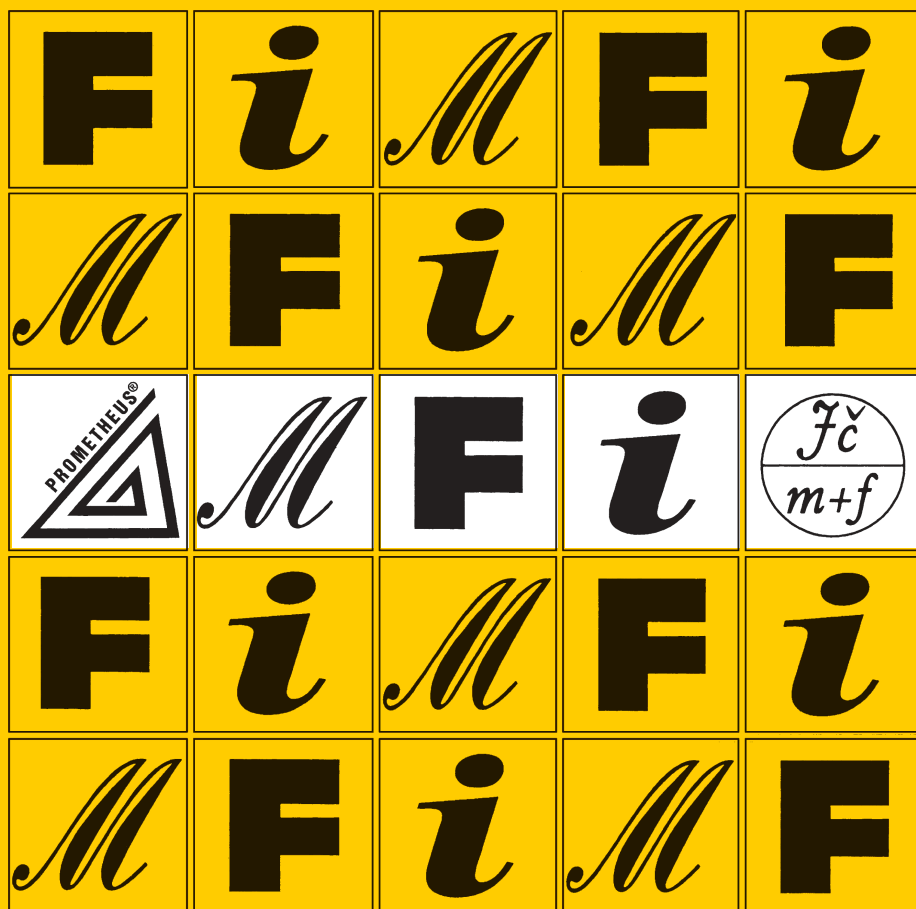


MATEMATIKA 2 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXX (2021), číslo 2

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku
Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek
Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška, Michaela Křížová, Miluše Lachmannová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil (předseda redakční rady), Dana Mandíková, Oldřich Odvárko, Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel Töpfer

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>T. Riemel:</i> O exponenciálních diofantovských rovnicích	81
<i>R. Halaš, M. Chodorová, J. Švrček:</i> Překvapivá řešení jedné úlohy	91
<i>D. Hrubý:</i> Z historie výuky infinitezimálního počtu	96
Zajímavé matematické úlohy	106

FYZIKA

<i>O. Lepil:</i> Ohmův zákon a výuka fyziky na základní škole	110
<i>F. Jáchim:</i> Úpravy RVP ZV pohledem učitele základní školy	114
<i>Č. Kodejška, J. Šana, O. Valášek:</i> Virtuální laboratorní cvičení s využitím 3D modelů Corinth	121
<i>J. Hošková Prokšová:</i> Hermann von Helmholtz (k dvoustému výročí narození)	128

INFORMATIKA

<i>P. Osíčka:</i> Strojové učení a deep learning	133
<i>P. Töpfer:</i> Vybalancovaný úsek (Úlohy z MO kategorie P, 41. část)	146

ZPRÁVY A INFORMACE

<i>P. Calábek:</i> Ústřední kolo 70. ročníku MO kategorie A	152
<i>J. Švrček:</i> 10. evropská dívčí MO (EGMO)	153
<i>L. Richterek:</i> Celostátní kolo 62. ročníku FO	155
<i>L. Richterek:</i> Fontes Scientiæ aneb díla velikanů (alespoň částečně) v češtině	158

O exponenciálních diofantovských rovnicích

TOMÁŠ RIEMEL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Exponenciálními diofantovskými rovnicemi rozumíme takové rovnice, v nichž celočíselné neznámé mají charakter exponentů daných exponenciálních funkcí se základy, jimiž jsou přirozená čísla větší než 1. V tomto článku, který navazuje na [4], se zaměříme na některé typy exponenciálních diofantovských rovnic o dvou neznámých ve tvaru

$$a^x - b^y = c, \quad (1)$$

kde x, y jsou neznámé z oboru přirozených čísel, a, b jsou daná přirozená čísla větší než 1 a c je dané celé číslo ($c \neq 0$).

Pro $c = 1$ vyslovil již v roce 1844 belgický matematik *Eugene Charles Catalan* zajímavou hypotézu, kterou dokázal až v roce 2002 rumunský matematik *Preda Mihăilescu*.

Věta 1 (Catalanova)

Diofantovská rovnice ve tvaru

$$a^x - b^y = 1,$$

kde a, b, x, y jsou hledaná přirozená čísla větší než 1, má právě jedno řešení, a to $(a, b, x, y) = (3, 2, 2, 3)$.

Problematikou těchto rovnic a rovnic jim podobných se zabývalo mnoho

dalších matematiků, zejména *S. S. Pillai*¹⁾ a *M. A. Bennett*²⁾. Nejdůležitějším výsledkem je následující věta publikovaná v [1] a zmíněná např. v [5] a [7].

Věta 2

Nechť a, b jsou daná přirozená čísla větší než 1, pak diofantovská rovnice (1), kde x, y jsou neznámé z oboru přirozených čísel a c je dané celé nenulové číslo, má nejvýše dvě řešení.

Speciálně pak pro $a = b + 1$ platí následující věta.

Věta 3 (M. A. Bennett, 2003, viz [2])

Nechť b, c jsou daná přirozená čísla, $b \geq 2$, pak diofantovská rovnice

$$|(b+1)^x - b^y| = c, \quad (2)$$

má v oboru přirozených čísel nejvýše jedno řešení s výjimkou

$$(b, c) \in \{(2, 1), (2, 5), (2, 7), (2, 13), (2, 23), (3, 13)\}.$$

V prvních dvou případech má rovnice (2) právě 3 řešení, v posledních čtyřech případech má právě 2 řešení. Důkaz této věty je možno nalézt v [2].

Dále v příspěvku uvedeme *elementární metody* řešení některých speciálních exponenciálních diofantovských rovnic ve tvaru $3^x - 2^y = c$, resp. $2^y - 3^x = c$, kde x, y jsou neznámé z oboru přirozených čísel a c je dané přirozené číslo. Tyto rovnice lze zapsat souhrnně ve tvaru (2) pro $b = 2$, tj.

$$|3^x - 2^y| = c.$$

Při řešení této a následujících úloh se využívá především metody faktORIZACE (součinnového tvaru rovnice) a číselných kongruencí.

Příklad 1

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$3^x - 2^y = 1.$$

¹⁾ *Subbayya Sivasankaranarayana Pillai* (1901–1950) indický matematik, zaměřující se na teorii čísel. Jeho příspěvek k Waringovu problému popsal v roce 1950 K. S. Chandrasekharan jako téměř jistě jeho nejlepší dílo a jeden z nejlepších úspěchů v indické matematice od doby Ramanujana.

²⁾ *Michael A. Bennett* (1965–dosud), kanadský matematik zabývající se diofantovskými aproximacemi a teorií čísel

Řešení. Danou rovnici přepíšeme do tvaru

$$3^x - 1 = 2^y. \quad (3)$$

Pro $x = 1$ dostáváme $y = 1$. Je-li $x \geq 2$, pak $y \geq 3$. Levou stranu rovnice (3) dále upravíme podle známého vzorce

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1})$$

pro libovolná reálná čísla A, B (zde $A = 3, B = 1$) a libovolné přirozené číslo n .

$$(3 - 1)(3^{x-1} + 3^{x-2} + \dots + 3^2 + 3 + 1) = 2^y,$$

tj.

$$3^{x-1} + 3^{x-2} + \dots + 3^2 + 3 + 1 = 2^{y-1}. \quad (4)$$

Vzhledem k tomu, že výraz na pravé straně (4) je dělitelný dvěma, musí být dělitelná dvěma i levá strana. To nastane, pokud je na levé straně (4) sudý počet sčítanců. Nutně platí $x = 2k$, kde k je vhodné přirozené číslo. Rovnici (3) lze pak upravit do tvaru

$$3^{2k} - 1 = (3^k + 1)(3^k - 1) = 2^y.$$

Zřejmě $3^k + 1 = 2^m$ a $3^k - 1 = 2^n$, kde m, n jsou celá nezáporná čísla, $m > n, m + n = y$. Zároveň ale platí $(3^k + 1) - (3^k - 1) = 2$. Takže $3^k + 1 = 4$ a $3^k - 1 = 2$, tj. $k = 1$, neboli $x = 2$ a z rovnice (3) získáme $y = 3$. Zkouškou (je zde součástí řešení) se přesvědčíme o správnosti získaného řešení.

Závěr. Daná rovnice, jejíž řešení jsme hledali v oboru přirozených čísel, má právě dvě řešení, tj. $(x, y) \in \{(1, 1), (2, 3)\}$. Nalezený výsledek je tedy ve shodě s větou 2.

Podobně lze řešit také následující úlohu.

Příklad 2

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$2^y - 3^x = 1.$$

Řešení. Nejprve danou rovnici upravíme do tvaru

$$3^x = 2^y - 1. \quad (5)$$

Pro $y = 1$ nemá daná úloha řešení v oboru přirozených čísel. Jestliže $y \geq 2$, pak $x \geq 1$.

Po úpravě pravé strany rovnice (5) dostaneme

$$3^x = 2^{y-1} + 2^{y-2} + \dots + 2^2 + 2 + 1.$$

Tedy $3 \mid (2^{y-1} + 2^{y-2} + \dots + 2^2 + 2 + 1)$, z čehož (podobně jako v příkladu 1) nutně $y = 2k$, kde k je vhodné přirozené číslo. S ohledem na tuto podmínku přepíšeme rovnici (5) do tvaru

$$3^x = 2^{2k} - 1 = (2^k + 1)(2^k - 1).$$

Dále postupujeme analogicky jako v příkladu 1. Čísla $2^k + 1$ a $2^k - 1$ jsou tedy mocninami čísla 3 a zároveň je jejich rozdíl roven 2. Platí tudíž $2^k + 1 = 3$ a $2^k - 1 = 1$. Zkouškou se opět přesvědčíme, že nalezená dvojice $(1, 2)$ je řešením úlohy.

Závěr. Daná rovnice má právě jedno řešení v oboru přirozených čísel, a to ve tvaru $(x, y) = (1, 2)$.

První dva příklady lze souhrnně považovat za rovnici

$$|3^x - 2^y| = 1,$$

pro niž jsme v oboru přirozených čísel našli právě 3 řešení dané rovnice, a to $(x, y) \in \{(1, 1), (1, 2), (2, 3)\}$, což je ve shodě s tvrzením věty 3.

Následující příklad názorně ukazuje, že zkoumané exponenciální diofantovské rovnice tvaru (2) nemají řešení v oboru přirozených čísel při volbě některých hodnot celého čísla c na její pravé straně.

Příklad 3

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$3^x - 2^y = 2. \tag{6}$$

Řešení. Danou rovnici upravíme nejprve do tvaru $3^x = 2^y + 2$. Jelikož $y \geq 1$, lze rovnici přepsat do tvaru

$$3^x = 2(2^{y-1} + 1),$$

avšak $2 \nmid 3^x$ pro každé přirozené x , což znamená, že rovnice (6) nemá řešení v oboru přirozených čísel.

Poznámka. Výsledek příkladu 3 můžeme zobecnit, zvolíme-li v rovnici $|3^x - 2^y| = c$ číslo $c = 2k$, kde k je dané přirozené číslo. Analogicky

lze postupovat i pro $c = 3k$. Ve všech těchto případech nemá daná rovnice řešení v oboru přirozených čísel.

Dále se budeme zabývat diofantovskými rovnicemi $3^x - 2^y = 5$ a $2^y - 3^x = 5$, tj. rovnicí $|3^x - 2^y| = 5$. Podrobné řešení diofantovské rovnice $3^x - 2^y = 5$ je možno nalézt v [4, příklad 7]. Tato úloha má právě jedno řešení $(x, y) = (2, 2)$ v oboru přirozených čísel.

Zabývejme se nyní rovnicí $2^y - 3^x = 5$. Při jejím řešení a také při řešení následujících dvou úloh využijeme metodu číselných kongruencí.

Příklad 4

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$2^y - 3^x = 5.$$

Řešení. Danou rovnici nejprve převedeme do tvaru

$$3^x = 2^y - 5. \quad (7)$$

Výraz 3^x na levé straně (7) nabývá kladných hodnot, tudíž $2^y - 5 > 0$, a tedy $y \geq 3$. Nyní upravíme rovnici (7) do tvaru

$$3^x - 3 = 2^y - 8. \quad (8)$$

Protože $y \geq 3$, platí

$$3^x - 3 = 2^3 (2^{y-3} - 1).$$

Je tedy $2^3 \mid (3^x - 3)$, tj. $2^3 \mid 3(3^{x-1} - 1)$. Jelikož $2^3 \nmid 3$, je $2^3 \mid (3^{x-1} - 1)$. Je-li $x = 1$, z rovnice (8) získáme řešení $(x, y) = (1, 3)$. V případech, kdy $x \geq 2$ a tedy $y \geq 4$, dostáváme v rovnici (8) na obou stranách přirozené číslo. Nechť $2^3 = 3^{x-1} - 1$, tedy $x = 3$. Z rovnice (7) získáme $y = 5$. Dostali jsme tak další řešení ve tvaru $(x, y) = (3, 5)$. Konečně, jestliže $x \geq 4$, pak rovnici (7) upravíme do tvaru

$$3^x - 81 = 2^y - 86. \quad (9)$$

Dále rovnici (9) upravíme

$$81(3^{x-4} - 1) = 2^y - 86.$$

Tedy $81 \mid (2^y - 86) = 2(2^{y-1} - 43)$. Jelikož $81 \nmid 2$, je $81 \mid (2^{y-1} - 43)$. Nejmenší mocnina čísla 2, která vyhovuje poslední podmínce o dělitelnosti

číslem 81, je $y - 1 = 22$. Dále pak vyhovují čísla 76, 130, 184 atd. Platí tedy $y = 23 + 54k$, kde k je vhodné celé nezáporné číslo. Zároveň lze rovnici (9) upravit do tvaru

$$3^x - 81 = 2(2^{y-1} - 43).$$

Číslo 2 dělí $3^x - 81 = 81(3^{x-4} - 1)$. Protože $2 \nmid 81$, platí $2 \mid (3^{x-4} - 1)$. Nejmenší vyhovující mocnina čísla 3 je $x - 4 = 0$. Dále pak 2, 4, 6 atd. Pak tedy $x = 4 + 2l$, kde l je vhodné celé nezáporné číslo. Rovnici

$$2^y - 3^x = 5$$

přepíšeme do tvaru

$$2^{23+54k} - 3^{4+2l} = 2^{23} \cdot 2^{54k} - 81 \cdot 3^{2l} = 2^{23} \cdot (2^{54})^k - 81 \cdot 9^l = 5. \quad (10)$$

Z kongruencí

$$2^{23} \equiv 3 \pmod{5},$$

$$2^{54} \equiv -1 \pmod{5},$$

$$81 \equiv 1 \pmod{5},$$

$$9 \equiv -1 \pmod{5}$$

a jejich využitím v (10) plyne kongruenční exponenciální rovnice

$$3 \cdot (-1)^k \equiv 1 \cdot (-1)^l \pmod{5}. \quad (11)$$

Jelikož pro všechna celá nezáporná čísla n platí, že $(-1)^n$ nabývá pouze hodnot 1 a -1 , nemá kongruenční rovnice (11), a tedy ani rovnice (10) v oboru přirozených čísel, řešení. Daná úloha má v oboru přirozených čísel právě 2 řešení, což je v souladu s větou 2.

Závěr. Daná úloha má právě dvě řešení v oboru přirozených čísel, a to $(x, y) \in \{(1, 3), (3, 5)\}$.

Rovnice $|3^x - 2^y| = 5$ má tedy v oboru přirozených čísel celkem tři řešení $(x, y) \in \{(1, 3), (2, 2), (3, 5)\}$, což je opět v souladu s větou 3.

Příklad 5

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$3^x - 2^y = 7.$$

Řešení. Ze zadání je patrné, že $x \geq 2$, a tedy $y \geq 1$. Danou rovnici upravíme do tvaru

$$3^x - 9 = 2^y - 2. \quad (12)$$

Pokud $x = 2$, pak snadno získáme řešení, kterým je dvojice $(x, y) = (2, 1)$.

V případech, kdy $x \geq 3$, lze rovnici (12) přepsat do tvaru

$$3^x - 27 = 2^y - 20. \quad (13)$$

Z rovnice (13) plyne, že $y \geq 5$. Dále tuto rovnici upravíme do tvaru

$$27(3^{x-3} - 1) = 2^y - 20.$$

Tedy $27 \mid (2^y - 20) = 4(2^{y-2} - 5)$. Jelikož $27 \nmid 4$, pak $27 \mid (2^{y-2} - 5)$. Nejmenší mocnina čísla 2 vyhovující této podmínce je $y - 2 = 5$. Dále pak 23, 41, 59 atd. Proto $y = 7 + 18k$, kde k je vhodné celé nezáporné číslo. Rovnici (13) lze upravit do tvaru

$$3^x - 27 = 4(2^{y-2} - 5).$$

Číslo 4 dělí $3^x - 27 = 27(3^{x-3} - 1)$. Protože $4 \nmid 27$, je $4 \mid (3^{x-3} - 1)$. Nejmenší vyhovující mocnina čísla 3 je zde $x - 3 = 0$. Dále pak 2, 4, 6 atd. Odtud $x = 3 + 2l$, kde l je vhodné celé nezáporné číslo. Rovnici

$$3^x - 2^y = 7$$

lze nyní přepsat do tvaru

$$3^{3+2l} - 2^{7+18k} = 27 \cdot 3^{2l} - 128 \cdot 2^{18k} = 27 \cdot 9^l - 128 \cdot 262\,144^k = 7. \quad (14)$$

Z kongruencí

$$\begin{aligned} 27 &\equiv -1 \pmod{7}, \\ 9 &\equiv 2 \pmod{7}, \\ 128 &\equiv 2 \pmod{7}, \\ 262\,144 &\equiv 1 \pmod{7} \end{aligned}$$

a jejich využitím v (14) plyne kongruenční exponenciální rovnice

$$(-1) \cdot 2^l - 2 \cdot 1^k \equiv 0 \pmod{7}. \quad (15)$$

Podmínkou pro řešení kongruenční rovnice (15) je splnění kongruence $2^l \equiv 5 \pmod{7}$. Jelikož však pro všechna celá nezáporná čísla n dávají

čísla 2^n při dělení 7 pouze zbytky 1, 2, 4, nemá kongruenční rovnice (15), ani rovnice (14), řešení v oboru přirozených čísel.

Závěr. Řešením dané úlohy je tedy jediná dvojice $(x, y) = (2, 1)$.

Příklad 6

V oboru přirozených čísel řešte rovnici

$$2^y - 3^x = 7.$$

Řešení. Zřejmě $y \geq 3$, přitom pro $y = 3$ nemá rovnice řešení v oboru přirozených čísel. Pro $y \geq 4$ lze danou rovnici upravit do tvaru

$$2^y - 16 = 3^x - 9. \quad (16)$$

Levá strana rovnice (16) je evidentně větší nebo rovna 0, a tudíž $x \geq 2$. Pro $y = 4$ obdržíme řešení $(x, y) = (2, 4)$.

Jestliže $y \geq 5$, pak ze zadání plyne $x \geq 3$. Pro $x = 3$ však neexistuje přirozené číslo y splňující rovnici $2^y - 3^x = 7$. Je-li $x \geq 4$, lze rovnici (16) upravit do tvaru

$$2^y - 88 = 3^x - 81. \quad (17)$$

Dále rovnici (17) upravíme

$$2^y - 88 = 81(3^{x-4} - 1).$$

Tedy $81 \mid (2^y - 88) = 8(2^{y-3} - 11)$. Jelikož $81 \nmid 8$, je $81 \mid (2^{y-3} - 11)$. Nejmenší vyhovující mocnina čísla 2 je $y - 3 = 13$. Dále pak 67, 121, 178 atd. Nutně tedy $y = 16 + 54l$, kde l je dané celé nezáporné číslo. Zároveň lze rovnici (17) upravit do tvaru

$$8(2^{y-3} - 11) = 3^x - 81.$$

Tedy $8 \mid (3^x - 81) = 81(3^{x-4} - 1)$. Protože $8 \nmid 81$, je $8 \mid (3^{x-4} - 1)$. Nejmenší vyhovující mocnina čísla 3 je $x - 4 = 0$. Další možné mocniny jsou pak 2, 4, 6, 8 atd. Proto $x = 4 + 2k$, kde k je vhodné celé nezáporné číslo. Rovnici $2^y - 3^x = 7$ přepíšeme do tvaru

$$2^{16+54l} - 3^{4+2k} = 4^{8+27l} - 9^{2+k} = (2^{8+27l} - 3^{2+k})(2^{8+27l} + 3^{2+k}) = 7.$$

Jelikož $2^{8+27l} + 3^{2+k}$ je přirozené číslo (větší než 2), je také $2^{8+27l} - 3^{2+k}$ přirozené číslo. Vzhledem k tomu, že 7 je prvočíslo, musí platit

$$2^{8+27l} + 3^{2+k} = 7 \quad \text{a} \quad 2^{8+27l} - 3^{2+k} = 1.$$

Odečtením těchto dvou rovnic obdržíme rovnici $3^{2+k} = 3$. Tedy pro exponent $2 + k$ platí $2 + k = 1$. Protože zároveň $x = 4 + 2k = 2(2 + k)$, pak $x = 2$, což je však ve sporu s předpokladem $x \geq 4$.

Závěr. Řešením dané úlohy v oboru přirozených čísel je jediná uspořádaná dvojice $(x, y) = (2, 4)$.

Rovnice $|3^x - 2^y| = 7$ má právě 2 řešení v oboru přirozených čísel, tj. řešení ve tvaru $(x, y) \in \{(2, 1), (2, 4)\}$, což je opět v souladu s větou 3.

V závěrečné části příspěvku uvádíme příklady exponenciálních diofantovských rovnic (příklady 7–9) tvořící tzv. *gradovaný řetězec úloh* (viz např. [6]), které byly využity v 62. ročníku (v roce 2013) MO v kategorii B. Ukazuje se tak, že uvedená problematika je vhodná pro práci s matematicky nadanými žáky a jejich přípravu na matematické soutěže.

Příklad 7 (62. MO, B–I–1)

Určete všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel, pro něž platí

$$2^a + 4^b = 8^c.$$

[*Řešení:* $(a, b, c) = (6n - 4, 3n - 2, 2n - 1)$, kde n je libovolné přirozené číslo.]

Příklad 8 (62. MO, B–S–1)

Dokažte, že žádná z rovnic

$$3^{2x} + 6^y = 2013,$$

$$|3^{2x} - 6^y| = 2013$$

nemá řešení v oboru přirozených čísel.

Příklad 9 (62. MO, B–II–3)

Určete všechny trojice (a, b, c) přirozených čísel, pro něž platí

$$2^{a+2b+1} + 4^a + 16^b = 4^c.$$

[*Řešení:* $(a, b, c) = (2b, b, 2b + 1)$, kde b je libovolné přirozené číslo.]

Podobné úlohy se vyskytují v posledních letech i v zahraničních matematických soutěžích. Dokladem toho jsou mj. následující dvě úlohy, k jejichž řešení lze využít elementárních metod popsanych v předešlých částech tohoto příspěvku. Obě tyto úlohy již ponecháváme k samostatnému rozmyšlení zájemcům o uvedenou problematiku.

Příklad 10 (Srbská MO, 2019)

Určete všechny dvojice (x, y) nezáporných celých čísel splňující rovnici

$$2^x = 5^y + 3.$$

[Řešení: $(x, y) \in \{(2, 0), (3, 1), (7, 3)\}$.]

Příklad 11 (Vietnamská MO, 2019)

Určete všechny trojice (x, y, z) přirozených čísel splňující rovnici

$$2^x + 1 = 7^y + 2^z.$$

[Řešení: $(x, y, z) \in \{(3, 1, 1), (6, 2, 4)\}$.]

