

Didaktika matematiky v 21. století a realita výuky

JOSEF POLÁK

Fakulta aplikovaných věd ZČU v Plzni

Didaktika matematiky v 21. století kontinuálně navazuje na předchozí vývoj a zejména intenzivní rozvoj v 2. polovině 20. století. Obdobně jako další oborové didaktiky v teoretické i empirické výzkumné činnosti se soustřeďuje především na didaktické oblasti zaměřené na obsah vzdělání a jeho didaktickou transformaci, na psychodidaktické procesy poznávání a metody výuky, na organizační formy výuky a na efektivní využití digitálních technologií ve výuce. Účelem těchto výzkumů v didaktice matematiky je nalézání co nejefektivnějších způsobů a postupů vedoucích ke zlepšení kvality výuky matematiky. Přitom se vychází ze stanovení jejích hlavních cílů v souladu s požadavky technologického i sociálního rozvoje společnosti v 21. století.

Zaměření didaktiky na obsah vzdělávání a jeho didaktickou transformaci

S pozoruhodným obsahovým zaměřením didaktiky a s promyšleným systematickým úsilím o přizpůsobení obsahu vzdělávání poznávacím schopnostem žáků se lze setkat již v didaktických spisech významného českého pedagoga 17. století *Jana Amose Komenského* a poté i v dílech řady dalších významných světových pedagogů a oborových didaktiků. Důležitost studia a empirického výzkumu obsahové náplně vzdělávání a modernějšího pojetí školního kurikula se velmi výrazně zvětšila zejména ve 2. polovině 20. století a v 21. století v souvislosti s exponenciálním nárůstem vědomostí a informací ve vědě i společnosti, nazývané proto *vědomostní společnost* či *informační společnost*.

V *Evropě, zvláště v Německu* od 50. let 20. století vzniklo množství podnětných studií věnovaných problematice zprostředkování vzdělávacích obsahů ve školní praxi. Z nich se stala široce známou koncepce, kterou předložil německý pedagog *Wolfgang Klafki* z Univerzity v Magdeburgu (SRN) ve své studii „Didaktická analýza jako jádro přípravy na vyučo-

vání“ publikované v němčině roku 1958. V českém překladu vyšla pod názvem „Studie k teorii vzdělávání a didaktice“ (SPN, Praha, 1967). V této koncepční studii W. Klafki nejen ukazuje význam vhodného výběru vzdělávacích obsahů s ohledem na jejich srozumitelnost pro žáky, ale též zdůrazňuje jeho přímý vliv na rozvoj osobnosti žáků. Svoji koncepci didaktického zprostředkování učiva Klafki založil především na *didaktické analýze učiva*, jež byla ve 2. polovině 20. století považována mnoha pedagogy za jediný výchozí model výběru učiva. Přibližně v téže době jako Klafki reagoval německý didaktik *Dietrich Hering* na obrovský nárůst vědeckých poznatků a s ním spojené zvětšování rozsahu učiva na všech typech škol po 2. světové válce. Ve svých publikacích z let 1958–1959 jako první zavedl a použil pojem *didaktické zjednodušení* vědeckých poznatků pro jejich zprostředkování a pochopení žáky vzhledem k jejich věku.

V USA se problematikou vzdělávacích obsahů začal systematicky a v širších souvislostech zabývat až v 80. letech 20. století pedagogický psycholog *Lee S. Shulman* ze Stanfordovy univerzity v Kalifornii. Z pozice prezidenta Americké asociace pedagogického výzkumu v letech 1984–1985 ostře kritizoval pedagogický výzkum v USA za to, že v něm dlouhodobě chybí empirický pedagogický výzkum vztahující se k obsahu vyučování a jeho profesnímu významu. Za východisko z této situace L. S. Shulman a jeho spolupracovníci zvolili srovnávací výzkumy myšlení a činností jednak učitelů začátečníků, jednak zkušených a úspěšných učitelů. Zároveň též sledovali, jak probíhají procesy umění vyučovat u studentů učitelství. Za cíl těchto empirických výzkumů L. S. Shulman považoval zodpovědět otázky, jaké jsou základní předpoklady úspěšného pedagogického myšlení a jednání, z jakých zdrojů se utváří profesionální poznatková báze učitelů, jež jim umožní kvalitní a efektivní výuku, co je základem činnosti učitelů jako profesionálů, působících ve vzdělávání a odlišujících je od jiných odborníků. Na základě četných výzkumů pak L. S. Shulman ve studii „Knowledge and teaching: Foundations of the new reform“ („Znalosti a vyučování: Základy nové reformy“), publikované v časopise *Harvard Educational Review* (roč. 57/1987, č. 1, s. 1–22), formuluje přesvědčení, že *poznatková báze učitelství* má sestávat ze sedmi kategorií znalostí (s názvy přeloženými do češtiny pedagogy *Jiřím Kotáskem* a *Tomášem Janíkem*):

- *znalosti obsahu učiva (subject matter content knowledge),*
- *obecné pedagogické znalosti (general pedagogical knowledge),*
- *znalosti kurikula (curriculum knowledge),*
- *didaktické znalosti obsahu (pedagogical content knowledge),*

- znalosti o žácích a jejich charakteristikách (*knowledge of learners and their characteristics*),
- znalosti o kontextu vzdělávání (*knowledge of educational context*),
- znalosti o cílech, smyslu a hodnotách vzdělávání (*knowledge of educational ends, purposes and values*).

Z těchto sedmi kategorií znalostí učitelů, jež tvoří poznatkovou bázi učitelství, jsou tři kategorie vázány na obsah (znalosti obsahu učiva, znalosti kurikula a didaktické znalosti obsahu), jež podle L. S. Shulmana představují její jádro. Z teoretického i praktického hlediska pro úspěšnou činnost učitele za základní považuje zejména *didaktické znalosti obsahu*, jimiž se rozumí didakticky transformované obsahové (vědní či jiné odborné) znalosti, které jsou specifickou formou profesionality učitele. Přitom *didaktická transformace* vědeckých či jiných odborných poznatků spočívá v jejich výběru a zpracování na učivo, jež obsahem a formou zpracování je přiměřené věkovým i individuálním schopnostem žáků.

Poznámka. Paralelně se Shulmanovou teorií didaktických znalostí, jeho empirickými výzkumy a studii o poznatkové bázi učitelství vznikla v Evropě (zejména v Německu, Francii a skandinávských zemích) řada koncepčních studií v pedagogice i oborových didaktikách o obdobné didaktické problematice. Vesměs však byly zaměřeny více teoreticky než empiricky v duchu tradiční didaktiky v zemích Evropy a se zvýrazněným akcentem na psychologickou stránku poznávacích procesů při učení. Tak např. ve Francii se setkáváme s piagetovskými kognitivně orientovanou koncepcí tzv. *transpoziční didaktiky* v pracích francouzského didaktika matematiky *Yvese Chevallarda* z Marseillské univerzity. Jeho koncepce je založena na použití *didaktické transpozice* vědeckých poznatků a představuje jistou formu jejich *psychodidaktické transformace*.

