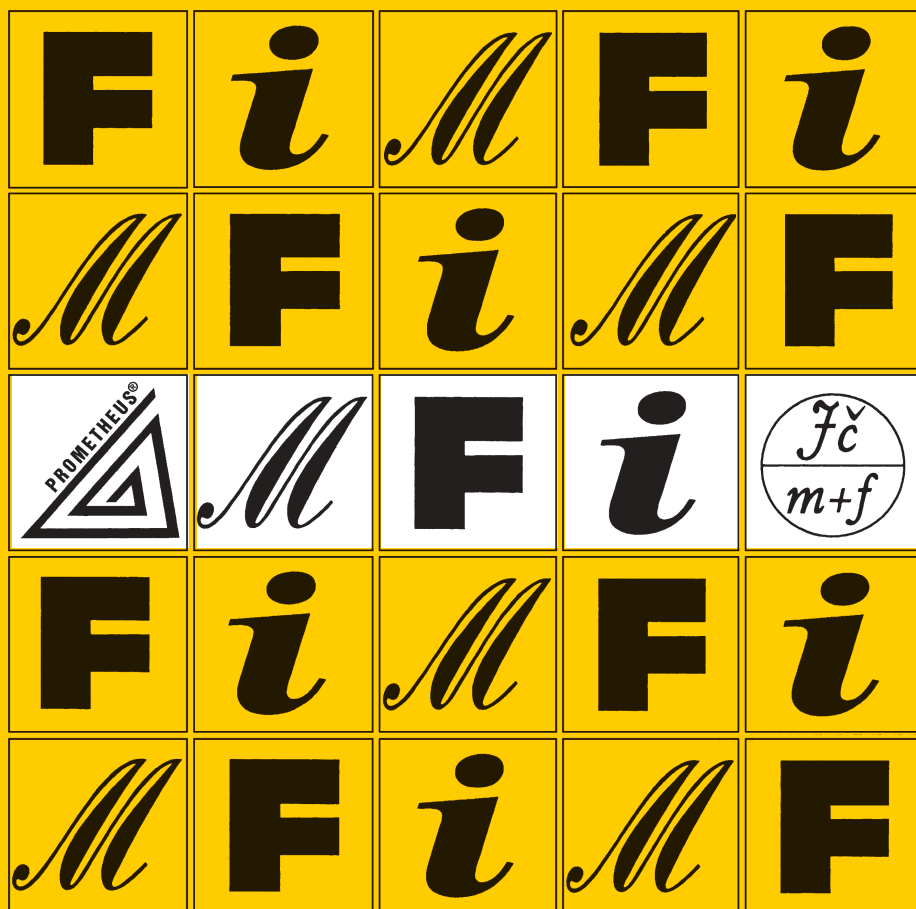


MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA

1

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



ÚVODNÍK

Časopis MFI vychází již 30 let

Zahajujeme 30. ročník časopisu *Matematika – fyzika – informatika*, který se po zániku časopisu *Matematika a fyzika ve škole* podařilo v roce 1991 uvést do života. Nový časopis tím navázal na dvacetiletou tradici svého předchůdce. Oba časopisy tak slouží odborné veřejnosti a učitelům základních a středních škol již celou polovinu století.

Při vzniku MFI se ukázala aktuální potřeba rozšířit obsahovou skladbu časopisu ještě o novou vzdělávací oblast – informatiku. Je samozřejmé, že pro konstituování nového periodika by jenom úsilí redaktorů a redakční rady časopisu zdaleka nestačilo. Proto je třeba připomenout, že rozhodující podíl na vzniku časopisu MFI měla tehdejší redakce matematiky a fyziky SPN, ze které se v roce 1993 konstituovalo dnešní úspěšné nakladatelství Prometheus, spol. s r. o., zaměřené především na vydávání učebnicové literatury pro výuku matematiky a fyziky. Právě podpora nakladatelství Prometheus, jeho vedení a redaktorů je stále základem třicet let budované tradice MFI.

Počátky časopisu byly velmi skromné. V prvním ročníku MFI (1991/92) vyšlo jen pět čísel po 48 tiskových stranách. Postupně se však podařilo rozsah časopisu zvětšovat až na 10 čísel s 64 tiskovými stranami. Je samozřejmé, že koncepci časopisu ovlivnily i současné publikační technologie a od 22. ročníku (2013) se časopis přeměnil na internetové periodikum volně přístupné všem zájemcům. I když v současnosti časopis vychází jako čtvrtletník o celkovém rozsahu 320 tiskových stran, webové stránky MFI jsou doplňovány o různé přílohy a další informace užitečné pro učitele. Díky umístění časopisu na web můžeme konstatovat i větší zájem o časopis v zahraničí, o čemž svědčí několik tisíc přístupů na stránky časopisu.

Jubileum časopisu je také příležitostí připomenout podíl kolegů, kteří stáli u zrodu časopisu, ale bohužel nás již opustili. Podobu časopisu od 1. ročníku pomáhali vytvořit především jeho redaktori, redaktor pro matematiku *RNDr. Stanislav Židek* (1934–2001) a redaktor pro informatiku *doc. RNDr. Stanislav Trávníček, CSc.* (1935–2017).

Časopis má poměrně stabilní okruh autorů, kteří zajišťují pestrost a vyváženost obsahu s ohledem na aktuální problémy vzdělávání v titulních oblastech

MFI. Vzhledem k tomu, že Rada pro výzkum, vývoj a inovace zařadila časopis na seznam recenzovaných periodik vydávaných v České republice, lze příspěvky v MFI uplatnit jako součást výsledků výzkumu a vývoje podporovaného z veřejných prostředků. Trvá spolupráce s Jednotou českých matematiků a fyziků a MFI plní funkci alternativního členského časopisu sekcí JČMF – Společnosti učitelů matematiky a Fyzikální pedagogické společnosti.

I když tradičním časopisům stále více konkurují nejrůznější elektronické informační zdroje, je redakce MFI a jeho redakční rada přesvědčena, že časopis budou učitelé i nadále považovat za užitečného pomocníka a že s časopisem budou spolupracovat nejen jako jeho čtenáři, ale i jako autoři, kteří svými příspěvky napomohou k plnění cílů, pro něž byl časopis před třiceti lety vytvořen.

Oldřich Lepil, předseda redakční rady MFI



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXX (2021), číslo 1

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku
Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek
Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška, Michaela Křížová, Miluše Lachmannová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil (předseda redakční rady), Dana Mandíková, Oldřich Odvárko, Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel Töpfer

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>T. Zdražil: Peer instruction a výuka podobnosti</i>	1
<i>J. Blažek: Čtyři důkazy Heronova vzorce</i>	18
<i>L. Juklová, J. Švrček: Užitečná dvojice kružnic</i>	27
<i>Zajímavé matematické úlohy</i>	32

FYZIKA

<i>D. Mandíková, V. Tomášek: Výsledky českých žáků ve výzkumu TIMSS 2019</i>	37
--	----

INFORMATIKA

<i>R. Bělohávek: Výuka v době koronavirových restrikcí</i>	55
<i>E. Bartl: Knuthovy vánoční stromky</i>	59

ZPRÁVY

<i>P. Töpfer: Mezinárodní olympiády v informatice v roce 2020</i>	74
<i>M. Hykšová: 39. mezinárodní konference Historie matematiky</i>	79

Peer instruction a výuka podobnosti

TOMÁŠ ZADRAŽIL

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Cesta k peer instruction

Roku 1984 začal *Eric Mazur* vyučovat na Harvardu úvodní kurzy fyziky pro mediky. Před první přednáškou jej ani nenapadlo zabývat se otázkou, jakým způsobem bude vyučovat. Bylo mu jasné, že bude přednášet. Jediné, co jej trápilo, byla volba textu, okolo kterého bude soustředit svůj výklad.

K zamyšlení: Zkusme si vzpomenout, jakými otázkami jsme se zabývali my, než jsme poprvé vkročili do třídy se záměrem vyučovat. Zabývali jsme se spíše obsahem, nebo formou?

Hluběji přemítat nad kvalitou výuky jej přimělo až sdělení v příspěvku [2]: „Vysokoškolské kurzy fyziky nemají takřka žádný dopad na vstupní (ne)porozumění studentů.“ Poselství článku se opíralo o tisíce dat, a tak nad ním Mazur, coby vědec, nemohl jen tak mávnout rukou.

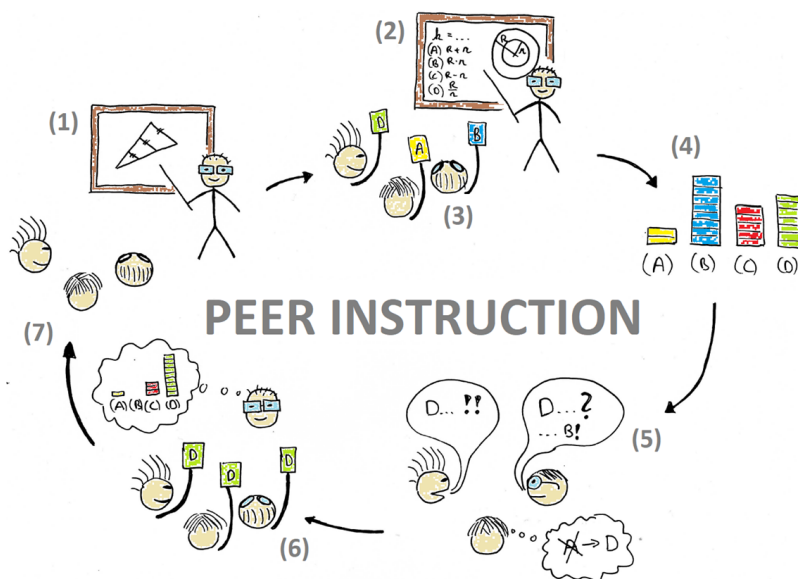
Naštěstí byl k článku připojen i test FCI (Force Concept Inventory) užitý autory pro sběr dat.

Těžko slovy popsat, jak se profesor Mazur cítil krátce poté, co obdržel výsledky svých studentů. Většina dopadla stěží lépe „než gorila náhodně stlačující klávesy na klávesnici“ [3]. Nabízela se pouze dvě možná východiska. Vinit test a nepříznivé zjištění ignorovat, nebo kompletně přehodnotit svůj přístup k výuce. Eric Mazur se rozhodl pro druhou variantu, a zanedlouho poté vytvořil vlastní výukovou metodu *peer instruction*.

K zamyšlení: Jak bychom v podobné situaci, tj. tváří tvář zjištění, že jsme své žáky dovedli pouze ke stavu, kdy jsou schopni užívat formule a postupy, aniž by doopravdy rozuměli jejich podstatě, reagovali my?

Metoda peer instruction

Samotný název metody, *peer instruction* (volně přeloženo jako vrstevnické vyučování), reflektuje skutečnost, že není zcela správné o *peer instruction* (dále jen *PI*) hovořit jako o vyučovací technice, ale spíše jako o metodě aktivního učení. Pro *PI* je příznačný důraz na proces učení se žáků, nebo studentů (dále jen žáků). Veškeré aspekty procesu vyučování podle *PI* pak lze vyjádřit pomocí následujícího schématu jednoho vyučovacího bloku [3], viz obr. 1.



Obr. 1 Schéma jednoho bloku *PI*

Učitel nejprve zvolí, jakému *konceptu* (nosnému pojmu, principu, myšlence) se bude třída v rámci bloku věnovat. Blok poté zahájí (1) krátkým výkladem nebo prezentací, přičemž se snaží vyhnout vzorcům, početním postupům nebo jiným mnemotechnickým berličkám odvádějících pozornost od ryzího porozumění. Po představení *konceptu* následuje (2) položení otázky cílené na testování či prohloubení porozumění probíranému *konceptu* s několika nabízenými odpověďmi (tento typ otázek budeme dále zvat *KonceptTesty*). Žáci (3) si nejprve samostatně promyslí své odpovědi, a poté je učiteli sdělí prostřednictvím hlasovacích karet, chytrých telefonů,

nebo jiných zařízení uzpůsobených pro hlasování. Na základě rozložení odpovědí žáků (4) vyučující volí další krok. Při vysokém počtu hlasů pro správnou variantu (nad 70 %) může třída rovnou přejít k (7) vysvětlení řešení učitelem nebo některým žákem. V opačném případě, kdy je správných odpovědí nedostatek (pod 35 %), bude zřejmě nutné opakovaně *koncept* vysvětlit, studentům napovědět, nebo zadat snazší *KoncepTest*. Poslední variantu (správných odpovědí 35–70 %) představují skupinové diskuze, kdy vyučující žáky vyzve, aby našli (ideálně) jinak odpovídající spolužáky a snažili se je přesvědčit o správnosti svého stanoviska. Diskuze jsou zakončeny výzvou k opětovnému hlasování (6), ve kterém žáci revidují své odpovědi. Druhé hlasování obvykle přináší signifikantní nárůst hlasů ve prospěch správné varianty [6]. Daný *KoncepTest* je poté uzavřen stručným vysvětlením řešení úlohy (7). Výzkumy [6] ukazují, že výuka realizovaná pomocí *PI* vede ke znatelně vyšším učebním ziskům než klasický výklad (tj. žáci více využijí svůj potenciál pro zlepšení svého počátečního (ne)porozumění).

K zamyšlení: Z řady studií [6] vyplývá, že se od sebe navzájem tímto způsobem žáci dokáží učit efektivněji, než by se učili z výkladu učitele. Jaké pro to mohou být důvody?

Tuto otázku si mimořádně zodpovíme i společně. Konečně, odpověď není vůbec složitá. Představme si modelovou situaci, kdy se správně odpovídající Ctibor pokouší svůj názor obhájit nesprávně uvažujícím spolužákem Borisovi. Oba chlapci jsou k sobě otevřenější, než by byli vůči vyučujícímu a navíc hovoří velmi podobným jazykem. Boris má (z pochopitelných důvodů) problém uvést pádné argumenty pro svou mylnou představu. Naproti tomu Ctiborovo porozumění danému problému je čerstvé, a proto si živě pamatuje, jaké překážky musel překonat, než se tohoto stavu dobral. Ctibor je tedy nejen schopný Borise dovést k porozumění, ale je schopen toho dosáhnout snáze než sám učitel. Pro vykreslení sdělení tohoto odstavce uvedme dva doslovné přepisy žákovských sdělení (získáno v rámci vlastního výzkumu implementace *PI*):

„Ono to bavení v té skupině.. jakože ten, co se to snaží vysvětlit, takže my jako nevíme, jestli to má dobře nebo ne, takže se nad tím snažíme více přemýšlet, než když nám to ukazujete vy (učitel), protože my víme, že vy, jakože vy, to máte dobře.. a tak nad tím, jakože, tolik nepřemýšlíme.“

„Vona (spolužačka) mi to.. Vona jak mluvila, tak to kreslila. A jak jsem se na to jako koukala, a pak jsem to jako slyšela, tak jsem přišla na to, proč to tak je.“

Poznamenejme, že během skupinových diskuzí učitel může korzovat mezi diskutujícími skupinami a „naslouchat myšlenkám svých žáků“. Může se tak dozvědět, co jim dělá problémy, čemu jak (ne)rozumí a proč. Učitel rovněž může, v případě potřeby, do některých diskuzí vstoupit, katalyzovat je či usměrnit správným směrem vhodnými doplňujícími dotazy.

K zamyšlení: Jak často se nám v naší praxi stává, že se podivujeme, když naši žáci nechápou něco „tak očividného“ i když to „vysvětlíme snad po stopadesáté“? Právě pro tento stav myslí existuje v zahraničí termín „curse of knowledge“ (kletba vědomosti).

Po třech letech vlastní (výzkumné) praxe

Pomocí *PI* již třetím rokem vyučuji matematiku na nižším gymnáziu (ekvivalent druhému stupni ZŠ). Novou látku takřka vždy představuji právě ve smyslu schématu na obr. 1. Z mých záznamů vyplývá, že *PI* věnuji v průměru každou třetí až čtvrtou vyučovací hodinu. Souběžně s výukou realizuji, v rámci své disertace, akční výzkum (projekt GA UK č. 680119), v rámci kterého se snažím rozhodnout, zda je možné uspokojit předpoklady pro implementaci *PI* ve výuce matematiky na úrovni druhého stupně základní školy (uspokojivé sociální dovednosti pro vedení plodné skupinové diskuze, atd.) a zda je možno dosáhnout podobných výsledků, jaké přislíbují studie *PI* ve výuce fyziky nebo na úrovni vysoké školy (prohloubení konceptuálního porozumění, zlepšení postojů vůči předmětu, navýšení argumentačních dovedností, atd.). Metodu *PI* se snažím pravidelně popularizovat v rámci tuzemských i zahraničních konferencí. Postřehy a výsledky, které budou zmíněny v této sekci, tedy stojí na několika letech výzkumné, popularizační a školské praxe.

Nejprve si uvedeme několik stručných poznámek k popsanému vyučovacímu bloku *PI* jako celku.

- Časová náročnost prezentace nového konceptu (1) se odvíjí od volby aktivity, kterou pro tyto účely zvolíme. Zadání *KoncepTestu* s navazujícím hlasováním a diskuzí trvá přibližně 8–15 minut, podle náročnosti konkrétní otázky a naší ochoty nechat žáky nad problémem diskutovat.
- Není dobrý nápad ukazovat žákům výsledky prvního hlasování, než se přikročí ke skupinovým diskuzím. Obzvláště „tvárnější žáci“ mohou nabýt mylného přesvědčení, že správná je odpověď s nejvyšší četností, a během diskuze pak tito pobudou snahy své stanovisko zdůvodnit (tato zkušenost je v souladu se zahraničními studiemi [6]).

- Výzkumy obsažené v rešeršní práci [6] ukazují, že vypuštění kteréhokoliv z kroků (1)–(7), či jeho zásadní modifikace, obvykle vede ke snížení efektivity *PI*. (Na základě série provedených experimentů, jako vypuštění prvního, druhého, nebo obou hlasování, se plně přikláním k pravdivosti tohoto stanoviska.)

Nyní již komentáře k jednotlivým krokům bloku (1)–(7):

- Je-li to možné, nové *koncepty* představujeme skrze skupinové aktivity v duchu (řízeného) objevitelského přístupu. (Při klasickém výkladu je mnohem obtížnější *koncept* dostatečně uchopit a zároveň se vyhnout vzorcům a poučkám. Zkušenost navíc ukazuje, že během klasického výkladu řada žáků nad sdělením dostatečně nepřemýšlí.)
- Zpočátku není snadné vymýšlet vlastní *KoncepTesty*. (Tomuto tématu je věnován konferenční příspěvek [8].)
- Na rozdíl od fyziky, kde se žáci běžně setkávají s jevy, o kterých již mají představu z běžného života (takzvanou *prekonceptci*), je pro ně v matematice řada *konceptů* zcela nová. Zahraniční studie [1, 5] provedené na poli matematické analýzy na vysoké škole proto doporučují zadávat sérii *KoncepTestů* se stupňovanou obtížností, aby bylo porozumění žáků budováno postupně. Tento přístup se mi rovněž osvědčil ve vlastní výuce.
- Zásadnímu významu hlasování je věnován příspěvek [9]. Uvedme ve stručnosti některé obsažené výsledky:
 - „Pro některé žáky hlasování představuje příjemné zpestření a možnost vyjádřit se. Pro jiné žáky pak ztělesňuje nepříjemný diskomfort a nutnost zaujmout nějaké stanovisko. Hlasování také můžeme chápat jako negativní či pozitivní motivaci pro přemýšlení během ostatních *PI* aktivit, ale i jako aktivitu, při které přemýšlení probíhá, tedy jako činnost kognice i její hnací pohon (napětí).“
 - „Je-li hlasování vyraženo, vede to k celkovému snížení efektivity techniky *PI*.“
 - „Druhé hlasování pro žáky představuje možnost opravy, pokud se v případě prvního hlasování spletou, a s vidinou této možnosti pak pro ně první hlasování není tolik stresující. Dalším faktorem zmírňujícím negativní složku napětí je zabezpečení anonymity jak během hlasování, tak i v průběhu skupinových diskuzí. V případě skupinových diskuzí chápeme anonymitu tak, že je žákům umožněno skupiny

tvorit zcela svobodně, tedy na základě jejich osobních preferencí. Žáci si tak logicky vybírají pouze komunikační partnery, jejichž kritice jsou ochotni podrobit svůj názor a ne žáky, jejichž případného posměchu se obávají. Anonymitu hlasování pak zajišťuje právě vhodná volba prostředku hlasování, a sice chytré telefony, nebo alespoň vhodně upravené hlasovací karty.“

- Sociální dovednosti žáků mohou být nedostatečně rozvinuty z hlediska jejich zapojení v skupinové diskuzi [7]. Rovněž mohou existovat žáci (a pravděpodobně i existovat budou), kteří za sebe během diskuzí nechají pracovat ostatní a „takříkajíc se vezou“ [1], [4]. Oba uvedené jevy osobně vnímám jako největší úskalí efektivní implementace *PI* v prostředí ZŠ–SŠ. Úroveň sociálních dovedností je však možné navýšit tréninkem, jehož se, jak naznačují dále přiložené výroky, po čase dožadují sami žáci (získáno v rámci vlastního výzkumu implementace *PI*):

„No tak jako má to smysl, alespoň se jako utvrdím v tom, že to mám dobře, že to jako chápu, nebo že to chápeme jako celek...“

„No, třeba si to jako procvičit jakože něco jednoduchýho, abysme pak byli připravený na ty těžší. Že jako. Tak jako sportovec se taky nejdřív rozcvičí než jako půjde běhat nějakou dálku.“

„Já nevím tím pádem jestli můžu. Jakože né vždycky na to přijdem tím způsobem, jakým bychom měli. Ale myslíme si, že je to nějak jinak nebo.. eem.. to zkusíme nějakým jiným způsobem, ale vyjde nám to stejně, tak jak by to mělo, ale je to špatně udělaný, jakože to náhodou vyjde jakože správně, nebo je špatnej postup, ale správněj výsledek.“

Právě z důvodu tréninku sociálních dovedností nechme žáky diskutovat i nad „snazšími“ úlohami.

- Učební zisk jednotlivých žáků se odvíjí od typické role, kterou během skupinových diskuzí zaujímají [10]. V rámci výzkumu se podařilo identifikovat tyto základní role [10]:

Statistici/Pasažéři: Do této skupiny patří žáci, kteří nemají ani potřebu dominovat skupinovým diskuzím ani potřebu dobrat se správného řešení daného *Koncep Testu*. Diskuzí se obvykle účastní tak, že mlčky přejímají názor od dominantního řečníka nebo od poradce ve své skupině. Rovněž je pro ně typická praktika bezmyšlenkovitého „zkopírování“ odpovědi s nejvyšší četností po prvním hlasování.

Dominantní řečníci: Tito žáci se zpravidla jako první ujímají slova a zpravidla mají i slovo poslední. Je pro ně tedy typická vysoká potřeba dominovat diskuzi, ale rovněž i snaha dobrat se správnému řešení úlohy. Obvykle jde o matematicky schopnější žáky (z pohledu třídy).

Poradci: Pro poradce je příznačná vysoká snaha dobrat se správného řešení problému. Na rozdíl od dominantních řečníků tito žáci nemají potřebu určovat směr diskuze. Pro poradce jsou daleko typičtější doplňující otázky a zpřesnění stanovisek spolužáků. Rovněž jde obvykle o matematicky schopnější žáky (z pohledu třídy).

Standardní diskutéři: Do této skupiny patří žáci, kteří se účastní diskuzí kýženým způsobem. Tedy pozorně naslouchají druhým a do diskuze rovněž sami přispívají. Z hlediska dominance a snahy dobrat se řešení úlohy se pohybují někde mezi *dominantními řečníky* a *poradci*.

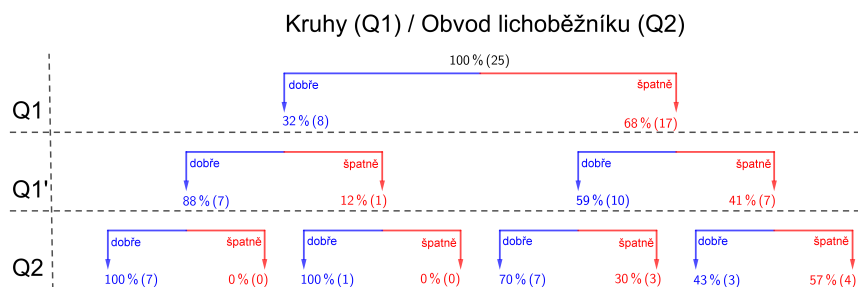
- V uplynulém kalendářním roce (2019) se podařilo ukázat, že učební zisk jednotlivce úzce souvisí s jeho typickou rolí, kterou zaujímá během skupinové diskuze [10]. Nikoho tak zřejmě nepřekvapí, že nízký učební zisk je typický pro *pasážéry*, střední pro *standardní diskutéry* a vysoký pro *poradce* a *dominantní řečníky*.
- V souladu s [1] a [4] považuji za nutné běžné schéma *PI* doplnit o chytrý způsob formování skupin. V rámci výuky podobnosti jsme se třídou zkoušeli následující mechanismus: žáci jsou po prvním hlasování vyzváni, aby nad *KoncepTestem* diskutovali nejprve ve dvojici se sousedem, a teprve poté je nechám utvořit větší diskuzní skupiny, jako je tomu při standardním průběhu *PI*. Na základě zpětné vazby žáků lze tvrdit, že tento model i nadále zachovává princip anonymity diskuzí (spolusedícího si každý obvykle volí svobodně) a že jim tento model vyhovuje více než klasický (mohou problém předdiskutovat a do „velké diskuze“ vstupují lépe připraveni.) Předběžné mezivýsledky rovněž ukazují, že představený model přináší navýšení průměrného učebního zisku a lehké uhlazení rozdílů mezi jednotlivými diskuzními rolemi (co do učebního zisku).