Literatura

- [1] *Bennett, M. A.*: On Some Exponential Equations of S. S. Pillai. *Canad. J. Math.*, roč. 53 (2001), č. 5, 897–922.
- [2] *Bennett, M. A.*: Pillai's conjecture revisited. *Journal of Number Theory*, roč. 98 (2003), 228–235.
- [3] *Cassels, J. W. S.*: On the equation $a^x - b^y = 1$. *Amer. J. Math.*, roč. 75 (1953), s. 159–162.
- [4] *Riemenel, T., Švrček J.*: Polynomicko-exponenciální diofantovské rovnice. *Matematika, fyzika, informatika*, roč. 29 (2020), č. 1, s. 1–6.
- [5] *Senderov, V. A., Frenkin, B. R.*: Gipotéza Katalana. *Kvant* (2007), č. 4, s. 8–10 (rusky).
- [6] *Švrček J.*: Gradované řetězce úloh v práci s matematickými talenty. Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc, 2014.
- [7] *Žuravljov, B. M., Samavol, P. I.*: Eksponencialnyje diofantovy uravnenija i summa cifr čisla. *Matěmaticeskoje prosvěščenije*, roč. 3 (2016), č. 20 (rusky).
- [8] *Metsänkylä, T.*: Catalan's conjecture: Another old Diophantine problem solved. *Bull. Amer. Math. Soc.*, roč. 41 (2004), s. 43–57.

Překvapivá řešení jedné úlohy

RADOMÍR HALAŠ – MARIE CHODOROVÁ – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Posluchačům závěrečného ročníku navazujícího studia (učitelství kombinace s matematikou), kteří na počátku letošního roku vypracovávali na PřF UP v Olomouci písemnou část ke státní závěrečné zkoušce z didaktiky matematiky, byla předložena mj. následující školská úloha.

Nechť ABC je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami $|BC| = a$, $|AC| = b$ a s délkou v výšky z vrcholu C . Dokažte, že platí rovnost

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{v^2}. \quad (1)$$

Při zadání úlohy jsme očekávali od studentů následující řešení, které považujeme i pro začínající učitele matematiky za nejsnazší.

Řešení 1

Vyjdeme ze známých vzorců pro výpočet obsahu S pravoúhlého trojúhelníku ABC . Při běžném označení délek jeho stran platí

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}cv.$$

Odtud plyne

$$\frac{1}{a^2} = \frac{b^2}{4S^2}, \quad \frac{1}{b^2} = \frac{a^2}{4S^2}, \quad \frac{1}{v^2} = \frac{c^2}{4S^2}.$$

Sečtením prvních dvou vztahů a následným využitím Pythagorovy věty v pravoúhlém trojúhelníku ABC bezprostředně obdržíme

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2}{4S^2} + \frac{a^2}{4S^2} = \frac{a^2 + b^2}{4S^2} = \frac{c^2}{4S^2} = \frac{1}{v^2}.$$

Tím je důkaz ukončen.

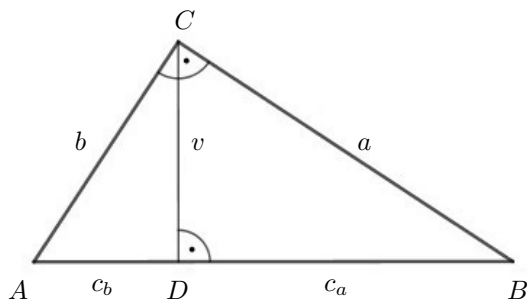
Při opravě studentských řešení nás překvapila poměrně velká rozmanitost použitých postupů. Cílem tohoto příspěvku je seznámit čtenáře s některými zajímavými postupy našich posluchačů při řešení této úlohy. Jejich

modifikace dále uvádíme. Tyto přístupy lze uplatnit přímo ve výuce planimetrie na SŠ i ZŠ, zejména při procvičování problematiky Eukleidových vět a Pythagorovy věty.

Řešení 2 (pomocí Eukleidovy věty o výšce)

Označme D patu výšky z vrcholu C . Nejprve využijeme Pythagorovu větu v trojúhelnících BCD a ACD , viz obr. 1. Platí tedy

$$a^2 = v^2 + c_a^2, \quad b^2 = v^2 + c_b^2.$$



Obr. 1

Po dosazení za $1/a^2$ a $1/b^2$ z těchto vztahů do levé strany dokazované identity dostaneme

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{v^2 + c_a^2} + \frac{1}{v^2 + c_b^2}.$$

Dále uplatníme Eukleidovu větu o výšce ve tvaru $v^2 = c_a c_b$. Postupně tak po úpravách obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} &= \frac{1}{v^2 + c_a^2} + \frac{1}{v^2 + c_b^2} = \\ &= \frac{1}{c_a c_b + c_a^2} + \frac{1}{c_a c_b + c_b^2} = \frac{1}{(c_a + c_b)c_a} + \frac{1}{(c_a + c_b)c_b} = \\ &= \frac{1}{c_a + c_b} \left(\frac{1}{c_a} + \frac{1}{c_b} \right) = \frac{c_a + c_b}{(c_a + c_b)c_a c_b} = \frac{1}{c_a c_b} = \frac{1}{v^2}. \end{aligned}$$

Tím je důkaz ukončen.

Řešení 3 (pomocí Eukleidových vět)

V tomto řešení byla využita Pythagorova věta a dále Eukleidovy věty o odvěsnách ve tvaru $a^2 = c c_a$, $b^2 = c c_b$, z nichž plyne

$$a^2 b^2 = c^2 c_a c_b.$$

Dosazením za

$$\frac{1}{a^2} = \frac{1}{c c_a} \quad \text{a} \quad \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c c_b}$$

do levé strany dokazované rovnosti a užitím Eukleidovy věty o výšce dostaneme

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} = \frac{c^2}{a^2 b^2} = \frac{c^2}{(a c_a)(b c_b)} = \frac{c^2}{c_a c_b c^2} = \frac{1}{c_a c_b} = \frac{1}{v^2},$$

což jsme chtěli dokázat.

Řešení 4 (pomocí Eukleidových vět – jiný způsob)

V tomto studentském řešení byly opět použity Eukleidovy věty o odvěsnách a o výšce, avšak autor postupoval jiným způsobem.

Za a^2 a b^2 dosadíme do součtu zlomků $1/a^2$ a $1/b^2$ z Eukleidových vět o odvěsnách ve tvaru $a^2 = c c_a$, $b^2 = c c_b$. Platí tak s využitím Eukleidovy věty o výšce

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c c_a} + \frac{1}{c c_b} = \frac{1}{c} \left(\frac{c_a + c_b}{c_a c_b} \right) = \frac{c}{c c_a c_b} = \frac{1}{c_a c_b} = \frac{1}{v^2}.$$

Tím je důkaz ukončen.

Řešení 5 (pomocí Eukleidových vět – další způsob)

Užitím Eukleidových vět a dále rovnosti $c_a + c_b = c$ postupně obdržíme

$$\begin{aligned} a^2 b^2 &= (c c_a)(c c_b) = c^2 c_a c_b = \\ &= c(c_a + c_b) c_a c_b = c c_a^2 c_b + c c_a c_b^2 = (c c_a)(c_a c_b) + (c c_b)(c_a c_b) = \\ &= a^2 v^2 + b^2 v^2 = (a^2 + b^2) v^2. \end{aligned}$$

Odtud již dostáváme požadovanou rovnost

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{v^2}.$$

Řešení 6 (užitím podobnosti trojúhelníků)

Z podobnosti trojúhelníků ABC a ACD (obr. 1) plyne

$$\frac{a}{c} = \frac{v}{b}.$$

Následnými úpravami obdržíme $ab = cv$, a tedy $a^2b^2 = c^2v^2$. Užitím Pythagorovy věty na pravé straně poslední rovnosti dále máme

$$a^2b^2 = (a^2 + b^2)v^2.$$

Platí tak

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{v^2},$$

což jsme chtěli dokázat.

Uvedená studentská řešení dané důkazové úlohy se opírají vesměs o využití známých tvrzení platných pro libovolný pravoúhlý trojúhelník – Pythagorovy věty a Eukleidových vět. Rozdíly mezi nimi představují především odlišné technické postupy při jejich využití v konkrétních řešeních.

Závěrem uvedeme (naopak) očekávané zobecnění vztahu (1), které představuje jeho prostorovou analogii. Dříve než k němu přistoupíme, připomeňme zobecnění Pythagorovy věty v prostoru, kterým je tzv. *Faulhaberova věta*. Její důkazy lze najít např. v článcích [1] a [2] publikovaných v časopise MFI.

Věta 1 (Faulhaberova)

V libovolném pravoúhlém čtyřstěnu $ABCD$ s pravými úhly ve stěnách při vrcholu D , platí

$$S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 = S_D^2,$$

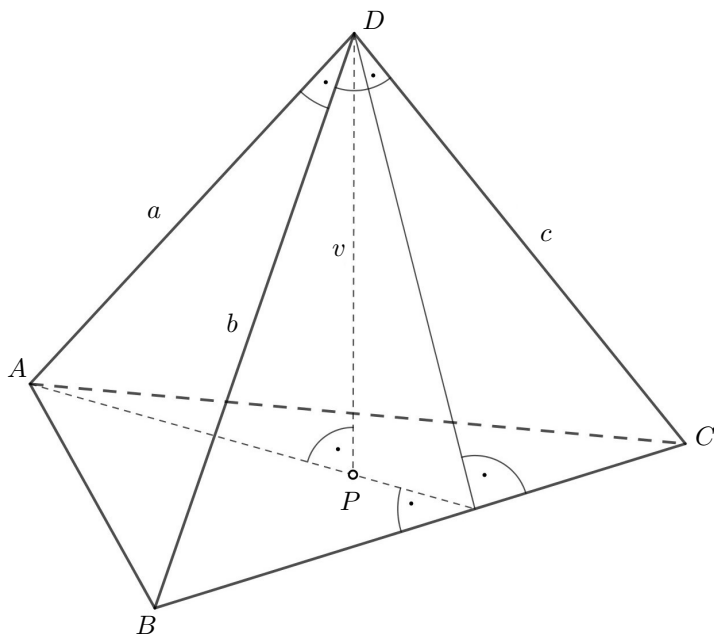
kde S_A , S_B , S_C a S_D jsou po řadě obsahy jeho stěn proti vrcholům A , B , C a D .

Věta 2

Nechť $ABCD$ je pravoúhlý čtyřstěn s pravými úhly ve stěnách při vrcholu D , v němž $|AD| = a$, $|BD| = b$, $|CD| = c$ a v značí velikost jeho výšky z vrcholu D . Pak platí

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{v^2}. \quad (2)$$

(Výškou z vrcholu D v uvažovaném čtyřstěnu $ABCD$ rozumíme úsečku, jejímiž krajními body jsou vrchol D a pata P kolmice z vrcholu D k rovině ABC , viz. obr. 2.)



Obr. 2

Důkaz. Pro objem V uvažovaného pravoúhlého čtyřstěnu $ABCD$ platí

$$V = \frac{1}{3}S_A a = \frac{1}{3}S_B b = \frac{1}{3}S_C c = \frac{1}{3}S_D v, \quad (3)$$

kde S_A , S_B , S_C , S_D jsou po řadě obsahy jeho stěn BCD , CDA , DAB a ABC . Ze vztahu (3) plyne

$$\frac{1}{a^2} = \frac{S_A^2}{9V^2}, \quad \frac{1}{b^2} = \frac{S_B^2}{9V^2}, \quad \frac{1}{c^2} = \frac{S_C^2}{9V^2}, \quad \frac{1}{v^2} = \frac{S_D^2}{9V^2}. \quad (4)$$

Sečtením prvních tří rovností (4) a využitím věty 1 dostáváme

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{S_A^2}{9V^2} + \frac{S_B^2}{9V^2} + \frac{S_C^2}{9V^2} = \frac{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2}{9V^2} = \frac{S_D^2}{9V^2} = \frac{1}{v^2},$$

což jsme chtěli dokázat.

Literatura

- [1] *Kuřina, F.*: Důkazy a kalkuly. Matematika, fyzika, informatika, roč. 20 (2010/2011), č. 1.
- [2] *Švrček, J.*: Prostorové analogie dvou planimetrických vět. Matematika, fyzika, informatika, roč. 23 (2014), č. 2, s. 81–85.

Z historie výuky infinitesimalního počtu

DAG HRUBÝ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Lze říci, že otázka zavedení diferenciálního a integrálního počtu do výuky matematiky na středních školách je stále aktuální. Jsou zde jak příznivci, tak odpůrci této výuky. Zejména ze strany učitelů vysokých škol však často zaznívá názor, že je zbytečné zabývat se na střední škole ve výuce matematiky derivacemi a integrály, kterým většina žáků plně nerozumí, a že by bylo užitečnější věnovat se např. lomeným výrazům. Otázka porozumění infinitesimalnímu počtu je složitější – v této souvislosti lze upozornit na článek [1]. Mezi učiteli matematiky mám řadu přátel a vím, že někteří z nich začali studovat matematiku právě proto, že se již na střední škole seznámili se základy infinitesimalního počtu. V současném rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia (RVP G) není diferenciální a integrální počet uveden, to však neznamena, že by nebyl na současných gymnáziích vyučován, většinou je ale zařazen do volitelné výuky.

Zařazení diferenciálního a integrálního počtu do výuky matematiky na gymnáziích souvisí s tzv. Marchetovou reformou středního školství v roce 1908. Nové učební osnovy a plány pro gymnázia a reálky byly vyhlášeny v roce 1909. Jedná se o poslední úpravy učebních osnov gymnázií a reálků v rámci Rakousko-Uherska. Nařízení ministra kultu a vyučování bylo vy-

dáno 20. března 1909. Před tím však vyšlo 8. srpna 1908 nařízení ministra kultu a vyučování o zřízení osmitřídních reálných gymnáziích a reálných reformovaných gymnázií. Učební osnovu osmitřídního reálného gymnázia lze nalézt v publikaci [2]. V těchto osnovách je ve IV. třídě, v rámci všeobecné aritmetiky, zařazeno *grafické znázornění lineárních funkcí*. Jedná se zřejmě o historicky první výskyt pojmu *funkce* v osnovách matematiky pro gymnázia. V rámci analytické geometrie je v těchto osnovách v VII. třídě uvedeno: *Zobrazení koeficientů směru zejména při vyučování probíraných křivek pomocí quotientu diferenciálního*. Na konci těchto osnov jsou uvedeny poznámky uvádějící čeho má být touto osnovou dosaženo. Bod 4. těchto poznámek zní: *Pochopení vztahů funkcionalních, ze začátku při všech zvláštních příležitostech uvnitř mathematického vyučování, a po jeho dovršení pochopení pojmu funkce včetně až k pochopení míry změny nějaké funkce pomocí quotientu diferenciálního*.

Nabízí se přirozeně otázka, kdo a kdy poprvé pojem funkce použil. Jako první tak učinil G. W. Leibniz v roce 1673 ve svém rukopise *Methodus tangentium inversa, seu de functionibus* (*Inverzní metoda tečen neboli o funkcích*). Zájemcům o fylogenezi pojmu funkce mohou doporučit článek [3]. Uplynulo tedy přes 200 let, než se pojem funkce stal součástí výuky matematiky na gymnáziu.

Dříve, než budeme sledovat jak se rozvíjela výuka diferenciálního a integrálního počtu na gymnáziích od roku 1908 do současnosti, vrátíme se do druhé poloviny 18. století, kdy se v Čechách objevují první systematické výklady diferenciálního a integrálního počtu. Jejich autory jsou *Josef Stepling* (1716–1778) a *Jan Tesánek* (1728–1788). Josef Stepling byl česko-německý jezuitský kněz, fyzik, astronom, matematik a meteorolog. Byl jedním z prvních matematiků u nás, který se věnoval diferenciálnímu a integrálnímu počtu, působil na pražské filosofické fakultě. Pro potřeby studentů vydal v roce 1751 učebnici integrálního počtu *Exercitationes geometrico-analyticae de ungulis aliisque frustis cylindrorum*, v roce 1765 učebnici diferenciálního počtu *Differentiarum minimarum, quantitatum variantium calculus directus, vulgo differentialis*. Obě Steplingovy knihy jsou dostupné na internetu. Zájemcům o život a dílo Josefa Steplinga a Jana Tesánka doporučuji pro první čtení článek [4]. Do učebnice diferenciálního počtu převzal Stepling hlavní výsledky deset let starého spisu L. Eulera *Institutiones calculi differentialis*. Nekonečně malou veličinu definoval Stepling jako výsledek nekonečného dělení konečné veličiny. Přitom výslovně podotkl, že nekonečně malá veličina je větší než nula. V dalších

úvahách určuje Stepling ještě nekonečné veličiny vyšších řádů. Z úměry $1 : \infty = \infty : x$, kde ∞ značí nekonečně velkou veličinu, vyvozuje $x = \infty^2$. Pomocí nekonečně malých veličin dochází k diferenciálu a píše

$$dx = \frac{1}{\infty}, \quad ddx = \frac{1}{\infty^2}.$$

Pro výpočet diferenciálu funkce se inspiruje dílem *L'Hospitala*. Nejprve určí rozdíl $f(x + dx) - f(x)$, v němž zanedbává diferenciály vyšších řádů. Např. píše

$$d(xyz) = (x + dx)(y + dy)(z + dz) - xyz = \dots = xydz + xzdy + yzdx.$$

Pro Steplingův postup je charakteristický příklad

$$d\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x + dx} - \frac{1}{x} = -\frac{dx}{x(x + dx)} = -\frac{dx}{x^2}.$$

Vidíme, že Stepling nejprve rozlišoval $x + dx$ a x , ale pak ve vhodném okamžiku použil rovnost $x + dx = x$ k získání potřebného výsledku.

Jan Tesánek, český jezuita, fyzik, matematik a astronom postupoval jinak. Přejal základní myšlenku eulerovské definice derivace. Zamýšlel se nad tím, jak vymezit podíl $\Delta y : \Delta x$ pro Δx blížící se nule. Využíval přitom poznatků o limitě, ke kterým dospěli d'Alembert, Kästner a Cousin. Tesánek vymezil pojem limity [5] takto: *Veličina A je limitou veličiny B, jestliže veličina B se blíží k veličině A více než je libovolná daná difference, aniž však veličinu A překročí.* Tesánkovy názory byly vyjádřeny velmi stručně, nezábýval se ani výpočtem derivací elementárních funkcí. Stěžejním Tesánkovým dílem je komentované pražské latinské vydání klasického Newtonova díla *Philosophiae naturalis principia mathematica*. První dva díly vyšly v letech 1780, 1785 a byly vysoce oceňovány, mimo jiných také Lagrangem. Třetí díl zůstal v rukopise, ale z jeho pozůstalosti se ztratil. Význam pražského vydání Newtonových principíí je v tom, že je zde poprvé učiněn pokus v komentářích ukázat na využití infinitezimálního počtu k celkovému výkladu newtonovské mechaniky. Proto také Tesánka jeho domácí současníci nazývali „komentátorem velkého Newtona“. Mimo jiné je autorem publikace *Pertractatio elementorum calculi integralis* (1771). Tesánek měl kontakty v zahraničí, stýkal se zejména s J. L. Lagrangem a J. Bernoullim.



ELEMENTA CALCULI INTEGRALIS.

LEMMA I. Datam fractionem, cujus denominator compositus sit e duobus factoribus complexis, eandem variabilem simplicem continentibus, resolvere in duas, quarum denominatores habeant factores, quorum non nisi unus in quovis denominatore variabilem illam simplicem comprehendat.

Detur fractio: $\frac{c}{(x \star 2a)(x \star b)}$; fiat
 hæc $= \frac{A}{x \star 2a} \star \frac{B}{x \star b}$; facta reductione,
 erit $t = Ax \star Ab \star Bx \star 2aB$; hinc
 $Ax \star Bx = 0$; & $AB \star 2aB = c$; seu
 $A \star B = 0$; $A = -B$; $-Bb \star 2aB = c$;
 $B = \frac{c}{2a - b}$; $A = \frac{c}{b - 2a}$. Igitur
 $\frac{c}{(x \star 2a)(x \star b)} = \frac{c}{(x \star 2a)(b - 2a)} \star$
 $\frac{c}{(x \star b)(2a - b)}$. Ex consideratione ha-

A 2
rum

17. Summa quantitatis differentialis complexæ obtinetur, si, dum fieri potest, singuli termini integrentur. Etenim, cum differentiale summæ sit summa differentialium partium; etiam Integrale summæ differentialium, est summa integralium differentialium partium. Ita S. $(x \star x) dx$

$$\begin{aligned} & \frac{r}{x} \\ & \left(= S. \frac{x^m dx \star x^n dx}{x^r} \right) = S. x^{m-r} dx \\ & \star S. x^{n-r} dx = x^{m-r+1} \star x^{n-r+1} \\ & \quad m-r+1 \quad n-r+1 \end{aligned}$$

18. Si exponens quantitatis x sit -1 , formula non est algebræ integrabilis; esset enim S. $x^{-1} dx = x^{-1+1} = x^0 = 1$

$= \infty$. In hoc casu ad seriem infinitam recurri potest; nempe: si detur formula: $\frac{dx}{x}$, reddatur denominator complexus,

ponendo $x = a \star z$; eritque $\frac{dx}{x} = \frac{dz}{a \star z}$; & hanc fractionem reducendo

Obr. 1 Ukázka textu z Tesánkovy knihy *Pertractatio elementorum calculi integralis*

Po smrti Tesánkově (1788) se stal profesorem matematiky *František Josef Gerstner* (1756–1832). Gerstner studoval na univerzitě v Praze matematiku u Stanislava Vydry (elementární matematika) a u Jana Tesánka (vyšší matematika). Od šedesátých let 18. století až do školního roku 1848/49 existovaly na pražské univerzitě dvě stolice matematiky. Stolice nižší matematiky a stolice vyšší matematiky [6]. Řádným profesorem vyšší matematiky na univerzitě byl jmenován Gerstner 4. prosince 1789. Už v rámci konkurzu na toto místo navrhoval Gerstner, aby se v prvním roce tříletého kuzu matematiky přednášel diferenciální a integrální počet podle učebnic Eulerových [5]. Přednášky z analýzy, které navrhl se uskutečnily již v roce 1788/1789, kdy výuku vyšší matematiky suploval ze nemocného Tesánka. Ve svých přednáškách se přitom neomezoval pouze na vyšší analýzu a astronomii, ale věnoval se i mechanice a hydraulice. Matematiku na

univerzitě přednášel až do roku 1823. V roce 1803 byl jmenován ředitelem Českého stavovského polytechnického ústavu (v provozu od 10. 11. 1806, od roku 1920 České vysoké učení technické v Praze), založeném dekretem císaře Františka Josefa I. 14. března 1803. V roce 1807 se mu podařilo pro školu získat první Wattův parní stroj v Rakousku. Navrhl také výstavbu koněspřežné železnice z Českých Budějovic do Lince. Gerstner sám žádné matematické práce nenapsal. Tehdejší matematiku pokládal za dostačující prostředek k řešení technických a fyzikálních problémů.

Roku 1772 byl jmenován profesorem elementární matematiky na univerzitě Stanislav Vydra (1741–1804), český katolický kněz, jezuita a národní buditel. Patřil nejvýznamnějším žákům Steplinga a Tesánka. Přednášel a psal latinsky, ale když v roce 1784 bylo nařízeno aby se od školního roku 1784–1785 vyučovalo matematice a fyzice jazykem německým, místo jazyka latinského, dokázal Vydra tomuto nařízení maximálně vyhovět. Pro kurz matematiky ve druhém ročníku, který se nazýval *mathesis mixta*, napsal Vydra v roce 1774 učebnici *Primæ calculi differentialis et integralis notiones*, která byla vydána ještě v roce 1783 pod názvem *Elementa calculi differentialis et integralis*.

28. Differentiare quantitatem x^2 .

Formula $d(x^2) = 2x dx$.

DEMONST. $x^2 = x x$; igitur $d(x^2) = x dx + x dx$, actu addendo $= 2x dx$.
Q. E. D.

Pari ratione $d(x^3) = 3x^2 dx$. Nam $x^3 = x x x$. Sed $d(x x x) = x x dx + x x dx + x x dx = 3x x dx$, $= 3x^2 dx$.

Sic etiam $d(x^4) = 4x^3 dx$.

Habemus igitur Regulam generalem, variables exponente affectas differentiandi, nempe: *Exponens variabilis fiat coefficientis; ipsa vero variabilis exponentem unitate minorem acquirens per differentiale variabilis multiplicetur.*

Ergo in genere $d(x^m) = m x^{m-1} dx$.

Et $d(x^m y^n) = m y^n x^{m-1} dx + n x^m y^{n-1} dy$.

Obr. 2 Ukázka textu z Vydrovy knihy *Elementa calculi differentialis et integralis*

Vydra měl problémy se zrakem, v červenci 1799 oslepl na levé oko a 22. ledna 1803 náhle, během přednášky u tabule, oslepl i na druhé [7]. Přesto dokázal svým dvěma žákům, Josefu Zieglerovi a Janu Dostálovi, diktovat první českou vysokoškolskou učebnici elementární matematiky. Knihu vydal po Vydrově smrti v roce 1806 Josef Ladislav Jandera pod názvem *Počátkové aritmetiky* (1806). Názvy kapitol ještě vypovídají o tom, že nebyla zavedena česká odborná matematická terminologie. První kapitola se jmenuje *o věcech, kteréž musejí být vysvětleny, abychom uměli jak s určitými, tak s neurčitými počty nakládati*. Začal pracovat ještě na *Algebře*, kterou však nedokončil. Jako zajímavost uvádím, že v prvním čísle *Časopisu pro pěstování matematiky a fyziky*, který začal vycházet v roce 1872, je první článek věnován právě Stanislavu Vydrovi. Mezi jeho žáky patřil vedle F. J. Gerstnera také B. Bolzano.

