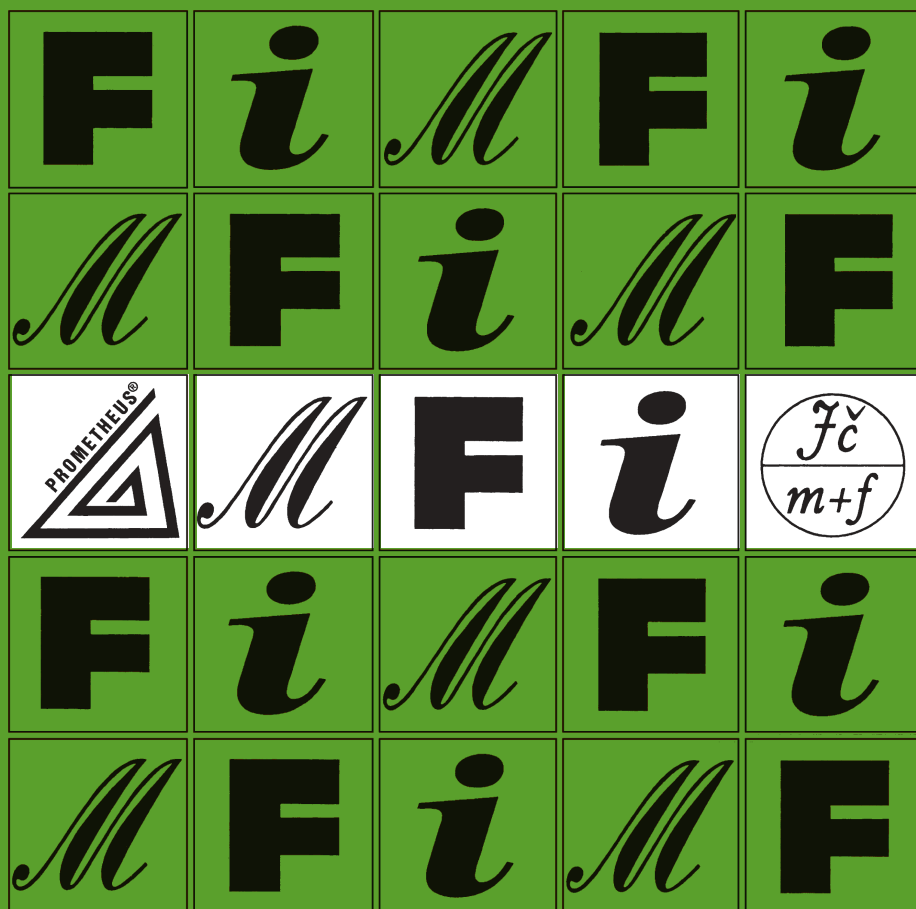


MATEMATIKA 4 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXIX (2020), číslo 4

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku
Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek
Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška, Michaela Křížová, Miluše Lachmannová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil (předseda redakční rady), Dana Mandíková, Oldřich Odvárko, Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel Töpfer

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

Š. Arslanović, D. Zubović: Nerovnosti pro délky těžnic v trojúhelníku	241
L. Spíchal: O mincích a invariantech	245
J. Polák: Didaktika matematiky v 21. století a realita výuky	256
Zajímavé matematické úlohy	276

FYZIKA

O. Lepil: Fázový portrét oscilátoru	280
---	-----

INFORMATIKA

P. Töpfer: Optimální způsob placení (Úlohy z MO kategorie P, 40. část)	298
P. Osička: Optimalizační problémy a aproximační algoritmy	303

ZPRÁVY

P. Töpfer: Ústřední kolo 69. ročníku MO (kategorie P)	316
P. Calábek: 9. evropská dívčí matematická olympiáda	318

Obsah ročníku XXIX (2020)

Nerovnosti pro délky těžnic v trojúhelníku

ŠEFKET ARSLANAGIĆ – DANIELA ZUBOVIĆ

Sarajevo, BOSNA A HERCEGOVINA

Cílem tohoto příspěvku je seznámit čtenáře s jednou zajímavou nerovností pro délky těžnic v libovolném trojúhelníku a s některými jejími aplikacemi. Budeme zde využívat standardního označení pro použité základní prvky v trojúhelníku ABC , tj. a, b a c značí délky jeho stran po řadě BC, CA a AB , dále t_a, t_b, t_c značí délky jeho těžnic po řadě z vrcholů A, B, C a r , resp. ρ poloměr kružnice tomuto trojúhelníku opsané, resp. poloměr kružnice jemu vepsané.

Věta

V libovolném trojúhelníku ABC (při zohlednění výše uvedeného označení) platí nerovnosti

$$t_a \geq \frac{b^2 + c^2}{4r}, \quad t_b \geq \frac{c^2 + a^2}{4r}, \quad t_c \geq \frac{a^2 + b^2}{4r}.$$

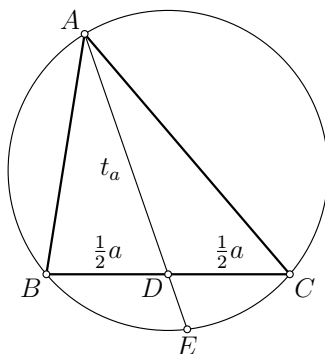
Důkaz provedeme pouze pro první ze tří uvedených nerovností, zbylé dvě pak získáme užitím principu cyklické záměny. Označme D střed strany BC uvažovaného trojúhelníku a E ($E \neq A$) průsečík přímky AD s kružnicí opsanou tomuto trojúhelníku, viz obr. 1.

Užitím mocnosti bodu D ke kružnici opsané trojúhelníku ABC máme

$$|AD| \cdot |DE| = |BD| \cdot |CD|,$$

tj.

$$t_a \cdot |DE| = \frac{1}{4}a^2 \quad \text{a odtud} \quad |DE| = \frac{a^2}{4t_a}. \quad (1)$$



Obr. 1

S ohledem na (1) dále platí

$$|AE| = |AD| + |DE| = t_a + \frac{a^2}{4t_a} = \frac{4t_a^2 + a^2}{4t_a}. \quad (2)$$

Využitím známého vztahu $t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$ pro vyjádření druhé mocniny délky těžnice t_a pomocí délek stran trojúhelníku ABC obdržíme po dosazení za t_a^2 v čitateli na pravé straně (2) po snadné úpravě

$$|AE| = \frac{b^2 + c^2}{2t_a}.$$

Protože $|AE| \leq 2r$, dostaneme dále

$$\frac{b^2 + c^2}{2t_a} \leq 2r, \quad \text{a tedy} \quad t_a \geq \frac{b^2 + c^2}{4r}.$$

Tím je důkaz první nerovnosti uzavřen.

Rovnost zde nastane, právě když $b = c$, tedy v případě rovnoramenného trojúhelníku se základnou BC , nebo v případě pravoúhlého trojúhelníku s přeponou BC .

Důsledek 1

Pro délky těžnic t_a, t_b, t_c v libovolném trojúhelníku ABC platí nerovnost

$$t_a + t_b + t_c \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2r}, \quad (3)$$

přičemž rovnost nastane, je-li trojúhelník ABC rovnostranný.

Důkaz nerovnosti (3) obdržíme součtem všech tří nerovností z věty 1. Rovnost v ní však nastane, právě když je trojúhelník rovnostranný.

Nyní uvedeme další důsledky dokázaného tvrzení. Využijeme-li k dalšímu odhadu pravé strany (3) známou *Weitzenbökovu nerovnost*, viz např. [2], [3] nebo [4, s. 18], ve tvaru $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4P\sqrt{3}$, kde P je obsah trojúhelníku ABC , resp. silnější, tzv. *Finslerovu–Hadwigerovu nerovnost* ve tvaru $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4P\sqrt{3} + Q$, kde $Q = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$, viz [3], [4, s. 19] nebo [5, s. 151], dostaneme následující odhady. V obou z nich přitom nastane rovnost, právě když trojúhelník ABC je rovnostranný.

Důsledek 2

Pro délky těžnic t_a, t_b, t_c v libovolném trojúhelníku ABC platí nerovnosti

$$t_a + t_b + t_c \geq \frac{2P\sqrt{3}}{r}, \quad \text{resp.} \quad t_a + t_b + t_c \geq \frac{4P\sqrt{3} + Q}{2r}.$$

Další důsledky nerovnosti (3) se opírají o identitu

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2(s^2 - \rho^2 - 4r\rho), \quad (4)$$

kde $2s = a + b + c$, kterou lze nalézt např. v [3] nebo [5, s. 123]. Platí tak

Důsledek 3

Pro délky těžnic t_a, t_b, t_c v libovolném trojúhelníku ABC platí nerovnost

$$t_a + t_b + t_c \geq \frac{s^2 - \rho^2 - 4r\rho}{r}. \quad (5)$$

Na základě nerovnosti $s^2 \geq \rho(16r - 5\rho)$, viz např. [3, 5.8, s. 50], plyne ze vztahu (5)

$$\begin{aligned} t_a + t_b + t_c &\geq \frac{s^2 - \rho^2 - 4r\rho}{r} \geq \frac{16r\rho - 5\rho^2 - \rho^2 - 4r\rho}{r} = \\ &= \frac{12r\rho - 6\rho^2}{r} = 6\rho \left(2 - \frac{\rho}{r}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Užitím Eulerovy nerovnosti $r \geq 2\rho$, viz např. [4, s. 45], dostaneme

$$\frac{\rho}{r} \leq \frac{1}{2},$$

takže pravou stranu (6) lze dále odhadnout

$$6\rho \left(2 - \frac{\rho}{r}\right) \geq 6\rho \left(2 - \frac{1}{2}\right) = 9\rho.$$

Důsledek 4

Pro délky těžnic t_a, t_b, t_c v libovolném trojúhelníku ABC platí nerovnost

$$t_a + t_b + t_c \geq 9\rho,$$

příčemž rovnost zde nastane, právě když trojúhelník ABC je rovnostranný.

Poznámka. Lze dokázat také nerovnost $t_a + t_b + t_c \leq \frac{9}{2}r$, viz např. [5, s. 144].

Poslední důsledek nerovnosti (3), který zde uvedeme, využívá nerovnost mezi kvadratickým a aritmetickým průměrem pro délky stran a, b, c uvažovaného trojúhelníku ABC a nerovnost $s^2 \geq 27\rho^2$, viz např. [3, 5.11, s. 52].

Důsledek 5

Pro délky těžnic t_a, t_b, t_c v libovolném trojúhelníku ABC platí nerovnost

$$t_a + t_b + t_c \geq \frac{18\rho^2}{r},$$

příčemž rovnost zde nastane, právě když trojúhelník ABC je rovnostranný.

Podrobné provedení *důkazu* této nerovnosti přenecháváme laskavému čtenáři.

(Z německého originálu zaslaného redakci časopisu Matematika–fyzika–informatika přeložil a upravil *Jaroslav Švrček*.)

Literatura

- [1] *Arslangić, Š.*: Matematika za nadarene. Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
- [2] *Bilčev, S. J.*: Recent Strategies for Creating and Proving of Geometric Inequalities. In: Sborník MAKOS 2008, Olomouc, 2008.
- [3] *Bottema, O., Djordjević, R. Ž., Janić, R. R., Mitrinović, D. S., Vasić, P. M.*: Geometric inequalities. Wolters–Nordhoff Publishing, Groningen, 1969.
- [4] *Horák, S.*: Nerovnosti v trojúhelníku. Edice „Škola mladých matematiků“, svazek 57, Praha, 1986.
- [5] *Švrček, J., Vanžura, J.*: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha, 1988.

O mincích a invariantech

LUDEK SPÍCHAL

Ústav matematiky a statistiky MU, Brno

Dobrá matematická úloha je něco jako dobrá hra. Snad nebudeme daleko od pravdy, když řekneme, že dobrá hra by měla splňovat určité podmínky, které ji činí pro hráče atraktivní. Aniž bychom si dělali nároky na úplnost výčtu takových podmínek, či tvrdili, že každá dobrá hra je musí bezpodmínečně a v plném výčtu naplnit, zmiňme alespoň některé: relativně jednoduchá nebo alespoň snadno srozumitelná pravidla, možnost plánování a tvorby strategií, široká paleta herních variant, přesah do různých oblastí ne nutně pouze matematiky apod. Dostupná populárně-naučná literatura nabízí bezpočet příkladů takových úloh. Dobré příklady lze nalézt rovněž na tématicky zaměřených internetových stránkách.

Záměrem článku je poukázat na jeden takový zajímavý zdroj a uvést příklad úlohy, která má na jedné straně velmi jednoduchou formulaci a snadno srozumitelný způsob hledání řešení, na straně druhé pro některé řešitele možná poněkud překvapivý výsledek a zejména velmi zajímavý matematický kontext.

Již několik let je každé druhé pondělí na webu britského deníku The Guardian uveřejněna úloha související s matematikou či logikou.¹⁾ Autorem příspěvků je britský novinář a spisovatel *Alex Bellos* (Alex Bellos's Monday puzzle). Jméno autora příspěvků nemusí být čtenářům majícím v oblíbě populárně-naučnou literaturu z oblasti matematiky zcela neznámé. V nedávné době vyšly v češtině hned dvě popularizační publikace, ve kterých Alex Bellos prokazuje schopnost poutavě a čtivě popsat problémy aktuální i historické povahy z různých oblastí matematiky.²⁾

Nyní již k naší úloze, která byla na stránkách The Guardian uveřejněna 7. října 2019. Úloha nese v originále název *Getting coins out of the bank*, což můžeme volně přeložit např. jako *Dostaňte mince z banky* [5].³⁾

¹⁾<https://www.theguardian.com/science/mathematics>

²⁾Bellos, A.: *Alexova dobrodružství v zemi čísel*. Dokořán, Praha, 2015.
Bellos, A.: *Alex za zrcadlem. Jak se čísla odrážejí v životě a život v číslech*. Dokořán, Praha, 2016.

³⁾Autorem úlohy je Carlos Sarraute, https://www.researchgate.net/profile/Carlos_Sarraute.

1. Dostaňte mince z banky

Naše úloha začíná jako hra na mřížce, kterou tvoří nekonečný počet sloupců a řádků. V počáteční pozici jsou na mřížce v jejím levém horním rohu umístěny tři mince, které spolu s jedním volným polem tvoří čtvercovou *banku* (obr. 1). Cílem hry je dostat mince ven z banky, přičemž hráč musí postupovat podle následujících pravidel.



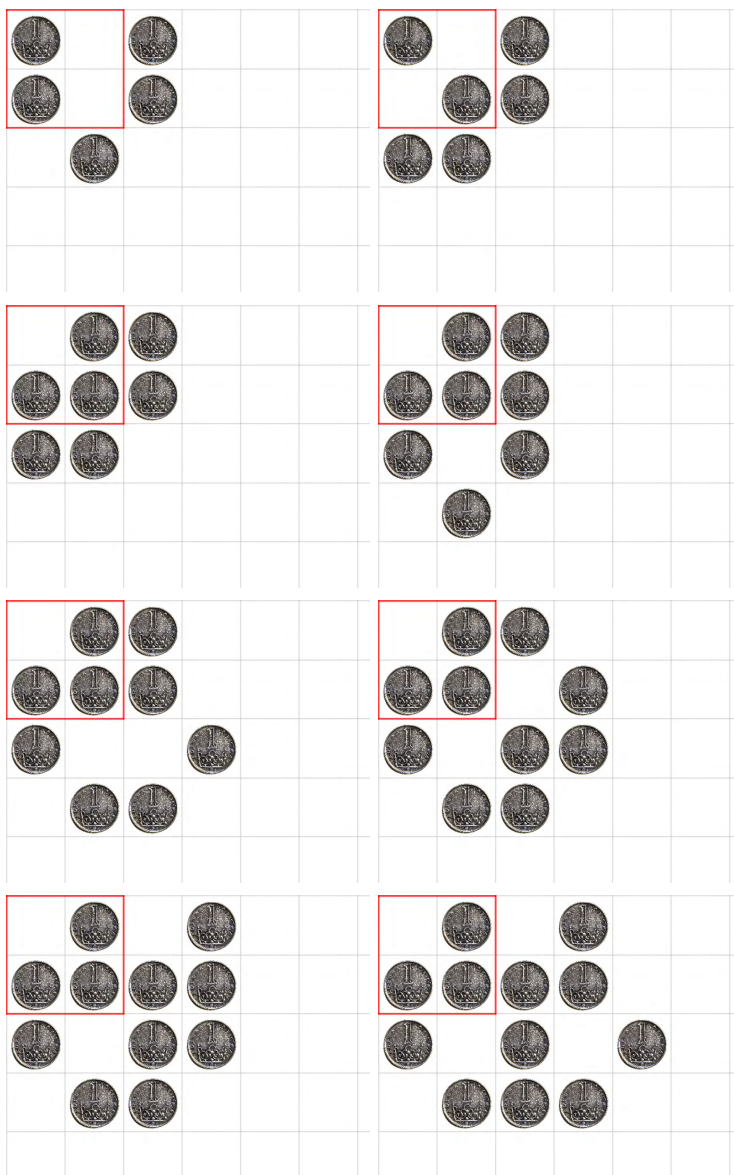
Obr. 1 Umístění mincí v bance na počátku hry

- (i) Pokud hráč hodlá odstranit z libovolného pole minci, pak ji musí nahradit dvěma mincemi. Jednu z mincí položí na pole vpravo od odstraněné mince, druhou na pole pod odstraněnou minci (obr. 2).
- (ii) Podmínkou pro provedení kroku z bodu (i) je, že obě potřebná pole jsou před odstraněním mince prázdná (obr. 2).



Obr. 2 Pravidla pro posun mincí v mřížce

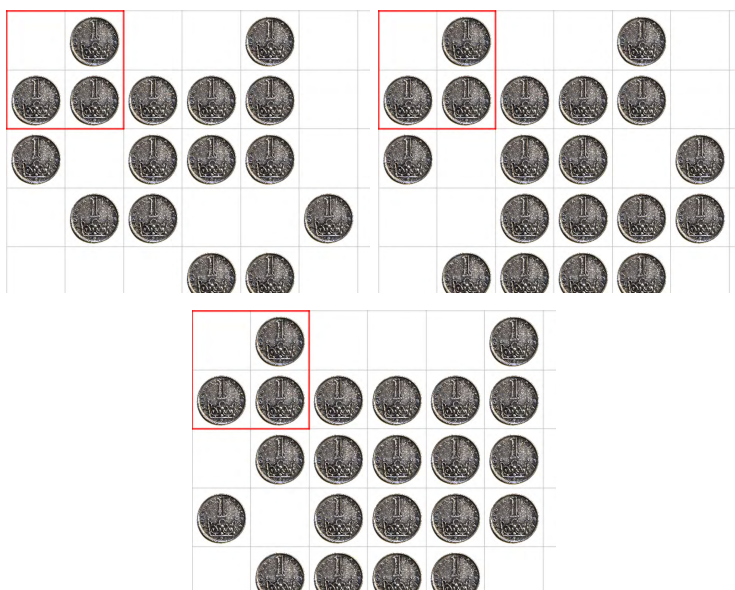
Připomeňme ještě jednou cíl, kterým je dostat podle výše uvedených pravidel mince z banky. Vezměme tedy několik mincí a hledejme cestu, jak vyvést mince z banky. Pokud navážeme na obr. 2, pak několik dalších kroků může vypadat např. tak, jak je ukázáno na obr. 3.





Obr. 3 Několik možných prvních kroků při posunu mincí v mřížce

Pokud budeme pokračovat a sledovat stav např. po každých třech krocích, pak může rozestavení mincí vypadat jako na obr. 4.⁴⁾ Dále již po několika prvních krocích zjistíme, že mincí v mřížce rychle přibývá (každým krokem o jednu).



Obr. 4 Další posun mincí v mřížce (vždy po třech krocích)

⁴⁾Velmi jednoduše si lze vyzkoušet různé varianty posouvání mincí na adrese <https://scratch.mit.edu/projects/334378520>.

Jestliže jste pojali podezření, že všechny mince z banky vyvést nelze, pak jste na správné cestě. Jakýkoliv pokus končí situací, kdy mince uvíznou v nějaké poloze, která může odpovídat např. stavu podobnému jako na obr. 4. Zkusme tedy pracovat s hypotézou, že mince podle pravidel, která jsme si stanovili, z banky dostat nelze. Vytvořením hypotézy opouštíme sféru pouhé hry a posouváme se do sféry matematiky, která, jak bude ukázáno dále, nabízí velmi důvtipný způsob důkazu stanovené hypotézy.

2. Důkaz hypotézy

V další části nahradíme v mřížce mince čísla podle schématu, jehož smysl bude záhy zřejmý. Čísla, kterými nahradíme mince, budou představovat *váhu* dané buňky. Do levé horní buňky umístíme číslo (váhu) 1. Buňky bezprostředně vpravo a pod buňkou s váhou 1 budou mít váhu $\frac{1}{2}$. Buňky umístěné ve směru vpravo nebo ve směru dolů od dané buňky budou mít váhu, která bude vždy polovinou *váhy* buňky, které je v mřížce bezprostředně výše nebo více vlevo. Pohledem do mřížky např. okamžitě zjišťujeme, že buňky ležící ve stejné úhlopříčce mají stejnou váhu (obr. 5).

1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2048}$

Obr. 5 Váhy jednotlivých buněk v mřížce

Jestliže postupujeme při posouvání mincí podle výše stanovených pravidel, pak sice v každém kroku v mřížce přibývá jedna mince, váha buněk obsazených mincemi se však zachovává. Na počátku je součet vah buněk

obsazených mincemi roven 2 (obr. 6 vlevo). V jakémkoliv dalším kroku zůstává váha obsazených buněk zachovaná, např. na obr. 6 vpravo je součet vah buněk roven hodnotě:

$$2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{16} + 5 \cdot \frac{1}{32} + 4 \cdot \frac{1}{64} + 3 \cdot \frac{1}{128} + 2 \cdot \frac{1}{256} = \frac{512}{256} = 2$$

1	$\frac{1}{2}$				
$\frac{1}{2}$					
	$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{32}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$
$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$
	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	

Obr. 6 Porovnání vah buněk ve dvou stavech úlohy

Pokud by tedy úloha měla řešení a mince bylo možné z banky vyvést, pak by součet vah buněk ležících mimo banku musel být minimálně roven součtu vah buněk obsazených mincemi na počátku úlohy.

Je zřejmé, že musíme určit součet vah buněk celé nekonečné mřížky. Každý řádek (sloupec) mřížky tvoří nekonečná geometrická posloupnost s kvocientem $\frac{1}{2}$. Pokud sečteme váhy buněk v 1. sloupci (řádku)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,$$

2. sloupci (řádku)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1,$$

3. sloupci (řádku)

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2},$$

atd. sloupci (nebo řádku) mřížky, získáme další nekonečnou geometrickou posloupnost

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots,$$

jejíž součet je roven hodnotě

$$2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{2}{1 - \frac{1}{2}} = 4,$$

která představuje váhu všech buněk celé nekonečné mřížky. Nyní je již důkaz téměř hotov. Stačí již pouze uvážit, že rozdíl součtu vah buněk tvořících celou mřížku a buněk tvořících banku je $4 - \frac{9}{4} = \frac{7}{4}$. Číslo $\frac{7}{4}$, představující váhu buněk ležících mimo banku, je menší než je součet vah buněk obsazených mincemi na počátku ($1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$). *Mince tedy skutečně nelze podle výše stanovených pravidel z prostoru banky vyvést.*

3. Invarianty

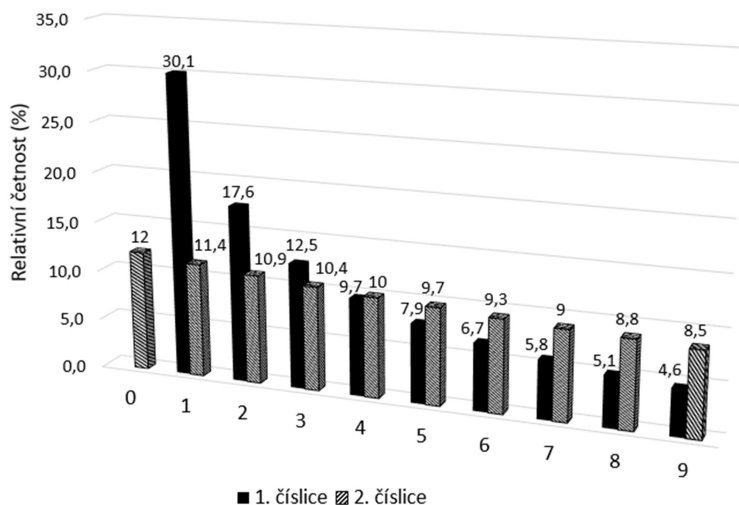
Cílem této části je poukázat na zajímavý matematický kontext metody použité k důkazu v předchozí části, který souvisí s praktickou aplikací pojmu tzv. *invariantu*. Uveďme nejprve definici samotného pojmu invariantu.

