

## Rezonanční křivka – portrét oscilátoru

OLDŘICH LEPIL

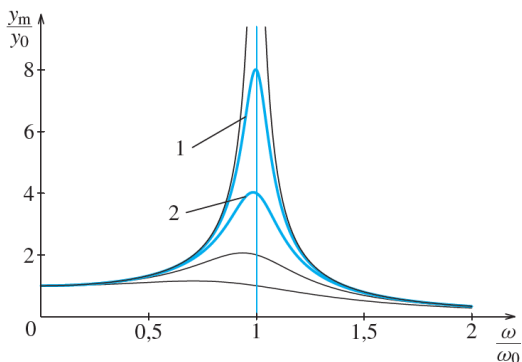
Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Učivo o mechanickém kmitání a vlnění má v učebnicích zpravidla tradiční uspořádání, při kterém výklad postupuje od volného kmitání oscilátoru bez tlumení, přes tlumené kmitání k nucenému kmitání, kdy na oscilátor působí vnější síla s harmonickým průběhem. Výklad tohoto učiva na střední škole se soustředí hlavně na netlumený oscilátor s cílem, popsat časový průběh harmonického kmitání a určit klíčové veličiny kmitavého pohybu, především závislost periody, popř. frekvence kmitání na parametrech oscilátoru. Nejméně pozornosti je obvykle věnováno nucenému kmitání, které je však z hlediska technické praxe nejdůležitější.

Poznatky o nuceném mechanickém kmitání můžeme považovat za prekoncept učiva o elektromagnetickém kmitání, jehož struktura je odlišná. Jedním z nejdůležitějších témat učiva elektromagnetismu jsou totiž poznatky o střídavých proudech, které jsou vlastně nuceným kmitáním elektrických obvodů s různými parametry. Teprve v závěru učiva elektromagnetismu se dospívá k oscilačnímu obvodu jako objektu, který volně kmitá s úhlovou frekvencí určenou jeho parametry. Tato koncepce učiva o elektromagnetickém kmitání má možná historické kořeny, kdy se poznatky o střídavých proudech vztahovaly především k fyzikálním základům energetiky, a oscilační obvod se dostal „na pořad dne“ později v souvislosti s vývojem radiotechniky. V každém případě je v tomto učivu zcela klíčovým poznatkem *jev rezonance*, který má významný přesah i do dalších oblastí fyziky.

Výklad rezonance ve středoškolských učebnicích je převážně kvalitativní, kdy se jen konstatuje, že rezonance, čili nucené kmitání s maximální amplitudou vzniká při shodě úhlové frekvence  $\omega$  nucených kmitů s vlastní úhlovou frekvencí oscilátoru  $\omega_0$ . Tento poznatek je dokumentován *rezonanční křivkou*, což je *amplitudová frekvenční charakteristika oscilátoru*. Je zobrazena jako závislost amplitudy výchylky  $y_m$  oscilátoru na úhlové frekvenci nuceného kmitání:  $y_m = f(\omega)$ . Graf rezonanční křivky nemá triviální průběh a v učebních textech (nejen středoškolských, jak se lze přesvědčit na webu) se setkáváme s rezonančními křivkami nakreslenými „od ruky“, takže často ani neodpovídají realitě, popř. se autoři učebního textu zobrazení rezonanční křivky raději vyhnou.

Nástup „počítačové éry“ výrazně napomohl k řešení tohoto problému a tak první, zcela korektní vyobrazení v našich středoškolských učebnicích najdeme až v 3. přepracovaném vydání učebnice [1] (obr. 1), kde vyobrazení vytvořil programem METAPOST *P. Šedivý*. Text učebnice je také prvním krokem ke kvantitativnímu popisu rezonance mechanického oscilátoru na středoškolské úrovni. Pro jednoduchost je v učebnici [1] řešena jen rezonance ideálního mechanického oscilátoru bez tlumení. V tomto příspěvku ukážeme další možnosti podrobnějšího seznámení s rezonancí na středoškolské úrovni, tzn. s použitím matematického aparátu dostupného žákovi střední školy.