V devadesátých letech 20. století Shulmanovy didaktické teorie (zaměřené na didaktickou transformaci obsahu vzdělávání ve školské praxi) vešly široce ve známost v mnoha zemích světa včetně Velké Británie a zemí kontinentální Evropy. Pro středoevropské i východoevropské země, v nichž didaktika matematiky i další oborové didaktiky se dlouhodobě zabývají didaktickým zpracováním učiva, nebyly Shulmanovy ideje žádnou převratnou novinkou, ale značně přispěly k širšímu pochopení významu oborových didaktik a důležitosti teoretické i empirické výzkumné činnosti v nich zaměřené na obsah učiva. Didaktickou transformaci vzdělávacích obsahů se zabývají nejen jednotliví učitelé, ale zejména též autoři učebnic a didaktické literatury. Speciálně didaktickou analýzou vzdělávacích obsahů ve výuce matematiky se souhrnně věnuje část didaktiky matematiky nazývaná *Konkrétní didaktika matematiky* (viz [1]).

Zaměření didaktiky na kognitivní procesy a koncepční pojetí výuky

Ve 20. století a zejména v jeho 2. polovině bylo dosaženo značného pokroku ve vědním oboru *kognitivní psychologie* (*psychologie poznávání*), což mělo přímý vliv na pedagogiku, jehož významným důsledkem byl vznik nových teorií učení a vyučování. Primární zásluhu na tomto vývoji měl švýcarský vývojový psycholog *Jean Piaget* (1896–1980), který za působení na Univerzitě v Ženevě soustavným empirickým zkoumáním se úspěšně pokusil objasnit, jak se v dětství vytvářejí základní struktury a předpoklady pro celoživotní poznávání. Podle Piagetovy *teorie kognitivního vývoje* má kognitivní vývoj člověka pět životních poznávacích etap se specifickými charakteristickými poznávacími procesy a způsoby myšlení (etapa senzomotorická od narození do 2 let života, etapa předpojmového myšlení od 2 do 4 roků, etapa názorného myšlení od 4 do 7 roků, etapa konkrétního logického myšlení od 7 do 12 roků, etapa formálního logického a abstraktního myšlení od 12 roků). Piagetovo pojetí kognitivního vývoje rozšířil americký univerzitní psycholog *Jerome Seymour Bruner* (1915–2016) o výzkumy významu interakcí dítě s okolím pro poznávání světa v první etapě (do dvou let), kdy dítě ještě nemluví a o studium, jak jsou kognitivní procesy v jednotlivých etapách vývoje ovlivněny třemi základními způsoby poznávání (založenými na motorických činnostech, využití názorných zrakových a duševních představ, užití jazyka). Na základě svých studií kognitivního vývoje J. Piaget a J. S. Bruner se stali v pedagogice spoluzakladateli a propagátory tzv. konstruktivistické teorie učení a vyučování:

- *Konstruktivistická teorie učení* (*Constructivist theory of learning*), založená na teorii kognitivního vývoje, pojímá učení jako aktivní poznávací proces, v němž si učící se (žák, student) sám vytváří (konstruuje) poznatky na základě svých předchozích vědomostí a nových informací či podnětů (řešení úloh apod.) zpravidla pod přímým nebo nepřímým vedením učitele.
- *Konstruktivistická teorie vyučování* (*Constructivist theory of teaching*) je takové pojetí vyučování (koncepce výuky), kde učení žáků či studentů spočívá v jejich aktivním vytváření (konstruování) nových poznatků jimi samotnými s případným doplňkovým řízením, resp. s pomocí učitele. V tomto smyslu je *konstruktivistické pojetí vyučování* zásadně odlišné od tradičního *transmisivního pojetí vyučování* spočívajícího v předávání (transmisi) hotových poznatků žákům učitelem.

Tradiční i inovativní metody vyučování (výukové metody) lze klasifikovat a analyzovat z různých didaktických hledisek, čemuž se podrobně věnuje část didaktiky matematiky zvaná *Obecná didaktika matematiky* (viz [2, s. 43–46 a s. 127–132]). Z inovativních výukových metod se současná matematická didaktická literatura nejvíce soustřeďuje na *konkrétní typy (metody) konstruktivistického pojetí vyučování matematiky*, jejichž názvy a stručné charakteristiky uvedeme v následujícím přehledu:

- *Problémové vyučování, výuka založená na řešení problémů (Problem teaching, problem-based teaching, problem-solving method in teaching)* je vyučování soustředěné na učení žáků (studentů) prostřednictvím jejich řešení problémů. Prakticky se realizuje ve výuce předkládáním, resp. vytvářením *problémových situací*, tj. didaktických situací spočívajících ve formulování problémů učitelem, popř. samotnými žáky, poskytování jim nezbytné pomoci při řešení těchto problémů, ověřování výsledků řešení a zejména též při systematizaci takto získaných poznatků i jejich upevňování.

Poznámka. Pojem *problém* v didaktice matematiky (i v ostatních oborových didaktikách) má obecně dva významy: V *širším smyslu* je termín problém synonymem termínu *úloha*. V *užším smyslu* užívaném v problémovém vyučování termínem problém se rozumí *speciálně úloha*, jež není standardní (typová) a jejíž řešení je náročné, protože při něm žáci musí hledat pro ně předem neznámý postup řešení. Určité prvky problémové výuky byly používány již ve výuce v starověkém Řecku (filozof *Sokrates* aj.) a poté prakticky v celých dějinách školství. Avšak ucelený a teoreticky podložený *systém problémového vyučování* zformuloval až na konci 19. a začátku 20. století americký filozof, psycholog a pedagog *John Dewey* (1859–1952) za svého působení na Univerzitě v Chicagu a na Kolumbijské univerzitě v New Yorku. Je považován za zakladatele tzv. *pragmatické pedagogiky*, v níž je odmítán tradiční systém vzdělávání založený na pouhém předávání hotových poznatků a jejich souborů žákům učitelem, ale podle níž má být vyučování založeno na aktivní činnosti žáků a rozvíjení jejich dovedností (mj. též formou *pracovního vyučování a projektového vyučování*).

- *Heuristické (objevitelské) vyučování (Heuristic teaching, discovery teaching)* je vyučování založené na systematickém hledání a užití vhodných heuristických postupů (strategií) pro efektivní řešení matematických (resp. jiných) úloh či problémů. Z logického hlediska jde zpravidla primárně o užití neúplné indukce (např. použití metody pokus–omyl), jež

vede k vyslovení hypotézy o řešení úlohy (problému) a poté je použita deduktivní metoda k důkazu, resp. vyvrácení této hypotézy.

Poznámka. Počátky vzniku *heuristiky* jako nauky o postupech (metodách), jak objevovat nové vědecké poznatky, spadají již do období klasické starořecké matematiky. Základy novodobé heuristiky položili až francouzský matematik a filozof *René Descartes* (1596–1650), německý matematik a filozof *Wilhelm Gotfried Leibniz* (1646–1716) a český matematik a filozof *Bernard Bolzano* (1781–1848). Za zakladatele moderního a didaktického pojetí heuristiky je považován maďarský matematik *George Pólya* (1881–1985) působící převážně v USA na Stanfordské univerzitě. Světznámou je zejména jeho kniha „How to Solve It – A New Aspect of Mathematical Method“, jejíž 2. rozšířené vydání vyšlo v českém překladu pod názvem „Jak to řešit? – Překvapivé aspekty (nejen) matematických metod“ (Matfyzpress, Praha, 2016). S velkým zájmem se setkaly i jeho další práce o heuristických metodách (viz [2, s. 87]).

