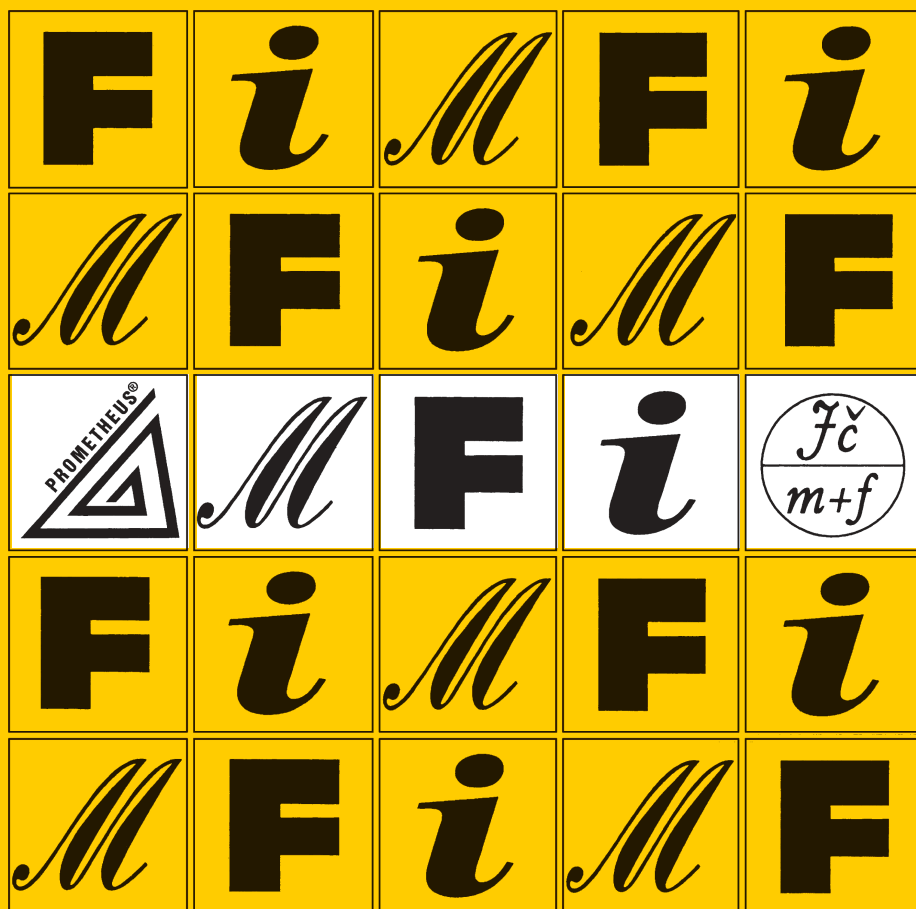


MATEMATIKA 3 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXX (2021), číslo 3

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku
Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek
Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška, Michaela Křížová, Miluše Lachmannová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil (předseda redakční rady), Dana Mandíková, Oldřich Odvárko, Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel Töpfer

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>J. Polák:</i> Důkazy v planimetrii užitím vektorů	161
<i>I. Chajda:</i> Egyptské násobení	178
<i>J. Zhouf:</i> Tři speciální body ležící na jedné přímce I	180
Zajímavé matematické úlohy	186

FYZIKA

<i>L. Richterek, O. Smetanová:</i> Na akustiku s tabletem nebo smartphonem	191
<i>Z. Gibová, J. Kecer:</i> Určenie rýchlosti elektromagnetického vlnenia pomocou dvojvodičového vedenia z videozáznamu	200
<i>P. Wegenkittlová, V. Vochozka:</i> Fyzikální klasifikace pohybu Ozobotem	206

INFORMATIKA

<i>P. Töpfer:</i> Rozkopané křížovatky (Úlohy z MO kategorie P, 42. část)	220
<i>L. Spíchal:</i> Jak moc jsou okružáci okrouhlí?	227

ZPRÁVY

<i>P. Calábek:</i> Mimořádný úspěch v 62. ročníku Mezinárodní matematické olympiády	238
---	-----

Důkazy v planimetrii užitím vektorů

JOSEF POLÁK

Fakulta aplikovaných věd ZČU v Plzni

1. Vektory ve školské geometrii

V matematice na ZŠ a SŠ jedním z hlavních prostředků i cílů výuky je rozvoj schopností (kompetence) žáků řešit *matematické úlohy*. Ve školské praxi se obvykle řeší především *úlohy určovací (výpočetní či konstrukční)* a méně již *úlohy aplikační*, avšak pro skutečné (neformální) porozumění matematice má též zásadní význam řešení *úloh důkazových* (viz [1] nebo [2, s. 33–42, s. 90–108]). Přitom při řešení důkazových úloh v geometrii (planimetrii a stereometrii) lze použít čtyři typy *metod eukleidovské geometrie* (viz [1] a [4]): *metody syntetické geometrie*, *metody souřadnicové analytické geometrie*, *užití vektorů (vektorové algebry)* a *užití komplexních čísel (algebry v oboru $\mathbb{C}$)*.

V našich současných učebnicích planimetrie a stereometrie pro ZŠ a SŠ jsou používány výhradně klasické metody syntetické geometrie. Souřadnicové a vektorové metody jsou obsaženy až v učebnicích analytické geometrie pro SŠ, ve kterých se jejich užitím vyšetřují polohové a metrické vlastnosti rovinných, resp. prostorových geometrických útvarů. S využitím vektorů při řešení planimetrických a stereometrických úloh se však mohou seznámit zejména účastníci matematických olympiád (např. viz [5] nebo [6]).

Poznámka 1. Ve druhé polovině 20. století v Rusku a v dalších evropských zemích bylo teoreticky zkoumáno i realizováno uplatnění vektorů ve výuce geometrie (viz např. [7]). S jejich efektivním využitím se lze setkat též ve sbírkách úloh z planimetrie (viz např. [8]) a stereometrie.

Výhody metody užití geometrických vektorů pro řešení úloh v geometrii jsou zejména jednoduchost a názornost. Podle *Františka Kuřiny* (viz [9]) je také charakteristická jejich elegance. Za velmi důležitou považují skutečnost, že při řešení geometrických úloh pomocí vektorů na rozdíl od užití syntetických metod není zpravidla nutné provádět diskusi řešení (např. samostatné řešení pro úhly ostré a pro úhly tupé). V důkazových úlohách je též obvykle snadnější ověřování platnosti obrácených vět. Připomeňme ještě i význam metody užití vektorů a metody užití komplexních čísel jako důležitého doplňku metod syntetické geometrie pro důkladné porozumění matematice, což přesvědčivě zdůrazňuje *Vlastimil Dlab* (mj. v článku [10]).

Poznámka 2. V publikovaném příspěvku se věnujeme důkazům planimetrických vět metodou užití vektorů, metodě užití komplexních čísel chceme věnovat komplementární článek. V obou příspěvcích takto tematicky navazujeme na článek [11] o důkazech metodami syntetické geometrie.

Hlavním cílem našeho článku je *prezentace příkladů* důkazů významných matematických vět planimetrie užitím geometrických vektorů. Příklady jsou zvoleny tak, aby je bylo možné vhodně využít ve středoškolské výuce matematiky. Jejich jednotné a co nejjednodušší pojetí je založeno na *vektorové algebře geometrických (volných) vektorů*.

Geometrický (volný) vektor značíme $\mathbf{u}$, jeho velikost $u = |\mathbf{u}|$, apod. Speciálně nulový vektor se značí $\mathbf{o}$, jeho velikost je $|\mathbf{o}| = 0$. Zápisem $\mathbf{u} = \mathbf{AB}$ vyjadřujeme (jak je obvyklé), že orientovaná úsečka $\mathbf{AB}$ představuje jedno (dané nebo zvolené) *umístění vektoru* $\mathbf{u}$ v rovině (popř. v prostoru), přičemž $u = |\mathbf{u}| = |\mathbf{AB}| = |\mathbf{AB}|$. Pro nulový vektor se klade $\mathbf{o} = \mathbf{AA}$. Ve vektorové algebře se definují operace sčítání vektorů, odčítání vektorů, násobení vektoru reálným číslem a odvozují se jejich další vlastnosti. Připomeňme zejména, že *součtem vektorů* $\mathbf{u} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{v} = \mathbf{BC}$ se nazývá takový vektor $\mathbf{w}$ (označovaný $\mathbf{u} + \mathbf{v}$), že $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{AC}$, kde

$$\mathbf{AC} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC}. \quad (1)$$

Vektorovou rovnost (1) je užitečné si zapamatovat a paralelně (zejména kontrolně) používat též v ekvivalentním symbolickém vyjádření

$$\mathbf{C} - \mathbf{A} = (\mathbf{B} - \mathbf{A}) + (\mathbf{C} - \mathbf{B}). \quad (2)$$

Připomeňme ještě, že *rozdílem vektorů* $\mathbf{u} = \mathbf{AB}$, $\mathbf{v} = \mathbf{AD}$ (v tomto pořadí) se nazývá vektor (označovaný $\mathbf{u} - \mathbf{v}$) takový, že $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{BD}$, přičemž je

$$\mathbf{DB} = \mathbf{AB} - \mathbf{AD}. \quad (3)$$

V článku dále využijeme pro nenulové vektory *skalární součin vektorů* $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ (označovaný $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$) ve tvaru

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = uv \cos \varphi, \quad (4)$$

kde $u = |\mathbf{u}|$, $v = |\mathbf{v}|$ jsou velikosti vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ a $\varphi = |\sphericalangle \mathbf{u}, \mathbf{v}| = |\sphericalangle BAC|$ je odchylka vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, tj. velikost konvexního úhlu sevřeného orientovanými úsečkami $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ (umístěními vektorů $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ se společným počátečním bodem A). Pro φ platí $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ (resp. $0 \leq \varphi \leq \pi$ v obloukové míře). Operace skalárního násobení vektorů je *komutativní* ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$). Speciálně je

$$\mathbf{u}^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u^2 \cos 0^\circ = u^2. \quad (5)$$

Pro každé dva nenulové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ platí vektorové rovnosti

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 = u^2 + v^2 + 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad (6)$$

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 = u^2 + v^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad (7)$$

odkud po sečtení rovností (6) a (7) se dostává významná vektorová rovnost

$$|\mathbf{u} + \mathbf{v}|^2 + |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = 2(u^2 + v^2), \text{ kde } u = |\mathbf{u}|, v = |\mathbf{v}|. \quad (8)$$

A pro každé tři nenulové vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ platí vektorová rovnost (vyjadřující *distributivnost* operace skalárního násobení vektorů vzhledem ke sčítání vektorů)

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}. \quad (9)$$

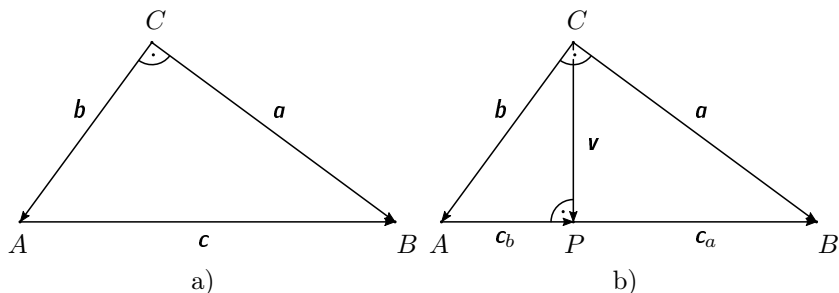
2. Důkazy Pythagorovy věty a Eukleidových vět užitím vektorů

Příklad 1

Dokažte užitím geometrických vektorů *Pythagorovu větu*: V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky přepony rovna součtu druhých mocnin délek obou odvěsen. Označíme-li délky odvěsen a, b , délku přepony c , pak

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (10)$$

Důkaz. Pro vektory $\mathbf{a} = \overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$ (obr. 1a) je $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, takže $\mathbf{c}^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2$ čili $c^2 = a^2 + b^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, přičemž $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$, a tedy platí rovnost (10).



Obr. 1

Příklad 2

Dokažte *obrácenou Pythagorovu větu*: Jestliže pro délky stran a , b , c trojúhelníku ABC platí rovnost $c^2 = a^2 + b^2$ pak je tento trojúhelník pravoúhlý s vrcholem pravého úhlu v bodě C .

Důkaz. Při označení jako v příkladu 1 plyne z rovnosti $c = a - b$, že $c^2 = (a - b)^2$, čili $c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b$. Užitím předpokladu $c^2 = a^2 + b^2$ dostáváme $a \cdot b = 0 \Rightarrow a \perp b$, tj. $\gamma = |\sphericalangle ACB| = 90^\circ$.

Příklad 3

Dokažte užitím geometrických vektorů Eukleidovy věty o výšce a odvěsnách pravoúhlého trojúhelníku.

Eukleidova věta o výšce: V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky výšky k přeponě rovna součinu délek úseků přepony vytažených na ní patou P této výšky (obr. 1b):

$$v^2 = c_a c_b. \quad (11)$$

Eukleidova věta o odvěsnách: V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky odvěsny rovna součinu délky přepony a délky přílehlého úseku přepony (obr. 1b):

$$a^2 = c c_a, \quad b^2 = c c_b. \quad (12)$$

Důkazy. Pro vektory $a = \overrightarrow{CB}$, $b = \overrightarrow{CA}$, $c = \overrightarrow{AB}$, $c_b = \overrightarrow{AP}$, $c_a = \overrightarrow{PB}$, $v = \overrightarrow{CP}$ (obr. 1b) je $a \perp b \Rightarrow a \cdot b = 0$, přičemž $a = c_a + v$, $b = -c_b + v$, takže $(v + c_a) \cdot (v - c_b) = 0$ čili $v^2 + c_a \cdot v - c_b \cdot v - c_a \cdot c_b = 0$, kde $v^2 = v^2$, $c_a \cdot c_b = c_a c_b$, $c_a \perp v \Rightarrow c_a \cdot v = 0$, $c_b \perp v \Rightarrow c_b \cdot v = 0$, a tedy po dosazení $v^2 = c_a c_b$.

Obdobně $\mathbf{v} \perp \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{c} = 0$, kde $\mathbf{v} = \mathbf{a} - \mathbf{c}_a$ a $\mathbf{v} = \mathbf{b} + \mathbf{c}_b$, $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, takže $(\mathbf{a} - \mathbf{c}_a) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$, odkud $a^2 = cc_a$ a $(\mathbf{b} + \mathbf{c}_b) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = 0$, odkud $b^2 = cc_b$.

3. Vektorové důkazy některých zobecnění Pythagorovy věty

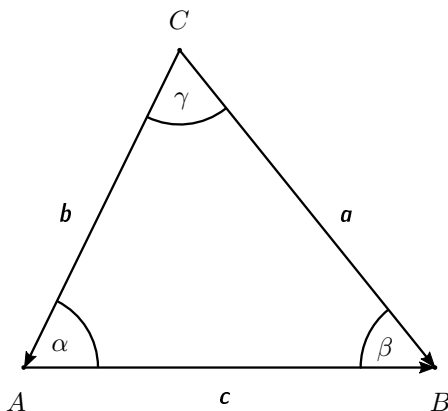
Příklad 4

Dokažte užitím geometrických vektorů *kosinovou větu* pro obecný trojúhelník: Pro každý trojúhelník ABC , jehož strany mají délky $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$ a vnitřní úhel proti jeho straně AB má velikost γ ($\gamma = |\sphericalangle ACB|$), platí rovnost

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \quad (13)$$

(Další dvě obdobné rovnosti pro a^2 , b^2 se dostanou cyklickou záměnou označení.)

Důkaz. Pro vektory $\mathbf{a} = \overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$ (obr. 2) je $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, a tedy $c^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ čili $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$, kde $\gamma = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle \mathbf{a}, \mathbf{b}|$.



Obr. 2

Poznámka 3. Kosinová věta je zobecněním Pythagorovy věty: pro $\gamma = 90^\circ$ je $\cos \gamma = 0$, a tedy ze vzorce (13) vyplývá speciálně vzorec (10). V zahraniční literatuře (zejména francouzské) je tato věta někdy uváděna pod názvem *Al-Kášího (Al-Kashiho) věta*. Arabský matematik a astronom *al-Káší* (14.–15. stol.) ji formuloval v podobě blízké jejímu dnešnímu tvaru,

ve kterém ovšem byla vyjádřena až francouzským matematikem („otcem algebry“) *Françoisem Viètem* (1540–1603).

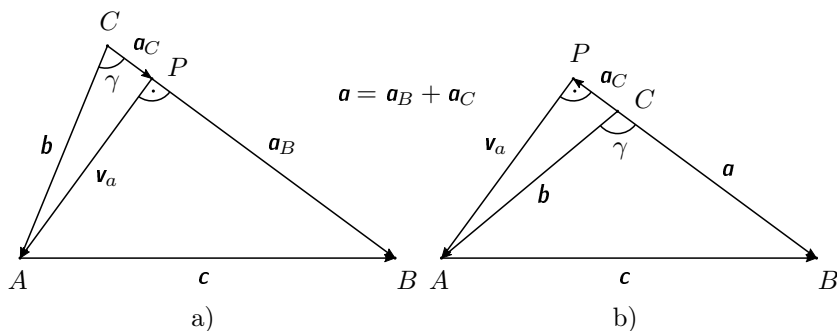
Příklad 5

Dokažte pomocí geometrických vektorů *zobecněný tvar Pythagorovy věty pro obecný trojúhelník* (podle [10]): Pro libovolný trojúhelník ABC , jehož strany mají délky $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$, P je pata kolmice vedené bodem A k protější straně BC , příslušná výška AP má délku $|AP| = v_a$ a délky úseček BP , PC jsou $|BP| = a_B$, $|PC| = a_C$, platí rovnost

$$b^2 + a_B^2 = c^2 + a_C^2. \quad (14)$$

(Jde o zobecněný tvar Pythagorovy věty, neboť speciálně pro pravoúhlý trojúhelník ABC , v němž je $|\sphericalangle ACB| = 90^\circ$, $a_C = 0$, $a_B = a$, rovnost (14) nabývá tvaru $b^2 + a^2 = c^2$.)

Důkaz. Použijeme vektory $\mathbf{a} = \overrightarrow{CB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{v}_a = \overrightarrow{PA}$, $\mathbf{a}_B = \overrightarrow{PB}$, $\mathbf{a}_C = \overrightarrow{CP}$ (obr. 3a, b).



Obr. 3

Platí rovnosti $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{v}_a = \mathbf{b} - \mathbf{a}_C$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_C$. Odtud plyne $\mathbf{b} = \mathbf{a}_C + \mathbf{v}_a$, $\mathbf{c} = \mathbf{a}_B - \mathbf{v}_a$, takže $b^2 = a_C^2 + v_a^2 + 2\mathbf{a}_C \cdot \mathbf{v}_a = a_C^2 + v_a^2$ (neboť $\mathbf{a}_C \perp \mathbf{v}_a \Rightarrow \mathbf{a}_C \cdot \mathbf{v}_a = 0$), $c^2 = a_B^2 + v_a^2 + 2\mathbf{a}_B \cdot \mathbf{v}_a = a_B^2 + v_a^2$ (neboť $\mathbf{a}_B \perp \mathbf{v}_a \Rightarrow \mathbf{a}_B \cdot \mathbf{v}_a = 0$), a tedy $b^2 - a_C^2 = c^2 - a_B^2$ čili $b^2 + a_B^2 = c^2 + a_C^2$.

Příklad 6

Užitím vektorového vyjádření dokažte ekvivalenci zobecněného tvaru Pythagorovy věty z příkladu 5 a kosinové věty z příkladu 4.

Důkaz. Rovnost (14) vyjádříme ve tvaru $c^2 = a_B^2 - a_C^2 + b^2$, který upravíme postupnými ekvivalentními vektorovými úpravami:

$$\begin{aligned} c^2 &= \mathbf{c}^2 = \mathbf{a}_B^2 - \mathbf{a}_C^2 + \mathbf{b}^2 = \\ &= (\mathbf{a}_B + \mathbf{a}_C) \cdot (\mathbf{a}_B - \mathbf{a}_C) + \mathbf{b}^2 = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{a}_C) + \mathbf{b}^2 = \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_C + \mathbf{b}^2 = \\ &= a^2 + b^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_C, \end{aligned}$$

kde $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}_C = aa_C \cos |\sphericalangle \mathbf{a}, \mathbf{a}_C| = ab \cos \gamma$. Po dosazení dostáváme rovnost (13).

Příklad 7

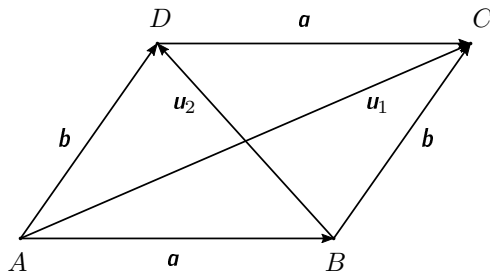
Pomocí vektorového vyjádření dokažte větu o rovnoběžníku (pro délky úhlopříček rovnoběžníku): V každém rovnoběžníku $ABCD$, jehož strany mají délky $|AB| = |CD| = a$, $|BC| = |AD| = b$, pro jeho úhlopříčky o délkách $|AC| = u_1$, $|BD| = u_2$, platí rovnost

$$u_1^2 + u_2^2 = 2(a^2 + b^2). \quad (15)$$

Důkaz. Užitím vektorů $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{BD}$ (obr. 4), a tedy $\mathbf{u}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, odkud vyplývá, že

$$u_1^2 + u_2^2 = \mathbf{u}_1^2 + \mathbf{u}_2^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = 2(\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2) = 2(a^2 + b^2),$$

tj. platí rovnost (15).



Obr. 4

Poznámka 4. Větu o rovnoběžníku dokázanou v příkladu 7 lze považovat za zobecnění Pythagorovy věty, neboť speciálně pro pravoúhelník (obdélník, popř. čtverec) $ABCD$ s úhlopříčkami o délce $u = |AC| = |BD|$

rovnost (15) nabývá tvaru $u^2 = a^2 + b^2$ a tato rovnost je vyjádřením Pythagorovy věty pro pravoúhlé trojúhelníky ABC a ADC . Významné však zejména je uvědomit si, že věta o rovnoběžníku představuje názornou *geometrickou interpretaci* rovnosti (8) pro velikosti nenulových vektorů (prvků vektorového prostoru geometrických vektorů). Tato skutečnost nabyla zvláště na významu, když v roce 1935 dokázal význačný americký matematik maďarského původu *John von Neumann* (1903–1957), že analogická rovnost platí pro normy prvků obecných (abstraktních) vektorových prostorů jistého typu, tzv. *Hilbertových prostorů*. Na základě uvedených geometrických analogií tato rovnost pro normy prvků Hilbertových prostorů je nazývána (v lineární algebře a ve funkcionální analýze) *rovnoběžníkové pravidlo*.

Příklad 8

Zajímavým a důležitým speciálním případem čtyřúhelníků jsou konvexní čtyřúhelníky, jimž lze opsat kružnici. Jejich strany jsou tětivami této kružnice k_o , a proto se nazývají *tětivové čtyřúhelníky*. Mají řadu velmi pozoruhodných vlastností. Dokažte, že pro ně platí následující dvě věty.

Věta o vnitřních úhlech tětivového čtyřúhelníku: V každém tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ jeho protější (protilehlé) vnitřní úhly jsou výplňkové úhly, tj. pro jejich velikosti $\alpha = |\sphericalangle DAB|$, $\beta = |\sphericalangle ABC|$, $\gamma = |\sphericalangle BCD|$, $\delta = |\sphericalangle CDA|$ platí rovnosti

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ. \quad (16)$$

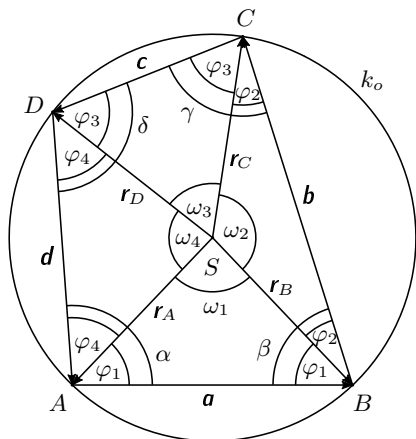
Ptolemaiova věta: V každém tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ součin délek jeho úhlopříček je roven součtu součinů délek protějších (protilehlých) stran čtyřúhelníku, tj. označíme-li $u_1 = |AC|$, $u_2 = |BD|$, $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, platí rovnost

$$u_1 u_2 = ac + bd. \quad (17)$$

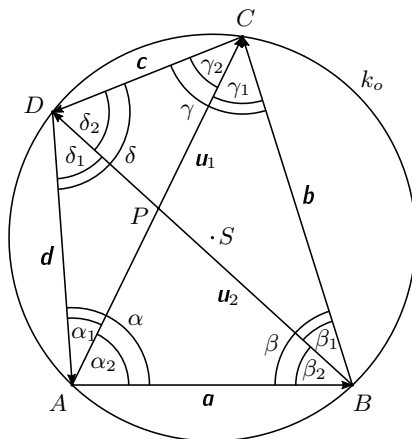
Důkazy. Označíme S střed opsané kružnice k_o , P průsečík úhlopříček AC , BD a použijeme vektory $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{CD}$, $\mathbf{d} = \overrightarrow{DA}$, $\mathbf{u}_1 = \overrightarrow{AC}$, $\mathbf{u}_2 = \overrightarrow{BD}$, $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{SA}$, $\mathbf{r}_B = \overrightarrow{SB}$, $\mathbf{r}_C = \overrightarrow{SC}$, $\mathbf{r}_D = \overrightarrow{SD}$ (obr. 5 a obr. 6).