Invariantem rozumíme vlastnost nebo měřitelnou veličinu, která se při jisté transformaci, resp. při opakování nějakého postupu nemění [1].

Invarianty lze nalézt v řadě oblastí nejen matematiky, ale také fyziky či chemie. Pro lepší pochopení uveďme několik konkrétních příkladů invariantů [1]:

- Lze snadno ukázat, že přičtením libovolné konstanty ke všem členů aritmetické posloupnosti získáme opět aritmetickou posloupnost, která má stejnou diferenci. Invariantem je zachování aritmetické posloupnosti i diference.
- Plnění nádrže o daném objemu čerpadly o stejném výkonu závisí na počtu čerpadel a čase, po který pracují. Invariantem je celková práce, která odpovídá součinu počtu čerpadel a celkového času.
- Důležité invarianty představují zákony zachování známé z fyziky a chemie.

Zajímavý příklad invariantu lze nalézt v oblasti tzv. Benfordova zákona. Benfordův zákon vychází z empirických pozorování, ze kterých vyplývá, že v mnoha přirozeně se vyskytujících souborech číselných dat nemají první číslice stejné zastoupení, ale řídí se určitým typem logaritmické distribuce. Malé číslice 1, 2 nebo 3 tak mají větší četnost zastoupení na první číselné pozici než číslice velké (obr. 7). Tato nerovnoměrnost v zastoupení navíc nezávisí na měřítku, které je invariantem, více např. [2].



Obr. 7 Relativní četnost číslic na první, resp. druhé pozici podle Benfordova zákona

Zmíněnou nezávislost na měřítku můžeme demonstrovat na příkladu čísel tvořících Lucasovu posloupnost (L_n) .⁵⁾ Rekurentní vzorec této posloupnosti je

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad L_1 = 2, \quad L_2 = 1.$$

Lucasovu posloupnost tedy tvoří čísla

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, \dots$$

V tabulce 1 je uvedena relativní četnost prvních číslic v L_n , $8L_n$ a $20L_n$ ve srovnání s četností číslic podle Benfortova zákona. Je zřejmé, že relativní četnosti jsou blízké Benfortovu zákonu a skutečně nezávisí na změně měřítka.⁶⁾

Číslice	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B. zákon	30,1	17,6	12,5	9,7	7,9	6,7	5,8	5,1	4,6
L_n	31	17	14	10	8	5	7	4	4
$8L_n$	29	18	13	9	8	7	4	7	5
$20L_n$	28	18	13	10	7	8	6	5	5

Tab. 1 Relativní četnost prvních číslic podle Benfortova zákona a v L_n , $8L_n$ a $20L_n$

Obdobnou nezávislost na měřítku můžeme zaznamenat také v případě tzv. Zipfova zákona, který popisuje poměrně často se vyskytující vztah mezi pořadím a četností prvků v různých statistických souborech (více např. [3]).

Pro poslední zde zmíněný příklad výskytu invariantů využijeme Rubikovu kostku, která je jedním z nejznámějších hlavolamů světa [4]. Rubikova kostka je mechanický hlavolam tvořený krychlí složenou z dílčích barevných krychlíček. Úkolem je otáčením přeuspořádat jednotlivé dílčí krychličky tak, aby každá strana celého tělesa byla obarvena jen jednou barvou.⁷⁾

⁵⁾ Lucas, F. É. A. (1842–1891) byl francouzský matematik.

⁶⁾ Potvrzení uvedeného pozorování by bylo možné provést např. χ kvadrát testem dobré shody.

⁷⁾ Ernő Rubik (nar. 1944) je maďarský vynálezce, sochař a profesor architektury.

Pokud bychom mohli promíchat barvy všech kostiček kostky naprosto bez jakéhokoliv omezení, pak bude celkový počet barevných konfigurací⁸⁾

$$519\,024\,039\,293\,878\,272\,000.$$

Toto obrovské číslo ovšem nevyjadřuje počet reálně nastavitelných uspořádání kostky, neboť je možné pootáčet pouze stěnami kostek. Skutečná hodnota možných uspořádání kostiček na Rubikově kostce je tak zlomkem uvedené hodnoty a lze ukázat, že jde přesně o dvanáctinu výše uvedeného počtu konfigurací, tj.

$$43\,252\,003\,274\,489\,856\,000.$$

Každé otáčení ovlivňuje současně polohu několika kostiček, přičemž některé charakteristiky (invarianty) celé kostky nelze změnit.

- (i) *Parita*. Výměna poloh kostiček se děje přesunem sudého počtu dvojic objektů, jedná se tedy o sudou permutaci. Takových permutací je přesně polovina celkového počtu možných permutací (druhou polovinu tvoří liché permutace) a rotacemi lze uskutečnit pouze polovinu možných uspořádání kostky.
- (ii) *Parita hran stěn*. Podobně jako v předchozím bodu i zde podmínka půlí celkový počet možných stavů, neboť také v případě posloupností rotací jde o sudou permutaci.
- (iii) *Trojčetnost rohů*. Při každé rotaci se otáčí celá stěna kostky. Pokud očíslováme jednotlivé stěny rohových kostiček čísly 0, 1 a 2, a to vždy po směru hodinových ručiček, pak součet všech těchto čísel modulo 3 se nezmění při libovolné rotaci. Podmínka tedy snižuje počet možných uspořádání na třetinu.

⁸⁾Uvedenou hodnotu určíme pomocí kombinatorických pravidel. Osm rohů kostky můžeme obsadit $8!$ způsoby, navíc každá rohová kostička může být pootočena a orientována třemi různými způsoby. Celkem tedy pro rohové kostičky existuje $3^8 \cdot 8!$ možných konfigurací. Analogicky určíme počet možných uspořádání 12 krychlíček uprostřed hran, který je roven hodnotě $2^{12} \cdot 12!$, neboť pro každou kostičku existují vždy dva různé způsoby pootočení. Použitím kombinatorického pravidla součinu dále platí, že

$$3^8 \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 12! = 519\,024\,039\,293\,878\,272\,000.$$

Pokud shrneme výše uvedené poznámky o invariantech na Rubikově kostce, zjistíme, že skutečný počet možných uspořádání je $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$, tj. dvanáctkrát menší:

$$\frac{3^8 \cdot 8! \cdot 2^{12} \cdot 12!}{12} = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000.$$

V naší úloze byl invariantem součet vah buněk obsazených mincemi. Zachovávající se součet vah buněk na jedné straně a menší než minimální hodnota součtu vah buněk mimo banku na straně druhé jsou praktickou aplikací pojmu invariantu k řešení naší úlohy.

Závěr

Řadu zajímavých úloh využívajících pojmu invariantu lze nalézt v [1]. Zájemci mohou samozřejmě zvažovat další varianty rozložení mincí v bance a možnosti, jak je v konečném počtu kroků podle výše stanovených (popř. upravených) pravidel vyvést z banky.

Literatura

- [1] *Horenský, R.*: Využití invariantů a poloinvariantů v úlohách školské matematiky. Dizertační práce, Olomouc, 2012. Dostupné z: https://theses.cz/id/utu9c5/disertacni_prace.pdf
- [2] *Bellos, A.*: Alex za zrcadlem. Jak se čísla odrážejí v životě a život v číslech. Dokořán, Praha, 2016.
- [3] *Spíchal, L.*: Zipfův zákon a další mocninné zákony. Učitel matematiky, roč. 28 (2020), č. 2, s. 94–109.
- [4] *Stewart, I.*: Neuvěřitelná čísla profesora Stewarta. Dokořán a Argo, Praha, 2019.
- [5] <https://www.theguardian.com/science/2019/oct/07/can-you-solve-it-getting-coins-out-of-the-bank>

Didaktika matematiky v 21. století a realita výuky

JOSEF POLÁK

Fakulta aplikovaných věd ZČU v Plzni

Didaktika matematiky v 21. století kontinuálně navazuje na předchozí vývoj a zejména intenzivní rozvoj v 2. polovině 20. století. Obdobně jako další oborové didaktiky v teoretické i empirické výzkumné činnosti se soustřeďuje především na didaktické oblasti zaměřené na obsah vzdělání a jeho didaktickou transformaci, na psychodidaktické procesy poznávání a metody výuky, na organizační formy výuky a na efektivní využití digitálních technologií ve výuce. Účelem těchto výzkumů v didaktice matematiky je nalézání co nejefektivnějších způsobů a postupů vedoucích ke zlepšení kvality výuky matematiky. Přitom se vychází ze stanovení jejích hlavních cílů v souladu s požadavky technologického i sociálního rozvoje společnosti v 21. století.

Zaměření didaktiky na obsah vzdělávání a jeho didaktickou transformaci

S pozoruhodným obsahovým zaměřením didaktiky a s promyšleným systematickým úsilím o přizpůsobení obsahu vzdělávání poznávacím schopnostem žáků se lze setkat již v didaktických spisech významného českého pedagoga 17. století *Jana Amose Komenského* a poté i v dílech řady dalších významných světových pedagogů a oborových didaktiků. Důležitost studia a empirického výzkumu obsahové náplně vzdělávání a modernějšího pojetí školního kurikula se velmi výrazně zvětšila zejména ve 2. polovině 20. století a v 21. století v souvislosti s exponenciálním nárůstem vědomostí a informací ve vědě i společnosti, nazývané proto *vědomostní společnost* či *informační společnost*.

V Evropě, zvláště v Německu od 50. let 20. století vzniklo množství podnětných studií věnovaných problematice zprostředkování vzdělávacích obsahů ve školní praxi. Z nich se stala široce známou koncepce, kterou předložil německý pedagog *Wolfgang Klafki* z Univerzity v Magdeburgu (SRN) ve své studii „Didaktická analýza jako jádro přípravy na vyučo-

vání“ publikované v němčině roku 1958. V českém překladu vyšla pod názvem „Studie k teorii vzdělávání a didaktice“ (SPN, Praha, 1967). V této koncepční studii W. Klafki nejen ukazuje význam vhodného výběru vzdělávacích obsahů s ohledem na jejich srozumitelnost pro žáky, ale též zdůrazňuje jeho přímý vliv na rozvoj osobnosti žáků. Svoji koncepci didaktického zprostředkování učiva Klafki založil především na *didaktické analýze učiva*, jež byla ve 2. polovině 20. století považována mnoha pedagogy za jediný výchozí model výběru učiva. Přibližně v téže době jako Klafki reagoval německý didaktik *Dietrich Hering* na obrovský nárůst vědeckých poznatků a s ním spojené zvětšování rozsahu učiva na všech typech škol po 2. světové válce. Ve svých publikacích z let 1958–1959 jako první zavedl a použil pojem *didaktické zjednodušení* vědeckých poznatků pro jejich zprostředkování a pochopení žáky vzhledem k jejich věku.

V USA se problematikou vzdělávacích obsahů začal systematicky a v širších souvislostech zabývat až v 80. letech 20. století pedagogický psycholog *Lee S. Shulman* ze Stanfordovy univerzity v Kalifornii. Z pozice prezidenta Americké asociace pedagogického výzkumu v letech 1984–1985 ostře kritizoval pedagogický výzkum v USA za to, že v něm dlouhodobě chybí empirický pedagogický výzkum vztahující se k obsahu vyučování a jeho profesnímu významu. Za východisko z této situace L. S. Shulman a jeho spolupracovníci zvolili srovnávací výzkumy myšlení a činností jednak učitelů začátečníků, jednak zkušených a úspěšných učitelů. Zároveň též sledovali, jak probíhají procesy umění vyučovat u studentů učitelství. Za cíl těchto empirických výzkumů L. S. Shulman považoval zodpovědět otázky, jaké jsou základní předpoklady úspěšného pedagogického myšlení a jednání, z jakých zdrojů se utváří profesionální poznatková báze učitelů, jež jim umožní kvalitní a efektivní výuku, co je základem činnosti učitelů jako profesionálů, působících ve vzdělávání a odlišujících je od jiných odborníků. Na základě četných výzkumů pak L. S. Shulman ve studii „Knowledge and teaching: Foundations of the new reform“ („Znalosti a vyučování: Základy nové reformy“), publikované v časopise *Harvard Educational Review* (roč. 57/1987, č. 1, s. 1–22), formuluje přesvědčení, že *poznatková báze učitelství* má sestávat ze sedmi kategorií znalostí (s názvy přeloženými do češtiny pedagogy *Jiřím Kotáskem* a *Tomášem Janíkem*):

- *znalosti obsahu učiva (subject matter content knowledge),*
- *obecné pedagogické znalosti (general pedagogical knowledge),*
- *znalosti kurikula (curriculum knowledge),*
- *didaktické znalosti obsahu (pedagogical content knowledge),*

- *znalosti o žácích a jejich charakteristikách (knowledge of learners and their characteristics),*
- *znalosti o kontextu vzdělávání (knowledge of educational context),*
- *znalosti o cílech, smyslu a hodnotách vzdělávání (knowledge of educational ends, purposes and values).*

Z těchto sedmi kategorií znalostí učitelů, jež tvoří poznatkovou bázi učitelství, jsou tři kategorie vázány na obsah (znalosti obsahu učiva, znalosti kurikula a didaktické znalosti obsahu), jež podle L. S. Shulmana představují její jádro. Z teoretického i praktického hlediska pro úspěšnou činnost učitele za základní považuje zejména *didaktické znalosti obsahu*, jimiž se rozumí didakticky transformované obsahové (vědní či jiné odborné) znalosti, které jsou specifickou formou profesionality učitele. Přitom *didaktická transformace* vědeckých či jiných odborných poznatků spočívá v jejich výběru a zpracování na učivo, jež obsahem a formou zpracování je přiměřené věkovým i individuálním schopnostem žáků.

Poznámka. Paralelně se Shulmanovou teorií didaktických znalostí, jeho empirickými výzkumy a studii o poznatkové bázi učitelství vznikla v Evropě (zejména v Německu, Francii a skandinávských zemích) řada koncepčních studií v pedagogice i oborových didaktikách o obdobné didaktické problematice. Vesměs však byly zaměřeny více teoreticky než empiricky v duchu tradiční didaktiky v zemích Evropy a se zvýrazněným akcentem na psychologickou stránku poznávacích procesů při učení. Tak např. ve Francii se setkáváme s piagetovsky kognitivně orientovanou koncepcí tzv. *transpoziční didaktiky* v pracích francouzského didaktika matematiky *Yvese Chevallarda* z Marseillské univerzity. Jeho koncepce je založena na použití *didaktické transpozice* vědeckých poznatků a představuje jistou formu jejich *psychodidaktické transformace*.

V devadesátých letech 20. století Shulmanovy didaktické teorie (zaměřené na didaktickou transformaci obsahu vzdělávání ve školské praxi) vešly široce ve známost v mnoha zemích světa včetně Velké Británie a zemí kontinentální Evropy. Pro středoevropské i východoevropské země, v nichž didaktika matematiky i další oborové didaktiky se dlouhodobě zabývají didaktickým zpracováním učiva, nebyly Shulmanovy ideje žádnou převratnou novinkou, ale značně přispěly k širšímu pochopení významu oborových didaktik a důležitosti teoretické i empirické výzkumné činnosti v nich zaměřené na obsah učiva. Didaktickou transformaci vzdělávacích obsahů se zabývají nejen jednotliví učitelé, ale zejména též autoři učebnic a didaktické literatury. Speciálně didaktickou analýzou vzdělávacích obsahů ve výuce matematiky se souhrnně věnuje část didaktiky matematiky nazývaná *Konkrétní didaktika matematiky* (viz [1]).

Zaměření didaktiky na kognitivní procesy a konceptní pojetí výuky

Ve 20. století a zejména v jeho 2. polovině bylo dosaženo značného pokroku ve vědním oboru *kognitivní psychologie* (*psychologie poznávání*), což mělo přímý vliv na pedagogiku, jehož významným důsledkem byl vznik nových teorií učení a vyučování. Primární zásluhu na tomto vývoji měl švýcarský vývojový psycholog *Jean Piaget* (1896–1980), který za působení na Univerzitě v Ženevě soustavným empirickým zkoumáním se úspěšně pokusil objasnit, jak se v dětství vytvářejí základní struktury a předpoklady pro celoživotní poznávání. Podle Piagetovy *teorie kognitivního vývoje* má kognitivní vývoj člověka pět životních poznávacích etap se specifickými charakteristickými poznávacími procesy a způsoby myšlení (etapa senzomotorická od narození do 2 let života, etapa předpojmového myšlení od 2 do 4 roků, etapa názorného myšlení od 4 do 7 roků, etapa konkrétního logického myšlení od 7 do 12 roků, etapa formálního logického a abstraktního myšlení od 12 roků). Piagetovo pojetí kognitivního vývoje rozšířil americký univerzitní psycholog *Jerome Seymour Bruner* (1915–2016) o výzkumy významu interakcí dítě s okolím pro poznávání světa v první etapě (do dvou let), kdy dítě ještě nemluví a o studium, jak jsou kognitivní procesy v jednotlivých etapách vývoje ovlivněny třemi základními způsoby poznávání (založenými na motorických činnostech, využití názorných zrakových a duševních představ, užití jazyka). Na základě svých studií kognitivního vývoje J. Piaget a J. S. Bruner se stali v pedagogice spoluzakladateli a propagátory tzv. konstruktivistické teorie učení a vyučování:

- *Konstruktivistická teorie učení* (*Constructivist theory of learning*), založená na teorii kognitivního vývoje, pojímá učení jako aktivní poznávací proces, v němž si učící se (žák, student) sám vytváří (konstruuje) poznatky na základě svých předchozích vědomostí a nových informací či podnětů (řešení úloh apod.) zpravidla pod přímým nebo nepřímým vedením učitele.
- *Konstruktivistická teorie vyučování* (*Constructivist theory of teaching*) je takové pojetí vyučování (koncepce výuky), kde učení žáků či studentů spočívá v jejich aktivním vytváření (konstruování) nových poznatků jimi samotnými s případným doplňkovým řízením, resp. s pomocí učitele. V tomto smyslu je *konstruktivistické pojetí vyučování* zásadně odlišné od tradičního *transmisivního pojetí vyučování* spočívajícího v předávání (transmisí) hotových poznatků žákům učitelem.

Tradiční i inovativní metody vyučování (výukové metody) lze klasifikovat a analyzovat z různých didaktických hledisek, čemuž se podrobně věnuje část didaktiky matematiky zvaná *Obecná didaktika matematiky* (viz [2, s. 43–46 a s. 127–132]). Z inovativních výukových metod se současná matematická didaktická literatura nejvíce soustřeďuje na *konkrétní typy (metody) konstruktivistického pojetí vyučování matematiky*, jejichž názvy a stručné charakteristiky uvedeme v následujícím přehledu:

- *Problémové vyučování, výuka založená na řešení problémů (Problem teaching, problem-based teaching, problem-solving method in teaching)* je vyučování soustředěné na učení žáků (studentů) prostřednictvím jejich řešení problémů. Prakticky se realizuje ve výuce předkládáním, resp. vytvářením *problémových situací*, tj. didaktických situací spočívajících ve formulování problémů učitelem, popř. samotnými žáky, poskytování jim nezbytné pomoci při řešení těchto problémů, ověřování výsledků řešení a zejména též při systematizaci takto získaných poznatků i jejich upevňování.

Poznámka. Pojem *problém* v didaktice matematiky (i v ostatních oborových didaktikách) má obecně dva významy: V *širším smyslu* je termín problém synonymem termínu *úloha*. V *užším smyslu* užívaném v problémovém vyučování termínem problém se rozumí *speciálně úloha*, jež není standardní (typová) a jejíž řešení je náročné, protože při něm žáci musí hledat pro ně předem neznámý postup řešení. Určité prvky problémové výuky byly používány již ve výuce v starověkém Řecku (filozof *Sokrates* aj.) a poté prakticky v celých dějinách školství. Avšak ucelený a teoreticky podložený *systém problémového vyučování* zformuloval až na konci 19. a začátku 20. století americký filozof, psycholog a pedagog *John Dewey* (1859–1952) za svého působení na Univerzitě v Chicagu a na Kolumbijské univerzitě v New Yorku. Je považován za zakladatele tzv. *pragmatické pedagogiky*, v níž je odmítán tradiční systém vzdělávání založený na pouhém předávání hotových poznatků a jejich souborů žákům učitelem, ale podle níž má být vyučování založeno na aktivní činnosti žáků a rozvíjení jejich dovedností (mj. též formou *pracovního vyučování a projektového vyučování*).

- *Heuristické (objevitelské) vyučování (Heuristic teaching, discovery teaching)* je vyučování založené na systematickém hledání a užití vhodných heuristických postupů (strategií) pro efektivní řešení matematických (resp. jiných) úloh či problémů. Z logického hlediska jde zpravidla primárně o užití neúplné indukce (např. použití metody pokus–omyl), jež

vede k vyslovení hypotézy o řešení úlohy (problému) a poté je použita deduktivní metoda k důkazu, resp. vyvrácení této hypotézy.

Poznámka. Počátky vzniku *heuristiky* jako nauky o postupech (metodách), jak objevovat nové vědecké poznatky, spadají již do období klasické starořecké matematiky. Základy novodobé heuristiky položili až francouzský matematik a filozof *René Descartes* (1596–1650), německý matematik a filozof *Wilhelm Gotfried Leibniz* (1646–1716) a český matematik a filozof *Bernard Bolzano* (1781–1848). Za zakladatele moderního a didaktického pojetí heuristiky je považován maďarský matematik *George Pólya* (1881–1985) působící převážně v USA na Stanfordské univerzitě. Světoznámou je zejména jeho kniha „How to Solve It – A New Aspect of Mathematical Method“, jejíž 2. rozšířené vydání vyšlo v českém překladu pod názvem „Jak to řešit? – Překvapivé aspekty (nejen) matematických metod“ (Matfyzpress, Praha, 2016). S velkým zájmem se setkaly i jeho další práce o heuristických metodách (viz [2, s. 87]).

- *Realistické matematické vzdělávání – RMV* (*Realistic mathematics education – RME*) je originální metoda vyučování matematiky vytvořená v Nizozemsku, jejíž základní ideou je, že výuka matematiky se má stát přirozenou součástí *reality života žáků* (skutečného života nebo vhodně vytvořených didaktických situací). Je založena na dvou klíčových didaktických principech:

1. *princip RMV* vyjadřuje didaktický požadavek, že výuka matematiky má být přístupná myšlení žáků (příslušného věku) a mít blízko k jejich současnému i budoucímu každodennímu životu.
2. *princip RMV* vyjadřuje didaktický požadavek, aby výuka matematiky byla soustavně spojena s aktivní činností žáků jako řízeným procesem objevování, resp. znovuobjevování matematických poznatků žáků (jenž je součástí tzv. *genetického stylu vyučování*).

Poznámka. Uvedené didaktické principy RMV zformuloval nizozemský matematik a význačný didaktik matematiky německého původu *Hans Freudenthal* (1905–1990), autor četných matematických didaktických článků a knižních publikací, z nichž nejvýznamnější jsou knihy „Mathematics as an Educational Task“ („Matematika jako pedagogická úloha“) v prvním anglickém vydání z roku 1973 a „Revising Mathematics Education – China Lectures“ („Revidování matematického vzdělávání – Přednášky v Číně“) vydaná poprvé až posmrtně v roce 1991. V těchto publikacích položil základy RMV, jež podle něho představuje *matematiku jako lidskou aktivitu*. Spolu se svými spolupracovníky založil institut při nizozemské Univerzitě v Utrechtu, který

byl po jeho smrti nazván *Freudenthalův institut* a jehož základním posláním je rozvoj RMV a jeho využití ve školské praxi.

- *Teorie didaktických situací – TDS, teorie didaktických situací v matematické vzdělávání* (*Theory of didactical situations, theory of didactical situations in mathematics education*) je strukturalisticko-konstruktivistická teorie vyučování založená na vytváření a použití *didaktických situací*, jimiž se rozumí situace ve výuce (např. problémové situace či didaktické hry), které umožňují učiteli za aktivního zapojení žáků přivést je zajímavou formou k určitým (speciálně matematickým) znalostem.

Poznámka. TDS postupně vytvořil a publikoval od konce 60. let 20. století francouzský didaktik matematiky *Guy Brousseau* (nar. 1933), působící na Univerzitě v Bordeaux. Se svými spolupracovníky ji poměrně obsáhle rozpracoval a na tyto práce navázala též řada zahraničních didaktiků, zejména ze Španělska, Itálie a Kanady. V ČR se věnovala pedagogickému výzkumu TDS a jejímu užítí ve školské praxi především didaktička matematiky *Jarmila Novotná*, jež je též spolupřekladatelkou z francouzštiny do češtiny knihy G. Broussaua: „Úvod do teorie didaktických situací v matematice“ (PedF UK, Praha, 2012).