Obr. 1 Resonanční křivka mechanického oscilátoru

## Rezonance mechanického oscilátoru

Dalším krokem ke kvantitativnímu výkladu kmitavého pohybu mechanického oscilátoru je poslední vydání učebnice *Mechanické kmitání a vlnění* [2]. V rozšiřujícím učivu na CD je vyložena pohybová rovnice tlume-

ného kmitání pružinového oscilátoru, v níž  $b$  je konstanta odporu prostředí, tzn. závislosti odporové síly na rychlosti kmitavého pohybu (Stokesův zákon),

$$ma = -ky - bv,$$

a pohybová rovnice nuceného kmitání netlumeného oscilátoru

$$ma = -ky + F_m \sin \omega t.$$

Tyto rovnice upravíme jako *rovnici nuceného kmitání tlumeného oscilátoru*

$$a + \frac{b}{m}v + \frac{k}{m}y = \frac{F_m}{m} \sin \omega t.$$

Tlumené kmitání charakterizuje *součinitel tlumení*  $\delta$ , pro který platí

$$\delta = \frac{b}{2m},$$

a podíl parametrů oscilátoru  $k$  a  $m$  určuje *vlastní úhlovou frekvenci*  $\omega_0$  oscilátoru

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Rovnici upravíme

$$a + 2\delta v + \omega_0^2 y = \frac{F_m}{m} \sin \omega t \quad (1)$$

a do upravené rovnice dosadíme za jednotlivé kinematické veličiny jejich časové závislosti (viz [2, s. 23, tab. 1-3]). Doplníme předpoklad, že v závislosti na frekvenci nuceného kmitání se bude měnit také fáze  $\varphi$  těchto veličin vzhledem k síle, která kmitání oscilátoru vynucuje. Dostaneme rovnici

$$-\omega^2 y_m \sin(\omega t + \varphi) + 2\delta \omega y_m \cos(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 y_m \sin(\omega t + \varphi) = \frac{F_m}{m} \sin \omega t.$$

Tato rovnice platí pro všechna  $t$ , takže ji můžeme zjednodušit řešením pro dva konkrétní časové okamžiky  $t_1$  a  $t_2$ , které zvolíme tak, že platí:

$$\text{a) } (\omega t_1 + \varphi) = 0 \Rightarrow \omega t_1 = -\varphi,$$

$$\text{b) } (\omega t_2 + \varphi) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega t_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi.$$

Dosazením hodnot okamžitých fází  $\omega t_1$  a  $\omega t_2$  do rovnice nuceného kmitání získáme pro zvolené časové okamžiky rovnice:

$$\text{pro } t_1: \quad 2\delta \omega y_m = -\frac{F_m}{m} \sin \varphi,$$

$$\text{pro } t_2: \quad -\omega^2 y_m + \omega_0^2 y_m = \frac{F_m}{m} \cos \varphi.$$

Sečteme druhé mocniny těchto rovnic a po úpravě získáme vztah pro *amplitudu výchylky nucených kmitů* v závislosti na úhlové frekvenci nuceného kmitání:

$$y_m = \frac{F_m}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}. \quad (2)$$

Veličina  $F_m$  je velikost síly, jejímž působením se těleso oscilátoru při  $\omega = 0$  (oscilátor nekmitá) vychýlí z rovnovážné polohy do vzdálenosti  $y_{m0}$ . V případě pružinového oscilátoru, jehož pružina se deformuje podle Hookeova zákona, platí

$$\frac{F_m}{y_{m0}} = k \Rightarrow y_{m0} = \frac{F_m}{k}.$$

Dělením rovnic pro  $t_1$  a  $t_2$  najdeme také vztah pro závislost fáze ( $\text{tg } \varphi$ ) veličin nuceného kmitání na frekvenci (*fázová frekvenční charakteristika*):