Za nemocného Vydru se stal suplentem Vydrův žák Josef Stanislav Jandera. Na Vydrovo místo byl vypsán konkurs, do kterého se vedle Jandery přihlásil také B. Bolzano. I když Bolzana podporoval profesor polytechniky F. J. Gerstner a pražská studijní komise, byl profesorem jmenován Jandera. F. J. Studnička [8] se k této záležitosti vyjadřuje takto: *Dopodrobna se snad nedozvíme, proč ve Vídni profesura matematiky udělena Janderovi a ne Bolzanovi, kdežto opak bylo na místě. Toliko však jisto, že náhodnou snad touto nehodou bylo studium matematické skoro na celé půlstoletí u nás paralyzováno. A neménší újmu způsobilo osudné toto quiproquo, máme-li na zřeteli i rozvoj matematické literatury naší. Ačkoli totiž slíbil Jandera v předmluvě uvedené již arithmetice Vydrově, že v ní bude pokračovati a vydá česky další výklady se nesoucí, neučinil tak ani řádkem, nýbrž vydal pouze Beiträge zur Arithmetik, z něhož je patrné, jak vysoko nad ním stojí Bolzano.*

Roku 1805 se stal řádným profesorem matematiky (na stoličce elementární matematiky) J. S. Jandera (1776–1857). Texty týkající se diferenciálního a integrálního počtu jsou ve vlastních rukopisech Janderových přednášek z let 1850–1853. Tyto rukopisy jsou uloženy v Královské knihovně premonstrátů na Strahově. Žádnou publikaci z inifinitezimálního počtu však nevydal. Jandera nebyl tvůrčím matematikem, byl prý však svědomitým učitelem a přísným examinátorem. Penzionován byl v roce 1837, ale vyučoval dalších dvacet let. Chtěl být „odvezen z katedry rovnou do hrobu“. Dne 8. července 1857 byl cestou na přednášku v Karlově ulici sražen povozem, přednášku sice ještě proslovil, ale 27. července 1857 svým zraněním podlehl.

Po Janderovi přednášel na univerzitě diferenciální a integrální počet jeho nástupce, německý matematik *Wilhelm Matzka* (1798–1891), který přišel na univerzitu z pražské polytechniky v roce 1850 a působil zde do roku 1871. Život a dílo W. Matzky je podrobně a pečlivě popsáno v publikaci [9]. Zde se můžeme dočíst, že Matzka ovlivnil přípravu středoškolských učitelů matematiky. Nerozvíjel skutečnou vědeckou práci, byl především učitelem. Po roce 1848/1849 byla příprava středoškolských profesorů hlavním posláním filosofických fakult. Na tuto přípravu budoucích učitelů se Matzka výrazně soustředil. Byl členem zkušební komise gymnaziálního učitelského úřadu pro předmět matematika. Vychoval řadu výtečných středoškolských profesorů a významně ovlivnil výuku matematiky na středních školách v českých zemích.

V roce 1826 byl profesorem vyšší matematiky na univerzitě jmenován *Jakub Filip Kulík* (1793–1863). Kulík je známý vytvořením tabulek dělitelů a tabulky prvočísel od čísla 3 033 001 do čísla 100 330 201. Toto dílo, nedokončený osmivazkový rukopis, nebylo pro svoji rozsáhlost vydáno. Kulík přednášel diferenciální a integrální počet nejdříve podle učebnice Etttingshausenovy (*Vorlesungen über die höhere Matematik*, Wien, 1827). Protože nebyl s touto učebnicí spokojen, vydal v roce 1831 první vydání své učebnice *Lehrbuch der höheren Analysis*. Druhé, rozšířené vydání vyšlo v roce 1843. Jak uvádí L. Moravec [10], jednalo se o poměrně rozšířenou a mezi studenty oblíbenou knihu. Kulík patřil ke vstřícným a oblíbeným učitelům, na něž studenti rádi vzpomínali.

K činnosti Jandery, Kulíka a Matzky se vyjadřuje ve své práci [8] F. J. Studnička. Jeho hodnocení není, s výjimkou Kulíka, příliš příznivé. V souvislosti s Janderou píše o smutné době Janderovské, chválí Kulíkovy spisy, které však byly německé a čeština prý z nich neměla žádných výhod. Podobně prý neprospl češtině sterilní Matzka.

Nejvýznamnějším matematikem, který působil v Čechách v první polovině 19. století je *Bernard Bolzano* (1781–1848), český, německy hovořící matematik, filozof, estetik a kněz. Po neúspěšném konkurzu na místo profesora matematiky po Stanislavu Vydrovi přijal Bolzano místo univerzitního profesora filosofie náboženství. V roce 1819, na Štědrý den, mu bylo znemožněno dekretem císaře Františka I. učit a tři týdny poté byl z učitelského úřadu pro své reformátorské názory nakonec suspendován a byla mu přirčena penze ve výši 300 zlatých na rok. Původní plat byl 800 zlatých ročně. V matematice se věnoval geometrii, diferenciálnímu a integrálnímu počtu, logice, otázkám souvisejícím s teorií množin a filosofii

matematiky [6]. V matematické analýze zkoumal pojmy jako jsou funkce, limita funkce, spojitost funkce, derivace funkce, konvergence posloupností, reálná čísla. Za jeho života vyšly jen dvě práce týkající se matematické analýzy [11]. Bohužel, mnohé jeho výsledky, ač měly světovou úroveň, zůstaly v rukopisech a vývoj matematiky neovlivnily. Výsledky Bolzanovy práce v matematice byly zhodnoceny až v roce 1881 (Otto Stolz). Jeden z nejznámějších výsledků Bolzanovy práce v matematické analýze je věta, kterou dokázal v roce 1817 a která je nazývána jako *Bolzanova věta* nebo *Bolzano–Cauchyova věta* nebo *Cauchyova věta*. Je zajímavé, že v učebnicích diferenciálního počtu Vojtěcha Jarníka označení *Bolzanova věta* není použito. Současný zápis této věty je:

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b \rangle$, kde $f(a) \cdot f(b) < 0$. Pak existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f(c) = 0$.

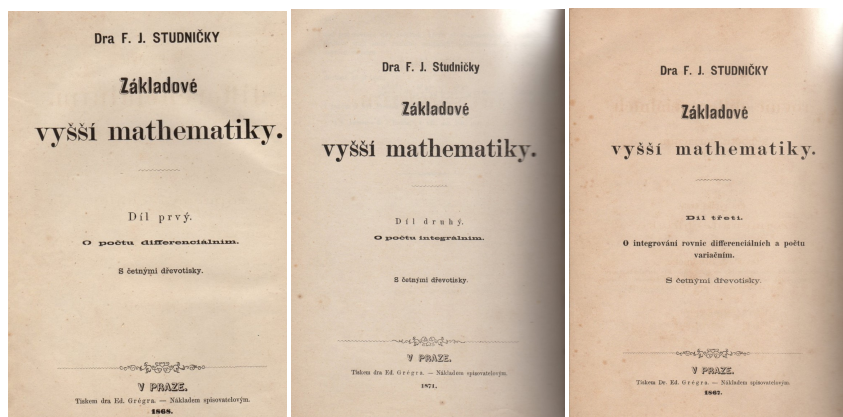
Bolzano uvádí tuto větu ve tvaru [11]:

Jsou-li f, g funkce spojitě v uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$ a je-li $f(a) < g(a)$, $f(b) > g(b)$, existuje uvnitř tohoto intervalu aspoň jedno číslo x tak, že $f(x) = g(x)$.

Podle [11] již pouhé vyslovení této krajně důležité věty, v němž má Bolzano prioritu před Cauchym, svědčí o pronikavosti jeho pohledu na základní otázky analýzy. Martin Jašek, profesor matematiky a fyziky na dívčím gymnáziu v Plzni, se ke konci první světové války vydal do Vídně pátrat v Bolzanově pozůstalosti. Zde objevil spis *Functionenlehre*, ve kterém byl uveden historicky první příklad funkce (od té doby označovanou termínem Bolzanova funkce), která je na celém svém intervalu spojitá, ale v žádném bodě diferencovatelná. K vydání *Functionenlehre* [12] došlo až v roce 1930, zejména zásluhou profesora Karla Rychlíka, který knihu doplnil poznámkami.

V roce 1871 byl na pražské univerzitě jmenován profesorem matematiky *František Josef Studnička* (1836–1903) [13], který předtím působil na pražské technice. Hlavním přínosem Studničky bylo zavedení českých matematických přednášek [5]. Po letech, kdy byl přednášen diferenciální a integrální počet zprvu latinsky a poté německy, mohli poprvé čeští univerzitní studenti sledovat přednášky z analýzy v české řeči. Studnička je autorem první česky psané vysokoškolské učebnice z matematické analýzy. Učebnice *Základové vyšší matematiky* byla napsána v době, kdy byl Studnička ještě na pražské technice. Učebnice, kterou vydal Studnička nákladem vlastním, se skládá ze tří dílů (*I. O počtu diferenciálním, II. O počtu*

integrálním, III. O integrování rovnic diferenciálních a počtu variačním). Podrobným rozбором a hodnocením této publikace se zabývá práce [13]. V tomto hodnocení, které není příliš pro Studničku příznivé, se můžeme dočíst, že se Studnička při psaní této knihy potýkal s řadou problémů. Jedním z nich byl problém terminologie, protože v té době ještě neexistovala česká matematická terminologie. Na odbornou úroveň knihy měla vliv skutečnost, že kniha nebyla psána pro univerzitní studenty, ale pro budoucí techniky, při jejichž výuce byly upřednostňovány základní matematické metody a řešení praktických problémů. Kniha však byla používána na univerzitě až do počátku 20. století.



Obr. 3 Titulky tří dílů Studničkovy učebnice *Základové vyšší matematiky*

V učebnici nejsou použity kvantifikátory, látka není rozdělena na definice, věty a důkazy, není používán jazyk (ε, δ) -analýzy. Na ukázkou uvádím část textu z kapitoly *Jak se určuje první diferenciální poměr funkcí jednoduchých* (Kniha I. O diferencování a diferenciálních poměrech vůbec, s. 18–21):

Jest-li $y = \sin x$, bude podle známého pravidla $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\sin(x+\alpha) - \sin x}{\alpha}$ aneb podle goniometrické stejniny známé $\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cos(x + \frac{\alpha}{2})}{\frac{\alpha}{2}}$; poněvadž $\lim \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} = 1$, jest $\frac{dy}{dx} = \lim \cos(x + \frac{\alpha}{2}) = \cos x$ aneb $d \sin x = \cos x \, dx$. Znajíce $d \sin x$, obdržíme $d \cos x$, píšeme-li $\frac{\pi}{2} - x$ místo x a tedy $-dx$ místo dx , z čehož jde $d \cos x = -\sin x \, dx$.

Předložena-li nějaká funkce $y = \varphi(x)$ a jest-li její funkce obrácená $x = \psi(y)$, tu obdržíme diferencováním této $\frac{dx}{dy} = \psi'(y)$, a diferencováním oné $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$, z kterýchžto posledních dvou rovnic jde $\varphi'(x) = \frac{1}{\psi'(y)}$ aneb $\varphi'(x) = \frac{1}{\psi'[\varphi(x)]}$.

Učebnice Studničkovy byly částečně nahrazeny až v roce 1902, kdy vyšla nákladem JČM (*Jednota českých matematiků*) učebnice *Počet diferenciální*, kterou napsal na objednávku JČM Eduard Weyr (1852–1903). Na rozdíl od JČM, která knihu vysoce hodnotila, Weyrovu knihu velmi zkritizoval J. V. Peřider (1874–1914). Vyvolal tak velký spor nejen mezi matematiky. V dobovém tisku vyšlo ke sporu několik článků. Podrobné informace o této záležitosti lze nalézt v publikaci [14].

Literatura

- [1] Bero, P., Hejný, M.: Vyučovanie infinitezimálného počtu. *Matematické obzory*, roč. 36 (1991), s. 15–22.
- [2] Drtina, F.: Reforma středoškolská z českého hlediska. Družstvo Pokrok, Praha, 1909.
- [3] Kopáčková, A.: Fylogeneze pojmu funkce. In: Bečvář, J., Fuchs, E. (eds.): *Matematika v proměnách věků II*. Prometheus, Praha, 2001.
- [4] Kolomý, R.: J. Stepling – matematik, fyzik a astronom. *Matematika a fyzika ve škole*, roč. 9 (1978), č. 4.
- [5] Nový, L. a kol.: Dějiny exaktních věd v českých zemích do konce 19. století. ČSAV, Praha, 1961.
- [6] Bečvářová, M.: Česká matematická komunita v letech 1848 až 1918. Matfyzpres, Praha, 2008.
- [7] Rybička, A.: Václav Vydra. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, roč. 1 (1872), č. 1, 2.
- [8] Studnička, F. J.: Matematika. In: Vědecký a umělecký rozvoj v národě českém 1848–1898. Vědy exaktní. Česká akademie císaře Františka Josefa pro vědy, slovesnost a umění, Praha, 1898.
- [9] Chocholová, M., Štoll, I.: Wilhelm Matzka (1798–1891). Edice Dějiny matematiky, sv. 49, Matfyzpress, Praha, 2011.
- [10] Moravec, L.: Jakub Filip Kulík v Olomouci, Štýrském Hradci a Praze. In: Bečvář, J., Bečvářová, M. (eds.): 31. mezinárodní konference Historie matematiky, Velké Meziříčí, 18. až 22. 8. 2010. Matfyzpres, Praha, 2010.
- [11] Jarník, V.: Bolzano a základy matematické analýzy. JČMF, Praha, 1981.
- [12] Bolzano, B.: Functionenlehre. Královská česká společnost nauk, Praha, 1930.
- [13] Bečvářová, M.: František Josef Studnička 1836–1903. Prometheus, Praha, 1998.
- [14] Bečvář, J.: Eduard Weyr 1852–1903. Prometheus, Praha, 1995.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 269 a 270 můžete zaslat nejpozději do 30. 9. 2021 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz.

Úloha 269

Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC , v němž K je střed jeho přepony AB . Uvažujme pravoúhlé trojúhelníky KLM s pravým úhlem při vrcholu M , kde vrcholy L , M leží po řadě uvnitř odvěsen BC , AC . Sestrojte bod L tak, aby úsečka BL měla co nejmenší délku.

Jaroslav Švrček

Úloha 270

Uvažujme čísla $a = 2 \cos(\pi/7)$, $b = 2 \cos(3\pi/7)$ a $c = 2 \cos(5\pi/7)$. Dokažte, že tři výrazy $a + b + c$, $1/a + 1/b + 1/c$, abc nabývají celočíselných hodnot.

Pavel Calábek

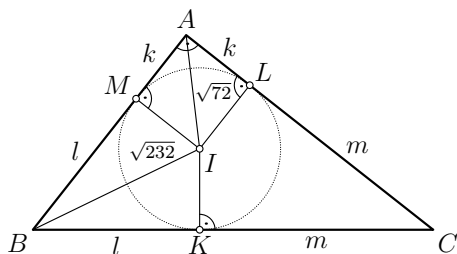
Dále uvádíme řešení úloh 265 a 266, jejichž zadání jsme zveřejnili v závěrečném čísle minulého (29.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 265

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou BC označme I střed kružnice jemu vepsané. Určete obvod tohoto trojúhelníku, je-li dáno $|AI| = \sqrt{72}$ a $|BI| = \sqrt{232}$.

Josef Tkadlec

Řešení. Označme K , L , M body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC po řadě se stranami BC , CA , AB . Ze souměrnosti kružnice podle přímký procházející jejím středem plyne $|AL| = |AM|$, $|BK| = |BM|$, $|CK| = |CM|$ a tyto vzdálenosti označme po řadě k , l , m .



Z pravých úhlů u vrcholů A , L a M ve čtyřúhelníku $ALIM$ plyne, že jde o čtverec se stranou délky k . Podle zadání je délka jeho úhlopříčky AI rovna $\sqrt{72}$, proto je délka jeho strany $k = \sqrt{72}/\sqrt{2} = 6$. Užitím Pythagorovy věty v trojúhelníku BIM máme

$$l = |BM| = \sqrt{|BI|^2 - |IM|^2} = \sqrt{232 - 6^2} = 14.$$

Konečně, podle Pythagorovy věty v trojúhelníku ABC platí

$$(14 + m)^2 = (l + m)^2 = (k + m)^2 + (k + l)^2 = (6 + m)^2 + 20^2.$$

Úpravou této rovnice dostaneme

$$16m = 20^2 + 6^2 - 14^2 = 240,$$

tedy $m = 15$. Obvod trojúhelníku ABC je tedy

$$2(k + l + m) = 2(6 + 14 + 15) = 70.$$

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *František Jáchim* z Volyně, *Petr Vach* z Jablonce nad Nisou, *Adam Blažek* z G v Plzni, *Mikulášské nám.*, *Amálie Dostalíková*, *Anna Pecháčková*, obě z GJŠ v Přerově, *David Kamenský* z GaJŠ v Břeclavi, *Piotr Kulisz* ze ZSOT v Lublinci (Polsko), *Adam Mendl* z GPdC v Táboře, *Štěpán Postava* z GMK v Bílovci a *Karel Stehlík* z GChD v Praze 5, Zborovská.

Neúplné řešení zaslal *Michal Vosyka* z BG ve Žďáru nad Sázavou.

Úloha 266

Určete všechny dvojice (m, n) přirozených čísel, pro něž platí

$$m + s(n) = n + s(m) = 2020,$$

kde $s(a)$ značí ciferný součet přirozeného čísla a .

Jaroslav Švrček

Řešení. Ze zadání je patrné, že čísla m, n jsou menší než 2020, jsou tudíž obě nejvýše čtyřmístná. Nechť $m = \overline{a_m b_m c_m d_m}$ a $n = \overline{a_n b_n c_n d_n}$, kde a_i, b_i, c_i a d_i jsou číslice. Rovnici

$$m + s(n) = n + s(m)$$

upravíme do tvaru

$$999(a_m - a_n) = 99(b_n - b_m) + 9(c_n - c_m). \quad (1)$$

Pro číslice b_i a c_i zřejmě platí $-9 \leq b_n - b_m \leq 9$ a $-9 \leq c_n - c_m \leq 9$, proto

$$-972 = -99 \cdot 9 - 9 \cdot 9 \leq 99(b_n - b_m) + 9(c_n - c_m) \leq 99 \cdot 9 + 9 \cdot 9 = 972.$$

Z podmínky (1) tak plyne, že $a_m = a_n$, označme tuto číslici jako a . Rovnici (1) můžeme dále přepsat do tvaru

$$99(b_m - b_n) = 9(c_n - c_m).$$

Jelikož $-81 \leq 9(c_n - c_m) \leq 81$, platí $b_m = b_n$ a $c_m = c_n$. Označme $b = b_m = b_n$ a $c = c_m = c_n$. Čísla m a n můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$m = \overline{abcd_m}, \quad n = \overline{abcd_n}.$$

Rovnici $n + s(m) = 2020$, resp. $m + s(n) = 2020$, nyní upravíme do tvaru

$$1001a + 101b + 11c + (d_m + d_n) = 2020. \quad (2)$$

Pro číslice b, c, d_m, d_n platí

$$0 \leq 101b + 11c + (d_m + d_n) \leq 101 \cdot 9 + 11 \cdot 9 + (9 + 9) = 1026,$$

odkud je patrné, že $a \in \{1, 2\}$. Oba případy posoudíme jednotlivě.

- V případě $a = 1$ má rovnice (2) tvar

$$101b + 11c + (d_m + d_n) = 1019.$$

Z odhadu $0 \leq 11c + (d_m + d_n) \leq 11 \cdot 9 + (9 + 9) = 117$ plyne $b = 9$. Platí tak $11c + (d_m + d_n) = 110$. Jelikož $0 \leq d_m + d_n \leq 18$, plyne odtud $c = 9$, tedy $d_m + d_n = 11$, odkud dostáváme

$$(d_m, d_n) \in \{(2; 9), (3; 8), (4; 7), (5; 6), (6; 5), (7; 4), (8; 3), (9; 2)\}.$$

- V případě $a = 2$ má rovnice (2) tvar

$$101b + 11c + (d_m + d_n) = 18.$$

Odtud již nutně $b = 0$, platí tak $11c + (d_m + d_n) = 18$. Jelikož je $0 \leq d_m + d_n \leq 18$, plyne odtud $c \in \{0, 1\}$.

Pokud $c = 0$, platí $d_m + d_n = 18$, tedy $d_m = d_n = 9$.

Pokud $c = 1$, platí $d_m + d_n = 7$, tedy

$$(d_m, d_n) \in \{(0; 7), (1; 6), (2; 5), (3; 4), (4; 3), (5; 2), (6; 1), (7; 0)\}.$$

Existuje tak 17 hledaných dvojic čísel (m, n) , viz následující tabulka.

m	n	m	n	m	n	m	n
1992	1999	1996	1995	2010	2017	2014	2013
1993	1998	1997	1994	2011	2016	2015	2012
1994	1997	1998	1993	2012	2015	2016	2011
1995	1996	1999	1992	2013	2014	2017	2010
		2009	2009				

Poznámka. Protože $m, n < 2020$, jsou ciferné součty $s(m)$ a $s(n)$ nejvýše rovny $1 + 9 + 9 + 9 = 28$. Odtud plyne, že čísla m a n jsou obě větší nebo rovna 1992. Úlohu lze také vyřešit otestováním všech 28 čísel $m \in \{1992, 1993, \dots, 2019\}$, pro která určíme $n = 2020 - s(m)$ a ověříme, zda pro ně platí $m + s(n) = 2020$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Petr Vach* z Jablonce nad Nisou, *Amálie Dostálíková*, *Anna Pecháčková*, obě z GJŠ v Přerově, *David Kamenský* z GaJŠ v Břeclavi, *Piotr Kulisz* ze ZSOT v Lublinci, *Adam Mendl* z GPdC v Táboře, *Karel Stehlík* z GChD v Praze 5, *Zborovská* a *Michal Vosyka* z BG ve Žďáru nad Sázavou.

Neúplné řešení zaslali *František Jáchim* z Volyně a *Adam Blažek* z G v Plzni, Mikulášské nám.

Pavel Calábek

Ohmův zákon a výuka fyziky na základní škole

OLDŘICH LEPIL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V lednu 2021 zveřejnilo MŠMT ČR upravenou verzi Rámcového vzdělávacího programu pro základní vzdělávání (RVP ZV), který bude platit od 1. září 2021 [1]. Nejrozsáhlejší změnou je rozšíření vzdělávacího programu informatiky a to si vyžádalo úpravy v jiných oblastech vzdělávání. Výrazné jsou tyto zásahy do vzdělávacího oboru fyziky, což vyvolalo řadu kritických ohlasů. Výhrady k úpravě RVP ZV vyjádřila také Jednota českých matematiků a fyziků otevřeným dopisem ministru školství, k němuž se připojila řada osobností převážně akademické sféry [2]. Nesouhlasný postoj v dopisu poukazuje na dva škrtky v RVP ZV, které se týkají Newtonových zákonů a přeměn různých forem energie. Stranou však zůstal jiný klíčový poznatek, který patří k tradičnímu učivu již na základní škole a v původní verzi RVP ZV je označen jako očekávaný výstup: *F-9-6-04 využívá Ohmův zákon pro část obvodu při řešení praktických problémů*. Tento výstup je nahrazen jiným, jehož obsah se však týká magnetického pole a elektromagnetické indukce. Z učiva o elektrickém proudu tak zůstávají v RVP ZV jen ty nejtriviálnější kvalitativní poznatky, vyjádřené hesly: *elektrický obvod – zdroj napětí, spotřebič, spínač*. Znovu se ukazuje, že RVP ve své stručnosti a obecnosti jsou nedostatečným podkladem pro tvorbu Školních vzdělávacích programů (ŠVP) vytvářených samotnými učiteli a odpovědnost za úroveň vzdělání se tak přenáší ze školských orgánů na konkrétní učitele.

Stěží si lze dnes představit učitele fyziky, který by se s takto deklarovaným učivem spokojil a nevyužil bohatých a rozmanitých možností, jak úvodní poznatky o elektrickém proudu v současných podmínkách názorně a srozumitelně vyložit. Experimentální ověření vztahu mezi elektrickým

napětím a proudem je také nesrovnatelně jednodušší, než ověřit platnost Newtonových zákonů, na něž se otevřený dopis JČMF přednostně zaměřil. Připomeňme v té souvislosti jistou obtížnost objasnění poměrně abstraktního pojmu *setrvačnost* nebo známé problémy s formulací 2. *Newtonova zákona* při absenci pojmů zrychlení v učivu základní školy, popř. problémy s vyjádřením gravitační síly pomocí vágně definované konstanty g .