- *Badatelsky orientované vyučování – BOV, badatelsky orientované vzdělávání v matematice – BOVM* (*Inquiry-based teaching, inquiry-based mathematics education*) je vyučování spočívající v bádání (badatelské činnosti) žáků, jež používá podobné postupy a metody práce jako vědecké bádání. V tomto smyslu BOV je vyučování inspirované vědeckým bádáním. Přitom *vědeckým bádáním* se rozumí vědecko-výzkumná práce a další formy činností ve vědě. *Bádáním (badatelskou činností)* žáků se rozumí v jistém smyslu obdobné činnosti: pozorování, kladení si otázek, vyhledávání informací v knihách a dalších zdrojích, plánování a navrhování postupů řešení problémů, sbírání dat, jejich analyzování a interpretace, formulování předpovědí i získaných výsledků a jejich vysvětlení, vyvozování a sdělování závěrů. Tyto činnosti žáků ve výuce, přizpůsobené jejich věku a možnostem, nemají ovšem za cíl získání nových vědeckých poznatků, ale znovuobjevováním získat potřebné znalosti a dovednosti (včetně schopnosti řešit jednoduché problémové situace z běžného života).

Poznámka. Koncepce BOV má původ v USA v 90. letech 20. století v přírodovědném vzdělávání. V severoamerickém prostředí přetrvává do současnosti omezení BOV na přírodovědecké předměty. V Evropě se však začátkem 21. století BOV rozšířilo i do výuky matematiky. V ČR se BOVM věnuje mj.

zejména didaktička matematiky *Libuše Samková*, podle níž za pedagogický základ BOV je považováno bádání v pojetí *Johna Deweye* (1938), za psychologický základ pak učení se objevováním *J. S. Brunera* (1965). V článku L. Samkové: „Uplatnění otevřeného přístupu k matematice...“ (Studia pedagogica, roč 23/2018, č. 3, s. 49–67) se v souladu s Deweyovým vymezením bádání zdůrazňuje, že v BOVM by měly být řešeny matematické úlohy, jež obsahují něco neurčitěho, co je řešitelem vnímáno jako podnětné nebo zajímavé. Jednu z možností, jak takové úlohy vybírat či vytvářet a zkoumat, představuje tzv. *otevřený přístup k matematice* (*open approach to mathematics*), v jehož rámci se přistupuje k výuce matematiky prostřednictvím *otevřených matematických úloh* (*open mathematics tasks*), které splňují alespoň jednu z těchto charakteristik:

- mají otevřenou vstupní situaci, tj. proměnné vstupní údaje,
- mají otevřený postup řešení, tj. existuje více způsobů řešení,
- mají otevřenou výslednou situaci, tj. existuje více výsledků řešení,
- mají otevřenou možnost úlohu modifikovat, tj. nabízí se více způsobů, jak ji upravit či rozšířit ve vhodnou novou úlohu.

Zaměření didaktiky na organizační formy vyučování

V obecné didaktice matematiky se rozlišují a analyzují na základě několika kritériálních hledisek různé druhy *organizačních forem vyučování* (*organizational forms of teaching*) (viz [2, s. 53–55]). V 21. století jsou a stále více budou ovlivňovány mnohostranným používáním digitálních technologií, avšak základním kritériálním hlediskem zůstává jejich *rozdělení podle způsobů řízení učební činnosti žáků*:

- *frontální (hromadné) vyučování* (*frontal teaching. whole-class teaching*), v němž jediný učitel pracuje současně se všemi žáky ve třídě, se stejnými obsahy i metodami výuky, v časově vymezených vyučovacích hodinách,
- *skupinové vyučování* (*group teaching*), při němž je výukový proces organizován jako společná práce žáků v menších skupinách (tří až šesti žáků), které samostatně zpracovávají zadané úkoly,
- *kooperativní vyučování* (*cooperative teaching*), jež je vyšší formou skupinového vyučování, v němž každý žák ve skupině pracuje samostatně a pouze se radí s ostatními žáky skupiny,
- *individualizované vyučování* (*individualized teaching*), kdy každý z žáků pracuje na zadaných úkolech zcela samostatně vlastním tempem a popř. jen s dílčí pomocí učitele.

Poznámka. Při frontálním vyučování je používán třídně hodinový systém výuky, který zavedl již Jan Amos Komenský. V našich školách je stále nejčastěji užívanou formou organizace výuky, avšak už v průběhu 20. století jsme se mohli setkat u nás i se skupinovým, popř. kooperativním vyučováním. Jejich zásadní myšlenky formuloval též Jan Amos Komenský. Teprve však američtí psychologové a reformní pedagogové J. Dewey a J. S. Bruner vyzvedli skupinové a kooperativní učení jako základní modely pro sociální učení v demokratické společnosti. V současnosti se v projektech integrace vyučovacích předmětů setkáváme s pojmem *týmové vyučování* (*team teaching*), ve kterém s třídou žáků pracují společně dva nebo více učitelů za účelem integrace poznatků z několika předmětů.

Orientace didaktiky na efektivní využití didaktických technologií ve výuce

Digitální technologie (*Digital Technologies*) v kontextu vzdělávání jsou synonymem k pojmu *Informační a komunikační technologie*, zkr. *IKT* (*Information and Communication Technologies*, zkr. *ICT*, jež je užívána často i v českém textu); viz publikace „Strategie digitálního vzdělávání do roku 2020“ (MŠMT, Praha, 2014). Představují široký soubor elektronických prostředků (přístrojů, zařízení), nástrojů, systémů a postupů, jež slouží k digitálnímu zpracování vstupních dat a přenosu informací.

Poznámka. Pojem digitální technologie zpravidla dosud mimo oblast vzdělávání je používán v užším významu pro *hardware*, tj. technické vybavení, zatímco do pojmu *ICT* je zahrnut i *software*, tj. programové vybavení.

Využití ICT ve školské matematice je přehledně zpracováno v publikaci [2, s. 135–144] a podrobněji např. v publikacích [10], [11]. Pro výuku matematiky na ZŠ a SŠ může být též velmi užitečná metodická publikace Šárky Gergelitsové: „Počítač ve výuce nejen geometrie – Průvodce Geogebrou“. Zdůrazníme, že digitální technologie se mohou významně uplatnit ve výuce matematiky v 21. století jako efektivní výpočetní prostředky, kognitivní prostředky (programy dynamické geometrie, aj.), zdroje informací a inspirací, zpětnovazební výukové prostředky, komunikační prostředky mezi učitelem a žáky, audiovizuální výukové prostředky.

V celosvětovém společenském vývoji v 21. století se v následujících letech podle reálných prognóz velmi výrazně prosadí dva převratné vývojové fenomény: umělá inteligence a robotizace. Uplatní se především v průmyslové výrobě (automatizaci výrobních prostředků), ale též v četných dalších oblastech lidské činnosti včetně oblasti vzdělávání. *Umělá inteligence*, zkr. *UI* (*Artificial Intelligence*, zkr. *AI*, jež je používána často i v českých tex-

tech) je oblast vědy, která studuje lidskou inteligenci a vytváří programy nebo umělé entity schopné plnit zadané úkoly podobně jako lidé. Taktéž se jí rozumí schopnost stroje napodobit inteligentní lidskou činnost, především usuzování a učení se z chyb. Tyto stroje (počítače) se nazývají *učící se stroje* (*Learning Machines*). Mohou být zpětně užity k programovanému učení žáků, jež se pak nazývá *strojové učení* (*Machine Learning*) a stroji (počítači) s umělou inteligencí, který je určen k učení, se říká *učící stroj* (*Learning Machine*). Strojové učení může být vhodné pro individuální či individualizovanou výuku matematiky (i jiných předmětů) a v některých zemích, např. v Číně se v současnosti využívá již ve velkém rozsahu. Je ovšem třeba dodat, že v řadě západních zemí se tento systém výuky setkává s kritikou, neboť má sice výsledky, ale jeho jednostranné užívání vede výuku ve směru standardizovaného mechanického vzdělávání.

Poznámka. Velmi perspektivní užití umělé inteligence v 21. století představují roboti různých typů. *Roboti* (*Robots*) jsou stroje s umělou inteligencí, jež pracují s jistou mírou samostatnosti a vykonávají předepsaným způsobem dané úkoly. Mohou pomocí senzorů vnímat své okolí, reagovat na něj a zasahovat do něho, přičemž dovedou i vyhodnocovat tento svůj vliv a využívat zpětnou vazbu. Zajímavé pro nás jistě je, že název *robot* pro stroj s umělou inteligencí byl poprvé použit v divadelní hře R.U.R. významného českého spisovatele *Karla Čapky* (1890–1938) a poté se rozšířil celosvětově zejména díky proniknutí do angličtiny. Odtud jsou dále odvozeny názvy: *robotika* (*Robotics*) pro vědu o robotech, jejich designu, výrobě i aplikacích a *robotizace* (*Robotization*) pro procesy zavádění průmyslových i neprůmyslových robotů, včetně studia technologických a sociálních důsledků. Ve vzdělávání na některých ZŠ a SŠ je zařazen samostatný předmět (popř. seminář) *Robotika*. Ve výuce matematiky lze též vhodně využít dostupných edukačně robotických sad.

Matematické vzdělávání v 21. století a kurikulární reformy

V 2. polovině 20. století se uskutečnila v mnoha vyspělých státech světa včetně Československa reforma výuky matematiky nazývaná *modernizace školské matematiky* spočívající v jejím *strukturálně-množinovém pojetí*. Smyslem této reformy výuky matematiky mělo být její přiblížení soudobé matematice jako vědě, avšak z mnoha důvodů se ve školské praxi tato „nová koncepce výuky matematiky“ celosvětově neosvědčila, a proto byla postupně i u nás opuštěna.

Od konce 20. století do současnosti vznikla celosvětově řada teoretických rámců i praktických projektů šířeji pojatých *reformou vzdělávání pro*

21. století, jejichž smyslem a cílem má být přizpůsobení vzdělávání lidí všestranným (ekonomickým i dalším) potřebám globalizované společnosti. Toto reformní vzdělávací úsilí je koordinováno institucionálně na mezinárodní úrovni mj. v rámci agendy *Organizace pro hospodářskou spolupráci a rozvoj* (zkr. *OECD* z angl. *Organization for Economic Co-operation and Development*). OECD má v současnosti 37 členů, jimiž jsou ekonomicky rozvinuté státy světa, které přijaly principy demokracie a tržní ekonomiky.

Vzdělávání v Evropě patří k prioritním oblastem mezinárodní spolupráce a spolufinancování členských států *Evropské unie (EU)*. V závěrech Rady EU z jejího zasedání v Lisabonu 23.–24. 3. 2000 bylo potvrzeno a zdůrazněno, že investice do vzdělávání a odborné přípravy osob zaujímají v rámci evropské znalostní politiky nezastupitelné místo. Konkretizaci této vzdělávací politiky EU obsahují „Doporučení Evropského parlamentu a Rady EU ze dne 18. 12. 2006 o klíčových schopnostech pro celoživotní učení“ (Úřední věstník EU 2006/962/ES), „Závěry Rady EU a zástupců vlád členských států zasedajících v Radě ze dne 21. 11. 2008 – Příprava mladých lidí na 21. století: agenda pro evropskou spolupráci v oblasti školství“ (Úřední věstník EU 2008/C 319/08) a aktualizované „Doporučení Rady EU ze dne 22. 5. 2018 o klíčových kompetencích pro celoživotní učení – Text s významem pro EHP“ (Úřední věstník EU 2018/C 189/01). „Evropský referenční rámec“ v jeho příloze obsahuje formulace hlavních cílů celoživotního učení a definice pojmů kompetence a klíčové kompetence:

Kompetence jsou definovány jako kombinace znalostí, dovedností a postojů. *Klíčové kompetence* zahrnují 8 kompetencí:

- kompetence v oblasti gramotnosti,
- kompetence v oblasti mnohojazyčnosti,
- matematická kompetence a kompetence v oblasti přírodních věd, technologií a inženýrství,
- digitální kompetence,
- personální a sociální kompetence a kompetence k učení,
- občanská kompetence,
- podnikatelská kompetence,
- kompetence v oblasti kulturního povědomí a vyjadřování.

Matematická kompetence je schopnost rozvíjet a používat matematické myšlení a náhled k řešení různých problémů v každodenních situacích. Výchoziskem je spolehlivé zvládnutí základních početních úkonů a důraz je kladen na proces a činnost, jakož i na znalosti. Matematická kompetence

zahrnuje, a to v různé míře, schopnost a ochotu používat matematické způsoby myšlení a vyjadřování (vzorce, modely, obrazce, grafy a diagramy). Dále jsou formulovány *nejdůležitější znalosti, dovednosti a postoje související s touto kompetencí*.

Z iniciativy Evropské komise byla zpracována a vydána publikace „Matematické vzdělávání v Evropě: Společná úskalí a politiky jednotlivých zemí“ (Eurydice, Paříž, 2011, čes. překlad: Praha, 2012). V této publikaci i v uvedených dokumentech orgánů EU se užívají pojmy *kompetence* a *matematická kompetence* (jako jedna z klíčových kompetencí), avšak pojem *gramotnost* je v nich používán jen v tradičním všeobecném smyslu, nesetkáme se zde však s pojmem matematická gramotnost. Ten byl spolu s dalšími oborovými gramotnostmi zaveden a používán v mezinárodních šetřeních PISA (viz [2, s. 65 a s. 150]). Podle definice v projektu PISA 2003: *Matematická gramotnost (Mathematical literacy)* je schopnost jedince poznat a pochopit roli, kterou hraje matematika ve světě, dělat dobře podložené úsudky a proniknout do matematiky tak, aby splňovala jeho životní potřeby jako tvořivého, zainteresovaného a přemýšlivého občana.

V ČR byly do školského systému implementovány některé prvky vzdělanostní politiky EU v první dekádě 21. století, kdy se realizovala zásadní *kurikulární reforma* (viz [2, s. 145–152]). Pevné a závazné celostátní osnovy školních předmětů ZŠ a SŠ s rozpisem povinného učiva do jednotlivých ročníků byly nahrazeny pouze doporučujícími centrálně vytvořenými a schválenými *Rámcovými vzdělávacími programy (RVP)* pro oblasti *základního vzdělávání (ZV)*, *gymnázií (G)* a *středního odborného vzdělávání (SOV)*, na jejichž základě si jednotlivé školy vypracovaly autonomně vlastní *Školní vzdělávací programy*. Základní nosnou ideou RVP se stal požadavek, aby namísto pouhého probírání předepsaného učiva byly vytvářeny a pěstovány *klíčové kompetence žáků*. Symptomatické ovšem je, že na rozdíl od 8 klíčových kompetencí v doporučeních Rady EU se v našich RVP uvádí pouze 6 klíčových kompetencí, přičemž zde neuvedená matematická kompetence je v obdobném smyslu nahrazena užitím pojmu matematická gramotnost. Po letech realizace kurikulární reformy je však zřejmé, že se úplně nenaplnily její vize a očekávané kurikulární výsledky. Na tom se vcelku shodují jak tvůrci reformy, tak i její kritici, liší se jen v názorech na příčiny (důvody), proč tomu tak je a tím také v názoru na provedení revize systému RVP/ŠVP. Přitom např. již v roce 2013 o všech těchto problémech otevřeně a konstruktivně psal v časopise Pedagogická orientace *Stanislav Štech* v článku [12].

Při posuzování vývoje a současného stavu kurikulární reformy v ČR je zřejmě užitečné její porovnání s obdobnými školskými reformami v jiných státech. Přes všechna specifika (kulturní, sociální aj.) mohou být zvláště poučné reformy školství a výuky matematiky ve *Spojených státech amerických*, neboť mnohé jejich myšlenky a podněty pronikly do Evropy i dalších zemí, kde ovlivnily tamní kurikulární reformy. Jako významný příklad připomeňme situaci po roce 1957. V říjnu tohoto roku byla v Sovětském svazu vypuštěna do vesmíru první umělá družice Země *Sputnik 1* a tím započala kosmická éra lidstva.

Úspěch sovětských vědců a inženýrů vzbudil v USA velký šok a vyvolal mnohé úvahy o jeho příčinách. Jejich všestranné analýzy vedly ke dvěma zásadním krokům. Prvním krokem bylo rozhodnutí prezidenta USA *Dwighta D. Eisenhowera* v roce 1958 o založení americké národní agentury pro kosmický výzkum *NASA*. Druhým důležitým krokem bylo zahájení diskusí o nutnosti zvýšení úrovně vzdělávání a zejména výuky matematiky v USA, protože se jednoznačně konstatovalo, že právě kvality sovětských vědců a inženýrů v oblasti matematiky a jejích aplikací byly jednou z hlavních příčin jejich úspěchu. Tyto diskuse vyústily v 60.–70. letech 20. století v USA (a také ve Francii, Itálii aj.) ve vytvoření nové koncepce výuky matematiky, jež spočívala v jejím strukturálně-množinovém pojetí. V USA se pro ni ujal název *Nová matematika* (*New Mathematics*, zkr. *New Math*). Ve školské praxi se však začalo poměrně brzy ukazovat, že toto pojetí výuky matematiky je pro většinu žáků příliš abstraktní, a proto se postupně začalo opouštět. Pro nás je jistě pozoruhodné, že v Československu byla *nová koncepce výuky matematiky* zaváděna do škol v době, kdy ve školách USA i ostatních zemí původu se od ní již ustupovalo.

Z hlediska dalšího vývoje výuky matematiky byla pak v USA její reforma z roku 1989, jejímž iniciátorem byla *Národní rada učitelů matematiky* (*National Council of Teachers of Mathematics*, zkr. *NCTM*), která představuje mohutnou profesní organizaci amerických učitelů matematiky z USA a Kanady. V roce 1989 NCTM připravila základní reformní dokument o standardech kurikula matematiky a hodnocení studentů: *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Tyto standardy přijalo mnoho škol v USA, zároveň byly zpracovány nové učebnice i pomůcky pro výuku a byl zahájen výzkum účinnosti reformy. Výsledky výzkumu však nebyly jednoznačné a byly vystaveny z mnoha stran silné kritice. Deset let ověřování a diskusí o standardech z roku 1989 vedlo k jejich revizi a vzniku nového zásadního dokumentu NCTM v roce 2000:

Principles and Standards of School Mathematics. Knižní publikace má 402 stran a s jejím obsahem (rozděleným do 8 kapitol) se lze stručně seznámit v článku Jana Hendla: „Reforma výuky matematiky podle NTCM“ (Učitel matematiky, roč. 11/2002, č. 1 (45), s. 23–33). Standardy z let 1989 a 2000 prosazovaly ve výuce matematiky zejména různé formy konstruktivistického přístupu a situativní epistemologii. To vyvolalo silnou kritiku zastánců tradiční výuky matematiky a jejich koncepční spory se zastánci kurikulární reformy se staly tak vyhrocené, že byly nazývány *matematické války* (*Math wars*). V roce 2002 se navíc vláda USA rozhodla reformovat celé federální školství. Prezident George W. Bush podepsal klíčový zákon *No Child Left Behind* (*Žádné dítě nesmí zůstat pozadu*), jehož cílem bylo podstatně snížení negramotnosti a zavedlo se plošné testování žáků všech státních škol.

V roce 2006 vydala NCTM poněkud kompromisní stanovisko ke kurikulární reformě z roku 2000 v dokumentu nazvaném „Curriculum Focal Points“. Téhož roku prezident George W. Bush jmenoval *Národní matematický poradní tým* (*National Mathematics Advisory Panel*), jehož úkolem bylo objektivně posoudit všechny provedené reformy výuky matematiky. Ve své závěrečné zprávě v roce 2008 tento poradní orgán konstatoval, že na základě provedených výzkumů se ukazuje stejná důležitost jak matematických znalostí a výpočetních i vyjadřovacích schopností žáků, tak jejich dovednost řešit matematické problémy. Diskuse o samostatném významu každé z těchto složek výuky matematiky považuje za zavádějící, a proto vyzývá k ukončení „matematických válek“. Přes tento relativně smířlivý tón se však její závěry nesetkaly s jednoznačně pozitivní odezvou. Zejména se zvedl velmi široký odpor vůči plošnému standardizovanému testování žáků zavedenému v roce 2002, jehož důsledky se ukázaly pro výuku matematiky jako velmi negativní. Aktuálně o tom nyní soustavně píše a přednáší americká vysokoškolská historička vzdělávání a poradkyně vlády prezidenta George W. Bushe ve školských otázkách Diane S. Ravitch. V knize „The Death and Life of the Great American School System: How Testing and Choice Are Undermining Education“ („Smrt a život skvělého amerického systému: Jak testování a školní výběr ničí vzdělávání“), jež vyšla v roce 2010 a v upraveném vydání v roce 2016, D. Ravitch ukazuje, jak standardizované plošné testování poničilo americké školní vzdělávání a omlouvá se, že udělala fatální chybu, když původně prosazovala jeho zavedení. Přesto však mnoho amerických škol v tomto testování pokračuje, mj. protože se již v letech od roku 1985 zapojily do projektu Univerzity v Chicagu

pro předškolní a primární matematické vzdělávání pod názvem *Everyday Mathematics* (*Každodenní matematika*). V hodinách matematiky podle tohoto projektu se děti učí tak, že je jim předkládána nějaká situace z každodenního života, po jejíž matematizaci mají řešit získaný matematický problém. Ze všech možných způsobů si mohou vybrat ten, který je nejvíce baví. Ovšem tento způsob výuky matematiky zpravidla vede k tomu, že se děti neučí nácvik počítání, ale učí se to, co je testováno ve státních srovnávacích testech.

Značnou pozornost nejen v USA, ale i v zahraničí vyvolala také esej amerického matematika *Paula Lockharta*: „A Mathematician’s Lament“ („Matematikův nářek“) z roku 2002, jejíž rozšířená verze vyšla knižně (Bellevue Literary Press, New York, 2009) a též ve slovenském překladu pod názvem „Matematikov žalospev“ (Nakl. Raabe, Bratislava, 2016). Autor v ní ostře kritizuje kurikulum matematiky na 2. stupni základních škol v USA. V jeho pojetí *matematika je umění* (obdobně jako hudba či malířství) a tomu by se měla přizpůsobit její výuka jako objevitelská činnost při řešení vhodných matematických úloh, jejichž příklady uvádí. P. Lockhart byl vysokoškolským matematikem, ale od roku 2000 se věnuje realizaci své koncepce výuky matematiky na 2. stupni základní školy v New Yorku. V duchu této koncepce napsal též dvě knihy „Measurement“ („Měření“) (Belknap Press, Cambridge, 2012) a „Arithmetics“ („Aritmetika“) (Belknap Press, Cambridge, 2017). Obsahují některé zajímavé úlohy, ale jsou to popularizační matematické publikace, nikoliv učebnice pro ZŠ. Předmluvu ke knižnímu vydání kritické eseye P. Lockharta napsal s jejím doporučením známý americký vysokoškolský matematik a autor řady popularizačních i dalších matematických publikací *Keith Devlin*. Jeho poněkud překvapivý jednoznačný souhlas s Lockhartovou kritikou tradiční výuky matematiky asi částečně souvisí s tím, že se v posledních letech intenzivně věnuje vytváření a užití videoher pro vyučování a vydal knihu „Mathematics Education for a New Era: Video Games as a Medium for Learning“ (A. K. Peters Ltd, Natick – Massachusetts, 2011).

I v řadě evropských zemí, např. ve *Velké Británii* se setkávají s jistým neúspěchem a kritikou provedené kurikulární výuky matematiky. Proto se navrhuje převzít osnovy a učebnice úspěšné *singapurské školské matematiky*. Avšak, jak upozornil již v roce 2011 *František Kuřina* v článku [15], její přebírání v jiných zemích není jednoduché, protože mj. vzdělávací systém v Singapuru je centrálně řízen, má jednotné osnovy, učebnice a hodnocení.

Na přelomu 20. a 21. století v USA vznikla nová specifická forma vzdělávání nazvaná *STEM Education* (*STEM vzdělávání*), jehož základní ideou je kooperace, propojování a uvádění do souladu čtyř aplikačně velmi významných vědních oblastí: Science (přírodní vědy), Technology (technologie), Engineering (inženýrství, technika), Mathematics (matematika). Vznik konceptu STEM vzdělávání byl vyvolán rostoucími potřebami interdisciplinárního a aplikovaného přístupu ve vzdělávání v těchto vědních oborech, ale též skutečností, že se velmi prohlubuje nedostatek zájemců o jejich studium. Na školách všech stupňů (základních, středních, vysokých) STEM vzdělávání může být realizováno buď v jednotlivých předmětech přírodovědných, technických a v matematice, anebo ve vhodně integrovaném předmětu. Od začátku 21. století se STEM vzdělávání rozšířilo na školách nejen v USA, ale také v Evropě i v dalších zemích světa. V USA vznikly (i za vládní podpory) školy speciálně zaměřené na STEM vzdělávání.