$$\text{tg } \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (3)$$

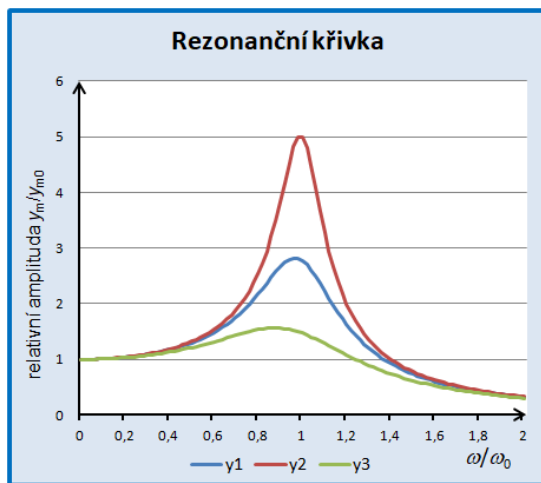
Na základě vztahu (2) byl vytvořen model M4.2 na CD k učebnici [2], který pomocí tabulkového procesoru MS Office Excel, popř. LibreOffice Calc umožňuje podrobněji se seznámit s průběhem rezonančních křivek tří mechanických oscilátorů a vlivu tlumení na tvar rezonanční křivky (obr. 2).<sup>1)</sup>

V tomto příspěvku ukážeme, jaké další informace o oscilátoru lze z rezonanční křivky vyčíst a jak v praxi slouží k jeho celkové charakteristice. K tomu si zavedeme vedle již zmíněných veličin další, souhrnnou veličinu – *činitele jakosti oscilátoru*  $Q$ . Hodnota činitele jakosti vyplývá z úvah o přeměnách energie v oscilátoru s tlumením a zahrnuje v jedné fyzikální veličině jak úhlovou frekvenci vlastního kmitání  $\omega_0$ , tak součinitel tlumení  $\delta$ . Činitel jakosti je těsně spjat s tvarem rezonanční křivky: 1. s výškou rezonanční křivky, 2. se šířkou rezonanční křivky. Další úvahy se budou týkat oscilátoru s malým tlumením ( $\delta \ll \omega_0$ ).

1. Výška rezonanční křivky odpovídá maximální amplitudě  $y_{mrez}$  při úhlové frekvenci  $\omega = \omega_0$  a činitel jakosti je definován jako poměr této amplitudy a výchylky oscilátoru  $y_{m0}$  při úhlové frekvenci  $\omega = 0$ . Dosazením do vztahu (2) určíme činitel jakosti  $Q$

$$Q = \frac{y_{mrez}}{y_{m0}} = \frac{\frac{F_m}{m} \frac{1}{2\delta\omega_0}}{\frac{F_m}{k}} = \frac{k}{m} \frac{1}{2\delta\omega_0} = \frac{\omega_0}{2\delta}. \quad (4)$$

<sup>1)</sup>V popisu modelu na CD se vyskytla tisková chyba, kterou je třeba opravit podle vztahu (2).



Obr. 2 Rezonanční křivky oscilátorů s různým tlumením

Činitel jakosti je tedy v podstatě zesilovací činitel oscilátoru. Určuje, kolikrát větší je amplituda kmitů při rezonanci, než výchylka  $y_{m0}$ :  $y_{mrez} = = Qy_{m0}$ .

2. Činitel jakosti charakterizuje ztráty energie oscilátoru způsobené tlumením. Pro definici činitele jakosti je zvoleno zmenšení maximální energie  $E_{rez}$ , kterou má oscilátor při rezonanční frekvenci  $\omega_0$ , na poloviční hodnotu  $E = E_{rez}/2$ . Vzhledem ke tvaru rezonanční křivky může mít oscilátor poloviční energii při dvou úhlových frekvencích  $\omega_1 < \omega_0$  a  $\omega_2 > \omega_0$ . Pro maximální energii oscilátoru při rezonanční frekvenci platí

$$E_{rez} = \frac{1}{2}mv_{mrez}^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2y_{mrez}^2.$$

Při malém tlumení je rezonanční křivka v okolí rezonanční frekvence  $\omega_0$  poměrně strmá a úhlové frekvence  $\omega_1$  a  $\omega_2$ , při nichž je energie oscilátoru poloviční, se od rezonanční frekvence příliš neliší:  $\omega_{1,2} = \omega_1 = \omega_2 \approx \omega_0$ . Pro poloviční energii tedy platí

$$\frac{1}{2}m\omega_{1,2}^2y_{m1,2}^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2}m\omega_0^2y_{mrez}^2 \Rightarrow y_{m1,2} = \frac{y_{mrez}}{\sqrt{2}} \doteq 0,7y_{mrez}.$$