K zamyšlení: Jak poznáme, že naši žáci pouze bezduše nekopírují názory svých matematicky zdatnějších kolegů?

Tuto otázku slyším poměrně často v rámci didaktických konferencí. Jedna možnost, jak se dobrat odpovědi již byla zmíněna – stačí pozorně naslouchat myšlenkám žáků během skupinových diskuzí. Další způsob představuje zařazení *KoncepTestů* do průběžných testů po bok klasickým otáz-

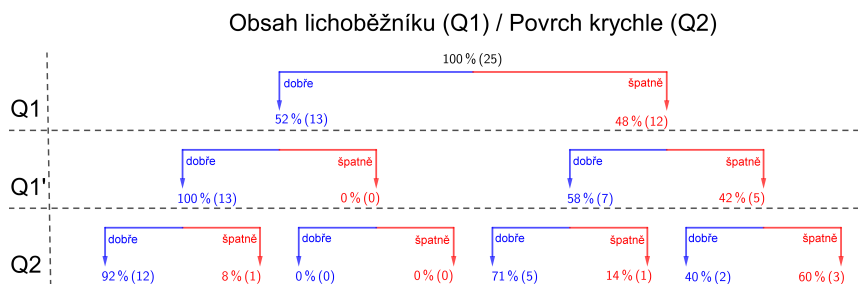
kám. Poslední variantu skýtá posloupnost po sobě jdoucích *KoncepTestů* s narůstající obtížností cílených na tentýž *koncept*.

Na obr. 2 je schematicky znázorněn proces odpovídání (z hlediska dobře/špatně) v posloupnosti dvou navazujících otázek o stupňované obtížnosti (tj. na stejný *koncept*). Přičemž Q1 představuje odpověď na první otázku v prvním hlasování, Q1' odpověď na první otázku v revidovaném hlasování a Q2 pak odpověď v prvním hlasování navazujícího *KoncepTestu*. Zeleně je zvýrazněna zajímavá situace. Ze 17 původně nesprávně odpovídajících žáků (na první otázku) jich 10 vlivem diskuze přehodnotilo svou odpověď na správnou, a z těchto 10 pak 7 odpovědělo správně i při prvním hlasování u těžší navazující otázky.



Obr. 2 Schéma procesu odpovídání pro dvě navazující úlohy I

Obdobnou situaci znázorňuje i schéma na obr. 3, které se však týká těžších *KoncepTestů* zaměřených na vztah mezi koeficientem podobnosti a obsahem podobných útvarů.



Obr. 3 Schéma procesu odpovídání pro dvě navazující úlohy II

Z obr. 2 a 3 je patrné, že v obou případech přibližně 70 % žáků, kteří u první otázky opravili svou odpověď ze špatné na správnou, dokázalo své poznatky získané v diskuzi využít i pro správné určení odpovědi otázky navazující. Lze rovněž konstatovat, že většina žáků, kteří zachovávají svou správnou odpověď i po skupinové diskuzi, odpovídá správně i v případě navazující úlohy. (*KoncepTesty Kruhy, Obvod lichoběžníku, Obsah lichoběžníku, Povrch krychle*, zmíněné na obr. 2 a 3, můžeme nahlédnout v navazující sekci.)

Podobnost v pojetí peer instruction

V této sekci si ukážeme možné uchopení *konceptu* (matematické) podobnosti pomocí metody *PI*. Zvláštní důraz bude přitom kladen na význam koeficientu podobnosti k . (Obsažené úlohy pocházejí od autora příspěvku a všechny byly opakovaně vyzkoušeny v rámci výuky v tercií víceletého gymnázia, tj. v 8. ročníku ZŠ.)

K zamyšlení: Často máme pocit, že téma, které žákům představujeme, respektive otázky, které jim pokládáme, jsou triviální. Před prohlédnutím přiložených grafů znázorňujících dynamiku žákovských odpovědí se vždy zamysleme, jaké procento správných odpovědí bychom v prvním hlasování očekávali.

Obvykle se nejprve žáků dotazují na (matematickou) shodnost, se kterou se již setkali. Krátkou diskuzi se snažím nasměrovat k formulaci následující definice: *Řekneme, že dva útvary jsou (matematicky) shodné, pokud se dají položit jeden na druhý tak, že se dokonale kryjí.*

Osobně považuji za důležité zpočátku doplňovat, pro někoho snad nadbytečné, slovo „matematicky“ a to právě kvůli podobnosti, jíž je věnována navazující diskuze.

K zamyšlení: Jak zní věta: „Všechny obdélníky jsou si podobné?“ Působí jako nesmysl, nebo na ní něco pravdivého bude?

Řekneme, že dva útvary jsou (matematicky) podobné, pokud by bylo možné jeden z nich zmenšit/zvětšit beze změny proporcí tak, že by byl (matematicky) shodný s tím druhým.

V tomto okamžiku již žáci disponují potřebnými definicemi pro první trio *KoncepTestů* (správná odpověď je vždy **zvýrazněna zeleně**):

Podobnost 01

Mezi následujícími tvrzeními zvol pravdivé.

(A) Jsou-li si útvary podobné, pak jsou i shodné.

(B) Jsou-li útvary shodné, pak jsou si i podobné.

(C) Útvary jsou si podobné jedině a pouze tehdy, jsou-li navzájem shodné.

(D) Ani jedno z tvrzení (A)–(D) není pravdivé.

Během dříve realizované diskuze mnohdy zaznívají termíny jako „obraz“ či „fotografie“, a je tedy zřejmé, že někteří žáci si uvědomují, že lze uvažovat i zvětšení v poměru 1 : 1. Díky úloze Podobnost 01 k této představě dospějí i ostatní žáci. Můžeme proto definici doplnit o odpovídající poznámku a pokračovat k navazující úloze.

Podobnost 02

Adolf tvrdí, že jsou si všechny obdélníky podobné. Boris hlásá, že jsou si podobné všechny pravoúhlé trojúhelníky. Ctibor se musí rozhodnout, komu má dát za pravdu.

(A) Pouze Adolfovi.

(B) Pouze Borisovi.

(C) Adolfovi i Borisovi.

(D) Ani Adolfovi ani Borisovi.

Právě úloha Podobnost 02 ukazuje výhodu počátečního důrazu na zmíněný přídomek „matematicky“. Z přiloženého grafu na obr. 4a je zřejmé, že více než polovina žáků zpočátku nesprávně považovala všechny obdélníky/pravoúhlé trojúhelníky za (matematicky) podobné (Pro oblasti grafů na obr. 4–8 platí: oblast Dobře–Dobře zastupuje žáky, kteří odpověděli správně v prvním i ve druhém hlasování; oblast Dobře–Špatně pak žáky, kteří ze správné změnili svou odpověď na nesprávnou; oblast Špatně–Špatně žáky, kteří se dvakrát mylili; konečně oblast Špatně–Dobře žáky, kteří se z nesprávné odpovědi opravili na správnou).

Stín a výška pyramidy

Uvažme, že pyramida je pravidelný čtyřboký jehlan o délce podstavny hrany 230 metrů. V okamžik, kdy délka našeho stínu odpovídá naší výšce, sahá stín pyramidy do vzdálenosti 31 metrů od základny pyramidy. Rozhodněte, jak vysoká je pyramida?

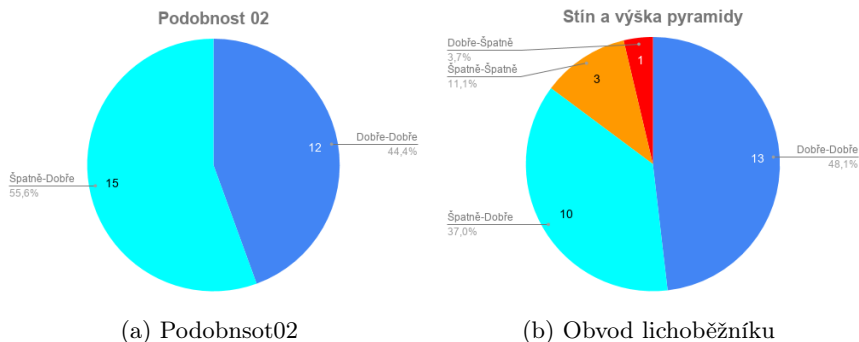
(A) 31 metrů.

(B) 146 metrů.

(C) 261 metrů.

(D) > 261 metrů.

(E) Na základě těchto údajů nelze rozhodnout.



Obr. 4 Dynamika hlasování pro první dvojici úloh

Po této úloze pokládám za vhodné diskutovat s žáky, zda bychom mohli považovat podobnost za zobrazení (s funkcí obvykle pracuji na obecnější úrovni, než je na ZŠ zvykem). Následuje společná formulace definice podobnosti zohledňující koeficient podobnosti.

Podobnost je zobrazení, ve kterém je vzorem geometrický útvar a jeho obrazem pak jeho přesná, či zmenšená/zvětšená kopie.

Uvedenou definici je vhodné doplnit o názornou ilustraci a úmluvu, že vzor bude označován nečárkovaně a obraz čárkovaně (tj. ve smyslu $ABCD$ a $A'B'C'D'$). Poté je již na řadě definice koeficientu podobnosti.

Vzdálenost každých dvou bodů obrazu odpovídá k -násobku jejich původní vzdálenosti. Číslo k zveme koeficient podobnosti.

(Skutečnost, že je k kladné je implicitně obsažena v textu, neboť většina žáků si je obvykle vědoma faktu, že obě diskutované vzdálenosti jsou kladné, a tedy i zmiňované číslo k musí být kladné.)

Jakmile žáci disponují základní představou o koeficientu podobnosti, přichází řada na sérii úloh věnovaných jejímu rozšíření.

Kruhy

Uvažme dva kruhy $K(A;m)$ a $K'(B;n)$, přičemž $m > n$. Co platí pro koeficient jejich podobnosti?

- (A) $k = m + n$
- (B) $k = |m - n|$
- (C) $k = |n - m|$
- (D) $k = mn$

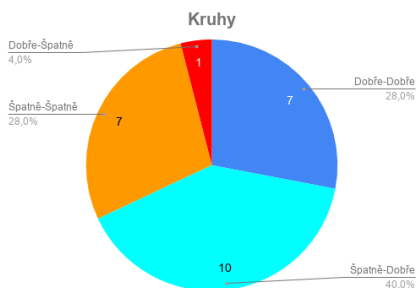
(E) $k = \frac{m}{n}$

(F) $k = \frac{n}{m}$

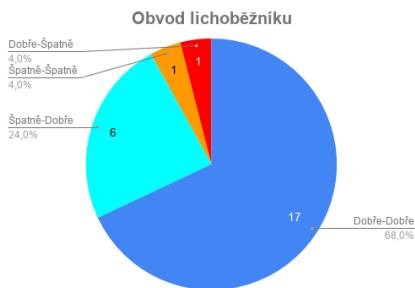
Obvod lichoběžníku

Lichoběžník $ABCD$ má obvod 240 cm. Jaký obvod má jeho obraz $A'B'C'D'$ v podobnosti s koeficientem $k = \frac{3}{2}$?

- (A) menší než 160 cm
- (B) 160 cm
- (C) mezi 160 cm a 360 cm
- (D) 360 cm
- (E) větší než 360 cm
- (F) nelze rozhodnout



(a) Podobnost02



(b) Obvod lichoběžníku

Obr. 5 Dynamika hlasování pro druhou dvojici úloh

Po vysvětlení řešení této úlohy přichází na řadu diskuze, pro které hodnoty k jde o zvětšení, pro které o shodnost a pro které jde o zmenšení.

Následuje *KoncepTest* pracující se špatnou představou: obraz je k -krát zvětšený/zmenšený vzor, a tedy i jeho obsah musí být k -krát zvětšen/zmenšen.

Obsah lichoběžníku

Lichoběžník $ABCD$ má obsah 240 cm². Jaký obsah má jeho obraz $A'B'C'D'$ v podobnosti s koeficientem $k = 4$?

- (A) 480 cm²
- (B) 960 cm²

(C) 1920 cm²

(D) 3840 cm²

Řada správně uvažujících žáků svou odpověď zdůvodnila pomocí nepřesné kresby lichoběžníku, v němž bylo naskládáných 16 původních lichoběžníků a snad jen dva žáci dospěli ke správnému řešení přes úvahu vycházející z definice koeficientu podobnosti za dosazení do obecného vztahu pro obsah lichoběžníku, tj.

$$S' = 12(a' + b')v' = 12(4a + 4b)4v = 1612(a + b)v = 16S.$$

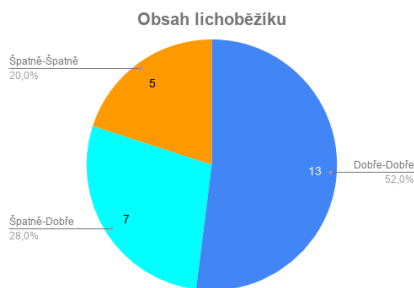
Poznamenejme, že žáci se při práci s podobností obvykle omezují pouze na hranici útvaru a řada z nich si myslí, že koeficient podobnosti udává, kolikrát se obraz vejde do vzoru. (U oblých útvarů tato představa naprosto ztroskotává.)

Žákovské porozumění významu koeficientu podobnosti můžeme prověřit i ve vyšší než druhé dimenzi a to pomocí dvojice následujících úloh.

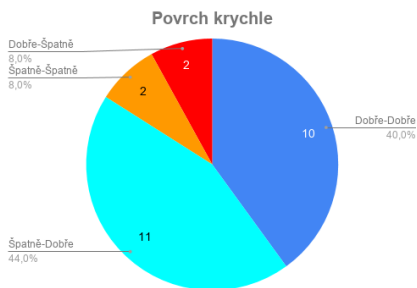
Povrch krychle

Jaký je povrch obrazu krychle v podobnosti s $k = 2$ vzhledem k jejímu vzoru?

- (A) dvakrát menší
- (B) čtyřikrát menší
- (C) menší s jinou násobností
- (D) dvakrát větší
- (E) čtyřikrát větší
- (F) větší s jinou násobností



(a) Podobnost02



(b) Obvod lichoběžníku

Obr. 6 Dynamika hlasování pro třetí dvojici úloh

Objem krychle

Jaký je objem obrazu krychle v podobnosti s $k = \frac{1}{2}$ vzhledem k jejímu vzoru?

- (A) dvakrát menší
- (B) čtyřikrát menší
- (C) menší s jinou násobností
- (D) dvakrát větší
- (E) čtyřikrát větší
- (F) větší s jinou násobností

Pro zajímavost uveďme ještě úvodní úlohu do problematiky podobnosti trojúhelníků (věty o podobnosti trojúhelníků) a úvodní aplikační úlohu do problematiky podobnosti čtyřúhelníků (Kozderkovo pole).

Věty o podobnosti trojúhelníků

Rozhodni, které z tvrzení (A)–(C) není pravdivé. Případně zvol některou z možností (D)–(E).

(A) Dva trojúhelníky jsou podobné, mají-li též poměr délek dvou párů odpovídajících si stran.

(B) Dva trojúhelníky jsou podobné, rovnají-li se poměry délek každých dvou odpovídajících si stran.

(C) Dva trojúhelníky jsou podobné, shodují-li se ve dvou vnitřních úhlech.

(D) Všechna tři tvrzení (A)–(C) jsou pravdivá, tvrzení (B) je však pouhým přepisem definice podobnosti geometrických útvarů pro trojúhelníky.

(E) Nepravdivé je více než jedno tvrzení (A)–(C).



(a) Podobnost02



(b) Obvod lichoběžníku

Obr. 7 Dynamika hlasování pro čtvrtou dvojici úloh

Kozderkovo pole

Pan Kozderka se chystá prodat své pole čtyřúhelníkového tvaru. Do každého ze čtyř rohů proto zarazil kolík, mezi kolíky napnul provazy, a tímto způsobem zjistil, že:

- (A) Mezi prvním a druhým kolíkem je 148 metrů.
- (B) Mezi druhým a třetím kolíkem je 154 metrů.
- (C) Mezi třetím a čtvrtým kolíkem je 115 metrů.
- (D) Mezi čtvrtým a prvním kolíkem je 89 metrů.



Obr. 8 Dynamika hlasování pro Kozderkovo pole

(Poznamenejme, že kolíky pan Kozderka čísloval ve smyslu pořadí vrcholů čtyřúhelníku.)

Je možné na základě naměřených údajů určit s přesností na čtvereční metry výměru Kozderkova pole?

- (A) Ano, pan Kozderka změřil vše potřebné.
- (B) Ne, pan Kozderka musí změřit ještě vzdálenost mezi prvním a třetím kůlem, nebo vzdálenost mezi druhým a čtvrtým kůlem.
- (C) Ne, pan Kozderka musí změřit ještě vzdálenost mezi prvním a třetím kůlem i vzdálenost mezi druhým a čtvrtým kůlem.
- (D) Ne, pomocí popsanych vzdáleností (včetně (B) a (C)) pan Kozderka nikdy výměru pole zjistit nemůže.

K zamyšlení

Často se setkávám s názorem, že ačkoli metoda *PI* vypadá líbivě, jistě by nebylo snadné ji využít na základní či střední škole (dotazy účastníků

konferencí). Tento názor je obvykle rámován odkazy na zjevnou časovou náročnost pro učitele a případnou neochotu, ba dokonce neschopnost, žáků dlouhodobě produkovat plodné skupinové diskuze nad zadanými *KoncepTesty*. Mé dosavadní zkušenosti v kostce prezentované v tomto článku ukazují, že *PI* je možné efektivně a smysluplně využít ve výuce školské matematiky.

Alespoň zpočátku je však nutné počítat se zvýšenou časovou náročností na přípravu. Není vždy snadné vymyslet opravdu dobré a zároveň vhodné *KoncepTesty*. Pevně však věřím, že časem se objeví dostatek nadšenců pro *PI*, následkem čehož bude existovat i dostatečně bohatá zásoba *KoncepTestů* připravených rovnou k použití. Rovněž připouštím, že pro žáky není vždy snadné zaujmout vůbec nějaký názor, vstoupit do diskuze a posléze svůj názor obhájit ostatním. Není ale právě naším úkolem pomoci jim růst? Tedy pomoci jim kriticky myslet, hloubat, argumentovat, přijímat i poskytovat zpětnou vazbu a diskutovat s ostatními? Není právě toto jedním ze smyslů výuky? Jak jinak mohou žáci tyto dovednosti získat a natrénovat, než praxí? Pro něco takového skýtá *PI* perfektní příležitost.

Rád bych však závěrem ještě jednou zdůraznil stěžejní význam principu anonymity a bezpečí. Při nevhodné volbě prostředku a formy hlasování vystavujeme žáky zbytečnému diskomfortu a stresu. Ne každý dobře snáší vědomí, že ostatní žáci znají a hodnotí jeho názor, obzvláště není-li si „jistý v kramflecích“. Z tohoto důvodu upřednostňujeme hlasování skrze telefony, případně vhodně uzpůsobené (neprůhledné) hlasovací karty. Princip anonymity a bezpečí je však nutné zachovat i v rámci skupinových diskuzí. Nenuťme proto žáky formovat skupiny podle „jakkoli promyšleného klíče za účelem vyždímat z diskuze maximum“. Představme si situaci, že pochybujeme o své odpovědi na obtížnou otázku a jsme nuceni své stanovisko obhajovat spolužákovi, kterého se z jakéhokoli důvodu obáváme (například proto, že se nám posmívá). Doplňme proto *PI* pouze o zmíněné předdiskutování úloh ve dvojici se sousedem a do následného formování diskusních skupin nijak nezasahujeme.

Poděkování

Příspěvek byl podpořen Grantovou agenturou Univerzity Karlovy (projekt č. 680119). Dále děkuji svým žákům, obzvláště pak členům reflexní skupiny, bez jejichž přímé účasti, názorů a komentářů by nebylo výsledků vhodných k publikaci.

Literatura

- [1] *Lucas, A.*: Using peer instruction and i-clickers to enhance student participation in calculus. *Primus*, roč. 19 (2009), č. 3, s. 219–231.
- [2] *Halloun, I. A., Hestenes, D.*: The initial knowledge state of college physics students. *American journal of Physics*, roč. 53 (1985), č. 11, s. 1043–1055.
- [3] *Mazur, E.*: Peer instruction: a user's manual. Upper Saddle River, Prentice Hall, N.J., 1997.
- [4] *Michimov, N., Morice, J., Ferrières, V.*: A step further in Peer Instruction: Using the Stepladder technique to improve learning. *Computer and Education*, roč. 91 (2015), s. 1–13.
- [5] *Pilzer, S.*: Peer Instruction in Physics and Mathematics. *Primus*, roč. 11 (2001), č. 2, s. 185–192.
- [6] *Vickerey, T. et al.*: Research-Based Implementation of Peer Instruction: A Literature Review. *Cell Biology Education*, roč. 14 (2015), č. 1, es3–es3.
- [7] *Yu-Fen Chen et. al.*: Elementary Science Classroom Learning with Wireless Response Devices – Implementing Active and Experiential Learning. In: *IEEE International Workshop on Wireless and Mobile Technologies in Education (WMTE'05)*, 2005, s. 96–103.
- [8] *Zadražil, T.*: KonceptTesty ve výuce matematiky. In: *Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol*, Srní, 2018.
- [9] *Zadražil, T.*: Elektronické hlasování ve výuce matematiky. *Užití počítačů ve výuce matematiky*, Jihočeská Univerzita, České Budějovice, 2019.
- [10] *Zadražil, T.*: Relationship between normalized learning gains of individuals and their typical role in group discussions with peers. In: *14th annual International Technology, Education and Development Conference (INTED2020)*, IATED, Valencie, 2020.

Čtyři důkazy Heronova vzorce

JIŘÍ BLAŽEK

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Při výuce geometrie se žáci na středních škol setkávají s tzv. Heronovým vzorcem, který udává výpočet obsahu S trojúhelníku ABC pomocí délek jeho stran. Jeho znění je následující:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad (1)$$

kde a, b, c jsou délky jeho stran a $2s = a + b + c$.

V tomto článku uvedeme čtyři způsoby, pomocí nichž lze Heronův¹⁾ vzorec odvodit.

Nejprve uvedeme poměrně známé algebraické odvození vzorce (1). Dále uvedeme tři geometrická odvození, přičemž první z nich je připisované právě Heronovi.

1. způsob odvození

Při obvyklém označení hlavních prvků v trojúhelníku ABC platí pro jeho obsah

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma.$$

Tento vztah upravíme do tvaru

$$4S^2 = a^2b^2 \sin^2 \gamma. \quad (2)$$

Z kosinové věty plyne

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}, \quad (3)$$

kde γ je velikost úhlu, který svírají strany a a b trojúhelníka.

¹⁾Hérón z Alexandrie (10–75) pracoval v Músaionu v Alexandrii, což byla jakási starověká analogie dnešní Akademie věd. V tehdejší době to byla nejprestižnější instituce svého druhu na světě. Dodnes není jasné, zda Hérón vzorec skutečně objevil nebo zda ho pouze převzal od Archiméda, který žil zhruba dvě století před ním [3].

Vztah (2) postupně upravíme užitím (3):

$$\begin{aligned}
 4S^2 &= a^2 b^2 \sin^2 \gamma = a^2 b^2 (1 - \cos^2 \gamma) = \\
 &= a^2 b^2 \left(1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)^2 \right) = \frac{1}{4} (4a^2 b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2) = \\
 &= \frac{1}{4} (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2) = \\
 &= \frac{1}{4} ((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2) = \\
 &= \frac{1}{4} (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).
 \end{aligned}$$

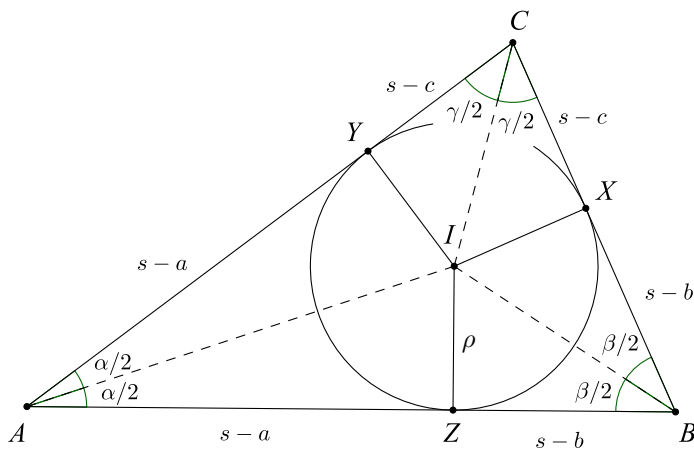
Tedy

$$S^2 = \frac{(a+b+c)}{2} \cdot \frac{(a+b-c)}{2} \cdot \frac{(a-b+c)}{2} \cdot \frac{(-a+b+c)}{2},$$

což po snadné úpravě dává vzorec (1).