- *Realistické matematické vzdělávání – RMV (Realistic mathematics education – RME)* je originální metoda vyučování matematiky vytvořená v Nizozemsku, jejíž základní ideou je, že výuka matematiky se má stát přirozenou součástí *reality života žáků* (skutečného života nebo vhodně vytvořených didaktických situací). Je založena na dvou klíčových didaktických principech:

1. *princip RMV* vyjadřuje didaktický požadavek, že výuka matematiky má být přístupná myšlení žáků (příslušného věku) a mít blízko k jejich současnému i budoucímu každodennímu životu.
2. *princip RMV* vyjadřuje didaktický požadavek, aby výuka matematiky byla soustavně spojena s aktivní činností žáků jako řízeným procesem objevování, resp. znovuobjevování matematických poznatků žáků (jenž je součástí tzv. *genetického stylu vyučování*).

Poznámka. Uvedené didaktické principy RMV zformuloval nizozemský matematik a významný didaktik matematiky německého původu *Hans Freudenthal* (1905–1990), autor četných matematických didaktických článků a knižních publikací, z nichž nejvýznamnější jsou knihy „Mathematics as an Educational Task“ („Matematika jako pedagogická úloha“) v prvním anglickém vydání z roku 1973 a „Revising Mathematics Education – China Lectures“ („Revidování matematického vzdělávání – Přednášky v Číně“) vydaná poprvé až posmrtně v roce 1991. V těchto publikacích položil základy RMV, jež podle něho představuje *matematiku jako lidskou aktivitu*. Spolu se svými spolupracovníky založil institut při nizozemské Univerzitě v Utrechtu, který

byl po jeho smrti nazván *Freudenthalův institut* a jehož základním posláním je rozvoj RMV a jeho využití ve školské praxi.

- *Teorie didaktických situací – TDS, teorie didaktických situací v matematické vzdělávání (Theory of didactical situations, theory of didactical situations in mathematics education)* je strukturalisticko-konstruktivistická teorie vyučování založená na vytváření a použití *didaktických situací*, jimiž se rozumí situace ve výuce (např. problémové situace či didaktické hry), které umožňují učitelé za aktivního zapojení žáků přivést je zajímavou formou k určitým (speciálně matematickým) znalostem.

Poznámka. TDS postupně vytvořil a publikoval od konce 60. let 20. století francouzský didaktik matematiky *Guy Brousseau* (nar. 1933), působící na Univerzitě v Bordeaux. Se svými spolupracovníky ji poměrně obsáhle rozpracoval a na tyto práce navázala též řada zahraničních didaktiků, zejména ze Španělska, Itálie a Kanady. V ČR se věnovala pedagogickému výzkumu TDS a jejímu užítí ve školské praxi především didaktička matematiky *Jarmila Novotná*, jež je též spolupřekladatelkou z francouzštiny do češtiny knihy G. Broussaua: „Úvod do teorie didaktických situací v matematice“ (PedF UK, Praha, 2012).

- *Badatelsky orientované vyučování – BOV, badatelsky orientované vzdělávání v matematice – BOVM (Inquiry-based teaching, inquiry-based mathematics education)* je vyučování spočívající v bádání (badatelské činnosti) žáků, jež používá podobné postupy a metody práce jako vědecké bádání. V tomto smyslu BOV je vyučování inspirované vědeckým bádáním. Přitom *vědeckým bádáním* se rozumí vědecko-výzkumná práce a další formy činností ve vědě. *Bádáním (badatelskou činností)* žáků se rozumí v jistém smyslu obdobné činnosti: pozorování, kladení si otázek, vyhledávání informací v knihách a dalších zdrojích, plánování a navrhování postupů řešení problémů, sbírání dat, jejich analyzování a interpretace, formulování předpovědí i získaných výsledků a jejich vysvětlení, vyvozování a sdělování závěrů. Tyto činnosti žáků ve výuce, přizpůsobené jejich věku a možnostem, nemají ovšem za cíl získání nových vědeckých poznatků, ale znovuobjevováním získat potřebné znalosti a dovednosti (včetně schopnosti řešit jednoduché problémové situace z běžného života).

Poznámka. Koncepce BOV má původ v USA v 90. letech 20. století v přírodovědném vzdělávání. V severoamerickém prostředí přetrvává do současnosti omezení BOV na přírodovědecké předměty. V Evropě se však začátkem 21. století BOV rozšířilo i do výuky matematiky. V ČR se BOVM věnuje mj.

zejména didaktička matematiky *Libuše Samková*, podle níž za pedagogický základ BOV je považováno bádání v pojetí *Johna Deweye* (1938), za psychologický základ pak učení se objevováním *J. S. Brunera* (1965). V článku L. Samkové: „Uplatnění otevřeného přístupu k matematice. . .“ (Studia pedagogica, roč 23/2018, č. 3, s. 49–67) se v souladu s Deweyovým vymezením bádání zdůrazňuje, že v BOVM by měly být řešeny matematické úlohy, jež obsahují něco neurčitého, co je řešitelem vnímáno jako podnětné nebo zajímavé. Jednu z možností, jak takové úlohy vybírat či vytvářet a zkoumat, představuje tzv. *otevřený přístup k matematice (open approach to mathematics)*, v jehož rámci se přistupuje k výuce matematiky prostřednictvím *otevřených matematických úloh (open mathematics tasks)*, které splňují alespoň jednu z těchto charakteristik:

- mají otevřenou vstupní situaci, tj. proměnné vstupní údaje,
- mají otevřený postup řešení, tj. existuje více způsobů řešení,
- mají otevřenou výslednou situaci, tj. existuje více výsledků řešení,
- mají otevřenou možnost úlohu modifikovat, tj. nabízí se více způsobů, jak ji upravit či rozšířit ve vhodnou novou úlohu.

Zaměření didaktiky na organizační formy vyučování

V obecné didaktice matematiky se rozlišují a analyzují na základě několika kritériálních hledisek různé druhy *organizačních forem vyučování (organizational forms of teaching)* (viz [2, s. 53–55]). V 21. století jsou a stále více budou ovlivňovány mnohostranným používáním digitálních technologií, avšak základním kritériálním hlediskem zůstává jejich *rozdělení podle způsobů řízení učební činnosti žáků*:

- *frontální (hromadné) vyučování (frontal teaching. whole-class teaching)*, v němž jediný učitel pracuje současně se všemi žáky ve třídě, se stejnými obsahy i metodami výuky, v časově vymezených vyučovacích hodinách,
- *skupinové vyučování (group teaching)*, při němž je výukový proces organizován jako společná práce žáků v menších skupinách (tří až šesti žáků), které samostatně zpracovávají zadané úkoly,
- *kooperativní vyučování (cooperative teaching)*, jež je vyšší formou skupinového vyučování, v němž každý žák ve skupině pracuje samostatně a pouze se radí s ostatními žáky skupiny,
- *individualizované vyučování (individualized teaching)*, kdy každý z žáků pracuje na zadaných úkolech zcela samostatně vlastním tempem a popř. jen s dílčí pomocí učitele.