Hodnotu součinitele tlumení  $\delta$  určíme úpravou výrazu pod odmocninou ve

vztahu (2) pro případ, že  $\omega_{1,2} \approx \omega_0$ :

$$\begin{aligned}\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{1,2}^2)^2 + (2\delta\omega_{1,2})^2} &= \sqrt{2} \cdot 2\delta\omega_{1,2}, \\ (\omega_0^2 - \omega_{1,2}^2)^2 + (2\delta\omega_{1,2})^2 &= 8\delta^2\omega_{1,2}^2, \\ (\omega_0 + \omega_{1,2})^2(\omega_0 - \omega_{1,2})^2 &= 4\delta^2\omega_{1,2}^2.\end{aligned}$$

Když přihlídneme k blízkosti hodnot úhlových frekvencí, dostaneme pro rozdíl frekvencí

$$\omega_0 + \omega_{1,2} = \pm\delta = \frac{\Delta\omega}{2},$$

kde  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\delta$  je *šířka rezonanční křivky* na úrovni amplitudy  $y_m \doteq 0,7y_{mrez}$ . Součinitel tlumení oscilátoru je tedy roven polovině šířky rezonanční křivky. Srovnáním se vztahem (2) upravíme vztah pro činitele jakosti

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$

Pro ověření charakteristik oscilátorů na základě tvaru rezonanční křivky jsou k příspěvku přiloženy jednoduché modely vytvořené programem MS Excel, kterými jsou rozšířeny modely na CD k učebnici [2]. Model rezonance mechanického oscilátoru (RezM) tvoří s navazujícím modelem rezonance elektromagnetického oscilátoru *RLC* (RezE) společný sešit dostupný z <http://www.mfi.upol.cz/files/29/2903/rezonnance.xlsx>. Zpětně lze některé získané poznatky ověřit modely na CD.

Tvar rezonanční křivky je v modelu RezM měnitelný nastavením hodnoty součinitele tlumení pomocí posuvníku. Model je však otevřený a zájemce si může měnit i další vstupní veličiny modelu. Pomocí tohoto modelu byla získána rezonanční křivka na obr. 3a (na ose  $x$  je úhlová frekvence  $\omega$ , kdežto na dalších grafech je na ose  $x$  relativní hodnota  $\omega/\omega_0$ ).

Pro srovnání je v grafu také rezonanční křivka amplitudy rychlosti kmitání oscilátoru (zobrazeny jsou hodnoty  $0,1v_m$ ). Graf odpovídá vztahu  $v_m = y_m\omega$ , který upravíme na tvar

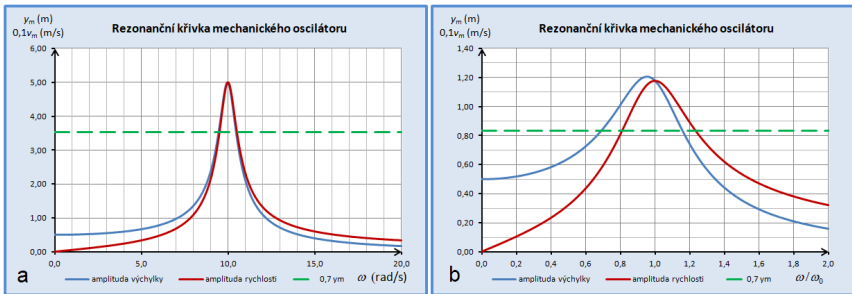
$$v_m = y_m\omega = \frac{F_m}{m} \frac{1}{\sqrt{\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\right)^2 + 4\delta^2}} = \frac{F_m}{\sqrt{\left(\omega m - \frac{k}{\omega}\right)^2 + b^2}}. \quad (5)$$

Odtud vyplývá celkem samozřejmý poznatek patrný z grafu. Na rozdíl od výhytky je při  $\omega = 0$ , kdy oscilátor nekmitá, rychlost vždy nulová.

Pozornost věnujeme také rezonanční úhlové frekvenci oscilátoru. Z obr. 3a bychom soudili, že rezonanční křivky výchylky i rychlosti mají maximum při stejné rezonanční frekvenci. Z teorie však vyplývá, že rezonance výchylky nuceného kmitání nastává při úhlové frekvenci

$$\omega_{\text{rezy}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2},$$

kdežto k rezonanci rychlosti dochází vždy při vlastní úhlové frekvenci netlumeného kmitání:  $\omega_{\text{rezy}} = \omega_0$ .<sup>2)</sup> To je ovšem patrné teprve při větším tlumení oscilátoru (obr. 3b). V technické praxi, zejména u elektromagnetických oscilátorů se však vesměs řeší kmitání s malým tlumením, kdy je rozdíl mezi rezonančními frekvencemi analogických veličin zanedbatelný.