2. způsob odvození (Heronův)

Uvažujme trojúhelník ABC . Nechť se jemu vepsaná kružnice se středem I dotýká stran AB , BC , CA po řadě v bodech Z , X , Y (obr. 1). Platí $|AZ| = |AY| = s - a$, $|BZ| = |BX| = s - b$, $|CX| = |CY| = s - c$.

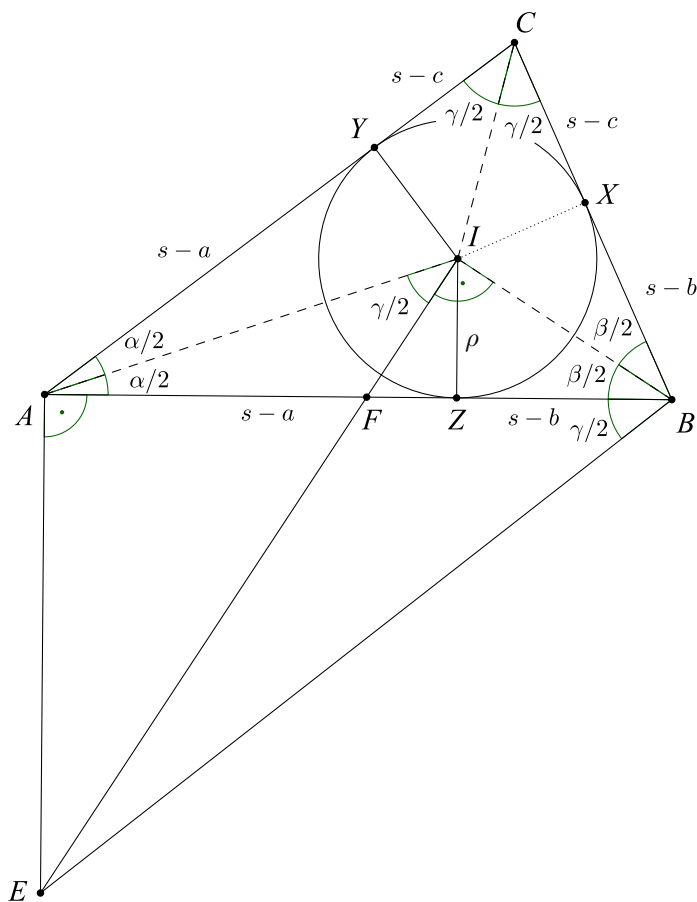


Obr. 1 Kružnice vepsaná a délky úseček

Klíčovou fází důkazu je vyjádření poloměru ρ kružnice vepsané trojúhelníku ABC pomocí délek jeho stran. Platí

$$S = \frac{1}{2}(a + b + c)\rho = s\rho.$$

Za tímto účelem sestrojíme dvě kolmice: přímkou kolmou k úsečce AB v bodě A a přímkou kolmou k úsečce IB v bodě I . Tyto kolmice se protnou v bodě E . Dále označme F průsečík přímky IE s přímkou AB (obr. 2).



Obr. 2 Heronovo odvození

Platí

$$|\sphericalangle AIB| = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 180^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} \right) + \frac{\gamma}{2} = 90^\circ + \frac{\gamma}{2},$$

z čehož plyne, že $|\sphericalangle AIE| = \frac{\gamma}{2}$. Čtyřúhelník $EAIB$ je tětíivový, neboť body A a I leží na Thaletově kružnici s průměrem EB (kružnice opsaná čtyřúhelníku na obrázku v zájmu přehlednosti chybí). Podle věty o obvodových úhlech je $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle AIE| = \frac{\gamma}{2}$. Důsledkem této skutečnosti je podobnost trojúhelníků AEB a YIC (věta *uu*). Platí tedy

$$|AE| : |AB| = |YI| : |YC|,$$

či jinak zapsáno

$$\frac{|AE|}{c} = \frac{\rho}{s - c}.$$

Pokud jsou si dva zlomky rovný, pak zlomek vytvořený podílem součtu jejich čítelů a součtu jejich jmenovatelů je jim též roven, proto

$$\frac{\rho}{s - c} = \frac{|AE| + \rho}{s} \quad (4)$$

Dále, v souladu s označením na obr. 2 platí

$$\frac{|FZ|}{s - a} = \frac{|FZ|}{|AZ|} = \frac{|FI|}{|EI|} = \frac{|IZ|}{|AE| + |IZ|} = \frac{\rho}{|AE| + \rho}. \quad (5)$$

Vynásobením levých a pravých stran rovností (4) a (5) obdržíme

$$\frac{\rho}{s - c} \cdot \frac{|FZ|}{s - a} = \frac{\rho}{s}.$$

Odtud

$$|FZ| = \frac{(s - a)(s - c)}{s}. \quad (6)$$

Podle Eukleidovy věty o výšce v pravoúhlém trojúhelníku FBI platí

$$\rho^2 = |IZ|^2 = |FZ| \cdot |ZB| = |FZ| \cdot (s - b),$$

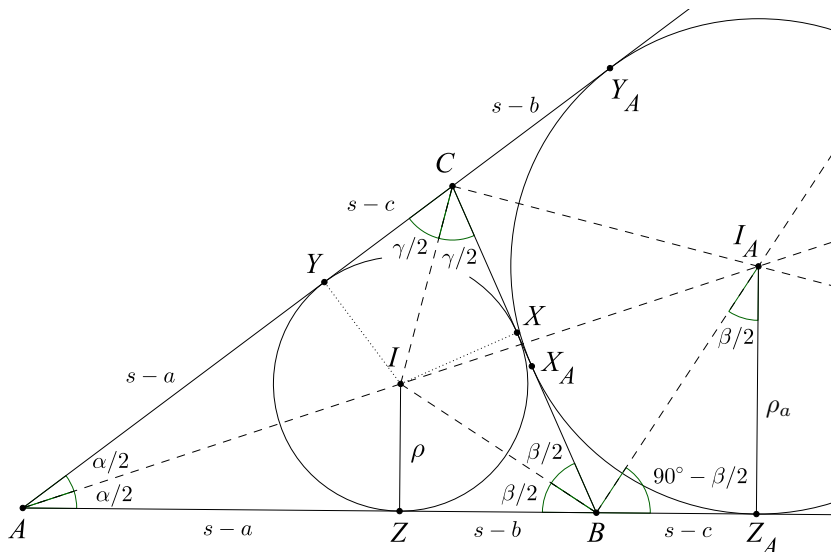
což po dosazení za $|FZ|$ ze vztahu (6) dává po úpravě

$$\rho^2 = \frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}. \quad (7)$$

Následným využitím vzorce $S = \rho s$ obdržíme vztah (1).

3. způsob odvození

V tomto odvození budeme, kromě kružnice vepsané s jejími dotykovými body X, Y, Z , uvažovat i kružnici připsanou, například straně a trojúhelníku. Její střed nechť je I_A , dotykové body s přímkami AB, AC označme po řadě Z_A, Y_A a dotykový bod se stranou BC označme X_A (obr. 3).



Obr. 3 Třetí odvození Heronova vzorce

Nejdříve uvedeme jeden známý fakt a jedno pozorování. Je známo, že $|AZ_A| = s$ a tedy $|BZ_A| = |AZ_A| - |AB| = s - c$. Dále, trojúhelníky IZB a BZ_AI_A jsou podobné (podle věty *uu*), neboť jsou oba pravoúhlé a $\sphericalangle IBZ = \frac{\beta}{2}$, $\sphericalangle I_ABZ_A = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$.

Nyní přistoupíme k vlastnímu důkazu. Z podobnosti trojúhelníků AIZ a AI_AZ_A plyne

$$\frac{\rho}{s-a} = \frac{|IZ|}{|AZ|} = \frac{|I_AZ_A|}{|AZ_A|} = \frac{\rho_a}{s}, \quad \text{resp.} \quad \frac{\rho}{\rho_a} = \frac{s-a}{s}, \quad (8)$$

kde ρ_a je poloměr kružnice připsané straně a .

Z podobnosti trojúhelníků BIZ a I_ABZ_A plyne

$$\frac{\rho}{s-b} = \frac{|IZ|}{|ZB|} = \frac{|BZ_A|}{|Z_AI_A|} = \frac{s-c}{\rho_A}.$$

Obdržíme

$$\rho \rho_a = (s - b)(s - c). \quad (9)$$

Vynásobením rovnic (8) a (9) dostaneme

$$\rho^2 = \frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s},$$

což stejně jako v předešlém případě vede na Heronův vzorec.

4. způsob odvození

Tentokrát budeme uvažovat všechny tři kružnice připsané stranám trojúhelníku ABC . Značení bodů z předchozího důkazu konzistentně rozšíříme ve shodě s obr. 4.

Nejprve dokážeme identitu

$$|AB| \cdot |AC| = |AI| \cdot |AI_A|. \quad (10)$$

Jelikož CI a CI_A jsou osy vedlejších úhlů, svírají pravý úhel. K analogickému poznatku dospějeme v případě os BI a BI_A . Čtyřúhelník BI_ACI je tedy tětiový a I_AI je průměr kružnice k jemu opsané. Nyní uvažme osově souměrný obraz C' bodu C podle osy I_AI (na obr. 4 zakreslen není). Tento bod leží na kružnici k opsané čtyřúhelníku a navíc leží na přímce AB . Pokud $|AC'| \neq |AB|$, pak $C' \neq B$ a mocnost $m(A)$ bodu A ke kružnici k je rovna

$$m(A) = |AI| \cdot |AI_A| = |AC'| \cdot |AB| = |AC| \cdot |AB|.$$

V případě $|AC'| = |AB|$ není obtížné dokázat, že kružnice k se dotýká stran AB a AC a vztah (10) zůstává v platnosti.

Z obr. 4 plyne dále identita

$$|AC| \cdot |AB| = |AI_C| \cdot |AI_B|. \quad (11)$$

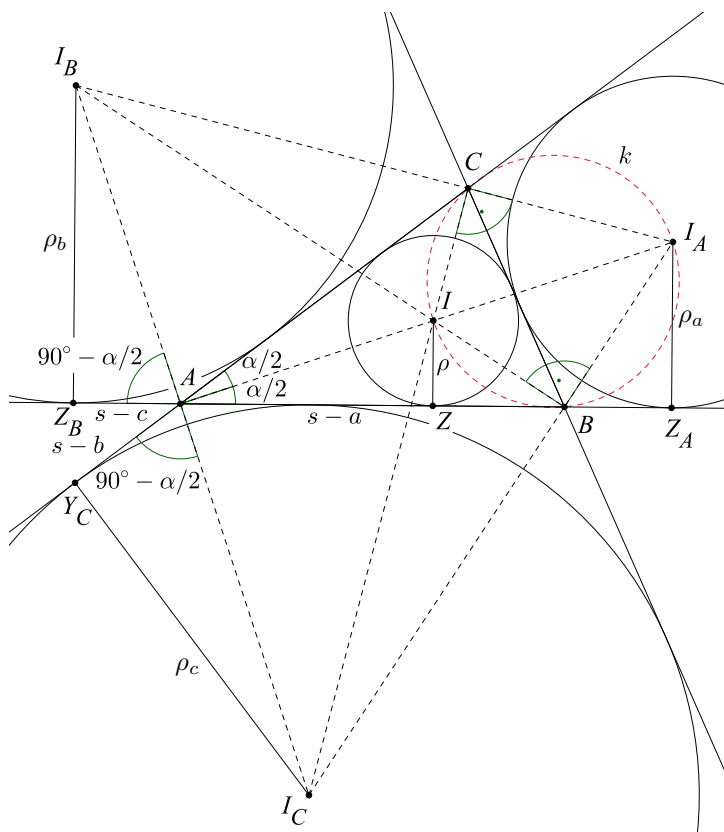
(Dokážeme ji detailně v úloze 1 na str. 25.)

Heronův vzorec pak získáme postupnou úpravou vztahu

$$S = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \sin \alpha. \quad (12)$$

Jelikož $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$, přepíšeme (12) do tvaru

$$S = |AC| \cdot |AB| \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$



Obr. 4 Čtvrté odvození Heronova vzorce

S přihlédnutím ke vztahům (10) a (11) výše uvedený vztah upravíme:

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{|AC| \cdot |AB| \cdot |AC| \cdot |AB| \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \\
 &= \sqrt{|AI| \cdot |AI_A| \cdot |AI_C| \cdot |AI_B| \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \\
 &= \sqrt{|AI| \cos \frac{\alpha}{2} \cdot |AI_A| \cos \frac{\alpha}{2} \cdot |AI_C| \sin \frac{\alpha}{2} \cdot |AI_B| \sin \frac{\alpha}{2}} = \\
 &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.
 \end{aligned}$$

Poznámka. Poslední rovnost vyplývá z následujících identit, viz obr. 4:

$$\begin{aligned} |AI| \cos \frac{\alpha}{2} &= |AZ| = s - a, & |AI_A| \cos \frac{\alpha}{2} &= |AZ_A| = s, \\ |AI_C| \sin \frac{\alpha}{2} &= |AI_C| \cos \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = |AY_C| = |CY_C| - |AC| = s - b, \\ |AI_B| \sin \frac{\alpha}{2} &= |AI_B| \cos \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = |AZ_B| = |BZ_B| - |AB| = s - c. \end{aligned}$$

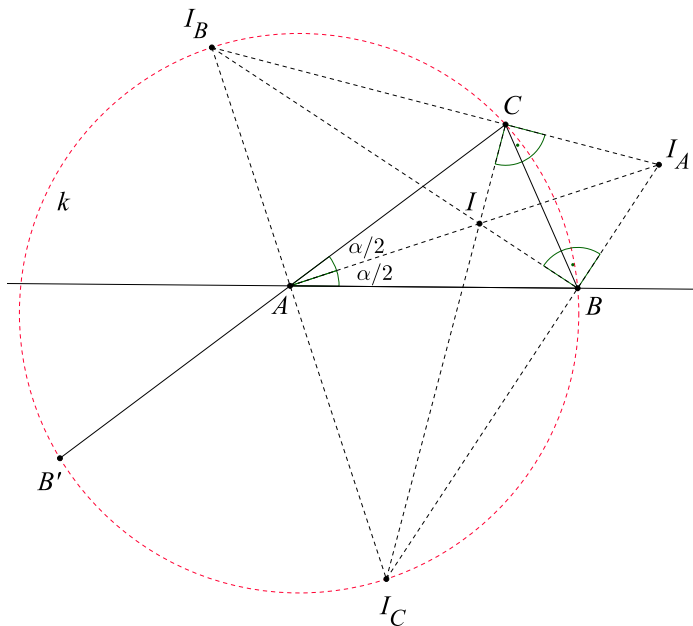
Úloha 1

Dokažte identitu (11) (obr. 4).

Řešení. Čtyřúhelník $I_B C B I_C$ je tětiový (obr. 5), průměrem kružnice k jemu opsané je úsečka $I_B I_C$. Uvažme osově souměrný obraz B' bodu B podle přímky $I_B I_C$. Protože přímka $I_B I_C$ je vnější osou úhlu CAB , leží tento bod na kružnici k a také leží na přímce AC . Identita

$$|AI_C| \cdot |AI_B| = |AB'| \cdot |AC| = |AB| \cdot |AC|$$

vyplývá z různých vyjádření mocnosti bodu A ke kružnici k .



Obr. 5 Řešení úlohy 1

Úloha 2

Dokažte platnost vztahu

$$S = \sqrt{\rho \rho_a \rho_b \rho_c},$$

kde ρ_a, ρ_b, ρ_c jsou poloměry kružnic připsaných stranám a, b, c trojúhelníku ABC atd.

Řešení. Vyjdeme ze vzorce, který jsme použili při čtvrtém odvození Hero-nova vzorce a upravíme ho následovně:

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{|AI| \cdot |AI_A| \cdot |AI_B| \cdot |AI_C| \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \sqrt{|AI| \sin \frac{\alpha}{2} \cdot |AI_A| \sin \frac{\alpha}{2} \cdot |AI_B| \cos \frac{\alpha}{2} \cdot |AI_C| \cos \frac{\alpha}{2}}, \end{aligned}$$

přičemž (viz obr. 4):

$$|AI| \sin \frac{\alpha}{2} = \rho,$$

$$|AI_A| \sin \frac{\alpha}{2} = \rho_a,$$

$$|AI_B| \cos \frac{\alpha}{2} = \rho_b,$$

$$|AI_C| \cos \frac{\alpha}{2} = \rho_c.$$

Literatura

- [1] Švrček, J. Vanžura, J.: Geometrie trojúhelníka. Polytechnická knižnice, SNTL, Praha, 1988.
- [2] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky. Prometheus, Praha, 2008.
- [3] Dunham W.: Journey through Genius. Penguin Books, 1991.

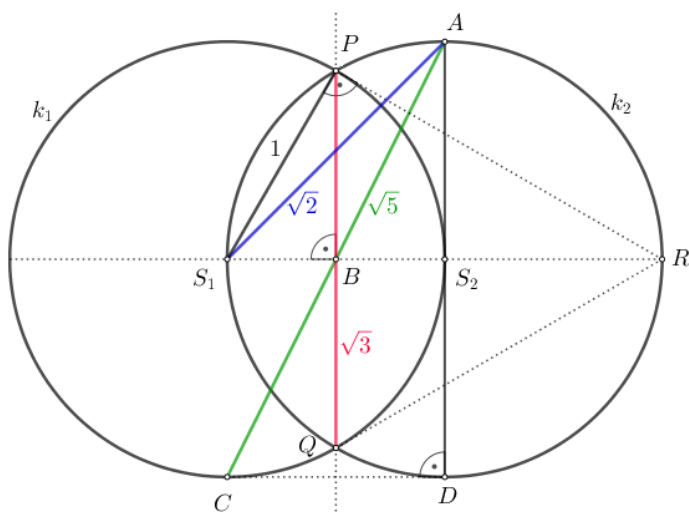
Užitečná dvojice kružnic

LENKA JUKLOVÁ – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V tomto příspěvku se budeme zabývat konstrukcemi úseček, jejichž délky jsou iracionální čísla tvaru $\sqrt{n}$, kde n je přirozené číslo, které není druhou mocninou jiného přirozeného čísla. Cílem článku je poukázat na jednu užitečnou konfiguraci dvojice jednotkových kružnic, v níž lze snadno objevit úsečky, jejichž délky jsou rovny některým výše uvedeným iracionálním číslům, a to buď přímo, nebo doplněním vhodného bodu(ů) v této konfiguraci. Uvedený postup je méně obvyklý, avšak zejména díky snadné konstrukci a důkazům založených na Pythagorově větě a Eukleidových větách mohou jej využít učitelé přímo v hodinách planimetrie věnovaných výše zmíněnému učivu.

Uvažujme dvě jednotkové kružnice k_1, k_2 po řadě se středy S_1, S_2 , z nichž každá prochází středem druhé z nich. Označme P, Q průsečíky kružnic k_1, k_2 a B průsečík přímek PQ a S_1S_2 , viz obr. 1. Je zřejmé, že kružnice k_1, k_2 jsou souměrně sdružené podle přímky PQ (jejich chordály).



Obr. 1

Označme dále A , D průsečíky tečny ke kružnici k_1 sestrojené v bodě S_2 s kružnicí k_2 , viz obr. 1, R druhý z průsečíků přímky S_1S_2 s kružnicí k_2 a C bod kružnice k_1 středově souměrný s bodem A ve středové souměrnosti se středem B .

Nejprve ukážeme, že platí

- (i) $|S_1A| = \sqrt{2}$,
- (ii) $|PQ| = \sqrt{3}$,
- (iii) $|AC| = \sqrt{5}$.

Jednotlivá tvrzení lze snadno dokázat pouze s využitím Pythagorovy věty a vět Eukleidových.

ad (i) Tvrzení plyne přímo z Pythagorovy věty. Trojúhelník S_1S_2A je pravoúhlý rovnoramenný s pravým úhlem při vrcholu S_2 a odvěsnami délky 1. Zřejmě tedy platí $|S_1A| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ (obr. 1).

ad (ii) Z Thaletovy věty plyne, že trojúhelník S_1RP je pravoúhlý trojúhelník s pravým úhlem při vrcholu P , úsečka PB je jeho výška z vrcholu P (obr. 1). Ze vzájemné polohy obou kružnic plyne

$$|S_1B| = |BS_2| = \frac{1}{2}, \quad |S_1R| = 2 \quad \text{a} \quad |BR| = \frac{3}{2}.$$

Podle Eukleidovy věty o výšce v pravoúhlém trojúhelníku S_1RP tak platí

$$|PB| = \sqrt{|S_1B| \cdot |BR|} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vzhledem k tomu, že B je střed úsečky PQ , platí $|PQ| = 2|PB| = \sqrt{3}$.

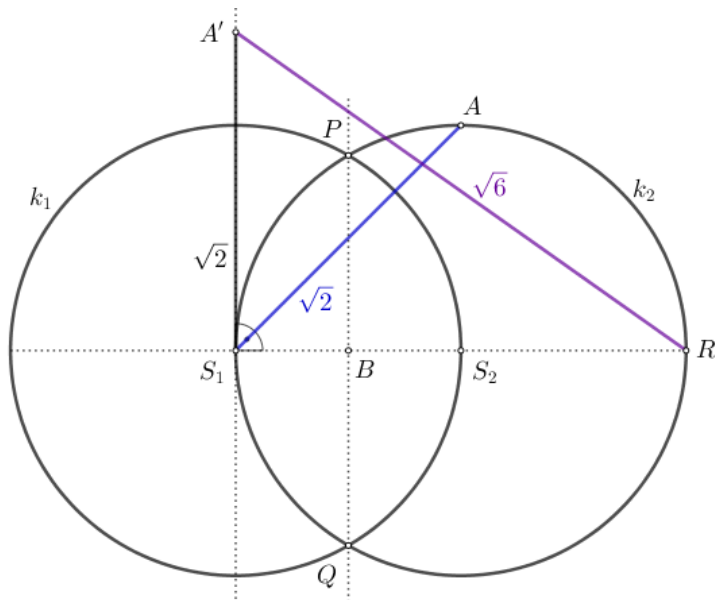
ad (iii) K důkazu tvrzení využijeme opět Pythagorovu větu. Bod $C \in k_1$ je obrazem bodu A ve středové souměrnosti se středem B a současně je souměrně sdružený s bodem D vzhledem k ose PQ . Tečna ke kružnici k_2 sestrojená v bodě D je tedy totožná s tečnou ke kružnici k_1 sestrojenou v jejím bodě C a je kolmá k PQ , a tedy i k AD . Trojúhelník ACD je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu D , v němž $|CD| = 1$, $|AD| = 2$. Platí tedy (obr. 1)

$$|AC| = \sqrt{|AD|^2 + |CD|^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

Úsečky délek $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ je tedy v uvedené konfiguraci kružnic možno objevit přímo. Doplněním dalšího vhodného bodu můžeme získat postupně úsečky délek $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, atd.