Poznámka. Při frontálním vyučování je používán třídně hodinový systém výuky, který zavedl již *Jan Amos Komenský*. V našich školách je stále nejčastěji užívanou formou organizace výuky, avšak už v průběhu 20. století jsme se mohli setkat u nás i se skupinovým, popř. kooperativním vyučováním. Jejich zásadní myšlenky formuloval též *Jan Amos Komenský*. Teprve však američtí psychologové a reformní pedagogové *J. Dewey* a *J. S. Bruner* vyzvedli skupinové a kooperativní učení jako základní modely pro sociální učení v demokratické společnosti. V současnosti se v projektech integrace vyučovacích předmětů setkáváme s pojmem *týmové vyučování (team teaching)*, ve kterém s třídou žáků pracují společně dva nebo více učitelů za účelem integrace poznatků z několika předmětů.

Orientace didaktiky na efektivní využití didaktických technologií ve výuce

Digitální technologie (Digital Technologies) v kontextu vzdělávání jsou synonymem k pojmu *Informační a komunikační technologie*, zkr. *IKT (Information and Communication Technologies, zkr. ICT)*, jež je užívána často i v českém textu); viz publikace „Strategie digitálního vzdělávání do roku 2020“ (MŠMT, Praha, 2014). Představují široký soubor elektronických prostředků (přístrojů, zařízení), nástrojů, systémů a postupů, jež slouží k digitálnímu zpracování vstupních dat a přenosu informací.

Poznámka. Pojem digitální technologie zpravidla dosud mimo oblast vzdělávání je používán v užším významu pro *hardware*, tj. technické vybavení, zatímco do pojmu *ICT* je zahrnut i *software*, tj. programové vybavení.

Využití ICT ve školské matematice je přehledně zpracováno v publikaci [2, s. 135–144] a podrobněji např. v publikacích [10], [11]. Pro výuku matematiky na ZŠ a SŠ může být též velmi užitečná metodická publikace *Šárky Gergelitsové*: „Počítač ve výuce nejen geometrie – Průvodce Geogebrou“. Zdůrazněme, že digitální technologie se mohou významně uplatnit ve výuce matematiky v 21. století jako efektivní výpočetní prostředky, kognitivní prostředky (programy dynamické geometrie, aj.), zdroje informací a inspirací, zpětnovazební výukové prostředky, komunikační prostředky mezi učitelem a žáky, audiovizuální výukové prostředky.

V celosvětovém společenském vývoji v 21. století se v následujících letech podle reálných prognóz velmi výrazně prosadí dva převratné vývojové fenomény: umělá inteligence a robotizace. Uplatní se především v průmyslové výrobě (automatizaci výrobních prostředků), ale též v četných dalších oblastech lidské činnosti včetně oblasti vzdělávání. *Umělá inteligence*, zkr. *UI (Artificial Intelligence, zkr. AI)*, jež je používána často i v českých tex-

tech) je oblast vědy, která studuje lidskou inteligenci a vytváří programy nebo umělé entity schopné plnit zadané úkoly podobně jako lidé. Taktéž se jí rozumí schopnost stroje napodobit inteligentní lidskou činnost, především usuzování a učení se z chyb. Tyto stroje (počítače) se nazývají *učící se stroje* (*Learning Machines*). Mohou být zpětně užity k programovanému učení žáků, jež se pak nazývá *strojové učení* (*Machine Learning*) a stroji (počítači) s umělou inteligencí, který je určen k učení, se říká *učící stroj* (*Learning Machine*). Strojové učení může být vhodné pro individuální či individualizovanou výuku matematiky (i jiných předmětů) a v některých zemích, např. v Číně se v současnosti využívá již ve velkém rozsahu. Je ovšem třeba dodat, že v řadě západních zemí se tento systém výuky setkává s kritikou, neboť má sice výsledky, ale jeho jednostranné užívání vede výuku ve směru standardizovaného mechanického vzdělávání.

Poznámka. Velmi perspektivní užití umělé inteligence v 21. století představují roboti různých typů. *Roboti* (*Robots*) jsou stroje s umělou inteligencí, jež pracují s jistou mírou samostatnosti a vykonávají předepsaným způsobem dané úkoly. Mohou pomocí senzorů vnímat své okolí, reagovat na něj a zasahovat do něho, přičemž dovedou i vyhodnocovat tento svůj vliv a využívat zpětnou vazbu. Zajímavé pro nás jistě je, že název *robot* pro stroj s umělou inteligencí byl poprvé použit v divadelní hře R.U.R. významného českého spisovatele *Karla Čapka* (1890–1938) a poté se rozšířil celosvětově zejména díky proniknutí do angličtiny. Odtud jsou dále odvozeny názvy: *robotika* (*Robotics*) pro vědu o robotech, jejich designu, výrobě i aplikacích a *robotizace* (*Robotization*) pro procesy zavádění průmyslových i neprůmyslových robotů, včetně studia technologických a sociálních důsledků. Ve vzdělávání na některých ZŠ a SŠ je zařazen samostatný předmět (popř. seminář) *Robotika*. Ve výuce matematiky lze též vhodně využít dostupných edukačně robotických sad.

Matematické vzdělávání v 21. století a kurikulární reformy

V 2. polovině 20 století se uskutečnila v mnoha vyspělých státech světa včetně Československa reforma výuky matematiky nazývaná *modernizace školské matematiky* spočívající v jejím *strukturálně-množinovém pojetí*. Smyslem této reformy výuky matematiky mělo být její přiblížení soudobé matematice jako vědě, avšak z mnoha důvodů se ve školské praxi tato „nová koncepce výuky matematiky“ celosvětově neosvědčila, a proto byla postupně i u nás opuštěna.

Od konce 20. století do současnosti vznikla celosvětově řada teoretických rámců i praktických projektů širěji pojatých *reformou vzdělávání pro*

21. století, jejichž smyslem a cílem má být přizpůsobení vzdělávání lidí všestranným (ekonomickým i dalším) potřebám globalizované společnosti. Toto reformní vzdělávací úsilí je koordinováno institucionálně na mezinárodní úrovni mj. v rámci agendy *Organizace pro hospodářskou spolupráci a rozvoj* (zkr. *OECD* z angl. *Organization for Economic Co-operation and Development*). OECD má v současnosti 37 členů, jimiž jsou ekonomicky rozvinuté státy světa, které přijaly principy demokracie a tržní ekonomiky.