Ohmův zákon, který *Georg Simon Ohm* objevil a v roce 1827 publikoval, můžeme považovat za jeden z klíčových milníků vývoje lidského poznání a kultury. Cesta Ohmova zákona do učebnic fyziky však nebyla jednoduchá a rychlá, jak jsme tomu byli svědky třeba u rentgenového záření, které se jako *paprsky X* stalo učivem krátce po objevu. V učivu elektřiny mnoho let dominovaly především jevy elektrostatiky a poznatky o magnetech, které postupně obohacovaným poznatkům tzv. *galvanické elektřiny* obvykle předcházely.

Dobře je to patrné z vývoje osnov pro střední školy, v nichž lze identifikovat několik vývojových etap. Aniž bychom se vraceli do příliš vzdálené minulosti, uvedeme jen, že ve 20. století se výuka fyziky po dlouhé období odvíjela od osnov z roku 1908. V malé míře do nich po vzniku Československa zasáhla jen reforma z roku 1919. V osnovách pro nižší střední školy bychom však v tomto období Ohmův zákona hledali marně. Učivo se věnovalo prakticky jen kvalitativním poznatkům o tepelných, světelných, elektrolytických a magnetických účincích elektrického proudu. I tak je to mnohem víc, než po sto letech požaduje současný RVP ZV.

Tento stav vývoje osnov fyziky se v té době stal rovněž předmětem kritiky ze strany Jednoty českých matematiků a fyziků. Při JČMF vznikla komise, která vytvořila a v roce 1920 publikovala návrh nových učebních osnov fyziky pro střední školu. Výuka fyziky začínala v III. ročníku nižšího stupně střední školy (žáci ve věku 13 až 14 let) dvěma týdenními hodinami (později byl rozsah výuky v tomto ročníku rozšířen o jednu další hodinu). Již do tohoto úvodního ročníku fyzikálního vzdělávání byla v poměrně velkém rozsahu zařazena výuka elektřiny a poprvé se zde v textu návrhu JČMF objevuje heslo osnov *Ohmův zákon*.

Není bez zajímavosti, že také v tomto, moderněji pojatém návrhu stále ještě přetrvává důraz na učivo elektrostatiky, jak je to patrné z části osnov, které uvedeme ve zkráceném znění (převzato z [3]):

Elektřina. *Elektrování třením, základní zjevy a pojmy (druhy náboje, vzájemný účinek mechanický); vodivost látek. Elektroskop. Elektrostatická indukce, pole elektrické. Sídlo náboje na vodiči, hustota povrchová. Účinek*

hrotů na vodivost vzduchu. Z přístrojů: elektrika třecí, elektrofor, Franklinova deska, leydenská láhev.

Ze zdrojů elektrochemických uvedou se jen tyto druhy článků: Voltův, Leclanchéův, Danielův, akumulátor.

Elektrický proud ustálený. Intensita proudu definuje se elektrochemickým rozkladem zředěné kyseliny sírové, odtud stanoví se výměr ampéru. Zákon Ohmův. Odpor vodiče. Jednotka ohm. Závislost odporu na geometrickém tvaru vodiče. ...

K definitivnímu včlenění Ohmova zákona do osnov fyziky na nižším stupni střední školy však došlo až v nových, podstatně přepracovaných osnovách z roku 1933 a na základě těchto osnov se Ohmův zákon až do současnosti stal již tradiční součástí učebnic fyziky pro tento typ školy. K nejužívanějším učebnicím odpovídajícím osnovám z 30. let patří učebnice [4], která vyšla v roce 1934. Ohmův zákon je v ní vyložen s připomenutím analogie s prouděním vody způsobem, který je patrný z obr. 1.

Až ve druhé polovině 40. let 20. století došlo k dalším změnám učebních osnov fyziky, které vzešly z diskuse odborné veřejnosti iniciované Výzkumným ústavem pedagogickým a ze srovnání obsahu šesti učebnic, používaných tehdy na měšťanských školách [5]. Zatím co např. Newtonovy zákony návrh učiva pro školy tzv. II. cyklu v té době ještě neobsahuje, Ohmův zákon je již jeho pevnou součástí.

Podle vyjádření *Národního pedagogického institutu* [6] byla aplikace Ohmova zákona (výstup F-9-6-04) vyřazena z toho důvodu, že žáci vnímají Ohmův zákon formálně a k řešení praktických problémů je vhodnější širší znalost jevů v elektrickém obvodu v pojetí odpovídajícím výuce na střední škole. Můžeme připustit, že první učebnicové zpracování Ohmova zákona je poměrně strohé a mohlo by vést k představě o formálním přístupu žáků k jeho kvantitativnímu vyjádření. Od počátku se však předpokládal výklad založený na experimentu, i když to s použitím dnes už prakticky neznámých galvanometrů ve srovnání se současnými digitálními multimetry nebylo až tak jednoduché. Na tomto experimentálním přístupu je také založen výklad Ohmova zákona prakticky ve všech současných učebnicích fyziky. Je to jedna z nemnoha možností, jak klíčový fyzikální zákon, základ tak významného technického oboru, jakým je elektrotechnika, zpřístupnit žákům jednoduchým a snadno realizovatelným experimentálním postupem. Ten pak může být exemplárním příkladem zpracování dat získaných z reálného děje matematicky, tabelárně a graficky s použitím prostředků IT.

72. Zákon Ohmův. Síla vodního proudu závisí na přetlaku v potrubí a tím na rozdílu výšek hladin. Podobně lze očekávat, že proud elektrický závisí na napětí.

Zapojíme-li do vedení od akumulátoru určitý odpor, ukáže galvanometr jistý proud. Spojíme-li 2 akumulátory za sebou (2krát větší napětí), je při též odporu proud 2krát větší; při 3 akumulátorech za sebou jest proud 3krát větší, atd.

Totéž se opakuje i při jiném stálém odporu.

Proud je při stálém odporu přímo úměrný napětí.

Při napětí	1 V	6 V	6 V	E V
jde odporem	1 Ω	1 Ω	3 Ω	R Ω
proud	1 A	6 A	6 A : 3 = 2 A	$I = E : R$

Odtud vyplývá zákon Ohmův:

Proud v ampérech se vypočte, jestliže napětí ve voltech dělíme odporem v ohmech.

$$I = \frac{E}{R}.$$

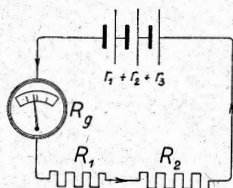
Z pravidel o dělení a o děliteli vyplývají hned věty další:

$$E = IR, \quad R = \frac{E}{I}.$$

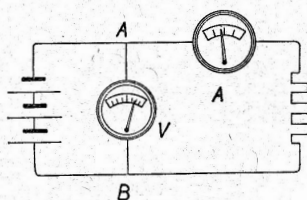
Napětí rovná se součinu z proudu a z odporu.

Odpor rovná se napětí dělenému proudem.

2. Jde-li proud z odporu do odporu, pravíme, že jsou odpory spojeny za sebou (obr. 126). Při výpočtu proudu je třeba klásti



Obr. 126. Spojení odporů za sebou (seriově).



Obr. 127.

za R v Ohmově zákoně odpor celého vedení, který se rovná součtu všech odporů, čítaje v to i odpor elektrolytu článků (t. zv. vnitřní odpor), odpor galvanometru atd.

Úlohy: 1. Jaký proud dává baterie 2 akumulátorů (po 2 V) spojených za sebou, je-li vepjat odpor 1,1 Ω , ampérmetr s odporem 0,8 Ω a je-li vnitřní odpor jednoho článku 0,05 Ω ? (2 A.) — 2. Z baterie jde proud 2 A odporem 3,6 Ω . Jaké jest napětí baterie, má-li ampérmetr odpor 0,4 Ω ? (8 V.) — 3. Jaký odpor má v určitém případě lidské tělo, když jím protéká při 20 V proud 0,0005 A? (40.000 Ω .)

Obr. 1 První učebnicové zpracování Ohmova zákona v [4]

Ať už tedy bude formulace očekávaných výstupů nebo učiva v RVP ZV jakákoliv, nelze pochybovat o tom, že ve školské praxi, v jednotlivých ŠVP vytvořených učiteli bude Ohmův zákon zachován tak, jak to již před sto lety JČMF požadovala.

Literatura

- [1] Přehled změn v RVP ZV. Dostupné na: <https://revize.edu.cz/prehled-zmen-v-rvp-zv>.
- [2] Patří Newtonovy zákony do základní školy? Dopis fyziků ministru MŠMT. Dostupné na: <https://jcmf.cz/?q=cz/node/2038>.
- [3] Vašek, L.: Příspěvek k hodnocení vývoje učebních osnov fyziky na našich středních školách. Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc 1965, habilitační spis (rukopis).
- [4] Ryšavý, V.: Fysika pro nižší třídy středních škol. JČMF, Praha. 1934.
- [5] Špaček, M.: *Úvodní poznámky k osnovám fyziky*. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, roč. 71 (1946), Suppl., D88–D93. Dostupné na: <http://dml.cz/dmlcz/122836>.
- [6] Vyjádření k redukcím v RVP ZV. Dostupné na: <https://revize.edu.cz/files/npi-vyjadreni-k-redukcim-v-rvp-zv.pdf>.

Úpravy RVP ZV pohledem učitele základní školy

FRANTIŠEK JÁCHIM

Základní škola Strakonice, Dukelská

V lednu tohoto roku byl publikován *Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání* [1] se zapracovanými změnami motivovanými potřebou posílení obsahu a rozsahu výuky informatiky. Tato změna spočívá ve vložení Vzdělávací oblasti 5.3 Informatika se vzdělávacím oborem Informatika 5.3.1 ([1, str. 38–43]). Současně je v učebním plánu definována její

minimální časová dotace, a to 2 hodiny týdně na 1. stupni a 4 hodiny na 2. stupni ZŠ, tedy celkové posílení o 4 hodiny. Chápeme, že navýšení časové dotace bylo nutno kompenzovat v jiných vzdělávacích oblastech, pokud pro výuku informatiky neměly být použity disponibilní hodiny. Minimální časová dotace byla tedy zredukována o jednu hodinu ve vzdělávacích oblastech Člověk a jeho svět (1. stupeň), Člověk a společnost, Člověk a příroda a Umění a kultura (2. stupeň). Současně došlo k úpravám – přesněji řečeno ke škrtům – v *Očekávaných výstupech* vzdělávacích oborů. Ty byly odůvodněny sdělením Národního pedagogického institutu takto [2]:

„Škrty ve vzdělávacím obsahu jednotlivých vzdělávacích oborů proběhly na základě stanovených kritérií:

- odstranění duplicit v různých vzdělávacích oborech;
- vyřazení obsahu založeného na encyklopedických znalostech;
- vyřazení obsahu považovaného za příliš obtížný;
- vyřazení obsahu nárokovajícího pouze dílčí znalosti nebo dovednosti;
- vyřazení obsahu, který není přiměřený věku a životním zkušenostem žáků;
- zjednodušení obsahu k podpoře hledání souvislostí.“

(1)

Dále se budu věnovat úpravě očekávaných výstupů vzdělávacího oboru fyzika.

1. Vzdělávací obsah Pohyb těles; síly

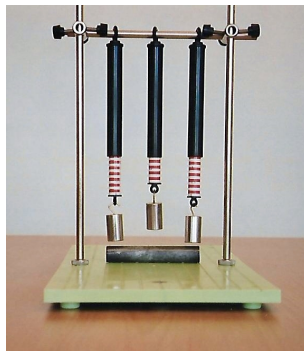
Ve vzdělávacím obsahu Pohyb těles; síly byly vyřazeny výstupy

F-9-2-03 „*změří velikost působící síly*“

Znamená to, že žák už nebude brát do ruky siloměr (mechanický nebo např. „vernierovský“) a nebude zjišťovat tíhu závaží, velikost třecí síly sunutím tělesa po podložce, velikost síly vypočítanou z jejího momentu (viz dále), nebude měřit velikost výslednice sil a podobně? Nepřesvědčí se, že existuje nějaká vztlaková síla při noření tělesa do kapaliny? Zkušenost ukazuje, že toto všechno téměř všichni žáci dobře a rádi zvládali. Nejlepší představu o velikosti jednotky síly žák získá právě vytážením siloměru. Dodržení této redukce by výrazně omezilo rejstřík frontálních pokusů, které mj. vedou i k rozvíjení zručnosti a spolupráce mezi žáky. Autoři redukce si zřejmě nepovšimli, že vypuštění tohoto výstupu neodpovídá žádnému z výše uvedených kritérií (obr. 1).



(a)



(b)

Obr. 1 (a) Překvapuje mě, jak je 1 N velmi malá síla; (b) Síla magnetu je v jeho středu nejslabší

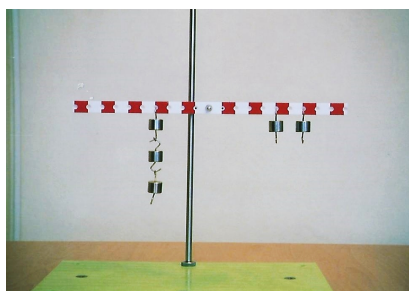
F-9-2-05 „využívá Newtonovy zákony pro objasňování či předvídání změn pohybu těles při působení stálé výsledné síly v jednoduchých situacích“

Žák tedy nemá vědět, proč je někdy těleso v klidu a jindy v pohybu (přímochárem, křivochárem, rovnoměrném, nerovnoměrném) a co je toho příčinou? Proč např. při volném pádu těleso zrychluje? Vždy jsem učil žáky rozumět všem třem zákonům (2. pouze kvalitativně), opět bez problémů. Učivo poskytuje velmi mnoho situací z běžného života a je výborným prostředkem k tomu, aby se žáci učili zdůvodňovat jim předložené jevy a nalézat jejich souvislosti. Učivo o pohybu je jednou ze základních částí fyzikálního učiva, je pro žáky zajímavé a je úzce spojeno s jejich zkušenostmi v běžném životě. Nejen proto zcela souhlasím se sdělením: „Newtonovy pohybové zákony vysvětlují veškerý pohyb těles, který pozorujeme v běžném životě. Proto patří do výuky na všech stupních vzdělávání, kde se fyzika vyučuje...“ ([4, str. 132]).

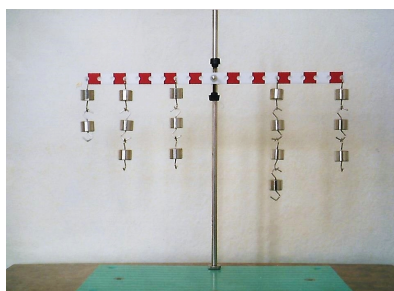
F-9-2-06 „aplikuje poznatky o otáčivých účincích síly při řešení praktických problémů“

Jinak řečeno, má to jít bez pák a kladek, neboť nebudou-li uvedeny aplikace, půjde jen o suchou teorii. Řada frontálních (nebo skupinových) pokusů nejen, že žáky dovede především k porozumění jevu, ale opět při používání jednoduchých pomůcek se rozvíjejí jejich manipulativní dovednosti. Výbornou aplikací je např. frontální žákovský pokus stříhání plechu.

Uvedený výstup je také jedním z těch, které ve výuce umožňují užít matematiky. Vezměme v revidovaném RVP vyjmutou momentovou větu: V matematice se žáci učí řešit lineární rovnice. Právě momentová věta je příležitostí, jak žákům ukázat praktické využití matematiky. Vždyť jde vlastně o lineární rovnici ve tvaru $a \cdot x = b \cdot c$ (při rovnováze), v níž se neznámá x může objevit v různých polohách, podle toho, jaké rameno nebo sílu reprezentuje. A ta vynikající zpětná vazba, které se žákovi dostane, když po výpočtu použije ve skutečné situaci siloměr, a ten ukáže velikost síly, jakou vypočítal. Mám dojem, že autoři redukce chtěli, aby se ve výuce fyziky vůbec nepočítalo. Potlačení mezipředmětových vztahů je z této úpravy zřejmé (obr. 2).



(a)



(b)

Obr. 2 To se nám to povedlo, když jsme si to předem vypočítali

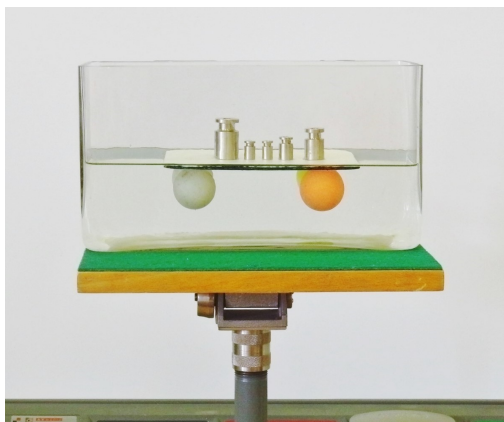
2. Vzdělávací obsah Mechanické vlastnosti tekutin

Ve vzdělávacím obsahu Mechanické vlastnosti tekutin je vyřazen výstup

F-9-3-02 „předpoví z analýzy sil působících na těleso v klidné tekutině chování tělesa v ní“

Zde si autoři úprav nerozuměli s tím, co ponechali o kousek dále, totiž v učivu, mj. „Archimedův zákon – vztaková síla, vznášení se a plavání těles v klidných tekutinách“. Že by tady zapomněli škrtat? Pokud ne, tak z mého pohledu v pohodě.¹⁾ V tom případě je zde opět velmi dobrá příležitost k využití matematiky – úprava výrazu, výpočet podle vztahu, řešení rovnic (obr. 3).

¹⁾Protože očekávaný výstup je nadřazen učivu, obávám se, že škrtnutí Archimedova zákona opomněli a upřímně toho litují.



Obr. 3 Proč právě tolik závaží vor unese?

3. Vzdělávací obsah Energie

Ve vzdělávacím obsahu Energie jsou vyřazeny výstupy

F-9-4-01 „určí v jednoduchých případech práci vykonanou silou a z ní určí změnu energie tělesa“

F-9-4-03 „využívá poznatky o vzájemných přeměnách různých forem energie a jejich přenosu při řešení konkrétních problémů a úloh“

F-9-4-04 „určí v jednoduchých případech teplo přijaté či odevzdané tělesem“

Podle uvedeného zcela z výuky fyziky mizí jeden ze základních pojmů – *energie*. Přitom žák podle zachovaného výstupu nově označeného F-9-04-02 „zhodnotí výhody a nevýhody využívání různých energetických zdrojů z hlediska vlivu na životní prostředí“. Doslova vzato: žák nebude vědět, co energetické zdroje vlastně produkují a jak, a má o nich hovořit. Naštěstí (nebo opět omylem) opět v učivu dochází k negaci výstupu, jsou tam uvedeny nejen všechny druhy mechanické energie, ale i energie elektrická a jaderná. Jako fyzikálně destruktivní vnímám, že z fyziky zmizel pojem „teplo“. Jsem přesvědčen, že kalorimetrická rovnice v přiměřeném tvaru popisující kombinaci přiměřeně volených teplotních stavů látek je velmi dobrým mezipředmětovým prvkem. Není důvod žákům např. zamlčet, proč se opaří vodní párou a stejně teplou vodou nikoli.

4. Vzdělávací obsah Elektromagnetické a světelné děje

Ve vzdělávacím obsahu Elektromagnetické a světelné děje jsou vyřazeny výstupy

F-9-6-04 „využívá Ohmův zákon pro část obvodu při řešení praktických problémů“

Jestliže žák poznává fyzikální veličiny *napětí, proud, odpor* a prakticky je měří, je jen krok k tomu, aby pochopil jejich souvislost. Proč mu v tom bránit? Měření ve skutečném obvodu a přímé sledování změny veličin (přímá a nepřímá úměrnost) mu vytváří asociaci na učivo z matematiky. Ohmův zákon je ideálním příkladem vedoucím k rozvoji funkčního myšlení. Přenesením konkrétních měření do grafů lze naopak podporovat využití poznatků z informatiky (např. MS Excel). Opět je zde vidět usilovná snaha autorů redukce – nepoužívat matematiku.

F-9-6-06 „zapojí správně polovodičovou diodu“

Tady jde o detail, který nemusí být v RVP vůbec uveden. Jestliže však podle výstupu F-9-6-03 má žák být informován i o polovodiči, žákům diodu do ruky určitě dáme, se zájmem si s ní „vyhrají“. Zapojování několika diod (paralelně či sériově) do obvodu žáky v mých hodinách velice zaujímalo.

5. Vzdělávací obsah Vesmír

Ve vzdělávacím obsahu Vesmír je vyřazen výstup

F-9-7-02 „odliší hvězdu od planety na základě jejich vlastností“

Učivo o vesmíru je obecně pro žáky docela zajímavé. Žijí v době letů sond k planetám a hledání exoplanet s otazníky možného mimozemského života. Čas od času pozorují zatmění, popř. tranzit, tyto jevy vznikají fyzikální odlišností hvězd (Slunce) a jiných vesmírných těles. Proč jim tyto odlišnosti nesdělít? Propojení se zeměpisem se přímo nabízí.

Závěrem

Publikace změn RVP byla překvapivá. Nepředcházelo jim žádné avízo, žádná odborná diskuze. V úvodu RVP je uvedena množina pracovníků

(21 z Národního pedagogického institutu + 10 externích), kteří se na změnách podíleli. Marně jsem mezi nimi hledal někoho z oblasti fyziky a její didaktiky. Proto nepřekvapuje, že s podivem na redukci RVP ZV zareagovalo pohotově vedení JČMF svým dopisem MŠMT [3].

Ke změnám připojil Národní pedagogický institut rozsáhlý komentář [2]. Má být odůvodněním změn, především vypuštěných výstupů. Zdůvodňování změn ve fyzice zde téměř nekoresponduje s kritérii (1). Autoři komentáře se ve svých sděleních necítí jistí a působí zmatečně, zejména když tvrdí, že některé vyřazené výstupy vlastně nemizí a lze jejich obsah využívat ve výstupech zachovaných. V komentáři najdeme i sdělení, která jeho ostatní části negují:

V úvodu:

„Pokud se učitelé chtějí se svými žáky redukováním obsahům i nadále věnovat, tak mohou.“

V závěru:

„Redukce obsahu na úrovni RVP ZV ovšem neznamená, že na úrovni školního kurikula a výuky nemůže být vzdělávací obsah rozšířen o další a nadstandardní obsah a tvůrčí činnosti. Naopak rozšíření a specifikaci obsahu na úrovni školy a na základě učitelova pojetí výuky velmi doporučujeme.“

Alespoň nějaká pozitivní sdělení.

Literatura

- [1] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. MŠMT, Praha, 2021. Dostupné na: <http://www.nuv.cz/t/rvp-pro-zakladni-vzdelavani>.
- [2] Vyjádření k redukcím v RVP ZV. Dostupné na: <https://revize.edu.cz/files/npi-vyjadreni-k-redukcim-v-rvp-zv.pdf>.
- [3] Patří Newtonovy zákony do základní školy? Dopis fyziků ministru MŠMT Dostupné na: <https://jcmf.cz/?q=cz/node/2038>.
- [4] Černohorský, M., Musilová, J.: Newtonovy pohybové zákony – retrospektiva a současnost. Československý časopis pro fyziku, roč. 71 (2021), s. 117–133.

Virtuální laboratorní cvičení s využitím 3D modelů Corinth

ČENĚK KODEJŠKA – JAKUB ŠANA – ONDŘEJ VALÁŠEK

Gymnázium, SOŠ a VOŠ, Komenského 77, Nový Bydžov

Distanční výuka klade v dnešní době, ovlivněné epidemickou situací a šířením covidu-19, zvýšené nároky na učitele i žáky. Naše práce se zabývá virtuálními experimenty s 3D modely, které nabízí aplikace Corinth 3D [1].

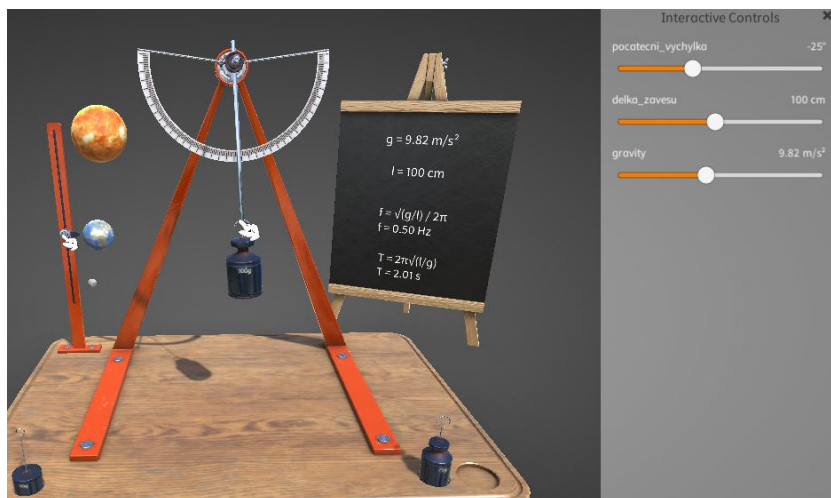
Desktopová verze nabízí přes 1500 modelů z oblasti biologie, fyziky, chemie, matematiky, astrofyziky a dokonce i historie. Fyzikální knihovna čítá na 250 modelů, z nichž některé lze využít k uskutečnění virtuálního laboratorního měření.