Cíle výuky matematiky v 21. století

Z průběhu a výsledků všech kurikulárních reforem výuky matematiky je zřejmé, že pro její reálné zlepšení a přizpůsobení požadavkům v 21. století se ukazuje jako provořadě nutné soustavně a přesvědčivě seznamovat nejen žáky, ale i veřejnost o aktuálním praktickém významu matematiky jako vědy a též o hlavních cílech kvalitní výuky matematiky. V tomto směru lze doporučit např. velmi fundovanou a podnětnou esej vědeckého pracovníka v matematice *Martina Markla*: „Obrana matematiky“ (Vesmír, roč. 98/2019, č. 9, s. 530–531).

Ve smyslu závazných Doporučení Rady EU a našich platných RVP považuji za *hlavní cíle výuky matematiky v 21. století* zejména:

1. Rozvoj matematického a logického myšlení žáků (viz článek [16]).
2. Získání základních (kurikulárně stanovených) matematických poznatků a znalostí s náležitým porozuměním, včetně schopnosti matematického vyjadřování (užití jazyka matematiky).
3. Vytvoření matematických dovedností žáků a jejich schopnosti kreativního použití (aplikací).
4. Výchovné působení na žáky prostřednictvím vyučování matematice.

Přitom za primárně významné pokládám vzdělávací cíle výuky matematiky (tj. vytváření žákovy matematické kompetence), zatímco její výchovné

cíle (tj. vytváření dalších klíčových kompetencí) jsou společné s ostatními výukovými předměty.

Realita výuky matematiky v ČR v současnosti

Po více než deseti letech realizace naší *kurikulární reformy* (zavedení *systému RVP/ŠVP*) je velmi aktuální objektivní zhodnocení všech jejích aspektů a součástí, a tedy i výuky matematiky. Přitom je zřejmě nutné vycházet z posouzení jejího současného stavu a možností zlepšení, včetně přizpůsobení požadavkům 21. století.

V diskusích o povinné maturitě z matematiky jsme se setkávali zejména z řad některých politiků, novinářů a studentů s názorem, že by neměla být povinná, protože

matematika se učí špatně.

Toto obecné tvrzení ovšem není pravdivé. Pokud by bylo zcela pravdivé, znamenalo by to úplné selhání kurikulární reformy v této oblasti a neúspěšnou činnost nejen učitelů, ale i nadřízených školských orgánů. Proč s tímto názorem jsme se nesetkávali před lety v případě jedenáctiletých středních škol, kde povinná maturita z matematiky byla samozřejmostí? (Ačkoliv byla náročná a pro část studentů obtížná, až na naprosté výjimky ji úspěšně absolvovali.)

Negací uvedeného obecného výroku ovšem není, že

matematika se učí dobře.

Také toto obecné tvrzení nemusí být zřejmě pravdivé. Mj. o tom svědčí klesající úroveň matematických znalostí a dovedností mnoha žáků a studentů základních, středních i vysokých škol. [Např. citujme z úvodu článku *Jana Janíka a kol.*: „Meze matematického myšlení...“ (Čs. čas. fyz., roč. 62/2012, č. 5-6, s. 428–431): „Matematické znalosti, úroveň matematického myšlení a dokonce i logického uvažování žáků a studentů středních i vysokých škol rok od roku klesají. Tato zkušenost je bohužel obecná a týká se celé současné populace (snad až na výjimky vcelku stabilních špiček, úspěšně prokazujících svou úroveň v přírodovědeckých soutěžích různých typů).“] Učitelé základních a středních škol vidí důvody hlavně v nastavení systému RVP/ŠVP, ve kterém se většinou snížil počet vyučovacích hodin matematiky, takže látku nelze dostatečně procvičovat, zopakovat a motivovat žáky k jejímu zvládnutí. Nejen učitelé, ale i ředitelé škol, s nimiž jsem v uplynulém desetiletí hovořil, zastávali vesměs názor, že pevně

stanovené *učební osnovy* (s jistotou, např. 30% školám povolenou volností) byly podstatně vhodnější a účinnější než kurikulární reformou nastavený systém RVP/ŠVP. Stejně se vyslovila *petice k revizi RVP*, kterou iniciovala gymnaziální učitelka matematiky *Yvetta Jirovská* v roce 2018 a podepsalo ji spontánně 608 učitelů matematiky škol všech stupňů.

Zavedením autonomních ŠVP jednotlivých základních a středních škol došlo k výrazné *diverzitě výuky matematiky*. Nejen se velmi rozrůznil rozsah a obsah výuky na školách téhož typu, ale nejednotnou a často značně problematickou je i její metodická stránka. Uvedu několik takových případů, s nimiž jsem se setkal ve výuce středoškolské matematiky, ale doufám, že nejsou pro ni úplně typické. Jedním z nich je řešení matematických úloh redukované na pouhý dosazování do vzorců, jež byly žákům sděleny transmisivně-instruktivním způsobem (bez jakékoliv motivace, resp. odvození). Takto např. v analytické geometrii byli studenti seznámeni s geometrickými (syntetickými) definicemi kuželoseček a pak nezávisle na nich (bez odvození) dostali přehled jejich analytických vyjádření (rovníc), do nichž při řešení úloh dosazovali. Většina úloh, jež se řeší ve středoškolské matematice, jsou zpravidla úlohy určovací, jen výjimečně jsou řešeny úlohy důkazové a velmi málo slovní (aplikační) úlohy. Nelze se proto příliš divit tomu, když řešení těchto typů úloh a matematizace reálných situací bývají obvykle pro mnoho studentů spojeny se značnými obtížemi. Na SOŠ jsem se taktéž setkal se situací, že v ŠVP není účelně provedena koordinace mezipředmětových vztahů. Např. v 1. ročníku jsou v předmětu *Mechanika* potřebné geometrické vektory a goniometrické funkce (nyní nezařazené do učiva ZŠ), ale v předmětu *Matematika* se v této době vyučuje zcela jiná látka (řešení rovnic a nerovnic s absolutními hodnotami aj.).

S rozdílností ŠVP škol téhož typu také souvisí, že bývají odlišné i jejich *školní zkušební řády* (uvedené v příloze ŠVP). Avšak společně jim je v naprosté většině omezení ústního zkoušení na minimum (zpravidla jednou za pololetí, popř. za čtvrtletí). V matematice je nahrazeno psaním většího počtu písemných prací různého rozsahu (kratší jsou zpravidla nazývané testy) i obtížnosti. Důsledkem je skutečnost, že žáci se obvykle nepřipravují soustavně, ale až před písemkou a výuka se pro ně stává „výukovým během od písemky k písemce“. Tyto písemky obvykle nejsou součástí formativního hodnocení žáků, neboť z časových důvodů není s nimi prováděn individuální rozbor chyb a ve výuce je pokračováno bez jejich odstranění. Zároveň tento systém zkoušení má za následek pokles matematických vyjadřovacích schopností žáků (nejen ústních, ale i písemných).

Každý učitel matematiky si postupně vytváří určitý svůj *styl vyučování*, ve kterém zpravidla převažují buď tradiční, anebo inovativní (aktivizační) výukové metody. Přitom používá jistou zvolenou sadu učebnic matematiky pro příslušný stupeň a druh školy. Na ZŠ mají obvykle i žáci k dispozici tyto učebnice. Na SŠ je však mnohdy nemusí povinně mít a učí se pak téměř výhradně ze svých sešitů, tj. z písemných poznámek ve vyučování, jež bývají často neúplné či nepřesné. Avšak vzhledem k požadavkům dalšího studia a celoživotního učení by mělo být samozřejmostí vedení středoškolských studentů k používání učebnic a dalších učebních zdrojů (tištěných i elektronických).

Perspektivy vývoje výuky matematiky v 21. století

Z empirických didaktických výzkumů i školní praxe u nás i ve světě se ukazuje, že perspektivní model výuky matematiky pro 21. století spočívá v kombinaci *výkladu učitele* (tedy tradiční formy výuky) a *inovativních (aktivizačních) forem výuky* založených na jejím *konstruktivistickém pojetí*, přičemž v obou těchto pojetích výuky je samozřejmostí všestranné využívání *digitálních technologií*. Výklady učitele a jeho komunikace se žáky i jejich konstruktivistická činnost má být zaměřena na odpovědi nejen na otázky *JAK?*, ale též *PROČ?* Přitom *objevování (znovuobjevování)* či *bádání* žáků by mělo být vždy odpovídající smyslu těchto pojmů, a ne pouze formální či předstírané. Tomu mj. musí odpovídat zadání problémových úloh. Cílem je rozvoj *matematického a logického myšlení i kreativního (tvorivého) myšlení*. Jsou též výbornou příležitostí rozvoje *kritického myšlení* charakterizovaného úspěšnou snahou dobrat se pravdy. Z vlastní zkušenosti žáka také vím, jak velmi přínosná může být promyšleně organizovaná *skupinová výuka* a cílevědomá *projektová výuka*. Pro efektivní využití digitálních technologií v celém procesu výuky je nutné nejen jejich finanční zajištění, ale též používání *profesionálních programů a metodických materiálů*, jež mohou velmi usnadnit a zefektivnit práci učitele. *Hodnocení žáků* by mělo být nejen *sumativní*, ale i *formativní*. Přitom užití *standardizovaných testů* se ukazuje obvykle jako „dobrý sluha, ale špatný pán“.

Závěrem zdůrazníme, že v 21. století pro úspěšnou a přínosnou výuku matematiky je nutné, aby byla pro žáky *zajímavá a užitečná*. Toho lze docílit především vhodnou volbou řešených úloh, speciálně též *aplikačních úloh*. V této souvislosti je ovšem potřebné si uvědomit didaktickou zásadu, kterou připomínal náš významný didaktik matematiky *Jan Vyšín* v článku „Co dělat, aby vyučování matematice bylo užitečné“ (PMFA, roč. 26/1981,

č. 5, s. 285–288): „Ve všeobecně vzdělávací škole nemáme učit aplikacím matematiky, ale matematice, která se dá aplikovat.“ To však neznamená, že není třeba na vhodných aplikačních příkladech (se skutečným porozuměním) ukazovat, jak je matematika velmi důležitá v praktických aplikacích. V současnosti je velice aktuální význam matematického modelování pro výzkum vývoje koronavirové pandemie (epidemie COVID-19) a ve středoškolské matematice je vhodné objasnit nyní mediálně často užívané pojmy *exponenciální průběh (růst)*, *reprodukční číslo R* a *logistická křivka*.

V posledních letech se v mediálních diskusích o našem školství objevoval i požadavek některých novinářů a studentů, aby *výuka matematiky byla zábavná*. Tento silně nadsazený požadavek lze částečně splnit v matematice na 1. stupni ZŠ zařazením v jistém smyslu „zábavných úloh“ a her, avšak již na 2. stupni ZŠ a zejména na SŠ je neopodstatněný a nereálný (snad s výjimkou možného nějakého zařazení vhodné výukové videohry). Na těchto stupních škol je výuka matematiky pro žáky postupně náročnější a těžší, neboť je přirozeně abstraktnější a namísto induktivního usuzování (neúplné indukce) se přechází také k deduktivnímu usuzování. V konkurenci mnoha v současnosti atraktivnějších a zábavnějších činností mládeže (hraní počítačových her, sledování mnoha televizních pořadů, sportování aj.) je tak velmi záslužná a často nedoceňovaná práce učitelů, kteří dovedou probudit zájem žáků a studentů o matematiku, motivovat je k jejímu studiu a též ke studiu jejích aplikací. V 21. století je zvláště důležitou kompetencí učitele umění ukazovat, že *matematika je krásná sama o sobě i ve svém mnohostranném praktickém využití*.

Literatura

- [1] Polák, J.: Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. I. část. Konkrétní didaktika matematiky. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2014.
- [2] Polák, J.: Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. II. část. Obecná didaktika matematiky. Fraus, Plzeň, 2016.
- [3] Polák, J.: Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. III. část. Historie matematiky pro učitele. Fraus, Plzeň, 2016.
- [4] Janík, T.: Didaktické znalosti obsahu a jejich význam pro oborové didaktiky, tvorbu kurikula a učitelské vzdělávání. Paido, Brno, 2009.
- [5] Hejný, M., Kuřina, F.: Konstruktivní přístupy k vyučování matematice. MFI, roč. 7 (1997/8), č. 7, s. 385–395.

- [6] *Stehlíková, N., Cachová, J.*: Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe. JČMF, Praha, 2006.
- [7] *Rendl, M.*: O konstruktivismu ve vyučování matematiky. Pedagogika, roč. 58 (2008), č. 2, s. 167–203.
- [8] *Dostál, J.*: Badatelsky orientovaná výuka – Pojetí, podstata, význam a přínosy. PdF UP, Olomouc, 2015.
- [9] *Samková a kol.*: Badatelsky orientované vyučování matematice. Scientia in educatione, roč. 6 (2015), č. 1, s. 91–122.
- [10] *Robová, J.*: Integrace informačních a komunikačních technologií jako prostředek aktivního přístupu žáků k matematice. PedF UK, Praha, 2012.
- [11] *Jančařík, A.*: Vybrané teorie učení a jejich projekce do využívání ICT ve výuce matematiky. PedF UK, Praha, 2013.
- [12] *Štech, S.*: Když je kurikulární reforma evidence-less. Pedagogická orientace, roč. 23 (2013), č. 5, s. 615–633.
- [13] *Dvořák, D. a kol.*: Kurikulum školního vzdělávání – Zahraniční reformy v 21. století. PedF UK, Praha, 2018.
- [14] *Kolektiv autorů EU*: Matematické vzdělávání v Evropě – Společná úskalí a politiky jednotlivých zemí. Eurydice, Brusel, 2011 (český překlad 2012).
- [15] *Kuřina, F.*: Tři pokusy řešit neřešitelné. Pedagogika, roč. 61 (2011), č. 1, s. 5–12.
- [16] *Polák, J.*: Rozvoj logického myšlení žáků ve výuce matematiky. Učitel matematiky, roč. 27 (2019), č. 2 (111), s. 74–88.
- [17] *Joson, A.*: Mathematics and the “real world” – Moving toward 21st Century Math Learning. SOWISO (Learning Math and Science), Kempton (SRN), 27. 11. 2017.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 265 a 266 můžete zaslat nejpozději do 31. 3. 2021 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou (pouze však v $\text{\LaTeX}$ ovských verzích, příp. v MS Wordu) na emailovou adresu: mfi@upol.cz.

Úloha 265

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou BC označme I střed kružnice jemu vepsané. Určete obvod tohoto trojúhelníku, jestliže je dáno $|AI| = \sqrt{72}$ a $|BI| = \sqrt{232}$.

Josef Tkadlec

Úloha 266

Určete všechny dvojice (m, n) přirozených čísel, pro něž platí

$$m + s(n) = n + s(m) = 2020,$$

kde $s(a)$ značí ciferný součet přirozeného čísla a .

Jaroslav Švrček

Nyní uvádíme řešení úloh 261 a 262, jejichž zadání jsme zveřejnili ve druhém čísle aktuálního (29.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 261

Dokažte, že desítkový zápis některé přirozené mocniny čísla 2021 začíná čtyřčíslím 2020.

Pavel Calábek

Řešení. Uvažujme (aspoň čtyřmístné) číslo a , počet číslic a je roven $1 + \lfloor \log a \rfloor$, kde $\log$ je dekadický logaritmus a $\lfloor x \rfloor$ celá část reálného čísla x . Toto číslo bude začínat čtyřčíslím 2020, právě když

$$2020 \cdot 10^{\lfloor \log a \rfloor - 3} \leq a < 2021 \cdot 10^{\lfloor \log a \rfloor - 3},$$

tedy právě když $\log 2,020 \leq \{\log a\} < \log 2,021$, kde $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in \langle 0; 1 \rangle$ je tzv. *desetinná část* čísla x .

Označme

$$n = \left\lfloor \frac{1}{\log 2,021 - \log 2,020} \right\rfloor + 1 \quad (= 4653),$$

z vlastnosti celé části pak plyne

$$\frac{1}{n} < \log 2,021 - \log 2,020 = -\log \frac{2020}{2021}.$$

Podle Dirichletova principu existují mezi $n + 1$ čísly $\{\log 2021^i\} = \{i \cdot \log 2021\}$ pro $i \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$, dvě čísla k, m , $k > m$, pro něž absolutní hodnota rozdílu je menší než $1/n$. (Zřejmě pro různá celá

k, m z iracionality čísla $\log 2021$ plyne $\{\log 2021^k\} \neq \{\log 2021^m\}$.) Bez újmy na obecnosti dále předpokládejme

$$-\frac{1}{n} < \{k \log 2021\} - \{m \log 2021\} = \{(k-m) \log 2021\} < 0$$

(jinak budeme uvažovat čísla $k = n + 2 - m$, $m = n + 2 - k$). Při označení $L = \lfloor (k-m) \log 2021 \rfloor \geq \lfloor \log 2021 \rfloor = 3$ proto dále užitím nerovnosti platí

$$\begin{aligned} L + 1 + \log \frac{2020}{2021} &< L + 1 - \frac{1}{n} < \\ &< L + \{(k-m) \log 2021\} = (k-m) \log 2021 < L + 1. \end{aligned}$$

Užitím rostoucí exponenciální funkce se základem 10 dostaneme

$$\frac{2020}{2021} \cdot 10^{L+1} < 2021^{k-m} < 10^{L+1}$$

a odkud vynásobením 2021 máme

$$2020 \cdot 10^{L+1} < 2021^{k-m+1} < 2021 \cdot 10^{L+1},$$

z čehož plyne, že číslo 2021^{k-m+1} začíná čtyřčíslím 2020.

Poznámka. Pomocí počítače můžeme ověřit, že pět nejmenších mocnin čísla 2021, začínajících čtyřčíslím 2020, je 2021^{2570} , 2021^{7744} , 2021^{10313} , 2021^{15484} , 2021^{18056} . Dále kromě již vyjádřeného čísla $n = 4653$ můžeme experimentováním s počítačem zjistit, že řešení vyhovují například $k = 2570$, $m = 1$ (resp. všechny dvojice k a m lišící se o 2569) a $L = 8491$. Číslo 2021^{2570} je tedy zapsáno pomocí 8496 číslic.

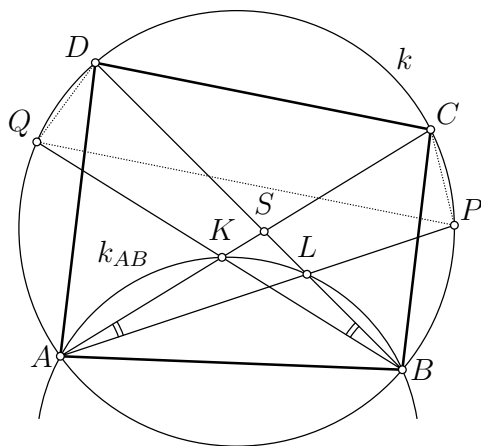
Správné řešení zaslali *Jozef Mészáros* z Jelky, *Adam Blažek* z G v Plzni, Mikulášské nám., a *Karel Stehlík* z GChD v Praze 5, Zborovská 45.

Úloha 262

Je dán tětíkový čtyřúhelník $ABCD$. Kružnice, která prochází vrcholy A a B daného čtyřúhelníku, protíná jeho úhlopříčky AC , BD po řadě ve vnitřních bodech K , L . Polopřímky AL a BK protínají kružnici opsanou čtyřúhelníku $ABCD$ po řadě v bodech P ($P \neq A$) a Q ($P \neq Q \neq B$). Dokažte, že přímky CD a PQ jsou rovnoběžky.

Jaroslav Švrček

Řešení. Nejdříve si uvědomme, že pokud průsečík S úhlopříček čtyřúhelníku leží vně kružnice k_{AB} procházející body A, B , potom body K a L jsou vnitřními body stran trojúhelníku ASB a tedy body P a Q leží po řadě uvnitř oblouků BC a DA kružnice k opsané čtyřúhelníku $ABCD$ neobsahujících jeho jiné vrcholy. V případě, že bod S leží na kružnici k_{AB} platí $Q = D$ a $C = P$, tedy tvrzení úlohy zřejmě platí. Konečně, pokud bod S leží uvnitř kružnice k_{AB} , potom body P a Q leží na oblouku CD kružnice k neobsahujícím body A, B .



K tomu, aby přímka PQ byla rovnoběžná s přímkou CD tedy stačí ukázat, že $|CP| = |QD|$. Tětivový čtyřúhelník s vrcholy Q, P, C, D je pak (rovnoramenný) lichoběžník se základnami CD a PQ , nebo pravoúhelník. Aby platila rovnost $|CP| = |QD|$, stačí dokázat, že úhly PAC a DBQ jsou shodné. To však platí, neboť úhly LAK a LBK se s nimi po řadě shodují, a současně jsou shodnými obvodovými úhly na kružnici k_{AB} .

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *František Jáchim* z Volyně, *Jozef Mészáros* z Jelky, *Amálie Dostálíková*, *Anna Pecháčková*, *Vendula Onderková* a *Adam Zemánek*, všichni z GJŠ v Přerově, *David Kamenský* z GaJŠ v Břeclavi, *Piotr Kulisz* ze ZSOT v Lublinci, *Adam Mendl* z GPdC v Táboře, *Zdeněk Pezlar* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Štěpán Postava* z GMK v Bílovci a *Michal Vosyka* z BG ve Žďáru nad Sázavou,

Pavel Calábek

Fázový portrét oscilátoru

OLDŘICH LEPIL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V učebnicích fyziky jsou základním prostředkem pro seznámení s periodickými, mechanickými nebo elektromagnetickými ději *časové diagramy* veličin, kterými tyto děje popisujeme. V příspěvku [1] jsme se zabývali dalším pohledem na oscilátory prostřednictvím rezonanční křivky jako jejich souhrnné charakteristiky. V tomto příspěvku nahlédneme na kmitající objekty ve *fázovém prostoru*, což je prostor, v němž je každý stav dynamického systému zobrazen jedinečným bodem. Pozornost věnujeme nejprve oscilátorům s jedním stupněm volnosti, jejichž pohyb je popsán časovou závislostí jedné souřadnice. Pohybový stav objektu určuje jeho poloha a hybnost $p = mv$. Okamžitou hodnotu těchto veličin zobrazíme jako bod ve *fázové rovině*. Protože se budeme zabývat objekty s konstantní hmotností, postačí k vyjádření pohybového stavu jen rychlost v . Bod, který systém ve fázové rovině reprezentuje, se pohybuje po *fázové trajektorii*. Soubor těchto křivek pro různé počáteční podmínky kmitání oscilátoru tvoří grafické zobrazení – *fázový portrét oscilátoru*.

Uvedené pojmy objasníme na příkladech různých typů oscilátorů. Abychom současně s textem příspěvku mohli názorně sledovat fázové portréty vybraných oscilátorů v proměnných podmínkách, je k příspěvku přiložen soubor jednoduchých modelů vytvořených programem MS Excel, který je dostupný [ZDE](#). Modely navazují jednak na modely uvedené v příspěvku [1], jednak na modely na CD, které je součástí posledního vydání učebnice [2].

Pružinový oscilátor

Nejjednodušší příklad představuje kmitání netlumeného, popř. tlumeného pružinového oscilátoru (model OSC), který tvoří pružina s tuhostí k

a těleso o hmotnosti m . Netlumený pružinový oscilátor považujeme za dynamický systém, pro který platí pohybová rovnice¹⁾

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0,$$

kde $\omega_0^2 = k/m$. Tato rovnice představuje obecný model harmonicky kmitajícího oscilátoru, jehož kmitání je způsobeno silou, lineárně závislou na výchylce oscilátoru. Pokud tato podmínka není splněna, je pohyb oscilátoru složitější, dynamický systém je *nelineární* a kmitání je *anharmonické*.