Uvažujme otočení $\mathcal{R}(S_1; +45^\circ)$, v němž se bod A zobrazí na bod A' (obr. 2). Trojúhelník $A'S_1R$ je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu S_1 . Pro délku jeho přepony $A'R$ platí

$$|A'R| = \sqrt{|A'S_1|^2 + |S_1R|^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{6}.$$



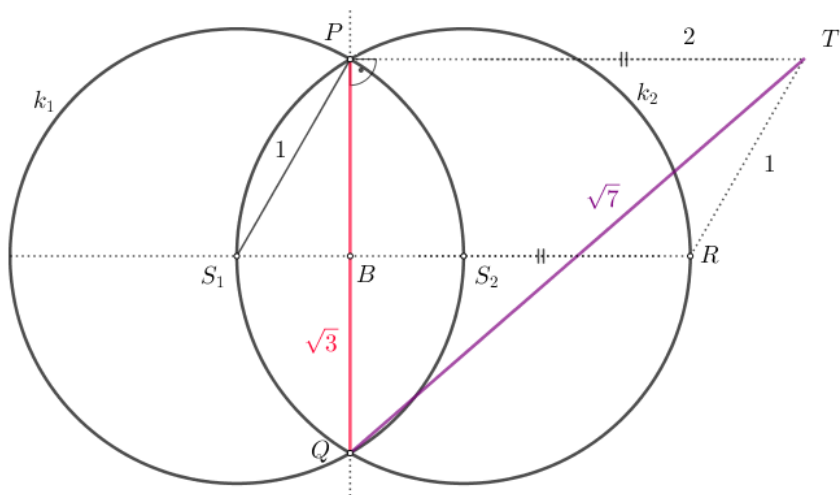
Obr. 2

Následující konstrukce úsečky délky $\sqrt{7}$, která vychází rovněž z prezentované konfigurace, využívá doplnění trojice bodů P , S_1 , R na rovnoběžník PS_1RT (obr. 3), přičemž pro délky jeho stran platí

$$|PS_1| = |TR| = 1 \quad \text{a} \quad |S_1R| = |PT| = 2.$$

Vzhledem k tomu, že $PS_1 \parallel TR$ a $PQ \perp S_1R$, je také $PQ \perp PT$. Trojúhelník PQT je tedy pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu P a podle Pythagorovy věty platí

$$|PT| = \sqrt{|PQ|^2 + |PT|^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2^2} = \sqrt{7}.$$



Obr. 3

Otočení lze využít také při konstrukci úsečky délky $\sqrt{8}$. Uvažujme otočení $\mathcal{R}(R; -90^\circ)$, obraz bodu S_1 v tomto otočení označme S'_1 (obr. 4). Trojúhelník $S_1RS'_1$ je pravoúhlý rovnoramenný s pravým úhlem při vrcholu R a shodnými odvěsnami $|RS_1| = |RS'_1| = 2$. Platí tak

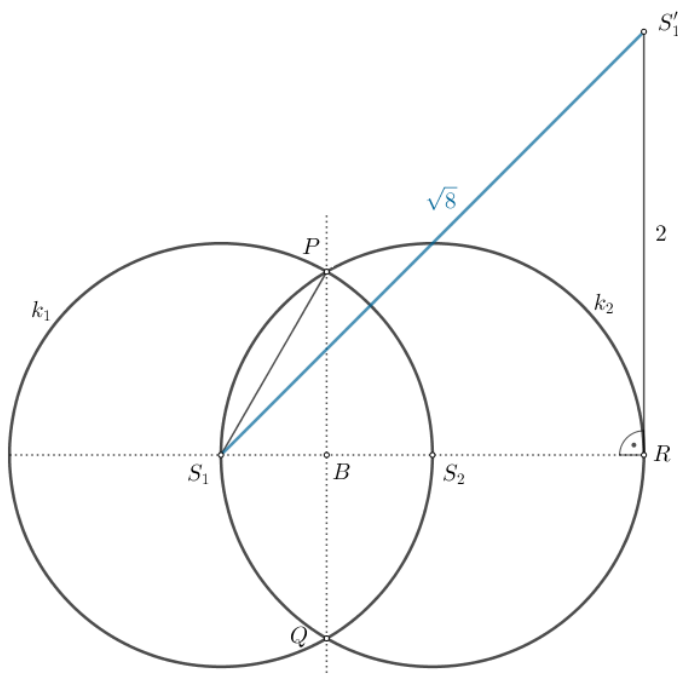
$$|S_1S'_1| = \sqrt{|S_1R|^2 + |RS'_1|^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Konstrukci (některých v pořadí dalších) úseček iracionálních délek, tj. úseček délek $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$ atd., ponecháme zájemcům o tuto problematiku k samostatnému procvičení (se snadnými návody). Platí např.

$$\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1^2}; \quad \sqrt{11} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{2})^2}; \quad \sqrt{12} = 2\sqrt{3};$$

$$\sqrt{13} = \sqrt{3^2 + 2^2}; \quad \sqrt{14} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{5})^2}.$$

Snadno také vidíme, že uvedenou konfiguraci lze využít ke konstrukci úseček délek $r \cdot \sqrt{n}$, kde r je dané kladné racionální číslo a n přirozené číslo, které není druhou mocninou jiného přirozeného čísla, např. $\frac{3}{4}\sqrt{13}$ apod.



Obr. 4

Popsanou konfiguraci dvou shodných jednotkových kružnic lze využít naznačeným způsobem k rychlé konstrukci úseček délek $\sqrt{n}$, kde n není druhou mocninou jiného přirozeného čísla. Vycházíme z jediného generického obrázku. Tyto konstrukce jsou efektivní především pro n malá přirozená ($n \leq 20$). Jde přitom o tzv. *stavebnicovou* metodu, při níž vycházíme z jedné a téže konfigurace. Je však nutné konstatovat, že popsanou metodou se hůře konstruují úsečky délek $\sqrt{n}$ pro velká n . Při konstrukci takových úseček je zapotřebí sestavit poměrně velké množství úseček s racionálními či iracionálními délkami $\sqrt{d}$, kde d je přirozené číslo menší než n .

Literatura

- [1] Chodorová, M. Juklová, L.: Pravidelný sedmnáctiúhelník. Matematika–Fyzika–Informatika, roč. 29 (2020), č. 3, s. 161–170.
- [2] Švrček, J.: Konstrukce pravidelného pětiúhelníku. Matematika a fyzika ve škole, roč. 16 (1986), č. 8, s. 524–527.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 267 a 268 můžete zaslat nejpozději do 30. 6. 2021 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu *mfi@upol.cz*.

Úloha 267

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s odvěsnami délek $|BC| = a$ a $|AC| = b$, $a < b$, protnou osy jeho vnitřního a vnějšího úhlu při vrcholu C přímku AB po řadě v bodech E a F . Určete obsah trojúhelníku EFC .

Jaroslav Zhouf

Úloha 268

V oboru reálných čísel najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} px + 2y &= 2, \\ x + (p^2 - 3)y &= p - 1 \end{aligned}$$

s reálným parametrem p .

Pavel Calábek

Dále uvádíme řešení úloh 263 a 264, jejichž zadání jsme zveřejnili ve 3. čísle loňského (29.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 263

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, které mají pro každé přirozené číslo m následující vlastnost: pokud označíme $d_1, d_2, \dots, d_n$ všechny dělitele čísla m , platí

$$f(d_1) + f(d_2) + \dots + f(d_n) = m.$$

Pavel Calábek

Řešení. Číslo 1 má jediného dělitele 1. Platí tak $f(1) = 1$. Necht' p je libovolné prvočíslo, to má právě dva dělitele 1 a p , podle zadání platí

$$p = f(1) + f(p) = 1 + f(p),$$

proto $f(p) = p - 1$. Pro číslo p^2 se třemi děliteli 1, p a p^2 platí

$$p^2 = f(1) + f(p) + f(p^2) = 1 + (p - 1) + f(p^2).$$

Odtud $f(p^2) = p^2 - p$. Necht' p a q jsou různá prvočísla. Číslo pq má čtyři dělitele 1, p , q a pq . Podle zadání máme

$$pq = f(1) + f(p) + f(q) + f(pq) = 1 + (p - 1) + (q - 1) + f(pq),$$

odtud $f(pq) = (p - 1)(q - 1)$.

Necht' přirozené číslo m má následující rozklad na součin prvočísel

$$m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}.$$

Užitím principu matematické indukce vzhledem k součtu $n = k_1 + k_2 + \dots + k_s$ (který nazveme *výškou* m) dokážeme, že pro všechna přirozená čísla s výšky $n \in \mathbb{N}_0$

$$f(m) = (p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1})(p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1}) \dots (p_s^{k_s} - p_s^{k_s-1}). \quad (1)$$

Pro $n = 0, 1, 2$ to bylo dokázáno v předešlém odstavci. Předpokládejme, že tvrzení platí pro přirozená čísla s výškou nejvýše $n \geq 2$, dokážeme že platí i pro přirozená čísla s výškou $n + 1$. Necht' p je některé prvočísla, které dělí číslo m s výškou $n + 1$. Rozlišíme dva případy.

(i) Necht' $m = p^{n+1}$. Potom dle zadání platí

$$\begin{aligned} p^{n+1} &= 1 + f(p) + \dots + f(p^n) + f(p^{n+1}) = \\ &= 1 + (p - 1) + \dots + (p^n - p^{n-1}) + f(p^{n+1}). \end{aligned}$$

Odtud $f(p^{n+1}) = p^{n+1} - p^n$, což v tomto případě dokazuje (1).

(ii) Necht' k ($1 \leq k \leq n$) je nejvyšší mocnina prvočísla p , která dělí m a platí

$$m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s} p^k = a \cdot p^k,$$

kde $1 \leq k \leq n$ a výška čísla m je $n + 1$. Všechny dělitele čísla m můžeme rozdělit na dvě diskunktní skupiny. V první jsou všichni dělitelé čísla $m/p = a \cdot p^{k-1}$ výšky n , ve druhé jsou dělitelé čísla m , kteří jsou násobkem p^k . Když pro každé číslo z první skupiny uvažujeme jeho funkční hodnotu funkce f , pak součet těchto funkčních hodnot je dle zadání $a \cdot p^{k-1}$. Označíme-li $d_1, \dots, d_r = a$ všechny dělitele čísla a , potom ve druhé skupině jsou čísla tvaru $d_i \cdot p^k$, kde $1 \leq i \leq r$. Pro $i < r$ mají tato čísla výšku nejvýše n . Podle indukčního předpokladu platí $f(d_i \cdot p^k) = f(d_i)(p^k - p^{k-1})$, součet funkčních hodnot čísel ze druhé skupiny tak podle zadání je

$$(p^k - p^{k-1})(f(d_1) + \dots + f(d_{r-1})) + f(a \cdot p^k) = (p^k - p^{k-1})(a - f(a)) + f(a \cdot p^k).$$

Spojením obou předchozích výsledků zjistíme, že součet funkčních hodnot všech dělitelů čísla m je

$$a \cdot p^{k-1} + (p^k - p^{k-1})(a - f(a)) + f(a \cdot p^k) = a \cdot p^k - f(a)(p^k - p^{k-1}) + f(a \cdot p^k).$$

Podle zadání je ovšem tento součet roven $a \cdot p^k$, odtud již dostaneme

$$f(a \cdot p^k) = f(a)(p^k - p^{k-1}),$$

což dokazuje (1) i ve druhém případě.

Užitím principu matematické indukce tak (1) platí pro všechna přirozená čísla m .

Poznámka. Funkce f , kterou jsme našli je jediná, a je to tzv. Eulerova funkce φ .

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy a *Adam Mendl* z GPdC v Táboře.

Neúplné řešení zaslal *Adam Blažek* z G v Plzni, Mikulášské nám.

Úloha 264

Tři bohatýři bojují s drakem Gorynyčem. Ilja Muromec každým svým úderem meče setne drakovi polovinu jeho hlav a k tomu ještě jednu. Dobryňa Nikitič každým svým úderem odetne drakovi třetinu jeho hlav a k tomu ještě dvě. Aljoša Popovič utne každým svým úderem drakovi čtvrtinu jeho hlav a k tomu ještě tři. Bohatýři bojují s drakem v pořadí, které si sami zvolí. Pokud žádný z bohatýřů nemůže utít drakovi hlavy (neboť počet hlav by nebyl celočíselný), Gorynyč tři bohatýry sežere. Rozhodněte, zda bohatýři mohou stít všechny hlavy draku Goryničovi, který má 29! hlav.

převzato ze soutěže Turnaj měst, jaro 2020

Řešení. Nechť k je přirozené číslo. Pokud má drak $2k$ hlav a zaútočí na něj Ilja Muromec, zbude mu $k - 1$ hlav. Pokud má Gorynyč $3k$ hlav, potom mu jich po útoku Dobryňa Nikitiče zbude $2k - 2 = 2(k - 1)$, konečně pokud má drak $4k$ hlav, zbude mu po útoku Aljoši Popoviče $3k - 3 = 3(k - 1)$ hlav. Protože $k - 1$ je celé nezáporné číslo, plyne odtud, že po útoku libovolného bohatýra na draka s kladným počtem hlav mu jich zbude celý nezáporný počet.

Číslo 29! je sudé. Ukážeme, že pokud bohatýři začnou útočit na draka se sudým počtem hlav, po několika (jednom nebo dvěma) vhodně zvolených úderech bude mít Gorynyč počet hlav, který je opět dělitelný dvěma. Bohatýři budou své útoky volit následujícím způsobem:

- Pokud je počet hlav dělitelný 4, tedy je roven $4k$ pro vhodné přirozené číslo k , zaútočí Aljoša Popovič. Po jeho zásahu bude mít drak $3k - 3$ hlav. Jestliže je toto číslo liché (a tedy $k \geq 2$), zaútočí dále Dobryňa Nikitič, drak pak bude mít $2k - 4 = 2(k - 2)$ hlav, tedy počet dělitelný dvěma.
- Pokud je počet Gorynyčových hlav sudý ale není dělitelný čtyřmi, tedy $4k + 2$ pro vhodné celé nezáporné celé číslo k , napadne jej Ilja Muromec, po jeho zásahu bude mít drak $2k$ hlav.

Protože po každém útoku se počet Gorynyčových hlav zmenší, opakováním těchto tahů mu bohatýři nakonec všechny hlavy setnou.

Jiné řešení. Pokud má drak 0 hlav, bohatýři vyhráli. Pokud má 1 nebo 5 hlav, tak žádný bohatýr nemůže zaútočit a budou všichni sežráni. Konečně, pokud má Gorynyč 2, 3 nebo 4 hlavy, potom je mohou bohatýři jedním úderem vedeným po řadě Iljou Muromcen, Dobryňou Nikitičem nebo Aljošou Popovičem všechny stít.

Užitím principu matematické indukce ukážeme, že pokud má drak počet hlav z množiny $A_k = \{6k, 6k + 2, 6k + 3, 6k + 4\}$ pro celé nezáporné číslo k , potom bohatýři mohou drakovi nějakou posloupností úderů stít všechny hlavy. Pro $k = 0$ to bylo dokázáno v předcházejícím odstavci.

Předpokládejme, že dané tvrzení platí pro všechna celá nezáporná čísla menší než k a počet Gorynyčových hlav je z množiny A_k . Ukážeme, že některý z bohatýrů nyní může drakovi stít hlavy tak, že počet jeho hlav bude z některé množiny A_l pro $0 \leq l < k$ a bohatýři tak mají posloupnost seků, která vede k zabití draka.

- Pokud má drak $6k$ hlav, potom po úderu Dobryni Nikitiče jich bude mít $4k - 2 \geq 2$. Jelikož je to číslo sudé a menší než $6k$, patří do nějaké množiny A_l pro $l < k$.
- Pokud má Gorynyč $6k + 3$ hlav, bude jich mít po úderu Dobryni Nikitiče $4k \geq 4$, což je číslo sudé a menší než $6k$, proto opět patří do nějaké množiny A_l pro $l < k$.
- Nechť má drak $6k + 2$ hlav, potom jich po třetí Ilji Muromce bude mít $3k$, protože $3 \leq 3k < 6k$ a jedná se o číslo dělitelné 3, patří opět do některé z množin A_l .
- Konečně, nechť má Gorynyč $6k + 4$ hlav.
 - o Pokud je číslo $3k + 1$ sudé (tedy k liché), udeří Ilja Muromec, po jeho seku bude mít drak $3k + 1$ hlav, stejně jako v přechodím lehce nahlédneme, že toto sudé číslo patří do některé z množin A_l .

o V opačném případě udeří Aljoša Popovič, potom bude mít Gorynyč $\frac{9}{2}k$ hlav, což je číslo dělitelné třemi, tedy patřící do vhodné množiny A_l .

Užitím principu matematické indukce tak tvrzení platí pro všechna nezáporná celá čísla k . Protože číslo $29!$ je (nejmenším) prvkem množiny $A_{29!/6}$, mají bohatýři posloupnost úderů, kterými setnou Gorynyčovi všechny hlavy.

Poznámka. Zvolené posloupnosti tahů v obou řešeních jsou jednoznačné a určují nám pořadí, ve kterém jistě bohatýři Gorynyčovi utnou všechny hlavy. Ovšem nemusí to být jediné (natož nejkratší) posloupnosti úderů, kterými lze drakoví všechny hlavy stít. Označme bohatýře I , D , A podle prvního písmene jejich jména. Vypišme posloupnosti, jak lze drakovi se 20 hlavami všechny utnout. Použijme zápis, kde např. $I4$ znamená, že drakovi po zásahu Ilji zbudou 4 hlavy. Algoritmus z prvního řešení dá následující posloupnost 4 zásahů

$$A12 A6 I2 I0,$$

algoritmus ze druhého posloupnost 3 útoků

$$I9 N4 A0.$$

Draka lze ovšem zabít i následujícími posloupnostmi 4 zásahů

$$A12 A6 N2 I0, \quad A12 N6 I2 I0, \quad A12 N6 N2 I0.$$

Užitím počítače zjistíme, že podle prvního algoritmu bohatýři Gorynyče zabijí po 175 útocích (Ilja 36, Dobryňa 43, Aljoša 96), podle druhého algoritmu po 136 úderech (Ilja 64, Dobryňa 36, Aljoša 36). Přitom nejkratší posloupnost vedoucí k zabití draka se skládá ze 116 a nejdelší ze 192 úderů.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Amálie Dostálíková*, *Vendula Onderková* obě z GJŠ v Přerově a *Karel Stehlík* z GChD v Praze 5, Zborovská 45.

Nedopatřením se nám do seznamu správných řešitelů úlohy 262 v minulém čísle nedostal *Lubomír Hajdanka* z Michalovců, za což se mu omlouváme a dodatečně jej do seznamu zařazujeme.

Pavel Calábek

Výsledky českých žáků ve výzkumu TIMSS 2019

DANA MANDÍKOVÁ – VLADISLAV TOMÁŠEK

MFF UK, Praha – Česká školní inspekce, Praha

TIMSS (zkratka pro Trends in International Mathematics and Science Study) je mezinárodní projekt, který zjišťuje vědomosti a dovednosti žáků v matematice a přírodních vědách. Organizuje ho Mezinárodní asociace pro hodnocení výsledků vzdělávání (IEA). TIMSS se zaměřuje na devítileté a třináctileté žáky (obvykle jde o žáky 4. ročníků základních škol a 8. ročníků základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií) a probíhá ve čtyřletých cyklech. Česká republika se zapojila již do prvního šetření, které proběhlo v roce 1995, a účastnila se všech cyklů kromě roku 2003. V letech 2011, 2015 a 2019 byli u nás testováni jen žáci 4. ročníků základních škol.

V roce 2019 začal přechod na elektronickou formu testování na počítačích nebo tabletech. Tuto možnost využila polovina zúčastněných zemí včetně České republiky. Z důvodu možnosti porovnání s dřívějšími písemnými testy proběhlo v zemích s elektronickým testováním také samostatné testování tzv. trendových úloh (úlohy, které jsou v neměnné formě součástí všech šetření) v písemné formě. Elektronické testování umožnilo inovovat úlohy a zařadit do nich nové prvky jako např. přesouvání či otáčení objektů. Vytvořeny byly i úlohy označované jako PSI (Problem Solving and Inquiry tasks), ve kterých žáci řeší problémy a bádají. Výsledky těchto úloh budou zveřejněny samostatně v průběhu roku 2021. Součástí výzkumu je vždy i rozsáhlé dotazníkové šetření mezi řediteli, učiteli, žáky a jejich rodiči, které zjišťuje informace o podmínkách vzdělávání, průběhu výuky, rodinném zázemí žáků. Ty se pak využívají při vysvětlování rozdílů ve výsledcích žáků. Počty respondentů v ČR zachycuje tabulka 1.

Tabulka 1 Počty respondentů TIMSS 2019 v ČR

Forma testu	Žáci	Ředitelé	Učitelé	Rodiče
Elektronická – eTIMSS	4 494	151	334	3 970
Písemná – paperTIMSS	2 029	57	118	1 620
Celkem	6 523	208	452	5 590

Článek podává základní informaci o celkových výsledcích českých žáků v šetření TIMSS 2019 a o jejich časovém vývoji. Připojeny jsou i některé postřehy z dotazníkového šetření.

Koncepce šetření TIMSS 2019

Výsledky žáků jsou v matematice i v přírodních vědách hodnoceny ze dvou pohledů označovaných jako *obsah* a *operace*. Obsah je vymezen učivem, jehož zvládnutí je testováno. Operace jsou vymezeny dovednostmi, které mají žáci při práci s učivem prokázat.

V tab. 2 jsou uvedeny sledované oblasti učiva a dovednosti s podílem jejich zastoupení.

Tabulka 2 Oblasti učiva a dovednosti

Oblasti učiva				Dovednosti	
Matematika		Přírodověda			
Čísla	50 %	Živá příroda	45 %	Prokazování znalostí	40 %
Měření a geometrie	30 %	Neživá příroda	35 %	Používání znalostí	40 %
Data	20 %	Nauka o Zemi	20 %	Uvažování	20 %

Prezentace výsledků

Výsledky zemí jsou ve výzkumu TIMSS prezentovány dvěma způsoby. Prvním je prezentace pomocí skóre (počtu bodů), které vyjadřují úspěšnost žáků na škálách výsledků. Pro matematiku i přírodovědu byly zkonstruovány jednak škály celkové, jednak škály dílčí odpovídající jednotlivým obsahovým a operačním kategoriím. Škály byly vytvořeny tak, aby umožňovaly srovnávat výsledky žáků v průběhu času.

Základem druhého způsobu prezentace výsledků žáků jsou čtyři vědomostní úrovně (jejich vymezení lze nalézt v [3, s. 86–90], ukázky několika

úloh pro různé úrovně jsou na konci tohoto článku). Každá tato úroveň je určena minimálním počtem bodů, kterého musí žák dosáhnout. Výsledky zemí jsou pak vyjádřeny procentuálním zastoupením jejich žáků na jednotlivých vědomostních úrovních.

Celkové výsledky a jejich vývoj

Šetření TIMSS 2019 se ve čtvrtých ročnících zúčastnilo 58 zemí a 6 samosprávných celků. S ohledem na velký počet a různorodost zapojených zemí jsou jak v národní zprávě [3], tak v tomto článku uváděny pouze výsledky zemí EU a OECD doplněné o Rusko. Kompletní výsledky lze nalézt v mezinárodní zprávě [2].

Matematika

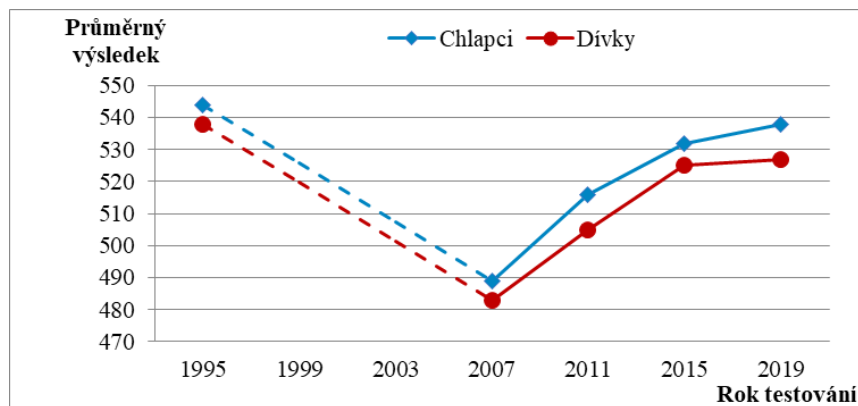
Průměrný výsledek českých žáků 4. ročníku v matematice (533 bodů) byl nad průměrem škály TIMSS (500 bodů) i nad průměrem členských zemí EU (524 bodů). Významně lepšího výsledku než čeští žáci dosáhli v rámci našeho výběru žáci 9 zemí (Korea, Japonsko, Rusko, Severní Irsko, Anglie, Irsko, Lotyšsko, Norsko a Litva). Nejlepší výsledky celkově měli již tradičně žáci asijských zemí (Singapur, Hongkong, Korea, Tchajwan a Japonsko) následovaní žáky Severního Irska a Ruska. Výsledky žáků Rakouska, Nizozemska, USA, Belgie (vlámská), Kypru a Finska byly srovnatelné s českými žáky.

Ze 13 zemí, které se zúčastnily šetření v roce 1995 i 2019, jen Česká republika a Nizozemsko dosáhly horšího průměrného výsledku, přičemž v případě ČR není rozdíl statisticky významný (−8 bodů). Maďarsko mělo výsledek srovnatelný a ostatní země se významně zlepšily (nejvíce Portugalsko o 83 bodů). Čeští žáci se od roku 1995 do roku 2007 v matematice zhoršili nejvíce ze všech zemí, které se zapojily do obou šetření ([1, 6]). Od roku 2007 se výsledek českých žáků významně zlepšil jak v šetření 2011 ([5]), tak 2015 ([4]). Do roku 2019 došlo k nevýznamnému zlepšení o 5 bodů. Výsledek stále nedosahuje hodnotu z roku 1995, ale je s ní již srovnatelný.