Důkaz (nevektorový) věty o vnitřních úhlech tětivového čtyřúhelníku: Úsečky SA , SB , SC , SD délky r (kde r je poloměr kružnice k_o) rozdělují tětivový čtyřúhelník $ABCD$ na čtyři rovnoramenné trojúhelníky ABS , BSC , CDS , DAS (obr. 5), v nichž označíme $\varphi_1 = |\sphericalangle SAB| = |\sphericalangle SBA|$,

$\omega_1 = |\sphericalangle ASB|$, $\varphi_2 = |\sphericalangle SBC| = |\sphericalangle SCB|$, $\omega_2 = |\sphericalangle BSC|$, $\varphi_3 = |\sphericalangle SCD| = |\sphericalangle SDC|$, $\omega_3 = |\sphericalangle CSD|$, $\varphi_4 = |\sphericalangle SDA| = |\sphericalangle SAD|$, $\omega_4 = |\sphericalangle DSA|$, a tedy $\omega_1 = 180^\circ - 2\varphi_1$, $\omega_1 = 180^\circ - 2\varphi_1$, $\omega_3 = 180^\circ - 2\varphi_3$, $\omega_4 = 180^\circ - 2\varphi_4$. Pro velikosti vnitřních úhlů čtyřúhelníků platí rovnosti $\alpha = \varphi_1 + \varphi_4$, $\beta = \varphi_1 + \varphi_2$, $\gamma = \varphi_2 + \varphi_3$, $\delta = \varphi_3 + \varphi_4$. Protože je $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 360^\circ$, a tedy $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) = 180^\circ$, platí pro součty velikostí protějších vnitřních úhlů tětívového čtyřúhelníku rovnosti: $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 180^\circ$.



Obr. 5



Obr. 6

Vektorový důkaz Ptolemaiovy věty: Tětívový čtyřúhelník $ABCD$ rozděluje úhlopříčka AC na dva trojúhelníky ABC , ACD a obdobně úhlopříčka BD jej rozděluje na dva trojúhelníky BCD , ABD (obr. 6). Z první dvojice příslušných vektorových trojúhelníků ABC , ACD vyplývají pro vektor $\mathbf{u}_1 = \mathbf{AC}$ dvě součtové rovnosti $\mathbf{u}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ a $\mathbf{u}_1 = -(\mathbf{c} + \mathbf{d})$. Po jejich umocnění dostáváme

$$u_1^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = a^2 + b^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$$

čili $u_1^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(180^\circ - \beta) = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta$ a obdobně

$$u_1^2 = (\mathbf{c} + \mathbf{d})^2 = c^2 + d^2 + 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}$$

čili $u_1^2 = c^2 + d^2 + 2cd \cos(180^\circ - \delta) = c^2 + d^2 + 2cd \cos \beta$, neboť s užitím rovnosti (16) je $\cos(180^\circ - \delta) = \cos \beta$. Ze získaných dvou rovností pro u_1^2

dostáváme eliminací $\cos \beta$ po algebraických úpravách rovnost

$$u_1^2 = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd}.$$

Z druhé dvojice vektorových trojúhelníků BCD , ABD vyplývají pro vektor $\mathbf{u}_2 = \mathbf{BD}$ dvě součtové rovnosti $\mathbf{u}_2 = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ a $\mathbf{u}_2 = -(\mathbf{a} + \mathbf{d})$. Odtud obdobným postupem (s využitím toho, že $\cos(180^\circ - \gamma) = \cos \alpha$) odvodíme rovnost

$$u_2^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc},$$

takže $u_1^2 u_2^2 = (ac + bd)^2$, odkud plyne rovnost (17).

Poznámka 5. Původ formulace a názvu Ptolemaiovy věty: Význačný řecký učenec, geograf, astronom a matematik *Klaudios Ptolemaios* (asi 85 n. l. – asi 165 n. l.) v rozsáhlém třináctisvazkovém astronomickém encyklopedickém díle v latinském překladu nazvaném *Almagest* (viz [3, s. 10, s. 23]) shrnuje též vhodný matematický aparát. V něm jako ve vůbec nejstarším dochovaném díle je formulována i dokazována matematická věta, jež se od té doby nazývá *Ptolemaiova věta*. Důkaz v *Almagestu* je založen na užití podobnosti trojúhelníků a s různými jeho modifikacemi se v literatuře setkáváme nejčastěji (viz např. [13]). Alternativní důkaz vychází z užití kosinové věty (viz [14, s. 264]) a jeho vektorovou variantu jsme použili v příkladu 8. Z obdobného důvodu jako u věty o rovnoběžníku (viz poznámku 4) je také Ptolemaiova věta považována za zobecnění Pythagorovy věty.

Příklad 9

Dokažte, že k oběma větám z příkladu 8 platí i věty obrácené.

Obrácená věta o vnitřních úhlech tětiového čtyřúhelníku: Jestliže v konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ obě dvojice protějších vnitřních úhlů jsou úhly výplňkové, tj. pro velikosti protějších vnitřních úhlů čtyřúhelníku platí rovnosti (16), pak je tento čtyřúhelník tětiový.

Obrácená Ptolemaiova věta: Jestliže v konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ pro délky úhlopříček a délky protějších stran platí rovnost (17), pak je tento čtyřúhelník tětiový.

Důkazy. Uvedeme stručně jen jejich možné postupy.

Důkaz obrácené věty o vnitřních úhlech tětiového čtyřúhelníku lze snadno provést jako *důkaz sporem*: Předpokládáme, že dokazovaná implikace $p \Rightarrow q$

neplatí čili je pravdivá její negace, tj. konjunkce výroků p : pro vnitřní úhly konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ jsou splněny rovnosti (16) a $\neg q$: čtyřúhelník $ABCD$ není tětívový. Sestrojíme-li tedy kružnici k_o opsanou trojúhelníku ABC , pak (v důsledku platnosti výroku $\neg q$) na této kružnici k_o neleží vrchol D čtyřúhelníku $ABCD$. Pro jeho vnitřní úhel při vrcholu D proto platí, že buď $\delta > 180^\circ - \beta$, nebo $\delta < 180^\circ - \beta$. A to je ve *sporu* s předpokladem p : $\delta = 180^\circ - \beta$. Takže neplatí $\neg(p \Rightarrow q)$, tj. platí dokazovaná implikace $p \Rightarrow q$.

Přímý důkaz obrácené Ptolemaiovy věty můžeme provést ověřením obráceného postupu důkazu vektorovou metodou v příkladu 8. Je možné ovšem též opět použít *důkaz sporem*: Předpokládáme platnost negace dokazované implikace $p \Rightarrow q$, tj. pravdivost konjunkce výroků p : v konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí rovnost (17) a $\neg q$: čtyřúhelník $ABCD$ není tětívový. Na kružnici k_o opsané trojúhelníku ABC tedy neleží vrchol D čtyřúhelníku $ABCD$. Dále lze použít *metodu souřadnicového vyjádření vektorů* ve vhodně zvolené soustavě kartézských souřadnic. Stanovíme v ní rovnici kružnice k_o , kterou splňují souřadnice bodů A, B, C , zatímco pro souřadnice bodu D neplatí. Z těchto podmínek pak (po složitějších algebraických úpravách) dospíváme k tomu, že pro čtyřúhelník $ABCD$ platí nerovnost $u_1 u_2 < ac + bd$, což je *spor* s předpokladem p , že v něm platí rovnost (17).

4. Důkazy vět o úhlech tětív v kružnici s užitím vektorů

Příklad 10

Použitím geometrických vektorů dokažte, že pro libovolnou kružnici platí *Thaletova věta*: Všechny obvodové úhly kružnice k nad jejím průměrem AB (tj. úhly AVB , jejichž vrchol V leží na kružnici k a jejich ramena prochází body A, B) jsou pravé úhly ($|\sphericalangle AVB| = 90^\circ$).

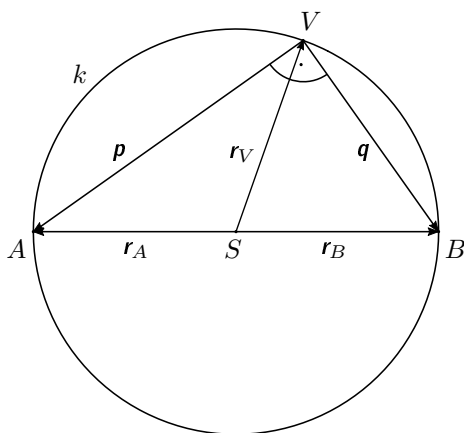
Důkaz. Označme S střed kružnice k a r její poloměr. Pro daný průměr AB a libovolně zvolený obvodový úhel AVB k nim přiřadíme vektory $\mathbf{r}_A = \mathbf{SA}$, $\mathbf{r}_B = \mathbf{SB} = -\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_V = \mathbf{SV}$, $\mathbf{p} = \mathbf{VA}$, $\mathbf{q} = \mathbf{VB}$ (obr. 7). Protože je $\mathbf{p} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_V$ a $\mathbf{q} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_V = -(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_V)$,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = (\mathbf{r}_V - \mathbf{r}_A) \cdot (\mathbf{r}_V + \mathbf{r}_A) = r_V^2 - r_A^2 = r^2 - r^2$$

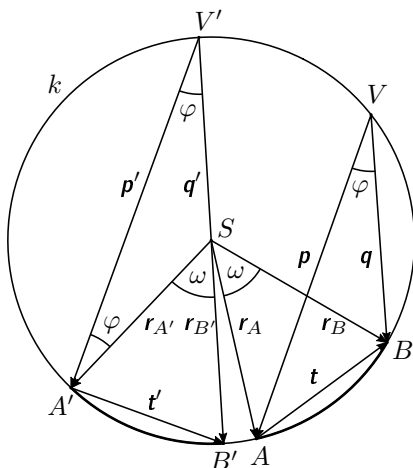
(neboť $|\mathbf{r}_V| = |\mathbf{r}_A| = r$), a tedy $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0 \Rightarrow \mathbf{p} \perp \mathbf{q}$, tj. $|\sphericalangle AVB| = 90^\circ$.

Postup důkazu v příkladu 10 lze obrátit a tím dokázat, že platí též *obrácená Thaletova věta*: Pro každý (libovolně zvolený) pravý úhel AVB

s vrcholem V ($|\sphericalangle AVB| = 90^\circ$) a kružnici k o průměru AB je tento úhel AVB obvodovým úhlem kružnice k nad průměrem AB .



Obr. 7



Obr. 8

Příklad 11

Dokažte, že pro libovolnou kružnici k obecně platí věta o obvodových a středových úhlech: Všechny obvodové úhly příslušné témuž oblouku AB kružnice k jsou shodné, přičemž jejich velikost φ je rovna polovině velikosti ω středového úhlu příslušného oblouku AB , tj. platí pro ně rovnost

$$\omega = 2\varphi. \quad (18)$$

Důkaz. Na kružnici k se středem S a poloměrem r zvolme tětivu AB a označme $\widehat{AB}$ příslušný menší oblouk kružnice, pro který budeme důkaz provádět. (Pro větší oblouk AB kružnice k by byl důkaz analogický.) Nad $\widehat{AB}$ sestrojíme libovolný obvodový úhel AVB a jeho velikost označme $\omega = |\sphericalangle AVB|$. K tětivě VB vedme středem S rovnoběžnou tětivu $V'B'$ a k tětivě VA rovnoběžnou tětivu $V'A'$ (obr. 8). Tětivám AB a $A'B'$ přiřadíme vektory $\mathbf{t} = \overrightarrow{AB}$ a $\mathbf{t}' = \overrightarrow{A'B'}$, pro něž platí, že $\mathbf{t} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$ a $\mathbf{t}' = \mathbf{r}_{B'} - \mathbf{r}_{A'}$, kde $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{SA}$, $\mathbf{r}_B = \overrightarrow{SB}$, $\mathbf{r}_{A'} = \overrightarrow{SA'}$, $\mathbf{r}_{B'} = \overrightarrow{SB'}$ a $|\mathbf{t}'| = |\overrightarrow{A'B'}| = |\overrightarrow{AB}| = |\mathbf{t}|$. Stejně tak jsou si rovny délky příslušných oblouků $\widehat{A'B'} = \widehat{AB}$, protože $\widehat{AA'} = \widehat{BB'} = \widehat{V'V'}$, $|\widehat{AB}| = |\widehat{AA'}| - |\widehat{B'A}|$

a $|\widehat{AB}| = |\widehat{BB'}| - |\widehat{B'A}| \Rightarrow |\widehat{A'B'}| = |\widehat{AB}|$. Dále si uvědomíme, že dvojice vektorů $\mathbf{p} = \mathbf{VA}$ a $\mathbf{p}' = \mathbf{V'A'}$, $\mathbf{q} = \mathbf{VB}$ a $\mathbf{q}' = \mathbf{V'B'}$ jsou kolinéární vektory, neboť je $\mathbf{p}' = k_1\mathbf{p}$, kde $k_1 = \frac{|\mathbf{V'A'}|}{|\mathbf{VA}|}$ a $\mathbf{q}' = k_2\mathbf{q}$, kde $k_2 = \frac{|\mathbf{V'B'}|}{|\mathbf{VB}|}$. Pro jejich jednotkové vektory $\mathbf{p}_0$ a $\mathbf{q}_0$ je $\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{q}_0 = \cos \varphi$, kde $\varphi = |\sphericalangle AVB| = |\sphericalangle A'V'B'|$. K obvodovým úhlům AVB a $A'V'B'$ o téže velikosti φ příslušné středové úhly ASB a $A'S'B'$ jsou shodné, tj. mají také stejnou velikost $\omega = |\sphericalangle ASB| = |\sphericalangle A'S'B'|$, což plyne ze shodnosti rovnoramenných trojúhelníků ABS a $A'B'S'$. V rovnoramenném trojúhelníku $A'B'V'$ se velikost vnějšího úhlu ω rovná součtu velikosti φ dvou protějších vnitřních úhlů, tj. $\omega = 2\varphi$.

V uvedeném důkazu byly použity geometrické vektory jen v pomocné roli. Ryze vektorový důkaz lze provést tak, že se (užitím souřadnic vektorů) dokáže platnost vektorové rovnosti

$$\frac{\mathbf{r}_A \cdot \mathbf{r}_B}{r^2} = 2(\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{q}_0)^2 - 1 \Rightarrow \cos \omega = 2 \cos^2 \varphi - 1 = \cos 2\varphi \Rightarrow \omega = 2\varphi.$$

Příklad 12

Před vektorovým důkazem v následujícím příkladu připomeňme důkazy ze syntetické geometrie, že pro velikosti úhlů úhlopříček libovolného konvexního čtyřúhelníku a speciálně tětivového čtyřúhelníku platí věty:

Věta o velikosti úhlů úhlopříček konvexního čtyřúhelníku: V každém konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ pro úhly mezi úhlopříčkami AC a BD platí, že jejich velikosti φ , resp. $180^\circ - \varphi$ jsou rovny součtu velikostí úhlů sevrěných úhlopříčkami AC , BD a jednou z protějších stran AD , BC , resp. AB , CD .

Věta o velikosti úhlů úhlopříček tětivového čtyřúhelníku: V každém tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ pro velikosti úhlů mezi úhlopříčkami AC a BD platí

$$\varphi = \varphi_{AB} + \varphi_{CD} = \frac{1}{2}(\omega_{AB} + \omega_{CD}), \quad (19)$$

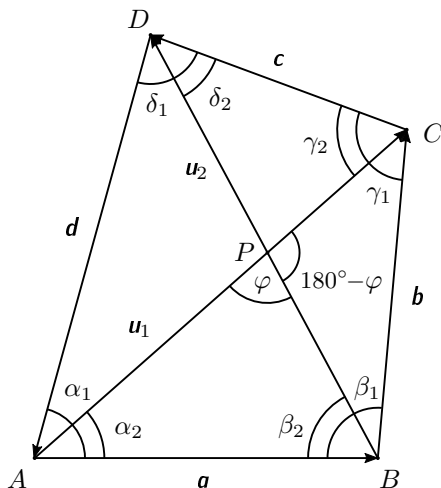
$$180^\circ - \varphi = \varphi_{BC} + \varphi_{DA} = \frac{1}{2}(\omega_{BC} + \omega_{DA}), \quad (20)$$

kde φ_{AB} , φ_{BC} , φ_{CD} , φ_{DA} jsou velikosti obvodových úhlů a ω_{AB} , ω_{BC} , ω_{CD} , ω_{DA} velikosti příslušných středových úhlů pro oblouky AB , BC , CD , DA kružnice k_o opsané tětivovému čtyřúhelníku $ABCD$.

Důkazy. Důkaz věty o velikosti úhlů úhlopříček konvexního čtyřúhelníku: Označíme-li velikosti úhlů sevrěných úhlopříčkami AC , BD konvexního

čtyřúhelníku $ABCD$ a jeho stranami $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ (obr. 9), pak velikosti úhlů úhlopříček φ , resp. $180^\circ - \varphi$ můžeme určit na základě vztahů mezi velikostmi vnějších úhlů trojúhelníku a velikostmi jeho protějších vnitřních úhlů. Tak z $\triangle APD$ plyne, že $\varphi = \alpha_1 + \delta_1$ a z $\triangle BPC$, že $\varphi = \beta_1 + \gamma_1$. Obdobně z $\triangle APB$ dostáváme, že $180^\circ - \varphi = \alpha_2 + \beta_2$ a z $\triangle CPD$, že $180^\circ - \varphi = \gamma_2 + \delta_2$.

Důkaz věty o velikosti úhlů úhlopříček tětiového čtyřúhelníku: Speciálně pro tětiový čtyřúhelník $ABCD$ (obr. 6) je $\gamma_1 = \delta_1 = \varphi_{AB}$ (velikost obvodových úhlů nad $\widehat{AB}$) a $\alpha_1 = \beta_1 = \varphi_{CD}$ (velikost obvodových úhlů nad $\widehat{CD}$), odkud z výše odvozených vztahů pro φ vyplývají rovnosti (19). Obdobně máme $\alpha_2 = \delta_2 = \varphi_{BC}$ (velikost obvodových úhlů nad $\widehat{BC}$) a $\beta_2 = \gamma_2 = \varphi_{DA}$ (velikost obvodových úhlů nad $\widehat{DA}$), odkud z výše odvozených vztahů pro $180^\circ - \varphi$ dostáváme rovnosti (20).



Obr. 9

Příklad 13

Užitím geometrických vektorů dokažte, že pro úhel φ úhlopříček tětiového čtyřúhelníku $ABCD$ platí vzorec

$$\cos \varphi = \frac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{2(ac + bd)}, \quad (21)$$

kde a, b, c, d jsou délky stran tětiového čtyřúhelníku.

Důkaz. V libovolném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 9) pro vektory $u_1 = AC$, $u_2 = BD$, $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, platí $u_1 = a + b$, $u_2 = b + c$ a $a + b + c + d = o \Rightarrow d = -(a + b + c)$, takže

$$d^2 = d^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c).$$

Proto

$$\begin{aligned} u_1 \cdot u_2 &= (a + b) \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c + b^2 = \\ &= b^2 + \frac{1}{2}(d^2 - a^2 - b^2 - c^2) = \frac{1}{2}(b^2 + d^2 - a^2 - c^2). \end{aligned}$$

Odtud a ze vztahu $u_1 \cdot u_2 = u_1 u_2 \cos \varphi$ plyne, že v konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ platí pro úhel úhlopříček φ vztah

$$\cos \varphi = \frac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{2u_1 u_2} \quad (22)$$

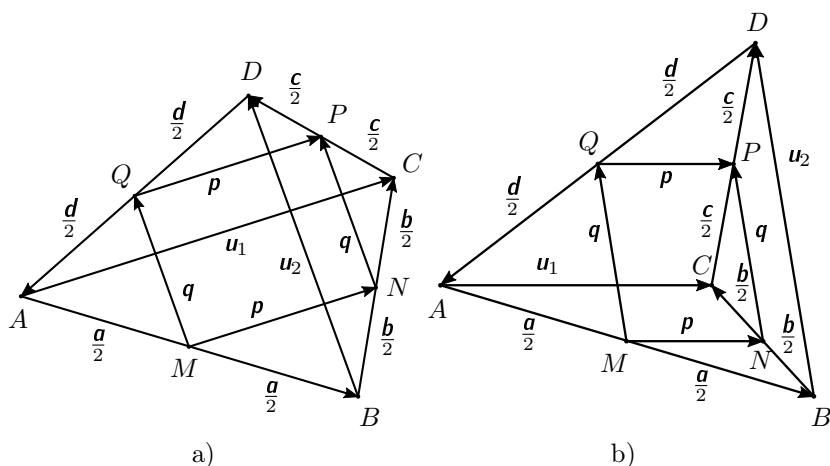
a speciálně pro tětíkový čtyřúhelník, v němž podle rovnosti (17) z Ptolemaiovy věty je $u_1 u_2 = ac + bd$, plyne vzorec (21).

5. Důkaz Varignonovy věty pro čtyřúhelník pomocí vektorů

Příklad 14

Dokažte, že pro libovolný konvexní i nekonvexní čtyřúhelník platí *Varignonova věta pro čtyřúhelník*: Středy stran každého čtyřúhelníku jsou vrcholy rovnoběžníku.

Důkaz. V libovolně zvoleném konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 10a), resp. nekonvexním čtyřúhelníku $ABCD$ (obr. 10b) středy stran AB , BC , CD , DA označíme po řadě M , N , P , Q . Pro délky jeho stran $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$ tedy platí, že $\frac{a}{2} = |AM| = |MB|$, $\frac{b}{2} = |BN| = |NC|$, $\frac{c}{2} = |CP| = |PD|$, $\frac{d}{2} = |DQ| = |QA|$. K důkazu použijeme vektory stran $a = AB$, $b = BC$, $c = CD$, $d = DA$, přičemž $a + b + c + d = o$ a vektory úhlopříček $u_1 = AC$, $u_2 = BD$, tj. $u_1 = a + b$, $u_2 = b + c$. Pro vektory $p = MN$, $p' = QP$ pak platí rovnosti $p = MN = MB + BN = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}u_1$, $p' = QP = DP + QD = -\frac{1}{2}(c + d) = \frac{1}{2}u_1$, takže $p' = p$, a tedy orientované úsečky MN a QP jsou dvě umístění téhož vektoru $p = \frac{1}{2}u_1$. (Obdobně lze dokázat, že orientované úsečky MQ a NP jsou dvěma umístěními téhož vektoru $q = \frac{1}{2}u_2$.) Odtud plyne, že čtyřúhelník $MNPQ$ je rovnoběžník, přičemž $|MN| = \frac{1}{2}u_1$ a $|NP| = \frac{1}{2}u_2$.



Obr. 10

Poznámka 6. Původ názvu a formulace Varignonovy věty pro čtyřúhelník: Jejím objevitelem byl francouzský mechanik a matematik *Pierre Varignon* (1654–1722), který ji formuloval a dokázal v knižní publikaci *Elemens de Mathematique*, jež byla vydána až posmrtně v roce 1731. Vzhledem k jednoduchosti a názornosti této věty eukleidovské geometrie je skutečně pozoruhodné, že byla objevena a publikována až na začátku 18. století. Rovnoběžník $MNPQ$ z této věty je nazýván *Varignonův rovnoběžník* a lze snadno dokázat, že jeho obsah je roven polovině obsahu příslušného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, tj. $S(MNPQ) = \frac{1}{2}S(ABCD)$. (Pro nekonvexní čtyřúhelník $ABCD$, popř. i tzv. „zkřížený čtyřúhelník“, v němž též platí Varignonova věta, situace s obsahy je složitější. Aby pro ně platila stejná rovnost obsahů jako pro konvexní čtyřúhelníky je nutná doplňková úmluva o zobecnění pojmu obsahu, jež přesahuje rámec školské geometrie.) V literatuře se lze také setkat s různými *zobecněními Varignonovy věty* pro některé další mnohoúhelníky (se sudým počtem stran a rovnoběžnými protějšími stranami).

6. Závěr

Použití geometrických vektorů v důkazech planimetrických vět jsme ilustrovali na příkladech významných jednoduchých vět. Další a složitější příklady může čtenář též nalézt např. v [1, s. 356–361], [4] a [5]. Řešení

geometrických problémů vektorovou metodou přispívá k hlubšímu porozumění geometrii, je užitečné a inspirativní jak ve výuce, tak při práci s talentovanými studenty v matematice.

