy, s nimiž se museli vypořádat během pěti hodin. Autorem všech úloh byl

stejně jako v předchozím roce *RNDr. Jan Thomas* (První české gymnázium Karlovy Vary).

První úloha s názvem *Sonda Curiosity* se zabývala radioaktivním rozpadem v souvislosti s napájením vesmírné sondy radioizotopovým generátorem. Řešitelé za ni získali v průměru 6,3 bodu z deseti možných, a podle názoru poroty nejoriginálnější řešení vypracoval *Filip Keller* (G P. de Coubertina, Tábor).

Ve druhé úloze s názvem *Míjení lodí* bylo možné s výhodou využít přechod do soustavy spojené s jednou z pohybujících se lodí a řešit pouze relativní pohyb druhé lodi. Při průměrném zisku 3,4 bodu porota ocenila zejména postup *Pavla Hudce* (G J. Gutha-Jarkovského, Praha 1).

Třetí úloha *Přenos náboje* se zabývala přenášením náboje mezi dvěma vodivými koulemi. Pro soutěžící byla zřejmě nejobtížnější, neboť dosáhl v průměru nejméně, 3,2 bodu, a nejvíce zaujalo řešení *Šimona Karcha* (G Havířov-Město).

Čtvrtá úloha s názvem *Zamrzání jezero* navazovala na studijní text [1] a vzhledem k mrazivému počasí téměř aktuálně nabídl model zamrzání i tání levdové vrstvy na vodní hladině. Soutěžící získali v průměru 5,2 bodu a porota ocenila jako nejzdařilejší přístup *Jakuba Suchánka* (G Opatov, Praha 4). Závěrečnou redakci zadání i autorského řešení úloh provedl *RNDr. Jan Šlégr, Ph.D.* z PříF Univerzity Hradec Králové.

Ve čtvrtek 1. 3. dopoledne se soutěžící autobusem přesunuli do areálu Technické univerzity v Liberci, kde ve dvou skupinách řešili praktickou úlohu, jejímž autorem byl *Ing. Miloš Hermych* a která se týkala určení permitivity plastové destičky s provrtanými otvory. Studenti pomocí alobalových polepů vyrobili kondenzátor, jehož kapacitu určovali z rezonanční křivky pomocí osciloskopu; úloha tak mimo jiné prověřila, nakolik soutěžící zaskočí používání tohoto přístroje. Získali v průměru 7,2 bodu a nejlepším

experimentátorem porota vyhlásila *Michala Jízu* (G Benešov).

K celostátnímu kolu tradičně patří i bohatý navazující program. Ve středu 28. 2. odpoledne byla připravena exkurze do známé firmy *Jablotron*, která se zaměřuje především na zabezpečovací a komunikační systémy, dále workshopy věnované detektorům a částicové kameře této firmy i ukázka foukání skla panem *Karlem Sobotkou*, držitelem titulu živnostník roku 2013, z Těpeří u Železného Brodu. Poté následovala přednáška vítěze ceny Neuron za fyziku *Dr. rer. nat. Lukáše Palatinuse* a beseda se spolujatelem *Jablotronu* a mecenášem *Daliborem Dědkem*. Příjemným zpestřením po celém dnu s fyzikou bylo večerní volejbalové a pingpongové klání v městské hale. Ve čtvrtek 1. 3. proběhly exkurze do laboratoří a specializovaných pracovišť TUL i přednáška *prof. Ing. Pavla Mokrého, Ph.D.* na téma „Metamateriály: principy, aplikace, zajímavosti“, po níž následovala přibližně dvouhodinová exkurze do science centra iQLANDIA.

Poslední den, v pátek 2. 3. dopoledne, proběhlo v prostorách magistrátu v Jablonci nad Nisou vyhlášení výsledků. Účastníky pozdravil náměstek primátora pro rozvoj města *JUDr. Ing. Lukáš Pleticha*. Skutečné medaile zhotovené Technickou univerzitou v Liberci předával proděkan pro vnější vztahy a studium v anglickém jazyce Fakulty mechatroniky, informatiky a mezioborových studií *Ing. Miloš Hernych*. Tři nejúspěšnější řešitelé dostali každý kromě jiných cen šek na 10 000 Kč od společnosti ČEZ. Uvedme základní statistické údaje: jedenáct účastníků se stalo vítězi, dvacet jedna úspěšnými řešiteli a patnáct účastníky soutěže. Celkové průměrné hodnocení všech úloh bylo 25,3 bodu, tj. 42,2 % z možných 60. Na vítěze kromě zajímavých cen čekala i pozvánka na výběrové soustředění pořádané Katedrou fyziky Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové, z něhož vzejde pětice reprezentantů na 49. Mezinárodní

fyzikální olympiádě, která proběhne od 21. do 29. července 2018 v portugalském Lisabonu (viz <http://ipho2018.pt>). Pomyslnou zlatou medaili vybojoval *Pavel Hudec* (G J. Gutha-Jarkovského, Praha 1), stříbrnou *Šimon Karch* (G Havířov-Město) a bronzovou *Jindřich Jelínek* (Gymnázium Olomouc-Hejčín).