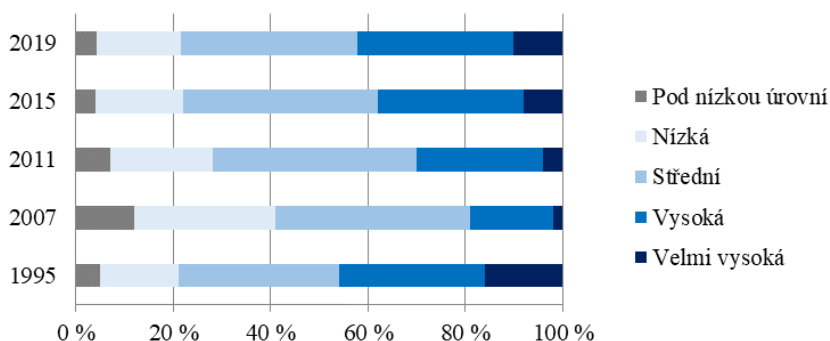
Vývoj průměrných výsledků českých dívek a chlapců ukazuje graf na obr. 1. Chlapci byli ve všech šetřeních významně lepší než dívky.

Vývoj zastoupení českých žáků na jednotlivých vědomostních úrovních zachycuje graf na obr. 2. Podíl žáků na nízké vědomostní úrovni a pod ní se od roku 2007 do roku 2015 snižoval až na hodnoty z roku 1995. Současně

se zvyšoval podíl žáků na dvou nejvyšších úrovních. Od roku 2015 se pak podíl žáků se slabými výsledky nezměnil, podíl žáků s dobrými výsledky se mírně zvýšil. Přesto je ale podíl žáků ve velmi vysoké úrovni významně nižší než v roce 1995.



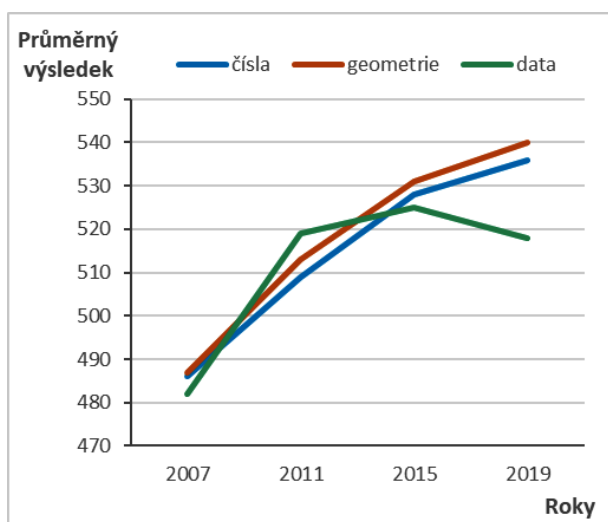
Obr. 1 Vývoj výsledků českých chlapců a dívek – matematika



Obr. 2 Vývoj zastoupení českých žáků na vědomostních úrovních – matematika

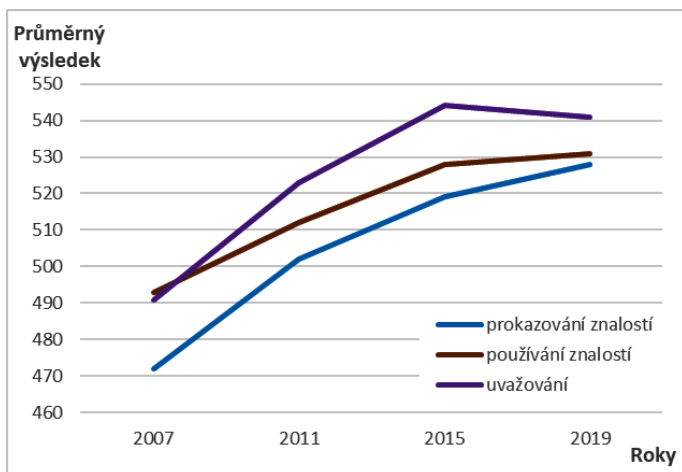
Výsledky na dílčích škálách

Čeští žáci měli v porovnání s celkovým výsledkem v matematice lepší výsledky v tematickém okruhu čísla a v geometrii, naopak horšího výsledku dosáhli v okruhu data. Změny ve výsledcích na dílčích škálách se dají sledovat od roku 2007, kdy došlo ke snížení počtu tematických okruhů. Vývoj výsledků pro ČR v tematických okruzích zachycuje graf na obr. 3. Čeští žáci se oproti roku 2007 zlepšili ve všech třech okruzích učiva, a to nejvíce z 16 zemí z našeho výběru, které se do obou těchto šetření zapojily. Porovnáme-li rok 2015 a 2019, naši žáci se významně zlepšili v okruzích čísla a geometrie. V okruhu data se zhoršili, ale nikoliv významně.



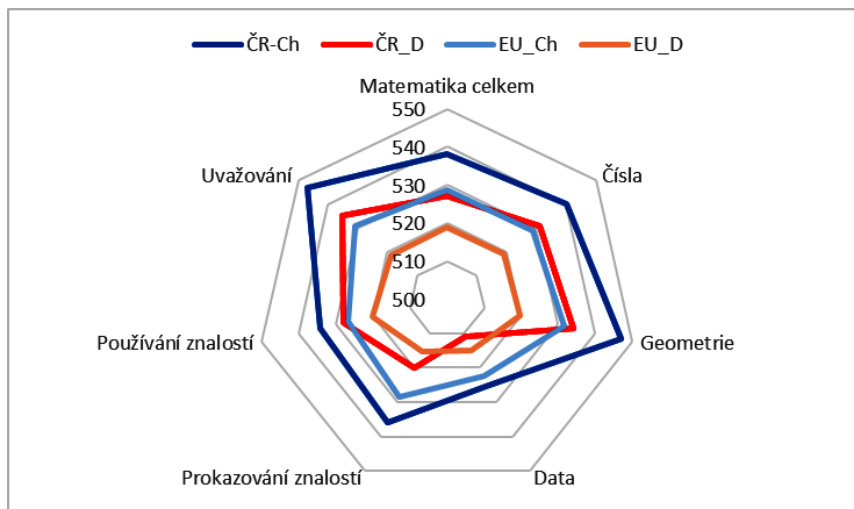
Obr. 3 Změny ve výsledcích v tematických okruzích od roku 2007 – matematika

Co se sledovaných dovedností týče, vedli si čeští žáci ve srovnání s celkovým výsledkem v matematice hůře v prokazování znalostí, naopak lépe v uvažování, v používání znalostí byl pak výsledek srovnatelný. Podobně jako u okruhů učiva se čeští žáci zlepšili od roku 2007 i ve sledovaných dovednostech nejvíce z 16 zúčastněných zemí. Od roku 2015 se významně zlepšili pouze v prokazování znalostí, v používání znalostí a uvažování byl výsledek srovnatelný. Vývoj výsledků pro ČR v dovednostech zachycuje graf na obr. 4.



Obr. 4 Změny ve výsledcích v dovednostech od roku 2007 – matematika

Čeští chlapci byli lepší než dívky ve všech tematických okruzích i dovednostech. Podobně to bylo i s průměrným výsledkem chlapců a dívek členských zemí EU. Zachyceno je to v grafu na obr. 5.

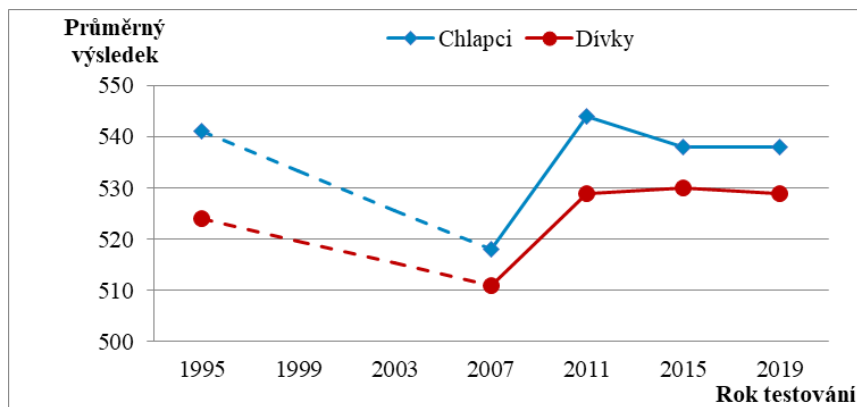


Obr. 5 Průměrné výsledky chlapců a dívek ČR a EU na dílčích škálách – matematika

Přírodověda

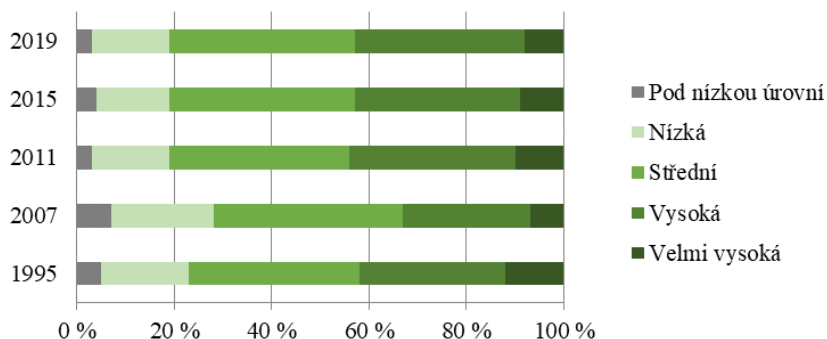
Průměrný výsledek českých žáků 4. ročníku v přírodovědě (534 bodů) byl také nad průměrem škály TIMSS (500 bodů) i nad průměrem členských zemí EU (521 bodů). Významně lepšího výsledku než čeští žáci dosáhli v rámci našeho výběru žáci 5 zemí (Korea, Rusko, Japonsko, Finsko a Lotyšsko). Nejlepší výsledky celkově měli žáci Singapuru. Srovnatelného výsledku s českými žáky dosáhli např. žáci v Polsku, Maďarsku, Anglii, Irsku, Švédsku, Norsku a USA.

Ze 13 zemí, které se zúčastnily šetření v roce 1995 i 2019, mělo Nizozemsko a Rakousko významně horší průměrný výsledek, Česká republika, USA a Nový Zéland dosáhly srovnatelného výsledku a ostatní země se významně zlepšily (nejvíce Kypr o 61 bodů a Portugalsko o 52 bodů). Mezi roky 1995 a 2007 se průměrný výsledek českých žáků v přírodovědě statisticky významně snížil (o 17 bodů). Do roku 2011 se pak významně zvýšil a od té doby jsou hodnoty průměrného výsledku srovnatelné. Vývoj průměrných výsledků českých děvčat a chlapců ukazuje graf na obr. 6. Chlapci byli ve všech šetřeních významně lepší než dívky.



Obr. 6 Vývoj výsledků českých chlapců a dívek – přírodověda

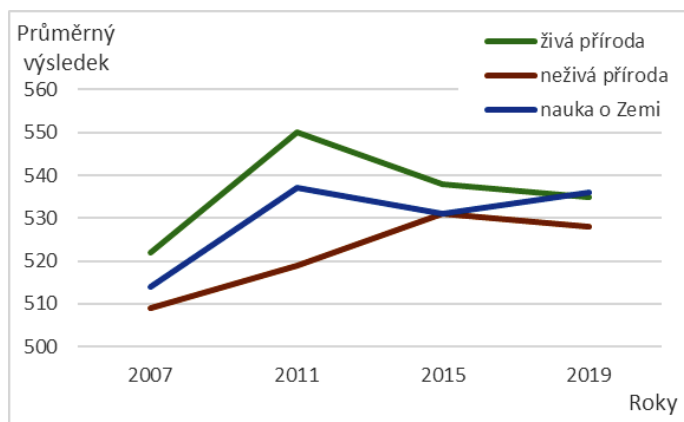
Vývoj zastoupení českých žáků na jednotlivých vědomostních úrovních zachycuje graf na obr. 7. Podíl žáků na nízké vědomostní úrovni a podíl v porovnání s rokem 1995 poklesl. Statisticky významně nižší je ale podíl žáků na velmi vysoké úrovni. Od roku 2011 došlo v zastoupení žáků v jednotlivých vědomostních úrovních jen k nepatrným změnám.



Obr. 7 Vývoj zastoupení českých žáků na vědomostních úrovních – přírodověda

Výsledky na dílčích škálách

Čeští žáci si relativně hůře vedli v úlohách z okruhu neživé přírody, v úlohách z živé přírody a nauky o Zemi byl výsledek srovnatelný s celkovým výsledkem v přírodovědě. Změny ve výsledcích na dílčích škálách se dají sledovat od roku 2007, kdy došlo ke snížení počtu tematických okruhů. Vývoj výsledků pro ČR v tematických okruzích zachycuje graf na obr. 8.

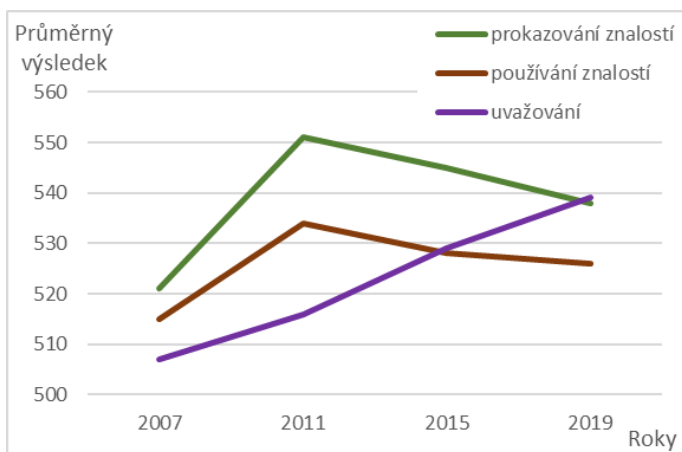


Obr. 8 Změny ve výsledcích v tematických okruzích od roku 2007 – přírodověda

Výsledek českých žáků v roce 2019 byl oproti roku 2007 významně lepší ve všech třech okruzích učiva. Ve srovnání s rokem 2015 jsou výsledky ve

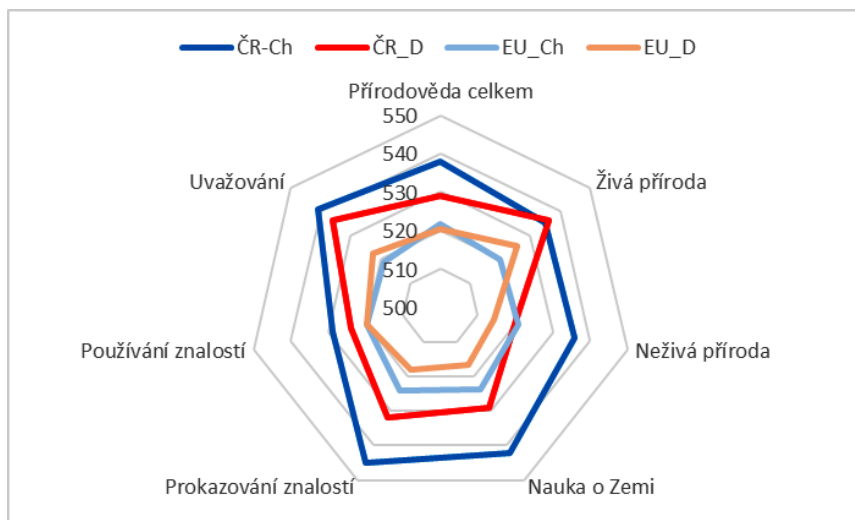
všech okruzích srovnatelné. V okruhu živá příroda dochází od roku 2011 k zhoršování průměrného výsledku, které je za těchto 8 let již významné.

Co se sledovaných dovedností týče, vedli si čeští žáci ve srovnání s celkovým výsledkem v přírodovědě výrazně lépe v prokazování znalostí a naopak hůře v jejich používání, co se týče uvažování, byl výsledek srovnatelný. Čeští žáci se v období od roku 2007 do roku 2019 významně zlepšili ve všech třech okruzích dovedností. Od roku 2015 se pak významně zlepšili jen v uvažování. V prokazování a používání znalostí byl výsledek srovnatelný. V obou těchto okruzích však dochází od roku 2011 k poklesu výsledku a rozdíly za posledních osm let jsou již statisticky významné. Vývoj výsledků pro ČR v dovednostech zachycuje graf na obr. 9.



Obr. 9 Změny ve výsledcích v dovednostech od roku 2007 – přírodověda

Čeští chlapci byli významně lepší než dívky v okruhu neživá příroda a nauka o Zemi, v okruhu živá příroda se jejich výsledky významně nelišily. Lepší výsledek než dívky měli čeští chlapci také v prokazování znalostí, v používání znalostí a v uvažování byly jejich výsledky s dívkami srovnatelné. Průměrné výsledky chlapců a dívek členských zemí EU se neliší v používání znalostí, dívky měly lepší výsledek v uvažování a v okruhu živá příroda, chlapci byli úspěšnější v prokazování znalostí a v okruzích neživá příroda a nauka o Zemi. Průměrné výsledky chlapců a dívek v ČR a EU na dílčích škálách zachycuje graf na obr. 10.



Obr. 10 Průměrné výsledky chlapců a dívek ČR a EU na dílčích škálách – přírodověda

Postřehy z dotazníkových šetření

Součástí šetření TIMSS 2019 bylo dotazníkové šetření mezi řediteli škol, učiteli testovaných žáků, samotnými žáky a jejich rodiči. Dotazníky poskytují cenné doplňující informace a pomáhají při interpretacích výsledků. V dotaznících se obvykle vztahuje více položek k danému tématu a z odpovědí na ně se pak vytváří obecnější ukazatele (indexy). Dále uvádíme některá vybraná zjištění z dotazníkových šetření.

Podmínky výuky

Podle vyjádření ředitelů škol více než polovina žáků v České republice navštěvuje školy, kde se nacházejí spíše dobře situovaní žáci, což je v rámci EU nadprůměrný podíl. Tato skupina žáků dosahuje lepších výsledků.

Z odpovědí rodičů testovaných žáků vyplývá, že v České republice je při nástupu do základní školy nižší podíl žáků zvládajících velmi dobře vybrané početní a čtenářské činnosti, než je průměr členských zemí EU. Tito žáci dosáhli výrazně lepších výsledků než ostatní žáci.

Přibližně 70 % českých žáků 4. ročníku se nachází ve školách, kde má podle ředitelů nedostatek či nevhodnost materiálního vybavení a personálního zajištění určitý vliv na výuku. Tento podíl odpovídá mezinárodnímu

průměru. Přibližně jedna čtvrtina českých žáků navštěvuje školy, kde počet dostupných počítačů převyšuje počet žáků; u poloviny žáků připadají na jeden počítač jeden až dva žáci.

Česká republika patří na základě odpovědí ředitelů škol k zemím s nejnižším důrazem na studijní úspěch žáků. V posledních 12 letech se podle výpovědí učitelů pravidelně zvyšuje podíl českých žáků vyučovaných učiteli, kteří hodnotí míru pochopení cílů ŠVP a míru realizace ŠVP jako vysokou.

Přibližně dvě třetiny českých žáků se nesetkávají se šikanou téměř nikdy, naopak asi jednou týdně se s ní setkává 6 % žáků. Právě u této nejproblematictější skupiny žáků, kteří také dosahují výrazně horších výsledků, bylo v porovnání s rokem 2015 zaznamenáno snížení podílu žáků.

Rodiče žáků v České republice vyjádřili nejmenší spokojenost se školou, do které jejich dítě chodí, ze všech členských zemí EU. Podíl českých žáků velmi spokojených rodičů se školou jen o málo převyšuje jednu třetinu. Nižší míru spokojenosti se školou vyjadřují rodiče s vyšším dosaženým vzděláním.

Průběh výuky

Česká republika patří v EU k zemím s podprůměrným celkovým počtem vyučovacích hodin žáků 4. ročníku a s podprůměrným počtem hodin matematiky i přírodovědy.

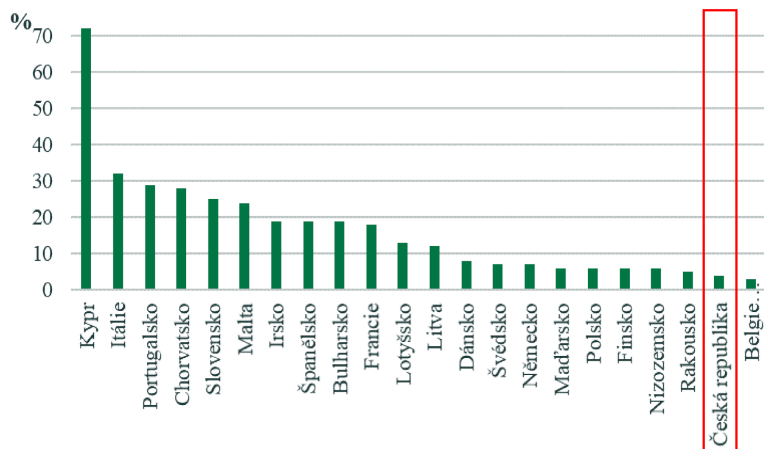
Do dalšího vzdělávání se učitelé zapojili ve větší míře v matematice než v přírodovědě. V obou předmětech byl v porovnání s rokem 2015 zaznamenán ve většině oblastí nárůst intenzity dalšího vzdělávání českých učitelů, naopak překvapivě došlo k poklesu dalšího vzdělávání zaměřeného na využívání informačních technologií. Právě v této oblasti vyjádřili čeští učitelé největší potřebu vzdělávání v budoucnosti.

Učitelé v České republice pociťují ze všech členských zemí EU nejnižší míru omezení výuky ze strany žáků.

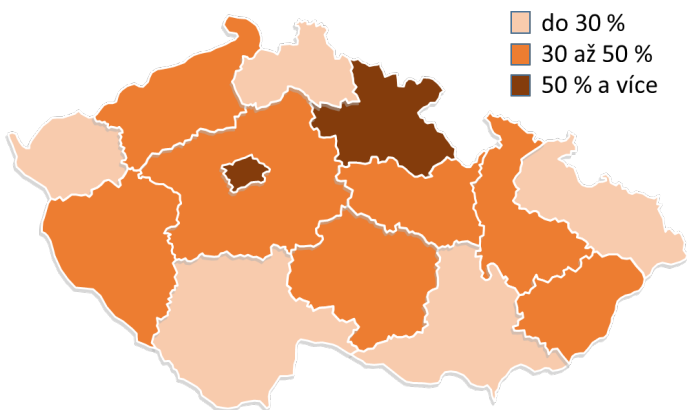
Čeští žáci se v hodinách matematiky setkávají s nevhodným chováním přibližně ve stejné míře jako v průměru žáci členských zemí EU. Žáci s vyšší mírou nevhodného chování v hodinách dosahují horších výsledků.

Česká republika se řadí v EU k zemím s nejnižší podporou badatelských aktivit ze strany učitele v hodinách přírodovědy (viz obr. 11).

Čeští učitelé patří k nejméně spokojeným se svým povoláním (viz obr. 12). Velmi spokojení čeští učitelé učí 35 % žáků, zatímco v zemích EU je to průměrně 50 % žáků.



Obr. 11 Podíl žáků podporovaných učiteli v badatelské činnosti alespoň v polovině hodin – přírodověda



Obr. 12 Podíl žáků vyučovaných velmi spokojenými učiteli v krajích ČR

Žáci

Česká republika patří k zemím s nejvyšším podílem žáků, jejichž předškolní docházka trvala tři roky a více a kteří často prováděli počáteční čtenářské a početní aktivity. Skupiny žáků s kratší předškolní docházkou a s méně častými počátečními aktivitami dosahují v průměru horších výsledků.

Vztah českých žáků ke škole nelze považovat za dobrý, míra jejich sounáležitosti se školou byla jedna z nejnižších. Skupina žáků pociťujících vysokou sounáležitost se školou dosahuje průměrně vyšších výsledků v matematice a v přírodovědě než skupina žáků s nízkou sounáležitostí. Žáci v České republice chodí do školy nejméně rádi v porovnání s jejich vrstevníky z ostatních zemí EU.

Obliba matematiky je v ČR podprůměrná a řadíme se k zemím s nejnižší oblíbou přírodovědy mezi žáky 4. ročníků. Žáci, kteří se velmi rádi učí matematiku nebo přírodovědu, dosahují průměrně výrazně lepších výsledků v testu TIMSS než žáci, kteří se matematiku nebo přírodovědu neučí rádi.

Sebedůvěra českých žáků v matematice je mezi zeměmi EU jedna z nejnižších. V přírodovědě čeští žáci prokázali nejnižší míru sebedůvěry ze všech zemí EU. Žáci s nižší sebedůvěrou v některém z předmětů v něm dosahují v průměru horšího výsledku.

Téměř všichni žáci 4. ročníků uvedli, že se jim velmi líbilo, případně docela líbilo provádění testu na počítači. Více než 90 % českých žáků souhlasilo s tvrzeními, že počítač umí dobře používat a že psaní na počítači jim jde dobře.