Vzdělávání v Evropě patří k prioritním oblastem mezinárodní spolupráce a spolufinancování členských států *Evropské unie (EU)*. V závěrech Rady EU z jejího zasedání v Lisabonu 23.–24. 3. 2000 bylo potvrzeno a zdůrazněno, že investice do vzdělávání a odborné přípravy osob zaujímají v rámci evropské znalostní politiky nezastupitelné místo. Konkretizaci této vzdělávací politiky EU obsahují „Doporučení Evropského parlamentu a Rady EU ze dne 18. 12. 2006 o klíčových schopnostech pro celoživotní učení“ (Úřední věstník EU 2006/962/ES), „Závěry Rady EU a zástupců vlád členských států zasedajících v Radě ze dne 21. 11. 2008 – Příprava mladých lidí na 21. století: agenda pro evropskou spolupráci v oblasti školství“ (Úřední věstník EU 2008/C 319/08) a aktualizované „Doporučení Rady EU ze dne 22. 5. 2018 o klíčových kompetencích pro celoživotní učení – Text s významem pro EHP“ (Úřední věstník EU 2018/C 189/01). „Evropský referenční rámec“ v jeho příloze obsahuje formulace hlavních cílů celoživotního učení a definice pojmů kompetence a klíčové kompetence:

Kompetence jsou definovány jako kombinace znalostí, dovedností a postojů. *Klíčové kompetence* zahrnují 8 kompetencí:

- kompetence v oblasti gramotnosti,
- kompetence v oblasti mnohojazyčnosti,
- matematická kompetence a kompetence v oblasti přírodních věd, technologií a inženýrství,
- digitální kompetence,
- personální a sociální kompetence a kompetence k učení,
- občanská kompetence,
- podnikatelská kompetence,
- kompetence v oblasti kulturního povědomí a vyjadřování.

Matematická kompetence je schopnost rozvíjet a používat matematické myšlení a náhled k řešení různých problémů v každodenních situacích. Výchoziskem je spolehlivé zvládnutí základních početních úkonů a důraz je kladen na proces a činnost, jakož i na znalosti. Matematická kompetence

zahrnuje, a to v různé míře, schopnost a ochotu používat matematické způsoby myšlení a vyjadřování (vzorce, modely, obrazce, grafy a diagramy). Dále jsou formulovány *nejdůležitější znalosti, dovednosti a postoje související s touto kompetencí*.

Z iniciativy Evropské komise byla zpracována a vydána publikace „Matematické vzdělávání v Evropě: Společná úskalí a politiky jednotlivých zemí“ (Eurydice, Paříž, 2011, čes. překlad: Praha, 2012). V této publikaci i v uvedených dokumentech orgánů EU se užívají pojmy *kompetence* a *matematická kompetence* (jako jedna z klíčových kompetencí), avšak pojem *gramotnost* je v nich používán jen v tradičním všeobecném smyslu, nesetkáme se zde však s pojmem matematická gramotnost. Ten byl spolu s dalšími oborovými gramotnostmi zaveden a používán v mezinárodních šetřeních PISA (viz [2, s. 65 a s. 150]). Podle definice v projektu PISA 2003: *Matematická gramotnost (Mathematical literacy)* je schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana.

V ČR byly do školského systému implementovány některé prvky vzdělanostní politiky EU v první dekádě 21. století, kdy se realizovala zásadní *kurikulární reforma* (viz [2, s. 145–152]). Pevné a závazné celostátní osnovy školních předmětů ZŠ a SŠ s rozpisem povinného učiva do jednotlivých ročníků byly nahrazeny pouze doporučujícími centrálně vytvořenými a schválenými *Rámcovými vzdělávacími programy (RVP)* pro oblasti *základního vzdělávání (ZV)*, *gymnázií (G)* a *středního odborného vzdělávání (SOV)*, na jejichž základě si jednotlivé školy vypracovaly autonomně vlastní *Školní vzdělávací programy*. Základní nosnou ideou RVP se stal požadavek, aby namísto pouhého probírání předepsaného učiva byly vytvářeny a pěstovány *klíčové kompetence žáků*. Symptomatické ovšem je, že na rozdíl od 8 klíčových kompetencí v doporučeních Rady EU se v našich RVP uvádí pouze 6 klíčových kompetencí, přičemž zde neuvedená matematická kompetence je v obdobném smyslu nahrazena užitím pojmu matematická gramotnost. Po letech realizace kurikulární reformy je však zřejmé, že se úplně nenaplnily její vize a očekávané kurikulární výsledky. Na tom se vcelku shodují jak tvůrci reformy, tak i její kritici, liší se jen v názorech na příčiny (důvody), proč tomu tak je a tím také v názoru na provedení revize systému RVP/ŠVP. Přitom např. již v roce 2013 o všech těchto problémech otevřeně a konstruktivně psal v časopise Pedagogická orientace *Stanislav Štech* v článku [12].

Při posuzování vývoje a současného stavu kurikulární reformy v ČR je zřejmě užitečné její porovnání s obdobnými školskými reformami v jiných státech. Přes všechna specifika (kulturní, sociální aj.) mohou být zvláště poučné reformy školství a výuky matematiky ve *Spojených státech amerických*, neboť mnohé jejich myšlenky a podněty pronikly do Evropy i dalších zemí, kde ovlivnily tamní kurikulární reformy. Jako významný příklad připomeňme situaci po roce 1957. V říjnu tohoto roku byla v Sovětském svazu vypuštěna do vesmíru první umělá družice Země *Sputnik 1* a tím započala kosmická éra lidstva.

Úspěch sovětských vědců a inženýrů vzbudil v USA velký šok a vyvolal mnohé úvahy o jeho příčinách. Jejich všestranné analýzy vedly ke dvěma zásadním krokům. Prvním krokem bylo rozhodnutí prezidenta USA *Dwighta D. Eisenhowera* v roce 1958 o založení americké národní agentury pro kosmický výzkum *NASA*. Druhým důležitým krokem bylo zahájení diskusí o nutnosti zvýšení úrovně vzdělávání a zejména výuky matematiky v USA, protože se jednoznačně konstatovalo, že právě kvality sovětských vědců a inženýrů v oblasti matematiky a jejích aplikací byly jednou z hlavních příčin jejich úspěchu. Tyto diskuse vyústily v 60.–70. letech 20. století v USA (a také ve Francii, Itálii aj.) ve vytvoření nové koncepce výuky matematiky, jež spočívala v jejím strukturálně-množinovém pojetí. V USA se pro ni ujal název *Nová matematika* (*New Mathematics*, zkr. *New Math*). Ve školské praxi se však začalo poměrně brzy ukazovat, že toto pojetí výuky matematiky je pro většinu žáků příliš abstraktní, a proto se postupně začalo opouštět. Pro nás je jistě pozoruhodné, že v Československu byla *nová koncepce výuky matematiky* zaváděna do škol v době, kdy ve školách USA i ostatních zemí původu se od ní již ustupovalo.