Lze také využít online verzi aplikace pojmenovanou Lifeliqe [2], která obsahuje menší počet modelů, který je postupně rozšiřován do plného počtu desktopové aplikace. Funkcionalitou je on-line verze plnohodnotná k desktopové. V obou výše uvedených případech mohou školy po vyplnění online formuláře na webových stránkách [1, 2] získat pro své žáky roční multilicenci, která je omezena pouze počtem školních počítačů, na které lze desktopovou aplikaci nainstalovat. V případě on-line verze lze získat dohodnutý počet licenčních kódů.

Cílem této práce bylo ověřit, zda lze interaktivní 3D modely použít při realizaci virtuální laboratorní práce namísto reálných pomůcek. Jako základní model jsme vyzkoušeli interaktivní kyvadlo (viz obr. 1), u kterého lze měnit nejen délku závěsu a hmotnost závaží, ale i hodnotu gravitačního zrychlení, kterou při reálném žákovském experimentu nelze měnit. Model kyvadla byl zvolen také proto, že je to v současné době zatím jediný interaktivní model, který je zcela hotov.

Mezi další připravované interaktivní modely patří např. model interaktivní pružiny, sériového a paralelního zapojení rezistorů, určení VA charakteristiky elektrolytu, model transformátoru nebo ověření Ohmova zákona. Na jejich přípravě se podílí první autor článku.

Pro doplnění uvedme, že určitou interaktivitu nabízí i některé jiné webové aplikace, např. známé 2D animace RNDr. Vladimíra Vaščka [3] nebo interaktivní simulace PhET z University of Colorado [4].



Obr. 1 Interaktivní kyvadlo Corinth 3D

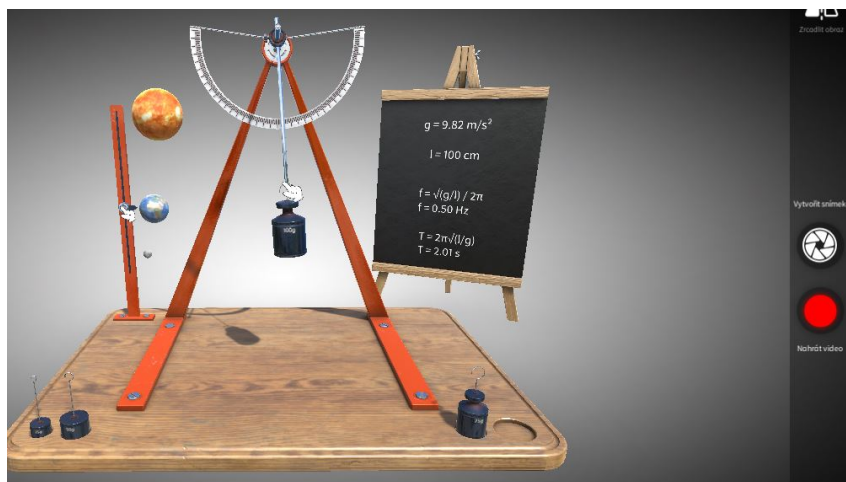
Pro vyhodnocení pohybu kyvadla jsme použili freeware aplikaci Tracker [5], která umožňuje provést detailní video analýzu jakéhokoliv pohybu, včetně sofistikovaného proložení regresní funkce experimentálně naměřenými body [6].

Virtuální laboratorní cvičení bylo realizováno na Gymnáziu, SOŠ a VOŠ v Novém Bydžově se žáky třetího ročníku vyššího gymnázia během distanční výuky v listopadu 2020. Praktické zkušenosti jsou popsány níže v textu.

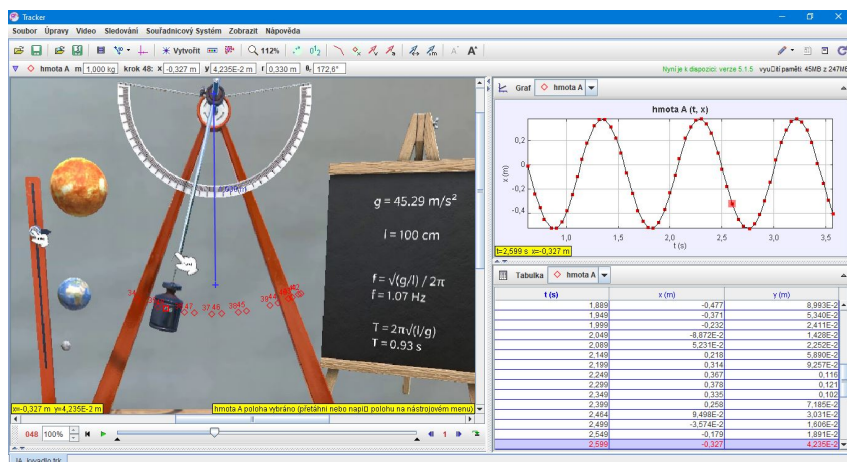
Ověření závislosti periody na gravitačním zrychlení 3D modelu interaktivního kyvadla

Pomocí rozšířené reality (augmented reality) vytvoříme v programu Corinth u modelu interaktivního kyvadla záznamy o délce cca 10 s asi 10 až 12 videí pohybu kyvadla pro různé hodnoty gravitačního zrychlení v rozmezí $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ až $100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ (viz obr. 2). Délka kyvadla byla nastavena vždy $L = 1 \text{ m}$.

Získaná videa ve formátu MP4 postupně podrobíme videoanalýze v programu Tracker, pomocí kterého určíme periodu kmitů pro danou hodnotu gravitačního zrychlení (viz obr. 3). Detailní postup provedení videoanalýzy je uveden např. v [7].



Obr. 2 Rozšířená realita v aplikaci Corinth – záznam videa



Obr. 3 Videoanalýza v programu Tracker

Pro danou hodnotu gravitačního zrychlení byla videoanalýza provedena vždy třikrát. Z těchto hodnot jsme pak vypočítali průměrnou hodnotu periody. Výsledné průměry hodnot period pro danou hodnotu gravitačního zrychlení a délku kyvadla 1 m jsou uvedeny v tabulce 1.

Tabulka 1 Hodnoty periody T kyvadla v závislosti na gravitačním zrychlení a_g při délce kyvadla $L = 1$ m

č. měření	$a_g/\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$	T/s
1	1,32	5,47
2	2,55	3,93
3	3,20	3,54
4	4,37	3,01
5	5,75	2,62
6	9,81	2,01
7	17,63	1,49
8	23,37	1,28
9	45,77	0,93
10	68,95	0,76
11	100,00	0,62

Zpracování výsledků v MS Excel

Hodnoty z tabulky 1 byly zpracovány do grafu (viz obr. 4). Pomocí spojnice trendu byla určena regresní funkce probíhající naměřenými body.

Z grafu vyplývá, že regresní funkce proložená naměřenými body má vyjádření

$$y = 6,2883 x^{-0,499}, \quad (1)$$

ze kterého lze určit hodnotu exponentu $n \doteq -0,5$. Nalezená závislost periody na gravitačním zrychlení je dána tedy jako

$$T \sim \frac{1}{\sqrt{a_g}}.$$

Pokud žáci z předchozího laboratorního cvičení ví, že perioda T je přímo úměrná druhé odmocnině délky kyvadla L

$$T \sim \sqrt{L},$$

mohou nyní spojit obě nalezené závislosti do jednoho vztahu

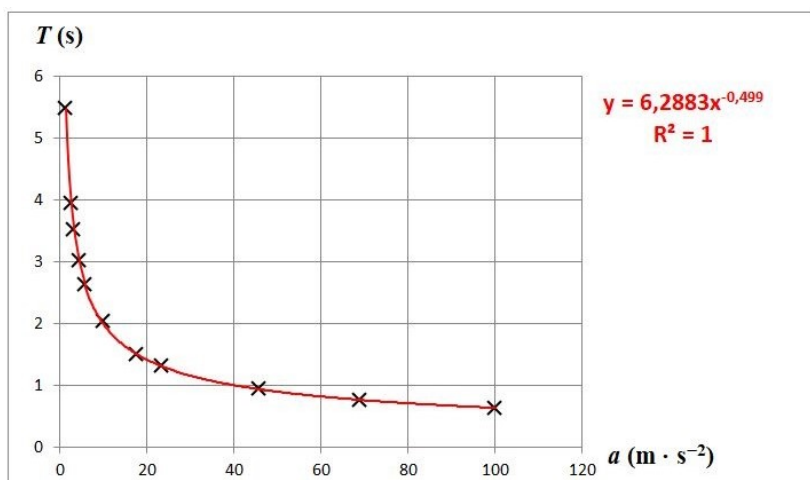
$$T = k \sqrt{\frac{L}{a_g}}, \quad (2)$$

kde k je konstanta úměrnosti. Pokud zvolíme délku kyvadla $L = 1$ m, má rovnost (2) tvar

$$T = \frac{k}{\sqrt{a_g}}.$$

Z nalezeného tvaru regresní funkce (1) plyne, že hodnota této konstanty je $k \doteq 6,29 \doteq 2\pi$. Pomocí virtuálního interaktivního kyvadla můžeme tedy zcela vyvodit známý vztah pro periodu matematického kyvadla

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{a_g}}.$$



Obr. 4 Graf závislosti periody kyvadla na gravitačním zrychlení

Praktické zkušenosti s virtuální laboratorní prací

Virtuální laboratorní cvičení bylo zrealizováno ve dvou třídách s paralelní výukou s celkem 40 žáky třetího ročního vyššího gymnázia. Jedna

třída přitom už měla předchozí zkušenosti s videoanalýzou pohybu, druhá nikoliv.

Během vlastní experimentální činnosti žáků učitel nemá příliš možnost sledovat práci žáků, protože každý žák si volil jinou dobu pro provedení experimentu. Ani v případě frontální práce by ale sledování činnosti žáků dle našeho názoru nepřineslo žádné podstatné informace.

Při realizaci této virtuální laboratorní práce je také třeba vzít v úvahu větší časovou náročnost. Žáci, kteří měli již zkušenosti z jiných cvičení s videoanalýzou v programu Tracker, zvládli tuto laboratorní práci vypracovat přibližně za 2 až 3 hodiny včetně vyhotovení protokolu. Ti, kteří se teprve s videoanalýzou seznamovali dle návodného videa, uváděli čas vypracování 6 až 10 hodin, přičemž velký význam hrála také kvalita videí se záznamy pohybů kyvadla. Čím nižší rozlišení videa, tím horší byla dle slov žáků videoanalýza pohybu kyvadla. Někdy museli videoanalýzu se stejným kyvadlem provádět opakovaně, protože bylo obtížné správně definovat obrazový pixel, který sleduje při pohybu program Tracker. Je tedy vhodnější zadat tuto práci např. v rámci projektového dne nebo týdne, aby žáci měli dostatek času na vypracování a případné řešení problémů. Při běžné výuce lze snížit počet videosouborů, které podrobujeme videoanalýze, na polovinu, a tím zajistit zvládnutí laboratorní práce během obvyklých dvou vyučovacích hodin.

V mezipředmětových vztazích lze z pohledu IVT využít videoanalýzu v učivu o analytických aplikacích pro zpracování dat nebo při práci s programy pro zpracování a úpravu videí a jejich export do různých formátů a rozlišení.

Závěr

V naší práci jsme se zabývali realizací virtuální laboratorní práce s využitím interaktivního modelu kyvadla v programu Corinth 3D.

Provedená videoanalýza v programu Tracker ukázala, že interaktivní model kyvadla není jen 3D modelem, který má u žáků vyvolat „wow“ efekt, ale že může téměř plnohodnotně nahradit reálné kyvadlo. Hlavní výhodou modelu kyvadla je navíc možnost změny gravitačního zrychlení, kterou reálný experiment nabídnout nemůže.

Reálný experiment s reálnými pomůckami však zůstává při prezenční i dálkové výuce nezastupitelný, protože umožňuje pozorovat i odchylky měřené veličiny způsobené různými faktory a nutí žáky k většímu zamyšlení nad pozorovanými jevy než velmi přesná simulace.

Závěrem lze konstatovat, že za předpokladu předchozí důkladné přípravy, zahrnující zejména znalosti video analýzy v programu Tracker, lze interaktivní 3D modely Corinth využít při realizaci virtuální laboratorní práce nebo projektového dne. Tyto aktivity mohou v době distanční výuky částečně nahradit reálné experimenty prováděné v rámci prezenčních laboratorních cvičení s reálnými pomůckami. Při běžné výuce pak mohou být pro žáky zajímavým zpestřením či motivačním prvkem při studiu fyziky.

Literatura

- [1] Corinth 3D [online]. Dostupné z <https://www.corinth3d.com>.
- [2] Lifeliqe [online]. Dostupné z: <https://online.lifeliqe.com>.
- [3] RNDr. Vladimír Vaščák, osobní stránky učitele z Moravy [online]. Dostupné z: <https://www.vascak.cz>.
- [4] PhET Interactive Simulations, University of Colorado [online]. Dostupné z: <https://phet.colorado.edu>.
- [5] Tracker – Video Analysis and Modeling Tool [online]. Dostupné z <https://physlets.org/tracker>.
- [6] *Kodejška et al.*: Buquoy's problem in an introductory physics course. J. Phys.: Conf. Ser, roč. 1512 (2020), 012003 [online]. Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1512/1/012003/>.
- [7] *Kodejška, Č.*: Video analýza v programu Tracker [online]. Dostupné z: http://www.matfyz.eu/dokumenty/laborky/videoanaliza/tracker_videoanaliza.mp4.

Hermann von Helmholtz

(k dvoustému výročí narození)

JITKA HOŠKOVÁ PROKŠOVÁ

Fakulta pedagogická Západočeské univerzity v Plzni

V 19. století patřil Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz k nejvýznamnějším německým přírodovědcům. Jeho zájem o fyziku byl od mládí tak silný, že přetrval i během studia lékařství, ke kterému ho donutil otec. Právě propojení poznatků z fyziky a fyziologie způsobilo, že se už za svého života proslavil výzkumy a pozdější podrobnou analýzou funkce nejdůležitějších smyslových orgánů – oka a ucha.

Hermann se narodil 31. srpna 1821 v německé Postupimi, kde jeho otec August Ferdinand Julius Helmholtz působil jako učitel filozofie a literatury na gymnáziu. Rodinné prostředí umožnilo Hermannovi bilingvní dětství nejen proto, že jeho matka Caroline Penne byla Angličanka, ale hlavně kvůli péči otce, který svého syna cíleně vzdělával v latině, řečtině, francouzštině, italštině, hebrejštině a arabštině. Jako učitel filozofie také poskytl Hermannovi vhled do díla osvíceného Immanuela Kanta a seznámil ho s ateistickými úvahami Johanna Gottlieba Fichte, který počátkem 19. století vzbudil v Berlíně rozruch svými přednáškami vyzývajícími k mravní obrodě.

Hermann byl zvědavé dítě a tak není divu, že ho zaujala tajemství přírody. Zájem o fyziku ale nedošel ve vysokoškolském studiu naplnění, protože rodina neměla dostatek financí. V té době však vláda podporovala program pro nadané studenty lékařských oborů, a tak otec nasměroval syna ke studiu na Královském medicínsko-chirurgickém institutu Bedřicha Viléma v Berlíně. Doufal přitom v synův lepší finanční výhled do



Obr. 1 Hermann von Helmholtz (zdroj: Pinterest)

budoucná i ve věhlas institutu, na kterém pracoval významný fyziolog Johann Müller. Úspěšné absolvování však zavazovalo Hermanna k sedmi letům služby v oblasti vojenské chirurgie, a proto byl roku 1843 přidělen k postupimskému pluku. I během těchto sedmi let se mladý Hermann mohl věnovat dalšímu fyziologickému výzkumu, který dříve prováděl právě pod Müllerovým vedením – zřídil si v kasárnách laboratoř. Ve volném čase hrál na klavír a dále prohluboval své znalosti matematiky (především neeukleidovské geometrie), díky kterým později vždy exaktně formuloval své fyzikální a fyziologické poznatky.

V polovině 19. století se řada vědců zabývala hledáním co nepřesnější formulace zákona zachování energie. Také Helmholtz přispěl do diskuze úvahami, které vycházely z jeho výzkumů svalové činnosti. Tvrdil, že svalová síla je odvozena z chemických a fyzikálních principů. V roce 1847 publikoval své myšlenky v pojednání *O zachování síly* (Über die Erhaltung der Kraft) [1], kde vyložil matematické principy zachování energie při svalové činnosti. V jednotlivých kapitolách formuloval silové ekvivalenty tepla, elektrických procesů, magnetismu a elektromagnetismu, vycházejí přitom z podnětů a prací Benoîta Paula Émile Clapeyrona, Humphryho Davyho a Carla Holtzmanna. Na příkladech různých dějů v plynech a situacích, při kterých se zdá, že dochází ke ztrátě energie, ukázal, že ve skutečnosti jde o přeměnu energie na teplo. Zmíněné pojednání se zabývalo širokou řadou aplikací včetně elektrostatik, galvanických jevů a elektrodynamiky. Svůj názor, že součet kinetické a potenciální energie zůstává v izolovaném systému stálý, přednesl také v berlínské fyzikální společnosti, kterou 23. července 1847 seznámil se základními myšlenkami zveřejněnými právě ve statí *O zachování síly* [1].

V následujícím roce se stal odborným asistentem na Akademii společenských věd v Berlíně. Z centra vědeckého dění byl však o rok později odvolán, aby přesídlil a začal přednášet na Fyziologickém institutu univerzity v Königsbergu (česky Královec, dnešní Kaliningrad). V tomto nejvýchodnějším baltském přístavu tehdejšího Pruska Helmholtzova kariéra rychle poskočila vpřed. Rok 1849 byl pro něj významný také soukromě – 26. srpna se oženil s Olgou von Velten (1827–1859), dcerou vojenského chirurga.

Během pobytu v Königsbergu, kde jako docent fyziologie přednášel fyziologii a patologii, se vydával i na cesty po německých univerzitách a uskutečnil první návštěvu Anglie. Navázal při ní spolupráci s několika anglickými fyziky, přátelská pouta si vytvořil hlavně s Williamem Thomsonem.

V té době přinášela výzkumná práce Helmholtzovi značné uspokojení – měřil rychlost přenosu nervového impulsu a zabýval se pozorováním sítnice a akomodací oka. Důsledkem jeho studia optického systému lidského oka bylo v roce 1851 sestavení očního zrcátka (oftalmoskopu) a spisek *Popis očního zrcátka ke zkoumání sítnice v živoucím oku* (Beschreibung eines Augenspiegels zur Untersuchung der Netzhaut im lebenden Auge) [2]. Právě vynález oftalmoskopu mu získal mezinárodní věhlas. Později se věnoval výzkumu zakřivení rohovky a jako první sestrojil laboratorní přístroj na proměření parametrů rohovky – oftalmometr (keratometr) [3]. Nicméně, experimenty s aditivním a subtraktivním mícháním barev, které v roce 1852 prováděl, ho vedly k odmítnutí Newtonovy teorie barev. Závěry, ke kterým došel, byly tehdy kritizovány Hermannem Güntherem Grassmannem a Jamesem Clerkem Maxwellem [6]. Helmholtz uznal své chyby a o tři roky později uveřejnil nové experimentální výsledky, které se staly základem pro jeho teorii prostorového vnímání a barevného vidění v několikavazkovém díle *Rukověť fyziologické optiky* (Handbuch der Physiologischen Optik)¹⁾ [4].

Přes uznání, které se jeho výzkumu ve Fyziologickém institutu univerzity v Königsbergu dostalo, ho tamější chladné počasí přimělo – především s ohledem na křehké zdraví jeho ženy – požádat o přesun a s pomocí Alexandra von Humboldta nové místo získal. V letech 1855–1858 tedy působil jako profesor anatomie a fyziologie na univerzitě v Bonnu, kde ho však čekaly poněkud nemilé chvíle. Přestože si ve světě již vybudoval pověst významného přírodovědce, byly na něj v tomto období podány ministroví školství stížnosti týkající se jeho údajně nekompetentních přednášek z anatomie. Stížnosti i kritiky se ho silně dotýkaly, protože byl přesvědčený o správnosti svého mechanisticko-fyziologického podání, a tak se roku 1858 rozhodl přejít na univerzitu do Heidelbergu. Nepřízeň tohoto období se odrazila i v jeho soukromém životě. V roce 1858 mu zemřel otec a na konci roku 1859 jeho manželka. Skutečnost, že osaměl s dvěma malými dětmi, ho možná vedla i k následujícímu, poměrně rychlému rozhodnutí – 16. května 1861 se jeho druhou manželkou stala Anna von Mohl (1834–1899), dcera Roberta von Mohla, jednoho z heidelberských profesorů. Z jejich svazku později vzešly tři děti.

Helmholtzova vědecká éra v Heidelbergu bývá hodnocená jako nejproduktivnější roky jeho kariéry – hluboký a trvalý zájem o smyslové vnímání vyústil v další nové poznatky, které umožnily pochopit hraniční problémy fyziologie sluchového orgánu a psychologie – například způsob, jakým člo-

¹⁾První až třetí svazek vyšly v rozpětí let 1855–1867.

věk slyší kombinované tóny [6]. Zřejmě jeho láska k hudbě mu pomohla při zkoumání lidského ucha i při analýze pohybu houslových strun a byla podnětem pro hlubší studium fyziologie vnímání a mísení tónů – v roce 1863 vydal *Nauku o vnímání tónů jako fyziologickém základu teorie hudby* (Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik) [5], ve které položil základy akustiky. V této době se také zabýval akustickou rezonancí, což ho přivedlo k zhotovení rezonátoru, který dodnes nese jeho jméno.

Od roku 1866 se začal Helmholtz fyziologii vzdalovat a více se přibližovat k fyzice. Významně přispěl k rozvoji fyzikální chemie statemi o termodynamice chemických reakcí. Kladl důraz na rozlišení vázané a volné energie soustavy, přičemž rozšířil fenomenologickou termodynamiku o pojem volné energie soustavy jako termodynamického potenciálu²⁾. V mechanice se zabýval teorií vířivého pohybu kapalin, mechanismem šíření mořských vln a položil i základy teorie šíření balistické vlny.

Široký vědecký věhlas mu v roce 1871 přinesl nabídka profesury fyziky na berlínské univerzitě. Dostal ji i Gustav Robert Kirchhoff, jeho kolega z Heidelbergu, kterého vedení univerzity upřednostňovalo kvůli vynikajícím pedagogickým schopnostem. Kirchhoff však post odmítl, a tak nominace přešla na Helmholtze. O 12 let později, v roce 1883, byl profesor Helmholtz povýšen do šlechtického stavu.

Mnohostrannost zájmů je patrná z celého jeho profesního života – napsal přes 220 prací z fyziologie, optiky, akustiky, termodynamiky, hydrodynamiky, elektrodynamiky a elektromagnetismu. Proto jistě nepřekvapí, že se na konci osmdesátých let 19. století stal zakládajícím prezidentem Fyzikálně-technického říšského ústavu (PTR, Physikalisch-Technischen Reichsanstalt) v Berlíně-Charlottenburgu. Činnost tohoto institutu (dnes: PTB, Physikalisch Technische Bundesanstalt) se týkala přesahů mezi přírodními a technickými vědami; v současné době se PTB soustředí na mezinárodní spolupráci s řadou výzkumných ústavů ve světě především v oblasti přesného měření – metrologie [6, 7].

V roce 1894, krátce po přednáškovém turné v USA, utrpěl Hermann von Helmholtz otřes mozku, ze kterého se úplně nezotavil a pozdější komplikace vedly k jeho úmrtí. Jeden z největších přírodovědců 19. století, který

²⁾Za vázanou energii považuje Helmholtz tu část energie, která je v souladu s definicí entropie dosažitelná jen jako teplo, volnou energii pak představuje ta část vnitřní energie systému, která je „volná“ a lze ji přeměnit na práci. Úbytek volné energie během izotermického děje tedy odpovídá práci vykonané soustavou [6].

svými poznatky propojil fyziku, lékařství a chemii, tak zemřel v Charlottenburgu několik dní po svých 73. narozeninách, 8. září 1894. Je po něm pojmenováno sdružení vědeckých ústavů v Německu.