Literatura

- [1] *Polák, J.*: Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. I. část. Konkrétní didaktika matematiky. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2014.
- [2] *Polák, J.*: Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. II. část. Obecná didaktika matematiky. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2016.
- [3] *Polák, J.*: Didaktika matematiky – Jak učit matematiku zajímavě a užitečně. III. část. Historie matematiky pro učitele. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2016.
- [4] *Larson, L. C.*: Problem-Solving Through Problems. Springer Verlag, New York – Berlin 1983, (slovenský překlad: Metódy riešenia matematických problémov. Alfa, Bratislava, 1990).
- [5] *Švrček, J.*: Užití vektorů při řešení geometrických úloh. In: Sborník „Makos 2010“, vydavatelství PedF UK, Praha, 2011, s. 40–45.
- [6] *Budinský, B., Šmakal, S.*: Vektory v geometrii. Škola mladých matematiků sv. 28. ÚV MO, nakladatelství Mladá fronta, Praha, 1971.
- [7] *Gusev, V. A., Koljagin, J. M., Lukankin, G. L.*: Vektory v školnom kurse geometrii. Prosveščeniye, Moskva, 1976.
- [8] *Prasolov, V. V.*: Zadači po planimetrii. Čast I. Nauka, Moskva, 1986.
- [9] *Kuřina, F.*: Umění vidět v matematice. SPN, Praha, 1990.
- [10] *Dlab, V.*: Důkladné porozumění elementární matematice. Učitel matematiky, roč. 17 (2009), č. 3, s. 169–182.
- [11] *Švrček, J., Juklová, L.*: Důkazy a důkazové úlohy v planimetrii. MFI, roč. 28 (2019), č. 2, s. 92–101.
- [12] *Dlab, V.*: Krátký příběh o obecném tvaru Pythagorovy věty. RMF, roč. 94 (2019), č. 4, s. 8–15.
- [13] *Leischner, P.*: Ptolemaiova věta. MFI, roč. 15 (2005/2006), č. 3, s. 129–135.
- [14] *Polák, J.*: Středoškolská matematika v úlohách II. Dotisk 2. upraveného vydání, Prometheus, Praha, 2016.

Egyptské násobení

IVAN CHAJDA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Na základní škole se žáci učí násobilku. Násobit dvě přirozená čísla a , b není samozřejmě nic jiného, než b -krát sečíst číslo a samo se sebou. Jelikož pro $b = 1$ sčítání vlastně neprovádíme, k provedení výpočtu tohoto součinu je zapotřebí právě $b - 1$ součtů. Takové postupné sčítání je však časově dosti náročné, i když početně jednodušší než násobení. Proto pro $a \leq 9$, $b \leq 9$ je při praktickém počítání bez kalkulatoru snadnější a rychlejší znát násobilku, než postupně sčítat číslo a . Násobíme-li však čísla větších řádů, používáme zpravidla algoritmus, který žákům zpočátku působí obtíže, a při kterém se bez znalosti násobilky neobejdeme. Ano, je to známé násobení „s ocáskem“.

Nabízí se však otázka, zda lze i pro násobení větších přirozených čísel používat postupné sčítání, ale tak, aby počet těchto součtů byl pro daná čísla a , b podstatně menší než počet $b - 1$ součtů čísla a . Taková metoda skutečně existuje, zpravidla se nazývá „egyptské násobení“. Nejjednodušší vysvětlení této metody lze provést pomocí příkladu.

Chceme například násobit čísla $a = 48$, $b = 23$. Pokud bychom používali postupné sčítání, museli bychom 23 krát sečíst číslo 48, což je dosti pracné a zdlouhavé. Tzv. „egyptský algoritmus“ pracuje efektivněji. Sčítáme takto:

$$\begin{aligned} 48 &= & 48 &= 48 \cdot \underline{1}, \\ 96 &= & 48 + 48 &= 48 \cdot \underline{2}, \\ 192 &= & 96 + 96 &= 48 \cdot \underline{4}, \\ 384 &= & 192 + 192 &= 48 \cdot \underline{8}, \\ 768 &= & 384 + 384 &= 48 \cdot \underline{16}. \end{aligned}$$

Nyní si všimněme, že $23 = 1 + 2 + 4 + 16$ (tj. podtržená čísla v pravém sloupci), což je vyjádření čísla 23 v mocninách 2 nejvýše rovných 23, a tedy

$$48 \cdot 23 = 48 + 96 + 192 + 768 = \mathbf{1104}.$$

Nemuseli jsme tedy sčítat 23krát číslo 48, ale sčítali jsme nejprve 4 dílčí součty, a pak jsme tyto součty sečetli, dohromady jsme provedli 8 sčítání,

takže tento algoritmus je mnohem efektivnější. Pro běžné násobení bez kalkulátoru se to jeví jako výhoda, při značném množství násobení skutečně velkých čísel je tento rozdíl zcela markantní. A to je důvod, proč se toto egyptské násobení používá v počítačích, kde úspora času hraje rozhodující roli zejména v rozsáhlých algoritmech.

Otázka je, kolik součtů čísla a musíme vytvořit při zadaném čísle b . Odpověď je zajímavá, je to maximálně sedminásobek počtu číslic desítkového zápisu čísla b . Ve výše uvedeném příkladu má číslo $b = 23$ dvě číslice, tedy maximálně potřebujeme vypočítat 14 součtů. Tento odhad je velmi velkorysý, přesvědčili jsme se, že stačilo celkem 8 součtů. Avšak mohou nastat situace, kdy tento odhad bude blíže ke skutečnosti.

A jak vysvětlíme, že stačí nejvýše sedminásobek počtu číslic čísla b v desítkovém zápisu? Důkaz je následující. Zřejmě platí

$$2^{\frac{7}{2}} = \sqrt{2^7} = \sqrt{128} > \sqrt{100} = 10,$$

a tedy

$$2^{\frac{7}{2}n} > 10^n$$

pro každé přirozené číslo n . Jinými slovy, číslo $2^{\frac{7}{2}n}$ je větší než počet číslic čísla b . Tedy nejvyšší mocnina čísla 2, která není větší než b , musí mít méně než 3,5krát počet cifer čísla b . Protože pak ještě sčítáme tyto dílčí součty, je počet součtů v egyptském násobení maximálně dvojnásobkem tohoto čísla 3,5, tedy jeho sedminásobkem.

Čtenář nechť si ověří na příkladu násobení velkých čísel, jak podstatná úspora počtu sčítání takto nastává. A pro žáky základní školy perlička na závěr: při této metodě jsme zcela vynechali znalost a používání násobilky,

Literatura

- [1] *Simonsos, S.*: Rediscovering Mathematics. MAA Press, Amer. Mathem. Society, Classroom Resource Materials, Vol. 61, 2011.

Tři speciální body ležící na jedné přímce I

JAROSLAV ZHOUF

Vysoká škola ekonomická, Praha

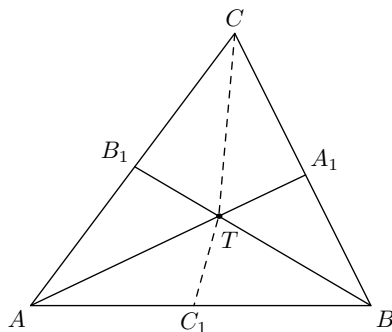
Úkolem tohoto a následujících článků je poukázat na některé významné trojice bodů v rovině, které leží na jedné přímce. Takovou trojicí bodů v trojúhelníku je např. jeho vrchol, střed jeho protilehlé strany a jeho těžiště – tyto body leží na těžnici trojúhelníku. Jinou trojicí bodů v trojúhelníku je jeho vrchol, pata kolmice vedené z tohoto vrcholu na protilehlou stranu a průsečík výšek – tyto body leží na výšce trojúhelníku.

V tomto článku začneme právě uvedenými případy. Tuto znalost pak využijeme dále, kdy budeme ukazovat další trojice takových bodů. Celá problematika bude řešena tak, aby jí porozuměli středoškoláci a snad i mnozí žáci druhého stupně základní školy.

Vrchol trojúhelníku, střed jeho protější strany a těžiště

Máme dán trojúhelník ABC a A_1 , B_1 , C_1 středy protilehlých stran k jeho vrcholům. Označme T (těžiště) průsečík přímek (těžnic) AA_1 a BB_1 . Dokážeme, že pak body C , T , C_1 leží na jedné přímce. Neboli říkáme, že se všechny těžnice trojúhelníku protínají v jednom bodě.

Důkazů tohoto tvrzení je více, zde uvedeme méně obvyklý způsob důkazu. Budeme předpokládat, že bod T neleží na přímce CC_1 (obr. 1).



Obr. 1

Jelikož je $A_1B_1 \parallel AB$, jsou obsahy trojúhelníků ABA_1 a ABB_1 stejné. Odečteme-li od těchto stejných hodnot obsah trojúhelníku ABT , dostaneme, že obsahy trojúhelníků ATB_1 a BTA_1 jsou stejné.

Stejně jsou obsahy trojúhelníků AC_1T a C_1BT , protože $|AC_1| = |C_1B|$. Stejně tak jsou stejné obsahy trojúhelníků AB_1T a CB_1T a také jsou stejné obsahy trojúhelníků BA_1T a CA_1T . Proto se součet obsahů trojúhelníků AC_1T , AB_1T , CB_1T rovná součtu obsahů trojúhelníků BC_1T , BA_1T , CA_1T .

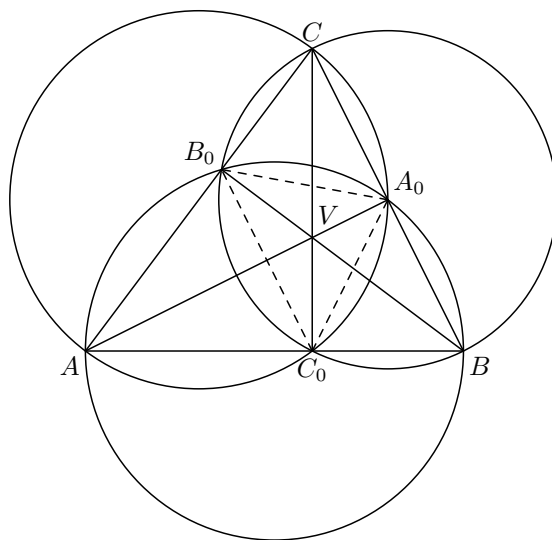
Jelikož jsou taktéž stejné obsahy trojúhelníků AC_1C a BC_1C , vyplývá z toho jedině, že bod T leží na přímce C_1C .

Vrchol trojúhelníku, pata výšky na protější straně a ortocentrum

Máme dán trojúhelník ABC a A_0 , B_0 , C_0 paty kolmic vedených postupně z vrcholů A , B , C na protilehlé strany. Označme V (ortocentrum, průsečík výšek) průsečík přímek (výšek) AA_0 a BB_0 . Dokážeme, že pak body C , V , C_0 leží na jedné přímce. Neboli říkáme, že se všechny výšky trojúhelníku protínají v jednom bodě.

Důkazů tohoto tvrzení je taktéž více. Zde ukážeme jeden možný důkaz, a to jen pro ostroúhlý trojúhelník.

Sestrojíme tři přímky AA_0 , BB_0 , CC_0 (obr. 2).



Obr. 2

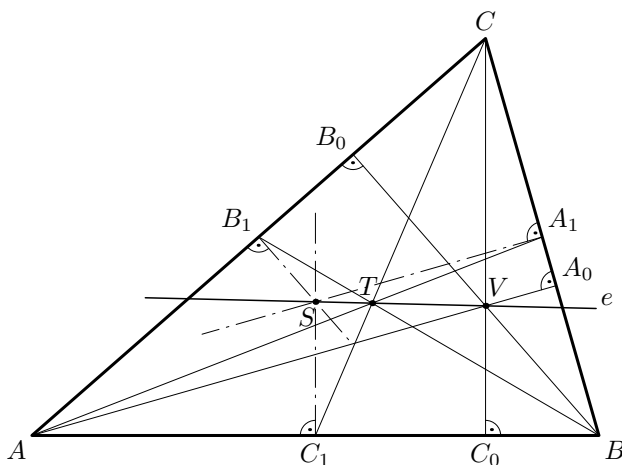
Body A, B, A_0, B_0 leží na Thaletově kružnici nad průměrem AB . Proto jsou obvodové úhly BAA_0 a BB_0A_0 shodné. Body B, C, B_0, C_0 leží na Thaletově kružnici nad průměrem BC . Proto jsou obvodové úhly BCC_0 a BB_0C_0 shodné. Body A, C_0, A_0, C leží na Thaletově kružnici nad průměrem AC . Proto jsou obvodové úhly C_0AA_0 a C_0CA_0 shodné. Odsud vyplývá, že BB_0 je osou úhlu $C_0B_0A_0$.

Analogicky je AA_0 osou úhlu $C_0A_0B_0$. A analogicky je CC_0 osou úhlu $A_0C_0B_0$.

Průsečík přímk AA_0 a BB_0 je bod V . Tento bod má stejnou vzdálenost od přímk C_0B_0, A_0B_0 a C_0A_0 . Proto bod V leží na přímce CC_0 .

Těžiště, ortocentrum a střed kružnice opsané

Využijme označení bodů v trojúhelníku ABC z předchozích kapitol. Nově označme S střed kružnice opsané tomuto trojúhelníku. Je to bod, ve kterém se protínají osy stran, které zde procházejí body A_1, B_1, C_1 (obr. 3).



Obr. 3

Osy stran trojúhelníku ABC jsou v trojúhelníku $A_1B_1C_1$ jeho výškami s ortocentrem S . Trojúhelník $A_1B_1C_1$ je obrazem trojúhelníku ABC ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem $-\frac{1}{2}$. Proto je i bod S obrazem bodu V v této stejnolehlosti.

Takže body S, T, V leží na jedné přímce. A platí $|TV| = 2 \cdot |TS|$. Tato přímka se nazývá *Eulerova přímka*, často ji značíme e . Eulerova přímka existuje pro každý trojúhelník vyjma trojúhelníku rovnostranného, kde body S, T, V splývají.

Poznámky.

1. Obecně neplatí pro každý trojúhelník, že na Eulerově přímce leží i střed kružnice vepsané tomuto trojúhelníku.
2. Trojúhelník $A_1B_1C_1$ se nazývá *příčkový trojúhelník* trojúhelníku ABC .
3. Trojúhelník $A_0B_0C_0$ se nazývá *ortický trojúhelník* trojúhelníku ABC .
4. Bod L ležící na Eulerově přímce, který je středově souměrný s bodem V podle bodu S , se nazývá *Longchampův bod*.

Úlohy k samostatnému řešení

Úloha 1

Ověřte, že v pravoúhlém trojúhelníku s jedním ostrým úhlem o velikosti 60° neleží střed kružnice vepsané na Eulerově přímce.

Úloha 2

Jsou dány soustředné kružnice k, l se středem S , l leží vně k . Na kružnici l je dán bod B , z něhož jsou vedeny tečny kružnice k s body dotyku T_1, T_2 . Označme P průsečík kružnice k a úsečky BS . Přímky ST_1, ST_2 protínají kružnici l v bodech U_1, U_2 . Dokažte, že body U_1, U_2, P leží na jedné přímce.

Úloha 3

Dokažte pro tupoúhlý trojúhelník ABC s patami A_0, B_0, C_0 kolmic vedenými postupně z vrcholů A, B, C na protilehlé strany a ortocentrem V , že body C, V, C_0 leží na jedné přímce.

Úloha 4 (Obměna Nagelovy věty.)

Označme v trojúhelníku ABC paty A_0, B_0, C_0 kolmic vedených postupně z vrcholů A, B, C na protilehlé strany, střed S kružnice trojúhelníku opsané a patu P kolmice z vrcholu A na přímku B_0C_0 . Dokažte, že body A, P, S leží na jedné přímce.

Úloha 5

Je dán trojúhelník ABC . Sestrojíme rovnoběžníky $ABCP$ a $ABQC$. Dokažte, že body P, C, Q leží na jedné přímce.

Úloha 6

Dokažte, že prochází-li Eulerova přímka trojúhelníku některým jeho vrcholem, je trojúhelník pravoúhlý nebo rovnoramenný.

Úloha 7

Dokažte, že Longchampův bod trojúhelníku ABC je průsečíkem výšek trojúhelníku $A'B'C'$, jehož příčkový trojúhelník je ABC .

Úloha 8

Dokažte, že jsou totožné Eulerovy přímky trojúhelníku ABC a trojúhelníku $A'B'C'$, jehož příčkový trojúhelník je ABC .

Úloha 9

Mají-li dvě kružnice o nestejných poloměrech společnou tečnu, pak tato tečna prochází středem některé stejnolehlosti zobrazující jednu kružnici na druhou. Dokažte.

Úloha 10

Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dán vrchol C , průsečík výšek V a střed S kružnice opsané.

Návody k řešení zadaných úloh

Úloha 1: V pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB a jejím středem C_1 je Eulerova přímka CC_1 . Je-li $|\sphericalangle BAC| = 60^\circ$, je trojúhelník AC_1C rovnostranný. Takže Eulerova přímka svírá s přímkou AC úhel o velikosti 60° , kdežto střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na přímce, která svírá s přímkou AC úhel o velikosti 45° .

Úloha 2: Trojúhelníky SBT_1 a SU_1P jsou shodné, protože $|SB| = |SU_1|$, $|ST_1| = |SP|$, $|\sphericalangle BST_1| = |\sphericalangle U_1SP|$. Proto je $|\sphericalangle SPU_1| = |\sphericalangle SPU_2| = |\sphericalangle ST_1B| = 90^\circ$.

Úloha 3: Vyberme například situaci, kdy trojúhelník ABC je tupoúhlý s tupým úhlem při vrcholu B . Výšky z bodů A , B mají průsečík V . Orto-centrum trojúhelníku AVC je bod B . V tomto trojúhelníku je přímka AB výška s patou C_0 . Proto body C , V , C_0 leží na jedné přímce.

Úloha 4: Důkaz je naznačen pro ostroúhlý trojúhelník ABC . Označme $|\sphericalangle ACB| = \gamma$ a střed strany AB označme C_1 . Z důkazu výše již víme, že $|\sphericalangle CC_0B_0| = 90^\circ - \gamma$, takže $|\sphericalangle PC_0A| = \gamma$. Stejně tak pro středový úhel platí $|\sphericalangle C_1SA| = \gamma$. Proto jsou trojúhelníky SAC_1 a C_0AP podobné se shodným úhlem při vrcholu A , čímž je důkaz hotov.

Úloha 5: Označme $|\sphericalangle CAB| = \alpha$, $|\sphericalangle ABC| = \beta$, $|\sphericalangle ACB| = \gamma$. Potom $|\sphericalangle PCA| + |\sphericalangle ACB| + |\sphericalangle BCQ| = \beta + \gamma + \alpha = 180^\circ$.

Úloha 6: Uvažujme trojúhelník ABC s průsečíkem výšek V . Může být buď $C = V$, nebo $C \neq V$. V prvním případě je trojúhelník ABC pravoúhlý. Ve druhém případě je přímka CV zároveň výškou i těžnicí trojúhelníku ABC , takže trojúhelník je rovnoramenný.

Úloha 7: Trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou stejnohlé podle středu T , proto se výška AV zobrazí na výšku $A'L$.

Úloha 8: Na Eulerově přímce trojúhelníku ABC leží průsečík výšek L a těžiště T trojúhelníku $A'B'C'$.

Úloha 9: Střed kružnic označme O_1, O_2 , body dotyku kružnic se společnou tečnou označme T_1, T_2 . Je $O_1T_1 \parallel O_2T_2$, protože jsou obě přímky kolmé ke společné tečně. Proto je obrazem bodu T_1 bod T_2 v nějaké stejnoolehlosti zobrazující jednu kružnici na druhou, proto tečna T_1T_2 prochází středem této stejnoolehlosti.

Úloha 10: Sestrojíme těžiště T na Eulerově přímce, střed C_1 strany AB , kolmici bodem C_1 k přímce CV a kružnici opsanou trojúhelníku ABC .

Závěr

Prezentovali jsme všeobecně známá, ale i méně známá tvrzení o přímkách v trojúhelníku, které jsme zde dokázali. Jiné důkazy lze nalézt v mnohé literatuře. Zde uvedme jen jako příklady [1, s. 55–58], [2, s. 38–43], [3, s. 172–173], [4, s. 28–51]. Další důkazy budou obsahem pokračování našeho tématu v následujících číslech tohoto časopisu.

V pokračování tohoto článku také poukážeme na jiné, méně známé trojice bodů ležící na jedné přímce.

Literatura

- [1] Boček, L., Zhouf, J.: Planimetrie. 2. rozšířené vydání, PedF UK, Praha, 2012.
- [2] Kadleček, J.: Geometrie v rovině a prostoru. Prometheus, Praha, 1996.
- [3] Pomykalová, E.: Matematika pro gymnázia. Planimetrie. Prometheus, Praha, 1993.
- [4] Švrček, J., Vanžura J.: Geometrie trojúhelníka. SNTL, Praha, 1988.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 271 a 272 můžete zaslat nejpozději do 31. 12. 2021 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz.

Úloha 271

Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, pro něž nabývá výraz

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$$

celočíslných hodnot.

Jaroslav Švrček

Úloha 272

V soutěži pro čtyři účastníky je deset úkolů ohodnocených postupně 1, ..., 10 body. Body za každý úkol dostane jen ten, kdo úkol splní jako první. Jakmile jsou všechny úkoly splněny, každý soutěžící si sečte své body a určí se pořadí soutěžících (nejprve dle bodů, při rovnosti bodů rozhoduje o pořadí los). Pepa začíná dříve než ostatní, může si vybrat, které úkoly splní, a chce mít zaručeno, že nebude poslední. Dokažte následující dvě tvrzení:

- a) Stačí mu k tomu získat 14 bodů.
- b) Stačí mu k tomu získat 13 bodů.

Josef Tkadlec

Dále uvádíme řešení úloh 267 a 268, jejichž zadání jsme zveřejnili v úvodním čísle aktuálního (30.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 267

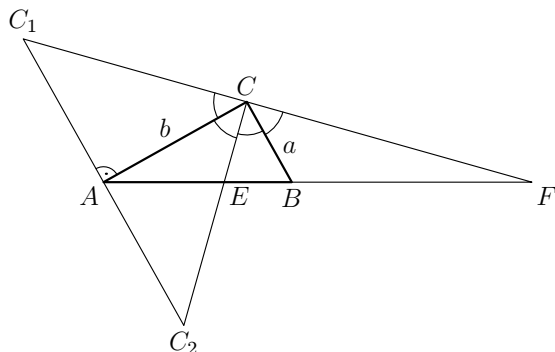
V pravoúhlém trojúhelníku ABC s odvěsnami délek $|BC| = a$ a $|AC| = b$, $a < b$, protnou osy jeho vnitřního a vnějšího úhlu při vrcholu C přímku AB po řadě v bodech E a F . Určete obsah trojúhelníku EFC .

Jaroslav Zhouf

Řešení. Sestrojme pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky ACC_1 a ACC_2 s pravými úhly u vrcholu A dle obrázku. Protože osy vnitřního a vnějšího

úhlu u vrcholu C trojúhelníku ABC jsou navzájem kolmé, svírají se stranami AC a BC tohoto trojúhelníku úhly 45° . Body C_1 a C_2 tak leží po řadě na těchto osách CF a CE . Přitom platí

$$|AC_1| = |AC_2| = b, \quad |CC_1| = |CC_2| = b\sqrt{2}.$$



Z podobnosti trojúhelníků BCE a AC_2E (uu) plyne

$$\frac{a}{b} = \frac{|BC|}{|AC_2|} = \frac{|CE|}{|CC_2| - |CE|} = \frac{|CE|}{b\sqrt{2} - |CE|}.$$

Odtud již po úpravě dostaneme

$$|CE| = \frac{ab\sqrt{2}}{b+a}.$$

Z podobnosti trojúhelníků BCF a AC_1F (uu) dále plyne

$$\frac{a}{b} = \frac{|BC|}{|AC_1|} = \frac{|CF|}{|CF| + |CC_1|} = \frac{|CF|}{|CF| + b\sqrt{2}}.$$

Opět úpravou dostaneme

$$|CF| = \frac{ab\sqrt{2}}{b-a}.$$

Obsah P_{CEF} pravoúhlého trojúhelníku CEF tak je roven

$$P_{CEF} = \frac{1}{2} \cdot |CE| \cdot |CF| = \frac{1}{2} \cdot \frac{ab\sqrt{2}}{b+a} \cdot \frac{ab\sqrt{2}}{b-a} = \frac{a^2b^2}{b^2-a^2}.$$

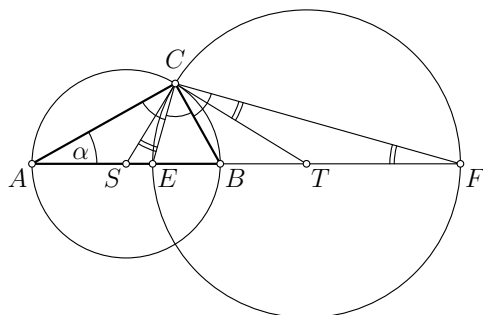
Poznámka. Velikosti stran $|CE|$ a $|CF|$ můžeme také spočítat následujícím způsobem. Označme β velikost vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu C . Osa pravého úhlu ACB svírá s přímkou CB úhel 45° , odtud snadno vypočteme $|\sphericalangle BEC| = 135^\circ - \beta$. Podle sinové věty platí

$$\begin{aligned} |CE| &= |BC| \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(135^\circ - \beta)} = a \cdot \frac{2 \sin \beta}{\sqrt{2} \cos \beta + \sqrt{2} \sin \beta} = \\ &= a \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cotg \beta + 1} = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{\frac{a}{b} + 1} = \frac{ab\sqrt{2}}{b + a}. \end{aligned}$$

Označme α velikost vnitřního úhlu trojúhelníku ABC při vrcholu A . Podobně jako v předcházejícím odstavci vypočteme $|\sphericalangle AFC| = 45^\circ - \alpha$. Podle sinové věty v trojúhelníku AFC platí

$$\begin{aligned} |CF| &= |AC| \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(45^\circ - \alpha)} = b \cdot \frac{2 \sin \alpha}{\sqrt{2} \cos \alpha - \sqrt{2} \sin \alpha} = \\ &= b \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cotg \alpha - 1} = b \cdot \frac{\sqrt{2}}{\frac{b}{a} - 1} = \frac{ab\sqrt{2}}{b - a}. \end{aligned}$$

Jiné řešení. Osy vnitřního a vnějšího úhlu u vrcholu C trojúhelníku ABC jsou navzájem kolmé, trojúhelník CEF je tak pravoúhlý. Označme S střed úsečky AB , tedy střed kružnice opsané trojúhelníku ABC a T střed úsečky EF , tedy střed kružnice opsané trojúhelníku CEF . Stejně jako v předcházejícím řešení ukážeme, že osy vnitřního a vnějšího úhlu u vrcholu C trojúhelníku ABC svírají s jeho stranami úhel 45° .