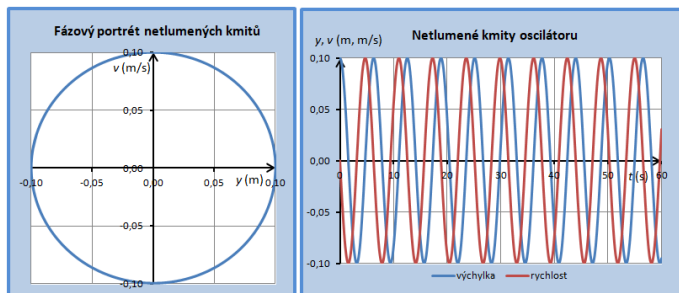
Netlumený pružinový oscilátor je *konzervativní dynamický systém*, jehož celková mechanická energie se nemění, takže jak amplituda výchylky y_m , tak amplituda rychlosti $v_m = \omega_0^2 y_m$ jsou konstantní. Kinematické veličiny netlumeného oscilátoru, jeho okamžitou výchylku a okamžitou rychlost popisují rovnice

$$y = y_m \sin \omega_0 t, \quad v = \omega_0 y_m \cos \omega_0 t.$$

Mocniny těchto rovnic sečteme a po úpravě získáme vztah

$$\left(\frac{y}{y_m}\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega_0 y_m}\right)^2 = 1,$$

což je rovnice elipsy s poloosami $a = y_m$, $b = \omega_0 y_m$. V modelu je zvolena úhlová frekvence $\omega_0 = 1$ rad/s, takže fázový portrét má podobu kružnice o poloměru y_m (obr. 1). Pro srovnání je zobrazen také časový diagram oscilátoru. Okamžitý stav oscilátoru určuje bod, který se při kmitání pohybuje na fázové trajektorii rovnoměrným pohybem.



Obr. 1 Netlumený harmonický oscilátor

¹⁾Pro jednodušší zápis rovnic opustíme středoškolský matematický aparát použitý v příspěvku [1] a použijeme standardní označení pro derivaci veličiny podle času tečkami nad značkou veličiny.

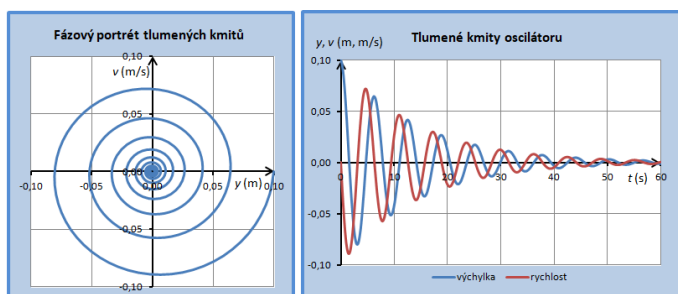
Netlumený oscilátor je ovšem reálně neexistující abstrakce a na každý skutečný oscilátor působí tlumicí síla, která způsobuje ztrátu mechanické energie (*dissipace energie*). Tlumený pohyb oscilátoru charakterizuje součinitel tlumení δ a tlumené kmitání popisují rovnice

$$y = y_m e^{-\delta t} \sin \omega t, \quad v = \omega y_m e^{-\delta t} \cos \omega t,$$

kde $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

V tomto případě určuje tvar fázové trajektorie rovnice logaritmické spirály (obr. 2):

$$\left(\frac{y}{y_m}\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega y_m}\right)^2 = e^{-2\delta t}.$$



Obr. 2 Tlumený oscilátor

Oscilátor postupně směřuje do rovnovážného stavu, kterému odpovídá koncový bod spirály. Systém je v ustáleném stavu a jeho obrazem je na fázovém portréту bod. Tlumený oscilátor je *dissipativní systém*, který je k ustálenému stavu jakoby přitahován (anglicky *attracted*). Podle toho je cíl, k němuž systém při pohybu směřuje, označován jako *atraktor* systému.

V příspěvku [1] jsme definovali činitel jakosti oscilátoru

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\pi}{\delta T}.$$

Na obr. 2 vidíme, že fázová trajektorie po každé periodě T protne osu výchylek v bodě, který odpovídá okamžité hodnotě velikosti amplitudy výchylky. Tlumené kmitání pružinového oscilátoru tedy představuje periodický, nikoliv však harmonický pohyb.

Jestliže v počátečním okamžiku má oscilátor amplitudu y_m , pak o periodu později fázová trajektorie protne osu výchylek v bodě

$$y_1 = y_m e^{-\delta T}.$$

Nyní ukážeme, jak lze činitele jakosti oscilátoru určit přímo z fázového portréту. Určíme rozdíl obou výchylek

$$y_m - y_1 = y_m (1 - e^{-\delta T}) = y_m \left(1 - e^{-\frac{\pi}{Q}}\right)$$

Při větších hodnotách činitele jakosti, s nimiž se v praxi nejčastěji setkáváme, můžeme vztah zjednodušit

$$e^{-\frac{\pi}{Q}} \approx 1 - \frac{\pi}{Q}$$

a pro výpočet činitele jakosti získáme vztah

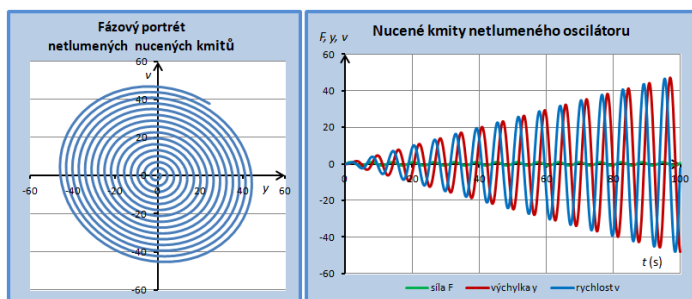
$$Q = \frac{\pi}{1 - \frac{y_1}{y_m}}.$$

To umožňuje určit činitele jakosti na základě poměru velikostí amplitud, aniž bychom znali jejich absolutní hodnoty.

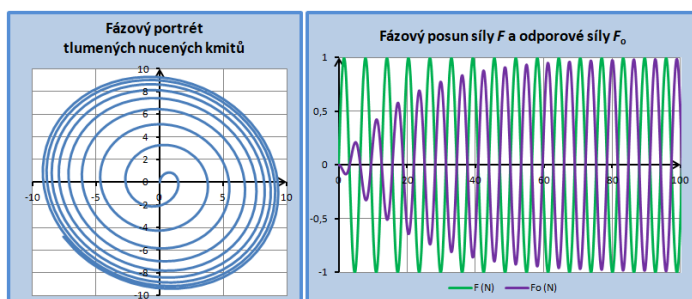
V případě nucených kmitů působí na oscilátor vnější síla, která nahrazuje ztráty oscilátoru vznikající tlumením pohybu. Obecně platí, že při vzniku nucených kmitů dochází k superpozici vlastního tlumeného kmitání a kmitání vynuceného vnější harmonickou silou, která může mít odlišnou frekvenci, než je vlastní frekvence oscilátoru. Podrobněji je to demonstrováno modelem M4.1 na CD k učebnici [2]. V tomto příspěvku se budeme zabývat nucenými kmity při rezonanci oscilátoru, kdy je frekvence síly vynucující kmitání shodná s vlastní frekvencí oscilátoru (model NUC).

V ideálním případě netlumeného oscilátoru amplituda kmitů rovnoměrně a bez omezení roste. To je dobře vidět na obr. 3, kde je jednak fázový portrét odpovídající tomuto případu, jednak časový diagram. Na něm si povšimneme, že vnější síla i rychlost mají stejnou fázi. To znamená, že příkon energie do oscilátoru $P = Fv$ je stále kladný, celková energie oscilátoru se zvětšuje a amplituda stále roste. Fázový portrét má tvar rozvíjející se spirály, která se nepřetržitě vzdaluje od počátečního stavu oscilátoru, aniž by byl dosažen ustálený stav.

V případě reálného tlumeného oscilátoru však s rostoucí rychlostí narůstá také odporová síla, která má v každém okamžiku opačnou fázi než vnější síla. Amplituda kmitů sice roste, ale přírůstek energie a tedy i amplitudy se exponenciálně zmenšuje, až při dosažení shody amplitud vnější síly a odporové síly se celý proces růstu amplitudy kmitů zastaví a nastane ustálený stav, kterému odpovídá stabilní koncový tvar fázového portrétu (obr. 4).



Obr. 3 Nucené kmitý netlumeného oscilátoru



Obr. 4 Nucené kmitý tlumeného oscilátoru

Kyvadlo s velkou počáteční výchylkou – rotátor

V učebnicích fyziky kyvadlo zpravidla představuje jednoduchý model harmonického oscilátoru, přičemž je uvedena podmínka pro vznik harmonických kmitů tím, že počáteční úhlová výchylka φ_0 kyvadla musí být malá. Většinou bývá uváděna podmínka $\varphi_0 \leq 5^\circ$. Pak můžeme kmitání kyvadla délky l považovat za harmonické s vlastní úhlovou frekvencí $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ a tato frekvence nezávisí na velikosti počáteční výchylky. Perioda kmitání se sice poněkud liší od hodnoty teoretické, ale odchylka je přibližně 0,05 %. Stačí však zvětšit počáteční výchylku na 10° a odchylka vzroste na 0,2 %. Periodu kmitání kyvadla pak neurčuje jen jeho délka, ale i velikost počáteční výchylky.

Kmitání kyvadla bez tlumení je popsáno rovnicí

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0. \quad (1)$$

Použitím prvních dvou členů Taylorova rozvoje²⁾ funkce sinus získáme rovnici

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{6} \right) = 0,$$

a po úpravě

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \frac{\omega_0^2}{6} \varphi^3. \quad (2)$$

Výraz na pravé straně rovnice můžeme považovat za opravný člen. Pokud bude jeho hodnota zanedbatelná, bude se měnit okamžitá výchylka kyvadla podle rovnice

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega_0 t.$$

V případě větších výchylek vztah pro okamžitou výchylku doplníme opravným členem $\varphi_1(t)$ a zapíšeme rovnici pro okamžitou výchylku ve tvaru

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega_0 t + \varphi_1(t).$$

Dosazením do rovnice (2) dostaneme

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 = \frac{\omega_0^2}{6} (\varphi_0 \sin \omega_0 t + \varphi_1)^3.$$

Předpokládejme, že výchylka φ_1 je ještě poměrně malá, takže při výpočtu třetí mocniny výrazu v závorce budeme považovat všechny členy rovnice obsahující φ_1 za zanedbatelné a po úpravě dostaneme

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 \approx \frac{\omega_0^2}{6} \varphi_0^3 \sin^3 \omega_0 t = \frac{\omega_0^2}{6} \varphi_0^3 \frac{1}{4} (3 \sin \omega_0 t - \sin 3\omega_0 t).$$

Z výsledku je patrné, že při větších počátečních výchylkách kyvadla je výsledné kmitání superpozicí kmitání s vlastní frekvencí a kmitání s násobky vlastní frekvence. Kmitání kyvadla při větších výchylkách popisuje rovnice

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega t + \varepsilon \varphi_0 \sin 3\omega t.$$

kde ε je bezrozměrová konstanta, která pro $\varphi_0 \ll 1$ má hodnotu $\varepsilon \ll 1$ (podrobněji viz např. [3]).

Tento poznatek můžeme zobecnit tak, že každý periodický děj, jehož pohybová rovnice obsahuje vyšší mocniny výchylky, popř. jiné veličiny tohoto děje, je anharmonický a Fourierovou analýzou ho můžeme rozložit na

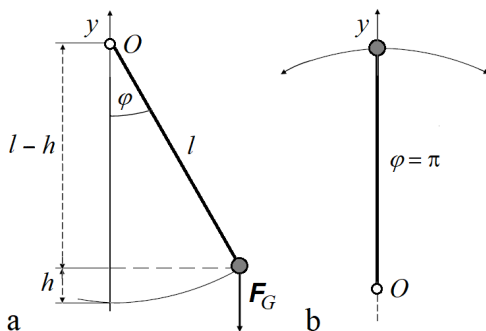
²⁾ $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

harmonické složky. Existence harmonických složek je nejvýznamnějším poznatkem o kmitání *nelineárních dynamických systémů*. V podstatě to platí i pro pružinový oscilátor, pokud by vlastnosti pružiny přesně neodpovídaly Hookeovu zákonu. Pružinový oscilátor tak představuje jen teoretický model harmonicky kmitajícího dynamického systému.

Kmitání kyvadla při velké výchylce ilustruje model KYV, který navazuje na obdobný model na CD k učebnici [2]. Vychází z rovnice kyvadla (1) a řeší ji numericky Eulerovou metodou:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{g}{l} \sin \varphi \\ \varphi_{i+1} &= \varphi_i + \omega_i \cdot dt \\ \omega_{i+1} &= \omega_i + \varepsilon_i \cdot dt \\ t_{i+1} &= t_i + dt\end{aligned}$$

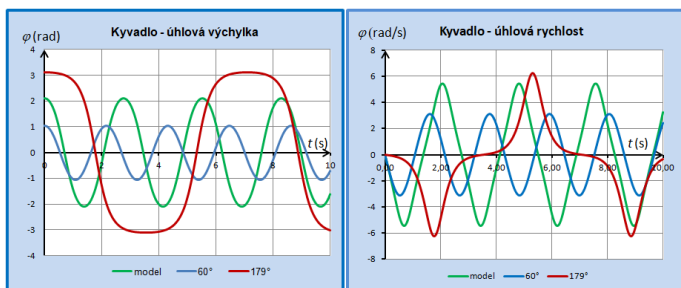
Model řeší pohyb kyvadla, jehož počáteční výchylka $\varphi_0 \rightarrow 180^\circ$. Takový pohyb ovšem nemůže konat klasické kyvadlo s tělesem zavěšeným na vlákně. Nahradíme ho tzv. *rotátorem*, který je tvořen kuličkou o hmotnosti m , upevněnou na konci lehké tyčky o délce l , jejíž hmotnost nebudeme uvažovat. Druhým koncem tyčky prochází osa O , kolem které se může rotátor otáčet (obr. 5a). Okamžitou výchylku rotátoru vyjádříme úhlem φ , který tyčka svírá s osou y . Druhou veličinou charakterizující pohyb rotátoru bude jeho okamžitá úhlová rychlost $\dot{\varphi}$.



Obr. 5 Rotátor

Modelem KYV jsou zobrazeny současně tři rotátory, přičemž u prvního z nich můžeme posuvníkem měnit počáteční výchylku v intervalu

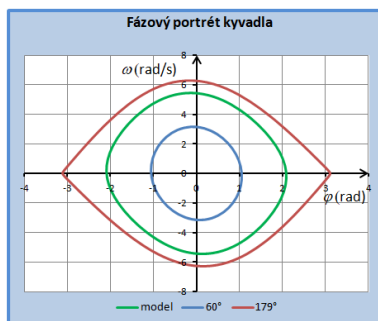
($10^\circ < \varphi_0 < 120^\circ$). Pro každé nastavení počáteční výchylky je vypočítána také odchylka periody od teoretické hodnoty $T_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$. Další dva rotátory mají pevně nastavené počáteční výchylky 60° a 179° . Časové diagramy kmitání rotátorů jsou na obr. 6 (rotátor s měnitelnou počáteční výchylkou je nastaven na úhel 120°).



Obr. 6 Časové diagramy výchylky a rychlosti rotátoru

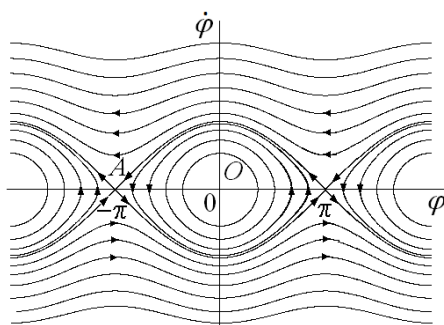
Z grafů je patrné, že s rostoucí počáteční výchylkou se časové diagramy stále více odlišují od harmonického kmitání popsaného rovnicí (1). Mění se jednak tvar křivky časového diagramu, jednak perioda kmitů. Dobře je patrný podíl harmonických složek na časovém diagramu kmitů pro počáteční výchylku 120° , který má výrazný charakter kmitů s trojúhelníkovým průběhem.

Fázové portréty pohybových stavů rotátorů získané modelem KYV jsou na obr. 7. Vidíme, že při maximální amplitudě počáteční výchylky se fázová trajektorie v podobě elipsy, popř. kružnice mění v oblouk, jehož počátečním bodům odpovídá maximální výchylka a nulová úhlová rychlost.



Obr. 7 Fázové trajektorie rotátoru pro 60° , 120° a 179°

Model neřeší případ počáteční výchylky $\varphi_0 = 180^\circ = \pi$. V tomto případě je rotátor ve svislé, nestabilní poloze (obr. 5b), takže není zřejmé, kterým směrem bude jeho pohyb pokračovat. Na rotátor může působit také vnější síla, jejímž působením rotátor přejde nestabilní rovnovážnou polohu (bod nestability) a podle okolností může pokračovat v pohybu oběma možnými směry. Dostatečně velký počáteční impuls může vyvolat otáčení stále jedním směrem. Změnu směru pohybu by pak mohlo způsobit tlumení systému. Oscilátor by nedosáhl k nejvyššímu bodu trajektorie a začal by se pohybovat opačným směrem. Kdyby však na rotátor působila periodická vnější síla, závisel by směr otáčení na vzájemném vztahu periody vlastního kmitání a periody vnější síly.



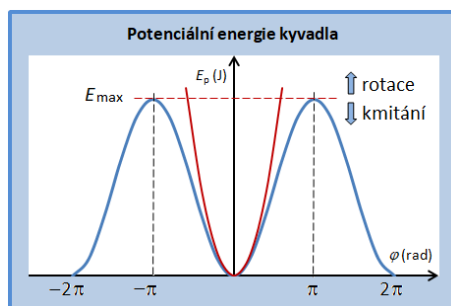
Obr. 8 Fázové portréty rotátoru

Fázovým portrétem rotátoru při různých počátečních výchylkách je soustava fázových trajektorií na obr. 8. Křivky procházející bodem A odpovídají situaci, kdy se systém nachází v nestabilním stavu (rotátor je v labilní poloze a má nulovou rychlost). O dalším pohybu pak rozhodují i nepatrné fluktuace silového působení na rotátor. Rozvětvení fázových trajektorií v bodě A dokládá dvě možnosti dalšího pohybu – otáčení ve stejném nebo v opačném směru. Křivky blíže k počátku souřadnicové soustavy (bod O) reprezentují stacionární stav oscilátoru. Vnější zvlněné křivky charakterizují otáčení rotátoru větší rychlostí, než je rychlost potřebná k dosažení nestabilního stavu. Rotátor má dostatek energie, aby se z maximální polohy nevracel zpět, ale konal plynulý otáčivý pohyb. Fázová trajektorie procházející bodem A a dalšími souměrně umístěnými body na ose výchylek se nazývá *separatrix* a odděluje dvě oblasti stavů dynamického systému: oblast uzavřených fázových trajektorií (kmitání) a oblast otevřených fázových trajektorií plynulého rotačního pohybu.

Ukážeme, že rovnice fázových trajektorií vyplývají přímo ze zákona zachování energie a fázový portrét konzervativního systému můžeme vytvořit bez řešení diferenciální rovnice popisující pohyb systému. Jestliže kyvadlo vychýlíme z rovnovážné polohy o úhel φ , zvedne se v tíhovém poli těleso kyvadla do výšky h (viz obr. 5) a pro potenciální energii platí

$$E_p(\varphi) = mgh = mgl(1 - \cos \varphi).$$

Graf na obr. 10 vyjadřuje tato závislost pro celý rozsah výchylek od minima při úhlové výchylce $\varphi = 0$, až pro maximální hodnotu při $\varphi = \pm\pi$: $E_p = 2mgl$. Průběh „potenciálové jámy“ se liší od grafu potenciální energie harmonicky kmitajícího oscilátoru (červený graf na obr. 9), jehož perioda na amplitudě výchylky nezávisí. V blízkosti minima obě křivky splývají, což znamená shodu periody kmitání lineárního a nelineárního oscilátoru.



Obr. 9 Potenciální energie kyvadla

U konzervativního systému neuvažujeme odpor prostředí a jeho celková energie E je dána součtem potenciální energie E_p a kinetické energie E_k ($E_k = 1/2 J \dot{\varphi}^2$), který je konstantní³⁾

$$\frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = E = \text{konst.} \quad (3)$$

(J je moment setrvačnosti rotátoru: $J = ml^2$). Pro kyvadlo platí $mgl/J = g/l = \omega_0^2$ a v rovnici (3) nahradíme $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Po úpravě dosta-

³⁾V mechanice se pro úhlovou rychlost rotačního pohybu obvykle používá značka ω . Zde je dána přednost označení $\dot{\varphi}$, vyjadřujícímu derivaci $d\varphi/dt$. Označení ω je v textu použito pro úhlovou frekvenci, což je skalární veličina charakterizující periodický děj a je definována vztahem k periodě T , popř. frekvenci f .

neme pro fázovou trajektorii rovnici elipsy

$$\varphi^2 + \frac{\dot{\varphi}^2}{\omega_0^2} = \frac{2E}{mgl}.$$

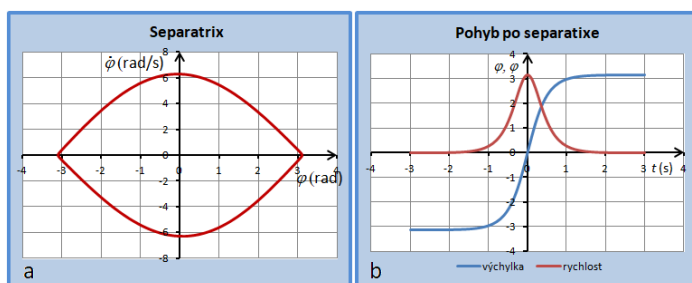
Kyvadlo (rotátor) může maximálně vystoupit do výšky $h = 2l$ a získá potenciální energii $E_{\text{pmax}} = mgh = 2mgl$. V případě, že je v počátečním okamžiku rychlost rotátoru nulová, představuje tato energie také celkovou energii E . Pokud je $E < 2mgl$, rotátor kmitá anharmonicky mezi hodnotami φ_m a $-\varphi_m$. Jestliže $E \gg 2mgl$, koná rotátor otáčivý pohyb s úhlovou rychlostí, jejíž maximální hodnota $\dot{\varphi}_{\text{max}} \approx \sqrt{2E/ml^2}$. Při malé výchylce ($E \ll 2mgl$) je kmitání harmonické s úhlovou frekvencí $\omega_0 = \sqrt{g/l}$.

Zvláštní pozornost věnujeme situaci, kdy je kyvadlo (rotátor) v nestabilním vrcholu trajektorie ($\varphi = \pm\pi$). Pro limitní fázovou trajektorii (separatrix) najdeme z rovnice (3) vztah

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = 2mgl,$$

$$\dot{\varphi} = \pm 2\omega_0 \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} \approx \pm 2\omega_0 \cos \frac{\varphi}{2}.$$

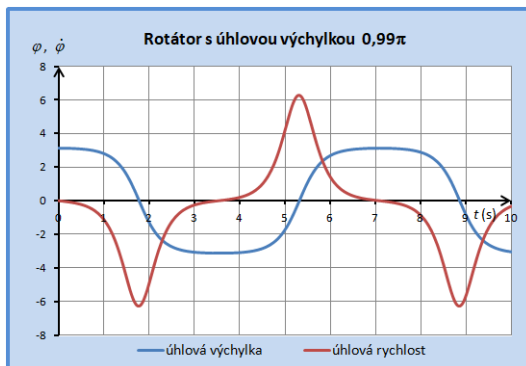
Její grafické zobrazení (obr. 10a) se shoduje s výsledkem získaným řešením rovnice kyvadla numerickou metodou (obr. 7). Časová závislost úhlové výchylky a rychlosti při pohybu po separatrixe je na obr. 10b.



Obr. 10 Separatrix

Čím větší je energie oscilátoru, tím více se kmitání odlišuje od harmonického pohybu a fázová trajektorie se liší od elipsy. V blízkosti hodnoty E_{pmax} se fázová trajektorie protahuje vodorovným směrem (sklon potenciální jámy není tak strmý jako u parabolického tvaru křivky pro harmonický

oscilátor). Při velké amplitudě rotátor v tomto stavu setrvává déle (ploché maximum výchylky) a rychlost má ostré maximum v nejnižším bodě trajektorie. Časový průběh rychlosti má charakter impulsu, kterým rotátor získá potřebnou energii k výstupu do maximální polohy (obr. 11).



Obr. 11 Časový diagram kmitání rotátoru s počáteční úhlovou výchylkou $0,99\pi$

Pro pohyb kyvadla s extrémní výchylkou je charakteristické výrazné prodloužení periody T pohybu. Pro výpočet periody můžeme použít vztah (4) odvozený v [4]. Pro amplitudu výchylky $\varphi_m = 0,99\pi = 178,2^\circ$ dostaneme

$$T \approx \frac{2}{\pi} T_0 \ln \frac{8}{\pi - \varphi_m} \doteq 7,075 \text{ s.} \quad (4)$$

V modelu KYV je pohyb kyvadla řešen jednoduchou, ale méně přesnou Eulerovou metodou a tímto postupem najdeme, že kyvadlo délky 1 m ($T_0 = 2,006 \text{ s}$) kmitá při výchylce $0,99\pi$ s periodou $T 7,08 \text{ s}$ ($T \approx 3,5T_0$), což je v dobré shodě s teorií. To je dobře patrné i z časového diagramu na obr 11. Při zvětšení počáteční výchylky o 1° na $179,2^\circ = 0,9956\pi$ vzroste perioda o více než sekundu na $8,12 \text{ s}$ a $T \approx 4,0T_0$ (podrobněji viz [4]).