Uspořádání celostátního kola je nemyslitelné bez podpory a pomoci řady organizací a společností v regionu. Věcnými i finančními dary akci podpořili: *Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Liberecký kraj, město Jablonec nad Nisou, Technická univerzita Liberec, Nadace Jablotron, skupina ČEZ, a Jednota Českých matematiků a fyziků*. Ubytí všem poskytl Domov mládeže při SOŠ. Zejména je však třeba poděkovat obětavým organizátorům z pořadajícího jabloneckého gymnázia – řediteli *RNDr. Tomáši Hofrichterovi, Ph.D.* a předsedovi krajské komise FO Libereckého kraje *Mgr. Jindřichu Pulíčkovi*, kteří se rozhodující měrou zasloužili o hladký průběh soutěže a příjemnou pracovní atmosféru.

Pro příští školní rok v jubilejním 60. ročníku FO přebírá organizátorskou štafetu Královéhradecký kraj, kam účastníky pozval *Mgr. Václav Šáda*. Zájemci a příznivci soutěže najdou všechny potřebné aktuální informace včetně zadání i řešení úloh na čtenářům MFI jistě dobře známých internetových stránkách ÚKFO www.fyzikalniolympiada.cz.

Literatura

- [1] *Volf, I., Jarešová, M., Ouhřabka, M.*: Přenos tepla. Knihovnička FO, č. 44. MAFY, Hradec Králové 2007. Dostupné z: fyzikalniolympiada.cz/texty/texttz.pdf.

Výsledková listina celostátního kola

Vítězové

1. Hudec Pavel (G J. Gutha-Jarkovského, Praha 1, 41,5 b, 199,2 mb), 2. Karch Šimon (G Havířov-Město, 40,5 b, 178,2 mb), 3. Jelínek Jindřich (G Olomouc-Hejčín, 39,5 b,

185,8 mb), 4. Jiříště Lukáš (G Děčín, 39 b, 158,2 mb), 5. Kubiček Václav (Arcibiskupské G Kroměříž, 38,5 b, 183,7 mb), 6. Jireš Michal (G F.M.Pelcla Rychnov nad Kněžnou, 38 b, 177,6 mb), 7. Suchánek Jakub (G Opatov, Praha 4, 38 b, 165,5 mb), 8. Orság Martin (G a SOŠZE Vyškov, 37 b, 179,8 mb), 9. Svoboda Filip (G Brno, Elgartova, 37 b, 177,3 mb), 10. Novoveská Miroslava (Masarykovo G Plzeň, 35 b, 145,6 mb), 11. Jůza Michal (G Benešov, 34,5 b, 129,7 mb).



Řešení teoretických úloh

Úspěšní řešitelé

12. Minařík Josef (G tř. Kpt. Jaroše Brno, 34 b, 172,5 mb), 13. Mudruňka Kamil (G Pardubice, Dašická, 33 b, 133,1 mb), 14. Červený Lukáš (G Trutnov, 30 b, 137,5 mb), 15. Koževnikov Danil (G J.Keplera Praha, 29,5 b, 146 mb), 16. Rosická Kateřina (G J.Ortena, Kutná Hora, 29,5 b, 138,7 mb), 17. Ritter John Richard (G Třebíč, 28,5 b, 116,4 mb), 18. Žák Jan (G Pardubice, Dašická, 28,5 b, 107,4 mb), 19. Pískovský Vít (G O.Havlové, Ostrava-Poruba, 27,5 b, 120,6 mb), 20. Hořák Jaroslav (G F.X.Šaldy Liberec 11, 27 b, 132,1 mb), 21. Balej Karel (G a SOŠ Rokycany, 27 b, 112,3 mb), 22. Rosman Viktor (G a OA Pelhřimov, 27 b, 98,8 mb), 23. Burešová Soňa (G J.Heyrovského, Praha 5, 26 b, 109,7 mb), 24. Veselý Richard (G Budějovická, Praha 4, 25 b, 130 mb), 25. Holý Matěj (G J.Vrchlického Klatovy, 25 b, 114,8 mb), 26. Minařík Michal (G Trutnov, 24,5 b, 123,1 mb), 27. Faikl Tomáš (G Pardubice, Dašická, 23 b, 101,6 mb), 28. Kle-

ment David (G Praha 6, Nad Alejí 1952, 22 b, 109,5 mb), 29. Vařečka Vojtěch (G a SOŠPg Čáslav, 22 b, 83,8 mb), 30. Starý Dominik (G Benešov, 21,5 b, 110,3 mb), 31. Królikowski David (G Karviná, 21,5 b, 87,9 mb), 32. Koňářík Filip (G F. Palackého Valašské Meziříčí, 20,5 b, 110,1 mb).



Stříbrný *Šimon Karch* při řešení teoretických úloh



Řešení experimentální úlohy



Nejllepší dívka v soutěži *Miroslava Novoveská* (10. místo)

© Foto: Gymnázium Dr. Antona Randy, Jablonec nad Nisou