Literatura

- [1] *Helmholtz, H.*: Über die Erhaltung der Kraft, eine physikalische Abhandlung, vorgetragen in der Sitzung der physikalischen Gesellschaft zu Berlin am 23sten Juli 1847. Druck und Verlag von G. Reimer, Berlin, 1847 [cit. 2. 1. 2021]. Dostupné na: edoc.hu-berlin.de/bitstream/handle/18452/1030/h260_helmholtz_1847.pdf.
- [2] *Helmholtz, H.*: Beschreibung eines Augenspiegels zur Untersuchung der Netzhaut im lebenden Auge. A. Förstner'sche Verlagsbuchhandlung, Berlin, 1851 [cit. 3. 1. 2021]. Dostupné na: reader.digitale-sammlungen.de//de/fs1/object/display/bsb10861264_00005.html.
- [3] *Bartuněk, J.*: Fyzikální principy přístrojů v optometrii. Bakalářská práce, UP, Olomouc, 2014 [cit. 2. 1. 2021]. Dostupné na: theses.cz/id/19lg4i/Bakalsk_prce.pdf.
- [4] *Helmholtz, H.*: Handbuch der Physiologischen Optik. Leopold Voss, Leipzig, 1867 [cit. 3. 1. 2021]. Dostupné na: archive.org/details/handbuchderphysi00helm/page/n5/mode/2up.
- [5] *Helmholtz, H.*: Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik. Vieweg, Braunschweig, 1863 [cit. 3. 1. 2021]. Dostupné na: www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/2716269.
- [6] Hermann von Helmholtz (1821–1894) – Biography – MacTutor History of Mathematics. [cit. 20. 12. 2020]. Dostupné na: mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Helmholtz/.
- [7] Physikalisch-Technische Bundesanstalt [cit. 3. 1. 2021]. Dostupné na: www.ptb.de/cms/en.html.

Strojové učení a deep learning

PETR OSIČKA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Deep learning je soubor metod z důležité oblasti umělé inteligence s mnoha aplikacemi – strojového učení. Metody strojového učení umožňují počítačovým programům zlepšovat se ve své činnosti s tím, jak získávají zkušenosti. To se hodí zejména v situacích, kdy je obtížné pro danou úlohu najít přesný algoritmus, který by spolehlivě fungoval. Takto obtížné jsou například úlohy, které lidé řeší intuitivně správně: rozpoznávání objektů na obrazcích, rozpoznání nálady člověka podle obličeje apod. Metody deep learning jsou specifické tím, že doménu úlohy, kterou řeší, reprezentují jako hierarchii konceptů, ve které jsou komplikované koncepty tvořeny jako kombinace jednodušších, a abstraktnější koncepty jako kombinace těch méně abstraktních. Jméno deep learning se odvozuje od toho, že tato hierarchie má mnoho vrstev. Deep learning zažil v několika minulých letech velký boom, díky novým algoritmům, specializovanému hardwaru i možnosti provádět výpočty na grafických kartách. Mezi významné aplikace, které se dostaly do povědomí veřejnosti, patří zejména ty zabývající se analýzou obrazových dat: automatické řízení automobilu, případně automatické úpravy obrázků a videa, například takzvané deepfakes.

V článku se budeme nejdříve zabývat strojovým učením obecně. Uvedeme, jaké typy úloh lze pomocí strojového učení řešit, a na jaké problémy přitom můžeme narazit. Krátce představíme i dva konkrétní příklady metod strojového učení – lineární regresi a rozhodovací stromy. Nakonec popíšeme jednu metodu strojového učení, kterou můžeme zařadit do deep learning a na ní ukážeme, v čem je deep learning v rámci strojového učení specifický.

1. Strojové učení

Nejdříve se pokusíme definovat, co to znamená, že se počítačový program učí ze zkušeností. Definice to bude velmi obecná, nicméně všechny její části ve zbytku článku upřesníme.

Řekneme, že se počítačový program řešící nějakou úlohu učí ze zkušeností, pokud se výkon tohoto programu měřený pomocí nějaké metriky P zlepšuje s tím, jak program získává zkušenosti.

Nejdříve si ujasníme, jaký typ úloh může program schopný se učit řešit.

Klasifikace Programu předložíme nějaký objekt a program rozhodne, do které z konečného počtu kategorií daný objekt patří. Program tak většinou počítá funkci $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$. Objekt na vstupu je popsán pomocí vektoru n reálných čísel a kategorie jsou očíslovány pomocí $1, 2, \dots, k$. Příkladem klasifikační úlohy je určení, který z k předmětů se nachází na fotografii, či zda se daný předmět na fotografii nachází nebo ne (v tomto případě máme pouze dvě kategorie – ano a ne). V tomto konkrétním příkladě jsou vstupem algoritmu hodnoty barevných složek jednotlivých pixelů fotografie. Dalším příkladem je filtrování spamu, kdy je vstupem text mailu a program podle něj rozhodne, jestli je mail spam. Variantou klasifikace je klasifikace s chybějícími hodnotami, kdy vstupní objekt není popsán úplným vektorem reálných hodnot, ale některé hodnoty chybí. Taková úloha se může vyskytnout například ve zdravotnictví. Chtěli bychom, aby program pro predikci diagnózy pacienta na základě výsledků jeho testů byl schopen fungovat, i když výsledky některých testů nemá k dispozici.

Regrese Úloha regrese je velmi podobná klasifikaci. Liší se pouze v tom, že výsledek programu nemusí být jedno z předem určené konečné množiny čísel, ale libovolné reálné číslo. Program tedy realizuje funkci $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Příkladem regresní úlohy je predikce budoucí ceny nějaké komodity (regrese je využívána například v algoritmickém obchodování) nebo predikce toho, kolik klient přinese bance nebo pojišťovně zisku.

Strukturovaný výstup Program převádí vstupní objekt na jiný objekt, který není číslem, ale má komplikovanější strukturu. Mezi úlohy se strukturovaným výstupem patří například transkripce, při níž převádíme vstupní objekt do textové podoby. Příkladem jsou strojové rozpoznávání znaků (OCR), rozpoznávání SPZ na fotografiích automobilů, rozpoznávání

popisných čísel z fotografií domů (prováděno například v programu Google Street View), převod mluveného slova na text či do jiné srozumitelné podoby. Zajímavé jsou i úlohy, kdy převádíme textová data opět na text, například automatický překlad mezi různými přirozenými jazyky (příkladem je Google Translate). Počítačové zpracování přirozeného jazyka je jednou z oblastí, kde metody strojového učení nachází nejvíce uplatnění.

Detekce anomálií Program prochází sekvencí objektů a označí objekty, které jsou pro danou sekvenci netypické. Pokud se například program naučí rozpoznávat obvyklé chování majitele kreditní karty, může při jejím zneužití upozornit banku na nezvyklé chování. Banka pak může kartu zablokovat, kontaktovat majitele apod.

Syntéza a vzorkování Programu předložíme množinu dat a pak chceme, aby generoval (náhodná) data podobná těm, která jsme mu předložili. Takový program se potom hodí v situacích, kdy potřebujeme generovat velké množství dat, jejichž ruční vytvoření by bylo nákladné nebo zdlouhavé. Například pro generování textur velkých objektů v počítačových hrách, generování náhodných obrázků apod. Do této kategorie můžeme také zařadit řečovou syntézu, kdy počítač podle předloženého textu vytváří mluvenou podobu daného textu.

Doplnění chybějících hodnot Programu předložíme data, ve kterých některé hodnoty chybí, a chceme, aby program chybějící hodnoty doplnil. Na rozdíl od úlohy klasifikace není pevně dáno, co má program predikovat. Doplnňování chybějících hodnot lze využít například v doporučovacích systémech. Například při doporučování knih bychom chtěli uživateli doporučit knihu, která se mu bude líbit, ale kterou ještě nečetl. V datech zachycujících hodnocení knih uživateli je to, jak se mu dosud nepřečtená kniha bude líbit, jistě chybějící hodnota.

Ve zbytku článku se pro jednoduchost zaměříme jenom na úlohy klasifikace a regrese.

2. Učení, model

Počítačový program může získat zkušenosti (tedy něco se naučit) pomocí učicího algoritmu z předložených trénovacích dat – množiny příkladů, ze kterých chceme, aby se program učil. Budeme předpokládat, že každý

příklad je vyjádřen jako vektor reálných čísel

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Jednotlivým položkám $\mathbf{x}$ říkáme vlastnosti či atributy (anglicky features, attributes). V konkrétních aplikacích je nutné je nějakým způsobem získat ze skutečných objektů, kterými se zabýváme. Pokud se například jedná o lékařská data, kde jsou skutečnými objekty pacienti, může být v trénovacích datech pacient reprezentován jako vektor složený z pacientova tlaku, teploty apod., tedy z čísel, která jsme schopni získat pomocí lékařských testů. V úlohách klasifikace a regrese je potom každý příklad doplněn správným výsledkem. Připomeňme, že v případě klasifikace je výsledkem jedno z konečného počtu čísel, která odpovídají třídám, do kterých objekty klasifikujeme. V případě regrese je správným výsledkem libovolné reálné číslo. Úkolem učicího algoritmu je přečíst trénovací data a nějakým způsobem odvodit a zapamatovat si správný vztah mezi příklady a správnými výsledky. Učení, které pracuje takovým způsobem, říkáme učení s učitelem (anglicky supervised learning). Existují i jiné druhy učení, které jsou potřeba pro jiné úlohy než klasifikace a regrese. Učení bez učitele zpracovává data, která neobsahují správné výsledky (pojem správný výsledek v daném kontextu nedává vůbec smysl). Cílem algoritmu je naučit se vnitřní strukturu dané tréninkové množiny, která se poté dá využít; například při syntéze objektů podobných těm z trénovací množiny, při hledání anomálií apod. Posledním význačným typem učení je tzv. reinforcement learning. Při něm učicímu algoritmu nestačí pouze přečíst trénovací data, ale navíc neustále komunikuje se svým okolím a z této komunikace se dále učí. Například program pro hraní deskové hry Go, který nedávno porazil nejlepší lidské hráče, se Go naučil hrát tím, že hrál sám se sebou. Pro učení využil informace o tom, které strategie byly v těchto partiích úspěšné.

Protože se ve zbytku článku chceme zabývat klasifikací a regresí, zaměříme se pouze na učení s učitelem.

Soubor informací o tom, jakým způsobem si program pamatuje to, co se naučil, a jakým způsobem to pak využije ke klasifikaci či regresi (tedy jakým způsobem program provede výpočet, kdy pro daný vstup spočítá výstup: klasifikační třídu nebo reálné číslo) označujeme jako *model*. Obecně můžeme model definovat jako funkci

$$y = f(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}),$$

kde $\boldsymbol{\theta}$ jsou tzv. parametry modelu. Pomocí hodnoty parametrů si model pamatuje, co se naučil. Obecně o $\boldsymbol{\theta}$ a f více říct nemůžeme. U konkrétního

modelu ovšem obojí musíme přesně specifikovat: musíme říci, jaké parametry model má, a musíme říci, jak f pro dané θ a x spočítá y . Úlohou učicího algoritmu pak je na základě trénovacích dat vhodné θ nalézt.

Jaké θ chceme, aby učicí algoritmus vrátil? Pro začátek se spokojíme s tím, aby model správně klasifikoval (či počítal regresi pro) příklady z trénovacích dat. Samotné učení většinou probíhá tak, že zavedeme tzv. chybovou funkci zachycující jak dobře (resp. špatně) model pro konkrétní θ na trénovacích datech funguje. Hodnoty parametrů poté upravujeme s cílem chybovou funkci minimalizovat.

3. Lineární regrese

Lineární regrese je model pro úlohu regrese. Model je dán jako

$$y = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x},$$

kde jsou parametry modelu dány vektorem $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je vstup, a $y \in \mathbb{R}$ je pak výsledek. Pomocí $\cdot$ značíme skalární součin vektorů. Jednotlivé složky vektoru $\mathbf{w}$ můžeme interpretovat jako váhy, jaké přikládáme jednotlivým složkám $\mathbf{x}$. Pokud je váha některé složky $\mathbf{w}$ vysoká, má změna příslušné složky $\mathbf{x}$ velký vliv na hodnotu y . Příklad modelu můžeme nalézt na obr. 1.

Přesnost modelu měříme pomocí střední kvadratické chyby (anglicky mean squared error, zkratka MSE). Předpokládejme, že trénovací množina je složena z m dvojic ve tvaru $(\mathbf{x}, y)$, kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ je trénovací příklad a $y \in \mathbb{R}$ je očekávaná správná odpověď. Technicky se nám bude hodit, když příklady uspořádáme do matice $\mathbf{X}$ o rozměrech $m \times n$ tak, že řádky $\mathbf{X}$ odpovídají jednotlivým příkladům. Jim odpovídající správné odpovědi uspořádáme do vektoru $\mathbf{y}$. Výsledky, které model spočítá pro jednotlivé příklady, pak shromáždíme do vektoru $\bar{\mathbf{y}}$, tak že i -tá složka $\bar{\mathbf{y}}$ je výsledek, který dá model pro i -tý příklad. Hodnotu MSE potom spočítáme jako

$$\text{MSE}(\mathbf{w}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y})_i^2.$$

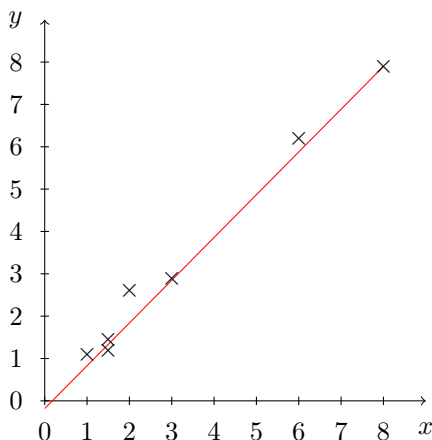
(indexem i tu označujeme i -tou složku vektoru $\bar{\mathbf{y}} - \mathbf{y}$). Vidíme, že čím více se složky vektoru $\bar{\mathbf{y}}$, tedy výsledky spočítané modelem, liší od příslušných složek vektoru $\mathbf{y}$, tedy od správných výsledků, tím je $\text{MSE}(\mathbf{w})$ větší. Také si všimněme, že MSE uvažujeme jako funkci závislou na vektoru vah a na obsahu trénovací množiny. Při učení je ovšem trénovací množina fixní.

Trénovací množina

x	y
1	1.1
1.5	1.2
2	2.6
3	2.9
6	6.2
8	7.9

Model a jeho přesnost

Model:	$y = 1.0129 \cdot x - 0.181$
MSE:	0.086



Obr. 1 Naučený model lineární regrese. Příklady z trénovací množiny jsou reálná čísla. Model i trénovací množina je zachycena pomocí grafu vpravo. Symboly $\times$ značí jednotlivé příklady z trénovací množiny, červená přímka odpovídá naučenému modelu. Přesněji, je to množina bodů (x, y) , pro které platí rovnost $y = 1.0129 \cdot x - 0.181$.

Učící algoritmus pro lineární regresi má za cíl najít takový vektor $\mathbf{w}$, který minimalizuje $\text{MSE}(\mathbf{w})$. Za tímto účelem hledáme takový vektor, pro který je gradient MSE nulový. Matematicky zručný čtenář by jistě po chvíli počítání přišel na to, že v takovém případě musí platit

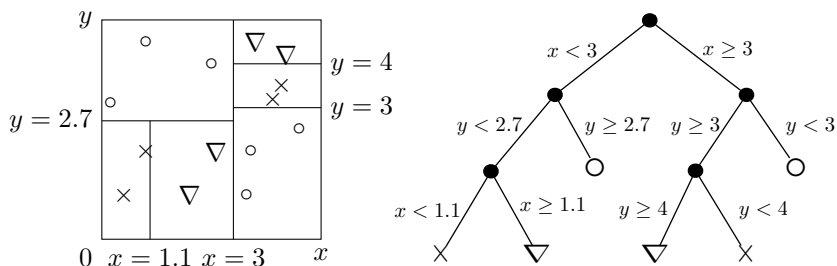
$$\mathbf{w} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}.$$

Do posledního řádku dosadíme za $\mathbf{X}$ a $\mathbf{y}$ (tedy dosadíme data z trénovací množiny) a spočítáme vzniklé normálové rovnice (jak rovnice vyřešit z prostorových důvodů vynecháme).

Nakonec poznamenejme, že lineární regrese je ve skutečnosti dána

$$y = \mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b,$$

kde $b \in \mathbb{R}$ je další parametr, kterému říkáme *bias*. Model pořád počítá lineární funkci, jenom nyní nemusí procházet počátkem. Pro nulový vektor model spočítá hodnotu b , nikoliv 0.



Obr. 2 Příklad rozhodovacího stromu. Trénovací množina, jejíž příklady jsou tvořeny body z $\mathbb{R}^2$, je zobrazena vlevo. Body klasifikujeme do tří tříd označených symboly $\times$, ∇ a $\circ$. Příslušný rozhodovací strom je zobrazen vpravo. Z obrázků lze vyčíst intuici na pozadí tohoto příkladu. Každému dělicímu uzlu ve stromu odpovídá jeden z obdélníků na obrázku vlevo a úsečka, která tento obdélník rozděluje na dva podobdélníky. Každý z podobdélníků odpovídá jedné hraně vedoucí z uzlu do jeho potomků. Při klasifikaci začínáme s celým obdélníkem. Při přechodu do potomka aktuálního uzlu si pak vybíráme obdélník, pro který je podmínka na příslušné hraně ve stromu pravdivá. Náš rozhodovací strom je binární, to obecně nemusí platit.

4. Rozhodovací stromy

Rozhodovací strom je model určený pro klasifikaci. Je schopen zpracovat jak numerické tak kategorické atributy. Kategorický atribut je takový atribut, který může nabývat pouze konečného počtu různých hodnot. Rozhodovací strom je kořenový strom, který obsahuje dva typy uzlů. Prvním typem uzlu je list. Každý list v rozhodovacím stromu má přiřazenu jednu klasifikační třídu, přičemž ale může mít více listů přiřazenu stejnou třídu. Zbývající uzly stromu, tj. vnitřní uzly a kořen, nazýváme dělicí uzly. Každý z nich má přiřazen jeden atribut z trénovací množiny. Každé z hran vedoucích z dělicího uzlu do jeho potomků je přiřazena jedna logická podmínka, jejíž pravdivost závisí na hodnotě atributu, který je dělicímu uzlu přiřazen. Přitom pro každou hodnotu tohoto atributu musí být pravdivá právě jedna z podmínek. Při klasifikaci procházíme strom od kořene do listu, výsledkem je pak třída, která je cílovému listu přiřazena. Přitom v každém dělicím uzlu vyhodnotíme podmínky přiřazené hranám vedoucím do jeho potomků a přejdeme do potomka, který odpovídá hraně, jejíž podmínka je pro klasifikovaný vektor pravdivá. Víme, že takový potomek je vždy právě jeden a průchod stromem je tedy jednoznačný.

Kvalitu rozhodovacího stromu můžeme určit pomocí dvou kritérií. Samozřejmě chceme, aby strom co nejlépe klasifikoval (tedy vracel co nejvíce správných výsledků). Chceme ale také, aby strom nebyl příliš velký.

Učící algoritmy, které na základě trénovací množiny rozhodovací strom sestaví, vycházejí z následující myšlenky. Strom je konstruován postupně od kořene k listům pomocí procedury SPLIT. Vstupem této procedury je trénovací množina, jejím výsledkem je rozhodovací strom. Procedura nejdříve vytvoří nový uzel a rozhodne, jestli bude listovým uzlem. Pokud ano, přiřadí mu příslušnou třídu a vrátí ho jako výsledek. Pokud není uzel listovým, nalezne vhodný atribut, který vytvořenému uzlu přiřadí, určí počet potomků a navrhne vhodné podmínky pro hrany do těchto potomků vedoucích. Pro každou z těchto podmínek rekurzivně zavolá SPLIT s argumentem rovným té části tréninkové množiny, pro niž je podmínka pravdivá. Kořen stromu, který toto rekurzivní volání vrátí, pak připojí jako potomka aktuálního uzlu.

Konkrétní učící algoritmy se liší především ve způsobu nalezení vhodného dělicího atributu, počtu potomků a jim odpovídajících podmínek. Vysvětlení konkrétního algoritmu je mimo rozsah článku, uvedeme tedy alespoň jména nejznámějších algoritmů. Jsou to ID3, C4.5, CART, CHAID, MARS. Pokročilejší algoritmy během konstrukce stromu provádějí různé optimalizace, vypouštějí části stromu, které příliš nezhorší klasifikační chybu apod.

5. Přeučení a nedoučení

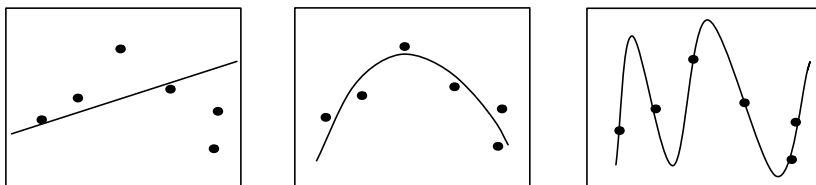
V předchozích kapitolách jsme přesnost naučeného modelu testovali na datech z trénovací množiny. Ve skutečnosti ovšem model učíme kvůli tomu, abychom uměli klasifikovat příklady, které se v tréninkové množině nevyskytují, tedy kvůli jeho schopnosti *generalizovat*. Pro další úvahy tedy musíme rozlišovat trénovací chybu a testovací chybu. Trénovací chyba je chybou, kterou měříme na příkladech z trénovací množiny, kdežto testovací chybu měříme na datech, které do trénovací množiny nepatří. Vztah mezi oběma typy chyb je předmětem bádání v oblasti nazývané *statistická teorie učení* (anglicky statistical learning theory). Abychom byli schopni něco rozumného říci, musíme zavést předpoklady o trénovacích a testovacích datech. Předpokládáme, že trénovací i testovací příklady vzorkujeme se stejným pravděpodobnostním rozložením, a že jednotlivé příklady jsou na sobě nezávislé. Po chvilce uvažování zjistíme, že očekávaná tréninková chyba by měla být menší než očekávaná testovací chyba. Po rozumném

učícím algoritmu tedy chceme, aby měl malou trénovací chybu a současně malý rozdíl mezi trénovací a testovací chybou. Pokud má model po naučení velkou trénovací chybu, říkáme o něm že je *nedoučený* (anglicky underfitted). Pokud má malou trénovací chybu, ale velký rozdíl mezi tréninkovou a testovací chybou, je model *přeučení* (anglicky overfitted).

Nedoučenost a přeučení souvisí s *kapacitou* modelu, mírou toho jak složitá data je schopen se model naučit. Hlavní složku kapacity tvoří velikost množiny funkcí, které je model pro rozsah hodnot svých parametrů schopen počítat – tzv. *prostor hypotéz*. Například u lineární regrese tvoří prostor hypotéz lineární funkce. Pokud bychom však uvažili polynomický model stupně s jako

$$y = b + \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{x}^1 + \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{x}^2 + \dots + \mathbf{w}_s \cdot \mathbf{x}^s$$

(index $\mathbf{w}$ nyní čísluje vektory, nikoli složky vektorů, položky vektoru $\mathbf{x}^c$ jsou c -té mocniny položek vektoru $\mathbf{x}$), vidíme, že se zvyšujícím se s ostře roste i prostor hypotéz. Kapacita modelu by měla odpovídat složitosti dat. Pokud je kapacita modelu menší, než je potřeba, dojde k nedoučení – model se není schopen naučit ani tréninkovou množinu. Pokud je naopak kapacita modelu příliš vysoká, může dojít k přeučení. Příklad tohoto fenoménu je na obr. 3. Podotkněme také, že kapacita modelu záleží nejenom na prostoru hypotéz, ale i na schopnosti učícího algoritmu nalézt v tomto prostoru tu správnou funkci.



Obr. 3 Kapacita, přeučení a nedoučení. Trénovací příklady jsou vybrány tak, aby ležely přibližně na kvadrance. Lineární regrese na obrázku vpravo není schopna se naučit s malou trénovací chybou. Kvadratická funkce uprostřed odpovídá složitosti úlohy, má malou trénovací i testovací chybu. Polynom vysokého stupně na obrázku vpravo je schopen se naučit s malou trénovací chybou, testovací chybu má ovšem velkou.

Na závěr kapitoly ještě uvedeme dva význačné výsledky, které statistická teorie učení přinesla. První lze bez technických podrobností formulovat následovně: *Rozdíl mezi trénovací a testovací chybou lze seshora ome-*

zit kvantitou, která roste s kapacitou modelu. Tato kvantita nicméně klesá s počtem příkladů v tréninkové množině. Pokud tedy dochází k přetrénování, můžeme se situaci pokusit vyřešit rozšířením tréninkové množiny. Druhý výsledek je tzv. No free lunch theorem, který říká, že *pokud uvážíme průměr přes všechna pravděpodobnostní rozdělení dat, pak všechny učicí algoritmy vedou ke stejné testovací chybě*. Tedy v jistém smyslu neexistuje žádný nejlepší učicí algoritmus. Naštěstí v praxi vždy pracujeme s daty, která odpovídají konkrétnímu pravděpodobnostnímu rozdělení a tomuto rozdělení můžeme učicí algoritmy přizpůsobit.

6. Deep learning

Připomeňme, že deep learning je kolekce metod, které komplexní data reprezentují jako hierarchii konceptů, v níž složitější, abstraktnější koncepty tvoříme z jednodušších, méně abstraktních konceptů. V této kapitole popíšeme nejpopulárnější model z této kategorie – *dopřednou vícevrstvou neuronovou síť*, někdy také nazývanou *vícevrstvý perceptron*.