Z trojúhelníku AFC plyne při označení $|\sphericalangle BAC| = \alpha$

$$\begin{aligned} |\sphericalangle TCF| &= |\sphericalangle CFT| = 180^\circ - |\sphericalangle ACF| - |\sphericalangle CAF| = 180^\circ - 135^\circ - \alpha = \\ &= 45^\circ - \alpha = |\sphericalangle ACE| - |\sphericalangle ACS| = |\sphericalangle SCE|. \end{aligned}$$

Trojúhelník SCT je tak pravoúhlý, přitom $|\sphericalangle CST| = 2|\sphericalangle CAB| = 2\alpha$. Platí tak

$$\frac{|CT|}{|CS|} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{2 \frac{a}{b}}{1 - \frac{a^2}{b^2}} = \frac{2ab}{b^2 - a^2}.$$

Označme P_{ABC} a P_{CEF} po řadě obsahy trojúhelníků ABC a ECF . Protože oba mají stejnou výšku z vrcholu C , platí

$$S_{CEF} = S_{ABC} \cdot \frac{|EF|}{|AB|} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{2|CT|}{2|CS|} = \frac{ab}{2} \cdot \frac{2ab}{b^2 - a^2} = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}.$$

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně a *Michal Pecho* ze SPŠ v Dubnici nad Váhom (Slovensko).

Neúplné řešení zaslal *Piotr Kulisz* ze ZSOT v Lublinci (Polsko).

Úloha 268

V oboru reálných čísel najděte řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} px + 2y &= 2, \\ x + (p^2 - 3)y &= p - 1 \end{aligned}$$

s reálným parametrem p .

Pavel Calábek

Řešení. Druhou rovnici vynásobíme $-p$ a přičteme k první rovnici. Dostaneme tak

$$y(2 + 3p - p^3) = 2 + p - p^2.$$

Tuto rovnici upravíme

$$y(2 - p)(p + 1)^2 = (2 - p)(p + 1).$$

Vidíme, že pro $p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ platí

$$y = \frac{1}{p + 1}.$$

Z druhé rovnice pak pro tato p dostaneme

$$x = (p - 1) - (p^2 - 3)y = p - 1 - \frac{p^2 - 3}{p + 1} = \frac{2}{p + 1}.$$

Pro $p = -1$ má soustava tvar

$$\begin{aligned}-x + 2y &= 2, \\ x - 2y &= -2.\end{aligned}$$

Jelikož druhá rovnice je násobkem první, má tato soustava nekonečně mnoho řešení

$$y = t, \quad x = 2(t - 1), \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}.$$

Pro $p = 2$ má soustava tvar

$$\begin{aligned}2x + 2y &= 2, \\ x + y &= 1.\end{aligned}$$

Jelikož první rovnice dvojnásobkem první, má tato soustava nekonečně mnoho řešení

$$y = t, \quad x = 1 - t, \quad \text{kde } t \in \mathbb{R}.$$

Závěr. Pro $p = -1$ má soustava nekonečně mnoho řešení

$$(x, y) \in \{(2(t - 1), t), \text{ kde } t \in \mathbb{R}\}.$$

Pro $p = 2$ má soustava nekonečně mnoho řešení

$$(x, y) \in \{(1 - t, t), \text{ kde } t \in \mathbb{R}\}.$$

Pro zbývající $p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ má soustava jediné řešení

$$(x, y) = \left(\frac{2}{p+1}, \frac{1}{p+1} \right).$$

Správné řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, *Anton Hnáth* z Moravan, *Piotr Kulisz* ze ZSOT v Lublinci (Polsko) a *Michal Pecho* ze SPŠ v Dubnici nad Váhom (Slovensko).

Neúplné řešení zaslal *František Jáchim* z Volyně.

Pavel Calábek

Na akustiku s tabletem nebo smartphonem

OLGA SMETANOVÁ – LUKÁŠ RICHTEREK

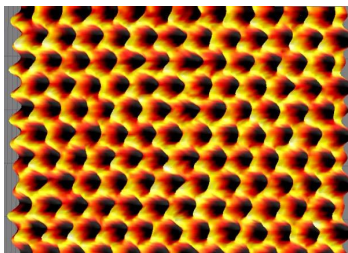
Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Text článku vychází z diplomové práce [1], která je volně dostupná a zahrnuje experimenty z následujících tematických oblastí: demonstrace rázů pro kmitavé pohyby, akustická analogie řádkovací tunelové mikroskopie, měření rychlosti zvuku ve vzduchu, studium vlastností zvuku (především zvukových spekter tónů zahranych na různé hudební nástroje), orientační měření hlasitosti a intenzity zvuku, audiometrické měření, demonstrace principu sonaru a Dopplerova jevu. Měření pomocí tabletů a smartphonů je bezpochyby jednou z možností, jak tato zařízení smysluplněji využít ve výuce v duchu trendů „Bring Your Own Device“ a je mu věnována řada článků a návodů (poněkud reprezentativnější výčet aktuální k datu odevzdání je uveden v samotné diplomové práci [1], zde zmiňme alespoň přehledovou publikaci [2]). V práci se zaměřujeme na pokusy z akustiky a většina z nich využívá volně dostupné aplikace PhyPhox [3]. Jako „ochutnávku“ zde blíže rozeberme čtyři experimenty, k nimž bylo na smartphonu využito senzoru hladiny intenzity zvuku a tónového generátoru.

1. Akustická analogie řádkovací tunelové mikroskopie

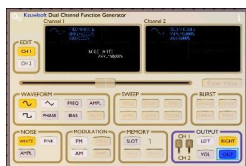
Vynález řádkovací tunelové mikroskopie (STM) hraje obrovskou roli při studiu mikroskopické struktury povrchů a rozvoji nanotechnologií. STM nám umožňuje zobrazovat atomy a molekuly, na druhou stranu teoretické pochopení této metody je pro středoškolského studenta náročné poměrně. Manfred Euler [4] navrhl akustický model, který dává do souvislosti zobra-

zení elektrického pole atomů mikroskopem (viz např. obr. 1) a „zobrazení“ či detekci dutin pomocí rezonance akustického signálu. Pro práci se dvěma smartphony (jeden v roli generátoru zvuku, jeden jako detektor) byla myšlenka rozpracována v [5]. Jako rezonátorové dutiny nám mohou posloužit prázdné plastové lahvičky od jogurtových nápojů uspořádané v řadě nebo rozmístěné na nějaké ploše, ty nám reprezentují „atomy na povrchu vzorku“. Namísto skenování pomocí tunelového jevu pak měříme zesílení či zeslabení amplitudy zvuku.

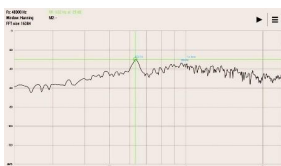


Obr. 1 Zobrazení vrstvy grafenu elektronovým mikroskopem (zdroj: Wikipedie)

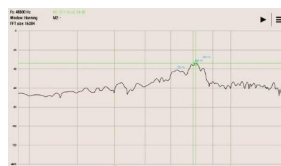
Nejprve musíme najít rezonanční frekvenci lahviček pomocí bílého šumu. Můžeme k tomu použít např. aplikaci *Function Generator* (<https://www.keuwl.com/FunctionGenerator/>) spuštěné na jednom telefonu (obr. 2a) jako generátor bílého šumu. Druhým telefonem pak zobrazíme zvukové spektrum nad dutinou lahvičky (našeho rezonátoru), např. pomocí aplikace *Advanced Spectrum Analyzer* (<https://play.google.com/store/apps/details?id=com.vuche.asap>), v našem případě vychází rezonanční frekvence 632 Hz (obr. 2b). Pokud do lahvičky nalijeme 40 ml vody, zkrátí se vzduchový sloupec v ní a rezonanční frekvence bude vyšší, v našem případě 811 Hz (obr. 2c).



a)



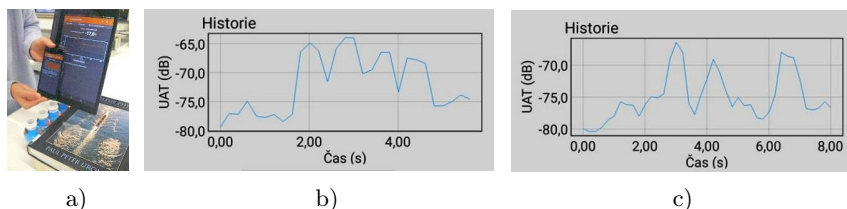
b)



c)

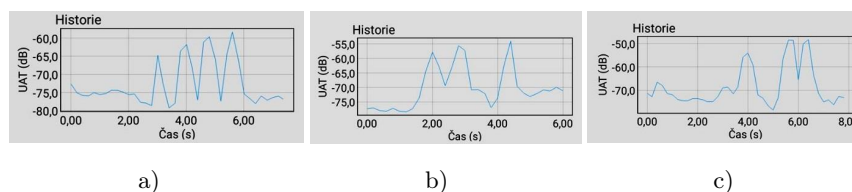
Obr. 2 Hledání rezonanční frekvence lahvičky pomocí bílého šumu: a) aplikace function generátor jako zdroj; b) spektrum nad prázdnou lahvičkou; c) spektrum nad lahvičkou se 40 ml vody

Při samotném měření pak nastavíme na generátoru harmonický tón nalezené rezonanční frekvence (např. 632 Hz pro prázdnou lahvičku) a projíždíme („skenujeme“) nad řadou lahviček, druhým telefonem zaznamenáváme zesílení a zeslabení zvuku (aplikací Phyphox/Amplituda zvuku [3]) jako na obr. 3a. Poloze lahviček odpovídá zesílení zvuku (obr. 3b). Pokud do jedné z lahviček (v našem případě třetí zleva) nalijeme vodu, změní se její rezonanční frekvence a k zesílení zvuku (nastaveného na rezonanci nad prázdnou lahvičkou) nedojde, bude „neviditelná“ (obr. 3c).



Obr. 3 Měření rezonančního zesílení zvuku nad soustavou lahviček: a) možné uspořádání experimentu; b) soustava čtyř prázdných lahviček; c) nad třetí lahvičkou, v níž je voda, k zesílení nedojde

Postup můžeme zopakovat pro lahvičky naplněné stejným množstvím vody (třeba 40 ml) a jejich nalezenou rezonanční frekvenci 811 Hz. Pokud obsahují všechny přibližně stejné množství vody, dojde k rezonančnímu zesílení zvuku nade všemi (obr. 4a), pokud např. třetí zleva vyprázdníme (obr. 4b) nebo do druhé zleva nalijeme 80 ml vody (obr. 4c), nad těmito lahvičkami k zesílení nedojde na záznamu je „nevidíme“.



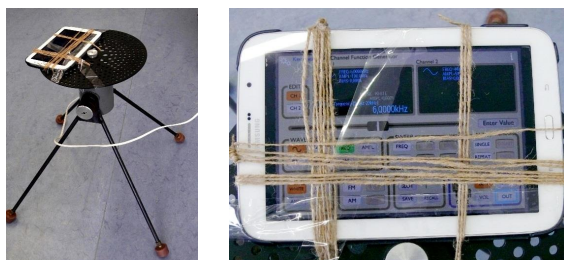
Obr. 4 „Skenování“ nad lahvičkami s vodou s nastavenou frekvencí 811 Hz: a) všechny lahvičky se 40 ml vody; b) třetí je prázdná; c) ve druhé je 80 ml

Experiment lze s větším počtem lahviček modifikovat rozmístěním na ploše namísto pouze v řadě, přesnějším zaznamenáváním polohy apod. Abychom nemuseli držet dva smartphony, je možné k záznamu zvuku použít sluchátka, jeden telefon pak může zůstat položený na stole. K udržení

alespoň přibližně stejné výšky telefonů nad lahvičkami lze ruku nebo telefon podepřít, např. knihami (obr. 3a). Lze si představit, že při uspořádání v rovině mohou „vrchy“ a „doly“ akustického signálu připomínat pole atomů na obr. 1.

2. Dopplerův jev

Jednou z možností demonstrace Dopplerova jevu je využití otáčivé desky (za předpokladu, že otáčení můžeme alespoň přibližně považovat za rovnoměrné). Telefon s reproduktorem umístěným na okraji otáčející se desky, se bude k přijímači (druhému telefonu) periodicky přibližovat a vzdalovat [6]. Abychom předešli poškození při sklouznutí přístroje, je nutné telefon nebo tablet na desce dostatečně připevnit (obr. 5). Jako zdroj můžeme opět použít aplikaci *Function generator*, která umožňuje zapnout či vypnout jednotlivé reproduktory (musíme se rozhodnout, který použijeme a změřit jeho vzdálenost od osy otáčení, v našem případě 15,5 cm).

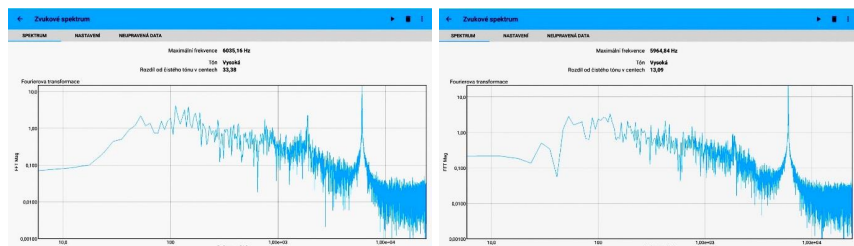


Obr. 5 Tablet jako generátor signálu o frekvenci 6 000 Hz na otáčivém kotouči a jeho upevnění se zapnutou aplikací *Function Generator*

Pomocí aplikace *Phyphox/Zvukové spektrum* lze zobrazit frekvenční spektrum a také hodnotu frekvence s maximální amplitudou, zvláště pro přibližování a zvláště pro vzdalování (obr. 6). Ze vztahů pro Dopplerův jev (viz např. [7]) pak můžeme dopočítat rychlost zdroje, např. pro údaje korespondující obr. 6 dostáváme

$$u = v_{\text{zvuk}} \left(1 - \frac{f_0}{f_1} \right) = v_{\text{zvuk}} \left(\frac{f_0}{f_2} - 1 \right) = v_{\text{zvuk}} \left(\frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2} \right) \doteq 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

pro obvyklou hodnotu $v_{\text{zvuk}} \doteq 340 \text{ m/s}$. Rychlost můžeme odhadnout i změřením frekvence otáčení (např. z doby 100 nebo 50 otočení) a vzdálenosti reproduktoru od osy otáčení. V uvedeném případě vyšlo 2,1 m/s, chyba se tedy pohybovala do 4 %.



Obr. 6 Zaznamenané frekvence pro přibližování $f_1 = 6035$ Hz a vzdalování $f_2 = 5965$ Hz pro $f_0 = 6000$ Hz; u výstupu programu byly invertovány barvy

K ověření či demonstraci Dopplerova lze použít i videozáznam jízdy automobilu po přímé silnici se zapnutým klaksonem při třech rychlostech: <https://www.youtube.com/watch?v=zF1g1vQvKzU>, analýzu bychom provedli analogicky.

3. Princip sonaru

Náš mobil nebo tablet se může proměnit i v jednoduchý sonar, který je jako přístroj příkladem aplikace znalostí šíření akustických vln. V praxi se využívá velmi často a princip je velice jednoduchý a snadno pochopitelný. Aplikace *Phyphox/Experiment Sonar* vysílá krátký zvuk a pomocí mikrofonu zaznamenává echa. Na základě toho pak vykresluje graf závislosti amplitudy ozvěny na vzdálenosti, popřípadě také závislosti amplitudy ozvěny na časovém zpoždění.

Při tomto experimentu je vhodné chránit telefon před nežádoucími ozvěnami (viz měření v laboratoři na obr. 7, kde je přístroj v krabici otevřeně pouze na jedné straně a ostatní stěny jsou obloženy izolací) nebo na základě vhodných indicií přiřadit měřené překážce správnou ozvěnu. Za vhodnou překážku může posloužit např. kovový táč, stěna nebo dveře (obr. 7).



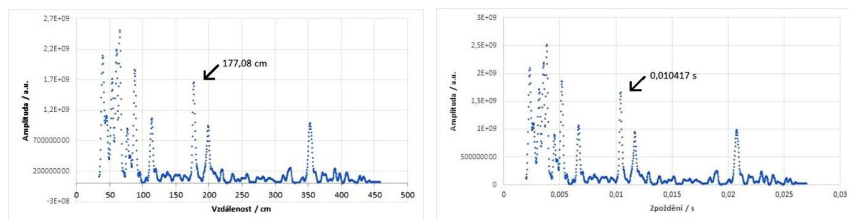
Obr. 7 Experiment sonar v laboratoři a při použití studenty Slovanského gymnázia v Olomouci

Při spuštění experimentu slyšíme „cvrlikání“ – zvuk s rychle se měnící frekvencí vysílaný aplikací. Podle popisu trvá každý takový signál 5 ms a frekvence se mění v rozsahu 1 kHz až 4 kHz, přičemž signál se opakuje vždy pětkrát v intervalu asi 30 ms.

Vyhodnocení vzdálenosti od překážky závisí na ručně zadávané rychlosti zvuku ve vzduchu. Při známé vzdálenosti překážky lze naopak odhadnout rychlost zvuku (viz údaje z grafů na obr. 8)

$$v = \frac{2l}{t} = \frac{2 \cdot 1,8 \text{ m}}{0,010417 \text{ s}} \doteq 346 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1},$$

což je v rozumném souladu s obecně přepokládanou hodnotou pro pokojovou teplotu okolo 20 °C (viz např. <http://www.converter.cz/tabulky/rychlost-zvuku-vzduch.htm>).



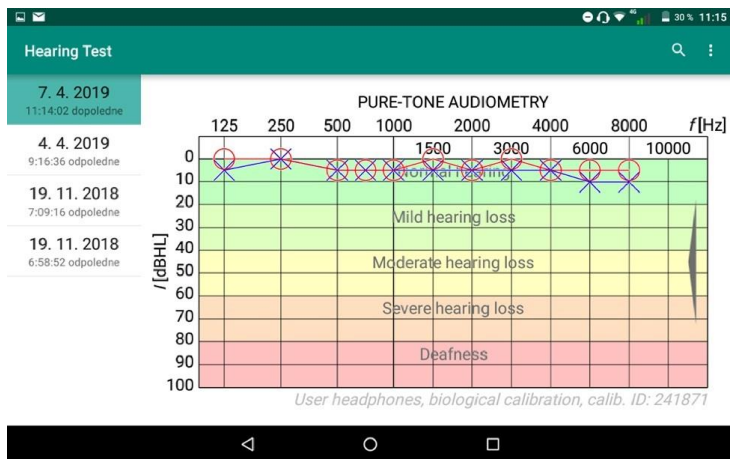
Obr. 8 Amplituda echa v závislosti na vzdálenosti a časovém zpoždění pro překážku ve vzdálenosti 1,8 m, rychlost zvuku ve vzduchu nastavena na 340 m/s

4. Audiometrické měření

Audiometrie je jedna metod vyšetření sluchu, kterou se testuje citlivost na jednotlivé frekvence ve slyšitelné oblasti. K jednoduchému testování lze opět využít tablet nebo smartphone – studenti si pomocí sluchátek a smartphonu mohou měřit úroveň sluchového prahu v závislosti na frekvenci zvuku. Mohou si tak prověřit kvalitu jejich sluchu, vyhodnotit naměřená data pro pravé a levé ucho zvlášť či porovnat své výsledky s ostatními spolužáky či členy rodiny. Experiment nabízí mezipředmětové propojení mezi fyzikou a biologií případně medicínou.

Závislost hladiny intenzity zvuku, který ještě slyšíme, na frekvenci nazýváme audiogram. Pro klinické použití je stupnice normalizována tak, že se stává přímkou při 0 dB pro všechny frekvence. Tato normalizovaná stupnice se vyznačuje jako dB HL. Pro normální sluch představuje tedy

závislost hladiny intenzity zvuku na frekvenci přímku v horní části audiogramu (viz obr. 9). Hodnota 0 dB pak představuje hodnotu, kterou mladý a zdravý jedinec ještě může slyšet. Čím níže se odchyľují naměřené hodnoty, tím větší je ztráta sluchu.

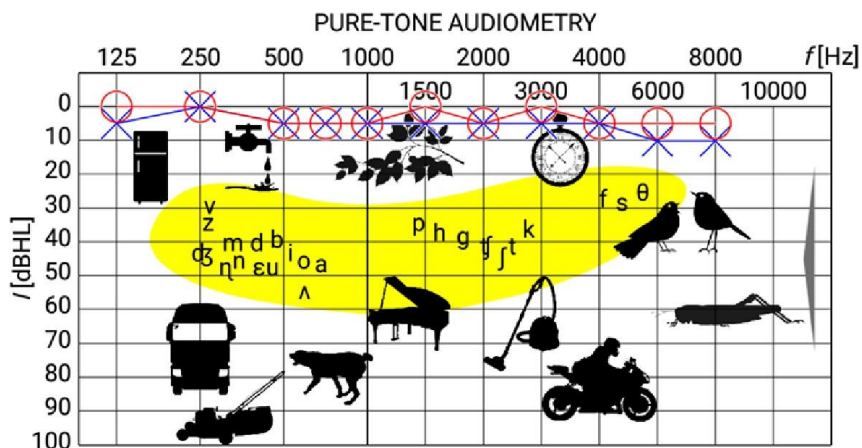


Obr. 9 Typický záznam měření v aplikaci *Hearing test* s barevně vyznačenou škálou ztráty sluchu pro nízké frekvence

Aplikace *Hearing test* (<https://www.e-audiologia.pl/HearingTest/>) dokáže generovat tóny různých frekvencí a různé intenzity a následně vykreslit audiogram. S originálními sluchátky ke smartphonu ani není nutná kalibrace. U vysokých frekvencí může dojít ke zkreslení díky frekvenční charakteristice reproduktorů, popř. sluchátek, neboť kvalitní přenos a podání vysokých frekvencí nejsou pro běžné telefonní hovory nutné.

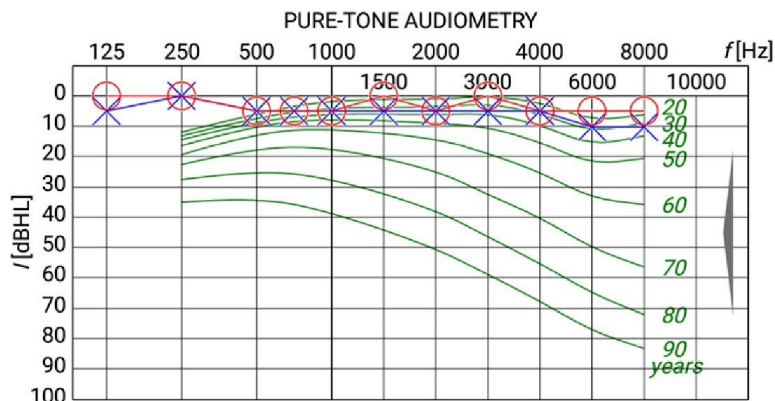
Aplikace postupně „pouští do ucha“ frekvence v rozsahu 125 Hz až 18 000 Hz pro každé ucho zvlášť. V záznamu měření pak může být barevně odlišena míra snížení sluchu (obr. 9). Dodejme ale, že získané výsledky nelze brát jako rovnocenné lékařskému vyšetření nebo jako podklad k vyslovování diagnózy. Závěry jsou orientační, ale mohou upozornit na případný problém či potřebu konzultace s lékařem, specialistou v oboru otorinolaryngologie (ORL).

Aplikace také dokáže znázornit typické frekvence některých běžných zvuků, jako se kapající kohoutek, vysavač, ptačí zpěv či některé hlásky lidské řeči (obr. 10).