* * *

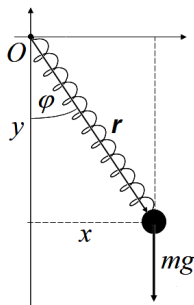
Můžeme shrnout: Kmitání nelineárního dynamického systému není charakterizováno jedinou frekvencí. Jde o periodický pohyb, který je superpozicí harmonických kmitání s různou frekvencí. Periodu kmitání však lze určit na základě numerického řešení odpovídající pohybové rovnice. Těmito poznatky o oscilátorech se zabývá teorie dynamických systémů a můžeme je na základě získaných fázových portrétů zobecnit. Fázové portréty oscilátorů na obr. 1 až 3 odpovídají třem možným stavům systému.

Na obr. 1 je fázový portrét stabilního stavu, kterému na obr. 8 odpovídá bod O (*stabilní střed*), obr. 2 představuje tzv. *stabilní ohnisko* (rovnovážný stav, ke kterému směřuje disipativní systém) a na obr. 3 je *nestabilní ohnisko* (systém směřuje mimo rovnovážný stav). Okolí bodu A na obr. 8 se označuje jako *nestabilní sedlo*, kdy nelze jednoznačně rozhodnout o dalším pohybu systému, který mohou ovlivnit i nepatrné fluktuace působících sil nebo parametrů systému.

Fluktuace v dynamických systémech mohou mít náhodný, stochastický ráz, avšak děj, který způsobí, označujeme jako *deterministický děj*: pohyb dynamického systému se řídí příslušnou fyzikální zákonitostí. Tím se deterministický děj liší od děje se stochastickým průběhem, kdy jeho zákonitosti není možné vyjádřit soustavou pohybových rovnic a chování systému můžeme popsat jen na základě jeho empirického studia. Fázové portréty deterministických dějů tvoří atraktory, jejichž průběh lze přesně popsat.

Pružinové kyvadlo

Netlumený rotátor byl interpretován jako konzervativní systém a popis jeho pohybových stavů byl jednoduchý – deterministický. Existují však oscilátory, které jsou při pohybu nestabilní, a malý vnější impuls může být příčinou jejich chaotického pohybu. Jako příklad uvedeme *pružinové kyvadlo* (obr. 12). Při experimentování se svisle zavěšeným pružinovým oscilátorem předpokládáme, že bude kmitat podél svislé přímky. Často se však stává, že při nepatrné počáteční odchylce od svislého směru začne oscilátor kmitat s měnící se amplitudou také ve vodorovném směru jako kyvadlo.



Obr. 12 Pružinové kyvadlo

I když se nám pružinové kyvadlo jeví jako jednoduchý dynamický systém, analýza jeho pohybu není triviální a teoretičtí fyzikové se jím zabývali již

od 30. let minulého století. Novým impulsem zájmu o tento oscilátor se stala možnost řešit jeho pohybové rovnice numerickými metodami pomocí počítače. Proto najdeme na webu řadu aktuálních publikací, které se touto problematikou zabývají (z českých zdrojů např. [5] a [6]).⁴⁾ Pohyb pružinového kyvadla v rovině vztážené soustavy Oxy budeme zkoumat zjednodušeným modelem PRU. Ten řeší pohybové rovnice obou módů kmitání: příčného – kyvy a podélného – kmity (viz také [7, modely 2.3, s. 36 a 10.2.3, s. 147]).

Na kyvadlo působí tíhová síla F_G a síla pružnosti F_P a pohybovou rovnici kyvadla napíšeme ve tvaru

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_P = -m\mathbf{g} - k(r-l)\mathbf{r}^0,$$

kde k je tuhost pružiny a l je délka pružiny v nezátíženém stavu. Svisle zavěšené pružinové kyvadlo v klidu se působením tíhové síly prodlouží na délku r a platí $mg = k(r-l)$. V obecné poloze určuje směr síly pružnosti jednotkový vektor $\mathbf{r}^0 = \mathbf{r}/r$, kde $\mathbf{r}$ je polohový vektor určující polohu tělesa vzhledem ke vztáženému bodu O . Budeme uvažovat pohyb kyvadla v rovině xy , takže souřadnice polohy tělesa $x = r \sin \varphi$, $y = r \cos \varphi$ a $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Východiskem dynamického modelu jsou složky působících sil:

$$ma_x = -k(r-l)\frac{x}{r}, \quad ma_y = -mg - k(r-l)\frac{y}{r}.$$

Program modelu PRU tvoří posloupnost výpočtů (dt je časový krok):

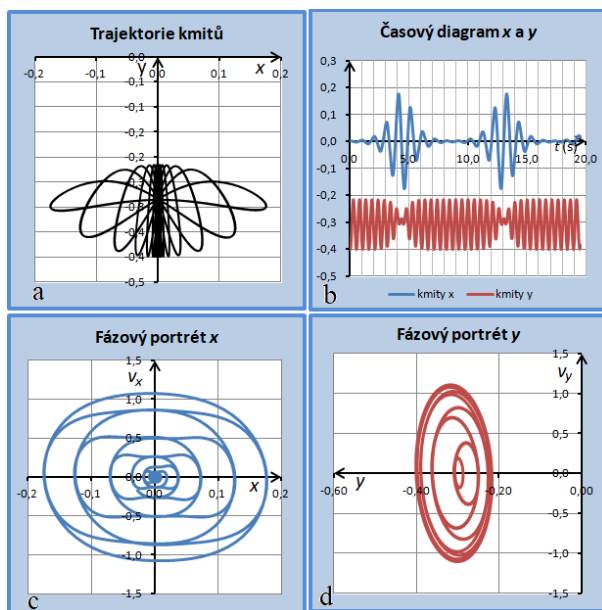
$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ a_x &= -\left(\frac{k}{m}\right)(r-l)\frac{x}{r} \\ a_y &= -g - \left(\frac{k}{m}\right)(r-l)\frac{y}{r} \\ v_{xi+1} &= v_{xi} + a_x \cdot dt \\ v_{yi+1} &= v_{yi} + a_y \cdot dt \\ x_{i+1} &= x_i + v_{x+1} \cdot dt \\ y_{i+1} &= y_i + v_{y+1} \cdot dt \\ t_{i+1} &= t_i + dt \end{aligned}$$

⁴⁾ V českých publikacích je častější termín *pružné kyvadlo*, což je ekvivalent anglického termínu *elastic pendulum*. Vzhledem k termínu *pružinový oscilátor* v učebnici [2], je dána přednost termínu *pružinové kyvadlo*.

Ponecháme na čtenáři, aby si vlastnosti pružinového kyvadla s různými parametry a počátečními podmínkami ověřil na modelu PRU. Podrobněji si všimneme jen zvláštního případu, kdy dochází k rezonanci obou módů kmitání. V tomto případě můžeme nahlížet na pružinové kyvadlo jako na soustavu dvou spřažených oscilátorů, kdy se energie podélného kmitavého pohybu kyvadla ve směru osy y přenáší na jeho příčné kyvy ve směru osy x a naopak. To se projevuje periodickými změnami amplitud pohybu v navzájem kolmých směrech (příčné kmitání označíme jako *kyvy*, podélné kmitání jako *kmity*). Zaměříme se na případ, kdy platí

$$\frac{mg}{kl} = \frac{\omega_{\text{kyvy}}^2}{\omega_{\text{kmity}}^2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{T_{\text{kyvy}}}{T_{\text{kmity}}} = 2.$$

Rezonanci nastavíme na základě poznatků o kmitání vázaných oscilátorů (v programu PRU jsou hodnoty period obou módů kmitání spočteny). Při rezonanci přejde veškerá energie z oscilátoru na rezonátor, amplituda oscilátoru je minimální (při přesném nastavení nulová) a amplituda kmitů rezonátoru je maximální (viz obr. 13b).

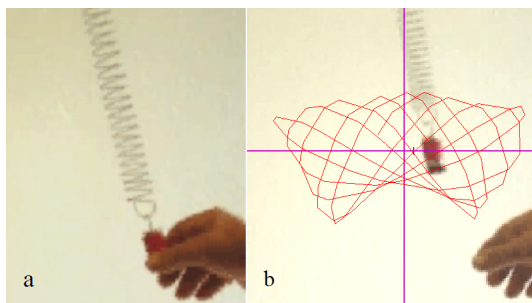


Obr. 13 Kmitání pružinového kyvadla

V našem případě tento stav nastal při nastavení parametrů: $m = 0,16$ kg, $k = 26,1$ N/m, $l = 0,24$ m a počáteční výchylce $x_0 = 0,001$ m, $y_0 = -0,4$ m. Tomu odpovídají hodnoty periody příčných kyvů $T_{\text{kyvy}} = 0,98$ s a periody podélných kmitů $T_{\text{kmitů}} = 0,49$ s. Program PRU umožňuje přibližné zobrazení rezonančního stavu i při jiném nastavení parametrů, například: $m = 0,35$ kg, $k = 26,6$ N/m, $l = 0,51$ m. Avšak již malá změna uvedených parametrů vede k chaotickému pohybu pružinového kyvadla.

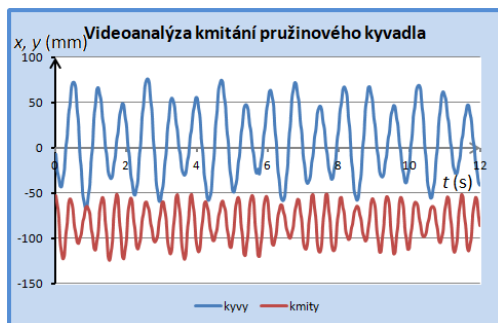
Dosud jsme se zabývali pružinovým kyvadlem teoreticky. Můžeme si položit otázku, zda lze získané poznatky o rezonanci dvou módů kmitání pružinového kyvadla ověřit také praktickým experimentem. Ukážeme postup, který může být inspirativní i pro samostatné žákovské práce. Pohyb kyvadla budeme sledovat pomocí tzv. videoanalýzy (viz [8]), která slouží k analýze obrazového záznamu pohybu pořízeného digitální kamerou, popř. i mobilem nebo tabletem. Důležité je, aby těleso kyvadla bylo opatřeno barevnou značkou, která je kontrastní vzhledem pozadí (obr. 14a). Pro účely videoanalýzy existuje několik programů, z nichž nejlepší výsledky lze získat programem *Tracker* [9].

Možnosti úpravy pružinového kyvadla tak, aby byly splněny podmínky pro vznik rezonančních kmitů, jsou omezené. U běžně používaných pružin nemáme totiž možnost podle potřeby nastavovat jejich délku a měnit tuhost pružiny. Jako částečně měnitelný tak zůstává jediný parametr, tzn. hmotnost kmitajícího tělesa. V našem případě byla hmotnost upravována přidáváním feritových magnetů k ocelovému válečku, který tvořil těleso kyvadla. Tímto způsobem bylo možné nastavit podmínky rezonance jen přibližně. Doba trvání obrazového záznamu je přibližně 25 s (snímací frekvence 25 snímků/s, tzn. perioda 40 ms). Pro přehlednost je k zobrazení trajektorie využito 100 snímků (obr. 14b) z celkových 625 snímků.



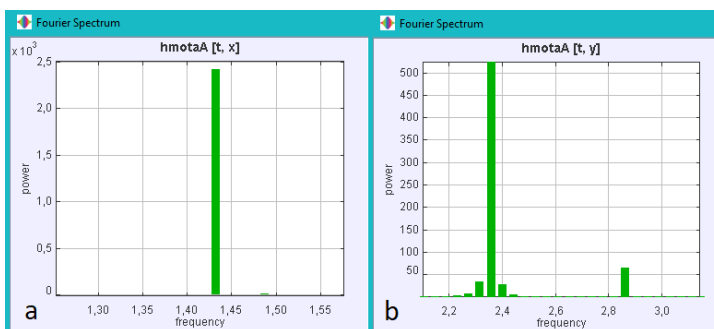
Obr. 14 Videoanalýza kmitání pružinového kyvadla

Okamžité hodnoty kinematických veličin pohybu kyvadla jsou programem zaznamenány do tabulky, kterou lze exportovat do programu MS Excel. Výsledek videoanalýzy pružinového kyvadla je na obr. 15. Z časových diagramů příčných kvyvů a podélných kmitů jsou patrné charakteristické rázy spřažených oscilátorů, ale současně je zřejmé, že přesné rezonance nebylo dosaženo.



Obr. 15 Časový diagram kmitání pružinového kyvadla

Program Tracker umožňuje i další analýzu získaných dat. Např. lze určit Fourierovou analýzou základní frekvenci periodických pohybů. Tak bylo zjištěno, že základní frekvence příčných kvyvů $f_{kyvy} = 2,38$ Hz a podélných kmitů $f_{kmitý} = 1,43$ Hz (obr. 16). To znamená, že poměr frekvencí obou módů kmitání je 5 : 3. Můžeme si však povšimnout, že ve spektru podélných kmitů (obr. 16b) se objevuje také frekvence odpovídající přesně dvojnásobku frekvence příčných kvyvů, čili rezonančnímu stavu.



Obr. 16 Fourierova analýza kmitání pružinového kyvadla

Závěr

Ukázali jsme, že i současná fyzika může mít zájem o studium zdánlivě jednoduchých dynamických systémů, které vykazují neobvyklé chování. U řady nelineárních dynamických systémů je fázový portrét těchto oscilátorů označován jako *podivný atraktor*. Jejich studiem se zabývá relativně nová disciplína – *deterministický chaos*. Základní informaci o tomto zajímavém oboru fyziky lze získat např. v publikaci [10, s. 154–176].

Literatura

- [1] Lepil, O.: Rezonanční křivka – portrét oscilátoru. MFI, roč. 29 (2020), č. 3, s. 201–213. Dostupné na: http://mfi.upol.cz/files/29/2903/mfi_2903_201_213.pdf
- [2] Lepil, O.: Fyzika pro gymnázia. Mechanické kmitání a vlnění. 5. přepracované vydání s CD, Prometheus, Praha, 2018.
- [3] Kittel, Ch., Knight, W. D., Ruderman, M. A.: Berkeley Physics Course. Mechanics. Second Edition, McGraw-Hill Book Company, New York, 1973.
- [4] Butikov, E. I.: Oscillations of a simple pendulum with extremely large amplitudes. European Journal of Physics, vol. 33 (2012), p. 1555–1563. Dostupné na: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0143-0807/33/6/1555/pdf>
- [5] Havránek, A., Čertík, O.: Pružné kyvadlo. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 51 (2006), č. 3, s. 198–216. Dostupné na: <http://dml.cz/dmlcz/141318>
- [6] Dvořák, L.: Pružné kyvadlo: od teoretické mechaniky k pokusům a zase zpátky. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 51 (2006), č. 4, s. 312–327. Dostupné na: <http://dml.cz/dmlcz/141331>
- [7] Lepil, O., Richterek, L.: Dynamické modelování. Repronis, Ostrava, 2007. Dostupné na: http://ufm.sgo.cz/ke_stazeni/Dynamicke_modelovani.pdf
- [8] Lepil, O.: Videoanalýza jako prostředek didaktické komunikace ve výuce fyziky. Dostupné na: <http://ufyz.sgo.cz/show-file/87/>
- [9] <https://physlets.org/tracker/>
- [10] Lepil, O.: Deterministický chaos. In: Fyzika aktuálně – příručka nejen pro učitele, Prometheus, Praha, 2009.

Optimální způsob placení (Úlohy z MO kategorie P, 40. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V našem seriálu článků o úlohách z Matematické olympiády kategorie P (programování) se tentokrát seznámíme s řešením jedné poměrně snadné úlohy z domácího kola 69. ročníku MO (školní rok 2019/20). Úloha pojednává o známém problému, jak zaplatit danou částku pomocí nejmenšího možného počtu bankovek či mincí. Ukážeme si, kdy lze při řešení použít jednoduchý hladový algoritmus a co lze dělat, pokud tento postup použít nemůžeme. Jako obvykle se nejprve seznámíme s přesným zadáním soutěžní úlohy.

* * * * *

Soutěžní úloha

V Kocourkově mají systém platidel velmi podobný našemu. Nejmenší nominální hodnotou je 1 tolar. Existují mince a bankovky s následujícími pěknými, systematicky zvolenými nominálními hodnotami: 1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1 000, 2 000, 5 000, 10 000, 20 000 a 50 000 tolarů.

Kocourkovská centrální banka se rozhodla, že vydá ještě jednu novou bankovku v hodnotě x tolarů. Obyvatelé Kocourkova si nyní kladou řadu otázek tohoto typu: Když budu chtít zaplatit přesně t_i tolarů, kolik nejméně kusů platidel stačí použít?

Formát vstupu a výstupu

Na prvním řádku vstupu je číslo x : nominální hodnota nové bankovky. Na druhém řádku je číslo q : počet otázek, které mají obyvatelé Kocourkova.

Na třetím řádku vstupu jsou mezerami oddělená čísla $t_1, \dots, t_q$: sumy pro jednotlivé otázky. Na výstup vypíšete q řádků: postupně pro každou otázku jeden řádek s příslušnou správnou odpovědí.

Omezení a hodnocení

Vaše řešení bude testováno na pěti sadách vstupních dat, za správné vyřešení každé z nich dostanete dva body. V každé sadě platí $q \leq 50$ a je zaručeno, že x bude různé od nominálních hodnot existujících platidel. V jednotlivých sadách platí následující další omezení:

vstup číslo 1	$x \leq 20$	všechna $t_i \leq 20$
vstup číslo 2	$x = 100\,000$	všechna $t_i \leq 105$
vstup číslo 3	$x \leq 105$	všechna $t_i \leq 105$
vstup číslo 4	$x \leq 107$	všechna $t_i \leq 107$
vstup číslo 5	$x \leq 2.109$	všechna $t_i \leq 2.109$

Příklad

Vstup:	Výstup:
4700	3
4	2
53 9400 9401 30000	3
	2

Nová bankovka má hodnotu 4700 tolarů.

- Nejlepším způsobem, jak zaplatit 53 tolarů, je použít platidla s hodnotami $50 + 2 + 1$.
- Nejlepším způsobem, jak zaplatit 9400 tolarů, je použít dvě nové bankovky.
- Nejlepším způsobem, jak zaplatit 9401 tolarů, je použít dvě nové bankovky a jednu jednotolarovou minci.
- Nejlepším způsobem, jak zaplatit 30000 tolarů, je $10000 + 20000$.

* * * * *

Úlohu nejprve vyřešíme pro původní pravidelnou sadu platidel bez nově přidané bankovky s hodnotou x . Pro optimální zaplacení jakékoliv částky můžeme použít jednoduchý hladový algoritmus. Dokud není celá částka zaplacená, opakujeme tento postup: vždy použijeme největší platidlo, jehož hodnota nepřevýší tu částku, kterou je ještě třeba zaplatit. Jedná se o zcela

přirozený intuitivní postup, který funguje i pro české koruny nebo třeba pro eura. Jeho správnost ale musíme pořádně zdůvodnit.

K důkazu správnosti uvedeného postupu přistoupíme odzadu. Při placení částky menší než 10 tolarů jistě můžeme použít pouze mince s hodnotami 1, 2 a 5 tolarů. Snadno ověříme rozborem všech případů, že hladový algoritmus najde optimální způsob zaplacení každé takové částky. Chceme-li zaplatit částku 10 tolarů nebo vyšší, v jakékoliv optimální platbě budou mince 1, 2 a 5 představovat celkovou sumu nejvýše 9 tolarů. Jinak by totiž bylo možné nahradit část z nich desetitolarovou mincí a tím počet kusů platidel snížit (případně platbu typu $5+2+2+2$ nahradíme pomocí $10+1$, což je také snížení počtu kusů platidel). To znamená, že při optimálním placení jakékoliv částky použijeme mince 1, 2 a 5 pouze k zaplacení „poslední cifry“ této částky. Již víme, že to udělá hladový algoritmus správně. Nyní můžeme zrušit mince 1, 2 a 5 a také smazat poslední cifru placené částky a celou úvahu zopakovat pro další řád a platidla 10, 20 a 50. Situace je tam naprosto stejná. Postupně můžeme takto zpracovat odzadu všechny dekadické řády placené částky a dostáváme tak, že hladový algoritmus funguje i pro desítky, stovky, tisíce a desetitisíce tolarů. Zbývá doplnit, co se stane, když placená částka převýší sto tisíc tolarů. Nejvyšší bankovka má hodnotu 50 000, takže optimální zaplacení každých 100 000 tolarů obsažených ve výsledné sumě jistě získáme pomocí dvou takových nejvyšších bankovek. Přesně to dělá náš hladový algoritmus.

Všimněte si, že popsany hladový algoritmus nemůžeme automaticky použít pro jakoukoliv sadu platidel. O tom se snadno přesvědčíme pomocí dvou konkrétních příkladů. Uvažujme nejprve jednoduchou sadu platidel tvořenou pouze mincemi 1, 3 a 4 tolarů, chceme zaplatit částku 6 tolarů. Výše uvedený hladový algoritmus použije nejprve minci s hodnotou 4 tolarů a pak dvě po 1 tolaru, celkem tedy tři kusy. Toto řešení zjevně není optimální, lepší je použít dvě mince po 3 tolaře. Druhý příklad vychází přímo z naší řešené úlohy. Předpokládejme situaci v Kocourkově popsanou v zadání úlohy, nová bankovka má hodnotu 444 tolarů, chceme zaplatit částku 888 tolarů. Hladový algoritmus najde řešení $500 + 200 + 100 + 50 + 20 + 10 + 5 + 2 + 1$ tvořené devíti platidly, zatímco optimální platbu dostaneme použitím pouze dvou nových 444tolarových bankovek.

Vraťme se nyní k naší úloze. Bylo poměrně snadné vyřešit první dvě testovací sady vstupních dat a získat tak v soutěži za tuto úlohu alespoň část bodů. První sada obsahuje pouze velmi malé hodnoty a můžeme ji

proto vyřešit hrubou silou tak, že vyzkoušíme všechny možnosti placení. Ve druhé sadě nová bankovka s hodnotou x pouze prodlužuje pravidelnou sadu platidel, pro kterou je možné použít jednoduchý hladový algoritmus, který jsme popsali výše.

Ukážeme si, jak vypadá obecné řešení úlohy po přidání nové bankovky s hodnotou x . Důležité je uvědomit si, že nepracujeme s nějakou zcela nepravidelnou sadou platidel, ale s naší pěknou pravidelnou sadou, do níž je pouze přidána jedna „cizí“ hodnota navíc. Kdybychom při placení částky t věděli, kolik kusů bankovky x máme použít, bylo by řešení snadné. Zbývající částku chceme totiž zaplatit optimálním způsobem pomocí pravidelné sady platidel, pro kterou již můžeme použít hladový algoritmus. My sice nevíme, kolik kusů bankovky x je třeba použít, ale můžeme snadno vyzkoušet všechny možnosti (tzn. 0, 1, 2, 3, ...) a vybrat z nich tu nejlepší.

Máme navíc jistotu, že počet zkoumaných možností nebude příliš velký. Bankovku s hodnotou x použijeme určitě méně než 50 000krát. Pokud $x < 50000$, nemůže se vyplatit použít 50 000 kusů bankovky x , neboť místo nich je výhodnější použít x kusů bankovky s hodnotou 50 000. Pokud $x > 50000$, určitě nepoužijeme 50 000 kusů bankovky x , neboť $50000^2 > > 2 \cdot 10^9$ a ze zadání úlohy víme, že všechny zkoumané částky jsou shora omezeny číslem $2 \cdot 10^9$.

Implementace popsaného algoritmu je velmi jednoduchá – vyzkoušíme všechny možnosti pro počet použitých kusů bankovky s hodnotou x a pro každou z nich určíme hladovým algoritmem, jak lze optimálně zaplatit zbývající částku. Z takto získaných možností vybereme to nejlepší. Vhodně přitom omezíme počet zkoumaných možností: při placení částky t nemá smysl zkoušet větší počet bankovek s hodnotou x , než kolika kusy platidel zaplatíme částku t hladově bez použití této přidané bankovky. Bylo by pochopitelně také zbytečné zkoušet větší počet bankovek x , než kolik činí podíl t/x .

program Placeni;

```
var x: longint; {hodnota nové bankovky}
    q: integer; {počet dotazů}
    t: longint; {placená částka}
    pocetx: longint; {počet nových bankovek}
    r: integer; {další možné řešení}
    reseni: integer; {výsledek}
    i: integer;
```

```

function Hladove(t: longint): word;
const platidla: array[1..15] of word
           = (1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500,
              1000, 2000, 5000, 10000, 20000, 50000);
var pocet, i: integer;
begin
  pocet := 0;
  for i:= 15 downto 1 do
    begin
      pocet := pocet + t div platidla[i];
      t := t mod platidla[i]
    end;
  Hladove := pocet
end; {function Hladove}

begin
  readln(x);
  readln(q);
  for i := 1 to q do
    begin
      read(t);
      reseni := Hladove(t);
      pocetx := 1;
      while (pocetx < reseni) and (pocetx * x <= t) do
        begin
          r := pocetx + Hladove(t - pocetx * x);
          if r < reseni then reseni := r;
          pocetx := pocetx + 1
        end;
      writeln(reseni)
    end
  end.