Závěr

Čeští žáci 4. ročníku dosáhli v šetření TIMSS 2019 nadprůměrného výsledku v matematice i v přírodovědě. Tři členské země EU měly v matematice lepší výsledek a dalších pět výsledků srovnatelný s Českou republikou. V přírodovědě byly lepší dvě členské země EU a pět jich mělo výsledek srovnatelný s českými žáky.

V matematice došlo od roku 1995 do roku 2007 u českých žáků k velkému poklesu výsledku, který se v následujících cyklech postupně zlepšoval. Po mírném zlepšení od roku 2015 je průměrný výsledek českých žáků poprvé po 24 letech srovnatelný s výsledkem žáků v prvním cyklu TIMSS 1995. Výsledek českých žáků v přírodovědě byl v roce 2007 také nižší, ale již v následujícím cyklu TIMSS 2011 byl srovnatelný s rokem 1995 a nadále zůstává přibližně na stejné úrovni.

V České republice je v obou sledovaných předmětech v porovnání s průměrem EU o málo vyšší podíl žáků ve vysoké a ve velmi vysoké vědomostní úrovni, a naopak o něco nižší podíl žáků v nízké úrovni a pod ní. V matematice se od roku 2015 mírně zvýšil podíl českých žáků ve dvou nejvyšších úrovních.

V roce 2019 si v matematice žáci ČR vedli relativně lépe v okruzích čísla, geometrie a uvažování, naopak relativně hůře pak v prokazování znalostí a při práci s daty. V přírodovědě byli úspěšnější při prokazování znalostí, a naopak hůře se jim vedlo při používání znalostí a v okruhu neživá příroda.

Čeští chlapci byli úspěšnější než dívky ve všech tematických i dovednostních okruzích v matematice a ve třech přírodovědných okruzích (neživá příroda, nauka o Zemi a prokazování znalostí).

Česká republika bohužel stále patří k zemím s nejnižší oblibou matematiky a přírodovědy a nedobrým vztahem žáků ke škole. Nízká je i jejich sebedůvěra v matematice a přírodovědě. Většinu žáků učí učitelé, kteří nejsou spokojeni se svým povoláním. Vysoká je také nespokojenost rodičů se školou. Je proto třeba hledat cesty, jak motivovat nejen žáky, ale i učitele a vytvářet pro ně ve škole přátelské a bezpečné prostředí, ve kterém se jim bude vzájemně dobře pracovat. Protože nespokojený učitel jen těžko přispěje k dobrému vztahu žáka k předmětu i škole.

Literatura

- [1] Mandíková, D., Tomášek, V.: Výsledky českých žáků ve výzkumu TIMSS 2015. Matematika, fyzika, informatika, roč. 26 (2017), č. 5, s. 349–361.
- [2] Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., Kelly, D., Fishbein, B.: TIMSS 2019 International Results in Mathematics and Science. IEA 2020 [cit. 14. 1. 2021]. Dostupné na: <http://timssandpirls.bc.edu/isc/publications.html>.
- [3] Tomášek, V. a kol.: Národní zpráva TIMSS 2019. ČŠI, Praha, 2020.
- [4] Tomášek, V., Basl, J., Janoušková, S.: Mezinárodní šetření TIMSS 2015. Národní zpráva. Praha, ČŠI, 2016.
- [5] Tomášek, V. a kol.: Národní zpráva TIMSS 2011. ČŠI, Praha, 2012.
- [6] Tomášek, V. a kol.: Výzkum TIMSS 2007. Obstojí čeští žáci v mezinárodní konkurenci? ÚIV, Praha, 2008.

Další informace a materiály k projektu TIMSS lze nalézt na adresách:

Mezinárodní stránky: <http://timssandpirls.bc.edu/>

Národní stránky: www.csicr.cz/Prave-menu/Mezinarodni-setreni/TIMSS

Příklady úloh pro různé vědomostní úrovně

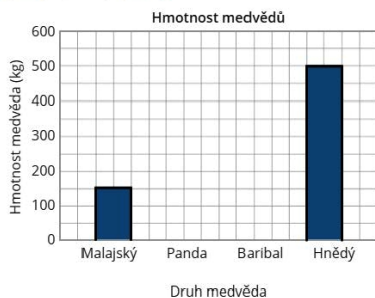
Matematika

Nízká úroveň

Tabulka udává hmotnosti čtyř medvědů.

Druh medvěda	Hmotnost (kg)
Malajský	150
Panda	200
Baribal	250
Hnědý	500

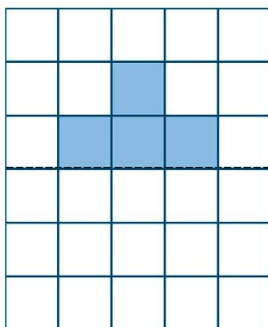
Použij informace z tabulky a dokonči sloupkový diagram.



Střední úroveň

Doplň obrazec tak, aby čárkovaná čára byla osou souměrnosti.

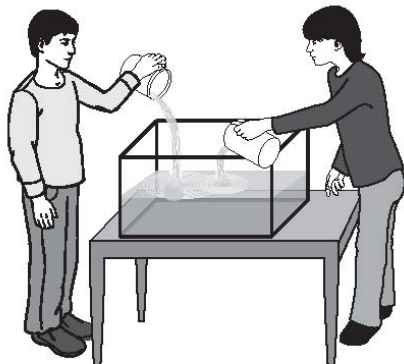
Označ čtverečky v síti.



Vysoká úroveň

V nádrži bylo 12 litrů vody.

Radek pak přilil do nádrže 3 litry vody a Ivana přilila do nádrže další 3 litry vody.



Kterým výpočtem můžeš zjistit množství vody v nádrži?

- A) $12 + (2 + 3)$ B) $(12 + 3) + (12 + 3)$ C) $(12 + 2) \cdot 3$ D) $12 + (2 \cdot 3)$

Velmi vysoká úroveň

Učitel chce rozdělit 30 žáků do skupin tak, aby

- každá skupina měla stejný počet žáků **a zároveň**
- každá skupina měla lichý počet žáků.

Napiš dva různé způsoby, jak by učitel mohl skupiny vytvořit.

Způsob 1

Počet skupin: _____

Počet žáků v každé skupině: _____

Způsob 2

Počet skupin: _____

Počet žáků v každé skupině: _____

Přírodověda

Nízká úroveň

Který živočich má páteř?

A  chobotnice

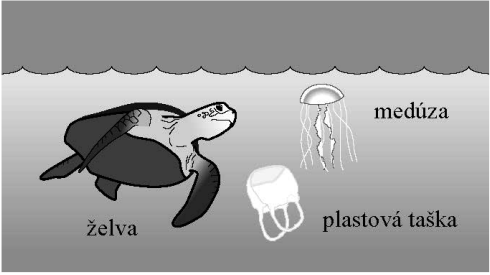
B  pavouk

C  motýl

D  žába

Střední úroveň

Na obrázku je želva a medúza, které plavou v oceánu. Vedle nich se vznáší plastová taška.

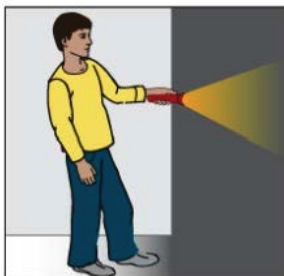


želva medúza plastová taška

Zdůvodni, proč jsou plastové předměty v oceánu nebezpečné pro živočichy, jako jsou třeba želvy.

Vysoká úroveň

Jarda rozsvítil baterku.



V baterce se jeden druh energie mění na jiný.

Které tvrzení popisuje tuto změnu?

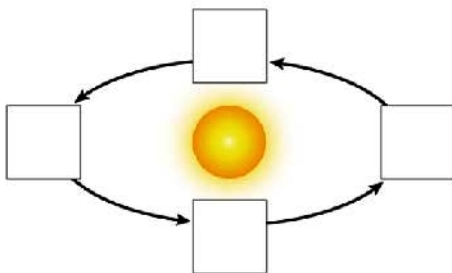
- A) Elektrická energie se mění na světelnou energii.
- B) Pohybová energie se mění na světelnou energii.
- C) Světelná energie se mění na elektrickou energii.
- D) Světelná energie se mění na pohybovou energii.

Velmi vysoká úroveň

Roční období na Zemi jsou způsobena náklonem zemské osy.

Ve městě A je léto. V jaké poloze je Země, když je ve městě A léto?

Přetáhni Zemi do polohy, která ukazuje, že je ve městě A léto.



Výuka v době koronavirových restrikcí

RADIM BĚLOHLÁVEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Koronavirus SARS-CoV-2 a vládní reakce na šíření tohoto viru plošným omezením nebo zákazem řady aktivit, které jsou pro normální život stěžejní, tvrdým způsobem zasáhly všechny složky naší společnosti. Mezi vážně postižené oblasti patří školství, a to jak školství základní a střední, tak školství vysoké. V článku popisují, jak na katedře informatiky řešíme problémy, které uzavření škol způsobuje.

Rozhodnutí, která jako vedoucí katedry v součinnosti s garanty našich studijních programů činím, mají společného jmenovatele – dilemma, jak na jedné straně vyjít vstříc studentům, jejichž situace je obtížná, a na druhé straně udržet kvalitu studijních programů, které pro více než 500 studentů zabezpečujeme. Mnozí studenti se totiž potýkají nejen s primárním problémem, tedy s absencí prezenční výuky, ale i s různorodými sekundárními problémy, které současná společenská situace přináší. Udržet kvalitu vzdělávání v našich programech v souladu s akreditačními standardy je na druhé straně naše základní povinnost. Toto dilemma nemá za vládou nastavovaných, často se měnících podmínek, jednoduché řešení.

„Před závorku“ bych rád vytknul dvě skutečnosti. Za prvé, tradiční způsob vzdělávání se od vzdělávání bez osobního kontaktu student-učitel a bez osobních kontaktů mezi studenty, na který všechny typy škol musely přejít, radikálně liší. Liší se nejen použitelnými metodami výuky (zejména

Článek byl původně napsán pro Magazín Katedry informatiky a vyšel v jeho 14. čísle <http://www.inf.upol.cz/magazin/magazin-14.pdf>.

o nich se hovoří), ale i samotným konceptem a jeho možnostmi (o tom, byť je to důležitější, se hovoří mnohem méně). To je patrné zejména ze zkušeností s výukou v období koronaviru na základních školách. Pouhé přepnutí tradiční výuky do distanční podoby nefunguje. Výsledek je nesmírně náročný pro učitele, pro žáky i pro rodiče. O tom, že taková distanční výuka na základních školách do uspokojivé míry nahrazuje tradiční výuku ve školách, nelze vůbec hovořit. Podobné, i když v konkrétních věcech odlišné, je to s výukou na vysokých školách. Zákaz přítomnosti studentů na vysokých školách například znemožňuje přístup studentů k přístrojovému a technickému vybavení, což vzdělávání studentů poškozuje.

Za druhé, situace nás, vysokoškolských učitelů, je v době uzavření škol jednodušší než situace učitelů základních škol, zejména na prvním stupni, kteří – tak jako my – chtějí své žáky naučit pokud možno to samé co za normálních podmínek. My – na rozdíl od nich – učíme dospělé lidi.

Zákaz prezenční výuky nás zastihl v rozběhnutém letním semestru roku 2020. Protože jsme na to – stejně jako ostatní vysoké školy – nebyli připraveni a předpokládali jsme, že zákaz bude trvat krátce, improvizovali jsme a používali různé ad hoc metody – výuku na dálku pomocí nástrojů Zoom, MS Teams a dalších, nahrávání přednášek nebo jsme poskytovali studijní materiály s doprovodnými informacemi. V tomto režimu proběhl semestr až do konce výukového období. Zkouškové období včetně státních závěrečných zkoušek naštěstí mohlo proběhnout normálně, tedy s prezenčním zkoušením.

Nový akademický rok začal v září 2020. Pro nás byl významný tím, že v něm v prvních ročnících bakalářské i magisterské etapy nabíhaly nově akreditované studijní programy se specializacemi, o kterých jsme informovali v čísle 12 Magazínu katedry informatiky. V bakalářské etapě šlo o programy Informatika a Informační technologie, v magisterské etapě o specializace Obecná informatika, Umělá inteligence, Vývoj software a Počítačové systémy a technologie.

V září začínalo být zřejmé, že k nějakému uzavírání škol opět dojde. Přáli jsme si, aby bylo zejména studentům prvních ročníků umožněno absolvovat alespoň několik týdnů prezenční výuky – přechod ze střední na vysokou školu není jednoduchý ani za normálních okolností, natož distančně. To nakonec vyšlo – na rozdíl od studentů některých jiných vysokých škol, kteří nastoupili do prvního ročníku už v distančním režimu, mohli studenti všech našich ročníků díky epidemické situaci v Olomouckém kraji a vládním podmínkám absolvovat první tři týdny prezenčně. S garanty stu-

díjných programů jsme mezitím připravili pravidla – minimální standardy, které vyučující museli zajistit – pro výuku v distančním režimu. Všechny přednášky pro první a druhé ročníky byly natáčeny, v době stanovené rozvrhem byly vysílány formou streamu na youtube s možností studentů klást dotazy, poté byly záznamy studentům zpřístupněny. Přednášky pro první ročníky probíhaly kvůli zachování autentičnosti v aule. Výuka cvičení a předmětů ve vyšších ročnících probíhala také v době stanovené rozvrhem, zpravidla prostřednictvím Zoom nebo MS Teams. Zabezpečení tohoto režimu se ukázalo být značně náročným na lidské zdroje katedry a nebýt významné pomoci doktorandů katedry při natáčení přednášek, přesáhlo by naše možnosti. V tomto režimu bylo výukové období semestru dokončeno.

Samostatnou kapitolu představuje skládání zkoušek. Až na několik výjimek (tzv. předtermíny) začalo s novým rokem 2021. Horké téma, ke kterému přistupují různé katedry různými způsoby, představuje za současné situace forma zkoušení. Vládní nařízení umožňuje prezenční zkoušení, a to v počtu nejvýše 10 přítomných v jedné místnosti. Toto omezení – vzhledem k jiným omezením výjimečně volné – odráží význam prezenční formy zkoušení pro udržení kvality studijních programů. To platí i pro naše programy. Zkoušky v nich proto probíhají prezenční formou; distanční forma je povolena, jen pokud o ni student požádá a schválí ji vedoucí katedry.¹⁾ Studentům nabízíme vzhledem k okolnostem nadstandardně vysoký počet zkouškových termínů. Informovali jsme je také o tom, že zkoušky z předmětů za zimní semestr budou vypisovány i po probíhající zkouškovém období, a to jak v průběhu nadcházejícího letního semestru, tak po jeho ukončení.

Skládání zkoušky je podstatnou částí studia. V současné situaci je navíc zkouška většinou jedinou možností osobního kontaktu student-učitel. Zkouška nemá spočívat jen v tom, že se zadají otázky, vyhodnotí odpovědi a rozdají známky. Na správně provedené zkoušce – v současné situaci je to obzvlášť důležité u studentů prvních ročníků – jde o to ověřit studentovy znalosti v rozhovoru (typicky nad krátkou písemnou přípravou, ve které student napíše hlavní body své odpovědi, popíše algoritmus, napíše zdrojový kód, definice, matematická tvrzení, případně důkazy nebo řešení příkladu). Během tohoto rozhovoru se společně píše na papír nebo tabuli

¹⁾ Oceňuji, že vedení univerzity a vedení naší fakulty svěřuje v této věci kompetenci katedrám a neklade jiné podmínky než dodržet vládní nařízení. Věc je oborově specifická má o ní rozhodovat katedra.

(píše student i učitel), učitel studentovi nejen sděluje „dobře“ a „špatně“, ale – a to zejména – sděluje mu připomínky, vysvětluje, v čem je jeho odpověď nesprávná nebo jak ji lze vylepšit. K námitkám učitele může mít student své námitky, na ně učitel opět reaguje atd. Zpětná vazba, kterou student tímto způsobem od učitele získá, má velký význam.

Distanční zkoušení je pro tyto potřeby nedostatečné a nevhodné. Uvedu dva důvody. První je technický. Společné psaní na papír (nebo elektronické médium) je velmi komplikované, často nemožné, protože student např. nevlastní grafický tablet. Ještě markantnější je to v případech, kdy je potřeba náročnější vybavení než sdílený papír. Druhý důvod je následující. U každé zkoušky musí být zaručeno, že znalosti, které zkoušený předvádí, jsou jeho (neopisuje, nikdo mu nenapovídá apod.). To je u prezenčního zkoušení snadné a takřka automaticky zaručené. U distančního zkoušení to je obtížné.²⁾ To je reflektováno v různých manuálech pro distanční zkoušení (cituji z jednoho takového manuálu: „Zkoušející poučí studenta, že mimo standardní okolnosti ve věci podvodů, musí být student po dobu trvající zkoušky v místnosti sám a zkoušející může požadovat prohlídku místnosti pomocí webkamery a případně její následné uzamčení nebo prohlídku stolu a požadovat odstranění všech věcí z něj.“; nebo: „během ústní zkoušky musí se zkoušejícím udržovat oční kontakt. Na jeho nedodržení bude zkoušejícím nebo členem komise, opakovaně (nejvýše dvakrát) upozorněn, při třetím upozornění zkoušející vyhodnotí, zda se ve zkoušce nepokračuje a pokus zkoušky byl anulován“; podobných citátů bych mohl uvést více). Ať už bude zkoušející vycházet z manuálu nebo to udělá jinak, popisovaný problém vždy povede k tomu, že zkouška bude probíhat v atmosféře explicitně vyjevené apriorní nedůvěry učitele v poctivost studenta, což je pro obě strany nedůstojné. Žádný zázračný manuál uvedený problém nevyřeší. Studenti i učitelé vědí, že podvádět při distančním zkoušení je snadné. Ke každému opatření zabránit mu bude objevena metoda, jak ho obejít.

Jaké budou výsledky, tedy kolik se toho studenti v uplynulém semestru oproti minulým rokům naučili, teprve uvidíme. Zdá se ale, že naši studenti i za nepříznivých okolností na studium nerezignovali a usilovně pracují. Tomu nasvědčoval průběh cvičení během semestru. Na základě výsledků u prvních provedených zkoušek mých předmětů i na základě zkušeností svých kolegů se mi zdá, že velmi dobří studenti se s distanční výukou vypořádali dobře. O poznání hůře, zdá se, se s distanční výukou vypořádávají

²⁾Tím nevyslovuji podezření, že naši studenti podvádějí. Popisuji podmínky, které musí být zaručeny.

průměrně dobří studenti. Velmi obtížná je stávající situace pro studenty kombinovaného studia. Tito studenti, většinou zaměstnaní lidé, sice i za normálních okolností studují zčásti distančně, výrazně na ně ale dopadají sekundární problémy současného uzavření: mají rodiny a doma děti, které nemohou chodit do školy.

V obtížných dobách máme být optimisty. Můj optimismus vychází z naděje, že řešení současné situace plošným uzavřením společnosti bude opuštěno, školy – základní, střední i vysoké – budou opět otevřeny a společnost se i v jiných ohledech dostane do normálnějšího stavu.

Knuthovy vánoční stromky

EDUARD BARTL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Zájemcům o informatiku je patrně dobře známé jméno amerického informatika, držitele Turingovy ceny, Donalda Ervina Knutha. Tento skromně vystupující vědec s jedinečným smyslem pro humor a renesančním záběrem (Knuth je mimo jiné zdatným varhaníkem) je tvůrcem typografického systému $\text{\TeX}$, v němž je vysázen i časopis *MFI*,¹⁾ a autorem řady vědeckých článků a knih. Pozoruhodná je například knížka [3], ve které Knuth formou rozhovoru vysvětluje konstrukci takzvaných surreálných čísel. Bezpochyby nejvýznamnějším Knuthovým dílem je však mnohosvazková monografie *The Art of Computer Programming*, kterou začal psát během svých doktorských studií na Kalifornském technologickém institutu²⁾ a na které ve svých více než 80 letech, jakožto emeritní profesor, stále pracuje.

The Art of Computer Programming je nepřebornou studnicí algoritmů z mnoha oblastí informatiky vybavených názornými obrázky vypracova-

¹⁾Rád bych využil této příležitosti a poděkoval RNDr. Miloslavu Závodnému, který se mnoho let o sazbu časopisu ve zmíněném typografickém systému stará.

²⁾Kalifornský technologický institut (také zvaný Caltech) je soukromá univerzita, která se nachází v Pasadeně v USA. Absolventy jsou například Walter Bright, americký informatik, tvůrce programovacího jazyka D, Stephen Wolfram, britský fyzik a matematik, tvůrce počítačového programu Mathematica, nebo John McCarthy, americký informatik, jeden ze zakladatelů umělé inteligence (jako první začal tento termín používat) a tvůrce programovacího jazyka Lisp.

nými s pečlivostí, která je Knuthovi vlastní. Tuto skutečnost jsem si nedávno opět uvědomil, když jsem hledal způsoby generování a uspořádání všech bitových řetězců³⁾ konečné délky. Ve čtvrtém svazku *The Art of Computer Programming* [4] jsem narazil na jednu vskutku zajímavou metodu, která uspořádává bitové řetězce do schématu Knuthem pojmenovaného jako *Christmas tree pattern*.

Důvodem pro tento poněkud neobvyklý název je zejména fakt, že schéma pro větší délky řetězců skutečně připomíná vánoční stromek. Knuth dále uvádí, že tento název zvolil také proto, že zmíněnou problematiku uspořádání všech bitových řetězců přednesl na tradiční vánoční přednášce „Christmas Tree Lecture“ [7] pořádané v prosinci 2002 na Stanfordově univerzitě.



Donald Ervin Knuth (zdroj: Wikipedia)

1. Jak vypadá Knuthův stromek

Jak bylo řečeno, jde nám o problém generování všech bitových řetězců konečné délky; tuto délku si označíme jako n . Chceme tedy získat a vhodně uspořádat celkem 2^n bitových řetězců. Vyřešit tento problém je snadné; stačí vzít přirozená čísla od 0 do $2^n - 1$, převést je do binární soustavy a vypsát je v pořadí, které je dáno uspořádáním přirozených čísel $0, \dots, 2^n - 1$ podle jejich velikosti. Například pro $n = 3$ získáme 8 tříprvkových bitových řetězců

000 001 010 011 100 101 110 111

Knuthovy stromky na to ovšem jdou mnohem chytřeji. Ukažme si nejprve, jak vypadá nejjednodušší Knuthův stromek, který uspořádává všechny bitové řetězce délky 1; říkáme, že se jedná o Knuthův stromek řádu 1. Jde o prostý řádek

0 1

³⁾Bitovými řetězci máme na mysli řetězce složené z nul a jedniček. Tento název (v angličtině *bit strings*) používá právě Donald Knuth v [4].

Knuthův stromek řádu 2 uspořádává všechny řetězce délky 2 do dvou řádků, jejichž sloupce jsou specificky zarovnané:

$$\begin{array}{c} 10 \\ 00 \ 01 \ 11 \end{array}$$

Obecný případ, tedy Knuthův stromek řádu $n + 1$, je pak definovaný tak, že přepíšeme každý řádek Knuthova stromku řádu n do jednoho, nebo dvou řádků podle následujícího pravidla:

- (i) pokud má řádek pouze jeden prvek (tento prvek si označíme jako σ_1), pak ho přepíšeme do jediného řádku ve tvaru

$$\sigma_1 0 \ \sigma_1 1$$

- (ii) pokud má řádek více než jeden prvek (tyto prvky si označíme jako $\sigma_1, \dots, \sigma_s$, kde $s > 1$), pak ho přepíšeme do dvou řádků v tomto tvaru

$$\begin{array}{c} \sigma_2 0 \ \dots \ \sigma_s 0 \\ \sigma_1 0 \ \sigma_1 1 \ \dots \ \sigma_{s-1} 1 \ \sigma_s 1 \end{array}$$

Knuthův stromek řádu 3, který řeší výše uvedený příklad s uspořádáním všech bitových řetězců délky 3, je tedy vytvořen ze stromku řádu 2 následujícím způsobem. První řádek stromku řádu 2 má pouze jeden prvek $\sigma_1 = 10$; podle části (i) zmíněného pravidla přepíšeme tento řádek do jediného řádku o dvou prvcích (červeně je zvýrazněna nula a jednička, která byla podle pravidla připojena k bitovému řetězci σ_1):

$$100 \ 101$$

Druhý řádek stromku řádu 2 má tři prvky $\sigma_1 = 00$, $\sigma_2 = 01$ a $\sigma_3 = 11$. Tento řádek tedy přepíšeme podle části (ii) pravidla do dvou řádků (červeně jsou opět zvýrazněny nuly a jedničky připojené k σ_1 , σ_2 a σ_3):

$$\begin{array}{c} 010 \ 110 \\ 000 \ 001 \ 011 \ 111 \end{array}$$

Celý Knuthův stromek řádu 3 tudíž vypadá následovně:

$$\begin{array}{c} 100 \ 101 \\ 010 \ 110 \\ 000 \ 001 \ 011 \ 111 \end{array}$$

Knuthův stromek řádu 4 má tuto podobu:

```
      1010
    1000 1001 1011
      1100
    0100 0101 1101
    0010 0110 1110
  0000 0001 0011 0111 1111
```

Analogickým způsobem pak můžeme konstruovat stromky vyšších řádů. Pro ilustraci si ještě předvedme Knuthův stromek řádu 8 (zobrazen je na konci článku). Tento stromek ukazuje uspořádání všech bitových řetězců délky 8 a můžeme tedy na něj nahlížet jako na schéma zachycující všechny bajty.