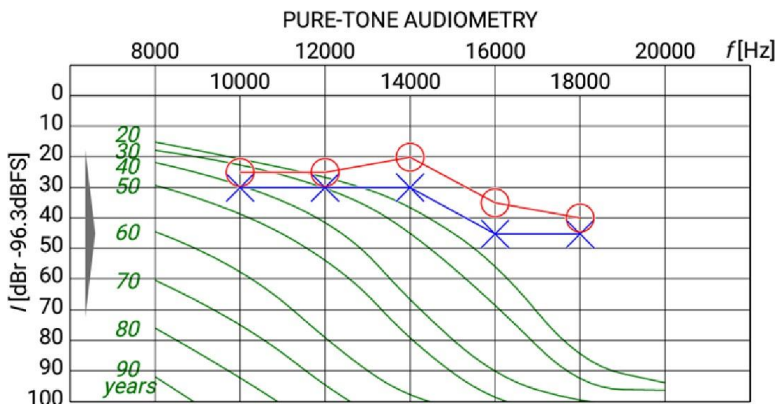


Obr. 10 Audiogram s typickými zvuky („Speech banana“) pro nižší frekvence v aplikaci *Hearing test*

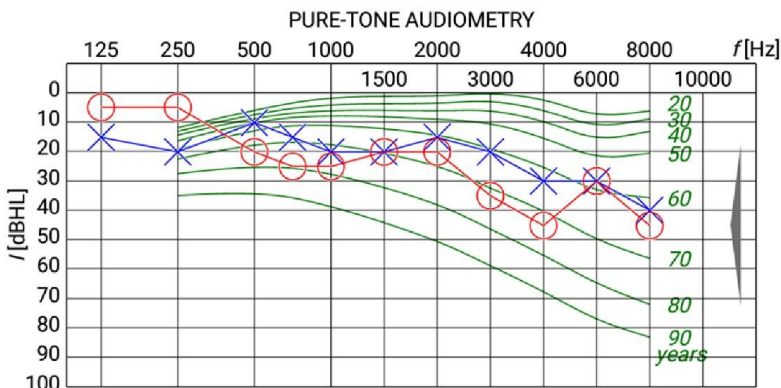
Provedli jsme měření na 3 osobách ve věku 22, 50 a 73 let (obr. 11, 12 a 13). Program v interpretačních diagramech znázorňuje i orientační normy pro daný věk. U padesátiletého muže (obr. 13) je patrné zhoršení sluchu oproti normativním hodnotám, naopak sluch mladé ženy odpovídá věku nebo je dokonce v oblasti vyšších frekvencí lepší (obr. 12).



Obr. 11 Audiogram ženy ve věku 22 let pro oblast nízkých frekvencí



Obr. 12 Audiogram ženy ve věku 22 let pro oblast vysokých frekvencí



Obr. 13 Audiogram muže ve věku 50 let pro oblast nízkých frekvencí, je patrné, že sluch je horší, než by odpovídalo věku

Naším cílem bylo realizovat experimenty bez speciálního drahého vybavení (smartphone nezapočítáváme, neboť žáci ho většinou mají) a pokud možno s běžně dostupnými pomůckami. Popsaná měření nevyžadují teoretické znalosti nad rámec učiva SŠ (konkrétně gymnázií) a zároveň jsou poměrně jednoduchá na realizaci i interpretaci naměřených dat. Naše zkušenosti z reakcí studentů gymnázia potvrzují, že využití smartphonů je pro ně velmi přirozené a snad by do určité míry mohlo podpořit jejich zájem a motivaci.

Literatura

- [1] *Smetanová, O.*: Jednoduchá fyzikální měření s tabletem nebo chytrým telefonem. Diplomová práce, UP, Olomouc, 2019. Dostupné z: <http://muj.optol.cz/richterek/doku.php?id=vyuka>.
- [2] Smartphones in Science Teaching iStage 2. In: Science on stage [online]. Berlin, 2014. Dostupné z: https://www.science-on-stage.eu/images/download/iStage_2_Smartphones_in_Science_Teaching.pdf.
- [3] *Phyphox*: Physical phone experiments. Dostupné z: <https://phyphox.org/>.
- [4] *Euler, M.*: Getting in touch with the nanoworld: Hands-on experiments and models to visualize nanoscale structures. In: Science and technology Education for the 21st Century (2014), DOI 10.13140/2.1.1728.2881.
- [5] *Thees, M. et al.*: Adaptation of acoustic model experiments of STM via smartphones and tablets. The Physics Teacher, roč. 55 (2017), č. 7, s. 436–437.
- [6] *Klein, P. et al.*: Classical experiments revisited: Smartphones and tablet PCs as experimental tools in acoustics and optics. Physics Education, roč. 49 (2014), č. 4, s. 412–418.
- [7] *Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.*: Fyzika 1. VUTIUM, Brno, 2013.

Určenie rýchlosti elektromagnetického vlnenia pomocou dvojvodičového vedenia z videozáznamu

ZUZANA GIBOVÁ – JÁN KECER

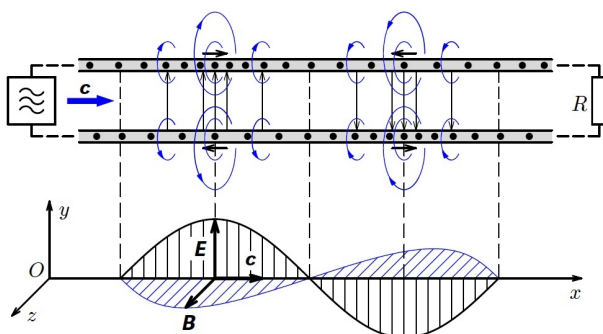
Fakulta elektrotechniky a informatiky, Technická univerzita v Košiciach, SLOVENSKO

Obdobie pandémie koronavírusu donútilo aj nás hľadať spôsob ako umožniť študentom merať experimenty dištančne. V minulosti sme pre našich študentov v rámci projektu Kega natáčali videá z rôznych oblastí fyziky a to nás podnietilo k natočeniu videozáznamov, ktoré sa môžu použiť pri meraní. Takéto meranie má svoje výhody aj nevýhody, ale prináša možnosť merať danú úlohu aj iným študentom a žiakom, ako aj pomôcť kolegom pri príprave a tvorbe hodín, ak sú videá prístupné na internete. V článku prezentujeme úlohu na určenie rýchlosti elektromagnetického

vlnenia pomocou dvojvodičového vedenia. Táto úloha je nenáročná na meranie a jednoduchým spôsobom umožňuje určiť rýchlosť elektromagnetickej vlny. Nie všetky školy majú k dispozícii takého vedenie so súborom pomôcok na meranie. Preto toto meranie pomocou videozáznamu pokladáme za vhodnú pomôcku pre učiteľov.

Princíp vzniku elektromagnetického vlnenia pomocou dvojvodičového vedenia

Dvojvodičové vedenie je sústava dvoch dutých medených rovnobežných trubičiek priemeru 6 mm, ktorých osi sú vo vzdialenosti 35 mm, a sú pripojené k vysokofrekvenčnému generátoru (obr. 1). Ak je na konci vodičov pripojený rezistor, vzniká medzi vodičmi premenné elektromagnetické pole, ktoré má charakter postupného elektromagnetického (EM) vlnenia. (Autorom vedenia, ktoré popisujeme v článku, je *doc. RNDr. Josef Hubeňák, CSc.*, pôsobiaci na Univerzite Hradec Králové [1]).



Obr. 1

Napätie generátora EM poľa sa harmonicky mení, preto náboj vo vodičoch nie je rozložený rovnomerne (v obr. 1 sú elektróny označené bodkami). Pozdĺž vodičov je rôzna elektrická intenzita E a teda aj rôzne elektrické pole. Prúd vo vodičoch má rovnakú fázu ako napätie, a tak v okolí vodičov vznikne premenné magnetické pole s indukciou B , ktorá je kolmá na smer intenzity E elektrického poľa. K vzniku postupného vlnenia s konštantnou amplitúdou pozdĺž celého vedenia dochádza len v prípade, ak je na konci vedenia rezistor (záťaž), ktorého hodnota je rovnaká ako charakteristická impedancia vedenia (tzv. impedančné prispôbenie), ktorej veľkosť

závisí od rozmerov vedenia. Popisované dvojvodičové vedenie je autorom navrhnuté tak, aby bola táto podmienka približne splnená. V tomto prípade je charakteristická impedancia (viď [1])

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = 372 \Omega \frac{\ln\left(\frac{h-r}{r}\right)}{\pi} = 280 \Omega,$$

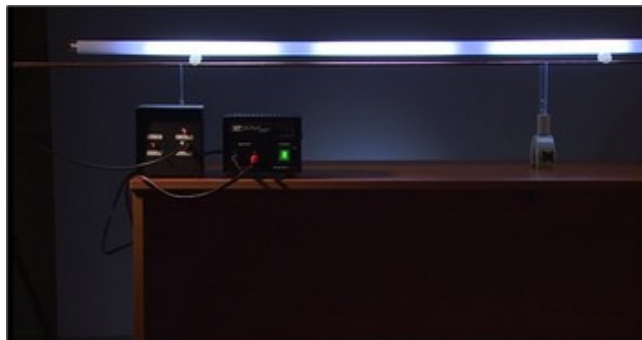
kde $r = 3$ mm je polomer vodičov, $h = 35$ mm je vzdialenosť osí vodičov a U_m , I_m sú amplitúdy napätia a prúdu. Odpor záťaže je 270Ω , tvoria ho štyri bezindukčné rezistory. EM pole, ktoré vzniklo medzi vodičmi, prenáša energiu prostredníctvom elektromagnetickej postupnej vlny za predpokladu, že sa celková elektromagnetická energia pohltí na konci vedenia (záťaže). Žiarivka položená na vedení celá svieti približne rovnakou intenzitou v dôsledku šíriacej sa postupnej EM vlny (obr. 2). Pozrite si aj video na stránke: <http://web.tuke.sk/feikf/video/elektromagneticke-vlnenie--postupna-vlna.html>.



Obr. 2

Ak sa časť energie na konci vedenia odráža, toto vlnenie sa skladá s postupným EM vlnením a vzniká stojaté elektromagnetické vlnenie. Stojaté vlnenie vytvoríme pomocou dvojvodičového vedenia tak, že na koniec vodičov nie je pripojený žiadny spotrebič (vedenie naprázdno). Na konci vodičov je v tomto prípade veľký odpor $R \rightarrow \infty$, preto napätie dosahuje na konci vedenia svoje maximum. Prúd naopak má nulovú hodnotu (vedenie je rozpojené). Teda na konci vedenia vznikla kmitňa napätia a uzol prúdu. Vo vzdialenosti $\lambda/4$ od konca vodičov je to naopak. Pozdĺž drôtov vzniká fázový rozdiel medzi napätím a prúdom $\pi/2$, vo vzniknutej stojatej vlne pozorujeme kmitne a uzly napätia a prúdu. Žiarivka

položená na vedení nesvieti rovnakou intenzitou, ale má tmavé a svetlé miesta (obr. 3). Pozrite si aj video na stránke <http://web.tuke.sk/feikf/video/elektromagneticke-vlnenie---stojata-vlna.html>.



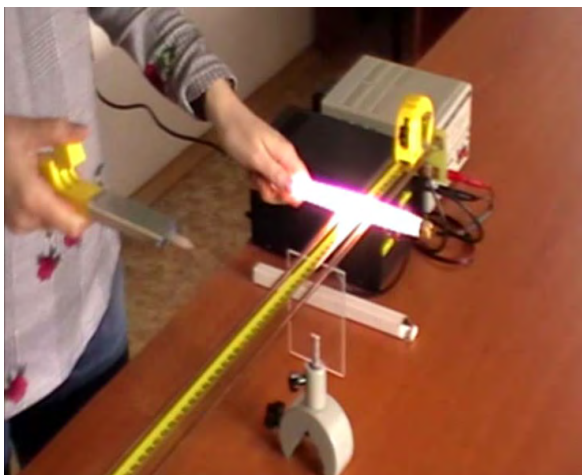
Obr. 3

Ak vzdialenosť medzi dvoma susednými uzlami napätia označíme d , potom $d = \lambda/2$. Odmeraním vzdialenosti uzlov pri danej frekvencii zdroja sa pomocou vzťahu pre vlnovú dĺžku $\lambda = c/f$, určí rýchlosť elektromagnetickej vlny c .

Určenie rýchlosti EM vlny z videozáznamu

Na videu je k dvojvodičovému vedeniu pripojený vysokofrekvenčný zdroj s frekvenciou $f = 433,92$ MHz, pomocou ktorého medzi vodičmi vytvoríme stojatú EM vlnu tak, že na koniec vodičov nepripojíme žiadny spotrebič (vedenie naprázdno). Medzi vodičmi je umiestnené pásmové meradlo, ktoré slúži na určenie polohy uzlov vzhľadom na prázdny koniec drôtov. Na detekciu uzlov použijeme menšiu dekoračnú žiarivku (obr. 4), ktorú posúvame pozdĺž celého vedenia. Miesta, v ktorých žiarivka zhasne, sú uzly. Pri danej frekvencii zdroja a dĺžke vodičov vieme pozdĺž vedenia detegovať 6 uzlov.

Na videu je natočený celý priebeh posúvania dekoračnej žiarivky pozdĺž vedenia ako aj detailnejší pohľad na jednotlivé uzly (obr. 5), ktorý umožňuje určiť ich polohu v danom čase s presnosťou ± 1 mm z pásmového meradla (vzhľadom na ostrosť natočeného videa). Natočili sme tri verzie videomeraní s rôznymi polohami uzlov, sú umiestnené na našej katedrovej stránke <http://web.tuke.sk/feikf/video/videomerania-.html>.



Obr. 4



Obr. 5

V ďalšej časti sú uvedené namerané hodnoty a ich spracovanie z druhého videomerania [6] – polohy uzlov (l) odmerané vzhľadom na prázdny koniec drôtov, rozdiel vzdialenosti medzi dvoma susednými uzlami (d), vypočítaná vlnová dĺžka (λ) a vypočítaná rýchlosť EM vlny (c) ako aj hodnoty sumy a výberového priemeru pre vzdialenosť medzi dvoma susednými uzlami, vlnovú dĺžku a rýchlosť EM vlny (pri výpočtoch bola použitá frekvencia 433,9 MHz).

n	l/cm	d/m	λ/m	$c/(10^8 \text{ m/s})$
1	180,8			
2	146,5	0,343	0,686	2,977
3	111,7	0,348	0,696	3,020
4	77,3	0,344	0,688	2,985
5	42,9	0,344	0,688	2,985
6	8,4	0,345	0,690	2,994
Suma:		1,724	3,448	14,961
Výberový priemer:		0,345	0,690	2,992

Tab. 1

Porovnaním výberového priemeru vypočítanej rýchlosti EM vlny z hodnôt v tab. 1 s jej zaokrúhlenou tabuľkovou hodnotou $c_{\text{tab}} = 2,988 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ [4], je relatívna chyba merania približne 0,2 %

$$\delta_c = \frac{\bar{c} - c_{\text{tab}}}{c_{\text{tab}}} \cdot 100 \% = \frac{2,992 \cdot 10^8 - 2,988 \cdot 10^8}{2,988 \cdot 10^8} \cdot 100 \% = 0,2 \%$$

K podobnému výsledku dôjdeme aj bez použitia tabuľky pomocou krajných polôh uzlov (1. a 6. uzol)

$$c = \frac{l_1 - l_6}{2,5} f = \frac{1,808 - 0,084}{2,5} \cdot 433,9 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 2,992 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Záver

Prezentovaný spôsob určenia rýchlosti elektromagnetického vlnenia pomocou dvojvodičového vedenia a nami natočených videozáznamov umožňuje ľahko určiť polohy uzlov stojatého EM vlnenia a pomocou nich vypočítať rýchlosť EM vlnenia, ktorá aj napriek kvalite videozáznamu a osobnej chybe merajúceho, vychádza porovnateľná s tabuľkovou hodnotou. Navyše meranie pomocou videozáznamu pôsobí navonok efektne a môže zaujať žiakov. Jeho umiestnenie na našej katedrovej stránke umožňuje uskutočniť toto meranie dištančne alebo ho využiť pri meraní v rámci prezenčnej výučby, nakoľko trvá menej ako 2 minúty.

Literatúra

- [1] *Hubeňák, J., Hubeňák, J.*: Historické pokusy s elektromagnetickou vlnou a dnešní technické možnosti. Dostupné na: <http://vnuf.cz//sbornik/prispevky/07-07-Hubenak.html>
- [2] *Lepil, O.*: Elektronika ve škole. SPN, Praha, 1972.
- [3] *Gibová, Z.*: Fyzikálne meranie 2. Technická univerzita, Košice, 2015.
- [4] *Mikulčák J., Klímeš, B., Široký, J.*: Matematické fyzikálne a chemické tabuľky pre stredné školy. Slovenské pedagogické nakladateľstvo – Mladé letá, Bratislava, 2002.
- [5] *Lepil, O., Šedivý, P.*: Fyzika pro gymnázia. Elektřina a magnetismus. Prometheus, Praha, 2017.
- [6] <http://web.tuke.sk/feikf/video/files/Lecherove-droty-2.mp4>

Fyzikální klasifikace pohybu Ozobotem

PAVLA WEGENKITTLOVÁ – VLADIMÍR VOCHOZKA

Pedagogická fakulta Jihočeské univerzity, České Budějovice

Celý svět a vše v něm se pohybuje. Tělesa okolo nás, která se zdají na první pohled v klidu, se vůči jiným pohybují, vše lze shrnout jako relativnost klidu a pohybu.

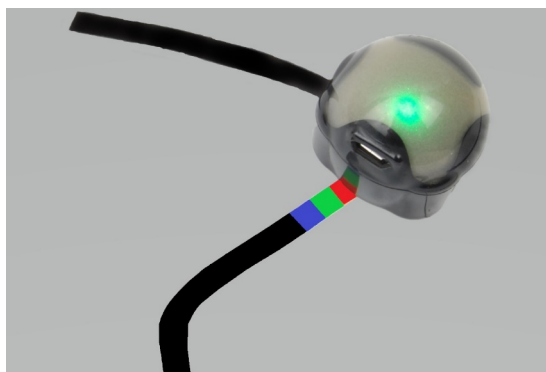
Popisem pohybu těles, jeho tříděním a porovnáváním se zabývá část fyziky zvaná kinematika. Pohyb definujeme na základě veličin dráha (a s ní související trajektorie), čas, rychlost (ať už okamžitá či průměrná) a zrychlení. Pomocí těchto veličin můžeme pohyb třídit do tří skupin. Například na základní a střední škole je to dle *trajektorie, změny velikosti rychlosti a trajektorie jednotlivých bodů* [1].

Pro zjištění, jaké klasifikace pohybu se učí žáci na základní škole, byla provedena rešerše pěti učebnic určených pro základní školy [2, 3, 4, 5, 6] a dvou pro střední školy [7, 8]. Ve všech učebnicích je pohyb rozdělen na *přímochybný a křivochybný, rovnoměrný a nerovnoměrný* a v neposlední řadě

na *posuvný* a *otáčivý*. Toto zjištění bylo použito pro tvorbu pracovního listu, jenž je zaměřen na *fyzikální klasifikaci pohybu Ozobotem*.

1. Akční výzkum a důvod vzniku pracovního listu

Oba autoři se na základě své pedagogické praxe na základní škole shodli, že se žáci setkávají s problémem klasifikace pohybu, „*nejsou si jisti, jak který pohyb vypadá, neumějí správně určit druh pohybu, zaměňují jednotlivé druhy mezi sebou*“. K vyloučení, že se nejedná o problém způsobený výkladem, tedy systematickou chybou, bylo v rámci strukturovaných rozhovorů osloveno 10 kolegů z praxe z jiných pracovišť. Na základě sesbíraných dat ze strukturovaných rozhovorů bylo zjištěno, „*že klasifikace pohybů je problémem týkajícím se více žáků*“. Proto byl navržen pracovní list, který pomocí moderní technologie v podobě Ozobotů (obr. 1) pomůže žákům ujasnit si rozlišování základních druhů pohybu.



Obr. 1 Ozobot pohybující se po jedné z trajektorií

Pracovní list vznikl na základě akčního výzkumu, jehož prvotní motivací byla snaha nalézt metodu, která by umožňovala reálně ovlivnit dosavadní praxi, a to při dodržení vědeckého přístupu. Na rozdíl od tradičního výzkumu je tedy akční výzkum zaměřen na uplatnění výsledků v praxi [9]. Akční výzkum je cyklický proces, dle modelu Stephena Kemmisa zahrnuje 4 kroky: *plánování, akci, pozorování a reflexi*. Výchoziskem je plán akce, po němž následuje pokus o jeho realizaci v praxi. Dalším krokem je analýza výsledků, jež umožňuje poslední krok prvního cyklu – reflexi. Na základě reflexe je plán akce revidován a postup se opakuje v dalším cyklu [10].

První cyklus

Před samotným navržením pracovního listu bylo třeba ověřit, zda je Ozobot vhodnou pomůckou, tj. zda dokáže konat rovnoměrný i nerovnoměrný pohyb a zda tento pohyb lze rozlišit pozorováním. Ověření bylo provedeno videoanalýzou v programu Tracker s pozitivním výsledkem. Vznikla první verze pracovního listu obsahující diferenciované úlohy umožňující zapojení žáků s různými úrovněmi znalostí.

V druhém kroku prvního cyklu byl vytvořený pracovní list pilotován ve třech paralelních třídách základní školy. Následně byly výsledky první pilotáže analyzovány a na základě analýzy výsledků byla zjištěna potřeba mírné úpravy k lepšímu pochopení zadání druhé úlohy.

Druhý cyklus

Reflexe prvního cyklu akčního výzkumu vedla k úpravě pracovního listu. Vznikla tak jeho druhá verze. V rámci akce druhého cyklu byl pozměněný pracovní list pilotován na jiných třech paralelních třídách stejné základní školy jako první verze pracovního listu. Při analýze výsledků byla kontrolována srozumitelnost zadání a míra úspěšnosti.

Druhá verze pracovního listu splňovala všechny stanovené předpoklady, proto již nebylo třeba žádných jejích změn. V dalším textu bude pod pojmem pracovní list myšlena vždy tato verze.

Třetí cyklus

Pracovní list byl již shledán jako vyhovující, a proto byl pilotně aplikován do praxe. Do vyplnění pracovního listu se zapojilo téměř dvě stě žáků základních škol Jihočeského kraje.

V jejich výsledcích byla sledována míra úspěšnosti a tím i diferenciací navržených aktivit. Podrobněji se výsledkům věnuje část 5. Na základě výsledků žáků a následného rozhovoru s jejich učiteli můžeme říct, že pracovní list je vhodnou pomůckou pro ujasnění a upevnění učební látky klasifikace pohybu.

2. Ozobot

Ozobot je edukační nástroj, který podle průvodní dokumentace rozvíjí kreativitu a logické myšlení. V průměru má 2,5 centimetru, jeho hmotnost je 17 gramů a ovládá se jedním spínačem. Na jeho spodní stěně je umístěno 5 optických senzorů, které reagují na barvu snímaného podkladu a tzv. ozokódy. Na základní desce je jednočipový mikropočítač s pomocnými obvody. Na trhu je k dostání ve dvou typech – Bit a novějším Evo,

se kterým je možno komunikovat i pomocí Bluetooth rozhraní. Na začátku října 2020 byla na stránkách alza.cz cena za model Bit 1 899 Kč [11] a model Evo 3 399 Kč [12]. Oba modely se dají koupit i ve školních sadách. Ty obsahují několik Ozobotů (12 či 18), USB huby pro jejich nabíjení a pro každého Ozobota sadu popisovačů (ozofixů) a silikonové pouzdro, dále pak ozokódy a manuál.

Ozoboti se dají programovat dvěma způsoby. První způsob využívá schopnosti Ozobota sledovat trajektorii křivky a rozeznat barvu jednotlivých bloků, obdélníků o rozměrech 5 mm × 6 mm, ze kterých může být křivka tvořena. Ozobot rozlišuje pět barev, a to černou, červenou, modrou, zelenou a bílou a jejich sekvence. Pokud se sekvence barev shoduje s příkazem v seznamu ozokódů, Ozobot tento příkaz po přečtení sekvence vykoná. Například se může jednat o změnu rychlosti či trajektorie. Seznam ozokódů je dodáván společně s Ozobodem, nebo je veřejně přístupný na internetu [13, 14]. Při kreslení čar je nutné dodržovat pokyny uvedené v manuálu, jinak Ozobot tuto čaru nezvládne přečíst, a tudíž se zastaví, či provede něco jiného. Dále je pro správnou funkci Ozobota důležité jeho pravidelné kalibrování.

Druhým způsobem ovládání Ozobota je programování v editoru OzoBlockly. Ten funguje na stejném principu jako programovací jazyk Scratch. Program se skládá z bloků podobných puzzle, programových elementů, které spojením tvoří scénáře, série příkazů. OzoBlockly má několik úrovní obtížnosti, tudíž v něm mohou programovat jak začátečníci, tak i pokročilí.

Ozobot je primárně navržen pro učení programování v informatice. Potenciál didaktické pomůcky lze využít i v jiných oborech, například ve fyzice. Ozoboti mohou být použiti jako tělesa, jejichž pohyb je možné analyzovat, protože při opakování příkazů vykazují vždy stejné chování.