Neuronová síť se skládá z (umělých) neuronů, malých jednotek počítajících jednoduchou funkci. Tato funkce přiřazuje vektoru $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ číslo $y \in \mathbb{R}$. Je definovaná (uvážíme-li ji jako model)

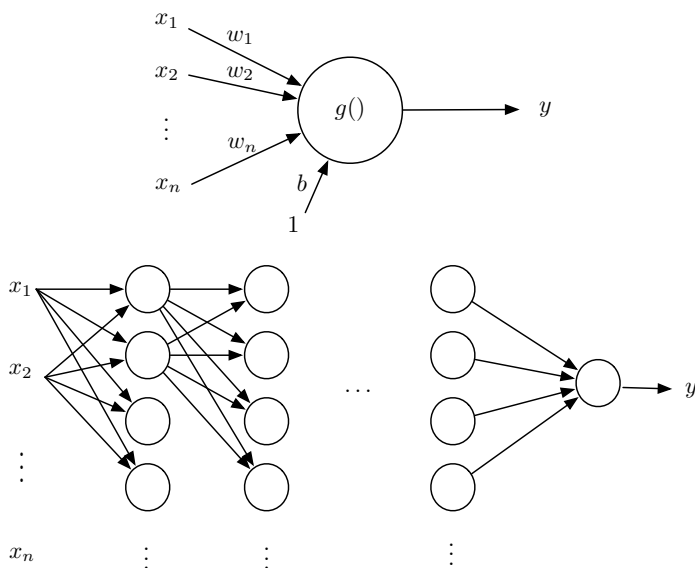
$$f(\mathbf{w}, \mathbf{x}) = g(\mathbf{w} \cdot \mathbf{x} + b).$$

Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ a číslo $b \in \mathbb{R}$ jsou parametry modelu, $\mathbf{w}$ označujeme jako vektor *vah* a b je bias. Připomeňme, že operace $\cdot$ je skalární součin dvou vektorů. Funkce $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je tzv. *aktivační funkce*, výsledné hodnotě říkáme *aktivace* neuronu. Mezi často používané aktivační funkce patří identita $g(x) = x$ (pak je neuron v podstatě lineární regresí), RLU (zkratka anglického rectifier linear unit) $g(x) = \max(0, x)$, a logistická funkce $g(x) = 1/(1 + e^x)$. Grafické znázornění jednoho neuronu lze nalézt na obr. 4.

Umělý neuron je inspirován tím, jak funguje biologický neuron v lidském mozku. Biologický neuron je buňka, která je schopna po synapsích, tj. spojeních s ostatními neurony, přijímat elektrické signály. Tyto signály potom agregovat, spočítat z nich svoji aktivaci a jako elektrický signál ji po synapsích poslat dalším neuronům.

Ve vícevrstvěm perceptronu jsou neurony rozděleny do lineárně uspořádané sekvence vrstev, kde vrstvou myslíme množinu neuronů. Předpokládejme, že máme vrstvy očíslovány čísly $1, 2, \dots, d$. Neurony z jednotlivých

vrstev jsou propojeny tak, aby vektor aktivací neuronů z vrstvy i sloužil jako vstup neuronů ve vrstvě $i + 1$. V poslední vrstvě se nachází pouze jeden vektor. Všechny vrstvy mimo poslední označujeme jako *skryté*. Příklad vícevrstvého perceptronu je na obr. 4 dole.

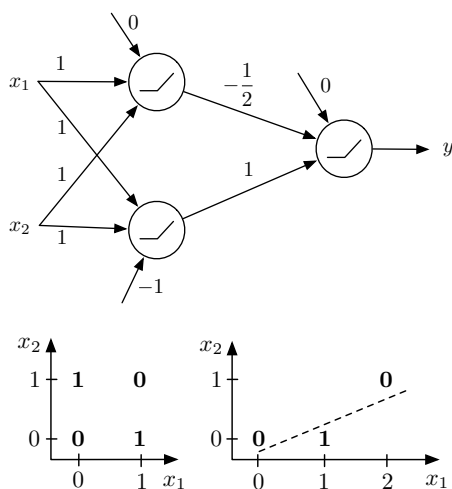


Obr. 4 Grafická reprezentace jednoho neuronu (nahore) a dopředné vícevrstvé perceptronové sítě (dole). Váhy a některé synapse jsou pro přehlednost vynechány.

Při výpočtu vícevrstvý perceptron nejdříve použije vstup celé sítě jako vstup pro všechny neurony první skryté vrstvy, které spočítají svoje aktivace. Ty poté slouží jako vstup pro neurony druhé vrstvy, jejichž aktivace slouží jako vstup neuronů třetí vrstvy. Takto výpočet pokračuje dále až k poslední vrstvě. Aktivace jejího jediného neuronu je pak výstupem celé sítě.

Proč můžeme vícevrstvý perceptron počítat mezi metody deep learning? Pro jednoduchost uvažme situaci, kdy neuron použijeme ke klasifikaci do dvou tříd. To můžeme zařídit tak, že budeme aktivaci neuronu porovnávat s nějakou prahovou hodnotou. Pokud bude aktivace větší, vrátíme první třídu, pokud bude menší, vrátíme druhou třídu. Jeden neuron je scho-

pen správně klasifikovat pouze lineárně oddělitelné množiny vstupů, tj. množiny, ve kterých můžeme všechny příklady patřící do jedné klasifikační třídy oddělit od příkladů patřící do druhé třídy pomocí hyperroviny (připomeňme, že vstupy sítě jsou body v n -rozměrném prostoru). V případě dvourozměrného prostoru, tedy plochy, je hyperrovinou přímka. Z tohoto pohledu může v datech jeden neuron rozpoznávat jenom velmi jednoduché koncepty. Vícevrstvý perceptron toto omezení překonává. Neurony v první vrstvě sice rozpoznávají jednoduché koncepty z trénovacích dat, ale neurony v druhé vrstvě rozpoznávají jednoduché koncepty z aktivací neuronů z první vrstvy a to už nejsou jednoduché koncepty z tréninkové množiny, ale jejich kombinace! Příklad tohoto fenoménu vidíme na obr. 5, který zachycuje dvouvrstvý perceptron, který počítá logickou funkci XOR; jeden neuron to přitom nedokáže. Obecně můžeme říci, že čím hlubší vrstva je, tím složitější koncepty umí v datech rozpoznat. Výsledek celé sítě je spočítán z těch nejsložitějších.



Obr. 5 Dopředná vícevrstvá perceptronová síť počítající funkci XOR (nahore). Jako aktivační funkce je použita RLU. Na dolním grafu zleva vidíme zobrazení funkce XOR ve dvourozměrném prostoru. Snadno vypočítáme, že nelze nalézt přímku tak, aby v tomto prostoru oddělovala hodnoty 0 od hodnot 1. Na vedlejším grafu jsou jednotlivé položky zobrazeny po průchodu skrytou vrstvou sítě. Osa x_1 zachycuje aktivaci horního neuronu, osa x_2 dolního neuronu skryté vrstvy. Vidíme, že nyní lze 0 a 1 oddělit přímkou.

Učící algoritmus pro vícevrstvý perceptron je založen na *gradientní metodě*. Pokud model vyjádříme jako $f(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})$, kde $\boldsymbol{\theta}$ jsou parametry modelu a chybová funkce L , kterou uvažujeme jako závislou na $\boldsymbol{\theta}$, je diferencovatelná (příkladem chybové funkce je například MSE z kapitoly o lineární regresi), pak můžeme spočítat její gradient $\nabla L(\boldsymbol{\theta})$. Ten ukazuje směrem, kterým chybová funkce nejvíce roste, opačným směrem tedy nejvíce klesá. Protože chceme L minimalizovat, „posuneme“ $\boldsymbol{\theta}$ tímto směrem. V algoritmu tedy nejdříve vygenerujeme počáteční parametry $\boldsymbol{\theta}_1$, pak s pomocí trénovací množiny (použijeme buď jeden příklad nebo více příkladů v závislosti na konkrétním modelu a algoritmu) spočteme gradient chybové funkce a s jeho pomocí upravíme parametry modelu vztahem

$$\boldsymbol{\theta}_{i+1} = \boldsymbol{\theta}_i - \mu \nabla L(\boldsymbol{\theta}_i)$$

(μ je učící konstanta určující velikost „posunutí“). V případě vícevrstvého perceptronu lze gradient spočítat metodou, na kterou se lze dívat jako na zpětný výpočet sítě, kterým se vzniklá chyba šíří od nejhlubších vrstev až k první skryté vrstvě. Odtud také název algoritmu – *backpropagation*.

Velkou výhodou vícevrstvého perceptronu je, že jeho dopředný výpočet i učící algoritmus jdou snadno paralelizovat. Výpočty aktivací všech neuronů z jedné vrstvy můžeme totiž počítat v různých vláknech a není je potřeba synchronizovat. Pouze je nutné pomocí bariéry synchronizovat výpočet mezi sousedními vrstvami. V minulých letech se také objevilo několik nových, výpočetně velmi efektivních učících algoritmů. Pro řešení konkrétní úlohy tak lze použít sít s dostatečným počtem skrytých vrstev, kterou lze efektivně učit i používat.

Zájemcům o hlubší informace o deep learning doporučuji knihu [1], která je zdarma přístupná na adrese <http://www.deeplearningbook.org/>.

Literatura

- [1] Goodfellow, I., Bengio, Y., Courville, A.: Deep Learning. MIT Press, 2016. Dostupné z: <http://www.deeplearningbook.org/>.

Vybalancovaný úsek

(Úlohy z MO kategorie P, 41. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V dnešním pokračování našeho dlouhodobého seriálu věnovaného zajímavým problémům z Matematické olympiády kategorie P (programování) se budeme věnovat jedné poměrně snadné úloze z celostátního kola 43. ročníku MO (školní rok 1993/94). Patří do velmi oblíbené a často využívané kategorie úloh typu „práce s posloupnostmi čísel“. Ukážeme si, že i takto jednoduchý problém lze řešit různými způsoby a s různou časovou složitostí. Nejprve se jako obvykle seznámíme s přesným zadáním úlohy.

* * * * *

Souvislý úsek v posloupnosti celých čísel nazveme *vybalancovaným úsekem*, jestliže počet kladných a počet záporných čísel v tomto úseku se sobě rovnají.

Je dáno celé číslo N ($1 \leq N \leq 1\,000\,000$) a posloupnost N celých čísel. Napište program, který určí délku maximálního vybalancovaného úseku v zadané posloupnosti čísel. Při návrhu programu se zaměřte na dosažení co největší rychlosti výpočtu.

Příklad: Pro $N = 10$ a posloupnost čísel 8 6 4 7 -5 -3 2 0 -1 9 bude výsledkem číslo 7, neboť nejdelší vybalancovaný úsek 4 7 -5 -3 2 0 -1 (případně jiný stejně dlouhý vybalancovaný úsek 7 -5 -3 2 0 -1 9) je tvořen sedmi čísly.

* * * * *

Prvky zadané posloupnosti si označíme $a_1, a_2, \dots, a_N$. Pro snazší popis algoritmů si zavedeme pojem *balance* úseku. Balance úseku $a_i, \dots, a_j$ udává, o kolik více je v tomto úseku posloupnosti kladných čísel než záporných. Je-li v nějakém úseku posloupnosti záporných čísel více než kladných, potom balance tohoto úseku má zápornou hodnotu. Všimněte si, že případné nulové prvky posloupnosti se do balance nijak nezapočítávají, ovlivňují ovšem délku úseku. Vybalancovaným úsekem tedy rozumíme takový úsek, který má nulovou bilanci.

Pokud si celou posloupnost čísel uložíme do pole, abychom se mohli k jejím prvkům opakovaně vracet, úloha má primitivní řešení spočívající v otestování všech souvislých úseků dané posloupnosti. Takových úseků existuje $O(N^2)$, neboť N způsoby můžeme zvolit začátek úseku i a pro každou volbu začátku můžeme $O(N)$ způsoby zvolit konec úseku j . Projít úsek $a_i, \dots, a_j$ a spočítat jeho bilanci představuje práci $O(N)$, takže celková časová složitost tohoto triviálního algoritmu je $O(N^3)$.

```

program Vybalancovany_Usek_1;
{kubická časová složitost}

const MaxN = 1000000;
var N: integer;           {počet čísel v posloupnosti}
    A: array [1..MaxN] of integer;   {zadaná posloupnost}
    b: integer;           {balance úseku i..j}
    Max: integer;         {délka max. vybalancovaného úseku}
    i, j, k: integer;

begin
Max:=0;
read(N);
for i:=1 to N do
    read(A[i]);
for i:=1 to N do           {začátek úseku}
    for j:=i to N do       {konec úseku}
        begin
        b:=0;
        for k:=i to j do
            if A[k] > 0 then
                b:=b+1
            else if A[k] < 0 then
                b:=b-1;
            if (b = 0) and (j-i+1 > Max) then
                Max:=j-i+1
        end;

if Max = 0 then
    writeln('Vybalancovany usek neexistuje!')
else
    writeln('Delka maximalniho vybalancovaneho useku: ', Max)
end.

```

Výpočet můžeme urychlit lepší organizací práce. V předchozím řešení jsme ověřovali bilanci každého úseku zvlášť. Známe-li však bilanci nějakého úseku $a_i, \dots, a_j$ a chceme určit bilanci úseku o jeden prvek delšího $a_i, \dots, a_{j+1}$, je zbytečné procházet tento nový úsek celý od začátku. Jednodušší a rychlejší je využít předchozí známou hodnotu balance a pouze ji v konstantním čase upravit podle znaménka přidaného posledního prvku a_{j+1} . V programu tedy budeme postupně N způsoby volit začátek úseku i a pro každou volbu začátku zvolíme $O(N)$ způsoby konce úseku j . Výpočet balance úseku $a_i, \dots, a_j$ provádíme průběžně vždy s využitím známé balance předchozího úseku, jak je popsáno výše. Celková časová složitost takto upraveného algoritmu se tím sníží na $O(N^2)$.

```

program Vybalancovany_Usek_2;
{kvadratická časová složitost}

const MaxN = 1000000;
var N: integer;           {počet čísel v posloupnosti}
    A: array [1..MaxN] of integer;   {zadaná posloupnost}
    b: integer;             {balance úseku i..j}
    Max: integer;           {délka max. vybalancovaného úseku}
    i, j, k: integer;

begin
Max:=0;
read (N);
for i:=1 to N do
    read (A[i]);
for i:=1 to N do           {začátek úseku}
    begin
    b:=0;
    for j:=i to N do       {konec úseku}
        begin
        if A[j] > 0 then
            b:=b+1
        else if A[j] < 0 then
            b:=b-1;
        if (b = 0) and (j-i+1 > Max) then
            Max:=j-i+1
        end
    end
end;

```

```

if Max = 0 then
    writeln('Vybalancovany usek neexistuje!')
else
    writeln('Delka maximalniho vybalancovaneho useku: ', Max)
end.

```

To ovšem stále ještě není časově optimální řešení. Úlohu dokážeme vyřešit s lineární časovou složitostí vzhledem k délce posloupnosti N , postup práce nyní ale bude poněkud odlišný a lišit se bude také způsob uložení dat. Pro každé číslo a_i si nejprve spočítáme bilanci počátečního úseku posloupnosti délky i , tzn. úseku $a_1, a_2, \dots, a_i$. Tento údaj označíme e_i a dodefinujeme hodnotu $e_0 = 0$ (počáteční úsek nulové délky má bilanci 0). Všechny hodnoty $e_1, e_2, \dots, e_N$ dokážeme snadno spočítat při jednom průchodu posloupností v čase $O(N)$, postup jsme si ukázali v předchozím řešení úlohy. Pro každé pořadové číslo prvku posloupnosti i od 1 do N bude jistě platit nerovnost $-i \leq e_i \leq i$.

Všimněte si, že úsek posloupnosti $a_i, \dots, a_j$ je vybalancovaný právě tehdy, když prvky a_{i-1}, a_j mají stejnou e -hodnotu, tj. když platí rovnost $e_{i-1} = e_j$. Hledáme-li maximální vybalancovaný úsek v posloupnosti, stačí tedy nalézt mezi e -hodnotami dvě stejná čísla $e_{i-1} = e_j$ ($1 \leq i \leq j \leq N$) co nejvíce od sebe vzdálená. Jejich vzájemná vzdálenost v posloupnosti pak přímo udává délku maximálního vybalancovaného úseku. Jestliže neexistuje žádná dvojice stejných hodnot $e_{i-1} = e_j$, jsou všechna čísla v posloupnosti kladná nebo všechna záporná. Taková posloupnost tudíž neobsahuje žádný vybalancovaný úsek.

Bylo by jistě možné uložit si všechna čísla e_i do pole a v tomto poli následně vyhledávat dvojice stejných hodnot. Takový postup je ale zbytečně pomalý. Vyhledávání dvojic stejných čísel v poli má kvadratickou asymptotickou časovou složitost, bylo by to vlastně jenom jinak realizované předcházející řešení úlohy. Výhodnější bude ukládat si informace o jednotlivých e -hodnotách „inverzně“. Vytvoříme si pomocné pole F , pro všechna i od 1 do N budeme postupně počítat čísla e_i a pro každou nově získanou e -hodnotu si uložíme do pole F příslušný index i , tzn. položíme $F[e_i] = i$. Údaj $F[m]$ nám tedy říká, kde jsme se setkali poprvé s e -hodnotou m (na kterém indexu posloupnosti). Vzhledem k podmínce $-i \leq e_i \leq i$ musí být pole F indexováno od $-N$ do N . Využívat z něj budeme pouze jistý souvislý úsek s indexy od X do Y . Během zpracovávání prvků posloupnosti se velikost tohoto úseku může zvětšovat. V každém okamžiku zpracování posloupnosti platí, že všechna celá čísla z in-

tervalu $\langle X, Y \rangle$ představují právě všechny e -hodnoty, s nimiž jsme se dosud setkali.

Na začátku výpočtu položíme $X = 0$, $Y = 0$ a $F[0] = 0$, což odpovídá počátečnímu prázdnému úseku posloupnosti s balancí 0. Postupně budeme číst čísla tvořící zadanou posloupnost a zpracovávat je. Po přečtení čísla a_i nejprve spočítáme hodnotu e_i výše uvedeným způsobem na základě zaznamenané předchozí hodnoty e_{i-1} . Jestliže $e_i < X$, musí být nutně $e_i = X - 1$. Zmenšíme tedy X o 1 a zaznamenáme výskyt nové e -hodnoty $F[X] = i$. Podobně pro $e_i > Y$ zvětšíme Y o 1 a uložíme hodnotu $F[Y] = i$. Je-li číslo e_i z intervalu $\langle X, Y \rangle$, pak stejná e -hodnota byla již nalezena někdy dříve, a sice poprvé při zpracování prvku s indexem $F[e_i]$. To ale znamená, že nejdelší vybalancovaný úsek končící prvkem a_i má délku $i - F[e_i]$. Nyní už jenom zbývá porovnat tuto délku s průběžně ukládaným maximem z délek nalezených vybalancovaných úseků.

Popsaný algoritmus je jistě konečný, jediný jeho cyklus se opakuje pro každé číslo zadané posloupnosti, tedy N -krát. Zpracování každého čísla vyžaduje vykonat jen konstantní počet operací, takže celé řešení má lineární časovou složitost vzhledem k N . Oproti oběma pomalejším řešením zde navíc potřebujeme pomocné pole F . Na druhou stranu ale zase ušetříme paměť tím, že posloupnost čísel můžeme zpracovávat průběžně při čtení dat ze vstupu a nemusíme si ji vůbec ukládat do paměti. Správnost algoritmu vyplývá ze skutečnosti, že systematicky prozkoumáme maximální vybalancované úseky končící každým z prvků posloupnosti a z jejich délek vybereme maximum.

```
program Vybalancovany_Usek_3;  
{lineární časová složitost}
```

```
const MaxN = 1000000;  
var N: integer;           {počet čísel v posloupnosti}  
    a: integer;           {právě zpracovávané číslo}  
    i: integer;           {pořadí zpracovávaného čísla}  
    e: integer;           {e-hodnota zpracovávaného čísla}  
    X, Y: integer;        {meze rozsahu nalezených e-hodnot}  
    F: array[-MaxN..MaxN] of integer;  
        {indexy prvních výskytů jednotlivých e-hodnot}  
    Max: integer;         {délka max. vybalancovaného úseku}
```

```
begin  
X:=0; Y:=0;
```

```

F[0]:=0;
e:=0;
Max:=0;

read(N);
for i:=1 to N do
  begin
    read(a);
    if a > 0 then
      e:=e+1
    else if a < 0 then
      e:=e-1;
      if e < X then {nová nejmenší e-hodnota}
        begin X:=X-1; F[X]:=i end
      else if e > Y then {nová největší e-hodnota}
        begin Y:=Y+1; F[Y]:=i end
      else {další výskyt stejné e-hodnoty}
        if i-F[e] > Max then
          Max:=i-F[e]
        end;
      end;
  end;

if Max = 0 then
  writeln('Vybalancovaný úsek neexistuje!')
else
  writeln('Delka maximálního vybalancovaného úseku: ', Max)
end.

```

ZPRÁVY A INFORMACE

Ústřední kolo 70. ročníku MO kategorie A

Jubilejní, 70. ročník Matematické olympiády (MO) byl poznamenán, stejně jako celý vzdělávací systém, epidemií covid-19. Přesto se jej podařilo ústřední komisi matematické olympiády za pomoci krajských a okresních komisí uspořádat. Zde bychom chtěli poděkovat hlavně všem učitelům matematiky základních a středních škol, bez jejichž snahy a úsilí by to v období online výuky vůbec nebylo možné. Všechna kola MO byla uspořádána distanční formou, kdy žáci řešili úlohy samostatně doma.

Ústřední kolo 70. ročníku MO se konalo ve dnech 21.–24. března 2021 a celé proběhlo, stejně jako všechna předcházející soutěžní kola, v distanční formě. Z 318 řešitelů krajských kol kategorie A bylo k účasti pozváno 42 nejlepších řešitelů, kteří v krajském kole získali (po celostátní koordinaci) alespoň 18 bodů. Tito účastníci reprezentovali 23 různých škol z 8 krajů České republiky.

Soutěž zahájili v neděli 21. března předseda ústřední komise MO *doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.*, spolu s předsedkyní Jednoty českých matematiků a fyziků *doc. RNDr. Alenou Šolcovou, Ph.D.*, a děkanem Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze *doc. RNDr.*

Mirko Rokytou, CSc. Jejich online projevy nejen uvítaly účastníky ústředního kola, ale také otestovaly webové prostředí, ve kterém účastníci doma pod dohledem kamer následující dny soutěžili. Pondělí a úterý již byly věnovány vlastní soutěži, kdy každý den řešitelé pět minut před začátkem soutěže obdrželi zadání, poté měli 4,5 hodiny času na řešení úloh a dalších 20 minut na nahrání svých řešení do nově vzniklého systému pro odevzdávání úloh MO (OSMO). Zatímco účastníci mohli spolu komunikovat v online prostředí, na jejich řešení začali pracovat opravovatelé, většinou vítězové předcházejících ročníků MO. Ve středu 24. března byly opravy ukončeny a večer se konalo (opět online) slavnostní vyhlášení výsledků ústředního kola, kde vítěze mimo předsedy MO ocenil také zástupce skupiny ČEZ *Mgr. Martin Máca*.

Dle organizačního řádu MO bylo vyhlášeno sedm vítězů ústředního kola, z nichž dva, *Samuel Rosiar* a *Matouš Šafránek*, oba z G Jana Keplera v Praze 6, získali plný počet 42 bodů. Dále bylo oceněno dvanáct úspěšných řešitelů. Podrobnější výsledky najdete na stránkách <http://www.matematickaolympiada.cz/cs/olympiada-pro-stredni-skoly/70-rocnik-20-21> 70. ročníku Matematické olympiády. Tam také najdete *vzorová řešení* soutěžních úloh, jejichž zadání uvádíme níže.

První soutěžní den

(22. března 2021)

1. Zlomek s 1010 políčky v čitateli a 1011 políčky ve jmenovateli slouží jako hrací plán pro hru dvou hráčů.

$$\frac{\square + \square + \dots + \square}{\square + \square + \dots + \square + \square}$$

Hráči se střídají v tazích. V každém tahu hráč vybere jedno z čísel 1, 2, ..., 2021 a vloží ho do libovolného prázdného políčka. Každé číslo přitom může být použito jen jednou. Začínající hráč vyhrává, jestliže se hodnota zlomku po zaplnění všech políček liší od čísla 1 o méně než 10^{-6} . V opačném případě vyhrává druhý hráč. Rozhodněte, který z hráčů má vítěznou strategii.

2. Označme I střed kružnice vepsané pravoúhlému trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu A . Dále označme jako M a N středy úseček AB a BI . Dokažte, že přímka CI je tečnou kružnice opsané trojúhelníku BMN .

3. Navzájem různá nenulová reálná čísla a , b , c splňují množinovou rovnost

$$\{a + b, b + c, c + a\} = \{ab, bc, ca\}.$$

Dokažte, že platí rovněž rovnost

$$\{a, b, c\} = \{a^2 - 2, b^2 - 2, c^2 - 2\}.$$

Druhý soutěžní den

(22. března 2021)

4. Najděte všechna přirozená čísla n , pro která platí rovnost

$$n + d(n) + d(d(n)) + \dots = 2021,$$

kde $d(0) = d(1) = 0$ a pro $k > 1$ je $d(k)$ superdělitel čísla k (tj. jeho největší dělitel d s vlastností $d < k$).