Vidíme, že definice Knuthova stromku řádu n je rekurzivní a všimněme si dále, že nezáleží pouze na uspořádání řetězců v jednotlivých řádcích, ale také že roli hraje uspořádání celých řádků a zarovnání jednotlivých sloupců. Z uvedených obrázků je také patrná jistá estetika – Knuthovy stromky vyšších řádů mohou svým tvarem vzdáleně připomínat fraktály. To, co je však skutečně zajímavé, není jejich vzhled, nýbrž vlastnosti ukazující, jak se v těchto schématech setkávají klasické výsledky z různých oblastí informatiky a matematiky.

Podívejme se nejprve na tři základní vlastnosti, které se dají snadno dokázat přímo z definice Knuthových stromků užitím matematické indukce:

- (a) Každý bitový řetězec délky n se v Knuthově stromku řádu n vyskytuje právě jednou. Stromek řádu n má tedy 2^n bitových řetězců délky n .
- (b) Jestliže očíslováme sloupce Knuthova stromku zleva doprava, přičemž číslovat budeme od nuly,⁴⁾ pak k -tý sloupec obsahuje všechny bitové řetězce s k jedničkami.
- (c) Pro každý řádek Knuthova stromku platí, že bitový řetězec v $(k+1)$ -tém sloupci vznikne z bitového řetězce v k -tém sloupci přepsáním jedné nuly na jedničku.

V Knuthových stromcích se toho ovšem skrývá mnohem více. Podívejme se tedy na ně podrobněji.

⁴⁾Toto číslování sloupců budeme používat i ve zbytku článku.

2. Spernerův teorém

Jedna z nejzajímavějších vlastností je ukryta v prostředním sloupci,⁵⁾ který tvoří, můžeme říct, *kmen* Knuthova stromku. Než se dostaneme k popisu zmíněné vlastnosti, uděláme poměrně podrobnou, zdánlivě nesouvisající odbočku k jednomu klasickému problému takzvané extrémální teorie množin.

Budeme uvažovat n prvkovou množinu U ; dejme tomu, že tato množina obsahuje čísla $1, 2, \dots, n$ jako svoje prvky. Symbolem $\mathcal{P}(U)$ budeme označovat její *potenční množinu*, tedy množinu všech podmnožin množiny U ; symbolem $|A|$ pak označíme počet prvků nějaké množiny A . Zajímat nás budou množiny podmnožin $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(U)$, které tvoří takzvaný *antiřetězec*. V antiřetězci jsou libovolné dvě různé množiny neporovnatelné vzhledem k množinové inkluzi $\subseteq$; to znamená, platí-li $A, B \in \mathcal{F}$ a $A \neq B$, pak $A \not\subseteq B$. Příkladem antiřetězce na množině $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ je tato množina

$$\{\{1\}, \{2, 3\}\}.$$

K tomuto antiřetězci však můžeme přidat ještě další prvky tak, aby nebyla podmínka neporovnatelnosti porušena; následující množina je také antiřetězcem:

$$\{\{1\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{2, 4, 5\}\}. \quad (1)$$

Zajímat nás bude, kolik prvků budeme ještě schopni přidat tak, aby nově vzniklá množina byla stále antiřetězcem. Jinými slovy, pokusíme se odpovědět na otázku, kolik prvků má největší antiřetězec.

Abychom byli schopni odpovědět na tuto otázku, podíváme se nejprve na jeden jednoduchý způsob, jak systematicky vytvářet antiřetězce určitého typu: je totiž jasné, že stačí vzít všechny (nebo jen některé) podmnožiny se stejným počtem prvků. Například množina složená ze všech jednoprvkových podmnožin

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$$

je zjevně antiřetězcem obsahujícím $\binom{5}{1} = 5$ prvků. Množina dvouprvkových podmnožin

$$\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$$

⁵⁾Případně v prostředních dvou sloupcích. Z příkladů v předchozí sekci jsme totiž mohli vyzorovat, že pro sudé n je uprostřed jeden sloupec, pro liché n jsou však uprostřed sloupce dva.

je taktéž antiřetězec, který je větší než předcházející antiřetězec; má celkem $\binom{5}{2} = 10$ prvků. Obecně tedy množina složená ze všech k prvkových podmnožin je antiřetězcem o velikosti $\binom{n}{k}$.⁶⁾ Zamyslíme-li se nyní nad tím, jak fungují kombinační čísla $\binom{n}{k}$, záhy zjistíme, že největší antiřetězec získaný tímto způsobem bude složen ze všech podmnožin o $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ prvcích, kde $\lfloor \cdot \rfloor$ značí operaci odřezávající desetinnou část daného čísla. Velikost tohoto antiřetězce je proto rovna číslu

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}. \quad (2)$$

Je poměrně překvapujícím zjištěním, že není možné zkonstruovat antiřetězec, který by měl větší počet prvků než (2) a to ani v případě, že se budeme snažit antiřetězec sestavit tak, že bude obsahovat podmnožiny různých velikostí.⁷⁾ Platí tedy tvrzení, že je-li množina $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(U)$ antiřetězcem, pak $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Tomuto tvrzení se říká *Spernerův teorém*; publikoval ho roku 1928 německý matematik Emanuel Sperner (1905–1980). Číslu (2) se pak často říká *Spernerovo číslo*.

Nahlédneme-li do původního Spernerova článku [6], zjistíme, že toto jednoduše vypadající tvrzení má dosti složitý a dlouhý důkaz. Časem se však objevilo několik prací, které ke Spernerovu teorému přistupují zcela odlišně a dokazují ho výrazně kratším způsobem. Ukážeme si jeden takový důkaz, který byl publikován roku 1966 pod příznačným názvem „A short proof of Sperner’s lemma“ [5] americkým matematikem Davidem Lubellem. Tento důkaz je založen na jednoduchých úvahách, ke kterým využijeme kombinatoriku ze střední školy. Poté se podíváme na to, jak souvisí s Knuthovými stromky (méně trpělivý čtenář tedy může důkaz přeskočit).

Pro Lubellův důkaz jsou klíčové posloupnosti podmnožin $C_0, \dots, C_n$ množiny U , pro které platí tyto dvě podmínky:

$$\begin{aligned} \emptyset &= C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_{n-1} \subset C_n = U, \\ |C_i| &= i \text{ pro } i = 0, \dots, n. \end{aligned}$$

Posloupnost tedy začíná prázdnou množinou, množina C_1 obsahuje právě jeden prvek z U , C_2 vznikne z C_1 přidáním dalšího prvku z U a stejným způsobem pokračujeme až k množině C_n , která proto musí obsahovat

⁶⁾Připomeňme, že $\binom{n}{k}$ je takzvané *kombinační číslo*, které je rovno $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. $\binom{n}{k}$ je počet možností, kterými lze vybrat k prvků z n prvků, přičemž nezáleží na pořadí vybraných prvků; jinými slovy, je to počet k prvkových podmnožin n prvkové množiny.

⁷⁾Podobně, jako jsme to učinili na začátku této sekce v příkladu s antiřetězcem (1).

všechny prvky z U . Tuto posloupnost podmnožin proto můžeme nazvat *řetězcem*.⁸⁾ Položme si otázku, kolik existuje takových různých řetězců. Odpověď je jednoduchá: řetězce se liší tím, v jakém pořadí přidáváme prvky z U ; takových pořadí je přesně tolik, kolik je permutací n prvkové množiny U . Různých řetězců je tedy $n!$.

Uvažujme nyní libovolný antiřetězec $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(U)$ a libovolnou k prvkovou množinu $A \in \mathcal{F}$ tohoto antiřetězce. Zkusme vypočítat, kolik výše definovaných řetězců $C_0, \dots, C_n$ obsahuje A jako svůj prvek. Opět se jedná o jednoduchou kombinatorickou úvahu: jestliže je A jedním z prvků řetězce $C_0, \dots, C_n$, pak musí být na k -tém místě tohoto řetězce (protože A má k prvků), neboli $A = C_k$. Navíc tento řetězec musel vzniknout tak, že se **nejprve** postupně k prázdné množině přidalo v nějakém pořadí všech k prvků z A a teprve **poté** se k množině A přidalo v nějakém pořadí všech zbývajících $n - k$ prvků z U . Takových možností je celkem $k! \cdot (n - k)!$; počet řetězců obsahujících A je tedy roven právě tomuto číslu.

Poslední úvaha Lubellova důkazu, kterou je potřeba učinit, je následující. Označme si symbolem m_k počet k prvkových množin antiřetězce $\mathcal{F}$.⁹⁾ Je jasné, že počet všech prvků antiřetězce $\mathcal{F}$ je možné zapsat pomocí čísel m_k takto:

$$|\mathcal{F}| = \sum_{k=0}^n m_k. \quad (3)$$

Víme, že každá z k prvkových množin antiřetězce je obsažena v $k! \cdot (n - k)!$ řetězcích; těchto k prvkových množin je m_k , takže počet všech řetězců, které obsahují tyto k prvkové množiny je $m_k \cdot k! \cdot (n - k)!$. Všechny množiny antiřetězce $\mathcal{F}$ jsou tak obsaženy celkem v $\sum_{k=0}^n m_k \cdot k! \cdot (n - k)!$ navzájem různých řetězcích.¹⁰⁾ Celkový počet řetězců, jak jsme ukázali výše, je $n!$, takže právě uvedený součet nemůže přesáhnout tento faktoriál; platí tedy

⁸⁾Jedná se o řetězec v tom smyslu, že je každý prvek posloupnosti porovnatelný s libovolným jiným prvkem této posloupnosti. Řetězec podmnožin je proto jistým opakem antiřetězce podmnožin. Pro jistotu dodejme, že termín „řetězec podmnožin“ nijak nesouvisí s termínem „bitový řetězec“. Anglicky psané texty jsou v tomto ohledu uvážlivější, pro řetězec podmnožin se používá slovo „chain“ pro bitový řetězec slovo „string“.

⁹⁾Ve výše uvedeném příkladu antiřetězce (1) je $m_0 = 0$ (antiřetězec neobsahuje prázdnou množinu), $m_1 = 1$ (antiřetězec obsahuje jednu jednoprvkovou množinu) a dále pak $m_2 = 2$, $m_3 = 1$ a $m_4 = 0$.

¹⁰⁾Bude dobré si uvědomit, že neexistuje řetězec, který by obsahoval dvě různé množiny $A, B \in \mathcal{F}$ daného antiřetězce. Důvod je nasnadě; A a B jsou neporovnatelné množiny (jelikož to jsou prvky antiřetězce) a řetězec z definice obsahuje pouze porovnatelné množiny.

$\sum_{k=0}^n m_k \cdot k! \cdot (n-k)! \leq n!$. Uvedenou nerovnost můžeme vydělit $n!$ a dále provést několik jednoduchých úprav, čímž dostaneme

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n m_k \cdot \frac{k! \cdot (n-k)!}{n!} &\leq 1, \\ \sum_{k=0}^n \frac{m_k}{\frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}} &\leq 1, \\ \sum_{k=0}^n \frac{m_k}{\binom{n}{k}} &\leq 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Jak jsme si již řekli, největší hodnoty dosahují kombinační čísla $\binom{n}{k}$ pro $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$; levou stranu nerovnosti (4) tak můžeme zdola omezit:

$$\sum_{k=0}^n \frac{m_k}{\binom{n}{k}} \geq \sum_{k=0}^n \frac{m_k}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = \frac{\sum_{k=0}^n m_k}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}.$$

Z tohoto omezení a nerovnosti (4) plyne:

$$\frac{\sum_{k=0}^n m_k}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq 1.$$

Využitím vztahu (3) konečně dostáváme

$$\frac{|\mathcal{F}|}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq 1,$$

neboli

$$|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$

což je přesně nerovnost, o které mluví Spernerův teorém.

Jak to všechno souvisí s Knuthovými stromky? Souvislost není obtížná. Na jednotlivé prvky Knuthova stromku řádu n se totiž můžeme dívat jako na *charakteristické vektory* podmnožin n prvkové množiny. Například ve výše uvedeném příkladu Knuthova stromku řádu 4 je prvek 0000 charakteristickým vektorem prázdné množiny $\emptyset$, prvek 0010 charakteristickým vektorem množiny $\{3\}$, prvek 0101 charakteristickým vektorem množiny $\{2, 4\}$

a podobně. Knuthův stromek nám při tomto množinovém pohledu poskytuje velmi jednoduchý důkaz Spernerova teorému; stačí pouze vhodně uchopit základní vlastnosti stromků uvedených v předchozí sekci.

Nejprve si uvědomíme, že díky základní vlastnosti (a) jsou v Knuthově stromku řádu n všechny možné podmnožiny n prvkové množiny, jsme proto schopni najít v něm všechny antiřetězce, o jejichž délky se zajímá Spernerův teorém. Ze základní vlastnosti (c) dále plyne, že pro dva bezprostředně sousedící prvky σ_k a σ_{k+1} na stejném řádku platí $\sigma_k \subseteq \sigma_{k+1}$. Každý řádek tak tvoří *řetězec podmnožin*.¹¹⁾ Pokud budeme chtít vytvořit antiřetězec, tak to můžeme udělat pouze tak, že z daného řádku Knuthova stromku vybereme nejvýše jeden prvek; více než jeden prvek vybrat nemůžeme prostě proto, že každý řádek je řetězcem, obsahuje tedy vzájemně porovnatelné prvky, které však v antiřetězci nemohou být. Tímto způsobem tedy budeme schopni vytvořit antiřetězec, který bude mít nejvýše tolik prvků, kolik je řádků v Knuthově stromku, přičemž počet řádků odpovídá výšce sloupce (případně sloupců pro n liché), které jsou uprostřed. Ze základní vlastnosti (b) ovšem víme, že k -tý sloupec obsahuje všechny podmnožiny s k prvky; počet prvků k -tého sloupce je tedy $\binom{n}{k}$. Prostřední sloupec má tedy výšku rovnou Spernerovu číslu, tedy $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. Každý antiřetězec (který jsme vytvořili výběrem nejvýše jednoho prvku z každého řádku Knuthova stromku) proto může mít maximálně $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ prvků.

Výše prezentovaný Lubellův důkaz je velmi elegantní a zpravidla je uváděn jako nejjednodušší ze všech prozatím objevených důkazů Spernerova teorému. Vidíme však, že jedinečný způsob, jakým jsou v Knuthově stromku uspořádány všechny podmnožiny n prvkové množiny, umožňuje nerovnost uvedenou ve Spernerově teorému takřka odečíst z obrázku stromku – není třeba žádných složitých úvah a žádného složitého odvozování.

3. Systémy závorek

V této sekci se podíváme na vztah Knuthova stromku a takzvaných *systémů závorek*. Víme, že libovolný prvek na řádku vznikne tak, že se jedna nula z předcházejícího prvku přepíše na jedničku; každý řádek tak tvoří řetězec podmnožin. Přepisování nul na jedničky samozřejmě není nahodilé. Podrobnější pohled ukazuje, že se toto přepisování řídí jistým pra-

¹¹⁾V tomto řetězci se navíc sousedící množiny liší pouze v jednom prvku; to ovšem není pro důkaz Spernerova teorému podstatné. Tuto skutečnost však využijeme později.

vidlem, které je dobře popsatelné právě prostřednictvím souvislosti Knuthova stromku se systémy závorek.

Těmito systémy máme na mysli libovolné (tedy i prázdné) posloupnosti levých a pravých kulatých závorek.¹²⁾ Následuje několik příkladů systémů závorek: $(())$, $(())$, $(, ())$, $))(($ a $(())$. Tyto systémy mohou být *korektně uzávorkované* nebo *nekorektně uzávorkované*. Pro korektně uzávorkované systémy platí, volně řečeno, že každá závorka je v páru s právě jednou opačnou závorkou, přičemž jako první je uvedena levá závorka, jako druhá je potom uvedena pravá závorka (prázdný systém také považujeme za korektně uzávorkovaný). Pokud nějaká závorka nemá svého „partnera“ do páru, pak říkáme, že je *volná*. Uvedené systémy $(())$, $(())$ a $()$ jsou proto korektně uzávorkované,¹³⁾ naproti tomu systémy $(())$, $(a))$ jsou nekorektně uzávorkované (v prvním případě jsou poslední dvě pravé závorky volné, ve druhém a třetím případě jsou volné všechny závorky).

Obecně platí, že libovolný systém závorek (ať už je korektně uzávorkovaný nebo není) je možné napsat ve formě následující posloupnosti:

$$\alpha_0) \dots \alpha_{p-1}) \alpha_p (\alpha_{p+1} \dots (\alpha_q, \quad (5)$$

kde $0 \leq p \leq q$ a $\alpha_0, \dots, \alpha_q$ jsou korektně uzávorkované systémy závorek. Vidíme, že v tomto obecném tvaru je p volných pravých závorek a $q - p$ volných levých závorek. Uveďme si dva příklady: korektně uzávorkovaný systém $(())$ se ve tvaru (5) zapíše tak, že p a q nastavíme na nulu, platí tedy

$$\alpha_0 = (());$$

pro nekorektně uzávorkovaný systém $))(())$ platí

$$\alpha_0) \alpha_1) \alpha_2) \alpha_3 (\alpha_4 =))(())((),$$

to znamená, že $p = 3$, $q = 4$, systémy závorek α_0 , α_1 a α_3 jsou prázdné a pro zbývající systémy platí $\alpha_2 = (()$, $\alpha_4 = ()$.¹⁴⁾

¹²⁾ Bylo by jistě vhodnější říkat těmto posloupnostem *řetězce závorek*, rádi bychom se však vyhnuli použití slova „řetěze“ v dalším (již třetím) významu.

¹³⁾ Korektně uzávorkované systémy jsou nám dobře známy z programovacích jazyků. Například programy napsané ve funkcionálních jazycích obsahují korektně uzávorkované systémy (stejně tak běžně psané texty (jako je kupříkladu tento) by měly obsahovat korektně uzávorkované systémy)).

¹⁴⁾ Všimněme si, že všechny systémy α_0 až α_4 jsou korektně uzávorkované.

Dále platí, že libovolný systém závorek je prvkem následující posloupnosti systémů:

$$\begin{aligned} & \alpha_0) \dots \alpha_{q-1}) \alpha_{q-1}) \alpha_q, \\ & \alpha_0) \dots \alpha_{q-1}) \alpha_{q-1} (\alpha_q, \\ & \alpha_0) \dots \alpha_{q-1} (\alpha_{q-1} (\alpha_q, \\ & \dots \\ & \alpha_0 (\dots \alpha_{q-1} (\alpha_{q-1} (\alpha_q. \end{aligned} \tag{6}$$

Na první pohled to vypadá komplikovaně, jde však pouze o to, že první prvek posloupnosti (6) je systémem, který obsahuje pouze pravé volné závorky, druhý prvek vznikne z prvního tak, že poslední pravou volnou závorku přepíšeme na levou závorku (ta je proto také volná) a stejným způsobem pokračujeme i nadále. Poslední prvek posloupnosti (6) je pak systémem, který obsahuje pouze levé volné závorky. Libovolný systém, ať už korektně či nekorektně uzávorkovaný, tak musí být členem posloupnosti (6).

Vraťme se nyní ke Knuthovým stromkům a podívejme se na to, jak souvisí se systémy závorek. Spojitost se vyjeví v okamžiku, když přepíšeme v Knuthově stromku každou nulu na pravou závorku a každou jedničku na levou závorku. Stromky jsou pak kolekcí systémů závorek. Například Knuthův stromek řádu 3 bude vypadat takto:

$$\begin{aligned} & () () (\\ &) () (() \\ &))))) () (((((\end{aligned}$$

Přepsaný Knuthův stromek řádu 4 vypadá následovně:

$$\begin{aligned} & () () \\ & ())) () (() ((\\ & (()) \\ &) ()) () (() (\\ &)) ()) (() ((((\\ &)))))) () (() (((((\end{aligned}$$

Můžeme tedy vidět, že každý řádek začíná systémem, ve kterém jsou volné pouze pravé závorky a každý další systém závorek na tomto řádku vznikne

z předchozího systému přepsáním poslední volné pravé závorky na levou (tato vlastnost se dá opět dokázat matematickou indukcí). Řádky stromku jsou tedy přesně ve tvaru posloupností systémů závorek (6).

Z uvedeného je pak zřejmé, jak vypadá na začátku zmíněné pravidlo popisující přepisování nul na jedničky v libovolném řádku: postupně se přepisují zprava doleva nuly na jedničky, přeskakují se však takové nuly, ke kterým existuje jednička do páru (ve smyslu korektně uzávorkovaných systémů). Demonstrujeme to na řádku

0100 0101 1101

Knuthova stromku řádu 4, jehož celou podobu jsme si ukázali v předchozí sekci. Druhý prvek vznikne z prvního tak, že nula zcela napravo v tomto prvním prvku je přepsána na jedničku:

0100 $\mapsto$ 0101.

Třetí prvek z druhého však nevznikne přepsáním předposlední nuly, protože tato nula je v páru s jedničkou, přepisuje se tedy první nula:

0101 $\mapsto$ 1101.

Tento řádek již nebude mít žádný další prvek jednoduše proto, že nemáme další nuly k přepisování.

Toto zjištění pak vede k další zajímavé vlastnosti Knuthových stromků, ke které se dostaneme snadnou úvahou o jednoprvkových řádcích. Pokud se totiž na jednoprvkové řádky podíváme z pohledu právě uvedeného přepisování nul, ke kterým neexistují jedničky do páru, ihned zjistíme, že tyto řádky jsou jednoprvkové proto, že již není co přepisovat. Jednoprvkové řádky proto musí představovat korektně uzávorkované systémy! Ukážeme si to opět na příkladu Knuthova stromku řádu 4. Ten obsahuje pouze dva jednoprvkové řádky:

1010

1000 1001 1011

1100

0100 0101 1101

0010 0110 1110

0000 0001 0011 0111 1111

Tyto řádky odpovídají závorkovým systémům $()()$ a $(())$, které jsou, jak vidno, korektně uzávorkované. Žádné další korektně uzávorkované systémy složené ze 4 závorek neexistují. Z obrázku Knuthova stromku řádu 8 (na s. 73) tak může vyčíst, že existuje celkem 14 korektně uzávorkovaných systémů.

Tím však problematika závorkových systémů kódovaných pomocí Knuthových stromků nekončí. Dá se například ukázat, že prvky, které jsou na konci řádků, jsou *lexikograficky uspořádané*.¹⁵⁾ Knuthův stromek proto ve svém kmenu obsahuje korektně uzávorkované systémy v lexikografickém uspořádání.

4. Heslovitě další souvislosti

Spektrum souvislostí Knuthových stromků s různými informatickými a matematickými výsledky nebylo v předchozích sekcích zdaleka vyčerpáno. V Knuthových stromcích je také zajímavým způsobem kódován *Catalanův trojúhelník* zavedený švýcarským matematikem Leonhardem Eulerem (1707–1783),¹⁶⁾ který má rozličné aplikace zejména v kombinatorice. Dále se pomocí Knuthových stromků řádu n a pomocí takzvané *Hanselovy vlastnosti* [2] dají velmi elegantním způsobem vyčíslovat monotonní booleovské funkce o n proměnných.

Podrobný popis těchto témat by však činil článek příliš dlouhým. Zvídavého čtenáře tedy odkazuji na příslušnou kapitolu čtvrtého svazku *The Art of Computer Programming* [4]. Zároveň s tím vyjadřuji závazek vrátit se někdy v budoucnosti ke zmíněným tématům ve volném pokračování tohoto textu.

Závěr

Čtenáři dlužím jedno vysvětlení. Autorem popsaného uspořádání všech bitových řetězců konečné délky není Donald Knuth, ale nizozemští matematici N. G. de Bruijn, C. van Ebbenhorst Tengbergen a D. Kruyswijk.

¹⁵⁾Definici lexikografického uspořádání uvádět nebudeme. Pouze poznamenáme, že je použito například pro uspořádání slov ve slovnících. Prvky, které jsou nejvíce napravo v jednotlivých řádcích Knuthova stromku řádu 4, to znamená 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111, jsou proto uspořádané stejně jako by byly ve slovníku uspořádaná slova BABA, BABB, BBAA, BBAB, BBBA, BBBB (nulu jsme nahradili písmenem A, jedničku písmenem B).

¹⁶⁾Ač definovaný Eulerem, je Catalanův trojúhelník pojmenovaný po belgickém matematikovi Eug?novi Catalanovi (1814–1894).