3. Videoanalýza

Principem videoanalýzy je získávání dat o poloze bodů ve snímku záznamu a změny jejich polohy v čase u více snímků za sebou. Na základě změny v čase je možné určit okamžitou či průměrnou rychlost, zrychlení, či hybnost. Videoanalýza nachází své uplatnění především pokud sledovaný děj: *probíhá rychleji než lze pozorovat, probíhá dlouhou dobu, nelze zopakovat, je realizován za podmínek neumožňující účast pozorovatele či ho vyhodnocuje více osob na odlišných místech.*

Sledovaný děj je ideální umístit před vhodné kontrastní pozadí osvětlené denním světlem, případně z více zdrojů světla, aby nedocházelo k tvorbě

stínů či polostíňů. Pozorované těleso je vhodné dostatečně zvýraznit pro jeho lepší identifikaci, aby v některých snímcích nesplývalo s okolím a mělo jasně určené okraje. Software pro analýzu umožňuje automatické sledování určitého tvaru a barvy, doporučuje se použít barvu, která se jinde v záběru kamery neobjevuje a je tak snadno rozeznatelná a nezaměnitelná. Pro určení vzdáleností, se do záznamu zachycuje těleso se známou velikostí pro kalibraci měřítka. Ideální je umístit kameru na stativ, aby se odstranil pohyb obrazu způsobený držením v ruce. Objektiv kamery směřuje po celou dobu záznamu přímo na scénu experimentu ze stejné výšky, čímž se vyhneme zkreslení rozměrů perspektivou. Samozřejmostí je pořízení více záznamů s dostatečnou rezervou záznamu před a po konci pozorovaného děje. K videanalýze je možné používat mnoho programů, např. program Vernier Logger Pro 3, Viana či Tracker.

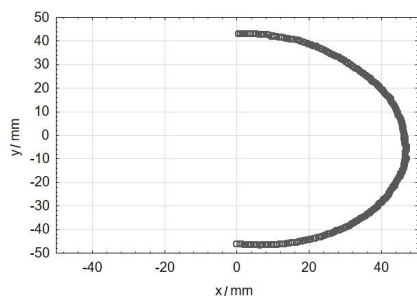
Tracker

Java program vyvinutý v rámci Open Source Physics (OSP) Douglosem Brownem pod licencí GNU GPL umožňuje provádět ruční i automatické sledování. Součástí je i možnost modelování kinetických a dynamických dějů.

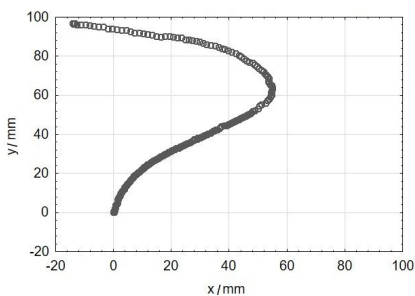
Všechny pohyby v navrženém pracovním listě byly analyzovány právě pomocí videanalýzy v programu Tracker. Obrázky 2–7 ukazují výsledky analýzy polohy hmotného bodu při pohybu jednotlivými trajektoriemi. Tím bylo ověřeno, že se Ozobot opravdu pohybuje podle zadaných příkazů a rozhodnutí o druhu jeho pohybu je tak jednoznačné. Dále je z analýzy patrné, kde Ozobot koná rovnoměrný pohyb a kde nerovnoměrný – změna rychlosti je znatelná ze zahuštění bodů označujících polohu Ozobota.

U trajektorií byla dále sledována změna polohy hmotného bodu v čase. Jako ilustrativní příklad slouží trajektorie 3 a 5 (obr. 8 a 9). U trajektorie 3 vidíme lineární závislost polohy na čase značící rovnoměrný pohyb. Z grafu pro pátou trajektorii je patrné, že se Ozobot nejprve pohybuje rovnoměrným pohybem, poté je 3 sekundy v klidu, následně se rozjede stejnou rychlostí jako na začátku trajektorie a v posledním úseku svou rychlost zvýší. Celkový pohyb trajektorií 5 je tedy nerovnoměrný.

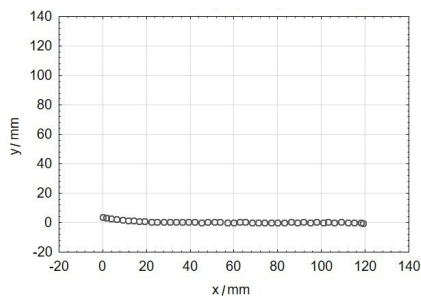
U dvou otáčivých pohybů (trajektorie 1 a 6) byla sledována také změna úhlové rychlosti v čase (obr. 10 a 11). U první jmenované trajektorie se Ozobot pohybuje po části kružnice, jeho úhlová rychlost se v čase nemění, jedná se tedy o rovnoměrný pohyb. Po projetí barevného kódu u trajektorie 6 se Ozobot začne otáčet kolem osy procházející jeho středem, jeho úhlová rychlost se v čase mění, a tudíž se jedná o pohyb nerovnoměrný.



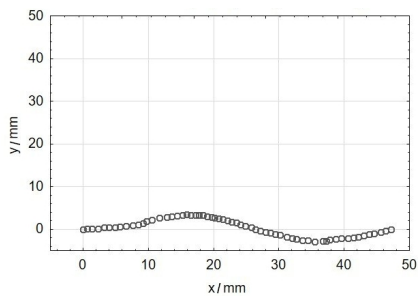
Obr. 2 Poloha hmotného bodu při pohybu trajektorií 1 úlohy 1



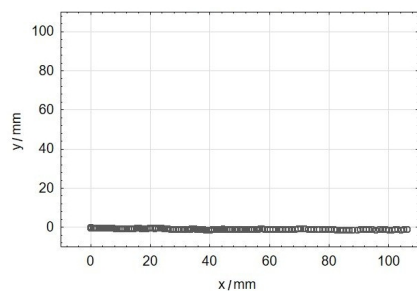
Obr. 3 Poloha hmotného bodu při pohybu trajektorií 2 úlohy 1



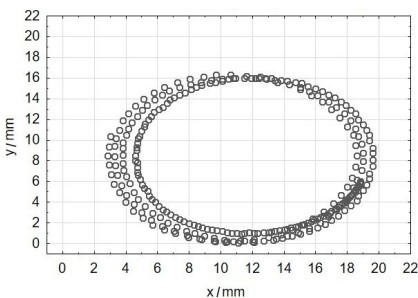
Obr. 4 Poloha hmotného bodu při pohybu trajektorií 3 úlohy 1



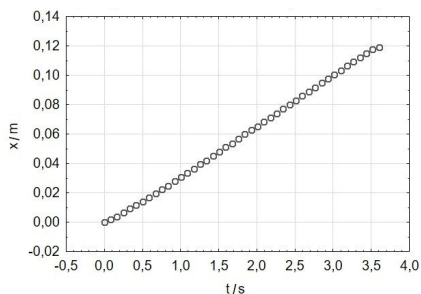
Obr. 5 Poloha hmotného bodu při pohybu trajektorií 4 úlohy 1



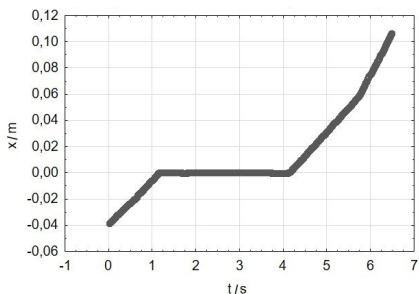
Obr. 6 Poloha hmotného bodu při pohybu trajektorií 5 úlohy 1



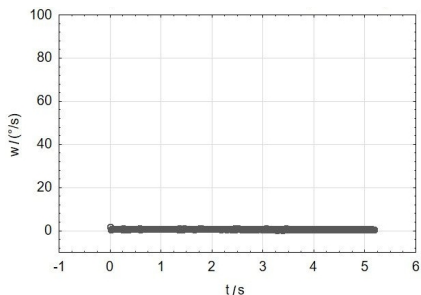
Obr. 7 Poloha hmotného bodu při pohybu trajektorií 6 úlohy 1



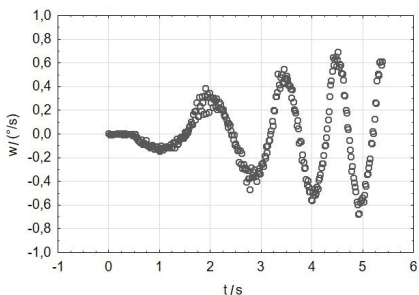
Obr. 8 Grafické vyhodnocení změny polohy hmotného bodu v čase u trajektorie 3 úlohy 1



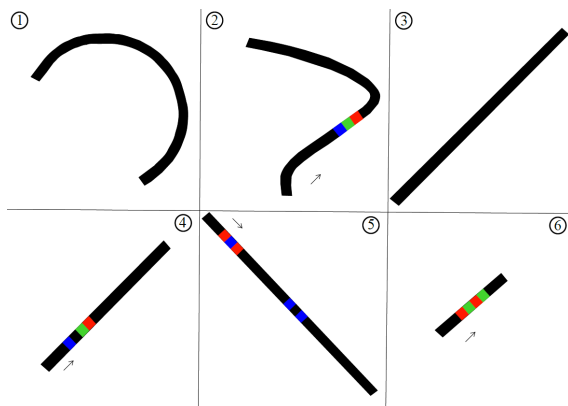
Obr. 9 Grafické vyhodnocení změny polohy hmotného bodu v čase u trajektorie 5 úlohy 1



Obr. 10 Změna úhlové rychlosti hmotného bodu v čase u trajektorie 1 úlohy 1



Obr. 11 Změna úhlové rychlosti hmotného bodu v čase u trajektorie 6 úlohy 1



Obr. 12 Trajektorie úlohy 1

4. Pracovní list

Pracovní list je navržen tak, aby obsahoval úlohy, do jejichž řešení se zapojí co nejvíce žáků nehlédě na jejich úroveň znalostí. Vznikly tři úlohy rozdílného charakteru, jejichž složitost postupně graduje.

Označ konaný pohyb

V první úloze žáci rozhodují o druhu pohybu na jednotlivých trajektoriích, které obdrží na přiloženém listě (obr. 12). Volí mezi: rovnoměrným $\times$ nerovnoměrným, posuvným $\times$ otáčivým a přímočarým $\times$ křivočarým pohybem. Svou volbu označí v přiložené tabulce 1. Na první pohled lze říct, některé druhy pohybu by se daly určit jen podle tvaru trajektorie. Je však důležité pouze neodhadovat výsledky, ale každou trajektorii vyzkoušet. Dále je v této úloze důležité upozornit na poznámku uvedenou u zadání „*U 4 a 6 sledujte pohyb Ozobota až po projetí barevným kódem*“. Jinak Ozobot u těchto trajektorií koná více druhů pohybu. Správné řešení první úlohy uvádí vzorově vyplněná tabulka 1.

Tabulka 1 Správné řešení úlohy 1

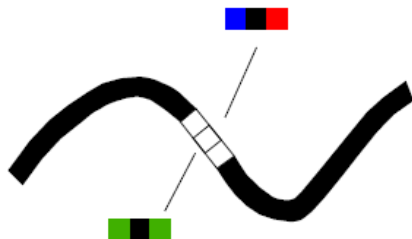
	rovnoměrný	nerovnoměrný	posuvný	otáčivý	přímočarý	křivočarý
1	X			X		X
2		X	X			X
3	X		X		X	
4	X		X		X	
5		X	X		X	
6		X		X		X

Vyber správný ozokód

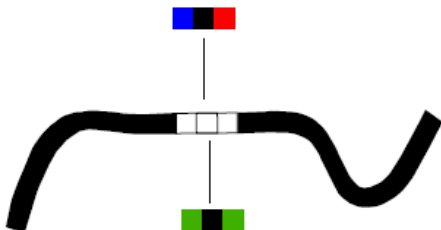
Druhá úloha obsahuje čtyři dílčí zadání. Žák má za úkol vybrat ze dvou nabízených ozokódů ten správný tak, aby se jednalo o zadaný pohyb (obr. 13). Význam ozokódů si může vyzkoušet mimo dráhu, nebo se podívat do seznamu ozokódů, které obdržel se zadáním. Následně správný kód překreslí do připravených okének. Po vpuštění Ozobota na vzniklou trajektorii tak může vyzkoušet správnost svého řešení.

2) Vyberte správný kód tak, aby se jednalo o zadaný pohyb. Mimo dráhu si můžete kódy vyzkoušet a následně ten správný zakreslit.

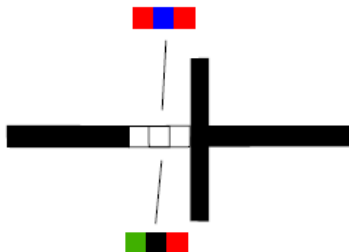
a) rovnoměrný křivočarý posuvný pohyb



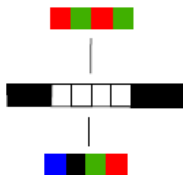
b) nerovnoměrný křivočarý posuvný pohyb



c) nerovnoměrný přímočarý posuvný pohyb



d) rovnoměrný křivočarý otáčivý pohyb



Obr. 13 Zadání úlohy 2

Vytvoř trajektorii

Ve třetí úloze žáci opět vytvářejí trajektorii podle zadaného typu pohybu. Zadání je formulováno následujícím způsobem:

- 3) Navrhněte vlastní trajektorii takovou, aby Ozobot jel:
a) rovnoměrným křivočarým posuvným pohybem;
b) nerovnoměrným přímočarým posuvným pohybem.

Tentokrát se však nerozhodují mezi dvěma ozokódy, nýbrž vybírají kód z celého seznamu ozokódů. Tato úloha má více správných řešení.

5. Výsledky práce žáků

Každá správná odpověď byla ohodnocena jedním bodem. Na výsledky žáků můžeme nahlížet z několika úhlů pohledu – podle úspěšnosti v jednotlivých úlohách, celkové úspěšnosti, míře zapojení do dílčích úloh anebo podle průměrné procentuální úspěšnosti. V následujících odstavcích se zaměříme na jednotlivé pohledy.

Úspěšnost v jednotlivých úlohách

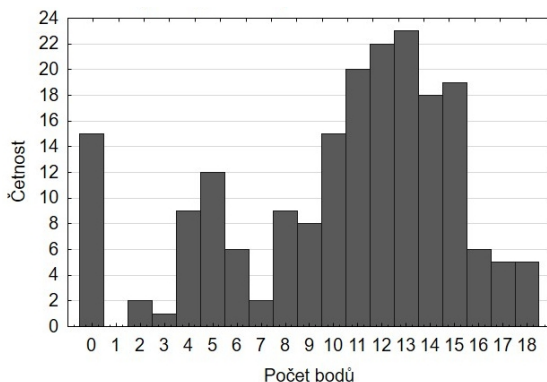
Do úlohy *Označ konaný pohyb* se ze 197 žáků zapojilo 182. Ti, kteří se nezapojili, získali za tuto úlohu nulové bodové ohodnocení. Získat bylo možné maximálně 18 bodů. Rozdělení bodového hodnocení uvádí obr. 14, z kterého je patrné, že další nejnižší ohodnocení je zisk dvou bodů. Nejvíce řešitelů obdrželo 13 bodů, a maximálního počtu bodů dosáhlo 5 řešitelů.

Úloha *Vyber správný ozokód* nabídla žákům zisk 4 bodů. Do úlohy se zapojilo méně žáků než u předchozí úlohy, a to 160. Úlohu vyřešilo na plný počet bodů 54 žáků, naproti tomu 7 žáků nezískalo žádný bod (tabulka 2).

V úloze *Vytvoř trajektorii* z 97 zapojených žáků získalo maximální bodové ohodnocení, tj. dva body, 55 řešitelů. Naopak 13 žáků obdrželo za úlohu nulové bodové ohodnocení (tabulka 3).

Celková úspěšnost

Dohromady mohli žáci získat 0–24 bodů. Celkem tedy 25 možností bodového hodnocení, které jsme rozdělili do 5 intervalů po 5 bodech. Výsledný histogram (obr. 15) jsme proložili Gaussovou křivkou. Oproti normálnímu rozložení je vrchol histogramu posunut doprava, tudíž můžeme říct, že žáci si v úlohách vedli nadprůměrně.



Obr. 14 Histogram bodového ohodnocení za úlohu 1

Tabulka 2 Bodové ohodnocení za úlohu 2

Počet bodů	Četnost
0	7
1	37
2	41
3	24
4	54

Tabulka 3 Bodové ohodnocení za úlohu 3

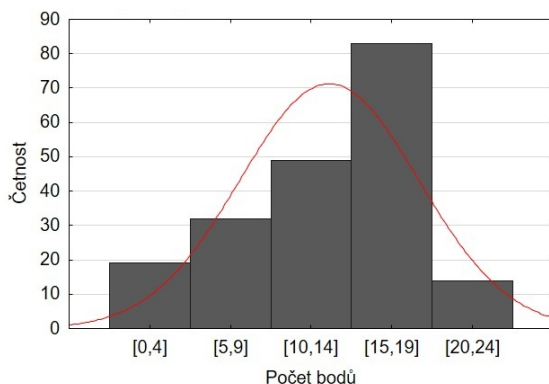
Počet bodů	Četnost
0	13
1	29
2	55

Míra zapojení do dílčích úloh

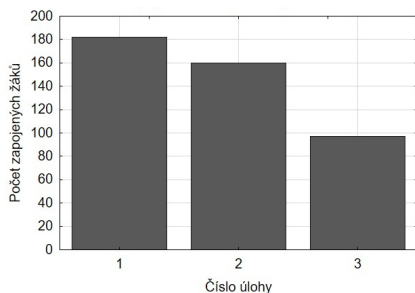
Dále můžeme u úloh sledovat míru zapojení žáků do jejich řešení. Z histogramu na obr. 16 je patrné, že ochota zapojit se klesá od první úlohy ke třetí. To koresponduje se stanoveným cílem tvorby úloh tak, že jejich složitost graduje.

Průměrná procentuální úspěšnost

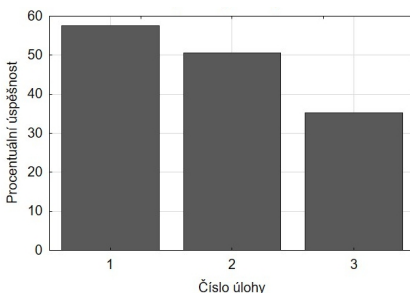
Výsledky žáků lze hodnotit z pohledu průměrné procentuální úspěšnosti (obr. 17). Opět je to v souladu s myšlenkou gradace úloh, průměrná procentuální úspěšnost v úlohách klesá. Zde se nabízí zajímavé srovnání s mezinárodním šetřením Programme for International Student Assessment (PISA). V roce 2012 publikovala Česká školní inspekce (ČŠI) publikaci vzniklou na základě šetření PISA 2009 [15]. V publikaci jsou úlohy děleny do čtyř typů, které lze aplikovat i na námi navržené úlohy.



Obr. 15 Histogram výsledného bodového ohodnocení žáků proložený Gaussovou křivkou



Obr. 16 Grafické znázornění míry zapojení žáků do jednotlivých úloh



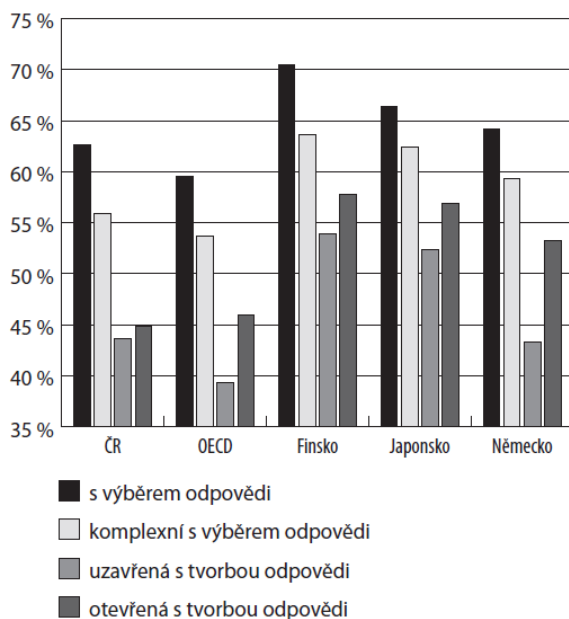
Obr. 17 Průměrná úspěšnost řešení jednotlivých úloh

Úlohu *Označ konaný pohyb* lze zařadit do typu „komplexní otázka s výběrem odpovědi – žáci vybírají jednu z odpovědí ano/ne v souboru minimálně dvou otázek“.

Druhá navržená úloha, *Vyber správný ozokód*, může být označena za „uzavřenou otázku s tvorbou odpovědi – žáci vytvářejí vlastní odpověď, jedná se však o odpověď vyjádřenou jen jedním či několika slovy (uvedení výsledku, dokreslení symbolu do obrázku apod.)“.

Úloha *Vytvoř trajektorii* je „otevřená otázka s tvorbou odpovědi – žáci odpovídají vlastními slovy, jedná se o odpověď rozsáhlejší (zdůvodnění, jak dospěli ke svému závěru, uvedení argumentů podporujících správnost či nesprávnost určitého tvrzení apod.)“.

V publikaci ČŠI je uveden i graf (obr. 18) průměrné úspěšnosti podle typu otázky. Je tady patrná podobnost mezi grafy průměrné procentuální úspěšnosti podle typu otázek z šetření PISA a z našeho šetření.



Obr. 18 PISA – vyhodnocení průměrné úspěšnosti podle typu otázky [15]

Závěr

Miniaturní programovatelné Ozoboty lze v hodinách fyziky využít jako variabilní pomůcku. Ozobot je dle provedených měření vhodným tělesem umožňujícím konat rovnoměrný či nerovnoměrný pohyb a zároveň je schopen se pohybovat přímočaře i křivočaře.

V konfrontaci s akčním výzkumem je možné konstatovat, že Ozobot ve výuce klasifikace pohybů podporuje konstruktivistický, nikoliv jen transmissivní styl výuky. Využívá aktivizující metody, heuristickou metodu, problémové vyučování, zkušenostní učení. V neposlední řadě navržená aktivita podporuje vzdělávací koncept STEAM. Jedná se o propojení fyziky jako vědy, Ozobota jako technologické pomůcky, tabulky a grafů z matematiky a vlastního navrhování trajektorií, tudíž prvky umění.

Literatura

- [1] *Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.*: Fyzika. 2. přeprac. vydání, VUTIUM, Brno, 2013.
- [2] *Tesař, J., Jáchim, F.*: Fyzika 2 pro základní školu: síla a její účinky – pohyb těles. SPN, Praha, 2015.
- [3] *Kolářová, R., Bohuněk, J.*: Fyzika pro 7. ročník základní školy. 2. upravené vydání, Prometheus, Praha, 2003.
- [4] *Míček, A., Kroupa, R.*: Fyzika II: učebnice pro 7. ročník (2. vydání). Tvořivá škola, Praha, 2011.
- [5] *Holubová, R., Kubínek, R., Weinlichová, J., Weinlich, R.*: Fyzika II 1. díl (pohyb, síla): Učebnice fyziky pro ZŠ a víceletá gymnázia. Prodos, Olomouc, 2006.
- [6] *Rauner, K., Havel, V., Prokšová, J., Randa, M.*: Fyzika 7: učebnice pro základní školy a víceletá gymnázia. Fraus, Plzeň, 2005.
- [7] *Štoll, I.*: Fyzika pro netechnické obory SOŠ a SOU. Prometheus, Praha, 2001.
- [8] *Bednařík, M., Šířoká, M.*: Fyzika pro gymnázia: Mechanika. 3. vydání, Prometheus, Praha, 2000.
- [9] *Oliveira de Vasconcelos, V., Waldenez de Oliveira, M.*: Trayectorias de investigación acción: concepciones, objetivos y plantenamientos. Revista Iberoamericana de Euicación. roč. 53 (2010), č. 5, s. 1–13.
- [10] *Kemmis, S., McTaggart, R.*: Como planificar la investigación – acción. Laertes, Barcelona, 1992.
- [11] <https://www.alza.cz/hracky/ozobot-2-0-bit-titanove-cerny-d3024547.htm?layoutAutoChange=1>.
- [12] <https://www.alza.cz/hracky/ozobot-evo-cerny-d5556723.htm>.
- [13] <https://files.ozobot.com/stem-education/Ozobot-Color-Codes-Chart.pdf>.
- [14] http://ozobot.sandofky.cz/wp-content/uploads/Ozobot-OzoCodes-Reference_CZ.pdf.
- [15] *Mandíková, D., Houřková, J.*: Úlohy pro rozvoj přírodovědné gramotnosti: Utváření kompetencí žáků na základě zjištění šetření PISA 2009. Česká školní inspekce, Praha, 2012.

Rozkopené křižovatky (Úlohy z MO kategorie P, 42. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V dalším dílu cyklu zajímavých úloh z Matematické olympiády kategorie P (programování) se seznámíme s jednou praktickou úlohou z celostátního kola 45. ročníku MO (školní rok 1995/96). Úkolem v ní bylo určit počet různých cest mezi dvěma body v pravidelné pravoúhlé silniční síti, ve které jsou ovšem některé křižovatky neprůjezdné. K efektivnímu vyřešení této úlohy použijeme poměrně známou programátorskou techniku dynamického programování. Ukážeme si různé způsoby, jak lze takové řešení implementovat, a také skutečnost, že se tyto způsoby mohou lišit z hlediska výsledné časové složitosti. Stejně principy ovšem platí i pro řešení mnoha jiných úloh využívajících dynamické programování.

Pro potřeby našeho článku jsme původní zadání trochu upravili a zjednodušili, na principu úlohy a jejího řešení se tím ovšem nic nezměnilo.