Obr. 3 Rezonanční křivky při hodnotě  $Q$ : a) 10, b) 2,4

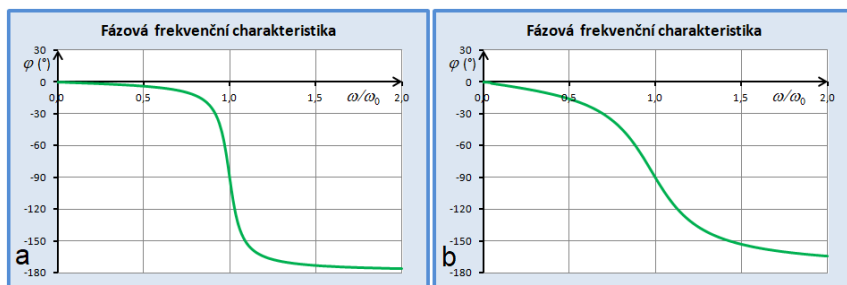
Obdobně získáme pomocí vztahu (3) fázovou frekvenční charakteristiku. Musíme si však uvědomit, že při dosažení rezonance se změní znaménko výrazu ve jmenovateli a největší záporná hodnota  $\text{tg } \varphi$  se skokem změní v největší kladnou hodnotu. To neodpovídá realitě spojitě probíhajícího děje při změnách frekvence. Souladu se skutečnými změnami fáze dosáhneme, když v modelu RezM k první kladné hodnotě  $\varphi$  přičteme  $(-\pi)$ . Na obr. 4 jsou fázové frekvenční charakteristiky pro oscilátory se stejnými činiteli jakosti jako na obr. 3 (pro názornost je fáze vyjádřena ve stupních). Vidíme, že fáze  $\varphi$  má při rezonanci hodnotu  $-\pi/2$  ( $-90^\circ$ ) a při nižších, popř. vyšších frekvencích se tento úhel zmenšuje, popř. zvětšuje.

<sup>2)</sup>Výraz pod odmocninou v rovnici (2) má nejmenší hodnotu, když jeho derivace  $d/d\omega$  je rovna nule:

$$\omega(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2) = 0 \Rightarrow \omega_{\text{rez}} = \sqrt{\omega_0^2 + 2\delta^2}.$$

Z derivace obdobného výrazu v rovnici (5) plyne:  $\omega_{\text{rez}} = \omega_0$ .

Dobře je to patrné na časových diagramech nuceného kmitání, vytvořených pomocí modelu M4.1 na CD k učebnici [2]. Tento model v podstatě představuje přechodný děj, kdy na oscilátor v počátečním okamžiku začne působit harmonicky proměnná síla. Působením vnější síly dochází ke skokové změně stavu oscilátoru, což se projeví tím, že vznikne složené kmitání, které je superpozicí vlastního tlumeného kmitání s frekvencí určenou parametry oscilátoru a nuceného kmitání s frekvencí budicí síly s konstantní amplitudou. Fázový posun síly a výchylky odpovídající teorii pozorujeme až po utlumení vlastního kmitání oscilátoru. Proto časové diagramy na obr. 5 nezačínají v počátečním časovém okamžiku.



Obr. 4 Fázové frekvenční charakteristiky při hodnotě  $Q$ : a) 10, b) 2,4



Obr. 5 Časové diagramy nuceného kmitání při: a)  $\omega < \omega_0$ ; b)  $\omega = \omega_0$ ; c)  $\omega > \omega_0$

Obdobný průběh má fázová frekvenční charakteristika pro vzájemný fázový posun výchylky a rychlosti. Její průběh je dán vzhledem k fázovému rozdílu výchylky a rychlosti ( $\Delta\varphi = \pi/2$ ) recipročnou hodnotou vztahu (3):

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\delta\omega} = \frac{m\omega - \frac{k}{\omega}}{b}. \quad (6)$$