```


Optimalizační problémy a aproximační algoritmy

PETR OSIČKA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Mnoho lidí již řešilo problém nalezení nejkratší cesty mezi dvěma místy. Velmi často, když navštívíme nějaké nové místo, a chceme se dostat k nějaké jeho zajímavé části, například nějaké památce, spustíme na mobilním telefonu aplikaci s mapou a necháme ji najít nejkratší cestu z místa, kde stojíme, do cílového místa. V článku si ukážeme abstraktní problém hledání nejkratších cest v grafu, který zachycuje podstatu problému řešeného mobilní aplikací hledající cestu na mapě. Uvidíme, že tento problém má jasně definovanou strukturu: žádá se v něm, abychom našli objekt s nejmenší cenou z přesně definované množiny objektů. Takovou strukturu má velká skupina algoritmických problémů, takzvané *optimalizační problémy*.

Budeme se věnovat také algoritmům pro optimalizační problémy. Uvidíme, že existují optimalizační problémy, které jsou snadné v tom smyslu, že existuje efektivní algoritmus, který vždy najde optimální řešení. Příkladem takového problému je právě problém nalezení nejkratší cesty v grafu. Existují ovšem i optimalizační problémy, které snadné nejsou. U takových problémů se musíme smířit s tím, že efektivní algoritmus nemůže vždy nalézt optimální řešení. Můžeme se ovšem snažit se optimálnímu řešení co nejvíce přiblížit. Takovému efektivnímu, ale přitom neoptimálnímu algoritmu říkáme *aproximační algoritmus*.

1. Optimalizační problémy

V abstraktní verzi problému vyhledávání nejkratší cesty na mapě hledáme nejkratší cestu mezi dvěma uzly v grafu. *Graf* je matematický objekt, který je tvořen množinou *vrcholů* V a množinou *hran* H , přitom každá z hran je dvojice vrcholů z V . Můžeme jej jednoduše zobrazit tak, že vrcholy namalujeme jako malá kolečka a hrany jako úsečky spojující vždy dvojici koleček, která dané hraně odpovídají. Například graf s vr-

choly $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ a hranami¹⁾

$$H = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{e, f\}, \{d, f\}\} \quad (1)$$

je na obr. 1 (a).

Cesta z vrcholu u do vrcholu v v grafu je posloupnost vzájemně různých vrcholů

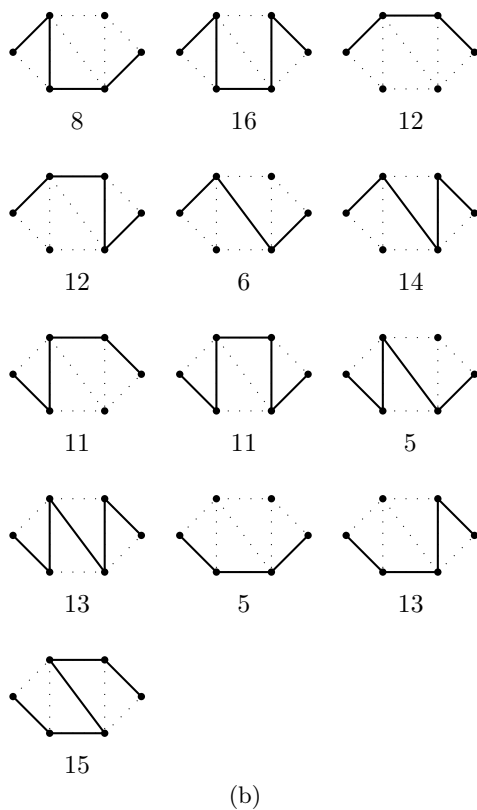
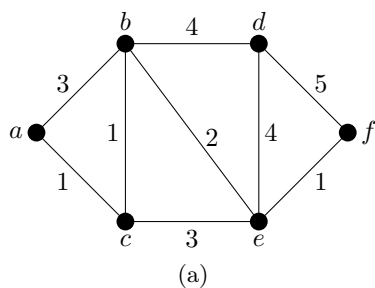
$$u = u_1, u_2, \dots, u_k = v$$

takových, že pro $i = 1, 2, \dots, k - 1$ jsou vždy vrcholy u_i a u_{i+1} spojeny hranou. O takové hraně pak řekneme, že na cestě leží. V našem příkladě je tedy posloupnost a, b, c, e, f cestou z vrcholu a do vrcholu f , ale posloupnost a, c, d, f cestou není, protože mezi vrcholy c a d není hrana. Pro danou dvojici u, v může být v grafu cest z u do v více, případně nemusí existovat žádná. Ve zbytku textu budeme předpokládat, že pro každou dvojici vrcholů existuje v grafu existuje alespoň jedna cesta. Cest z vrcholu a do vrcholu f je v grafu na obr. 1 (a) celkem 13. Můžeme si je prohlédnout na obr. 1 (b).

Jaký je vztah mapy města a grafu? Vrcholy grafu můžeme považovat za místa na mapě města. Hrana mezi dvěma vrcholy grafu pak říká, že mezi místy, která spojuje, můžeme přejít bez projití některým z ostatních míst. Vhodnými kandidáty pro vrcholy pak jsou například křižovatky ulic, významná místa ve městě a podobně, hrany v takovém případě mohou představovat ulice nebo chodníčky v parku. Každé cestě v grafu tedy odpovídá jedna cesta městem. Z mapy lze obvykle vyčíst vzdálenosti mezi jednotlivými místy na mapě. Do grafu tyto vzdálenosti přirozeně zařadíme tak, že tuto vzdálenost přiřadíme k hranám. Uděláme to tak, že zavedeme funkci δ , budeme jí říkat *ohodnocení hran*, která hraně přiřadí kladné racionální číslo. Délku cesty $u_1, u_2, \dots, u_k$ pak spočítáme jako součet ohodnocení hran, které na této cestě leží. Nejkratší cesta na mapě tak odpovídá nejkratší cestě v grafu.

Problém nalezení nejkratší cesty je svou formou podobný velké množině jiných problémů, kterým souhrnně říkáme *optimalizační problémy*. Jsou charakteristické tím, že každý z nich můžeme úplně popsat pomocí následujících čtyř položek.

¹⁾Formálně je pro nás hrana dvojprvková množina vrcholů. Hrana $\{a, b\}$ je tedy stejná jako hrana $\{b, a\}$. Hovoříme-li tedy o hraně z vrcholu a do vrcholu b , myslíme tím i hranu jdoucí z vrcholu b do vrcholu a . Hrany tedy nemají směr (orientaci). Grafy, kde na orientaci hran záleží, existují, nebudeme si jimi ale zabývat.



Obr. 1 (a) Graf s ohodnocením hran. (b) Všechny cesty z vrcholu a do vrcholu f v grafu (a) spolu s jejich délkami. Hrany ležící na cestě jsou vyznačeny tučně.

- **Množina vstupních instancí²⁾**. Popíšeme, jaké objekty považujeme za platné instance problému.
- **Přípustná řešení**. Každé konkrétní instanci přiřadíme množinu tzv. přípustných řešení. Přípustné řešení považujeme za korektní výsledek.
- **Cena přípustného řešení**. Určíme, jak ocenit jednotlivá přípustná řešení. Cenou je vždy racionální číslo.
- **Cíl**. Určíme, zda-li chceme nalézt přípustné řešení s maximální cenou nebo to s minimální cenou. O takových řešeních říkáme, že jsou *optimální*.

Pro problém nalezení nejkratší cesty v grafu je vstupní instance tvořena grafem s ohodnocením hran a počátečním a cílovým vrcholem (například grafem na obrázku 1 (a) a vrcholy a a f tohoto grafu). Množina přípustných řešení je pro konkrétní takovou instanci tvořena všemi cestami z počátečního do cílového vrcholu v daném grafu. Za cenu jedné cesty považujeme její délku. (Množinu přípustných řešení a jejich cen pro náš příklad vidíme na obrázku 1 (b).) Zajímá nás nejkratší cesta, tudíž cílem je najít přípustné řešení s minimální cenou.

Nabízí se následující naivní algoritmus. Pro vstup tvořený grafem G , počátečním vrcholem u a cílovým vrcholem v , nejdříve vygenerujeme všechny cesty v G , které vedou z u do v . Potom spočítáme jejich délky a vybereme tu nejkratší. Například nejkratší cestu z a do f v grafu na obr. 1 (a) nalezneme tak, že namalujeme obr. 1 (b) a na něm najdeme cestu s minimální cenou. Po krátkém zamyšlení ovšem zjistíme, že počet cest mezi dvěma uzly v grafu může s počtem uzlů grafu růst více než polynomiálně a naivní algoritmus má proto příliš velkou časovou složitost, a to i přesto, že velikost jedné cesty (tj. počet vrcholů na cestě) je vzhledem k velikosti grafu (tj. počtu vrcholů grafu) malá.

Podobná úvaha platí pro mnoho praktických a přirozených optimalizačních problémů kombinatorické povahy. Na takové problémy se ve zbytku textu omezíme. Uveďme si proto ještě jednou explicitně, že se zajímáme o problémy, u kterých

- přípustná řešení mají vzhledem k velikosti vstupní instance nejvýše polynomickou velikost,

²⁾Slovem instance označujeme konkrétní vstup algoritmického problému.

- umíme v polynomičtém čase (opět vzhledem k velikosti vstupní instance) spočítat cenu přípustného řešení,
- samotných přípustných řešení může být mnoho a v tom spočívá obtížnost daného problému.

2. Dijkstrův algoritmus

V této kapitole si ukážeme algoritmus, který v polynomičtém čase najde nejkratší cestu v grafu z počátečního do cílového vrcholu. Vstupem algoritmu je graf G s množinou vrcholů V , množinou hran H , ohodnocení hran δ , počáteční vrchol s a cílový vrchol t .

Algoritmus postupně hledá nejkratší cesty z s k ostatním vrcholům v grafu, a tedy speciálně i k vrcholu t . Začíná s prázdnou množinou vrcholů, ke kterým je známa nejkratší cesta, a v každém kroku do této množiny jeden vrchol přidá. Ke každému vrcholu u si algoritmus uchovává dvě položky. Jsou to

- $l(u)$: délka doposud nejkratší nalezené cesty z s do u . Pokud algoritmus ještě žádnou takovou cestu nenalezl, je hodnota rovna ∞ . Připomeňme, že $x + \infty = \infty$ pro každé reálné číslo x a že $\infty + \infty = \infty$.
- $p(u)$: vrchol, který je na doposud nejkratší nalezené cestě z s do u těsně před vrcholem u . Pokud takový vrchol neexistuje (protože algoritmus dosud žádnou cestu nenašel, nebo protože je u prvním vrcholem na cestě), je $p(u)$ rovna $-$.

Množinu vrcholů, ke kterým již algoritmus našel nejkratší cestu, označíme Q a vrchol, ke kterému algoritmus našel nejkratší cestu v aktuálním kroku označíme v . Běh algoritmu na grafu z obrázku 1 (a) je znázorněn na obrázku 2.

DIJKSTRŮV ALGORITMUS

Vstupem je graf G s ohodnocením hran δ , vrcholy s a t .

Výstupem je nejkratší cesta v G z s do t

1. Nastav $l(s) \leftarrow 0$ a $p(s) \leftarrow -$. Pro všechny vrcholy u nerovnající se s nastav $l(u) \leftarrow \infty$ a $p(u) \leftarrow -$.
2. Nastav $Q \leftarrow \emptyset$ a $v \leftarrow s$.

3. Pokud je v vrcholem t , pak pomocí položek $p()$ vrcholů sestav nejkratší cestu z s do v a tu vrať jako výsledek. Vrácená cesta vznikne obrácením posloupnosti

$$t, p(t), p(p(t)), p(p(p(t))), \dots, s.$$

4. Pokud v není vrcholem t , pak pro každý vrchol $u \notin Q$, do kterého vede hrana z vrcholu v , zkontroluj jestli

$$l(v) + \delta(v, u) < l(u).$$

Pokud tomu tak je, nastav

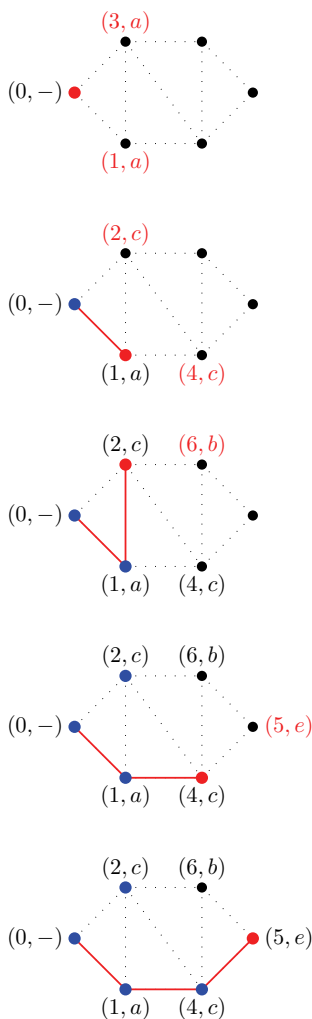
$$\begin{aligned} l(u) &\leftarrow l(v) + \delta(v, u), \\ p(u) &\leftarrow v. \end{aligned}$$

5. Přidej vrchol v do množiny Q .
6. Nastav v na vrchol, který nepatří do Q a který má mezi vrcholy nepatřícími do Q nejmenší položku $l()$.
7. Přejdi k bodu 3.

O Dijkstrově algoritmu můžeme ukázat, že má polynomickou složitost vzhledem k počtu vrcholů grafu, ten označme n . Klíčem je pozorování, že po každém provedení kroku 5 se množina Q zvětší o 1 uzel. Tím vidíme, že kroky 3 až 6 se provedou nejvýše n -krát. Dále si všimneme, že každý z kroků 3 až 6 zabere konstantní násobek n operací, protože v nich procházíme všechny uzly a pro každý z nich provádíme pevný počet operací. Celkově je tedy složitost algoritmu přibližně n^2 .

Lze také dokázat, že Dijkstrův algoritmus vždy vrátí cestu s nejmenší cenou, tedy tu nejkratší. Důkaz je pro účely tohoto textu příliš komplikovaný a proto ho vynecháme. Pro zájemce ale uveďme alespoň jeho nástin. Klíčovým pozorováním je to, že kdykoliv přiřadíme proměnné v nějaký vrchol, nalezneme nejkratší cestu z s do tohoto vrcholu. Toto pozorování lze dokázat matematickou indukcí přes velikost množiny Q , využije se při tom fakt, že ohodnocení hran grafu jsou nezáporná.

Dijkstrův algoritmus je tedy *korektní*, tj. vždy vrací přípustné řešení, a *optimální*, tj. vždy vrací optimální řešení. Pojem korektního a optimálního algoritmu je obecný a můžeme jej přirozeně používat i pro jiné algoritmy a jiné optimalizační problémy.



Obr. 2 Průběh Dijkstrova algoritmu na grafu z obrázku 1 (a). U vrcholů jsou zachyceny položky $l(u)$ a $p(u)$, položky s hodnotou $l(u)$ rovnou ∞ jsou vynechány. Graf je zachycen vždy po provedení bodu 4 algoritmu. Aktuální vrchol v , položky, které se během tohoto kroku změnily, a nejkratší cesta z počátečního vrcholu do v jsou zvýrazněny červeně. Vrcholy patřící do množiny Q jsou zvýrazněny modře. Pro jednoduchost jsou vynechána ohodnocení hran.

3. Obtížné problémy a aproximační algoritmy

V předchozí kapitole jsme viděli, že pro problém nalezení nejkratší cesty v grafu existuje algoritmus s polynomicou složitostí, který najde optimální řešení. Problém nalezení nejkratší cesty v grafu je z tohoto pohledu snadný. V této kapitole si ukážeme, že existují i optimalizační problémy, pro které takový algoritmus zatím neznáme a dokonce věříme, že neexistuje. Takové problémy považujeme za výpočetně obtížné. Nejdříve definujeme rozhodovací problém přidružený optimalizačnímu problému.

Definice 1. Rozhodovací problém Π_{dec} přidružený minimalizačnímu problému³⁾ Π je problém, jehož vstupem je instance I problému Π a racionální číslo k . Úkolem je rozhodnout, jestli existuje přípustné řešení instance I s cenou menší nebo rovnou k .

Například rozhodovací verze problému hledání nejkratší cesty je následující problém: Pro graf G , vrcholu s a t , a číslo k rozhodni, zda-li v G existuje cesta z s do t s cenou nejvýše k .

Algoritmus $\mathcal{A}$, který v polynomicém čase najde optimální řešení optimalizačního problému Π , můžeme použít k vyřešení jeho přidruženého rozhodovacího problému Π_{dec} . Pro instanci (I, k) nejdříve spočítáme pomocí algoritmu $\mathcal{A}$ optimální řešení instance I (připomeňme, že to je instance optimalizačního problému Π), poté spočítáme jeho cenu, porovnáme ji s k a na základě toho odpovíme. Každý z předchozích kroků můžeme provést v polynomicém čase, a proto celý postup můžeme považovat za algoritmus pro Π_{dec} pracující v polynomicém čase. Pokud například chceme vyřešit rozhodovací verzi problému hledání nejkratší cesty v grafu, stačí pomocí Dijkstrova algoritmu nalézt nejkratší cestu, spočítat její délku d a porovnat ji s k . Pokud je $d \leq k$, odpovíme *ano*, v opačném případě odpovíme *ne*. Vidíme tedy, že platí následující věta.

Věta 1. *Pokud pro optimalizační problém Π existuje optimální algoritmus s polynomicou složitostí, pak existuje algoritmus s polynomicou složitostí i pro problém Π_{dec} .*

Důležitým důsledkem předchozí věty je následující tvrzení.

Důsledek 1. *Pokud pro problém Π_{dec} neexistuje algoritmus s polynomicou složitostí, neexistuje ani optimální algoritmus s polynomicou složitostí pro problém Π .*

³⁾Pro maximalizační problém je definice analogická.

Pro mnoho přirozených optimalizačních problémů platí, že jejich rozhodovací verze je NP-úplná. Pokud přijmeme za pravdivou domněnku $P \neq NP$, pak můžeme usoudit, že pro takové problémy neexistuje polynomický algoritmus, který vrací optimální řešení pro každý svůj vstup. Nemůžeme ovšem vyloučit existenci algoritmu s polynomickou složitostí, který sice pro některé vstupy optimální řešení nevrátí, ale cena jím vráceného řešení je ceně optimálního řešení rozumně blízko. Jak uvidíme níže, takové algoritmy skutečně existují. Říkáme jim *aproximační algoritmy*⁴⁾.

Jako příklad obtížného optimalizačního problému si uveďme problém nalezení *minimálního vrcholového pokrytí grafu*, jehož název budeme zkracovat jako Min-VC.⁵⁾ Vstupem problému je neorientovaný graf G s množinou vrcholů V a množinou hran H . Pro množinu vrcholů $C \subseteq V$ a hranu $h \in H$ řekneme, že h je *pokrytá* C (případně že C pokrývá h), pokud alespoň jeden z vrcholů h (připomeňme, že hranu chápeme jako množinu dvou vrcholů) patří do C . O množině C řekneme, že je vrcholovým pokrytím grafu, pokud pokrývá každou hranu v H . Množinou přípustných řešení grafu G je množina všech jeho vrcholových pokrytí. Cenou pokrytí C je počet vrcholů, které obsahuje. Cílem je, jak napovídá název problému, nalézt pokrytí s nejmenší cenou (tedy s nejmenším počtem vrcholů). Příklad grafu, několika jeho vrcholových pokrytí a několika množin vrcholů, která vrcholovým pokrytím nejsou, znázorňuje obr. 3.

Problém Min-VC má mnoho praktických aplikací v různých oblastech (např. výpočetní biologie, chemie, metalurgické inženýrství). Abychom viděli jednoduchý příklad, představme si, že chceme pokrýt vnitřní prostory budovy kamerami tak, abychom mohli sledovat všechny chodby na budově. Přitom chceme použít kamer co nejméně. Přirozeným místem pro kamery jsou křížení chodeb. Pokud tedy v grafu, kde vrcholy odpovídají křížení chodeb a hrany chodbám samotným, najdeme optimální vrcholové pokrytí, našli jsme optimální rozmístění kamer.

Uveďme aproximační algoritmus pro Min-VC. Příklad běhu tohoto algoritmu je znázorněn na obrázku 3 (c).

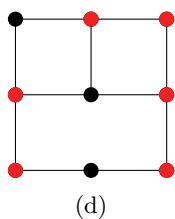
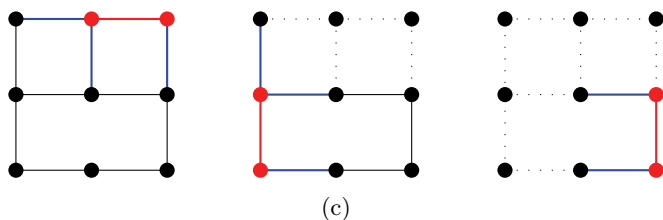
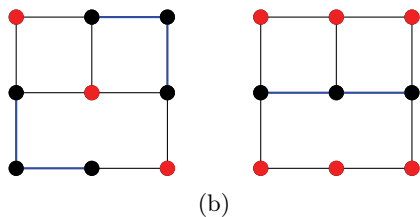
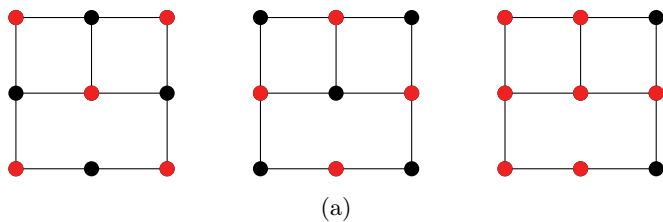
MIN-VC-APPROX

Vstupem je graf $G = (V, H)$.

Výstupem je vrcholové pokrytí G .

⁴⁾Jméno je převzato z anglického výrazu approximation algorithms.

⁵⁾Zkratka anglického *minimal vertex cover*.



Obr. 3 (a) Vrcholová pokrytí grafu. Vrcholy patřící do pokrytí jsou zvýrazněny červeně. Obrázek nezachycuje všechna vrcholová pokrytí grafu, pouze některá. (b) Množiny vrcholů, které netvoří vrcholová pokrytí. Nepokryté hrany (tj. hrany, které nemají žádný červený vrchol) jsou zvýrazněny modře. (c) Průběh algoritmu Min-VC-approx. Červeně je zobrazena hrana h a její uzly vybrané v kroku 2. Modře jsou zvýrazněny hrany, které jsou v kroku 4 odstraněny spolu s hranou h . (d) Vrcholové pokrytí, které výsledkem.

1. Nastav $C \leftarrow \emptyset$ a $E \leftarrow H$.
2. Pokud je množina E prázdná, vrať C jako výsledek algoritmu a skonči.
3. Vyber hranu $h \in E$ a přidej její vrcholy do C .
4. Z množiny E odstraň hranu h a všechny hrany, které s h sdílejí vrchol.
5. Přejdi na krok 2.

Algoritmus během svého běhu udržuje množinu C vrcholů, o kterých už víme, že patří do pokrytí (na začátku je tato množina prázdná), a množinu E hran, které nejsou pomocí C pokryty (na začátku to jsou všechny hrany). V kroku 3 vždy vybere nějakou dosud nepokrytou hranu h . Tu pokryje tak, že do množiny C přidá její vrcholy. Tím pádem C pokrývá jak h , tak všechny hrany, které s h sdílejí vrchol. Proto takové hrany v kroku 4 odstraníme z E . Opakování kroků 2 až 4 končí v momentě, kdy je množina nepokrytých hran prázdná (to testujeme v kroku 2), a C je tak vrcholovým pokrytím. Vidíme také, že kroky 2 až 4 se zopakují nejvýše tolikrát, kolik je v grafu hran. Protože počet hran v grafu s n uzly je menší než n^2 a protože jedno opakování kroků 2 až 4 lze provést v čase polynomicím⁶⁾ vzhledem k n , je složitost tohoto algoritmu polynomicí. Vidíme tedy, že MIN-VC-APPROX je korektní algoritmus pro problém Min-VC s polynomicí složitostí.