* * * * *

Ve městě vedou všechny ulice buď ze severu na jih, nebo ze západu na východ. Předpokládejme, že se všechny ulice táhnou na obě strany dostatečně daleko. V průsečíku každých dvou ulic různých směrů je křižovatka.

Křižovatku označíme dvojicí čísel (i, j) , jestliže se jedná o křižovatku v pořadí i -té západovýchodní ulice počítáno od severu a j -té severojižní ulice počítáno od západu. Křižovatky jsou tedy očíslovány od $(1, 1)$ do (m, n) , kde m je počet západovýchodních ulic a n je počet severojižních ulic. Na některých křižovatkách se pracuje na opravě vozovky, a proto přes ně není možné přejet. Na křižovatkách $(1, 1)$ a (m, n) se nepracuje.

Arpád vyjíždí každé ráno z křižovatky $(1, 1)$, kde bydlí, a potřebuje se dostat do své firmy, která sídlí na opačném konci města na křižovatce (m, n) . Napište program, který zjistí, kolika různými cestami se může Arpád dostat z domova do své firmy, jestliže pojedí vždy jen ve směru na jih nebo na východ (neboli jede vždy nejkratší možnou cestou) a neprojede žádnou z rozkopaných křižovatek.

Vstup

Na prvním řádku vstupu jsou uvedena celá čísla m a n , kde m je počet západovýchodních ulic a n je počet severojižních ulic. Na druhém řádku se nachází celé číslo k udávající počet křižovatek ve městě, na nichž se opravuje vozovka. Na každém z následujících k řádků jsou uvedena vždy dvě celá čísla, která určují polohu neprůjezdné křižovatky.

Výstup

Výstup programu je tvořen jedním celým číslem, které představuje hledaný počet různých cest.

Příklad 1

Vstup:	Výstup:
4 3	2
2	
2 2	
3 2	

Příklad 2

Vstup:	Výstup:
2 4	0
2	
1 2	
2 3	

Nejprve si musíme uvědomit, že Arpád při své cestě z křižovatky $(1, 1)$ na křižovatku (m, n) může jet pouze směrem na východ nebo na jih. To znamená, že na nerozkopanou křižovatku (i, j) může přijet jediné ze severu z křižovatky $(i - 1, j)$, pokud tato křižovatka existuje a není rozkopaná, nebo ze západu z křižovatky $(i, j - 1)$, opět pokud tato křižovatka existuje a není rozkopaná. Počet různých cest vedoucích z výchozí křižovatky $(1, 1)$ na křižovatku (i, j) proto získáme tak, že sečteme počet cest vedoucích

z křižovatky $(1, 1)$ na křižovatku $(i - 1, j)$ a počet cest vedoucích z křižovatky $(1, 1)$ na křižovatku $(i, j - 1)$. Počet přípustných cest vedoucích z křižovatky $(1, 1)$ na jakoukoliv neexistující nebo rozkopanou křižovatku je pochopitelně roven nule a počet cest vedoucích na počáteční křižovatku $(1, 1)$ je 1.

Tato úvaha nás již rovnou vede k jednoduchému řešení úlohy. Celou úlohu nám vyřeší rekurzivní funkce *Cesty* se dvěma celočíselnými parametry i, j , která přímo implementuje výše uvedenou úvahu a vrací počet různých cest vedoucích z výchozí křižovatky $(1, 1)$ na zvolenou křižovatku (i, j) . Pro získání hledaného výsledku funkci v programu zavoláme s dvojicí vstupních parametrů m, n .

```
def Cesty(i, j):
    if i == 0 or j == 0: return 0 # neexistující křižovatka
    if r[i][j]: return 0           # rozkopaná křižovatka
    if i == 1 and j == 1: return 1 # počáteční křižovatka
    return Cesty(i-1, j) + Cesty(i, j-1)

m, n = [int(_) for _ in input().split()]
k = int(input())
r = [[False]*(n+1) for _ in range(m+1)] # rozkopané křižovatky
for p in range(k):
    i, j = [int(_) for _ in input().split()]
    r[i][j] = True

print(Cesty(m, n))
```

Uvedené řešení je teoreticky neprosto správné, ale pro větší město je značně neefektivní. Jeho neefektivita spočívá v tom, že pro mnohé dvojice vstupních parametrů je funkce *Cesty* během jednoho výpočtu programu zbytečně zavolána opakovaně vícekrát. Pokud například $m = n = 100$ a v programu tedy zavoláme *Cesty*(100, 100), funkce rekurzivně zavolá *Cesty*(99, 100) a *Cesty*(100, 99). Funkce volaná jako *Cesty*(99, 100) rekurzivně zavolá sama sebe dvakrát, a to se vstupními parametry (98, 100) a (99, 99). Funkce volaná *Cesty*(100, 99) provede také dvě rekurzivní volání – první se vstupními parametry (99, 99) a druhé s parametry (100, 98). Jak tedy vidíme, postupně po sobě se dvakrát vykonalo stejné volání *Cesty*(99, 99). Zbytečně se tak dvakrát provádí tentýž časově velmi náročný výpočet, pokaždé pochopitelně se shodným výsledkem. Obdobný problém s neefektivitou se dále mnohokrát opakuje i při volání funkce *Cesty* s nižšími hodnotami vstupních parametrů, počet zbytečně vykonaných shodných volání dokonce ještě narůstá.

Výše zapsaná funkce *Cesty* má v nejhorším případě exponenciální asymptotickou časovou složitost. To si můžeme názorně ukázat pro případ vstupních dat $m = n$, $k = 0$, tedy ve čtvercovém městě bez rozkopaných křižovatek. Představíme-li si strom všech provedených rekurzivních volání funkce *Cesty*, kde kořen odpovídá zavolání se vstupními parametry (n, n) , až do hloubky rekurze $n - 1$ provede funkce vždy dvě rekurzivní volání. V hloubce $n - 1$ má tedy tento binární strom 2^{n-1} uzlů. Celkový počet všech provedených volání funkce *Cesty* do hloubky rekurze $n - 1$ včetně je proto roven $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1}$, což je $2^n - 1$. Strom všech volání funkce pak pokračuje dalšími uzly až do hloubky $2n - 2$, přičemž vzhledem k efektům na okraji sítě ulic v některých případech funkce provede dvě a v některých už jenom jedno rekurzivní volání. Přesný počet všech vykonaných volání funkce *Cesty* ale nemusíme odvozovat, už z prvních $n - 1$ hladin stromu je zjevné, že je tento počet skutečně exponenciální vzhledem k n .

Pro řešení podobných situací, kdy rekurzivní funkce zbytečně volá opakovaně sama sebe se stejnými parametry, s jakými již byla dříve zavolána, používáme programovací techniku označovanou jako memoizace (odvozeno z anglického memory = paměť) nebo také kešování mezivýsledků (odvozeno z anglického cache = vyrovnávací paměť). Je založena na velmi jednoduché myšlence. Náš rekurzivní algoritmus doplníme pomocným polem, ve kterém si budeme ukládat všechny hodnoty, které rekurzivní funkce již někdy spočítala. Před provedením rekurzivního volání pokaždé zkontrolujeme, zda jsme již někdy dříve nespočetali tu hodnotu, kterou právě potřebujeme. Jestliže ano, vezmeme hodnotu z pole a neprovádíme rekurzivní volání. Jestliže potřebnou hodnotu ještě neznáme, funkci normálně rekurzivně zavoláme a po skončení jejího výpočtu výsledek nejen vrátíme z funkce jako návratovou hodnotu, ale také ho uložíme do našeho pomocného pole pro případné budoucí využití.

Algoritmus výpočtu tedy zůstane v principu stejný, jako byl dosud, nadále má podobu rekurzivní funkce. Asymptotická časová složitost řešení se ovšem výrazně snížila, neboť pro každou přípustnou hodnotu vstupních parametrů bude funkce zavolána nejvýše jednou. V naší úloze s Arpádem a křižovatkami bude takových volání nejvýše $m \cdot n$ a protože každé z nich se vykoná v konstantním čase, asymptotická časová složitost upraveného algoritmu se sníží na velmi příznivou hodnotu $O(m \cdot n)$ v nejhorším případě. Opět si ukážeme programovou realizaci uvedeného postupu.

```
def Cesty(i, j):
    if i == 0 or j == 0: return 0 # neexistující křižovatka
```

```

if r[i][j]: return 0 # rozkopaná křižovatka
if a[i][j] == -1:
    a[i][j] = Cesty(i-1, j) + Cesty(i, j-1)
return a[i][j]

m, n = [int(_) for _ in input().split()]
k = int(input())
r = [[False]*(n+1) for _ in range(m+1)] # rozkopané křižovatky
a = [[-1]*(n+1) for _ in range(m+1)] # počet cest (1,1)->(i,j)
a[1][1] = 1 # počáteční křižovatka
for p in range(k):
    i, j = [int(_) for _ in input().split()]
    r[i][j] = True

print(Cesty(m, n))

```

Po skončení výpočtu výše uvedeného programu udávají prvky pole $a[i, j]$, kolika různými cestami může jet Arpád z křižovatky $(1, 1)$ na křižovatku (i, j) . Při řešení úloh podobného typu často nepoužijeme rekurzivní funkci, ale hodnoty $a[i, j]$ namísto toho počítáme iteračně ve vhodném pořadí, tzn. od menších indexů k větším. Nejdříve snadno stanovíme hodnoty pole a v řádku 1 a ve sloupci 1. Po první západovýchodní ulici můžeme jet pouze jediným způsobem od křižovatky $(1, 1)$ směrem východním, dokud poprvé nenarazíme na rozkopanou křižovatku. Od této křižovatky dále na východ se už nedostaneme. Obdobná úvaha platí i pro první severojižní ulici.

Hodnoty $a[i, j]$ pro všechny zbývající křižovatky ve městě, tzn. pro $i, j > 1$, spočítáme na základě úvahy, kterou jsme provedli hned na začátku našeho prvního řešení. Pokud je křižovatka (i, j) rozkopaná, položíme $a[i, j] = 0$. Jestliže rozkopaná není, můžeme na ni přijít ze severu z křižovatky $(i-1, j)$, nebo ze západu z křižovatky $(i, j-1)$. Hodnotu $a[i, j]$ tedy spočítáme jako součet $a[i-1, j] + a[i, j-1]$. Pole a budeme zaplňovat ve vhodném pořadí, například po řádcích zleva doprava, abychom při výpočtu $a[i, j]$ již znali obě potřebné hodnoty $a[i-1, j]$ a $a[i, j-1]$. Po vyplnění celého pole a bude výsledek úlohy uložen v prvku $a[m, n]$.

```

m, n = [int(_) for _ in input().split()]
k = int(input())
r = [[False]*(n+1) for _ in range(m+1)] # rozkopané křižovatky
a = [[-1]*(n+1) for _ in range(m+1)] # počet cest (1,1)->(i,j)
for p in range(k):
    i, j = [int(_) for _ in input().split()]
    r[i][j] = True

```

```

a[1][1] = 1 # počáteční křižovatka
for i in range(2, m+1):
    a[i][1] = 0 if r[i][1] else a[i-1][1]
for j in range(2, n+1):
    a[1][j] = 0 if r[1][j] else a[1][j-1]

for i in range(2, m+1):
    for j in range(2, n+1):
        a[i][j] = 0 if r[i][j] else a[i-1][j] + a[i][j-1]

print(a[m][n])

```

Pro vyřešení úlohy musíme vyplnit celé pole a velikosti $m \times n$ a při výpočtu hodnoty každého prvku vykonáme konstantní počet operací. Asymptotická časová složitost algoritmu je proto $O(m \cdot n)$. Je tedy stejná, jako v našem druhém řešení s rekurzí a pomocnou pamětí. To není nijak překvapující, neboť v obou případech se prováděl stejný výpočet stejných hodnot, jenom v jiném pořadí a s jinou organizací práce.

Popsaný způsob řešení úlohy označujeme jako *dynamické programování*. Spočívá v tom, že před vyřešením zadaného většího problému nejprve vyřešíme menší a tím i snadnější úlohy stejného typu a s využitím jejich řešení pak již dokážeme snadno určit hledaný výsledek. Stejný postup se aplikuje opakovaně na takto získané menší úlohy, až celý původně zadaný problém postupně rozložíme na tak malé části, které dokážeme vyřešit přímo. Z jejich řešení sestavíme řešení o něco větších podúloh, pomocí nich vyřešíme ty ještě větší, a takto pokračujeme až k vyřešení celé původní úlohy.

Naše druhé a třetí řešení úlohy s Arpádem představují dva základní přístupy, jak lze dynamické programování implementovat – buď rekurzivně shora, nebo iteračně zdola. Mezi oběma přístupy máme zpravidla na výběr a obě možnosti vedou ke stejné asymptotické časové složitosti v nejhorším případě. Použití iteračního přístupu bývá o něco častější, takto navržený program bývá pro většinu programátorů jednodušší a přehlednější. Jak jsme viděli ve třetím řešení naší dnešní úlohy, vynecháme zde rekurzivní rozklad na podúlohy, ale začneme rovnou od vhodně zvolených malých úloh, pomocí jejich řešení vyřešíme úlohy větší, a tak postupujeme dále až k vyřešení celého původně zadaného problému.

Ačkoliv obě varianty implementace dynamického programování mají stejnou asymptotickou časovou složitost v nejhorším případě, rekurzivní přístup může být u některých úloh a pro některá vstupní data časově výhodnější. Je tomu tak i u naší dnešní úlohy s rozkapanými křižovatkami. Při iteračním řešení úlohy budeme postupně počítat všech $m \cdot n$ hodnot

v poli a , takže výsledný program bude mít asymptotickou časovou složitost $O(m \cdot n)$ nejen v nejhorším, ale v každém případě. Pro některá vstupní data ale mnohé z těchto hodnot počítáme zbytečně, protože je nakonec nevyužijeme, ve výsledku se nijak neprojeví. Jsou to hodnoty těch křižovatek (i, j) , ze kterých se vůbec nedá dojet na cílovou křižovatku (m, n) . Při postupném zaplňování pole a ale předem nevíme, o které křižovatky se jedná, takže pro jistotu počítáme všech $m \cdot n$ hodnot a ukládáme je všechny do pole a .

Naproti tomu při rekurzivním řešení úlohy můžeme výpočet některých nepotřebných hodnot ušetřit. Uvažujme například vstupní data $k = m - 1$, rozkopané jsou křižovatky $(2, n - 1)$, $(3, n - 1)$, $(4, n - 1)$, $\dots$, $(m, n - 1)$, tedy celá předposlední severojižní ulice s výjimkou její první křižovatky $(1, n - 1)$. V takovém případě bude výsledkem úlohy číslo 1, neboť pro Arpáda existuje jediná možná cesta z domova do práce (nakreslete si obrázek!). Po zavolání rekurzivní funkce $Cesty(m, n)$ se pro získání tohoto výsledku provede nejprve volání funkce postupně na křižovatky $(m - 1, n)$, $(m - 2, n)$, $\dots$, $(1, n)$ a poté na křižovatky $(1, n - 1)$, $(1, n - 2)$, $\dots$, $(1, 1)$. Funkce $Cesty$ bude tedy v tomto případě zavolána jenom přibližně $(m + n)$ -krát a celý výpočet tak bude mít časovou složitost $O(m + n)$. Uvedenou časovou úsporu ovšem nezískáme pokaždé, jak ukazuje následující příklad. Mějme opět $k = m - 1$, rozkopané jsou tentokrát křižovatky $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$, $\dots$, $(m - 1, 2)$, tedy celá druhá severojižní ulice s výjimkou její poslední křižovatky $(m, 2)$. Rovněž v tomto případě bude výsledkem úlohy číslo 1, Arpád má opět k dispozici jedinou možnou cestu (nakreslete si sami situaci). Počet vykonaných rekurzivních volání funkce $Cesty$ bude ovšem v tomto případě zhruba $m \cdot n$.

Náš dnešní článek zakončíme jednou technickou poznámkou. Pokud si zkusíte sami naprogramovat kterýkoliv z uvedených algoritmů třeba v C++, Pascalu nebo Javě a program spustíte na počítači, nedivte se, že výpočet pro mnohá vstupní data skončí s běhovou chybou aritmetického přetečení. To není závadou použitého algoritmu, ale prostým důsledkem skutečnosti, že převážná většina programovacích jazyků pracuje s celočíselnými hodnotami pouze omezené velikosti. Jsou-li rozměry města m , n hodně velké a počet rozkopaných křižovatek k dostatečně nízký, potom počty přípustných cest pro Arpáda velmi rychle narůstají a ukládané hodnoty $a[i, j]$ snadno překročí obvyklý rozsah celočíselných proměnných. Z běžně užívaných programovacích jazyků jedině Python umožňuje pracovat s libovolně velkými celými čísly, proto jsme ho také použili v na-

ších programových ukázkách. Jiné programovací jazyky ukládají celočíselné hodnoty standardně do 4 bytů, kde 1 bit určuje znaménko a zbývajících 31 bitů obsahuje uloženou hodnotu vyjádřenou ve dvojkové soustavě. Maximální zobrazitelná celočíselná hodnota je v takovém případě rovna $2^{31} - 1 = 2147483647$. Již ve čtvercovém městě velikosti 18×18 ulic bez rozkopaných křižovatek vychází počet možných cest 2333606220 a je tedy vyšší než $2^{31} - 1$. Úloha zadaná v olympiádě vyžadovala napsat program, který zvládne vyřešit všechna města až do velikosti 100×100 ulic. Pro takto velké město bez rozkopaných křižovatek dostaneme výsledek 22750883079422934966181954039568885395604168260154104734000 (což je hodnota řádově 10^{58}). V době konání soutěže před 25 lety ovšem Python ještě neexistoval, takže soutěžící používající programovací jazyky C, C++ nebo Pascal si museli navíc naprogramovat vlastní celočíselnou aritmetiku pracující s mnohacifernými čísly.

Jak moc jsou okružáci okrouhlí?

LUDEK SPÍCHAL

Česká lesnická akademie, Trutnov

Spirály různých tvarů nalezneme ve svém okolí velmi běžně. Přestože spirál je celá řada různých typů, v přírodních útvarech zaznamenáme převážně spirálu logaritmickou.

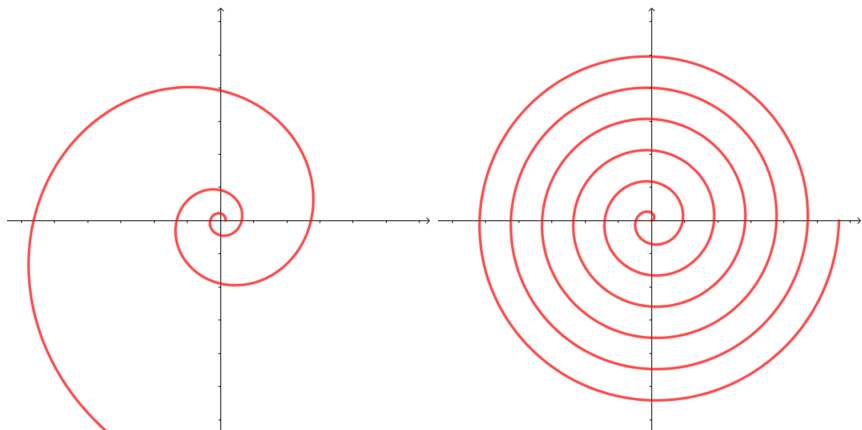
V minulosti byla u řady zvířat (např. ve tvarech rohů turovitých, špičáků divokých prasat, tvarech ulit a mušlí měkkýšů), v lidské anatomii (např. tvar žeber), ale také v botanice (např. v postavení listů na lodyze, v postavení šupin při tvorbě šišek) prokázána přítomnost logaritmické spirály [4, 5, 8]. Tvar a vlastnosti logaritmické spirály jsou využívány rovněž při konstrukci různých technických zařízení, která vyžadují stálý (tečný) úhel dotyku (např. řezací nástroje, lezecké vačky – tzv. friendly, ozubená kola v kuželových soukolích) [1]. Rozmanitost oblastí výskytu logaritmické spirály je skutečně udivující, např. [2, 3, 8].

Mezi měkkýši vyskytujícími se v České republice nalezneme řadu skupin tvořících spirální ulity s různým způsobem uspořádání závitů. Zástupci čeledi okružákovitých (Planorbidae) vynikají schránkami (obr. 3, 4, 5, 6, 7),

jejichž spirály tvoří závitů ležící více méně v jedné rovině. Z tohoto pohledu představují zajímavý materiál pro matematické modelování tvaru schránky.

1. Spirály

Logaritmická spirála je rovinná křivka, jejíž poloměr roste exponenciálně s velikostí úhlu (obr. 1 vlevo, obr. 2). V řadě případů je nejedná pouze o rovinné (2D) křivky, ale křivky v prostoru (3D).¹⁾

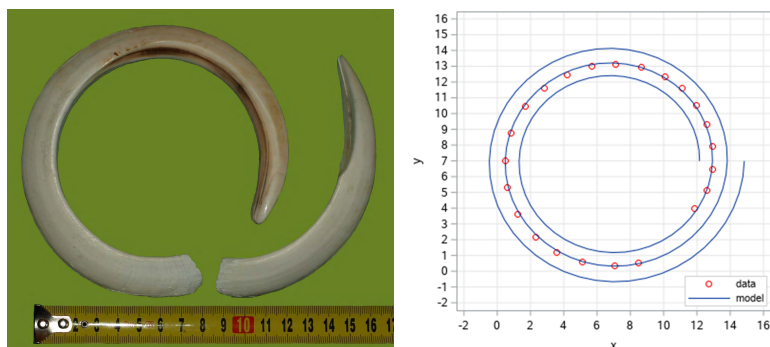


Obr. 1 Logaritmická spirála (vlevo), Archimédova spirála (vpravo)

Logaritmickou spirálu můžeme srovnat např. s dobře známou spirálou Archimédovou, která je rovinnou křivkou, jejíž poloměr roste lineárně s velikostí úhlu (obr. 1 vpravo).²⁾

¹⁾ Rovinná logaritmická spirála byla objevena nezávisle několika různými matematiky. Jako první se o ní zmiňuje Descartes, který ji v roce 1638 pojmenoval jako ekviangulární (rovnoúhlou) spirálu, neboť vektor poloměru protíná křivku pod konstantním úhlem (tzv. tečný úhel). Torricelli použil pojmenování geometrická spirála podle další vlastnosti křivky, kdy poloměr křivky roste exponenciálně jako funkce úhlu. Ještě později použil Halley označení proporční spirála, naznačující, že jednotlivé části křivky jsou podobné, liší se proporcí. V roce 1711 Jacob Bernoulli jako první popisuje křivku bez použití polární rovnice, pro její označení použil čtvrtý název – logaritmická spirála.

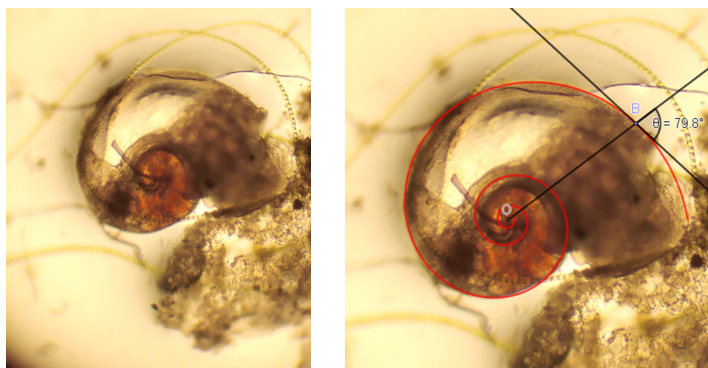
²⁾ Archimédes ze Syrakus (287 př. n. l. – 212 př. n. l.) byl řecký matematik, fyzik, filosof, vynálezce a astronom. Archimédova spirála je také označovaná jako aritmetická spirála.



Obr. 2 Dolní špičák (párák) divokého prasete (vlevo), model vnějšího oblouku (vpravo, SAS/STAT) [8]

2. Kdo jsou okružáci?

Čeleď okružákovití (Planorbidae) zahrnuje řadu druhů sladkovodních plicnatých plžů, jejichž velikost je v řádech mm nebo jednotek centimetrů.³⁾ Ulity většiny druhů jsou tzv. planispirální, což znamená, že jednotlivé závitky leží zhruba v jedné rovině. Stěny ulit jsou tenké a na povrchu obvykle hladké.



Obr. 3 Mikroskopický snímek plže z čeledi okružákovití (Planorbidae) s vloženou logaritmickou spirálou a vyznačeným tečným úhlem

³⁾ Jistou zvláštností, u plžů nepříliš obvyklou, je přítomnost hemoglobinu (obsahuje železo) jako krevního barviva (většina plžů má v krvi hemocyanin obsahující měď). Přítomnost železa umožňuje efektivnější přenos kyslíku.