Tato charakteristika má obrácený průběh než charakteristiky na obr. 4. Jejím počátečním bodem je fáze  $-\pi/2$  a při rezonanci má výchylka i rych-



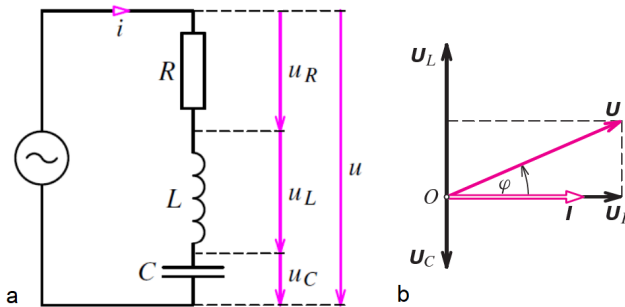
lost oscilátoru stejnou fází. K tomuto poznatku se vrátíme u elektromagnetického oscilátoru, kde je názorněji patrný jeho fyzikální význam.

K ukázkce užití rezonanční křivky jako portrétu oscilátoru, ze kterého lze vyčíst všechny jeho charakteristické vlastnosti, využijeme obr. 3a. Hodnoty veličin v modelu RezM jsou pro názornost poněkud idealizované, takže praktická realizace pružinového oscilátoru s těmito parametry by asi nebyla jednoduchá. Vyjdeme z předpokladu, že známe hmotnost oscilátoru:  $m = 0,2 \text{ kg}$ . To umožňuje určit z rezonanční křivky následující charakteristické veličiny –  $\omega_0$ ,  $k$ ,  $F_0$ ,  $Q$ ,  $\delta$ ,  $b$ :

- a)  $\omega_0 = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,
- b)  $k = m\omega_0^2 = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ,
- c)  $y_{m0} = 0,5 \text{ m} \Rightarrow F_0 = ky_{m0} = 10 \text{ N}$ ,
- d)  $y_{m\text{rez}} = 5 \text{ m} \Rightarrow Q = y_{m\text{rez}}/y_{m0} = 10$ ,
- e)  $\delta = \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{\omega_0}{2Q} = 0,5 \text{ s}^{-1}$ ,
- f)  $b = 2\delta m = 0,2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### Elektromagnetický oscilátor

Rezananční křivka mechanického oscilátoru nás názorně seznamuje s charakteristikami, které jsou obdobné u oscilátorů z jiných oblastí fyziky. Pro technickou praxi je důležitá zejména znalost rezonanční křivky elektromagnetického oscilátoru. V učivu fyziky je základním reprezentantem tohoto typu oscilátorů obvod střídavého proudu s obvodovými prvky  $R$ ,  $L$ ,  $C$  spojenými v sérii (obr. 6a), který je připojen ke zdroji harmonického napětí  $u = U_{m0} \sin \omega t$ .



Obr. 6 Obvod s  $RLC$  v sérii

Rovnicí nuceného kmitání obvodu s  $RLC$  v sérii je 2. Kirchhoffův zákon pro tento elektrický obvod, při jehož zápisu uplatníme fázorový diagram na obr. 6b:

$$\begin{aligned} U_L + U_R + U_C &= U \\ L \frac{\Delta i}{\Delta t} + Ri + \frac{q}{C} &= U_{m0} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Rovnici upravíme do tvaru

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} + \frac{R}{L}i + \frac{1}{LC}q = \frac{U_{m0}}{L} \sin \omega t$$

a srovnáme ji s rovnicí (1). Využijeme známé analogie mezi mechanickými a elektromagnetickými oscilátory (viz rozšiřující učivo na CD k učebnici [3, čl. R7.2, Tab. R7-1]), kde  $a \sim \frac{\Delta i}{\Delta t}$ ,  $v \sim i$  (v diferenciálním tvaru  $a = \frac{d^2 y}{dt^2} \sim \frac{di}{dt} = \frac{d^2 q}{dt^2}$ ,  $v = \frac{dy}{dt} \sim i = \frac{dq}{dt}$ ). Získáme rovnici

$$\frac{\Delta i}{\Delta t} + 2\delta i + \omega_0^2 q = \frac{U_{m0}}{L} \sin \omega t,$$

ve které

$$\delta = \frac{R}{2L} \quad \text{a} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