5. Řetězec znaků nazveme *úhledným*, má-li sudou délku a jeho první polovina je shodná s druhou polovinou (např. *abab*). Řetězec nazveme *pěkným*, pokud ho lze rozdělit na několik úhledných řetězců (jako *abcabcdedeff* na *abcabc*, *dede* a *ff*). Redukcí řetězce nazveme operaci, při které z řetězce smažeme dva stejné sousední znaky (např. řetězec *abbac* lze zredukovat na *aac* a ten dále na *c*). Dokažte, že libovolný řetězec obsahující každý svůj znak v sudém počtu lze získat sérií redukci z vhodného pěkného řetězce.

6. Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC . Pro každý jeho vnitřní bod X označme X_a , X_b , X_c jeho obrazy v osovéch souměrnostech po řadě podle přímk BC , CA , AB . Dokažte, že všechny trojúhelníky $X_aX_bX_c$ mají společný bod.

Pavel Calábek

10. evropská dívčí MO (EGMO)



Organizace jubilejního 10. ročníku Evropské dívčí MO (EGMO), který se tradičně konal v polovině dubna letošního roku, se ujala Gruzie. Vlastní soutěž se konala (stejně jako v loňském roce) distanční formou, kdy všechny soutěžící řešily zadané úlohy ze svých domovů. Organizátoři soutěže v gru-

zínském Kutaisi se snažili zajistit pro online soutěž co nejregulárnější podmínky, kdy všechny soutěžící pracovaly pod dozorem kamer. Soutěžními dny byly neděle 11. dubna a pondělí 12. dubna 2021. Po oba soutěžní dny byly reprezentantkám jednotlivých zemí předloženy vždy tři náročné soutěžní úlohy. Za bezchybné vyřešení každé z nich mohly soutěžící získat 7 bodů.

Desátého ročníku soutěže se zúčastnil dosud rekordní počet soutěžících – celkově 213 z 55 zemí všech kontinentů (z toho 37 evropských zemí). Nechyběla mezi nimi tradičně i silná mimoevropská družstva USA, Kanady, Austrálie, Japonska, Brazílie, Mexika a další.

České reprezentační družstvo středoškolaček se této soutěže zúčastnilo již po šesté. Reprezentační čtveřice dívek byla definitivně vybrána na základě výsledků v krajském kole kategorie A (v 70. ročníku MO), a to bezprostředně po ukončení centrální koordinace úloh v rámci celé České republiky. Oproti předešlým dvěma letům, kdy jsme se museli obejít bez maturanek, kumulace maturitních písemek a 10. EGMO letos odpadla. Tím vznikla možnost účasti v této mezinárodní soutěži i pro naše maturantky. Místa v reprezentaci si nakonec vybojovala následující čtveřice dívek: *Adéla Heroudková* (7/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše), *Vendula Onderková* (7/8, G Jakuba Škody, Přerov), *Klára Pernicová* (8/8, G Brno, tř. Kpt. Jaroše) a *Adéla Karolína Žáčková* (8/8, G Ch. Dopplera, Praha 5). Vedoucími české delegace byli *Mgr. Pavel Šalom* a bývalá úspěšná olympionička *Lenka Kopfová*.

České družstvo si vedlo v silné mezinárodní konkurenci soutěži velmi dobře. Poprvé se tak stalo, že všechny čtyři naše dívky vybojovaly na EGMO medaili, když svorně získaly bronzové medaile. To svědčí o vyrovnanosti českého výběru pro tuto soutěž. Nejlepší z našich dívek – Kláře Pernicové unikla přitom stříbrná medaile o jediný bod, když získala celkově 13 bodů. Ostatní tři dívky se vešly do bodového intervalu pro získání bronzové medaile (letos to bylo 8–13 bodů) následovně: Adéla Heroudková (10 b.), Adéla Karolína Žáčková (9 b.) a Vendula Onderková (8 b.). Každá z dívek přitom vyřešila bezchybně právě jednu soutěžní úlohu (první tři jmenované dívky úlohu č. 1 a poslední z nich úlohu č. 4). Podrobnější informace o 10. ročníku EGMO najdou zájemci na stránkách <https://www.egmo.org/>.

Příští 11. ročník EGMO se bude konat od 6. do 12. dubna 2022 v maďarském Egeru. Pevně věříme, že i v Maďarsku si naše dívky povedou stejně dobře jako v letošním ročníku.

Dále uvádíme texty všech soutěžních úloh zadaných na 10. EGMO.

1. soutěžní den (11. 4. 2021)

Úloha 1

Číslo 2021 je *bombastické*. Pokud je libovolné číslo z množiny

$$\{m, 2m + 1, 3m\}$$

bombastické pro nějaké přirozené číslo m , potom jsou všechna čísla z této množiny bombastická. Plyne z toho, že číslo 2021²⁰²¹ je bombastické?

(Austrálie)

Úloha 2

Najděte všechny funkce $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ takové, že rovnice

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2$$

platí pro všechna racionální čísla x a y .

Symbol $\mathbb{Q}$ zde značí množinu všech racionálních čísel.

(Slovensko)

Úloha 3

Je dán trojúhelník ABC s tupým úhlem při vrcholu A . Necht' E a F jsou v tomto pořadí průsečíky osy vnějšího úhlu při vrcholu A s výškami v trojúhelníku ABC z vrcholů B a C . Na úsečkách EC a FB zvolme po řadě body M a N tak, aby platilo $|\angle EMA| = |\angle BCA|$ a $|\angle ANF| = |\angle ABC|$. Dokažte, že body E , F , N , M leží na téže kružnici.

(Ukrajina)

2. soutěžní den

(12. 4. 2021)

Úloha 4

V trojúhelníku ABC označme I střed kružnice jemu vepsané a zvolme libovolný bod D na straně BC . Označme E průsečík kolmice k BI procházející bodem D s přímkou CI . Dále označme F průsečík kolmice k CI procházející bodem D s přímkou BI . Dokažte, že obraz bodu A v osové souměrnosti podle přímky EF leží na přímce BC .

(Austrálie)

Úloha 5

V rovině zvolme bod O , který nazveme počátek. Necht' P je množina 2021 bodů v této rovině takových, že

- (i) žádné tři body z množiny P neleží na jedné přímce a
- (ii) žádné dva body z množiny P neleží na přímce procházející počátkem.

Trojúhelník s vrcholy v množině P nazveme *tlustý*. Určete maximální počet tlustých trojúhelníků.

(Rakousko)

Úloha 6

Existuje celé nezáporné číslo a , pro které má rovnice

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

více než milion různých řešení (m, n) , kde m, n jsou přirozená čísla?

Výraz $\lfloor x \rfloor$ označuje dolní celou část reálného čísla x . Tedy $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor 22/7 \rfloor = 3$, $\lfloor 42 \rfloor = 42$ a $\lfloor 0 \rfloor = 0$.

(Rakousko)

Jaroslav Švrček

Celostátní kolo 62. ročníku FO

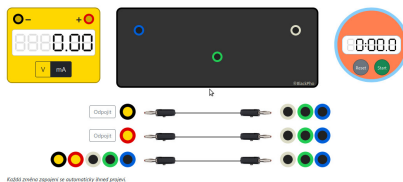
Ve školním roce 2020/2021 proběhl 62. ročník Fyzikální olympiády on-line v souvislosti s protiepidemickými opatřeními a omezeními kvůli šíření koronaviru COVID-19. Nevyhnulo se tomu ani celostátní kolo (naplánované původně do Plzně). Z krajských kol, která proběhla ve středu 20. 1. 2021 postoupilo 50 soutěžících, z nichž 47 se nakonec do on-line soutěže zapojilo (z toho 3 dívky). Celostátní kolo proběhlo bez jakéhokoli doprovodného programu, v obvyklém rozsahu se vzdáleně realizovala „pouze“ soutěž samotná.

Ve středu 10. 3. dopoledne od 8.30 do 13.30 čekaly na soutěžící čtyři teoretické úlohy. Autorem první, nejtěžší z nich, s názvem *Čtyřstěn s cívkami* byl *RNDr. Jan Thomas* (První české gymnázium Karlovy Vary). Zabývala se zapojením cívek a přechodných dějem, který v obvodu nastane po připojení ke zdroji stejnosměrného napětí a rezistor. Řešitelé za ni získali v průměru 2,4 bodu z deseti možných a podle názoru poroty nejoriginálnější řešení vypracoval *Marek Fürst* (G Christiana Dopplera Praha). Druhá úloha s názvem *Měření rychlosti radarem*, kterou navrhl *doc. RNDr. Josef Blažek, CSc.* (Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity v Českých Budějovicích,) kombinovala Dopplerův jev s měřením rychlosti vozidel známým z běžného silničního provozu. Při průměrném zisku 4,1 bodu porota ocenila zejména postup *Tomáše Vítka* (G a Jazyková škola Břeclav). Třetí úloha *Rozpouštění soli*, v níž byli řešitelé nejúspěšnější, studovala teplo spojené s rozpouštěním soli ve vodě, odpovídající zvýšení teploty varu vody i závislost teploty varu na koncentraci soli. Soutěžící dosáhli v průměru 4,6 bodu a nejvíce zaujalo řešení *Robertu Gemrota* (G Havířov-Město, Komenského). Čtvrtá úloha s názvem *Rámeček tažený magnetickým polem* navazovala na studijní text [1], byla věnována magnetické indukci, proudu a prošlému elektrickému náboji při pohybu čtvercového rámečku v magnetickém poli; autorem byl *RNDr. Josef Jíruš* (Gymnázium a obchodní akademie Pelhřimov). Soutěžící získali v průměru 4,2 bodu a porota ocenila jako

nejzdařilejší přístup *Jana Červeňana* (G Jana Pivečky a SOŠ Slavičín). Závěrečnou redakci zadání i autorského řešení úloh provedl *RNDr. Jan Šlégr, Ph.D.* (PřF UHK).

Ve čtvrtek 11. 3. čekala soutěžící experimentální úloha *Elektrická černá skříňka*, která musela být pojata netradičně – studenti měřili vzdáleně prostřednictvím webové aplikace (<https://exp62.fyzikalniolympiada.cz>) (viz obr. 1). K dispozici měli virtuální digitální multimetr a měli za úkol odkrýt obsah černé skříňky se třemi zdírkami. Námět byl převzat Nordicko-Baltické FO (NBPhO, <https://nbpho.ee>), původní úlohu autorské dvojice *Jaan Kalda* a *Mihkel Heidelberg* pro potřeby FO upravil předseda ústřední komise FO *doc. RNDr. Jan Kříž, Ph.D.* (PřF UHK), simulátor vytvořil a naprogramoval *RNDr. Jan Prachař*. Z řešitelů byl nejúspěšnější *Viktor Fukala* (G J. Keplera Praha), který jako jediný získal plný počet 20 bodů, průměrný bodový výsledek byl 12,4 bodu.

Experimentální úloha 62. ústředního kola FO



Obr. 1 Rozhraní on-line experimentální úlohy

Uveďme základní statistické údaje celostátního kola: jedenáct účastníků se stalo vítězi, dvacet dva úspěšnými řešiteli a čtrnáct účastníky soutěže.

Celkové průměrné hodnocení všech úloh bylo 27,7 bodu, tj. 69,2 % z možných 60. První tři místa obsadili soutěžící z hlavního města – pomyslnou zlatou medaili vybojoval s desetibodovým náskokem *Viktor Fukala* (G J. Keplera Praha), stříbrnou *Marek Fürst* (G Christiana Dopplera Praha) a bronzovou *Matěj Dvořák* (G Jana Keplera Praha). Stejný počet bodů získal i čtvrtý v pořadí *Adam Mendl* (G Pierra de Coubertina Tábor), o pořadí na 3. a 4. místě musely rozhodnout modifikované body. Epidemická situace ovlivňuje i Mezinárodní fyzikální olympiádu, která by měla po odkladu z loňského roku proběhnout od 17. do 25. července 2021 v litevském Vilniusu (viz <https://www.ipho2021.lt>), organizátoři jsou letos připraveni v případě nouze uspořádat ji také on-line.

Mnohem více než v minulých letech byl uplynulý ročník závislý na pravidelné aktualizaci internetových stránek a především na zprovoznění systému OSMO (<https://osmo.fyzikalniolympiada.cz/org/>) k zadávání a odevzdávání úloh on-line (byl využit také pro krajská a okresní kola kategorií B–F v březnu a dubnu). Je třeba poděkovat kolegům z MO, kteří umožnili využít jimi vyvinutý systém a adaptovat jej pro potřeby FO. Zprovoznění, všechny úpravy a nastavení systému, vytvoření návodu i zkušebního „hřiště“, na němž si mohli soutěžící i opravující dopředu vyzkoušet fungování celého prostředí, se ujal *RNDr. Jan Prachař*, který má obrovskou zásluhu na tom, že se soutěž podařilo zvládnout i za nepříznivých a pro všechny nových podmínek.

Jak všichni doufáme, v příštím školním roce a v 63. ročníku FO by celostátní kolo mohlo proběhnout obvyklým způsobem v místě určeném pro rok letošní, tedy v Plzeňském kraji. Zájemci a příznivci soutěže najdou všechny potřebné aktuální informace včetně zadání i řešení úloh na čtenářům MFI jistě dobře známých internetových stránkách ÚKFO www.fyzikalniolympiada.cz.

Literatura

- [1] *Vybíral, B.*: Elektromagnetická indukce. Studijní text pro soutěžící FO a ostatní zájemce o fyziku. Dostupné na: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/indukce.pdf>.

Výsledková listina

Vítězové

1. Viktor Fukala (G Jana Keplera, Praha 6, 58 b),
2. Marek Fürst (G Christiana Dopplera, Praha 5, 48 b),
3. Matěj Dvořák (G Jana Keplera, Praha 6, 47 b),
4. Adam Mendl (G Pierra de Coubertina, Tábor, 47 b),
5. Jiří Kohl (Biskupské G Brno a MŠ, 45 b),
6. Robert Gemrot (G Havířov-Město, Komenského, 44,5 b),
7. Karel Chwistek (Mendelovo G Opava, 43 b),
8. Hynek Jakeš (Slovanské G Olomouc, 41 b),
9. Jiří Kalvoda (G Brno, třída Kapitána Jaroše, 39 b),
10. Tomáš Vítek (G a Jazyková škola, Břeclav, 39 b),
11. Vojtěch David (Wichterlovo G Ostrava, 36 b).

Úspěšní řešitelé

12. David Kamenský (G a Jazyková škola, Břeclav, 34 b),
13. Jonáš Dej (Wichterlovo G Ostrava, 33,5 b),

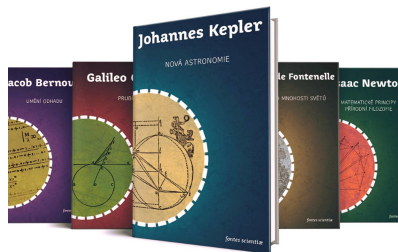
14. Jan Červeňan (G Jana Pivečky a SOŠ Slavičín, 33,5 b), 15. Václav Maštera (G Pierra de Coubertina, Tábor, 33,5 b), 16. Václav Janáček (G Brno, třída Kapitána Jaroše, 33,5 b), 17. Tomáš Čajan (G Františka Palackého, Valašské Meziříčí, 32,5 b), 18. Vojtěch Kuchař (Wichterlovo G Ostrava, 32 b), 19. Kryštof Boura (G Jaroslava Vrchlického, Klatovy, 32 b), 20. Pavel Provazník (G Pardubice, Dašická, 28 b), 21. Štěpán Hortlík (G Pardubice, Dašická, 27 b), 22. Martin Beneš (G Jihlava, 26,5 b), 23. Jindřich Matuška (G Brno, třída Kapitána Jaroše, 26,5 b), 24. Jakub Kislinger (G Jaroslava Vrchlického, Klatovy, 24,5 b), 25. Ondřej Sladký (G Plzeň, Mikulášské nám., 23,5 b), 26. Jan Čarvaš (G Praha 6, Nad Alejí, 22,5 b), 27. Ondřej Marek (G Christiana Dopplera, Praha 5, 22,5 b), 28. Filip Gregora (G Lanškroun, 22 b), 29. David Podrápský (G Teplice, 21 b), 30. Michal Žáček (G Lovosice, 20,5 b), 31. Antonín Hejný (G Praha 9, Litoměřická, 20 b), 32. Magdaléna Mišinová (G Jana Keplera, Praha 6, 19,5 b), 33. Tomáš Veselý (G Jaroslava Heyrovského, Praha 5, 19,5 b).

Lukáš Richterek

Fontes Scientiæ aneb díla velikanů (alespoň částečně) v češtině

Na Masarykově univerzitě byl dokončen mezioborový projekt, který českým čtenářům zpřístupnil pět přelomových děl novověké vědy. V nakladatelství Togga (<https://www.togga.cz>)

tak mohla vyjít ojedinělá knižní edice *Fontes Scientiæ* tvořená následujícími tituly: Matematické principy přírodní filozofie *Isaaca Newtona* [1], Nová astronomie *Johannese Keplera* [2], Prubíř *Galileia Galileiho* [3], Umění odhadu *Jacoba Bernoulliho* [4] a Rozhovory o mnohosti světů *Bernarda de Fontenella* [5]. Výběr zahrnuje klasické texty období vědecké revoluce 17. a 18. století; díla Galileiho a Fontenella jsou kompletními překlady, svazky Newtona, Keplera a Bernoulliho představují výběry zajímavých pasáží. Každou z vydaných knih navíc doprovázejí obsáhlé předmluvy, které se zabývají původem, kontextem, cíli a metodami jednotlivých prací. Po několika stěžejních pracích z historie astronomie [6, 7, 8] vydaných v minulých pěti letech se tak v českém překladu objevují další cenná díla z historie přírodních věd doplněná komentáři s informacemi o jejich významu, vzniku i jejich současném chápání a porozumění.



Zdroj: Nakladatelství Togga

Podle vedoucího projektu *Daniela Špeldy* z Filozofické fakulty MU „všechna díla spojuje především to, že jsou ve svých oborech považována za přelomová, a společně tak dávají poměrně sugestivní obraz toho, jak

vypadaly počátky moderní vědy.“ Publikace připomínají, že empirické a experimentální zkoumání, matematický popis, kolektivní spolupráce, institucionalizace vědy jako profese či státní podpora nebyly vždy samozřejmé a musely být obhájeny. „Někdy se dějiny vědy líčí tak, že hlavní překážkou rozvoje byla církev, která potlačovala nové objevy. Ve skutečnosti byl ale mnohem větší problém přesvědčit humanitně vzdělané intelektuály, politiky a šlechtu, že Aristotelés se mohl mýlit a že číst jeho a další antické klasiky k vysvětlení přírody nestačí.“ Cílem edice je rovněž „ukázat, že evropská věda se neutvářela jednoduše a přímočaře, ale měla mnoho nečekaných zákrut a záhybů“ [9].

Samotnou práci na překladech charakterizují jejich autoři jako kolektivní úsilí. Náročnost překladu spočívala především v tom, že se jednalo o texty psané latinsky či barokními formami italštiny nebo francouzštiny a snoubily se v nich matematické, filozofické i teologické pasáže. Na překladu každého titulu pracoval tým zahrnující filology, přírodovědce i filozofy z filozofické, přírodovědecké i pedagogické fakulty MU.

Čeští čtenáři tak dostávají do rukou publikace, jejichž název a přibližný obsah sice mnozí znají, ale – ruku na srdce – málokdo je skutečně četl, ať už v originále nebo v pozdějších komentovaných anglických, ruských či jiných překladech. Můžeme tak být možná překvapeni, že třeba v Newtonových *Principiích* se kromě výkladu pohybových zákonů a gravitace nacházejí i teologické spekulace o úloze Boha při

stvoření vesmíru. Na druhou stranu především právě Newtonovo a Keplerovo stěžejní práce jsou stále zdrojem komentářů a snahy o jejich o nejpresnější pochopení i srovnání tehdejších přístupů s naším dnešním způsobem uvažování; namátkou připomeňme např. příspěvky [10, 11, 12, 13]. Zaujímavá je otázka přesného znění prvního Newtonova zákona otevřená profesorem Martinem Černožanským [14]; Newton změnil jeho formulaci mezi prvním (1687) a třetím vydáním *Principií* (1727, posledním za jeho života), přičemž pozdější formulace by mohla být spojena nejen se setrvačností rovnoměrného přímočarého pohybu, nýbrž i rotačního.

Přestože se na první pohled může zdát, že závěry těchto děl známe ze školy, pokud se do nich skutečně začteme, zjišťujeme, že způsob výkladu je diametrálně odlišný od dnešního. Najdeme v nich známé „vzorečky“, argumentace je slovní a geometrická, nepochybně i proto, aby oslovila tehdejší publikum (příkladem může být geometrické zavedení Keplerovy rovnice v 60. kapitole *Nové astronomie*). A někdy nás postřehy opravdu překvapí a rádi si je sami odvodíme „dnešním způsobem“ – Newton např. uvádí, že „Geometrům je totiž dobře známá propozice, která říká, že rychlost kyvadla v nejnižším bodě je úměrná těživé oblouku, který pádem urazí.“ Dnes takto pohyb kyvadla nepopisujeme, ale ověření tohoto tvrzení je docela pěkným a nikoli obtížným cvičením i v rámci středoškolské fyziky.

Knihy z edice *Fontes Scientiæ* tak ilustrují pro dobu svého vzniku cha-

rakteristické a svým způsobem přirozené propojení empirické vědy s filozofií, které při dnešní hluboké specializaci není zdaleka samozřejmé. Např. podle Keplera „Kosmos nelze poznat, aniž bychom věřili v moudrost Stvořitele, znali filozofické principy, počítali rovnice a prováděli pozorování.“ Nebyl tedy moderním vědcem v dnešním pojetí, ale u zrodu moderní vědy stál a v případě Nové astronomie kráčely dějiny světové vědy v jeho osobě naším územím, především rudolfínskou Prahou.

Knihy nabízejí plastický obraz a dokumenty z doby svého vzniku. Díky doprovodným komentářům a překladu do soudobého jazyka získává čtenář jedinečnou příležitost nahlédnout do způsobu myšlení a vyjadřování klasiků novověké vědy, což může být nesporně obohacující například pro studenty a učitele přírodovědných i humanitních oborů. Stále aktuální výzvou je i závěr Newtonovy předmluvy ke jeho monumentálnímu dílu: „Upřímně žádám, čtete vše s otevřenou myslí a nedostatky v tak obtížné látce neodsuzujte; nechť tyto spíše čtenáři novým úsilím prozkoumají a zdárně doplní.“

Literatura

- [1] *Newton, I.*: Matematické principy přírodní filozofie. Togga a MUNI Press, Praha a Brno, 2020.
- [2] *Kepler, J.*: Nová astronomie. Togga a MUNI Press, Praha a Brno, 2020.
- [3] *Galilei, G.*: Prubíř. Togga a MUNI Press, Praha a Brno, 2020.
- [4] *Bernoulli, J.*: Umění odhadu. Togga a MUNI Press, Praha a Brno, 2020.
- [5] *Fontenelle, B. de*: Rozhovory o mnohosti světů. Togga a MUNI Press, Praha a Brno, 2020.
- [6] *Galilei, G., Kepler, J.*: Hvězdný posel a Rozprava s Hvězdným poslem. Přel. A. Hadravová a P. Hadrava. Pistorius, Příbram, 2016.
- [7] *Hadravová, A., Hadrava, P.*: Sféra Iohanna de Sacrobosco – středověká učebnice základů astronomie. Akropolis, Praha, 2019.
- [8] *Koperník, M.*: O obězích nebeských sfér. První kniha. Ústav pro soudobé dějiny AV ČR a Pavel Mervart, Praha a Červený Kostelec, 2016.
- [9] Mezioborový projekt vedený filozofem Danielem Špeldou zpřístupnil klasiky novověké vědy [online]. Dostupné z: <https://www.phil.muni.cz>.
- [10] *Kuběna, J.*: O Newtonových a Keplerových zákonech aneb, jak asi Newton na své zákony přišel. MFI, roč. 7 (1997/98), č. 7, s. 409–416, pokračování s. 1210–1761.
- [11] *Podolský, J.*: Mezi Keplerem a Newtonem [přednáška online]. Dostupné z: youtu.be/3uO4EUEd8io.
- [12] *Svobodová, J.*: Ukázky z Newtonových Principií. In: Michal Šerý (editor), Veletrh nápadů učitelů fyziky 23, Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, 2018, s. 198–202. Dostupné z: home.pf.jcu.cz/~vnufcb/CD/pdf/Sbornik_VNUF23.pdf.
- [13] *Štefl, V.*: Jak Kepler dospěl k prvním dvěma zákonům v Astronomia nova. Čs. čas. fyz., roč. 68 (2018), č. 1, s. 41–50.
- [14] *Černohorský, M.*: Translačně-rotační první axiom 1687 (1726) ve světle Newtonových rukopisů. Čs. čas. fyz., roč. 62 (2012), č. 5–6, s. 331–340.

Lukáš Richterek