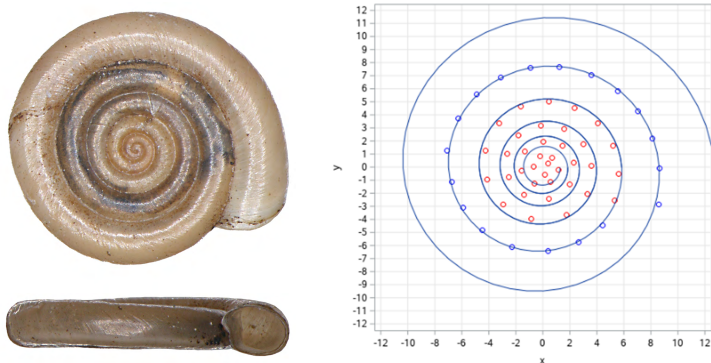
V článku se budeme věnovat určení parametrů logaritmických spirál (zejména velikosti tečného úhlu) tvořících schránky okružákovitých pomocí optimalizace softwarem SAS/STAT.

3. Modelování spirál

Pro počítačové modelování je výhodné použití parametrických rovnic zvolených křivek. Parametrická rovnice logaritmické spirály je

$$\begin{aligned}x &= x_0 + r(t) \cos(t), \\y &= y_0 + r(t) \sin(t),\end{aligned}\tag{1}$$

$t \geq 0$, kde $r(t) = ae^{bt}$ je spojitá funkce (*poloměr spirály*, tj. délka úsečky mezi *pólem spirály* a daným bodem spirály).⁴⁾ Koefficient a určuje bod, od kterého se spirála začíná vykreslovat (*počátek spirály*), pro neposunutou spirálu má souřadnice $[a, 0]$. Pro koefficient b logaritmické spirály platí, že $b = \cot \theta$, kde θ je tečný úhel, který svírá tečna spirály a vektor poloměru v daném bodu.⁵⁾



Obr. 4 Svinutec běloustý (*Anisus leucostoma*). Foto Michal Horský:

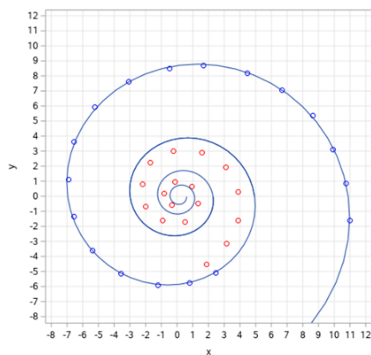
<http://mollusca.sav.sk/malacology/img/anisus-leucostoma/>

⁴⁾ Archimédovu spirálu bychom získali pro volbu $r(t) = at$, dále např. pro volbu $r(t) = a\sqrt{t}$ bychom získali Fermatovu spirálu, pro volbu $r(t) = \frac{a}{\sqrt{t}}$ pak spirálu Lituuvu. Pól spirály je bod, ze kterého by se spirála „vykreslovala“, pokud by byl koefficient $a = 0$. V kartézských souřadnicích je pro neposunutou křivku pólem počátek soustavy souřadnic $[0, 0]$. Pól spirály a počátek spirály jsou u Archimédovy spirály totožné.

⁵⁾ Logaritmická spirála se rychleji rozvíjí (roste hodnota koefficientu b) pro klesající velikost tečného úhlu θ .

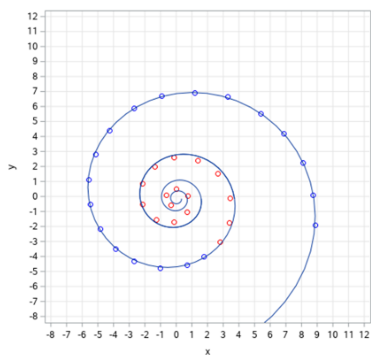
Fotografie schránek byly umístěny do kartézské soustavy souřadnic a ručně odečteny souřadnice bodů ležících na obloucích tvořících průmět okraje ulity do roviny, přičemž body byly voleny tak, aby jejich úhlová vzdálenost byla ca 5° . Porovnáním s modelem posuzovaných křivek (Geogebra) byly odhadnuty vstupní hodnoty parametrů křivek (tj. souřadnice středů křivek, hodnoty koeficientů apod.) pro následnou optimalizaci.

Při optimalizaci byly minimalizovány funkce, které vypočítaly součet druhých mocnin vzdáleností (tzv. *minimální kvadratická chyba*) mezi pozorovanými daty a matematickými modely křivek. Odhadnuté hodnoty byly použity k vytvoření matematických modelů křivek, kterými byly proloženy datové soubory.



Obr. 5 Kružík drobný (*Gyraulus riparius*). Foto Michal Horsák:

<http://mollusca.sav.sk/malacology/img/gyraulus-riparius/>



Obr. 6 Menetovník rozšířený (*Menetus dilatatus*). Foto Michal Horsák:

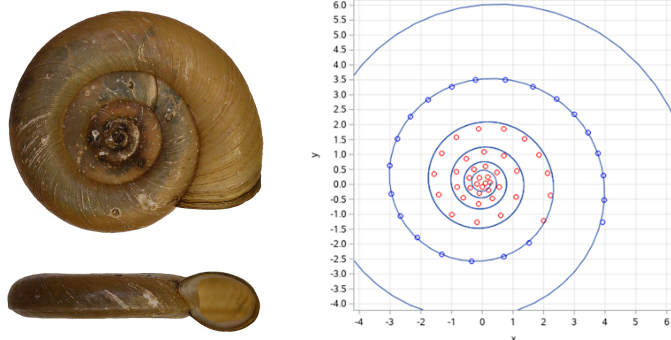
<http://mollusca.sav.sk/malacology/img/menetus-dilatatus/>

Funkce, která vyjadřuje součet druhých mocnin vzdáleností mezi pozorovanými $[x_i, y_i]$ a modelovými hodnotami $[u_i, v_i]$ spirál je popsána rovnicí [5, 7]

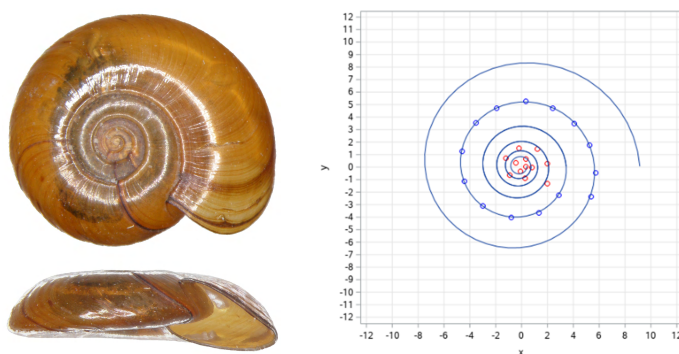
$$F_{x_0, y_0, a, b} = \sum_{i=1}^n (x_0 + r(t_i) \cos(t_i) - x_i)^2 + (y_0 + r(t_i) \sin(t_i) - y_i)^2, \quad (2)$$

kde $r(t)$ je funkce s parametry a a b definující daný typ spirály a parametr b se uplatní pouze pro logaritmickou spirálu. Hodnoty t_i byly určeny z podmínky [7]

$$\tan(t_i) = \frac{y_i - y_0}{x_i - x_0}. \quad (3)$$



Obr. 7 Terčovník vroubený (*Planorbis planorbis*). Foto Michal Horsák:
<http://mollusca.sav.sk/malacology/img/planorbis-planorbis/>



Obr. 8 Lištovka lesklá (*Segmentina nitida*). Foto Michal Horsák:
<http://mollusca.sav.sk/malacology/img/segmentina-nitida/>

4. Modelování v SAS

V této části ukážeme zápis programu pro odhad parametrů logaritmické spirály tvořící schránku svinutce běloústého (Anisus leucostoma, obr. 4). Program pro optimalizaci logaritmické spirály byl sestaven s využitím článku [5]. Získaná data byla analyzována softwarem SAS, který používá optimalizační metodu v SAS/IML k nalezení parametrů zkoumané křivky [5, 6, 7] podle hodnot uspořádaných dvojic $\{[x_1, y_1], \dots, [x_n, y_n]\}$ zjištěných bodů. Sestavené programy analyzovaly zjištěná data metodou TRM (trust region method, metoda důvěryhodné oblasti), tj. numerickou metodou optimalizace využívající nelineární regresi.⁶⁾ Jednotlivé části programového kódu jsou doplněny poznámkami vysvětlujícími smysl dané části programu (`/*...*/`).

```
/*Body tvorici casti spiraly omezene dalsim zavitem.*/  
/*V obrazku jsou tyto body vyznaceny cervene.*/  
/*V prikladu uveden pouze prvni a posledni datovy bod.*/  
data S1;  
input Segment x y;  
Seg = 37 - _N_ + 1;  
datalines;  
1      0.38      0.31  
...  
37     5.30     -2.55  
;  
/*Body tvorici posledni (neomezenou) cast spiraly.*/  
/*V obrazku jsou tyto body vyznaceny modre.*/  
/*V prikladu uveden pouze prvni a posledni datovy bod.*/  
data S2;  
input Segment x y;  
Seg = 19 - _N_ + 1;  
datalines;  
1      4.42     -4.43  
...  
19     8.54     -2.82  
;
```

⁶⁾Více o použité metodě TRM např. https://en.wikipedia.org/wiki/Trust_region. Oficiální stránky společnosti: https://www.sas.com/cs_cz/home.html. Software lze pro výzkumné a studijní účely po registraci používat bezplatně (SAS University Edition). Řešení řady problémů např. na: <https://blogs.sas.com/content/iml/>.

```

/*Procedura pri vypoctu zajistuje cteni dat po segmentech.*/
/*Poradi je urcene cislovanim.*/
proc sort data=S1;
by seg;
run;
proc sort data=S2;
by seg;
run;

/*Simuluje model logaritmické spirály.*/
title "Anisus leucostoma";
title2 "Model logaritmické spirály";
proc iml;
pi = constant("pi");
theta = do(0,6*pi, pi/24)';
a = 1; b = -0.3063;
x = a*cos(theta)#exp(b*theta);
y = a*sin(theta)#exp(b*theta);
call scatter(x,y);

/*Procedura vypocte prirustek hodnoty uhlu pro dany bod.*/
start IncrAngle(x, y);
theta = atan2(y,x); dif = dif(theta);
idx = loc(dif^=. & dif<0);
n = nrow(dif); pi = constant("pi");
do while( ncol(idx)>0 );
s = idx[1];
theta[s:n] = 2*pi + theta[s:n]; dif = dif(theta);
idx = loc(dif^=. & dif<0);
end;
return(theta);
finish;
phi = IncrAngle(x,y);

/***** Hlavni vypocet *****/
use S2; read all var {x y}; close;
start ObjF(p) global(x, y);
x0=p[1]; y0=p[2]; a=p[3]; b=p[4];
xc = x-x0; yc = y-y0;
theta = IncrAngle(xc, yc);
u = a*cos(theta)#exp(b*theta);
v = a*sin(theta)#exp(b*theta);

```



```

d2 = (xc-u)##2 + (yc-v)##2;
return( sum(d2) );
finish;
/*Odhad parametru logaritmické spirály.*/
p = {-0.2 0.4 5 0.05}; opt = {0 1};
call nlpntr(rc,result,"ObjF", p, opt);
b= result[4]; tu=atan(1/b);
pi = constant("pi"); tp=(tu*180/pi);
print rc,result[c={"x0" "y0" "a" "b"} label="Log. spirála"];
print tp[label="Tecny uhel"];
/*Vytvori datove soubory "Fit" pro casti log. spirály.*/
x0=result[1];y0= result[2]; a= result[3];b= result[4];
xc = x-x0; yc = y-y0; pi = constant("pi");
r1=a#(exp(-b*2*pi))##2;
theta = do(0,6*pi, pi/24)';
u1 =x0+ (a##2/r1)*cos(theta)#exp(b*theta);
v1 =y0+ (a##2/r1)*sin(theta)#exp(b*theta);
create Fit1 var {"theta" "u1" "v1"};
append;
close;
x0=result[1];y0= result[2]; a= result[3];b= result[4];
xc = x-x0; yc = y-y0; pi = constant("pi");
r2=a#exp(-b*2*pi);
theta = do(0,6*pi, pi/24)';
u2 =x0+ (a##2/r2)*cos(theta)#exp(b*theta);
v2 =y0+ (a##2/r2)*sin(theta)#exp(b*theta);
create Fit2 var {"theta" "u2" "v2"};
append;
close;
x0=result[1];y0= result[2]; a= result[3];b= result[4];
xc = x-x0; yc = y-y0; pi = constant("pi");
r3=a#exp(b*2*pi);
theta = do(0,6*pi, pi/24)';
u3 =x0+ (a##2/r3)*cos(theta)#exp(b*theta);
v3 =y0+ (a##2/r3)*sin(theta)#exp(b*theta);
create Fit3 var {"theta" "u3" "v3"};
append;
close;
use S2; read all var {x y}; close;
u = x; v = y;
create S1c var {"u" "v"};
append;

```

```

close;
quit;
/*Slouci pozorovana data a datove soubory "Fit".*/
data Alltwo;
set S1 S1c Fit1 Fit2 Fit3;
run;
/*Vytvori graf z pozorovanych dat a datovych souboru "Fit".*/
ods graphics / width=500px height=500px;
title "Shoda dat s modelem log. spiraly";
title "Anisus leucostoma";
proc sgplot data=Alltwo NOAUTOLEGEND;
scatter x=x y=y/ markerattrs=(color=red) ;
scatter x=u y=v/ markerattrs=(color=blue);
series x=u1 y=v1;
series x=u2 y=v2;
series x=u3 y=v3;
xaxis grid values=(-12 to 12 by 1);
yaxis grid values=(-12 to 12 by 1);
run;

```

5. Výsledky

Modely spirál byly vytvářeny pomocí bodů ležících na okraji posledního (nepřekrytého) závitu spirály (v modelech vyznačeny modrými kroužky). Okraje vnitřních závitů, které se mohou z určité části překrývat, jsou vyznačeny v modelech červenými kroužky. Sestavené modely (obr. 4, 5, 6, 7) ukazují, že schránky okružákových jsou zavínuté ve tvaru logaritmické spirály. V tab. 1 jsou pro model logaritmické spirály zaznamenané hodnoty parametru b a dále vypočtený tečný úhel spirály. Záporné znaménko uvedené u hodnot parametru b vyjadřuje orientaci spirál, které jsou ve všech případech pravotočivé.

Tab. 1 Tečné úhly logaritmických spirál vybraných druhů okružákovitých

	koeficient b	tečný úhel
svinutec běloústý (<i>Anisus leucostoma</i>)	-0,0622	86,4°
kružník drobný (<i>Gyraulus riparius</i>)	-0,1293	82,6°
menetovník rozšířený (<i>Menetus dilatatus</i>)	-0,1385	82,1°
terčovník vroubený (<i>Planorbis planorbis</i>)	-0,0861	85,1°
lištovka lesklá (<i>Segmentina nitida</i>)	-0,0755	85,7°

Závěr

Vytvořené modely ulit okružáků mají ve všech případech tvar logaritmické spirály. Zajímavou otázkou, kterou by mohl zodpovědět detailnější průzkum provedený na větším vzorku, je úvaha, zda je tečný úhel logaritmických spirál druhově specifický a mohl by být použit jako taxonomický znak.

Poděkování

Autor děkuje prof. RNDr. Michalu Horsákovi, Ph.D. za laskavé svolení k použití fotografií okružákovitých.

Literatura

- [1] *Bonney, M., Coaplen, J., Doeffer, E.*: What makes a good friend? The mathematics of rock climbing. *SIAM Rev.* 40 (3) (1998), 674–679.
- [2] *Harary, G., Tal, A.*: The natural 3D spirals. *Computer graphics forum* 30 (2) (2011).
- [3] *Holcombe, S. A., Wang, S. C., Grotberg, J. B.*: Modeling female and male rib geometry with logarithmic spirals. *Journal of Biomechanics* 49 (2016), 2995–3003.
- [4] *Shi, P. J., Huang, J. G., Hui, C., Grissino-Mayer, H. D., Tardif, J. C., Zhai, L. H., Wang, F. S., Li, B. L.*: Capturing spiral radial growth of conifers using the superellipse to model tree-ring geometric shape. *Frontiers in Plant Science* 6 (2015), 856.
- [5] *Wicklin, R.*: The spiral of splatter. 2015. [online.] <https://blogs.sas.com/content/iml/2015/06/11/spiral-of-splatter.html>
- [6] *Wicklin, R.*: Fit a circle to data. 2015. [online.] <https://blogs.sas.com/content/iml/2015/06/08/fit-circle.html>
- [7] *Wicklin, R.*: Computing polar angles from coordinate data. 2015. [online.] <https://blogs.sas.com/content/iml/2015/06/10/polar-angle-curve.html>
- [8] *Spíchal, L.*: Modeling the Shape of Tusks of Wild Boars (*Sus scropha* L.). In: M. Hrubý, P. Račková: *Matematika, informační technologie a aplikovaná věda* (MITAV 2020). Univerzita Obrany, Brno, 2020, 9 s.

ZPRÁVY

Mimořádný úspěch v 62. ročníku Mezinárodní matematické olympiády



62nd International
Mathematical
Olympiad
Saint-Petersburg
Russia

Po loňské Mezinárodní matematické olympiádě (IMO), která se kvůli pandemii covid-19 musela konat online formou, se ruští kolegové rozhodli ji opět uspořádat a doufali, že se letos bude konat prezenčně v Petrohradě. Bohužel přes jejich veškerou snahu přetrvávající pandemie způsobila, že IMO opět proběhla online. Soutěž se tak konala ve dnech 14.–24. července 2021. Pokud to epidemiologická situace dovolila, sešly se jednotlivé národní týmy v jednom centru, kde soutěžily pod dohledem kamer, svých vedoucích a IMO komisaře. Soutěže se zúčastnilo tentokrát 619 žáků ze 107 zemí celého světa.

Český reprezentační výběr byl sestaven na základě výsledků ústředního kola kategorie A 70. ročníku Matematické olympiády a dále následného výběrového soustředění. Místo v reprezentaci si vybojovali: *Karel Chwistek* (4/4), *Mendelovo gymnázium* v Opavě, *Michal Janík*, (6/8), *Magdaléna Mišínová* (8/8), *Samuel Rosiar* (2/4) a *Matouš Šafránek* (7/8), všichni gymnázium Jana Keplera v Praze 6 a *Jiří Kalvoda* (8/8), gymnázium v Brně, tř. Kapitána Jaroše. Vedoucím české delegace byli *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.*,

z PřF UP v Olomouci, jeho zástupcem *doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.*, z MFF UK v Praze a pedagogickým vedoucím byl *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.*, z PřF UP v Olomouci. IMO komisařem pro české družstvo byl *Dr. Jacek Uryga* z polských Katovic.

Celý český tým se sešel v neděli 18. července na gymnáziu Mikuláše Koperníka v Bílovci, které nám poskytlo vynikající podmínky pro zdárný průběh online soutěže. Zatímco naši soutěžící sledovali virtuální slavnostní zahájení a ladili formu na soutěž, vedoucí družstva nastavovali, testovali a připojovali počítačovou techniku. Vlastní soutěž se konala tradičně ve dvou dnech, 19. a 20. července 2021, kdy soutěžící řešili po dobu 4,5 hodiny každý den tři soutěžní úlohy. Každá z úloh byla ohodnocena nejvýše 7 body. S ohledem na online formu soutěže byly tyto dny pro vedení týmů velmi hektické. Jako tradičně odeslali v dubnu zástupci jednotlivých zemí návrhy soutěžních úloh. Úlohová komise IMO pak (tentokrát sama – bez spoluúčasti vedoucích týmů jako členů mezinárodní jury) vybrala šestici soutěžních úloh, s nimiž se pak vedoucí národních týmů mohli seznámit vždy nejvýše tři hodiny před začátkem soutěže v každém ze soutěžních dnů. V této době (kromě obvyklé organizační činnosti) vedoucí týmů pod dohledem IMO komisaře úlohy přeložili do mateřských jazyků a poslali ke schválení organizátorům. Až poté se soutěžní úlohy pro každý den mohly definitivně vytisknout.

Tento způsob výběru úloh se promítl i do závěrečných výsledků. Úlohová komise IMO správně posoudila obtížnost první a třetí úlohy každého dne – první úloha bývá tradičně přístupná pro všechny řešitele a třetí úloha má rozřadit řešitele na předních místech. Ovšem druhá úloha prvního dne, která má rozhodnout o pořadí řešitelů přibližně uprostřed výsledkové listiny, se ukázala jako druhá nejobtížnější celé soutěže. Bodové hranice, které určovaly medaile, tak byly letos jedny z nejnižších v celé historii soutěže. I přesto absolutní vítěz 62. IMO *Yichuan Wang* z Číny získal plný počet 42 bodů. S potěšením lze konstatovat, že české družstvo si letos vedlo nad očekávání dobře. Nejlepšího umístění dosáhl *Matouš Šafránek* (35 bodů), který získal zlatou medaili a umístil se v celkovém pořadí na děleném 10.–12. místě, *Magdaléna Mišimová* (22 bodů), *Samuel Rosiar* (21 bodů) a *Karel Chwistek* (21 bodů) získali stříbrnou medaili, kdy první z nich se umístila na 63.–104. místě, zbývající dva obsadili 105.–142. místo. Konečně *Jiří Kalvoda* obdržel bronzovou medaili za zisk 18 bodů, což byl výsledek jediný bod za hranicí udělení stříbrné medaile. Celkově tak skončil na 156.–163. místě.

Podle zisku medailí je letošní výsledek českého družstva nejlepší v celé historii české účasti od roku 1993. Skvělý výsledek podtrhuje také výborné 16. místo v soutěži družstev. Podrobnější informace o výsledcích najdete ve [výsledkových listinách](#), na stránkách [letošního ročníku IMO](#) a na [oficiálních stránkách](#) soutěže.

Vzhledem k pandemii covid-19 připravili ruští organizátoři pro soutěžící bohatý virtuální program, kterého se všichni mohli zúčastnit pomocí aplikací na sociálních sítích. Nechyběla zde ani tradiční prezentace všech účastníků z jednotlivých zemí, ani závěrečný ceremoniál. Kromě toho obsahoval zmíněný program množství diskusních center a virtuálních prohlídek významných petrohradských pamětihodností.

Na závěr uvádíme zadání všech šesti soutěžních úloh.

První soutěžní den

(19. 7. 2021)

1. Nechť $n \geq 100$ je celé číslo. Ivan napsal čísla $n, n+1, \dots, 2n$, každé z nich na jinou kartu. Pak těchto $n+1$ karet zamíchal a rozdělil na dvě hromádky. Dokažte, že aspoň jedna z těchto hromádek obsahuje takové dvě karty, že součet čísel na nich napsaných je druhou mocninou přirozeného čísla.

2. Dokažte, že pro všechna reálná čísla $x_1, \dots, x_n$ platí nerovnost

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sqrt{|x_i + x_j|}.$$

3. Nechť D je vnitřní bod ostroúhlého trojúhelníku ABC , v němž $|AB| > |AC|$, a platí $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle CAD|$. Bod E úsečky AC splňuje $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle BCD|$, pro bod F úsečky AB platí $|\sphericalangle FDA| = |\sphericalangle DBC|$ a pro bod X přímky AC platí $|CX| = |BX|$. Nechť O_1 a O_2 jsou středy kružnic opsaných po řadě trojúhelníkům ADC a EXD . Dokažte, že přímky BC , EF a O_1O_2 procházejí společným bodem.

Druhý soutěžní den

(20. 7. 2021)

4. Necht' Γ je kružnice se středem I a $ABCD$ konvexní čtyřúhelník, jehož strany AB, BC, CD, DA jsou tečnami kružnice Γ , a Ω je kružnice opsaná trojúhelníku AIC . Polopřímka BA protíná kružnici Ω v bodě X , který leží za bodem A a polopřímka BC protíná Ω v bodě Z , který leží za bodem C . Polopřímky AD a CD protínají kružnici Ω po řadě v bodech Y a T , které leží za bodem D . Dokažte, že

$$|AD| + |DT| + |TX| + |XA| = |CD| + |DY| + |YZ| + |ZC|.$$

5. Dvě veverky, Bushy a Jumpy, nashbíraly na zimu 2021 oříšky. Jumpy označila oříšky čísly od 1 do 2021 a vyhloubila 2021 malých jamek po obvodu kružnice kolem svého oblíbeného

stromu. Následující ráno Jumpy zjistila, že Bushy umístila do každé jamky po jednom oříšku bez ohledu na jejich čísla. Nešťastná Jumpy se rozhodla přeskupit oříšky použitím posloupnosti 2021 kroků. V k -tém kroku Jumpy zamění pozice dvou oříšků sousedících s oříškem k . Dokažte, že existuje hodnota k taková, že v k -tém kroku zamění Jumpy oříšky s některými čísly a a b , která splňují nerovnost $a < k < b$.

6. Necht' $m \geq 2$ je celé číslo, A je konečná množina (ne nutně kladných) celých čísel a $B_1, B_2, B_3, \dots, B_m$ jsou podmnožiny A . Předpokládejme, že pro každé $k = 1, 2, \dots, m$ je součet prvků B_k roven m^k . Dokažte, že A obsahuje aspoň $m/2$ prvků.

Následující, doufejme, že již prezentování, ročník soutěže bude organizovat Norsko (v hlavním městě Oslo), a to v termínu 6.–16. 7. 2022.

Pavel Calábek



České družstvo před budovou GMK v Bílovci. Zleva: K. Chwistek, doc. T. Bárta, J. Kalvoda, M. Mišinová, dr. P. Calábek, S. Rosiar, M. Šafránek, M. Janík a dr. J. Švrček