Nyní už snadno napíšeme vztah pro změny amplitudy náboje na kondenzátoru, popř. napětí na kondenzátoru a proudu v obvodu při různých hodnotách úhlové frekvence napětí zdroje nuceného kmitání:

$$\begin{aligned} q_m &= \frac{U_{m0}}{L} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}, \\ U_m &= \frac{q_m}{C} = \frac{U_{m0}}{LC} \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}} = U_{m0} \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}, \\ I_m &= \omega q_m = \frac{U_{m0}}{L} \frac{\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}. \end{aligned}$$

Vztah pro amplitudu proudu dále upravíme tak, že veličiny  $\omega$  a  $L$  převedeme do výrazu pod odmocninou a po úpravách získáme známý vztah, který vyjadřuje Ohmův zákon pro obvod s  $RLC$  v sérii:

$$I_m = \frac{U_{m0}}{\sqrt{(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 + R^2}} = \frac{U_{m0}}{Z}.$$

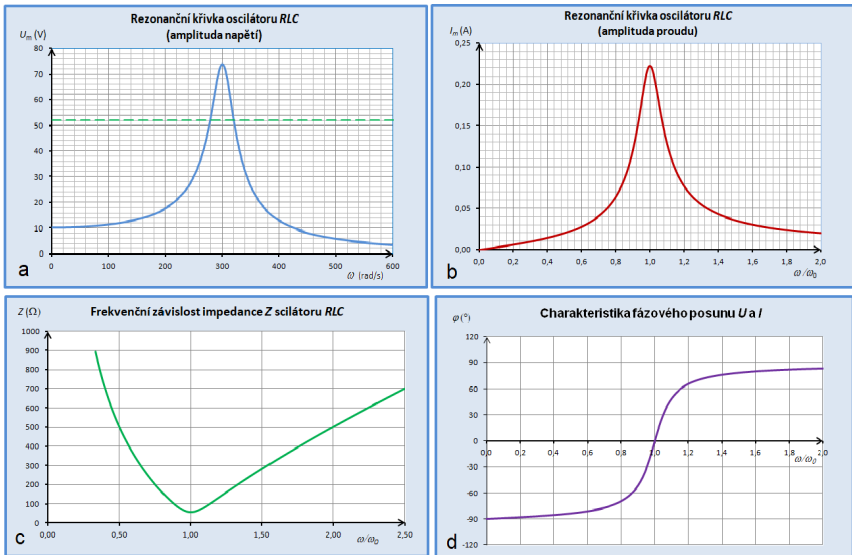
Pro závislost impedance  $Z$  na frekvenci budicího napětí tedy platí

$$Z = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}.$$

Zbývá ještě nalézt vztah pro fázovou frekvenční charakteristiku. Získáme ji buď standardním postupem z fázorového diagramu na obr. 6b, nebo jednoduše na základě analogií s mechanickým oscilátorem „překladem“ vztahu (6):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Frekvenční charakteristiky všech uvedených veličin jsou na obr. 7. Rezonanční křivka napětí (obr. 7a) je grafem amplitudy napětí na kondenzátoru. V klidovém stavu ( $\omega = 0$ ) se kondenzátor nabije na napětí  $U_{m0}$ , obvodem neprotéká proud, rezonanční křivka proudu (obr. 7b) začíná u nulové hodnoty. Impedance obvodu  $Z \rightarrow \infty$ , takže počáteční bod frekvenční charakteristiky impedance (obr. 7c) nelze zobrazit.



Obr. 7 Frekvenční charakteristiky oscilátoru  $RLC$

Z frekvenční fázové charakteristiky (obr. 7d) je zřejmé, že v počátečním okamžiku má napětí na kondenzátoru fázi  $\varphi = -\pi/2$ . Dobře je to patrné z fázorového diagramu obvodu  $RLC$  pro případ, kdy proud v obvodu  $I = 0$  a tedy  $U_L = 0$ , takže  $U_C = U$ . Při postupném zvětšování frekvence se napětí za proudem zpožďuje a fáze se nejprve zvolna, ale v blízkosti rezonanční frekvence rychle zmenšuje. Při rezonanci mají fázory  $U_C$  a  $U_L$  opačnou fázi, impedance  $Z = R$  a fázový rozdíl napětí a proudu je nulový. Při vyšších frekvencích napětí proud předbíhá (viz obr. 6b) a jeho fáze  $\varphi \rightarrow -\pi/2$ .