Z hlediska dalšího vývoje výuky matematiky byla pak v USA její reforma z roku 1989, jejímž iniciátorem byla *Národní rada učitelů matematiky* (*National Council of Teachers of Mathematics*, zkr. *NCTM*), která představuje mohutnou profesní organizaci amerických učitelů matematiky z USA a Kanady. V roce 1989 NCTM připravila základní reformní dokument o standardech kurikula matematiky a hodnocení studentů: *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Tyto standardy přijalo mnoho škol v USA, zároveň byly zpracovány nové učebnice i pomůcky pro výuku a byl zahájen výzkum účinnosti reformy. Výsledky výzkumu však nebyly jednoznačné a byly vystaveny z mnoha stran silné kritice. Deset let ověřování a diskusí o standardech z roku 1989 vedlo k jejich revizi a vzniku nového zásadního dokumentu NCTM v roce 2000:

Principles and Standards of School Mathematics. Knižní publikace má 402 stran a s jejím obsahem (rozděleným do 8 kapitol) se lze stručně seznámit v článku *Jana Hendla*: „Reforma výuky matematiky podle NCTM“ (Učitel matematiky, roč. 11/2002, č. 1 (45), s. 23–33). Standardy z let 1989 a 2000 prosazovaly ve výuce matematiky zejména různé formy konstruktivistického přístupu a situativní epistemologii. To vyvolalo silnou kritiku zastánců tradiční výuky matematiky a jejich koncepční spory se zastánci kurikulární reformy se staly tak vyhrocené, že byly nazývány *matematické války* (*Math wars*). V roce 2002 se navíc vláda USA rozhodla reformovat celé federální školství. Prezident *George W. Bush* podepsal klíčový zákon *No Child Left Behind* (*Žádné dítě nesmí zůstat pozadu*), jehož cílem bylo podstatné snížení negramotnosti a zavedlo se plošné testování žáků všech státních škol.

V roce 2006 vydala NCTM poněkud kompromisní stanovisko ke kurikulární reformě z roku 2000 v dokumentu nazvaném „Curriculum Focal Points“. Téhož roku prezident *George W. Bush* jmenoval *Národní matematický poradní tým* (*National Mathematics Advisory Panel*), jehož úkolem bylo objektivně posoudit všechny provedené reformy výuky matematiky. Ve své závěrečné zprávě v roce 2008 tento poradní orgán konstatoval, že na základě provedených výzkumů se ukazuje stejná důležitost jak matematických znalostí a výpočetních i vyjadřovacích schopností žáků, tak jejich dovednost řešit matematické problémy. Diskuse o samostatném významu každé z těchto složek výuky matematiky považuje za zavádějící, a proto vyzývá k ukončení „matematických válek“. Přes tento relativně smířlivý tón se však její závěry nesetkaly s jednoznačně pozitivní odezvou. Zejména se zvedl velmi široký odpor vůči plošnému standardizovanému testování žáků zavedenému v roce 2002, jehož důsledky se ukázaly pro výuku matematiky jako velmi negativní. Aktuálně o tom nyní soustavně píše a přednáší americká vysokoškolská historička vzdělávání a poradkyně vlády prezidenta *George W. Bushe* ve školských otázkách *Diane S. Ravitch*. V knize „The Death and Life of the Great American School System: How Testing and Choice Are Undermining Education“ („Smrt a život skvělého amerického systému: Jak testování a školní výběr ničí vzdělávání“), jež vyšla v roce 2010 a v upraveném vydání v roce 2016, *D. Ravitch* ukazuje, jak standardizované plošné testování poničilo americké školní vzdělávání a omlouvá se, že udělala fatální chybu, když původně prosazovala jeho zavedení. Přesto však mnoho amerických škol v tomto testování pokračuje, mj. protože se již v letech od roku 1985 zapojily do projektu Univerzity v Chicagu

pro předškolní a primární matematické vzdělávání pod názvem *Everyday Mathematics* (*Každodenní matematika*). V hodinách matematiky podle tohoto projektu se děti učí tak, že je jim předkládána nějaká situace z každodenního života, po jejíž matematizaci mají řešit získaný matematický problém. Ze všech možných způsobů si mohou vybrat ten, který je nejvíce baví. Ovšem tento způsob výuky matematiky zpravidla vede k tomu, že se děti neučí nácvik počítání, ale učí se to, co je testováno ve státních srovnávacích testech.

Značnou pozornost nejen v USA, ale i v zahraničí vyvolala také esej amerického matematika *Paula Lockharta*: „A Mathematician’s Lament“ („Matematikův nárek“) z roku 2002, jejíž rozšířená verze vyšla knižně (Bellevue Literary Press, New York, 2009) a též ve slovenském překladu pod názvem „Matematikov žalospev“ (Nakl. Raabe, Bratislava, 2016). Autor v ní ostře kritizuje kurikulum matematiky na 2. stupni základních škol v USA. V jeho pojetí *matematika je umění* (obdobně jako hudba či malířství) a tomu by se měla přizpůsobit její výuka jako objevitelská činnost při řešení vhodných matematických úloh, jejichž příklady uvádí. P. Lockhart byl vysokoškolským matematikem, ale od roku 2000 se věnuje realizaci své koncepce výuky matematiky na 2. stupni základní školy v New Yorku. V duchu této koncepce napsal též dvě knihy „Measurement“ („Měření“) (Belknap Press, Cambridge, 2012) a „Arithmetics“ („Aritmetika“) (Belknap Press, Cambridge, 2017). Obsahují některé zajímavé úlohy, ale jsou to popularizační matematické publikace, nikoliv učebnice pro ZŠ. Předmluvu ke knižnímu vydání kritické eseje P. Lockharta napsal s jejím doporučením známý americký vysokoškolský matematik a autor řady popularizačních i dalších matematických publikací *Keith Devlin*. Jeho poněkud překvapivý jednoznačný souhlas s Lockhartovou kritikou tradiční výuky matematiky asi částečně souvisí s tím, že se v posledních letech intenzivně věnuje vytváření a užití videoher pro vyučování a vydal knihu „Mathematics Education for a New Era: Video Games as a Medium for Learning“ (A. K. Peters Ltd, Natick – Massachusetts, 2011).

I v řadě evropských zemí, např. ve *Velké Británii* se setkávají s jistým neúspěchem a kritikou provedené kurikulární výuky matematiky. Proto se navrhuje převzít osnovy a učebnice úspěšné *singapurské školské matematiky*. Avšak, jak upozornil již v roce 2011 *František Kuřina* v článku [15], její přebírání v jiných zemích není jednoduché, protože mj. vzdělávací systém v Singapuru je centrálně řízen, má jednotné osnovy, učebnice a hodnocení.

Na přelomu 20. a 21. století v USA vznikla nová specifická forma vzdělávání nazvaná *STEM Education (STEM vzdělávání)*, jehož základní ideou je kooperace, propojování a uvádění do souladu čtyř aplikačně velmi významných vědních oblastí: Science (přírodní vědy), Technology (technologie), Engineering (inženýrství, technika), Mathematics (matematika). Vznik konceptu STEM vzdělávání byl vyvolán rostoucími potřebami interdisciplinárního a aplikovaného přístupu ve vzdělávání v těchto vědních oborech, ale též skutečností, že se velmi prohlubuje nedostatek zájemců o jejich studium. Na školách všech stupňů (základních, středních, vysokých) STEM vzdělávání může být realizováno buď v jednotlivých předmětech přírodovědných, technických a v matematice, anebo ve vhodně integrovaném předmětu. Od začátku 21. století se STEM vzdělávání rozšířilo na školách nejen v USA, ale také v Evropě i v dalších zemích světa. V USA vznikly (i za vládní podpory) školy speciálně zaměřené na STEM vzdělávání.