Vraťme se ještě ke kroku 3 algoritmu. Není v něm přesně určeno, kterou hranu z množiny E máme vybrat. Mohlo by se zdát, že zde není algoritmus popsán dostatečně přesně. Je tomu skutečně tak. Pro jednoduchost jsme vynechali to, jak konkrétně v algoritmu reprezentujeme množiny E a C , a díky tomu jsme v kroku 3 výběr hrany neupřesnili. Pro konkrétní implementaci to ovšem udělat musíme. Pokud například množinu E uchováváme jako lineární seznam, zvolíme jako h v kroku 3 první prvek tohoto seznamu. V dalších úvahách o algoritmu se s touto nepřesností vypořádáme tak, že pro výběr h v kroku 3 připustíme jakoukoliv možnost⁷⁾.

Na obr. 3 je vidět, že algoritmus nevrátil optimální řešení. Můžeme se zabývat velmi přirozenou otázkou: Jak moc se cena řešení vráceného

⁶⁾Přesná složitost závisí na konkrétní implementaci množin E a H a algoritmech pro přidávání a odebrání prvků těchto množin.

⁷⁾Můžeme se velmi rychle přesvědčit o tom, že pokud v kroku 3 zvolíme jiné hrany, než které jsme zvolili na obrázku 3 (c), může algoritmus vrátit zcela jiné vrcholové pokrytí.

MIN-VC-APPROX může lišit od ceny optimálního řešení? Odpověď na tuto otázku dává následující věta.

Věta 2. *Vrcholové pokrytí, které vrátí algoritmus MIN-VC-APPROX, obsahuje nejvýše dvakrát více vrcholů než optimální pokrytí.*

Důkaz. Označme A množinu všech hran, které jsme v kroku 3 algoritmu přiřadili do h . Protože algoritmus dává do pokrytí vždy oba vrcholy hrany h , platí $|C| \leq 2 \cdot |A|$. Současně ale díky kroku 4 nemůže množina A obsahovat dvě hrany, které spolu sdílí nějaký vrchol. Platí tedy

$$|C| = 2 \cdot |A|. \quad (2)$$

Libovolné vrcholové pokrytí, a speciálně i to optimální vrcholové pokrytí, musí určitě pokrýt hrany z množiny A , každou z nich alespoň jedním vrcholem. Odtud

$$|A| \leq \text{OPT}, \quad (3)$$

kde OPT je počet vrcholů v optimálním vrcholovém pokrytí. Pokud dosadíme nerovnici (3) do rovnice (2) dostaneme

$$|C| \leq 2 \cdot \text{OPT}$$

a vidíme, že věta platí. $\square$

Předchozí věta ukazuje na algoritmu MIN-VC-APPROX obecnou vlastnost aproximačních algoritmů, které říkáme *aproximační faktor*. Zavedme si tento pojem přesněji. Předpokládejme, že máme algoritmus $\mathcal{A}$ pro minimalizační⁸⁾ problém Π . Aproximační faktor algoritmu $\mathcal{A}$ pro instanci I označíme $f_{\mathcal{A}}(I)$ a definujeme jako

$$f_{\mathcal{A}}(I) = \frac{\text{cost}(\mathcal{A}(I))}{\text{OPT}(I)},$$

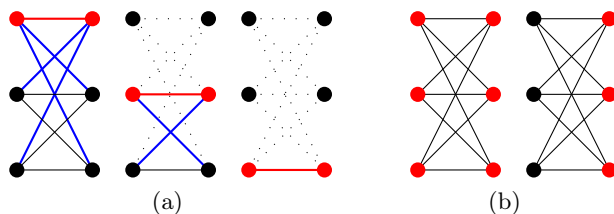
kde $\text{cost}(\mathcal{A}(I))$ je cena řešení, které vrátí algoritmus $\mathcal{A}$ pro instanci I , a $\text{OPT}(I)$ je cena optimálního řešení pro instanci I .

Definice 2. *Aproximační faktor algoritmu $\mathcal{A}$ je funkce $R_{\mathcal{A}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definovaná $R_{\mathcal{A}}(n) = \max\{f_{\mathcal{A}}(I) \mid |I| = n\}$.*

⁸⁾Pro maximalizační problémy je definice analogická.

Abychom ukázali, že algoritmus MIN-VC-APPROX má aproximační faktor $R(n) = 2$, musíme najít instanci, pro kterou algoritmus MIN-VC-APPROX vrátí pokrytí s dvakrát více vrcholy než pokrytí optimální. Z věty 2 totiž její existence neplyne. Naštěstí není pro MIN-VC-APPROX obtížné takové instance najít. Jsou to úplné bipartitní grafy.

Úplný bipartitní graf s $2n$ vrcholy ($n = 1, 2, \dots$), označme ho K_n , je takový graf, jehož uzly můžeme rozdělit do dvou disjunktních množin, V_1 a V_2 , tak, že každá z nich má n vrcholů, každý vrchol z množiny V_1 je spojen hranou s každým vrcholem z množiny V_2 a graf žádné jiné hrany neobsahuje (graf K_3 vidíme na obr. 4).



Obr. 4 (a) Průběh algoritmu MIN-VC-APPROX pro graf K_3 . Aktuálně vybraná hrana je zobrazena červeně, hrany, které s ní sdílejí uzel modře. (b) Vlevo je vrcholové pokrytí spočtené algoritmem MIN-VC-APPROX, vpravo optimální pokrytí. Vrcholy zařazené do pokrytí jsou zobrazeny červeně.

Prozkoumáme-li běh algoritmu pro K_n , zjistíme, že po prvním provedení kroků 3 a 4 nám nutně zůstane, uvážíme-li hrany z množiny E a vrcholy, které nejsou v C , graf K_{n-1} . Po dalším provedení těchto kroků graf K_{n-2} , a tak dále. Celkem tedy kroky 3 a 4 provedeme n -krát. Přitom vždy přidáme do C dva vrcholy, algoritmus proto vrátí pokrytí s $2n$ vrcholy, tedy množinu všech vrcholů v grafu. Optimální vrcholové pokrytí přitom má pouze n vrcholů, tvoří jej totiž libovolná z množin V_1 a V_2 . Po krátké úvaze zjistíme, že pokrytí s menším počtem vrcholů v grafu neexistuje. Pro graf K_3 situaci ilustruje obr. 4.

Literatura

- [1] Vazirani, V. V.: Approximation algorithms. Springer Verlag, 2003.
- [2] Williamson, D. P., Shmoys, D. B.: The design of approximation algorithms. Cambridge University Press, Cambridge, 2011. Dostupné na: <http://www.designofapproxalgs.com/>

ZPRÁVY

Ústřední kolo 69. ročníku MO (kategorie P)

Ústřední kolo 69. ročníku Matematické olympiády kategorie P se mělo konat v Teplicích ve dnech 25.–27. března 2020, jako obvykle v přímé návaznosti na ústřední kolo MO kategorie A. Ochranná vládní opatření vyhlášená v souvislosti s epidemií koronaviru ovšem neumožnila již připravené ústřední kolo uskutečnit. Organizátoři MO kategorie P se proto rozhodli nahradit ho letos mimořádně on-line soutěží, která proběhla v původně stanoveném termínu, s původně připravenými soutěžními úlohami a podle stejných pravidel, jakými se podle Organizačního řádu MO řídí i řádné ústřední kolo MO-P.

Soutěž jsme uspořádali v úzké koordinaci s našimi slovenskými kolegy z Fakulty matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislavě, takže stejná on-line soutěž nahrazující ústřední kolo olympiády se konala zároveň i na Slovensku. Naši spolupracovníci z Bratislavy připravili společné soutěžní úlohy pro celý letošní ročník MO kategorie P, v této činnosti se s nimi pravidelně střídáme. Na přípravě a zajištění soutěže se podíleli pracovníci a studenti z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, kteří se postarali o české překlady soutěžních úloh, opravování a vyhodnocení odevzdaných řešení a přípravu soutěžního prostředí pro prakti-

kou část soutěže. V praktické části jsme využili soutěžní systém CMS, který se používá i při mezinárodních informatických olympiádách. Soutěžící s tímto systémem komunikují prostřednictvím webového rozhraní, mohou klást dotazy k úlohám, odevzdávat svá vypracovaná řešení soutěžních úloh a zpětně se také dozvídají, jak byla jejich odevzdaná řešení ohodnocena.

V 69. ročníku Matematické olympiády kategorie P jsme pozvali do ústředního kola přesně 30 nejlepších úspěšných řešitelů krajských kol. Největší zastoupení měla Praha s devíti soutěžícími a Jihomoravský kraj s osmi účastníky, z nichž dokonce sedm studuje na stejné škole – na gymnáziu na tř. Kpt. Jaroše v Brně. Postup do ústředního kola si vybojovali studenti celkem z osmi krajů. Letošní zajímavostí bylo, že plných 23 ze 30 postupujících byli studenti z nematuritních ročníků, pouze sedm soutěžících bylo maturantů. V minulých letech tvořili maturanti obvykle asi polovinu všech soutěžících. Potěšilo nás, že všech 30 studentů postupujících do ústředního kola MO-P přijalo účast v on-line soutěži.

V prvním soutěžním dnu studenti řešili ve vymezeném čase 5 hodiny tři teoretické úlohy. Tato část soutěže má podobný charakter jako krajské kolo, zadané soutěžní úlohy jsou zaměřeny na návrh efektivních algoritmů. Jedna z úloh již tradičně využívá nějaký neobvyklý výpočetní model, který je za-

veden pro celý ročník soutěže již v domácím kole a každý rok je jiný. Letošní model byl věnován problematice efektivitu algoritmů s exponenciální časovou složitostí. Soutěžící mohli napsat řešení úloh přímo na počítači a odevzdat je jako soubory ve formátu pdf, nebo mohli řešení napsat rukou na papír a odeslat potom jejich scany či fotografie pořízené mobilní telefonem.

Druhý soutěžní den bývá vždy praktický a probíhá obdobně, jako jsou organizovány i mezinárodní středoškolské olympiády v informatice. I ve druhém soutěžním dnu měli studenti 5 hodin času na vyřešení tří zadaných úloh. Řešení praktických úloh je třeba dovést až do podoby odladěných, plně funkčních programů, letos bylo možné používat programovací jazyky C, C++, Pascal, Python nebo Java. Odevzdané programy jsou průběžně testovány pomocí připravených vstupních dat. Hodnotí se nejen správnost, ale vzhledem k nastaveným časovým limitům také rychlost výpočtu. V bodovém hodnocení lze díky tomu odlišit kvalitu různých řešení z hlediska časové složitosti použitého algoritmu. Řešitelé se hned po odevzdání dozvídají ohodnocení svých řešení, mají možnost řešení opravit a odevzdat je opakovaně vícekrát.

Každá soutěžní úloha je hodnocena nejvýše 10 body, celkem tedy mohli soutěžící získat maximálně 60 bodů. Podle součtu dosažených bodů z obou soutěžních dnů dohromady se stanoví výsledné pořadí. Pomocná pravidla slouží k určení vzájemného pořadí těch soutěžících, kteří získali stejný počet bodů. V souladu s Organizačním řádem Matematické olympiády se stali

úspěšnými řešiteli ti studenti, kteří se umístili na prvních čtrnácti místech celkového pořadí. Šest nejlepších z nich bylo vyhlášeno vítězi.

Výsledky online soutěže nahrazující ústřední kolo 69. ročníku Matematické olympiády kategorie P:

Vítězové:

1. Jiří Kalvoda, 7/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 52 bodů
2. Jonáš Havelka, 8/8, G, Jírovcova, České Budějovice, 48 bodů
3. Ondřej Sladký, 7/8, G, Mikulášské nám., Plzeň, 47 bodů
4. Karel Chwistek, 3/4, Mendelovo gymnázium, Opava, 45 bodů
5. Adam Blažek, 7/8, G, Mikulášské nám., Plzeň, 43 bodů
6. Václav Janáček, 7/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 43 bodů

Úspěšní řešitelé:

7. Viktor Fukala, 7/8, G Jana Keplera, Praha 6, 40 bodů
8. Jan Kaifer, 4/4, G Jana Keplera, Praha 6, 40 bodů
9. Michal Pácal, 8/8, G Jiřího z Poděbrad, Poděbrady, 34 bodů
10. Jan Adámek, 7/8, G Jana Keplera, Praha 6, 33 bodů
11. Magdaléna Mišinová, 7/8, G Jana Keplera, Praha 6, 32 bodů
12. Vladimír Chudý, 3/4, G J. Ressela, Chrudim, 26 bodů
13. Petr Chotěborský, 7/8, G Václava Beneše Třebízského, Slaný, 22 bodů
14. Dominik Farhan, 7/8, G, Mikulášské nám., Plzeň, 22 bodů

Ostatní účastníci: Šimon Brecher, 7/8, G Jana Keplera, Praha 6, 20 b., Kateřina Matulová, 7/8, G, Brno-

Řečkovice, 20 b., Michal Kodad, 4/4, Smíchovská SPŠ, Praha 5, 18 b., Jindřich Matuska, 7/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 18 b., Klára Pernicová, 7/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 17 b., Adéla Heroudková, 6/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 14 b., Jiří Kvapil, 6/8, G, Olomouc-Hejčín, 14 b., Zdeněk Pezlar, 6/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 14 b., Robert Gemrot, 7/8, G, Komenského, Havířov, 13 b., Jakub Ambroz, 8/8, G, Jírovcova, České Budějovice, 12 b., Jana Bušová, 6/8, G, tř. Kpt. Jaroše, Brno, 12 b., František Kmječ, 8/8, G, J. S. Machara, Brandýs nad Labem, 12 b., Štěpán Konšel, 3/4, G, Arabská, Praha 6, 7 b., Darian Poljak, 7/8, G J. Škody, Přerov, 7 b., Lucie Vomelová, 8/8, G, Špitálská, Praha 9, 7 b., Jakub Kučera, 3/4, G, Arabská, Praha 6, 5 b.

Podrobné informace o celém 69. ročníku MO kategorie P, kompletní výsledková listina, texty soutěžních úloh a jejich vzorová řešení jsou k dispozici na adrese <http://mo.mff.cuni.cz/>. Na stejném místě se můžete seznámit i se staršími ročníky této soutěže a také se všemi aktuálními informacemi týkajícími se kategorie P Matematické olympiády.

Pavel Töpfer

9. evropská dívčí matematická olympiáda

Devátý ročník Evropské dívčí matematické olympiády (EGMO) se uskutečnil ve dnech 15.–21. dubna 2020. Vzhledem k probíhající pandemii covid-19 nizozemští organizátoři

zvažovali několik možností, nakonec soutěž uspořádali v původním termínu virtuálně. Podle možností jednotlivých zemí se buď týmy ve své zemi sešly na jednom místě, kde soutěž řešily pod dohledem vedoucích, nebo (jako v případě České republiky) účastnice řešily soutěž doma pod dohledem dospělého dohlázeatele. Soutěže se zúčastnilo 203 zákyň z 53 zemí pěti kontinentů, mezi nimi bylo 39 evropských států.

České reprezentační družstvo středoškolaček bylo sestaveno na základě výsledků krajského kola kategorie A 69. ročníku po centrální koordinaci. Vzhledem k loňské situaci, kdy se kvůli termínu maturit nemohly soutěže zúčastnit žádně maturitních ročníků, nebylo velkým překvapením, že čtveřice účastnic letošního ročníku byla stejná jako loni. Místa v reprezentaci si vybojovaly: *Adéla Heroudková* (6/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše), *Magdaléna Mišinová* (7/8, G J. Keplera, Praha 6), *Michaela Svatošová* (8/8, G M. Koperníka, Bílovec) a *Adéla Karolína Žáčková* (6/8, G Ch. Dopplera, Praha 5). Vedoucím české delegace byli *doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.*, z MFF UK v Praze a *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.*, z PřF UP v Olomouci.

Absolutní vítězkou soutěže se stala *Amina Abu Shanab* z Rumunska. Naším reprezentantkám se podařilo zopakovat velmi dobré loňské výsledky. *Magdaléna Mišinová* obhájila v této prestižní soutěži loňskou zlatou medaili, což v celkovém pořadí znamenalo (děleně) 7. místo absolutně a (děleně) 6. místo mezi evropskými účastnicemi (vloni 8. resp. 7.). Zbylé reprezentantky stejně jako vloni obsadily místa

těsně pod hranicí bronzové medaile. Nejlepší z nich byla *Michaela Svatošová*, která získala dělené 113. místo absolutně, 83. v Evropě, a navíc obdržela čestné uznání za úplné řešení alespoň jedné úlohy (vloni 130 resp. 94. a ČU), stejné místo obsadila také *Adéla Karolína Žáčková*, ovšem již bez čestného uznání (vloni 137. resp. 99. a ČU). Oběma chyběl k zisku bronzové medaile jediný bod stejně jako vloni *Aděle Heroudkové*, která se letos umístila na 146. místě absolutně a 105. mezi Evropankami (vloni 113. resp. 81. a ČU). V oficiálním pořadí zemí tak Česká republika získala 19. místo absolutně, což znamenalo 14. místo mezi evropskými zeměmi, a nepatrně tak vylepšila loňské umístění (22. resp. 16.). Vítězkami v pořadí zemí se letos staly ruské žákyně. Podrobnější informace o výsledcích soutěže najdete v [oficiální výsledkové listině](https://www.egmo.org/egmos/egmo9/scoreboard/) (<https://www.egmo.org/egmos/egmo9/scoreboard/>).

Vzhledem k pandemii připravili nizozemští organizátoři pro soutěžící bohatý virtuální program, kterého se všichni mohli zúčastnit pomocí aplikací na sociálních sítích. Nechyběl v něm ani tradiční tradiční nástup zemí, ani závěrečný ceremoniál, mimo to obsahoval spoustu diskusních míst, her a prohlídek významných nizozemských atrakcí.

Na závěr uvádíme zadání všech šesti soutěžních úloh, jejichž oficiální řešení (v angličtině) najdete na:

<https://www.egmo.org/egmos/egmo9/solutions.pdf>.

První soutěžní den

1. Přirozená čísla $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ splňují

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n$$

pro $n = 0, 1, 2, \dots, 3028$. Dokažte, že aspoň jedno z čísel $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{3030}$ je dělitelné 2^{2020} .

2. Najděte všechny posloupnosti $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$ nezáporných reálných čísel splňující současně následující tři podmínky:

- (i) $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{2020}$;
- (ii) $x_{2020} \leq x_1 + 1$;
- (iii) existuje taková permutace $(y_1, y_2, \dots, y_{2020})$ posloupnosti $(x_1, x_2, \dots, x_{2020})$, že

$$\sum_{i=1}^{2020} ((x_i + 1)(y_i + 1))^2 = 8 \sum_{i=1}^{2020} x_i^3.$$

Permutace posloupnosti je posloupnost téže délky se stejnými členy, které však mohou být v libovolném pořadí. Například $(2, 1, 2)$ je permutací $(1, 2, 2)$ a obě jsou permutacemi posloupnosti $(2, 2, 1)$. Speciálně, každá posloupnost je permutací sebe sama.

3. Nechť $ABCDEF$ je konvexní šestiúhelník splňující

$$|\sphericalangle FAB| = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle DEF|,$$

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CDE| = |\sphericalangle EFA|$$

a ve kterém osy vnitřních úhlů u vrcholů A, C a E procházejí týmž bodem. Dokažte, že také osy vnitřních úhlů u vrcholů B, D a F procházejí společným bodem.

Zde $|\sphericalangle FAB|$ značí velikost úhlu FAB . Podobně jsou značeny velikosti ostatních vnitřních úhlů šestiúhelníka.

Druhý soutěžní den

4. Permutace celých čísel $1, 2, \dots, m$ se nazývá *svěží*, právě když neexistuje žádné přirozené číslo $k < m$ takové, že prvních k členů permutace je $1, 2, \dots, k$ v nějakém pořadí.

Nechť f_m je počet svěžích permutací celých čísel $1, 2, \dots, m$. Dokažte, že pro všechna $n \geq 3$ platí nerovnost

$$f_n \geq n \cdot f_{n-1}.$$

Například pro $m = 4$ je permutace $(3, 1, 4, 2)$ svěží, zatímco permutace $(2, 3, 1, 4)$ svěží není.

5. Uvažujme trojúhelník ABC v němž $|\angle BCA| > 90^\circ$. Kružnice Γ opsaná trojúhelníku ABC má poloměr R . Uvnitř úsečky AB leží takový bod P , že $|PB| = |PC|$ a délka úsečky PA je R . Osa úsečky PB protíná Γ v bodech D a E . Dokažte, že bod P je

středem kružnice vepsané trojúhelníku CDE .

6. Buď $m > 1$ přirozené číslo. Posloupnost $a_1, a_2, a_3, \dots$ je definována takto: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 4$ a pro všechna $n \geq 4$ platí

$$a_n = m(a_{n-1} + a_{n-2}) - a_{n-3}.$$

Určete všechna přirozená čísla m , pro která jsou všechny členy posloupnosti druhými mocninami přirozených čísel.

Více informací najdete na oficiálních stránkách soutěže

<https://www.egmo.org/>

a na stránkách letošního ročníku

<https://egmo2020.nl/>.

Příští ročník soutěže se bude konat v gruzínském městě Kutaisi.

Pavel Calábek



EGMO **VIRTUAL**
Netherlands | 2020
European Girls' Mathematical Olympiad

MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách

Ročník XXIX (2020)

MATEMATIKA

T. Riemel, J. Švrček: Polynomicko-exponenciální diofantovské rovnice (s. 1) – *J. Staněk*: Úlohy diskrétní pravděpodobnosti (s. 7) – *Č. Kodejška*: Přibližná trisekce úhlu užitím geometrické posloupnosti (s. 18) – *Š. Arslanagić*: Tři důkazy jedné trigonometrické nerovnosti (s. 81) – *L. Beldík, J. Příbyl*: Úlohy inspirované origami (s. 87) – *P. Leischner*: Jednoduchý planimetr (s. 99) – *M. Chodorová, L. Juklová*: Pravidelný sedmnáctiúhelník (s. 161) – *L. Spíchal*: Reprodukční potenciál aneb když se hraboš přemnoží (s. 171) – *S. Lukáč*: Hodnotiace prostriedky na formatívne hodnotenie vo vyučovaní matematiky (s. 181) – *Š. Arslanagić, D. Zubović*: Nerovnosti pro délky těžnic v trojúhelníku (s. 241) – *L. Spíchal*: O mincích a invariantech (s. 245) – *J. Polák*: Didaktika matematiky v 21. století a realita výuky (s. 256) – Zajímavé matematické úlohy (s. 21, 109, 197, 276)

FYZIKA

E. Svoboda, O. Lepil, B. Rothanzl: Přehled PLUS: Elektronický doplněk k Přehledu středoškolské fyziky (s. 25) – *B. Vybíral*: Ohlédnutí za obdobím heuristického poznávání ve fyzice (s. 32) – *J. Válek*: VPython/GlowScript Trinket ve výuce fyziky (s. 44) – *A. Veselá, M. Křížová*: Historické pokusy v současné škole (s. 112) – *J. Toušková, J. Toušek*: Sluneční energie a fotovoltaika (s. 121) – *O. Lepil*: Rezonanční křivka – portrét oscilátoru (s. 201) – *J. Kadaňka*: Odvození 1. kosmické rychlosti (s. 213) – *Z. Pucholt*: Počítačové simulace PhET ve výuce fyziky na gymnáziu (s. 219) – *O. Lepil*: Fázový portrét oscilátoru (s. 280)

INFORMATIKA

L. Spíchal: Superelipsa a superformule (s. 54) – *P. Töpfer*: Nejlevnější vaření (Úlohy z MO kategorie P, 39. část) (s. 69) – *E. Bartl*: Počítačová grafika, 1. část (s. 138) – *J. Sedláček, T. Pitner*: Kyberbezpečnost a informační bezpečnost na středních školách (s. 149) – *J. Sedláček, T. Pitner*: Juniorní centra excelence pro informační bezpečnost (s. 230) – *P. Töpfer*: Optimální způsob placení (Úlohy z MO kategorie P, 40. část) (s. 298) – *P. Osíčka*: Optimalizační problémy a aproximační algoritmy (s. 303)

ZPRÁVY

J. Švrček: 13. středoevropská matematická olympiáda (s. 78) – *B. Vybíral, J. Kříž*: Præmium Bohemiæ 2019 mladým přírodovědcům (s. 154) – *L. Richterek*: Celostátní kolo FO 2020 (s. 238) – *P. Töpfer*: Ústřední kolo 69. ročníku MO (kategorie P) (s. 316) – *P. Calábek*: 9. evropská dívčí matematická olympiáda (s. 318)