Činitel jakosti  $Q$  elektromagnetického oscilátoru určíme stejným způsobem jako u mechanického oscilátoru z rezonanční křivky napětí (obr. 7a):

$$Q = U_{\text{mrez}}/U_{\text{m0}}.$$

Poněvadž  $U_{\text{mrez}} = I_{\text{m}}L\omega_0$  a  $U_{\text{m0}} = I_{\text{m}}R$ , bude

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{Z_0}{R}.$$

Veličina  $Z_0$  je *charakteristická impedance* elektromagnetického oscilátoru. Její fyzikální význam spočívá v tom, že představuje „zásobu“ energie v oscilátoru, kdežto rezistance  $R$  určuje, jaká část této energie se v průběhu periody kmitu přemění na jinou formu energie (*disipace energie*) a představuje ztrátu energie. Poněvadž součinitel tlumení  $\delta = R/2L$ , dospějeme ke stejnému výrazu pro činitele jakosti jako u mechanického oscilátoru

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$

Pro hodnocení vlastností elektromagnetického oscilátoru je důležitá zejména šířka rezonanční křivky  $\Delta\omega$  na úrovni  $U_{\text{m}}/\sqrt{2}$ , popř.  $I_{\text{m}}/\sqrt{2}$ . V elektrotechnice, v teorii přenosu signálů se tento pokles označuje jako *útlum a*. Vyjadřuje se v logaritmické míře v jednotkách dB. Určíme ho jako poměr výkonu při rezonanci  $P_{\text{rez}} = U_{\text{m}}I_{\text{m}}$  a jeho poklesu na hodnotu  $P_{\text{rez}}/2$ :

$$a_P = 10 \log \left( \frac{P_{\text{rez}}}{P_{\text{rez}}/2} \right) = 3 \text{ dB}.$$

Šířka rezonanční křivky představuje *výběrovost*, čili *selektivnost* oscilátoru. Tím je dána schopnost oscilátoru z kmitání dvou blízkých frekvencí jedno zesílit a druhé potlačit.

## Závěr

V příspěvku jsme ukázali, jak můžeme využít standardní programové vybavení počítače v podobě programu MS Excel k praktickému seznámení s vlastnostmi rezonančních křivek, které jsou významným portrétem mechanických a elektromagnetických oscilátorů. Určení parametrů elektromagnetického oscilátoru z konkrétní rezonanční křivky na obr. 7a ponecháme na čtenáři (výchozí hodnotou je indukčnost cívky  $L = 1,1$  H). Pro zájemce o podrobnější seznámení s problematikou nuceného kmitání elektromagnetických oscilátorů v širších souvislostech lze doporučit studijní text FO [4] s množstvím skvělých vyobrazení frekvenčních charakteristik, která vytvořil autor publikace.

## Reference

- [1] *Lepil, O.*: Fyzika pro gymnázia. Mechanické kmitání a vlnění. 3. přepracované vydání, Prometheus, Praha, 2001.
- [2] *Lepil, O.*: Fyzika pro gymnázia. Mechanické kmitání a vlnění. 5. přepracované vydání s CD, Prometheus, Praha, 2018.
- [3] *Lepil, O., Šedivý, P.*: Fyzika pro gymnázia. Elektřina a magnetismus. 7. přepracované vydání s CD, Prometheus, Praha, 2017.
- [4] *Šedivý, P.*: Obvody střídavého proudu s lineárními jednobrany a dvojbřany. Dostupné na: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/stpr1.pdf>

# Odvození 1. kosmické rychlosti

JIŘÍ KADAŇKA

Střední škola informatiky, elektrotechniky a řemesel, Rožnov pod Radhoštěm

Definice první kosmické rychlosti je jednoznačná a známá. Jedná se o rychlost, kterou má oběžnice Země (nebo jakéhokoli velkého vesmírného tělesa tvaru koule) na kruhové oběžné dráze v zanedbatelné výšce nad jejím povrchem. V učebnicích středoškolské fyziky je pro Zemi nejčastěji uváděna zaokrouhlená hodnota  $v_1 = 7,9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  (viz např. [1]). V následujícím textu je uvedeno 5 různých odvození této rychlosti.