Cíle výuky matematiky v 21. století

Z průběhu a výsledků všech kurikulárních reforem výuky matematiky je zřejmé, že pro její reálné zlepšení a přizpůsobení požadavkům v 21. století se ukazuje jako proveditelné nutné soustavně a přesvědčivě seznamovat nejen žáky, ale i veřejnost o aktuálním praktickém významu matematiky jako vědy a též o hlavních cílech kvalitní výuky matematiky. V tomto směru lze doporučit např. velmi fundovanou a podnětnou esej vědeckého pracovníka v matematice *Martina Markla*: „Obrana matematiky“ (Vesmír, roč. 98/2019, č. 9, s. 530–531).

Ve smyslu závazných Doporučení Rady EU a našich platných RVP považuji za *hlavní cíle výuky matematiky v 21. století* zejména:

1. Rozvoj matematického a logického myšlení žáků (viz článek [16]).
2. Získání základních (kurikulárně stanovených) matematických poznatků a znalostí s náležitým porozuměním, včetně schopnosti matematického vyjadřování (užití jazyka matematiky).
3. Vytvoření matematických dovedností žáků a jejich schopnosti kreativního použití (aplikací).
4. Výchovné působení na žáky prostřednictvím vyučování matematice.

Přitom za primárně významné pokládám vzdělávací cíle výuky matematiky (tj. vytváření žákovy matematické kompetence), zatímco její výchovné

cíle (tj. vytváření dalších klíčových kompetencí) jsou společné s ostatními výukovými předměty.

Realita výuky matematiky v ČR v současnosti

Po více než deseti letech realizace naší *kurikulární reformy* (zavedení *systému RVP/ŠVP*) je velmi aktuální objektivní zhodnocení všech jejích aspektů a součástí, a tedy i výuky matematiky. Přitom je zřejmě nutné vycházet z posouzení jejího současného stavu a možností zlepšení, včetně přizpůsobení požadavkům 21. století.

V diskusích o povinné maturitě z matematiky jsme se setkávali zejména z řad některých politiků, novinářů a studentů s názorem, že by neměla být povinná, protože

matematika se učí špatně.

Toto obecné tvrzení ovšem není pravdivé. Pokud by bylo zcela pravdivé, znamenalo by to úplné selhání kurikulární reformy v této oblasti a neúspěšnou činnost nejen učitelů, ale i nadřízených školských orgánů. Proč s tímto názorem jsme se nesetkávali před lety v případě jedenáctiletých středních škol, kde povinná maturita z matematiky byla samozřejmostí? (Ačkoliv byla náročná a pro část studentů obtížná, až na naprosté výjimky ji úspěšně absolvovali.)

Negací uvedeného obecného výroku ovšem není, že

matematika se učí dobře.

Také toto obecné tvrzení nemusí být zřejmě pravdivé. Mj. o tom svědčí klesající úroveň matematických znalostí a dovedností mnoha žáků a studentů základních, středních i vysokých škol. [Např. citujme z úvodu článku *Jana Janíka a kol.*: „Meze matematického myšlení...“ (Čs. čas. fyz., roč. 62/2012, č. 5-6, s. 428–431): „Matematické znalosti, úroveň matematického myšlení a dokonce i logického uvažování žáků a studentů středních i vysokých škol rok od roku klesají. Tato zkušenost je bohužel obecná a týká se celé současné populace (snad až na výjimky vcelku stabilních špiček, úspěšně prokazujících svou úroveň v přírodovědeckých soutěžích různých typů).“] Učitelé základních a středních škol vidí důvody hlavně v nastavení systému RVP/ŠVP, ve kterém se většinou snížil počet vyučovacích hodin matematiky, takže látku nelze dostatečně procvičovat, zopakovat a motivovat žáky k jejímu zvládnutí. Nejen učitelé, ale i ředitelé škol, s nimiž jsem v uplynulém desetiletí hovořil, zastávali vesměs názor, že pevně

stanovené *učební osnovy* (s jistou, např. 30% školám povolenou volností) byly podstatně vhodnější a účinnější než kurikulární reformou nastavený systém RVP/ŠVP. Stejně se vyslovila *petice k revizi RVP*, kterou iniciovala gymnaziální učitelka matematiky *Yveta Jirovská* v roce 2018 a podepsalo ji spontánně 608 učitelů matematiky škol všech stupňů.

Zavedením autonomních ŠVP jednotlivých základních a středních škol došlo k výrazné *diverzitě výuky matematiky*. Nejen se velmi rozrůznil rozsah a obsah výuky na školách téhož typu, ale nejednotnou a často značně problematickou je i její metodická stránka. Uvedu několik takových případů, s nimiž jsem se setkal ve výuce středoškolské matematiky, ale doufám, že nejsou pro ni úplně typické. Jedním z nich je řešení matematických úloh redukované na pouhá dosazování do vzorců, jež byly žákům sděleny transmisivně-instruktivním způsobem (bez jakékoliv motivace, resp. odvození). Takto např. v analytické geometrii byli studenti seznámeni s geometrickými (syntetickými) definicemi kuželoseček a pak nezávisle na nich (bez odvození) dostali přehled jejich analytických vyjádření (rovníc), do nichž při řešení úloh dosazovali. Většina úloh, jež se řeší ve středoškolské matematice, jsou zpravidla úlohy určovací, jen výjimečně jsou řešeny úlohy důkazové a velmi málo slovní (aplikační) úlohy. Nelze se proto příliš divit tomu, když řešení těchto typů úloh a matematizace reálných situací bývají obvykle pro mnoho studentů spojeny se značnými obtížemi. Na SOŠ jsem se taktéž setkal se situací, že v ŠVP není účelně provedena koordinace mezipředmětových vztahů. Např. v 1. ročníku jsou v předmětu *Mechanika* potřebné geometrické vektory a goniometrické funkce (nyní nezařazené do učiva ZŠ), ale v předmětu *Matematika* se v této době vyučuje zcela jiná látka (řešení rovnic a nerovnic s absolutními hodnotami aj.).

S rozdílností ŠVP škol téhož typu také souvisí, že bývají odlišné i jejich *školní zkušební řády* (uvedené v příloze ŠVP). Avšak společné jim je v naprosté většině omezení ústního zkoušení na minimum (zpravidla jednou za pololetí, popř. za čtvrtletí). V matematice je nahrazeno psaním většího počtu písemných prací různého rozsahu (kratší jsou zpravidla nazývané testy) i obtížnosti. Důsledkem je skutečnost, že žáci se obvykle nepřipravují soustavně, ale až před písemkou a výuka se pro ně stává „výukovým během od písemky k písemce“. Tyto písemky obvykle nejsou součástí formativního hodnocení žáků, neboť z časových důvodů není s nimi prováděn individuální rozbor chyb a ve výuce je pokračováno bez jejich odstranění. Zároveň tento systém zkoušení má za následek pokles matematických vyjadřovacích schopností žáků (nejen ústních, ale i písemných).

Každý učitel matematiky si postupně vytváří určitý svůj *styl vyučování*, ve kterém zpravidla převažují buď tradiční, anebo inovativní (aktivizační) výukové metody. Přitom používá jistou zvolenou sadu učebnic matematiky pro příslušný stupeň a druh školy. Na ZŠ mají obvykle i žáci k dispozici tyto učebnice. Na SŠ je však mnohdy nemusí povinně mít a učí se pak téměř výhradně ze svých sešitů, tj. z písemných poznámek ve vyučování, jež bývají často neúplné či nepřesné. Avšak vzhledem k požadavkům dalšího studia a celoživotního učení by mělo být samozřejmostí vedení středoškolských studentů k používání učebnic a dalších učebních zdrojů (tištěných i elektronických).