Když se však podíváme do jejich krátké, třístránkové publikace [1], ze které Knuth vychází, zjistíme, že v ní není řeč o všech bitových řetězcích, nýbrž o všech dělitelech daného přirozeného čísla. Vztah mezi bitovými řetězci a dělitelem je celkem zjevný, byl to ovšem až Knuth, který si ho uvědomil. Také uspořádání do schématu podobného vánočnímu stromku je Knuthovým nápadem (i když také do určité míry vychází z práce de Bruijna a jeho dvou kolegů). Knuth sám, jak jsme již uvedli v úvodu, nazývá tato schémata *Christmas tree patterns*. Pojmenování „Knuthovy stromky“ jsem zvolil právě kvůli přínosu Donalda Knutha do této oblasti informatiky.

Rychlé čtení tohoto textu by mohlo v leckterém čtenáři navodit představu, že je článek pouze strohým (místy možná i poněkud nudným) popisem Knuthových stromků a jeho vlastností. Mojí motivací však bylo především ukázat provázanost Knuthových stromků s několika klasickými výsledky z poměrně vzdálených oblastí informatiky a matematiky. Právě provázanost různých oblastí – mnohdy zcela nečekaná, a proto i překvapivá – je pro zmíněné vědní obory příznačná a činí tak jejich studium neobyčejně poutavým.

Literatura

- [1] *Bruijn, N. G., Tengbergen, C. E., Kruyswijk, D.*: On the set of divisors of a number. *Nieuw Archief Wiskunde*, roč. 23 (1951), č. 2, s. 191–193.
- [2] *Hansel, P.*: Sur le nombre des fonctions booléennes monotones de n variables. *Comptes Rendus Acad Sci*, roč. 262 (A) (1966), s. 1088–1090.
- [3] *Knuth, D. E.*: Surreal numbers: how two ex-students turned on to pure mathematics and found total happiness: a mathematical novelette. Addison-Wesley, NJ, 1974.
- [4] *Knuth, D. E.*: *The Art of Computer Programming*. Vol. 4, Fasc. 4 of *Generating All Trees; History of Combinatorial Generation*. Upper Saddle River, Addison-Wesley, NJ, 2006.
- [5] *Lubell, D.*: A short proof of Sperner’s lemma. *Journal of Combinatorial Theory*, roč. 1 (1966), č. 2, s. 299
- [6] *Sperner, E.*: Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge. *Mathematische Zeitschrift*, roč. 27 (1928), č. 1, s. 544–548.
- [7] [Christmass tree lecture \(YouTube\)](#).

			10101010		
		10101000	10101001	10101011	
			10101100		
		10100100	10100101	10101101	
		10100010	10100110	10101110	
10100000		10100001	10100011	10100111	10101111
			10110010		
		10110000	10110001	10110011	
			10110100		
		10010100	10010101	10110101	
		10010010	10010110	10110110	
10010000		10010001	10010011	10010111	10110111
			10111000		
		10011000	10011001	10111001	
		10001010	10011010	10111010	
10001000		10001001	10001011	10011011	10111011
		10001100	10011100	10111100	
10000100		10000101	10001101	10011101	10111101
10000010		10000110	10001110	10011110	10111110
10000000	10000001	10000011	10000111	10001111	10011111
			11001010		
		11001000	11001001	11001011	
			11001100		
		11000100	11000101	11001101	
		11000010	11000110	11001110	
11000000		11000001	11000011	11000111	11001111
			11010010		
		11010000	11010001	11010011	
			11010100		
		01010100	01010101	11010101	
		01010010	01010110	11010110	
01010000		01010001	01010011	01010111	11010111
			11011000		
		01011000	01011001	11011001	
		01001010	01011010	11011010	
01001000		01001001	01001011	01011011	11011011
		01001100	01011100	11011100	
01000100		01000101	01001101	01011101	11011101
01000010		01000110	01001110	01011110	11011110
01000000	01000001	01000011	01000111	01001111	01011111
			11100010		
		11100000	11100001	11100011	
			11100100		
		01100100	01100101	11100101	
		01100010	01100110	11100110	
01100000		01100001	01100011	01100111	11100111
			11101000		
		01101000	01101001	11101001	
		00101010	01101010	11101010	
00101000		00101001	00101011	01101011	11101011
		00101100	01101100	11101100	
00100100		00100101	00101101	01101101	11101101
00100010		00100110	00101110	01101110	11101110
00100000	00100001	00100011	00100111	00101111	01101111
			11110000		
		01110000	01110001	11110001	
		00110010	01110010	11110010	
00110000		00110001	00110011	01110011	11110011
		00110100	01110100	11110100	
00010100		00010101	00110101	01110101	11110101
00010010		00010110	00110110	01110110	11110110
00010000	00010001	00010011	00010111	00110111	01110111
		00111000	01111000	11111000	
00011000		00011001	00111001	01111001	11111001
00001010		00011010	00111010	01111010	11111010
00001001		00001011	00011011	00111011	01111011
00001100		00011100	00111100	01111100	11111100
00000100		0000101	00011101	00111101	01111101
00000010		00000110	00011110	00111110	01111110
00000000	00000001	00000011	00001111	00011111	00111111
			00001111	00111111	11111111

Knuthův stromek řádu 8

ZPRÁVY

Mezinárodní olympiády v informatice v roce 2020

Nejlepší úspěšní řešitelé Matematické olympiády kategorie P (programování) dostávají pravidelně příležitost zúčastnit se dvou mezinárodních soutěží středoškoláků v informatice a programování. Čtyři nejlepší vybraní reprezentanti soutěží na celosvětové Mezinárodní olympiádě v informatice IOI (International Olympiad in Informatics), zatímco čtyři úspěšní soutěžící z nematuritních ročníků mají možnost jet na Středoevropskou olympiádu v informatice CEOI (Central European Olympiad in Informatics). V letošním roce se uskutečnil již 32. ročník IOI a 27. ročník CEOI.

Rok 2020 byl ovšem velmi mimořádný, světová pandemie koronaviru hodně věcí změnila a silně se dotkla také pořádání všech předmětových olympiád a jiných soutěží. Ústřední kolo 69. ročníku Matematické olympiády kategorie P se mělo konat na konci března v Teplicích, v plánované podobě ovšem muselo být zrušeno a bylo nahrazeno online soutěží. Ta proběhla v původně plánovaném termínu 26.–27. 3. 2020, s původně připravenými soutěžními úlohami a za stoprocentní účasti všech třiceti soutěžících vybraných na základě výsledků krajských kol.

V posledních letech bývalo zvykem pozvat všechny úspěšné řešitele ústřed-

ního kola MO kategorie P na krátké výběrové soustředění, na kterém se určí složení reprezentačních družstev pro obě mezinárodní olympiády v informatice. Letos se ovšem nemohlo uskutečnit ani dubnové výběrové soustředění, takže výběr reprezentantů pro IOI a CEOI jsme provedli pouze na základě výsledků online ústředního kola. Zrušeno bylo také tradiční červnové česko-polsko-slovenské přípravné soustředění vybraných reprezentantů.

* * * * *



Středoevropská olympiáda v informatice CEOI 2020 se měla konat v maďarském městě Nagykanizsa ve dnech 29. 6.–5. 7. 2020. Kvůli probíhající epidemii byl termín konání o dva měsíce odložen na 23.–29. 8. 2020, zachován ovšem zůstal tradiční formát prezenční soutěže i místo konání. Soutěž proběhla v prostorách gymnázia Lajose Batthyány. Všichni soutěžící byli ubytováni v nedalekém hotelu Oázis, zatímco vedoucí bydleli v druhém hotelu Central. Celkem soutěžilo 55 studentů ze třinácti zemí. Vedle osmi tradičních účastnických středoevropských států (Česká republika, Chorvatsko, Maďar-

sko, Německo, Polsko, Rumunsko, Slovensko, Slovinsko) se navíc přihlásili jako hosté soutěžící z Itálie, Litvy, Nizozemí, Rakouska a Švýcarska. Tyto země se účastní CEOI poměrně často, ale protože se nepodílejí na střídavém pořádání olympiády, musí si svoji účast sami vždy uhradit. Jako obvykle se zúčastnilo také druhé družstvo z pořadatelské země.

Letošní ročník CEOI byl mimořádný tím, že organizátoři umožnili účast distanční formou soutěžícím z těch zemí, odkud kvůli epidemii nemohli nebo nechtěli cestovat do Maďarska. Tuto online formu účasti zvolili soutěžící z Chorvatska, Itálie, Litvy, Rakouska, Rumunska a Slovinska. Studenti v těchto šesti zemích se shromáždili na dobu konání vlastní soutěže vždy na jednom místě, kde řešili zadané soutěžní úlohy pod dohledem místních organizátorů národní informatické olympiády. Podobným způsobem byla později v září uspořádána celá Mezinárodní olympiáda v informatice IOI 2020.

České reprezentační družstvo na CEOI 2020 bylo tvořeno těmito žáky: Jiří Kalvoda, žák Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, Václav Janáček, žák Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, Adam Blažek, žák Gymnázia na Mikulášském nám. v Plzni, Ondřej Sladký, žák Gymnázia na Mikulášském nám. v Plzni. Vedoucími české delegace na CEOI 2020 byli jmenováni doc. RNDr. Tomáš Pitner, Ph.D. z Fakulty informatiky Masarykovy univerzity v Brně a doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc. z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Vlastní soutěž se jako vždy odehrávala v průběhu dvou soutěžních dnů. V každém dni soutěžící řešili tři náročné algoritmické úlohy, na jejichž vyřešení měli pět hodin času. Večer před soutěží vedoucí všech delegací společně schválili soutěžní úlohy navržené pořadatelskou zemí, upravili podle potřeby jejich formulace a přeložili je pak do mateřského jazyka svých studentů. Čeští studenti tedy dostali jak anglickou, tak i českou verzi zadání úloh.

Každý soutěžící pracuje na přiděleném osobním počítači s nainstalovaným soutěžním prostředím, které umožňuje vyvíjet a testovat programy a odesílat je k vyhodnocení. Správnost vypracovaných programů organizátoři testují v průběhu soutěže pomocí předem připravené sady testovacích dat, každý test je navíc omezen časovým limitem. Tím je zajištěna nejen kontrola správnosti výsledků, ale pomocí časových limitů se také odliší kvalita použitého algoritmu. Při testování každé úlohy se používají sady testovacích dat různé velikosti, takže teoreticky správné řešení založené na neefektivním algoritmu zvládne dokončit včas výpočet pouze pro některé testy – pro ty menší a jednodušší. Takové řešení je potom ohodnoceno částečným počtem bodů. Krátce po odevzdání vypracovaného programu do vyhodnocovacího systému se soutěžící dozví hodnocení svého řešení a má pak ještě možnost opravit ho a odevzdat znovu. Jedná se o podobný systém, jaký používáme v posledních letech u nás v Matematické olympiádě kategorie P pro praktické úlohy domácího a ústředního kola.

Místní organizátoři zpřijemnilí všem účastníkům olympiády pobyt v Maďarsku několika zajímavými doprovodnými akcemi. Hned v prvním dnu pobytu proběhlo seznámení s počítači a se soutěžním prostředím a slavnostní zahájení. Všichni účastníci také absolvovali prohlídku města Nagykanizsa.



Odpoledne po prvním soutěžním dnu jsme navštívili místní rekreační oblast s jezerem Boating Lake.



Mezi oběma soutěžními dny byl ponechán jeden volný den, ve kterém se všichni účastníci olympiády vypravili do nově budovaného výzkumného a technologického centra Zala nedaleko města Zalaegerszeg. Toto centrum se věnuje vývoji a testování autonomně řízených vozidel a počítačové simulaci. Odpoledne jsme se přemístili do nedalekého města Keszthely na prohlídku zámku a na vyjížďku lodí po jezeře Balaton.



Po druhém soutěžním dnu jsme odpoledne navštívili místní továrnu Tungsram na výrobu svítidel LED, studenti pak ještě univerzitu Pannon a vedoucí delegací místo toho arboretum Budafa. Na závěr pobytu v Maďarsku ještě strávili soutěžící jeden den v zábavním parku Zobor, zatímco vedoucí se jeli podívat na jezero Kis-Balaton (Malý Balaton) a do jeho okolí.



Poslední den proběhlo slavnostní zakončení soutěže s vyhlášením výsledků. Každá ze soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body, takže celkově bylo teoreticky možné získat až 600 bodů. To se letos nikomu nepodařilo, úlohy byly poměrně náročné, takže i celkový vítěz Tomasz Nowak z Polska získal pouze 466 bodů. Jednu ze soutěžních úloh dokonce nikdo nevyřešil na plný počet bodů. Úspěšnější polovina soutěžících dostává na CEOI medaili, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se rozdělují v přibližném poměru 1 : 2 : 3. Na CEOI 2020 byly

uděleny celkem 4 zlaté, 10 stříbrných a 14 bronzových medailí. Středoevropská olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců, žádné pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlášováno.

Naši reprezentující dosáhli následujících výsledků:

3. Jiří Kalvoda, 437 bodů, zlatá medaile,

32. Ondřej Sladký, 198 bodů,

33. Václav Janáček, 188 bodů,

46. Adam Blažek, 118 bodů.

Získat zlaté medaile je pro nás velkým úspěchem, zlatou medaili získal náš reprezentant na CEOI naposledy v roce 1995, tedy před 25 lety. Slovenské družstvo letos získalo dvě bronzové medaile. Nejúspěšnější zemí na CEOI bylo tradičně Polsko se dvěma zlatými a dvěma stříbrnými medailemi.



Jiří Kalvoda, zlatý medailista

Veškeré informace o soutěži, texty soutěžních úloh i podrobné výsledky všech soutěžících lze nalézt na Internetu na adrese <http://ceoi2020.inf.elte.hu/>.

Následující 28. ročník Středoevropské olympiády v informatice CEOI

2021 se bude konat v chorvatském hlavním městě Záhřebu.

* * * * *



**32ND INTERNATIONAL
OLYMPIAD IN INFORMATICS
SINGAPORE**

Mezinárodní olympiáda v informatice IOI 2020 se měla původně konat v Singapuru ve dnech 19.–26. 7. 2020. Organizátoři dlouho váhali, zda vůbec a jakým způsobem ji mají uspořádat – diskutovala se možnost odložení termínu, úplného zrušení nebo uspořádání formou online soutěže. Vývoj celosvětové pandemie koronaviru nakonec neumožnil uspořádat soutěž prezenčním způsobem ani v pozdějším termínu tak, aby se jí mohli zúčastnit studenti ze všech zemí. Mezinárodní výbor IOI proto rozhodl, že soutěž IOI 2020 proběhne online formou v období 13.–19. září 2020. Soutěžící ovšem nesměli soutěžit z domova u svých počítačů, ale představitelé národních výborů olympiády z každé zúčastněné země je museli soustředit na společném místě a stálým dohledem zajistit regulérnost soutěže.

Letošní mezinárodní olympiády v informatice se zúčastnilo celkem 343 soutěžících z 87 zemí celého světa, mimo soutěž navíc řešilo úlohy ještě druhé družstvo pořádající země. Počet zúčastněných zemí tak zůstal stejný jako v loňském roce, počet soutěžících dokonce mírně vzrostl. Naše české družstvo mělo následující složení:

Jiří Kalvoda, žák Gymnázia na tř. Kpt. Jaroše v Brně, Jonáš Havelka, absolvent Gymnázia Jírovcova, České Bu-

dějovice, Ondřej Sladký, žák Gymnázia na Mikulášském nám. v Plzni, Karel Chwistek, žák Mendelova gymnázia v Opavě. Vedoucími české delegace na IOI 2020 byli doc. Mgr. Zdeněk Dvořák, Ph.D. a doc. RNDr. Pavel Töpfer, CSc., oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy.

Studenti z České republiky se sešli na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Informatická sekce MFF UK poskytla olympiádě na soutěž vhodné prostory, počítače i síťovou infrastrukturu, oba vedoucí i další ochotní pracovníci fakulty se postarali o potřebné organizační a technické zabezpečení. Soutěžící měli zajištěno ubytování a stravování v Praze po celý týden, kdy se olympiáda konala.

Vlastní soutěž proběhla jako obvykle ve dvou soutěžních dnech, a to ve středu 16. 9. a v sobotu 19. 9. Již v neděli 13. 9. ovšem předcházelo cvičné nesoutěžní kolo určené na seznámení studentů s počítači a se soutěžním prostředím (tzv. practice session), druhé kratší tréninkové kolo se pro zájemce uskutečnilo ještě v úterý 15. 9. Závěrečné vyhlášení výsledků proběhlo online formou ve středu 23. 9., to ale už sledoval každý soutěžící z domova. Průběh soutěže i způsob hodnocení úloh je na IOI téměř stejný, jako na CEOI, nic se na tom nezměnilo ani při letošní mimořádné online formě soutěže.

Každá ze šesti soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body, takže celkem bylo možné získat až 600 bodů. To se letos podařilo jedinému studentovi, absolutním vítězem soutěže s plným počtem bodů se stal William Lin z USA. Na základě přesně stanovených

pravidel se na IOI podle dosažených bodů rozdělují medaile. Některou z medailí obdrží nejvýše polovina účastníků soutěže, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se rozdělují v poměru 1 : 2 : 3 s ohledem na to, aby soutěžící se stejným bodovým ziskem získali stejnou medaili. Způsob rozdělení medailí je na IOI stanoven striktními pravidly, na rozdíl od CEOI ho nemohou členové mezinárodního výboru ani vedoucí národních delegací nijak ovlivnit. Na letošní IOI bylo uděleno celkem 171 medailí, z toho 29 zlatých, 57 stříbrných a 85 bronzových.

Výsledky našich soutěžících:

32. Jiří Kalvoda, 466,62 bodu, stříbrná medaile,

149. Jonáš Havelka, 261,71 bodu, bronzová medaile,

155. Ondřej Sladký, 249,43 bodu, bronzová medaile,

254. Karel Chwistek, 132,00 bodu.

Jedna stříbrná a dvě bronzové medaile představují pro Českou republiku velmi dobrý výsledek. Nejúspěšnější zemí se čtyřmi zlatými medailemi se tentokrát stala Čína, dalšími velmi úspěšnými zeměmi byly Rusko, USA a Írán – všechny se třemi zlatými a jednou stříbrnou medailí. Mezinárodní olympiáda v informatice je výhradně soutěží jednotlivců a oficiální pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlášováno. Není tedy ani stanoveno, zda by se mělo určovat podle počtu medailí, podle celkového počtu bodů získaných soutěžícími dané země nebo třeba podle součtu jejich dosažených umístění. Naše výsledky nás každopádně řadí přibližně do jedné třetiny v celkovém pořadí zúčastněných

zemí, tzn. kolem 25.–30. místa. Slovenské družstvo letos získalo dvě stříbrné medaile.

Všechny podrobnosti o soutěži i texty soutěžních úloh lze nalézt na Internetu na adrese <https://ioi2020.sg/>, kompletní výsledková listina je k dispozici na webové stránce se statistikami <http://stats.ioinformatics.org/results/2020>.

Další ročníky Mezinárodní olympiády v informatice se původně měly konat postupně v Egyptě (2021), Indonésii (2022) a Maďarsku (2023). Vzhledem ke zrušení letošní olympiády v Singapuru se představitelé pořadatelských zemí dohodli, že Singapur místo toho uspořádá příští ročník a pořadatelství Egypta se odsune až na rok 2024. Příští 33. mezinárodní olympiáda v informatice IOI 2021 se tedy bude konat v Singapuru ve dnech 20.–27. 6. 2021.

Pavel Töpfer

39. mezinárodní konference Historie matematiky

Ve dnech 21.–25. srpna 2020 se v prostorách Ústavu jazykové a odborné přípravy Univerzity Karlovy (ÚJOP UK) v Poděbradech uskutečnila 39. mezinárodní konference *Historie matematiky*, která byla věnována vývoji matematiky a jejích aplikací v období mezi světovými válkami. Konferenci, jíž se zúčastnilo téměř 40 účastníků, připravil mezinárodní programový výbor, jehož členy byli M. Bečvářová (FD ČVUT), J. Bečvář, I. Ne-

tuka, A. Slavík, J. Veselý (všichni MFF UK), V. Bálint (Žilinská univerzita, Slovensko), S. Domoradzki (Univerzita Rzeszów, Polsko), R. Duda (Univerzita Wrocław) a M. Stawiska-Friedland (Mathematical Reviews, Ann Arbor, Michigan). Hlavními organizátory byli J. Bečvář, M. Bečvářová, Z. Halas (MFF UK), M. Melcer (UJOP UK) a M. Otavová (VŠE).

Program konference byl úzce spojen s tématem projektu *Dopad první světové války na utváření a proměny vědeckého života matematické komunity* (GAČR 18-00449S), s jehož podporou se akce konala. Vyzvané přednášky a další konferenční vystoupení se proto soustředily zejména na meziválečné období, popřípadě hlavní téma vhodným způsobem doplnily a ukázaly širší souvislosti. Celkem tak v aule poděbradského zámku vystoupili: V. Bálint (*Zdroje rozvoja maďarskej matematiky v mezivojnovom období*), J. Bečvář (*Matematika v první třetině 20. století*), M. Bečvářová (*Doktorky matematiky na pražských univerzitách v letech 1900 až 1945*), S. Daniš (*Mezi kvan-tem a jádrem*), S. Domoradzki (*Teaching Activities of Members of the Lwów Mathematical School in the Interwar Period*), R. Duda (*Theory of Sets – A Vehicle to Modern Mathematics in Poland*), Z. Halas (*Max Dehn a třetí Hilbertův problém*), J. Hora (*Faktorizace polynomů s celočíselnými koeficienty – český a slovenský příspěvek*), M. Hykšová (*Teorie pravděpodobnosti v meziválečném Československu*), M. Otavová a I. Sýkorová (*Bolzanoova funkce a její další osudy*), A. Slavík (*Hassler Whitney a počátky teo-*

rie matroidů), M. Stawiska-Friedland (*Mathematical Community of the General Faculty at the Lwów Polytechnics (1927–1934)*), M. Šolc (*Pět kapitol o astronomech a matematice v Československu v době před vznikem Astronomického ústavu ČSAV v roce 1952*), J. Valenta (*Vývoj Jednoty československých matematiků a fyziků v meziválečném období se zvláštním zřetelům k hospodářské činnosti*), J. Veselý (*Moskevská škola teorie funkcí, Luzitanie a Andrej Nikolajevič Kolmogorov (1903–1987)*); *Mezi matematikou a historií matematiky. Otto Neugebauer (1899–1990)*) a J. Zhouf (*Téměř 100 let Rozhledů matematicko-fyzikálních*).

Odborný program konference byl doplněn komentovanou procházkou po Poděbradech, při níž se role průvodce ujal M. Melcer, a společenským večerem v zahradě poděbradského zámku, kde byla mj. připomenuta životní jubilea čtyř pravidelných účastníků konference: Romana Dudy (85), Jiřího Veselého (80), Martina Melcera (50) a Antonína Slavíka (40). Všichni účastníci obdrželi při prezentaci následující publikace: *Jarník's Note of the Lecture Course Allgemeine Idealtheorie by B. L. van der Waerden (Göttingen 1927/1928)* (J. Bečvář, M. Bečvářová, 2020), *Dopady první světové války na mezinárodní spolupráci matematiků* (M. Bečvářová, I. Netuka, 2019), *Doktorky matematiky na univerzitách v Praze 1900–1945* (M. Bečvářová, 2019), *Forgotten Mathematician Henry Lowig (1904–1995)* (M. Beč-

vářová et al., 2012), *Mathematics in the Austrian-Hungarian Empire. Proceedings of a Symposium held in Budapest on August 1, 2009 during the XXIII ICHST* (M. Bečvářová, Ch. Binder (eds.), 2019), *Bolzano and the Foundation of Mathematical Analysis: on the Occasion of the Bicentennial of Bernard Bolzano* (V. Jarník, 1981), a dále jeden sborník z některé z předchozích mezinárodních konferencí.

Akce by se jen stěží mohla uskutečnit bez obětavého úsilí M. Melcera, ředitele ÚJOP UK, manželů Bečvářových, Z. Halase, V. Melcerové a M. Otavové, jimž proto patří velké poděkování. Poděkovat je třeba také všem dalším organizátorům a účastníkům konference. Jubilejní 40. mezinárodní konference *Historie matematiky* se uskuteční v Poděbradech v srpnu roku 2022. Ve dnech 16. až 19. srpna 2021 se bude na stejném místě konat 15. seminář z historie matematiky pro vyučující na středních školách. Podrobné informace o minulých i připravovaných konferencích a seminářích včetně přihlášek jsou dostupné na webových stránkách:

<http://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/konference>

http://www.fd.cvut.cz/personal/becvamar/seminar_ss

Další informace podá M. Bečvářová (Ústav aplikované matematiky, FD ČVUT v Praze, Na Florenci 25, 110 00 Praha 1, e-mail: becvamar@fd.cvut.cz).

Magdalena Hykšová