Perspektivy vývoje výuky matematiky v 21. století

Z empirických didaktických výzkumů i školní praxe u nás i ve světě se ukazuje, že perspektivní model výuky matematiky pro 21. století spočívá v kombinaci *výkladu učitele* (tedy tradiční formy výuky) a *inovativních (aktivizačních) forem výuky* založených na jejím *konstruktivistickém pojetí*, přičemž v obou těchto pojetích výuky je samozřejmostí všestranné využívání *digitálních technologií*. Výklady učitele a jeho komunikace se žáky i jejich konstruktivistická činnost má být zaměřena na odpovědi nejen na otázky *JAK?*, ale též *PROČ?* Přitom *objevování (znovuobjevování)* či *bádání* žáků by mělo být vždy odpovídající smyslu těchto pojmů, a ne pouze formální či předstírané. Tomu mj. musí odpovídat zadání problémových úloh. Cílem je rozvoj *matematického a logického myšlení i kreativního (tvorivého) myšlení*. Jsou též výbornou příležitostí rozvoje *kritického myšlení* charakterizovaného úspěšnou snahou dobrat se pravdy. Z vlastní zkušenosti žáka také vím, jak velmi přínosná může být promyšleně organizovaná *skupinová výuka* a cílevědomá *projektová výuka*. Pro efektivní využití digitálních technologií v celém procesu výuky je nutné nejen jejich finanční zajištění, ale též používání *profesionálních programů* a *metodických materiálů*, jež mohou velmi usnadnit a zefektivnit práci učitele. *Hodnocení žáků* by mělo být nejen *sumativní*, ale i *formativní*. Přitom užití *standardizovaných testů* se ukazuje obvykle jako „dobrý sluha, ale špatný pán“.

Závěrem zdůrazněme, že v 21. století pro úspěšnou a přínosnou výuku matematiky je nutné, aby byla pro žáky *zajímavá a užitečná*. Toho lze docílit především vhodnou volbou řešených úloh, speciálně též *aplikačních úloh*. V této souvislosti je ovšem potřebné si uvědomit didaktickou zásadu, kterou připomínal náš významný didaktik matematiky *Jan Vyšín* v článku „Co dělat, aby vyučování matematice bylo užitečné“ (PMFA, roč. 26/1981,

č. 5, s. 285–288): „Ve všeobecně vzdělávací škole nemáme učit aplikacím matematiky, ale matematice, která se dá aplikovat.“ To však neznamená, že není třeba na vhodných aplikačních příkladech (se skutečným porozuměním) ukazovat, jak je matematika velmi důležitá v praktických aplikacích. V současnosti je velice aktuální význam matematického modelování pro výzkum vývoje koronavirové pandemie (epidemie COVID-19) a ve středoškolské matematice je vhodné objasnit nyní mediálně často užívané pojmy *exponenciální průběh (růst)*, *reprodukční číslo R* a *logistická křivka*.

V posledních letech se v mediálních diskusích o našem školství objevoval i požadavek některých novinářů a studentů, aby *výuka matematiky byla zábavná*. Tento silně nadsazený požadavek lze částečně splnit v matematice na 1. stupni ZŠ zařazením v jistém smyslu „zábavných úloh“ a her, avšak již na 2. stupni ZŠ a zejména na SŠ je neopodstatněný a nereálný (snad s výjimkou možného nějakého zařazení vhodné výukové videohry). Na těchto stupních škol je výuka matematiky pro žáky postupně náročnější a těžší, neboť je přirozeně abstraktnější a namísto induktivního usuzování (neúplné indukce) se přechází také k deduktivnímu usuzování. V konkurenci mnoha v současnosti atraktivnějších a zábavnějších činností mládeže (hraní počítačových her, sledování mnoha televizních pořadů, sportování aj.) je tak velmi záslužná a často nedoceňovaná práce učitelů, kteří dovedou probudit zájem žáků a studentů o matematiku, motivovat je k jejímu studiu a též ke studiu jejích aplikací. V 21. století je zvláště důležitou kompetencí učitele umění ukazovat, že *matematika je krásná sama o sobě i ve svém mnohostranném praktickém využití*.

Literatura

- [1] Polák, J.: Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. I. část. Konkrétní didaktika matematiky. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2014.
- [2] Polák, J.: Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. II. část. Obecná didaktika matematiky. Fraus, Plzeň, 2016.
- [3] Polák, J.: Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. III. část. Historie matematiky pro učitele. Fraus, Plzeň, 2016.
- [4] Janík, T.: Didaktické znalosti obsahu a jejich význam pro oborové didaktiky, tvorbu kurikula a učitelské vzdělávání. Paido, Brno, 2009.
- [5] Hejný, M., Kuřina, F.: Konstruktivní přístupy k vyučování matematice. MFI, roč. 7 (1997/8), č. 7, s. 385–395.

- [6] *Stehlíková, N., Cachová, J.*: Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe. JČMF, Praha, 2006.
- [7] *Rendl, M.*: O konstruktivismu ve vyučování matematiky. *Pedagogika*, roč. 58 (2008), č. 2, s. 167–203.
- [8] *Dostál, J.*: Badatelsky orientovaná výuka – Pojetí, podstata, význam a přínosy. Pdf UP, Olomouc, 2015.
- [9] *Samková a kol.*: Badatelsky orientované vyučování matematice. *Scientia in educatione*, roč. 6 (2015), č. 1, s. 91–122.
- [10] *Robová, J.*: Integrace informačních a komunikačních technologií jako prostředek aktivního přístupu žáků k matematice. PedF UK, Praha, 2012.
- [11] *Jančařík, A.*: Vybrané teorie učení a jejich projekce do využívání ICT ve výuce matematiky. PedF UK, Praha, 2013.
- [12] *Štech, S.*: Když je kurikulární reforma evidence-less. *Pedagogická orientace*, roč. 23 (2013), č. 5, s. 615–633.
- [13] *Dvořák, D. a kol.*: Kurikulum školního vzdělávání – Zahraniční reformy v 21. století. PedF UK, Praha, 2018.
- [14] *Kolektiv autorů EU*: Matematické vzdělávání v Evropě – Společná úskalí a politiky jednotlivých zemí. Eurydice, Brusel, 2011 (český překlad 2012).
- [15] *Kuřina, F.*: Tři pokusy řešit neřešitelné. *Pedagogika*, roč. 61 (2011), č. 1, s. 5–12 .
- [16] *Polák, J.*: Rozvoj logického myšlení žáků ve výuce matematiky. *Učitel matematiky*, roč. 27 (2019), č. 2 (111), s. 74–88.
- [17] *Joson, A.*: Mathematics and the “real world” – Moving toward 21st Century Math Learning. SOWISO (Learning Math and Science), Kempton (SRN), 27. 11. 2017.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 265 a 266 můžete zaslat nejpozději do 31. 3. 2021 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v \TeX ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz.