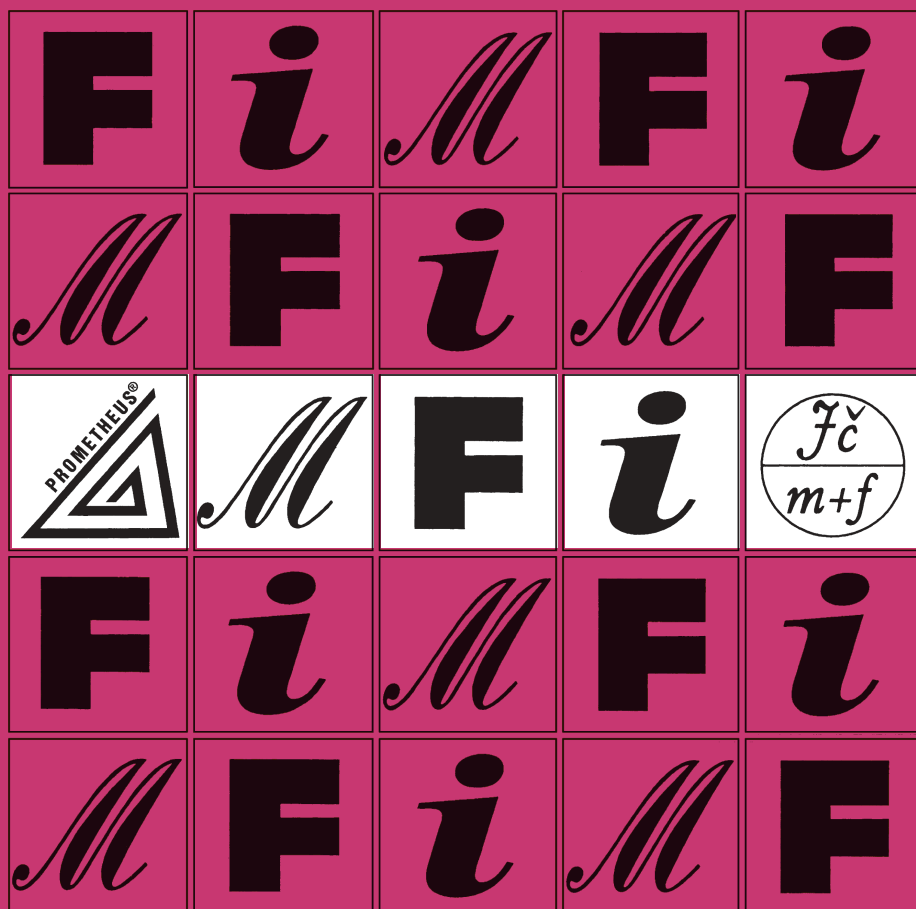


MATEMATIKA 1 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXXI (2022), číslo 1

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku
Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek
Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška, Michaela Křížová, Miluše Lachmannová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil (předseda redakční rady), Dana Mandíková, Oldřich Odvárko, Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel Töpfer

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>F. Kuřina:</i> Matematika pro všechny nebo matematika pro každého?	1
<i>L. Juklová, J. Švrček:</i> Pět pěkných příkladů pro pravidelný pětiúhelník	15
<i>P. Calábek:</i> Mnohočleny v matematických soutěžích	21
Zajímavé matematické úlohy	31

FYZIKA

<i>Z. Gibová:</i> Overenie pohybovej rovnice otáčavého pohybu pomocou videomerania	34
<i>J. Hošková Prokšová:</i> Rudolf Clausius (k dvoustému výročí narození)	45
<i>A. Kuřová, L. Richterek:</i> Motivační videoexperimenty ve výuce fyziky mikrosvěta	51

INFORMATIKA

<i>P. Töpfer:</i> Bipartitní graf (Úlohy z MO kategorie P, 43. část)	58
<i>E. Bartl:</i> Počítačová grafika, 2. díl	66
<i>J. Laštovička:</i> Programování bez proměnných	74

MATEMATIKA

Matematika pro všechny nebo matematika pro každého?

FRANTIŠEK KUŘINA

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

*Být učitelem není těžké, ale být
dobrým učitelem je velmi těžké.*

Liping Ma

Nadpis článku možná vyvolává u někoho rozpaky. Vždyť učit všechny znamená učit každého. A učit každého znamená učit všechny. Nadpisem je patrně myšleno něco víc, než se explicitně říká. Přiznávám, že podnětem k tomuto nadpisu byla následující úvaha Karla Čapka: „*Na první pohled vypadá stejně, prohlásíme-li, že ,všichni lidé mají nos‘, nebo že ,každý člověk má nos‘. Obojí kategoricky vypovídá soubynost člověka a nosu. Ale je-li v obojím případě stejná soubynost, není stejný nos. Řeknu-li, že všichni lidé mají nos, zjeví se mi jakýsi pomyslný, obecný a velikánský nos, orgán se dvěma dírkami a žádnou osobní zvláštností, nos, abych tak řekl, udělaný z pojmové sádky. Ale řeknu-li, že každý člověk má nos, znamená to už, že má svůj nos, osobní, hrbolatý, hák, bambuli, velký, lesklý, všetečný, orlí, studený nebo teplý nosánek, nos, rypák či chobot, zkrátka že každému přísluší jeho vlastní, personální, ryze soukromý nos, jež někam strká, na jehož špičku nevidí a na němž lidé čtou, co chce říct. Nos každého člověka prostě a venkoncem není nos všech lidí.*“ ([1], s. 158).

Vraťme se k nadpisu článku.

V první třídě, ba někdy ani před maturitou, nevíme, zda dívka bude baletkou nebo atomovou fyzikou, zda z hochy vyroste fotbalista nebo lékař. To je jeden z důvodů, proč musíme učit matematiku všechny děti. Budou ji potřebovat v životě, hlavně v dalším studiu. Druhý důvod je ovšem ten,

jsem o tom přesvědčen, že matematika přispívá ke kultivaci člověka. Je-li ve škole dobře provozována, učí vidět souvislosti, učí kritičnosti, učí myslet, ale přispívá i k rozvíjení zodpovědnosti, pozornosti, soustředění, učí žáky pracovat, ... Ovšem všichni dobře víme, že ne všechny děti mohou zvládnout matematiku na stejné úrovni.

Výklad učitele

Matematiku musíme učit všechny děti, ovšem dobrý učitel diferencuje matematické požadavky na žáky podle jejich duševních schopností a podle jejich zájmů. Realizace této zásady ve třídě je ovšem obtížná, nelze na ni dát návod, spočívá na umění učitele. Jsem přesvědčen, že dobrý učitel je schopný, při příznivých podmínkách, naučit základním poznatkům i žáky méně nadané. Problémem jsou ovšem žáci, kteří se učit záměrně nechtějí. Zde hraje základní roli umění motivace.

V článku [7] píše autorka, že v rámci tzv. velké školní revize rámcových vzdělávacích programů se v naší škole odehrají revoluční změny. „Výklad učitele má nahradit z větší části týmová práce žáků, výklady mají být nahrazeny debatami.“ Tyto „revoluční změny“ mají být „vstřebané do výuky již v roce 2023.“ To je podle mého názoru nesprávná orientace naší školy.

Všimněme si, jak se na problematiku výkladu učiva dívají britští autoři *Hendrick a Macpherson*. „Máme pocit, že didaktický výklad je nespravedlivě ocerňován, ač je pro dobrou výuku nezbytný. (...) Někdy je učitelův výklad naprosto zásadní. Je to jeden z nejlepších způsobů, jak sdílet znalosti, které jsou pro učení důležité nejen samy o sobě, ale jsou také látkou k promýšlení při více interaktivních aplikovaných aktivitách.“ ([2], s. 146).

K práci ve skupinách zaujímají tito autoři stanovisko: „Ve skupině můžete být buď vůdce, stoupenec, houba nebo rušitel. To jsou čtyři typy postav. Rušitelé jsou naprostou ztrátou času. Jejich úkolem je rušit každého ve skupině nebo ostatní skupiny. Houba jenom sedí, dělá, co se jí řekne, a je to naprosté plýtvání prostorem. Stoupenec s někým vždycky nadšeně souhlasí, ale nemá žádné vlastní nápady. Vůdce skutečně skupinu vede, ale problém s vůdcí je ten, že mohou skupinu ovládat“ ([2], s. 149). V českém prostředí popisuje práci ve skupinách Milan Hejný: Jeden žák přišel na řešení problému. „Další dva žáci se k tomu přidali a zbytek třídy tomu věřil, neboť tři nejlepší matematici třídy to shodně tvrdili. Někteří žáci to chápali lépe, jiní jen povrchně“ ([9], s. 137). Tak byl poznatek ve třídě oficiálně objeven.

„Empirický výzkum z posledního půlstoletí poskytl četné jednoznačné závěry, že pro každého kromě odborníků je částečné vedení během výuky významně méně účinné a efektivní než plné vedení. (...) Samostatné učení může být kýženým výsledkem, ale paradoxně nemusí být tím nejlepším způsobem, jak toho výsledku dosáhnout.“ „Bylo nesporně dokázáno, že práce ve skupinách má neblahý vliv na pozornost.“ ([2], s. 199).

Frontální vyučování a samostatná práce žáků

Někdy kolem r. 1648 napsal *Komenský* „*Učitel nikdy nebude vyučovati pouze jednoho. . . , nýbrž všechny pohromadě a najednou. Nepůjde tedy k nikomu zvlášť a nedovolí, aby k němu přistoupil někdo zvlášť, nýbrž stojí na katedře (odkud jej mohou všichni viděti a slyšeti) šířiti bude paprsky na všechny jako slunce, a všichni, upřeny majíce na něj zrak, sluch i ducha, ať zachycují všecko, co jim buď řečí bude přednášeti nebo rukou nebo v obrazy ukazovati. Tak zabije jednou ranou ne dvě, nýbrž velmi mnoho much*“ ([4], s. 208).

To je příklad frontální výuky, kterou např. *Kalhous* a *Obst* popisují takto: „Žáci v průběhu výuky plní vždy ve stejném čase stejné učební úkoly, tedy probírají stejnou látku, postupují jednotně stejným způsobem. Úkolem učitele je řídit učební činnost všech žáků najednou. (...) Jsou vedeni a postupují krok za krokem v jakési pomyslné řadě jeden vedle druhého. Implicitně se předpokládá, že žáci mimo průměr se přizpůsobí. Pokud se tak nestane, jsou k přizpůsobení nuceni. Ve skutečnosti jsou často jaksi ‚na obtíž‘, vyrušují nebo komplikují práci učitele“ ([5], s. 295). *Josef Polák* uvádí v článku ([6], s. 264), že frontální vyučování je „v našich školách stále ještě nejčastěji užívanou formou organizace výuky.“

Podle MŠMT „frontální pojetí výuky, kdy učitel přednáší a děti pasivně poslouchají, má na základních a středních školách z větší části nahradit práce v týmu na společných projektech“ [7]. Podle *Jaromíra Berana*, náměstka pro řízení sekce vzdělávání na ministerstvu, se mají žáci učit, aniž si uvědomují, že se učí („gamifikace školství“) ([7], s. 3). Nejrozšířenější forma výuky je tak určena k vyhynutí.

Dichotomie *frontální výuka–aktivita žáků* je falešná. Podle mého názoru se výuka na našich školách více nebo méně blíží frontální výuce podle anglického pedagoga *Geoffa Pettyho*. „Základním postupem této, tzv. frontální interaktivní výuky, je vytvořit dynamickou směs učitelova výkladu (asi 40 %) s následujícími prvky:

- *žákovská činnost* – na počátku probírání každého tématu jsou úkoly pro žáky krátké a snadné a postupně nabývají na délce a náročnosti;

- *asertivní otázky* – jejich smyslem je co nejvíce posílit žákovskou účast, aktivní učení a spojení mezi novým učním a učním zvládnutým dříve;
- *žakovská demonstrace* – žáci předvádějí své rozvíjející se dovednosti, využívají při tom tabuli nebo zpětný projektor, jejich spolužáci je sledují a hodnotí správnost provedení.“ ([8], s. 275).

Budování hlubokého konceptuálního porozumění a vyššího řádu myšlení vyžaduje intenzivní interakci mezi učitelem a žákem. To ovšem Pettyho pojetí frontálního vyučování, v němž se střídá výklad a otázky učitele, odpovědi žáků a řešení úloh, plně umožňuje.

Vraťme se ke Komenskému, kterého jsem představil jako původce frontálního vyučování, při němž je žák zcela pasivní. Ovšem deset let po vydání citované práce píše Komenský *Didaktiku analytickou*, v níž požaduje:

CLXXI. Všem, čemu se musíme učit, nechť se učíme vlastní praxí.

CXLV. Nechť se učitel sklání k žákovi a pomáhá jeho chápavosti všemi možnými způsoby.

XXXIV. Žákovi přísluší práce, učiteli řízení. [10]

To jsou zárodky konstruktivních přístupů, které po čtyřech stech letech charakterizuje švýcarský psycholog *Jean Piaget* takto:

„*Padesát let experimentování nás poučilo, že neexistuje žádné poznání, které by bylo výsledkem pouhého zaznamenávání pozorovaného, a jež by nebylo strukturováno aktivitou subjektu.*“ (citováno podle [11], s. 65).

Tyto přístupy může učitel realizovat při interaktivní frontální výuce a samostatné práci žáků při řešení vhodných úloh.

Příklady

Pokusme se nyní ilustrovat výše zmíněné postupy jejich možnou realizací v praxi školy.

a) *Druhá mocnina a kvadratická rovnice*

Setkal jsem se s maturantkou, která tvrdila: Vzorec pro $(a + b)^2$ jsme vůbec neodvozovali. Paní učitelka ho napsala na tabuli a řekla: „To se naučte, budete to potřebovat.“ A řešili jsme úlohy

$$(3a + b)^2 = \qquad (a + 4)^2 = \qquad (3x + y)^2 =$$

To je téměř neuvěřitelný přístup k matematice. Tato paní učitelka nepřipomněla ani definici druhé mocniny ($a^2 = a \cdot a$), a tedy ani smysl $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$. Na otázku Kolik je $(a + b)^2$ odpoví asi většina žáků $a^2 + b^2$. Není vhodné pouze říci: To je špatně. Lepší je doplňovat tabulku typu:

a	b	$a + b$	$a^2 + b^2$	$a^2 + 2ab + b^2$
1	2	3	5	9
2	3	5	13	25

Na jejím základě se patrně žáci mohou domnívat, že platí

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2. \quad (1)$$

Jsou žáci, kterým argumentace tabulkou stačí. Těm můžeme dát k prozkoumání tabulku

a	b	$6a$	$3b$	$(6a + 3b)$ je sudé
1	2	6	6	12
2	6	12	18	30
5	4	30	12	42
		...		

Někteří žáci snad objeví, že tabulkou není tvrzení zdůvodněno. Jestliže se žádný takový žák nenajde, napovíme: zkuste $a = 2$, $b = 1$. Pak $6a + 3b = 12 + 3 = 15$, tedy liché číslo. Ačkoliv to v několika případech vyšlo, obecně to neplatí.

Jak tedy vzorec (1) ověřit, když ještě neznáme pravidlo pro násobení dvojčlenů dvojčlenem?

Matematik by patrně postupoval takto: Podle již známé distributivity pro násobení vzhledem ke sčítání

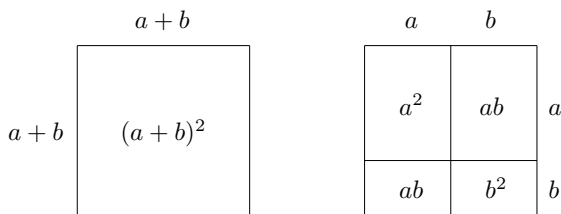
$$a(b + c) = ab + ac \quad (2)$$

můžeme postupovat tímto způsobem: Označme $a + b = A$ a pro součin $(a + b)(a + b)$ máme $A(a + b) = Aa + Ab$ (podle (2)) a dále opět podle (2)

$$(a + b)a + (a + b)b = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

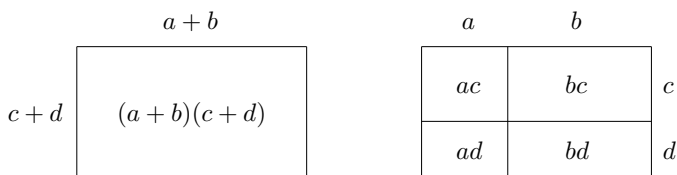
Tento postup patrně bude pro mnohé žáky nepřesvědčivý – je to jen jakási „hra s písmeny“.

Snad přesvědčivější je přístup geometrický. Je-li dané číslo a velikostí strany čtverce, je a^2 obsah čtverce nad touto stranou. Aplikujeme-li tento výsledek na čtverec o straně $a + b$, dostaneme podle obr. 1 výsledek (1).



Obr. 1

Podobně můžeme aplikovat tuto metodu i na určení součinu dvojčlenů, interpretujeme-li ab jako obsah obdélníku se stranami a, b (obr. 2).



Obr. 2

Naznačený postup lze podle mého názoru využít při interaktivním frontálním vyučování. K poznatkům dovedeme žáky na základě otázek a úloh.

Co je kvadratická rovnice?

Žákovskou odpověď: „Je to rovnice, v níž je neznámá v kvadrátu (druhé mocnině)“ můžeme přijmout, ovšem měli bychom reagovat otázkami: Jsou rovnice

$$\frac{1}{x} = x \quad (3)$$

a

$$x^4 - x^2 = 0 \quad (4)$$

rovnicemi kvadratickými? Rovnici (3) bychom asi měli za kvadratickou rovnici považovat, neboť je ekvivalentní s rovnicí $x^2 = 1$ a má 2 kořeny, (1 a -1), rovnice (4) však kvadratická není. Platí

$$x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) = x \cdot x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1).$$

Má tedy, na rozdíl od rovnice kvadratické, čtyři kořeny: 0, 0, 1 a -1 .

Tato problematika se týká jazyka matematiky. Za kvadratickou rovnici bychom měli považovat každou rovnici, kterou je možné ekvivalentními úpravami uvést na tvar

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (5)$$

kde a, b, c jsou reálná čísla, a je různé od nuly. Takovou formulaci najdeme jen v některých našich středoškolských učebnicích.

Kapitola o kvadratických rovnicích pak může pokračovat vhodnými otázkami a úlohami až k odvození příslušného vzorce. To ovšem můžeme realizovat jen s „lepší“ částí třídy. Ostatní mohou řešit vhodné úlohy.

Je možné vzorec pro kořeny kvadratické rovnice uvést bez důkazu? Podle mého názoru ano. U „nejslabších“ žáků bychom patrně mohli být spokojeni, znají-li tento vzorec a umí řešit kvadratické rovnice s koeficienty v malých přirozených číslech. Měli bychom ovšem dbát na to, aby vzorci rozuměli. Prověříme to např. otázkou: Můžete řešit rovnici $x^2 = 1$ podle vzorce? Naučit žáky aplikovat vzorec, který jsme neodvodili, je minimální úroveň, kterou by měli dosáhnout všichni žáci. Schéma *vzorec-aplikace-zdůvodnění* je realizováno na řadě míst slovenských gymnaziálních učebnic *Zbyňka Kubáčka*. Je to koneckonců nejen v souladu s aplikacemi matematiky např. v technické praxi, ale i s historickým vývojem. Pythagorova věta se používala více než 1000 let před jejím důkazem.

Mají znát žáci důležité vzorce (např. pro obsah trojúhelníku, obdélníku, lichoběžníku, kruhu, ..., pro řešení kvadratické rovnice, ...) z paměti? Domnívám se, že ano. Vzorce jsou vlastně „úsporné“ vyjádření věty. Místo vzorce (1) bychom měli psát

$$\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} [(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2].$$

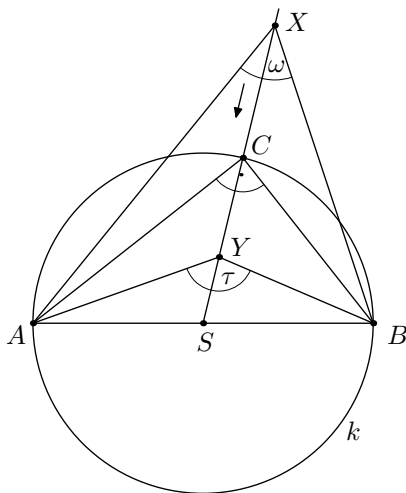
Ke znalostem důležitých matematických vět by mělo vyučování matematice vést. Setkal jsem se s profesionálním matematikem, který tvrdil, že žáci nemají žádné vzorce znát: všechno lze odvodit nebo najít na internetu. Takový názor nepovažuji za správný. Odvozovat při každé příležitosti potřebný vzorec je „neekonomické“, řešení úloh bez znalostí „faktů“ je nemyšlitelné.

b) *Věta o Thaletově kružnici*

V mnoha učebnicích je věta o Thaletově kružnici uvedena jako hotový fakt. Prostudujte si tuto partii v učebnicích planimetrie pro gymnázia nakladatelství Prometheus (1993) a zpracování od téže autorky v naklada-

telství Fraus (2019). Takový přístup nahrává frontálnímu vyučování klasického typu, kdy učitel vykládá (přednáší) a žáci pasivně poslouchají, případně si píší. Naznačme zde přístup k této problematice odpovídající interaktivní frontální výuce.

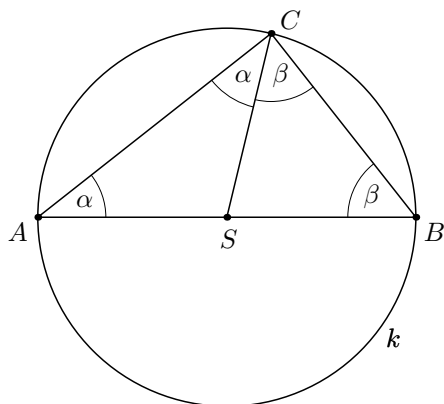
Začneme úlohou: *Narýsujte si kružnici k se středem S , průměrem AB a jejím libovolným bodem C (obr. 3). Odhadněte, jak se bude měnit úhel AXB , pohybuje-li se bod X po polopřímce opačné k polopřímce CS směrem k bodu C . Jak se bude měnit úhel AYB při pohybu bodu Y po úsečce CS ?*



Obr. 3

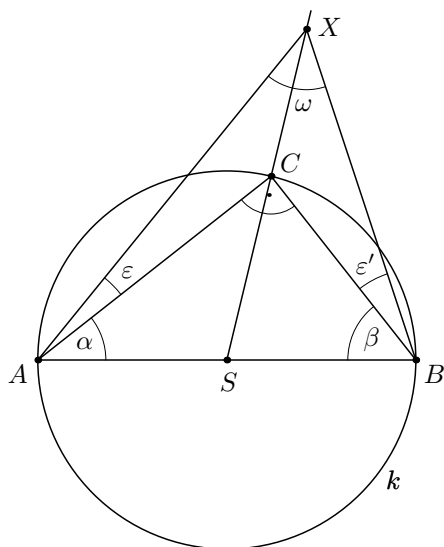
Většina žáků patrně při vyrýsování několika trojúhelníků AXB a AYB dojde k domněnce: vyjdeme-li od bodu X na okraji papíru, pak se při pohybu bodu X k bodu C po přímce XC úhel AXB neustále zvětšuje a toto zvětšování pokračuje i při pohybu bodu Y po úsečce CS . Všimněme si, že úhly AXB jsou ostré a úhly AYB jsou tupé. A jaká je velikost úhlu ACB ? Přirozená je odpověď, že úhel ACB je pravý. Můžeme tomu věřit na základě obrázku? Měli bychom přesvědčit žáky, že je třeba toto tvrzení zdůvodnit.

Co znamená, že bod C leží na kružnici k ? ($|SC| = |SA| = |SB|$). Co můžeme tedy říci o trojúhelnících ACS a BCS ? (Jsou rovnoramenné a mají tedy u základů shodné úhly (obr. 4)). Podle obrázku vidíme, že součet úhlů v trojúhelníku ACS je $\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ$. Je tedy $\alpha + \beta = 90^\circ$ a trojúhelník ABC má u vrcholu C pravý úhel.



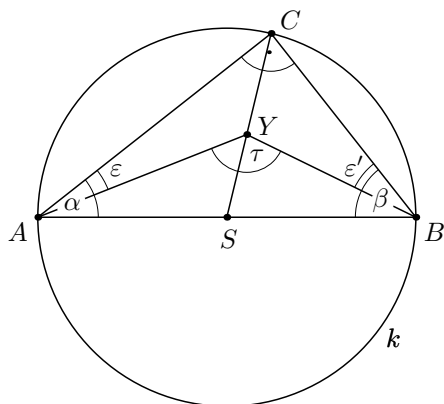
Obr. 4

Dokázat, že úhly AXB jsou ostré a úhly AYB tupé, je rovněž lehké. Součet úhlů u vrcholů A, B trojúhelníku ABX je větší než $\alpha + \beta = 90^\circ$, neboť k úhlům α a β jsme „přidali“ úhly ε a ε' (obr. 5).



Obr. 5

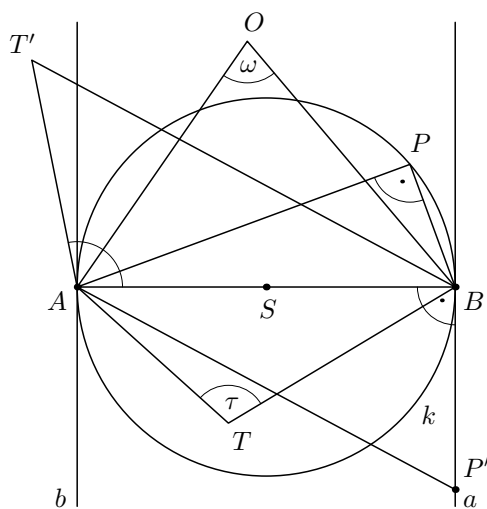
Úhel AXB je tedy ostrý. Podobně zjistíme, že součet úhlů YAB a YBA je menší než $\alpha + \beta$ a úhel AYB je tedy tupý (obr. 6).



Obr. 6

Tím máme dokázanu Thaletovu větu, ale získali jsme ještě poznatek o velikosti úhlů AXB a AYB . Po formulaci této věty můžeme řešit úhlu: *Určete množinu vrcholů P všech pravoúhlých trojúhelníků APB , množina vrcholů O všech ostroúhlých trojúhelníků AOB a množinu vrcholů T všech tupouhlých trojúhelníků ATB .*

Uveďme zde pouze výsledek úlohy, k němuž dojdeme v diskusi se žáky.



Obr. 7

Žádný bod přímky AB nemůže být vrcholem trojúhelníku ABC . Množina vrcholů pravoúhlých trojúhelníků je (v označení podle obr. 7) sjednocení přímek a , b a kružnice k . Množina vrcholů T všech tupoúhlých trojúhelníků je složena z bodů vnitřku kruhu s hranicí k a bodů vnitřků polorovin opačných k polorovinám aB a bA . Množina vrcholů O ostroúhlých trojúhelníků je množina bodů, které leží uvnitř pásu s hranicemi a , b a vně kruhu s hranicí k .

Na toto učivo navazuje studium vlastností obvodových úhlů, které bychom mohli realizovat podobně.

Připomeňme ještě další možnosti, jak odvodit s žáky větu o Thaletově kružnici.

Pro body $A[-r, 0]$, $B[r, 0]$, $S[0, 0]$, $X[x, y]$ můžeme postup, který jsme uvedli, symbolicky zapsat:

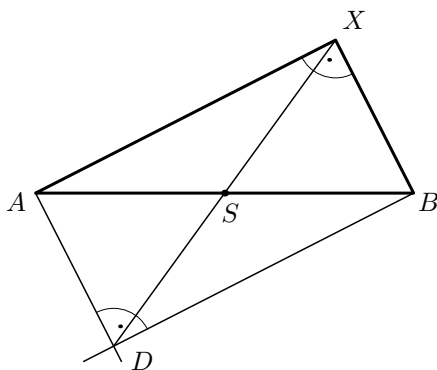
$$X \in k(S, r) \Rightarrow |\sphericalangle AXB| = 90^\circ \quad (6)$$

$$X \notin k(S, r) \Rightarrow |\sphericalangle AXB| \neq 90^\circ \quad (7)$$

Věta (7) je ovšem věta obrácená k větě (6) a místo ní můžeme dokazovat větu (8) s ní ekvivalentní:

$$|\sphericalangle AXB| = 90^\circ \Rightarrow X \in k(S, r). \quad (8)$$

Ideu důkazu navodíme úvahou: Pravoúhlý trojúhelník AXB je polovinou obdélníku $AXBD$ (obr. 8). Protože se v obdélníku úhlopříčky půlí a jsou shodné, je $X \in k(S, r)$.



Obr. 8

Uvedené důkazy byly přístupné žákům, ale přece jen byly založeny na nápadech (čeho si máme všimnout). V prvním případě rovnoramenných

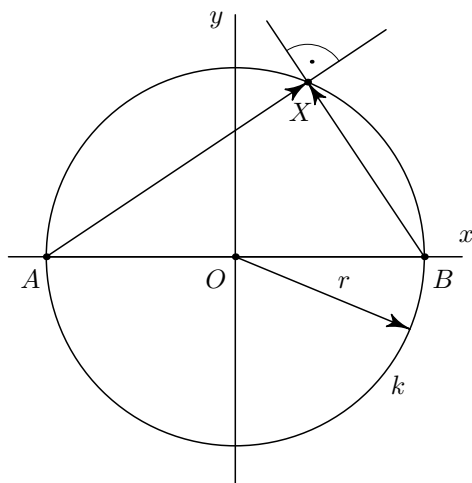
trojúhelníků, jejich úhlů u základen a součtu vnitřních úhlů trojúhelníku, v případě důkazu tvrzení (8) toho, že pravoúhlý trojúhelník je polovinou obdélníku. Znájí-li žáci základy analytické geometrie, můžeme tvrzení (8) dokázat takto: $|\sphericalangle AXB| = 90^\circ$ znamená, že přímký AX a BX jsou k sobě kolmé (obr. 9). Pro skalární součin vektorů $\overrightarrow{AX}$ a $\overrightarrow{BX}$ tedy platí

$$(x + r, y) \cdot (x - r, y) = 0 \quad (9)$$

neboli

$$x^2 + y^2 = r^2. \quad (10)$$

To je ovšem rovnice kružnice $k(S, r)$. Tím je tvrzení (8) dokázáno. Protože z rovnosti (10) plyne rovnost (9), je Thaletova věta dokázána výpočtem, neboli transformací symbolů pomocí známých pravidel. To je charakteristické pro analytickou geometrii.



Obr. 9

Samozřejmě namítnete, že postupy zde připomenuté jsou podstatně časově náročnější než sdělení věty o Thaletově kružnici. Získáme však podle mého názoru hlubší matematické poznatky. Jsem si vědom toho, že celou matematiku nelze takto v praxi školy realizovat, jsem však přesvědčen, že ve vybraných partiích je to možné a přínosné pro žáky.

Závěry

„Matematika je (...) rudimentem školního vzdělávání, základním kamenem, branou do dalšího poznání v oblasti mnoha přírodních i společenských věd. Je specifickým jazykem, který umožňuje porozumět hmotnému společenskému světu v jeho makro- i mikrovztazích. Matematika je tím, co umožnilo vyvinout extenzi lidských rukou, nohou a mozku do současné podoby. Proto hraje tak zásadní roli ve školním vzdělávání“ ([12], s. 98). „Školství se snaží dlouhodobě – a neúspěšně aktualizovat znalosti a stále přitom zaostává. Vedle toho ovšem významně pomíjí právě hodnotovou bázi a bázi ‚učení k myšlení‘, která je pro udržení společenské prosperity nejdůležitější“ ([13], s. 9). Podle mého názoru hraje matematika v rozvíjení myšlení nezastupitelnou roli. Přitom ovšem nelze pominout, že pouze dobře realizovaná výuka matematiky k rozvíjení myšlení vede. Existují přístupy k matematice, které myšlení ubíjí (biflování vzorců, pouček, postupů, řešení typových úloh, ...). Z druhé strany je ovšem nutné si uvědomit, že složkou matematiky je i zvládnutí určitých dovedností a určitých znalostí, bez nich se nelze učit řešit problémy. Zvládnutí matematiky je práce, vyžaduje soustředěné úsilí. Samozřejmě mnohé matematické úlohy lze přenechat technice, ale učit s touto technikou pracovat patří rovněž do vyučování matematice. Lze spekulovat o tom, že techniku ovládne veškeré lidské myšlení a nahradí i tvořivost. To ovšem není problém naší, ba ani nejbližších generací.

Na základě svých pedagogických zkušeností a studia literatury jsem přesvědčen o platnosti následujících tezí.

1. Školní kurikulum (v užším smyslu) by mělo být výrazně ovlivněno tím, jak učivo přispívá k rozvíjení osobností žáků (zodpovědnost, kritičnost, pozornost, porozumění, soustředění, paměť, argumentace, myšlení, ...). Plnění osnov by mělo být závazné pro žáky i učitele. Základem vzdělávací práce školy by neměly být testové otázky, ale osnovy, které vyjadřují minimální úroveň gramotnosti žáků. Nadto by ovšem měli učitelé systematicky rozvíjet schopnosti žáků nadaných.
2. Žádná radikální reforma školy nemůže výrazně zlepšit práci učitelů. Tu ovlivňuje především přesvědčení učitelů, jejich odborná a morální úroveň, ale i žáci, rodiče a celá společnost. Tyto jevy nelze změnit administrativně, zejména ne výzvami „k novému myšlení“ učitelů.
3. Školu lze zlepšit utvářením vyhovujících hmotných a společenských podmínek pro její práci. To zahrnuje kvalitní univerzitní vzdělání peda-

gogických pracovníků, které by bylo zaměřeno nejen na získání nutných teoretických vhledů do oborů aprobací, ale i na budoucí praxi (metody práce ve třídě, provoz školy, řešení problémů kázeňských, práce s rodiči, ...). Škola je součástí společnosti a nezdravé společenské jevy (protektce, korupce, podvody, ...) nemohou nemít na práci školy vliv. V nezdravé společnosti nemůže být škola zdravá. To ovšem neznamená, že bychom se neměli snažit zlepšovat školu v oblasti výchovné i výukové podle aktuálních podmínek. Je však třeba, aby učitelé měli klid na svou obtížnou práci. Překotné reformy, zbytečná administrativa, neprofesionální řízení školy a řada dalších negativních vlivů práci učitelů ztěžují.

4. Škola byla a je institucí společenskou. O základních otázkách její práce (struktura školní docházky, ukončení studia, ...) rozhodují koneckonců politické orgány, tedy sbor lidí bez pedagogického vzdělání. Podklady pro to by jim ovšem měla dodat pedagogická věda.

Literatura

- [1] Čapek, K.: V zajetí slov. Svoboda, Praha, 1969.
- [2] Hendrick, C., Macpherson, R.: Co funguje ve třídě. Euromedia Group, Praha, 2019.
- [3] Lojdová, K.: O škole jako kotvě společnosti. Komenský, roč. 141, č. 4, s. 5–12.
- [4] Komenský, J.: A. Didaktika veliká. Dědictví Komenského, Praha, 1905.
- [5] Kalhous, Z., Obst, O.: Školní didaktika. Portál, Praha, 2002.
- [6] Polák, J.: Didaktika matematiky v 21. století a realita výuky. Matematika, fyzika, informatika, 29, č. 4, 2020, s. 256–276.
- [7] Riziková, M.: Velká školní revize. Lidové noviny, 25. 5. 2021.
- [8] Petty, G.: Moderní vyučování. Portál, Praha, 2013.
- [9] Hejný, M. a kol.: Matematika. Příručka CD učitele 2. stupně a víceletých gymnázií. H-mat, Praha, 2017.
- [10] Komenský, J. A.: Didaktika analytická. Samcovou knihkupectví, Praha, 1946.
- [11] Bertrand, V.: Soudobé teorie vzdělávání. Portál, Praha, 1998.
- [12] Kartous, B.: No Future. 65. Pole. Praha 2019.
- [13] Kartous, B.: Informatické myšlení do řízení vzdělávání. Lidové noviny, 25. 5. 2021.

Pět pěkných příkladů pro pravidelný pětiúhelník

LENKA JUKLOVÁ – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Pravidelnému pětiúhelníku – na rozdíl od jiných pravidelných n -úhelníků ($n = 3, 4, 6, 8$) – není věnováno ve školské matematice tolik pozornosti. Výjimkou je snad jen popis konstrukce pravidelného pětiúhelníku vepsaného do dané kružnice, nebo o dané délce strany. Zájemce o tuto problematiku lze přitom odkázat např. na [1, 2] nebo [3].

V tomto příspěvku nabízíme čtenářům možnost seznámit se s některými pozoruhodnými vlastnostmi pravidelného pětiúhelníku na bázi řešení pěti zajímavých úloh. Obsah tohoto příspěvku lze mj. využít ve speciálních seminářích z matematiky na gymnáziích nebo při práci s matematicky nadanými žáky.

Příklad 1

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Označme P, Q po řadě průsečíky úhlopříček AD, BD s úhlopříčkou CE . Určete, v jakém poměru dělí body P, Q úhlopříčku CE .

Řešení. Z důvodu symetrie daného pětiúhelníku podle osy strany AB dělí body P a Q úhlopříčku CE v postupném poměru $x : y : x$, kde $x = |EP| = |CQ|$ a $y = |PQ|$ (obr. 1). Stačí tedy určit hodnotu poměru $x : y$.

Snadno se vidí, že

$$|\sphericalangle DEQ| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle PDQ| = 36^\circ$$

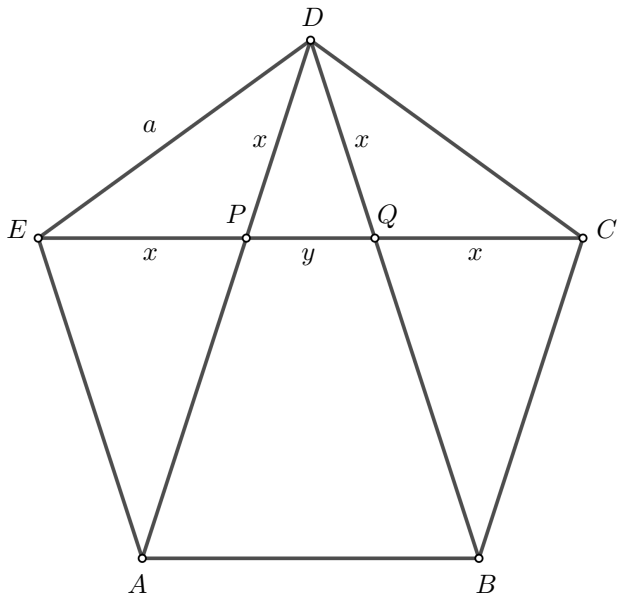
a podobně

$$|\sphericalangle EDQ| = |\sphericalangle EQD| = 72^\circ.$$

Trojúhelník EQD je tedy rovnoramenný se základnou QD , a proto platí $x + y = a$, kde a značí délku strany daného pětiúhelníku. Navíc, přímka DP je osou vnitřního úhlu při vrcholu D v rovnoramenném trojúhelníku EQD ($36^\circ - 72^\circ - 72^\circ$). Trojúhelníky EQD a DPQ jsou rovnoramenné (podobné) se základnami po řadě QD a PQ . Protože i trojúhelník EPD

je rovnoramenný se základnou DE , platí

$$x = |EP| = |PD| = |DQ|.$$



Obr. 1

Podle věty o ose (vnitřního) úhlu při vrcholu D v trojúhelníku EQD platí

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{x} = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}.$$

Užitím substituce $u = x/y > 0$, tj. $y/x = 1/u$, dostaneme z předešlého vztahu po úpravě kvadratickou rovnici o neznámé u

$$u^2 - u - 1 = 0,$$

která má právě jeden kladný reálný kořen $u = x/y = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.¹⁾

ZÁVĚR. Pro hledaný postupný poměr tak platí

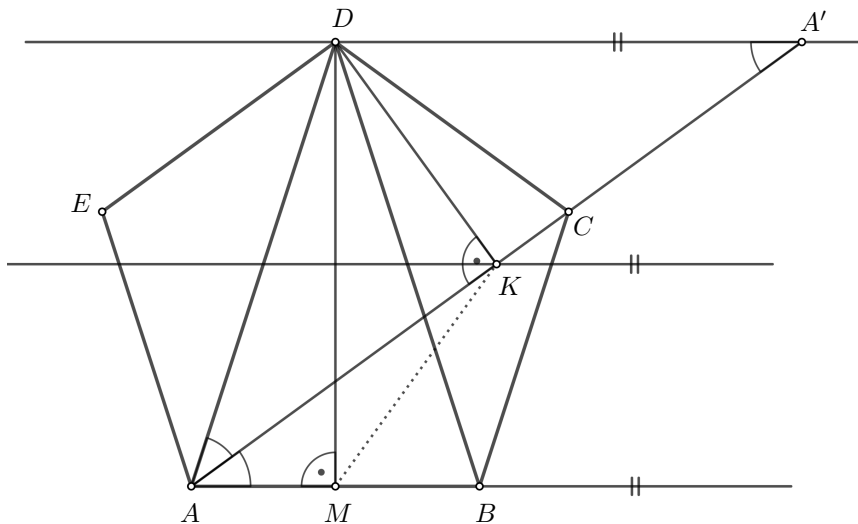
$$x : y : x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) : 1 : \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}).$$

¹⁾Bod P tedy dělí úsečku EQ v poměru tzv. *zlatého řezu*.

Příklad 2 (84. Moskevská matematická olympiáda, 2021)

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Označme M střed strany AB a K průsečík osy úsečky DM s úhlopříčkou AC . Dokažte, že $AK \perp DK$.

Řešení. Uvažujme bod A' souměrně sdružený s vrcholem A vzhledem ke středu K . Protože bod K leží na ose úsečky DM , leží bod A' na rovnoběžce s přímkou AB , která prochází vrcholem D (obr. 2). Střídavé úhly $A'AB$ a $DA'A$ jsou shodné s úhlem DAC , tedy s úhlem DAA' . Trojúhelník $AA'D$ je tudíž rovnoramenný, přičemž bod K je středem jeho základny AA' . Odtud již přímo plyne $AK \perp DK$, což jsme chtěli dokázat.



Obr. 2

Jiné řešení. Uvažujme konvexní čtyřúhelník $AMKD$. Protože

$$|\sphericalangle DAK| = |\sphericalangle DAC| = |\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle KAM|,$$

je tento čtyřúhelník tětíkový. Osa vnitřního úhlu při vrcholu A (v různoramenném trojúhelníku MDA) se totiž protíná s osou jeho strany MD v bodě (K), který leží na kružnici opsané tomuto trojúhelníku. Pak ale platí $|\sphericalangle AKD| = |\sphericalangle AMD| = 90^\circ$, tj. $AK \perp DK$. Tím je důkaz uzavřen.

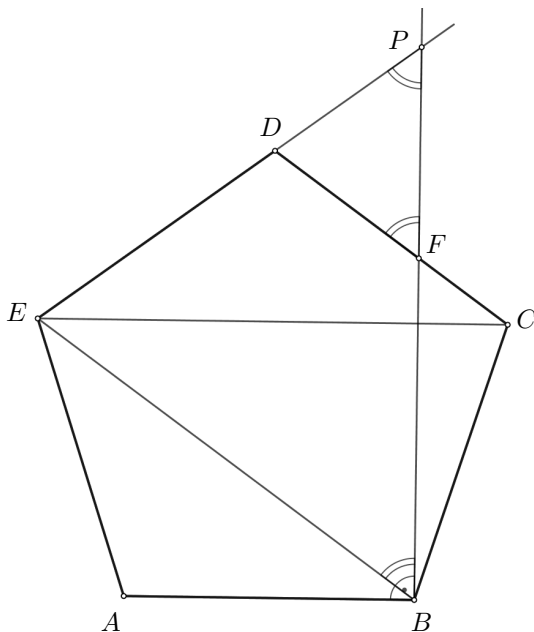
Poznámka. Kružnice opsaná uvažovanému čtyřúhelníku $AMKD$ je tedy Thaletova kružnice o průměru AD .

Příklad 3 (4. Íránská geometrická olympiáda, 2017)

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Necht F je průsečík kolmice k přímce AB procházející vrcholem B se stranou CD . Dokažte, že platí

$$|ED| + |DF| = |EC|.$$

Řešení. Označme P průsečík přímek BF a DE . Snadným výpočtem zjistíme, že $|\sphericalangle EBP| = 90^\circ - |\sphericalangle ABE| = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$.



Obr. 3

Analogicky pak $|\sphericalangle PEB| = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$, a tudíž $|\sphericalangle EPB| = 54^\circ$. Trojúhelník BPE je tedy rovnoramenný se základnou BP .

Protože přímky BE a CD jsou rovnoběžné, jsou EBP a DFP souhlasné (shodné) úhly, pro něž platí $|\sphericalangle EBP| = |\sphericalangle DFP| = 54^\circ$. Odtud plyne, že i trojúhelník FPD je rovnoramenný se základnou FP , platí tedy

$$|EC| = |EB| = |EP| = |ED| + |DP| = |ED| + |DF|,$$

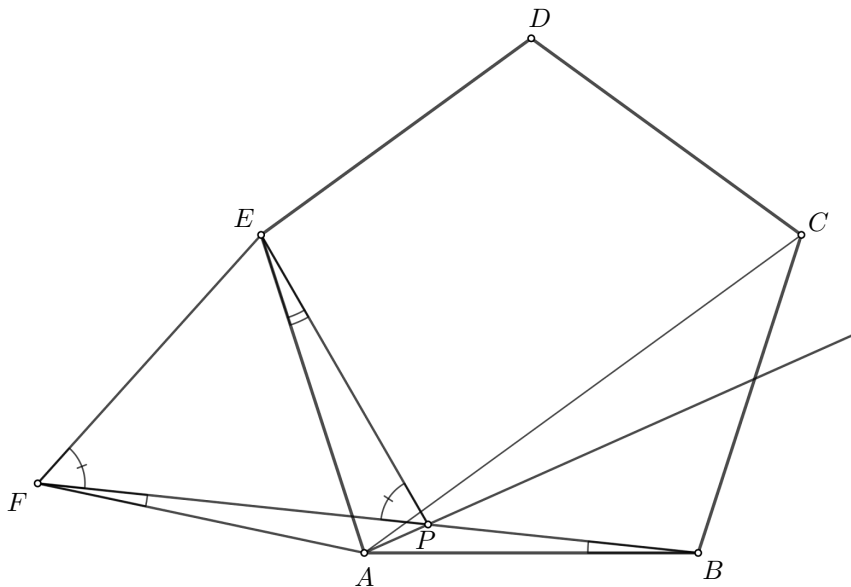
což znamená, že délka lomené čáry EDF je rovna délce úhlopříčky EC . Tím je důkaz ukončen.

Příklad 4 (15. Japonská matematická olympiáda, 2005)

Uvnitř daného pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ je dán bod P takový, že $|\sphericalangle ABP| = 6^\circ$ a $|\sphericalangle AEP| = 12^\circ$. Určete velikost úhlu PAC .

Řešení. Připíšme straně AE daného pravidelného pětiúhelníku $ABCDE$ vně rovnostranný trojúhelník AEF . Z obr. 4 je patrné, že trojúhelník ABF je rovnoramenný se základnou BF , přičemž platí

$$|\sphericalangle BAF| = |\sphericalangle BAE| + |\sphericalangle EAF| = 108^\circ + 60^\circ = 168^\circ.$$



Obr. 4

Odtud $|\sphericalangle ABF| = |\sphericalangle AFB| = 6^\circ$. To znamená, že body B, P, F leží na téže přímce (jsou kolineární). Dále platí

$$|\sphericalangle EFP| = 60^\circ - 6^\circ = 54^\circ \quad \text{a} \quad |\sphericalangle FPE| = 180^\circ - (54^\circ + 72^\circ) = 54^\circ.$$

Trojúhelníky EFP a EAP jsou tedy rovnoramenné po řadě se základnami FP a AP , a proto platí $|\sphericalangle EAP| = |\sphericalangle EPA| = \frac{1}{2}(180^\circ - 12^\circ) = 84^\circ$, a tedy

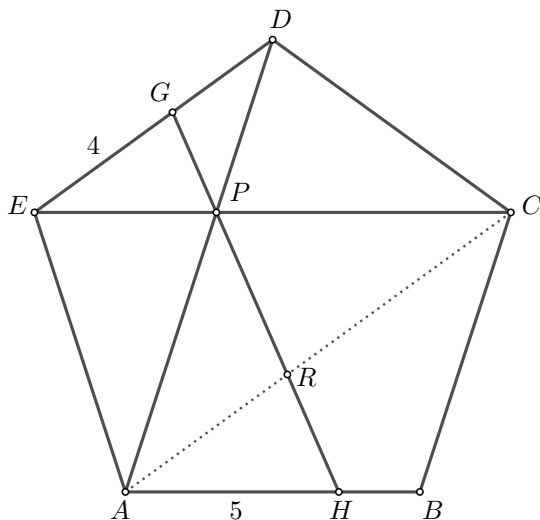
$$|\sphericalangle PAC| = |\sphericalangle EAP| - |\sphericalangle EAC| = 84^\circ - 72^\circ = 12^\circ.$$

ZÁVĚR. Velikost úhlu PAC je tedy 12° .

Poslední – 5. příklad – ponecháváme (v rámci procvičení) pozornosti čtenářů. Řešení této úlohy můžete zaslat na adresu časopisu Matematika–fyzika–informatika (nejpozději do 15. 5. 2022). Nejzdařilejší řešení této úlohy zveřejníme v některém z následujících čísel našeho časopisu.

Příklad 5 (29. Japonská matematická olympiáda, 2019)

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Nechť P je průsečík úhlopříček AD a CE . Přímka, která prochází bodem P , protíná strany AB a DE daného pětiúhelníku po řadě ve vnitřních bodech H , G , kde $|AH| = 5$ a $|EG| = 4$. Určete délku úsečky DG .



Obr. 5

[Správný výsledek: $2\sqrt{6} - 2$. Návod: Uvažujte průsečík R úhlopříčky AC s úsečkou (příčkou) GH a dále využijte podobnosti trojúhelníků CPR , AHR a EPG .]

Literatura

- [1] Švrček, J.: Konstrukce pravidelného pětiúhelníku. Matematika a fyzika ve škole, roč. 16 (1986), č. 8, s. 524–527.
- [2] Fabián, J.: Pětiúhelník – ПЕНТАГОН. Lupus, Hradec Králové – Trutnov, 2005.
- [3] Londyová, M.: Posvátná geometrie. Dokořán, Praha, 2013.

Mnohočleny v matematických soutěžích

PAVEL CALÁBEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Žáci českých škol se s pojmem mnohočlen¹⁾ setkávají již v osmém ročníku ZŠ. Na základě znalostí mnohočlenů si žáci osvojují další důležité matematické pojmy, jako je proměnná, funkce, její vlastnosti a graf. Mnohočlen je na středních školách chápán jako funkce, která k vyjádření své funkční hodnoty potřebuje pouze operace sčítání, odčítání a násobení. V dalším textu budeme mnohočlenem (v základním tvaru) rozumět funkci $P(x)$ reálné proměnné x ve tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kde n je celé nezáporné číslo (stupeň mnohočlenu) a $a_0, a_1, \dots, a_n$ jsou daná reálná čísla (koeficienty mnohočlenu). Nulový mnohočlen $P(x) = 0$ budeme považovat za speciální případ mnohočlenu, u nenulových mnohočlenů je $a_n \neq 0$.

Pokud mají dva mnohočleny stejné koeficienty, nabývají pro všechna reálná čísla x stejných hodnot. Otázkou je, zda platí také obrácené tvrzení: Nabývají-li dva mnohočleny stejných hodnot, musí mít také stejné koeficienty? Tento problém řeší dvě následující věty, které uvádíme bez důkazu.

Věta 1 (o rovnosti mnohočlenů stupně n) Jestliže dva mnohočleny stupně nejvýše n nabývají stejných hodnot alespoň pro $n + 1$ různých reálných čísel, potom mají stejné koeficienty (a tedy i stejný stupeň).

Věta 2 (o rovnosti mnohočlenů) Jestliže dva mnohočleny nabývají stejných hodnot pro nekonečně mnoho reálných čísel x , potom mají stejné koeficienty (a tedy nabývají stejných hodnot pro všechna reálná čísla).

¹⁾ Český pojem *mnohočlen* vznikl překladem slova *polynom* vzniklého spojením řecké předpony *poly* (mnoho) a latinského *nomen* (jméno), které je užíváno v mnoha světových jazycích i v české odborné literatuře.

V další části předkládáme čtenářům několik úloh o mnohočlenech, které svým obsahem navazují na středoškolské učivo, ovšem při jejich řešení jsou zdůrazněny jiné aspekty než v běžných školských úlohách. Žáci tak hlouběji chápou užívané pojmy a nacházejí mezi nimi pro ně nečekané souvislosti.

Násobení mnohočlenů

Jednou z prvních činností, s níž se žáci ve škole setkávají, je násobení mnohočlenů. Velmi užitečným vztahem je následující identita

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}),$$

která platí pro libovolná reálná čísla a , b a libovolné přirozené číslo n , případně její varianta, kdy uvažujeme n liché a místo čísla b položíme $-b$.

Příklad 1

Dokažte, že mnohočlen

$$P(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^{100})(1 - x + x^2 - \dots + x^{100})$$

má koeficienty u lichých mocnin x rovny 0.

Řešení. Pro všechna reálná čísla x různá od ± 1 platí

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{1 - x^{101}}{1 - x} \cdot \frac{1 + x^{101}}{1 + x} = \frac{1 - x^{202}}{1 - x^2} = \frac{1 - (x^2)^{101}}{1 - x^2} = \\ &= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{200}. \end{aligned}$$

Protože rovnost

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{100})(1 - x + x^2 - \dots + x^{100}) = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{200}$$

platí pro nekonečně mnoho reálných čísel x , mnohočleny na levé a pravé straně mají podle věty o rovnosti mnohočlenů stejné koeficienty, tedy uvedená rovnost platí pro všechna reálná čísla x .

Zde vidíme jeden z příkladů užití věty o rovnosti mnohočlenů, ukážeme, že se dva mnohočleny rovnají pro nekonečně mnoho hodnot reálné proměnné x a pak se podle věty o rovnosti mnohočlenů rovnají. Tato úvaha je při práci mnohočleny častá a v dalších příkladech ji budeme provádět implicitně, k rovnosti dvou mnohočlenů nám bude stačit ukázat jejich rovnost v nekonečně mnoha hodnotách reálné proměnné x .

Příklad 2

Nechť k je přirozené číslo. Určete základní tvar mnohočlenu $P(x)$, pro který platí

$$P(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) \dots (1+x^{2^{k-1}}).$$

Řešení. Pro $x \neq 1$ platí

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{(1-x)(1+x)}{1-x} (1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) \dots (1+x^{2^{k-1}}) = \\ &= \frac{(1-x^2)(1+x^2)}{1-x} (1+x^4)(1+x^8) \dots (1+x^{2^{k-1}}) = \dots = \\ &= \frac{1-x^{2^k}}{1-x} = 1+x+x^2+\dots+x^{2^k-1}. \end{aligned}$$

Obtížnější variantou obou předešlých úloh je následující příklad, kdy zkoumáme součin čtyř trojčlenů. Použitá metoda řešení umožňuje tuto úlohu zobecnit na součin libovolného počtu trojčlenů. Čtenáři, kteří znají komplexní čísla, se mohou pokusit najít jednodušší řešení jejich užitím.

Příklad 3

Určete základní tvar mnohočlenu $P(x)$, pro který platí

$$P(x) = (x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)(x^8 - x^4 + 1)(x^{16} - x^8 + 1).$$

Řešení. Pro $x \neq -1$ platí

$$P(x) = \frac{x^3+1}{x+1} \cdot \frac{x^6+1}{x^2+1} \cdot \frac{x^{12}+1}{x^4+1} \cdot \frac{x^{24}+1}{x^8+1}.$$

Stejně jako v předcházejícím příkladě ukážeme

$$\begin{aligned} (x^3+1)(x^6+1)(x^{12}+1)(x^{24}+1) &= \frac{x^{48}-1}{x^3-1}, \\ (x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1) &= \frac{x^{16}-1}{x-1}, \end{aligned}$$

je tedy

$$P(x) = \frac{x^{48}-1}{x^3-1} \cdot \frac{x-1}{x^{16}-1} = \frac{x^{48}-1}{x^{16}-1} \cdot \frac{x-1}{x^3-1} = (x^{32}+x^{16}+1) \cdot \frac{x-1}{x^3-1}.$$

Z rovnosti

$$x^{32} + x^{16} + 1 = ((x^{32} - x^{29}) + (x^{29} - x^{26}) + \dots + (x^5 - x^2) + x^2) + ((x^{16} - x^{13}) + (x^{13} - x^{10}) + \dots + (x^4 - x) + x) + 1$$

konečně plyne

$$\begin{aligned} P(x) &= ((x^{29} + x^{26} + \dots + x^2) + (x^{13} + x^{10} + \dots + x))(x - 1) + 1 = \\ &= x^{30} - x^{29} + x^{27} - x^{26} + \dots + x^{18} - x^{17} + x^{15} - \\ &\quad - x^{13} + x^{12} - x^{10} + x^9 - \dots - x^4 + x^3 - x + 1. \end{aligned}$$

Příklad 4

Nechť $P(x)$ a $Q(x)$ jsou libovolné dva mnohočleny stupně n . Potom mnohočlen $P^2(x) - Q^2(x)$ je buď nulový mnohočlen, nebo mnohočlen stupně alespoň n .

Řešení. Platí

$$P^2(x) - Q^2(x) = (P(x) - Q(x))(P(x) + Q(x)).$$

Pokud je jeden z mnohočlenů $P(x) - Q(x)$, $P(x) + Q(x)$ nulový, je mnohočlen $P^2(x) - Q^2(x)$ nulový, jinak tyto mnohočleny mají stupeň alespoň 0 a jeden z nich má stupeň n , tedy stupeň mnohočlenu $P^2(x) - Q^2(x)$ je alespoň $n + 0 = n$.

Příklad 5

Určete všechny mnohočleny $P(x)$ takové, že pro všechna reálná čísla x platí

$$P(x^2) = P^2(x).$$

Řešení. Nulový mnohočlen má požadovanou vlastnost. Uvažujme dále nenulové mnohočleny $P(x)$, které mají stupeň $n \geq 0$, a lze je tudíž zapsat ve tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kde a_i ($i = 0, 1, \dots, n$) jsou reálné koeficienty a $a_n \neq 0$. Potom

$$P(x^2) = a_n x^{2n} + a_{n-1} x^{2n-2} + \dots + a_1 x^2 + a_0,$$

$$P^2(x) = a_n^2 x^{2n} + 2a_n a_{n-1} x^{2n-1} + (a_{n-1}^2 + 2a_n a_{n-2}) x^{2n-2} + \dots + a_0^2.$$

Přitom neuvedené členy v těchto mnohočlenech obsahují x v mocnině nejvýše $2n - 3$. Dva mnohočleny jsou si rovny, pokud mají stejné koeficienty. Pro koeficient u x^{2n} tak platí $a_n = a_n^2$, vzhledem k podmínce $a_n \neq 0$ tak platí $a_n = 1$. Pro koeficienty u x^{2n-1} platí $0 = 2a_n a_{n-1}$, tedy nutně $a_{n-1} = 0$. Pro koeficienty u x^{2n-1} platí $a_{n-1} = a_{n-1}^2 + 2a_n a_{n-2}$, vzhledem k $a_n = 1$ a $a_{n-1} = 0$ odtud dostaneme $a_{n-2} = 0$. Položme si nyní otázku: Musí být i následující koeficient a_{n-3} roven 0? To bychom mohli zjistit buď porovnáním koeficientů u x^{2n-3} nebo následujícím postupem.

Předpokládejme, že mnohočlen $P(x)$ má kromě $a_n = 1$ i jiný nenulový koeficient. Potom lze $P(x)$ zapsat ve tvaru

$$P(x) = x^n + a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

kde $k < n$ je přirozené číslo a $a_k \neq 0$. Potom

$$P(x^2) = x^{2n} + a_k x^{2k} + \dots + a_0, \quad (1)$$

$$P^2(x) = x^{2n} + 2a_k x^{n+k} + \dots + a_0^2. \quad (2)$$

Přitom členy v mnohočlenu (1) obsahují x v mocnině nejvýše $2k - 1$ (s výjimkou x^{2n}) a v mnohočlenu (2) nejvýše v mocnině $n + k - 1$. Vidíme, že koeficienty u x^{2n} jsou stejné, nejvyšší nenulový koeficient je pak u členu x^{n+k} , protože $2k < n+k$, porovnáním koeficientů u něj dostaneme $2a_k = 0$. To je ovšem ve sporu s podmínkou $a_k \neq 0$, tedy mnohočlen $P(x)$ neobsahuje jiný nenulový koeficient kromě koeficientu $a_n = 1$. Jak snadno ověříme zkouškou, danému vztahu vyhovuje buď nulový mnohočlen, nebo mnohočlen $P(x) = x^n$, kde n je libovolné nezáporné číslo.

Příklad 6

Najděte všechny mnohočleny $P(x)$, které pro všechna reálná čísla x, y splňují

$$P^2(x) - P^2(y) = P(x+y)P(x-y).$$

Řešení. Nulový mnohočlen zřejmě dané rovnici vyhovuje. Dále tedy hledáme nenulové mnohočleny, které rovnici vyhovují. Necht

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

je (pro $a_n \neq 0$) takový mnohočlen. Dále uvažujme libovolné reálné číslo t , položme $x = 2t, y = t$, platí tak

$$P^2(2t) - P^2(t) = P(3t)P(t).$$

Všechny mnohočleny $P(t)$, $P(2t)$ i $P(3t)$ mají stupeň n , jedná se tak o rovnost mezi dvěma mnohočleny stupně $2n$, porovnáním jejich koeficientů u x^{2n} dostaneme

$$2^{2n}a_n^2 - a_n^2 = 3^n a_n \cdot a_n.$$

Po vydělení nenulovým číslem a_n^2 zjistíme, že

$$2^{2n} - 1 = 3^n.$$

Úpravou této rovnice dostáváme

$$1 = 2^{2n} - 3^n = 4^n - 3^n = (4 - 3)(4^{n-1} + 4^{n-2} \cdot 3 + \dots + 3^{n-1}),$$

odkud snadno vidíme, že tato rovnice má jediné řešení $n = 1$. Nenulový mnohočlen vyhovující danému vztahu tak nutně musí mít stupeň 1 a platí $P(x) = a_1x + a_0$. Dosazením do daného vztahu dostáváme

$$P^2(x) - P^2(y) = a_1^2(x^2 - y^2) + 2a_1a_0(x - y),$$

$$P(x + y)P(x - y) = a_1^2(x^2 - y^2) + 2a_1a_0x + a_0^2.$$

Proto $a_0 = 0$ a a_1 je libovolné reálné číslo. Tímto dosazením jsme současně provedli zkoušku, proto všechny nenulové mnohočleny, které danému vztahu vyhovují, mají tvar $P(x) = a_1x$, kde a_1 je libovolné nenulové reálné číslo a všechny vyhovují mnohočleny dostaneme tak, že připustíme také $a_1 = 0$.

Dělení mnohočlenů, kořenový činitel

Další operací s mnohočleny, s níž se žáci setkávají, je dělení mnohočlenu mnohočlenem. Je známo, že podíl i zbytek při dělení mnohočlenů jsou jednoznačně určeny a stupeň zbytku je menší než stupeň dělitele. S dělením mnohočlenů je úzce spjat i pojem kořenového činitele. Mnohočlen $P(x)$ je dělitelný kořenovým činitelem $x - a$ beze zbytku, tj. algebraická rovnice $P(x) = 0$ má reálný kořen $x = a$.

Příklad 7

Jaké podmínky musí splňovat reálné koeficienty a_i a b_i ($i = 1, 2, 3$), aby mnohočlen $(a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + (a_3x + b_3)^2$ byl druhou mocninou lineárního mnohočlenu?

Řešení. Daný mnohočlen bude druhou mocninou lineárního mnohočlenu, právě když lze zapsat ve tvaru $Q(x) = (ax + b)^2$, kde $a \neq 0$ a b jsou

reálné koeficienty. Z rovnosti mnohočlenů plyne, že se musí rovnat ve všech hodnotách, tedy i v čísle $x = -k = -b/a$. Potom $Q(-k) = 0$, musí tak platit

$$(-a_1k + b_1)^2 + (-a_2k + b_2)^2 + (-a_3k + b_3)^2 = 0,$$

tedy $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$ a $b_3 = ka_3$. Pokud je výsledný polynom druhou mocninou lineárního mnohočleny, má stupeň alespoň 2, tedy alespoň jeden z koeficientů a_i je nenulový. Ukážeme, že je to zároveň postačující podmínka, provedeme tedy zkoušku. Předpokládejme, že existuje reálné číslo k tak, že pro reálná čísla a_i a b_i platí $b_i = ka_i$, přičemž alespoň jedno z čísel a_i je nenulové, potom

$$\begin{aligned} & (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + (a_3x + b_3)^2 = \\ & = (a_1x + ka_1)^2 + (a_2x + ka_2)^2 + (a_3x + ka_3)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(x + k)^2, \end{aligned}$$

což je druhou mocninou lineárního mnohočleny

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} x + k\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Příklad 8

Najděte zbytek po dělení mnohočleny $x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x$ mnohočlenem

$$\text{a) } x - 1, \quad \text{b) } x^2 - 1.$$

Řešení. a) Mnohočlen $x - 1$ je lineární, zbytek po dělení tak bude konstantní mnohočlen, řekněme a . Dále existuje takový mnohočlen $Q(x)$, že

$$x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + x = (x - 1) \cdot Q(x) + a.$$

Uvedená rovnost platí pro všechna reálná čísla x , platí tak i pro $x = 1$, proto $6 = a$, tedy hledaný zbytek je 6.

b) Podobně jako v předchozím případě, zbytek je lineární mnohočlen $ax + b$. Dosazením $x = 1$ a $x = -1$ do vztahu pro dělení dostaneme

$$\begin{aligned} a + b &= 6, \\ -a + b &= -6. \end{aligned}$$

Je tedy $b = 0$ a $a = 6$. Zbytek po dělení daného mnohočleny kvadratickým dvojčlenem $x^2 - 1$ je tedy $6x$.

Příklad 9

Pro která přirozená čísla n je mnohočlen

$$P(x) = x^n + (x-1)^n + (2x-1)^n - (3^n + 2^n + 1)$$

dělitelný mnohočlenem $G(x) = x^2 - x - 2$?

Řešení. Platí $G(x) = (x+1)(x-2)$. Daný mnohočlen $P(x)$ je dělitelný mnohočlenem $G(x)$, právě když má kořeny $x = -1$ a $x = 2$, tedy právě když platí

$$P(-1) = (-1)^n + (-2)^n + (-3)^n - (3^n + 2^n + 1) = 0, \quad (3)$$

$$P(2) = 2^n + 1^n + 3^n - (3^n + 2^n + 1) = 0. \quad (4)$$

Vidíme, že rovnice (4) platí pro všechna celá nezáporná čísla n , kdežto rovnice (3) platí jen pro n sudá. Pro lichá n totiž dostáváme ze vztahu (3)

$$-2 - 2 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n = 0,$$

kde levá část této rovnice je evidentně záporná. To znamená, že (3) neplatí pro žádné liché číslo n .

Uvedený mnohočlen je dělitelný mnohočlenem $G(x)$ pro všechna sudá celá nezáporná čísla n (tento případ zahrnuje i $n = 0$, kdy se jedná o nulový mnohočlen).

Příklad 10

Určete, pro která reálná a, b a pro které přirozené číslo n je číslo 1 aspoň dvojnásobným kořenem rovnice $x^n - ax^{n-1} + bx - 1 = 0$.

Řešení. Číslo 1 je kořenem dané rovnice, proto $1^n - a \cdot 1^{n-1} + b - 1 = 0$. Odtud nutně $a = b$. Levá strana dané rovnice má tedy tvar

$$\begin{aligned} x^n - ax^{n-1} + ax - 1 &= x^n - 1 - ax(x^{n-2} - 1) = \\ &= (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1 - ax(x^{n-3} + x^{n-4} + \dots + 1)). \end{aligned}$$

Protože číslo 1 je aspoň dvojnásobným kořenem dané rovnice, musí být rovněž kořenem rovnice

$$x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1 - ax(x^{n-3} + x^{n-4} + \dots + 1) = 0,$$

tj. $n - a(n-2) = 0$, a tedy $n \neq 2$ a $b = a = n/(n-2)$.

Pokud čtenář zná pojem derivace mnohočlenu a ví, že k -násobný kořen mnohočlenu je $(k-1)$ -násobným kořenem jeho derivace, může předcházející postup zjednodušit.

Příklad 11

Pro která přirozená čísla n je mnohočlen

$$P(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n}$$

dělitelný mnohočlenem

$$Q(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n?$$

Řešení. Všimněme si, že pro lichá čísla n má mnohočlen $Q(x)$ kořen -1 , přitom toto číslo ovšem není kořenem mnohočlenu $P(x)$, tedy v tomto případě jistě $Q(x)$ nedělí $P(x)$. Naopak, pro sudá čísla n (nyní včetně nuly) platí pro $x \notin \{-1, 1\}$

$$P(x) = \frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x^{n+1} - 1)(x^{n+1} + 1)}{(x - 1)(x + 1)} = Q(x) \cdot \frac{x^{n+1} + 1}{x + 1}.$$

Navíc číslo -1 je kořenem mnohočlenu $x^{n+1} + 1$, tedy kořenový činitel $x + 1$ dělí tento mnohočlen, a proto mnohočlen $Q(x)$ dělí mnohočlen $P(x)$.

Rovnost mnohočlenů podruhé

Využitím předcházejících poznatků můžeme nyní snáze řešit některé středoškolské úlohy, viz následující příklady.

Příklad 12

Dokažte, že pro navzájem různá reálná čísla a, b, c platí

$$\frac{(a+b)(a+c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(b+c)(b+a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(c+a)(c+b)}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

Řešení. Uvažujme kvadratickou rovnici

$$\frac{(x-c)(x-b)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-b)(x-a)}{(c-a)(c-b)} = 1$$

o neznámé x . Tato rovnice má evidentně tři různé kořeny a , b , c (jak snadno ověříme přímým dosazením). Na pravé i levé straně této rovnice jsou mnohočleny stupně nejvýše 2, které se shodují aspoň ve třech různých reálných hodnotách. Oba mnohočleny jsou tedy shodné a nabývají tak stejných hodnot pro všechna reálná čísla x , tj. platí

$$\frac{(x-c)(x-b)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-c)(b-a)} + \frac{(x-b)(x-a)}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

Volbou $x = a + b + c$ dostaneme požadovanou rovnost.

Příklad 13

Pro reálná čísla a , b , c platí $c^3 = a^3 + b^3 + 3abc$. Dokažte, že pokud $a \neq b$, je $c = a + b$.

Řešení. Opět se jedná o příklad řešitelný pomocí algebraických úprav. I zde uvedeme řešení užitím mnohočlenů. Snadno ověříme, že mnohočlen

$$P(x) = x^3 - 3abx - a^3 - b^3$$

má reálný kořen $x = a + b$. Po dělení polynomu $P(x)$ kořenovým činitelem $x - (a + b)$ dostaneme

$$P(x) = (x - (a + b))(x^2 + (a + b)x + (a^2 - ab + b^2)).$$

Kvadratická rovnice $x^2 + (a + b)x + (a^2 - ab + b^2) = 0$ má diskriminant

$$D = (a + b)^2 - 4(a^2 - ab + b^2) = -3a^2 + 6ab - 3b^2 = -3(a - b)^2,$$

který je pro $a \neq b$ záporný, a nemá tedy reálné kořeny. Číslo $a + b$ je tak jediným reálným kořenem mnohočlenu $P(x)$. Podle zadání má však mnohočlen $P(x)$ též kořen c . Nutně proto platí $c = a + b$, což jsme chtěli dokázat.

Závěr

Uvedli jsme několik úloh, které nejsou vysloveně školské, těsně však navazují na učivo o mnohočlenech a mohou tak žákům ukázat možnosti jejich dalšího využití.

Navíc některé úlohy mohou sloužit jako propedeutika k dalším oblastem matematiky, které již nejsou obsahem středoškolského kurikula, například ke komplexním číslům (příklady 3, 5, 6, 8), funkcionálním rovnicím (příklady 5 a 6) či derivacím mnohočlenů (příklad 10).

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy a uvádíme zadání další dvojice úloh. Řešení nových úloh 275 a 276 můžete zaslat nejpozději do 31. 6. 2022 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz.

Úloha 275

Uvažujme rovnostranný trojúhelník ABC se stranou délky 60 a bod P strany AB ve vzdálenosti 40 od bodu A . Paprsek z bodu P se od strany BC odrazil v bodě Q a po odrazu od strany CA dopadl opět do bodu P . Určete vzdálenost bodů B a Q .

Pavel Calábek

Úloha 276

Určete počet všech čtyřmístných čísel, v nichž je součet posledních tří číslic roven trojnásobku součtu prvních tří číslic.

Jaroslav Zhouf

Dále uvádíme řešení úloh 271 a 272, jejichž zadání jsme zveřejnili v třetím čísle loňského (30.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 271

Určete všechny dvojice (a, b) přirozených čísel, pro něž nabývá výraz

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b}$$

celočíslných hodnot.

Jaroslav Švrček

Řešení. Pro všechna přirozená čísla a, b platí

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} = \frac{(a + b)^2 - ab}{a + b} = a + b - \frac{ab}{a + b}.$$

Daný výraz tak nabývá celočíselné hodnoty, právě když jí nabývá výraz

$$V = \frac{ab}{a + b}.$$

Předpokládejme, že pro dvojici čísel a a b je nabývá výraz V celočíselné hodnoty. Označme d největšího společného dělitele čísel a a b . Potom existují taková nesoudělná přirozená čísla u , v , pro která platí $a = du$, $b = dv$. Po úpravě platí

$$V = \frac{duv}{u+v}.$$

Protože u a v jsou nesoudělná čísla, jsou nesoudělná i s číslem $u+v$. Číslo V je tedy celé, právě když $u+v$ bude dělitelem čísla d , tedy právě když bude existovat takové přirozené číslo k , že

$$d = k(u+v).$$

Všechny dvojice přirozených čísel, pro něž daný výraz nabývá celočíselné hodnoty, tak jsou

$$(a, b) = (k(u+v)u, k(u+v)v),$$

kde k , u , v jsou libovolná přirozená čísla, přičemž u a v jsou nesoudělná.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Veronika Borková* z GVM v Novém Městě na Moravě, *Ondrej Dulanský* a *Vendula Onderková*, oba z GJŠ v Přerově, *Tomáš Flídr* z G v Kojetíně, *Martin Fof* z MG v Opavě, *Jiří Harvalík* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Adéla Heroudková* a *Anna Hronová*, obě z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Hynek Jakeš* ze SG v Olomouci, *Václav Maštera* z GPdC v Táboře, *Samuel Rosiar* a *Michal Janík*, oba z GJK v Praze 6. *Ondřej Trinkewitz* z G a SPŠE ve Frenštátě pod Radhoštěm a *Karolína Zemene* z G a ZUŠ ve Šlapanicích.

Neúplná řešení zaslali *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, *Jakub Horák* z GML v Brně a *Ladislav Nagy* z G v Českých Budějovicích, Jírovcova.

Úloha 272

V soutěži pro čtyři účastníky je 10 úkolů ohodnocených postupně jedním až deseti body. Body za každý úkol dostane jen ten, kdo úkol splní jako první. Jakmile jsou všechny úkoly splněny, každý soutěžící si sečte své body a určí se pořadí soutěžících (nejprve dle bodů, při rovnosti bodů rozhoduje o pořadí los). Pepa začíná dříve než ostatní, může si vybrat, které úkoly splní, a chce mít zaručeno, že nebude poslední. Dokažte následující dvě tvrzení:

- Stačí mu k tomu získat 14 bodů.
- Stačí mu k tomu získat 13 bodů.

Josef Tkadlec

Řešení.

a) V uvedené soutěži je mezi čtyři účastníky rozděleno celkem 55 bodů ($1 + 2 + \dots + 10 = 55$). Získá-li Pepa 14 bodů, pak bude mezi zbývajících tři účastníky rozděleno 41 bodů. Bude tedy existovat účastník, který získá nejvýše $\lfloor 41/3 \rfloor = 13$ bodů, což je méně než získá Pepa, který tak nebude poslední.

b) Předpokládejme, že si Pepa vybere úlohy za 1, 3, 4 a 5 bodů, celkem tedy za 13 bodů. Potom soupeřům zbude 6 úloh za 2, 6, 7, 8, 9 a 10 bodů. Mohou nastat 2 případy:

- (i) buď existuje soupeř, který vyřeší nejvýše jednu úlohu. Potom za ni získá nejvýše 10 bodů, nebo
- (ii) každý ze soupeřů vyřeší 2 úlohy. Potom ten, který vyřeší úlohu za 2 body, může za obě získat nejvýše $2 + 10 = 12$ bodů.

V obou případech jsme našli soupeře, který skončí jistě za Pepou, tedy v případě vhodného výběru úloh Pepovi stačí dokonce 13 bodů.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan, *Petr Vach* z Jablonce nad Nisou, *Veronika Borková* z GVM v Novém Městě na Moravě, *Ondřej Dulanský* a *Vendula Onderková*, oba z GJŠ v Přerově, *Tomáš Flídr* z G v Kojetíně, *Martin Fof* z MG v Opavě, *Jiří Harvalík* z G v Plzni, Mikulášské nám., *Jakub Horák* z GML v Brně, *Hynek Jakeš* ze SG v Olomouci, *Anna Hronová* z G v Brně, tř. Kpt. Jaroše, *Václav Maštera* z GPdC v Táboře, *Ladislav Nagy* z G v Českých Budějovicích, Jírovcova. *Samuel Rosiar* a *Michal Janík*, oba z GJK v Praze 6. *Ondřej Trinkewitz* z G a SPŠE ve Frenštátě pod Radhoštěm a *Karolína Zemene* z G a ZUŠ ve Šlapanicích.

Neúplné řešení zaslali *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců a *František Jáchim* z Volyně.

Pavel Calábek

FYZIKA

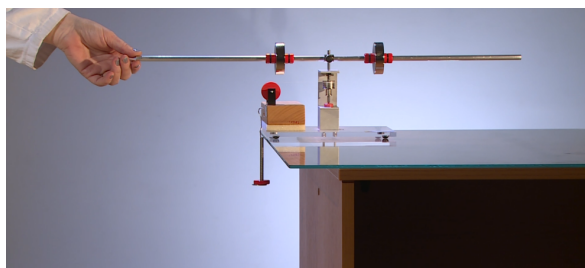
Overenie pohybovej rovnice otáčavého pohybu pomocou videomerania

ZUZANA GIBOVÁ

Fakulta elektrotechniky a informatiky, Technická univerzita v Košiciach, SLOVENSKO

Úvod

Na demonštrovanie rotačného pohybu je vhodná rotačná aparátúra [1], v ktorej otáčavý pohyb vykonáva hliníková dutá tyč okolo osi prechádzajúcej jej stredom (obr. 1). Súčasťou aparatúry je kladka, závažia rôznej hmotnosti, lanko, disky rôznych hmotností, držiak závaží a svorky na upevnenie diskov. Lanko sa upevňuje na os otáčania navinutím na hriadeľ a vedie sa cez kladku. Na jeho koniec sa zavesí závažie, ktoré slúži ako hybná sila pre roztočenie celej aparatúry. Pomocou diskov rôznych hmotností, ktoré možno upevniť na tyč v rôznych polohách, sa mení moment zotrvačnosti tyče a jej rotačný pohyb. Použitím závaží rôznej hmotnosti je možné meniť moment sily, ktorá roztáča rotačnú aparátúru. To umožňuje skúmať vzťahy medzi uhlovým zrýchlením, momentom zotrvačnosti a momentom síl, teda overiť pohybovú rovnicu $M = I\varepsilon$.



Obr. 1 Otáčavý pohyb vykonáva hliníková dutá tyč okolo osi prechádzajúcej jej stredom

Podstatou merania je odmerať uhlové zrýchlenie rotačnej aparatury. V článku prezentujem spôsob jeho určenia pomocou videozáznamu otáčavého pohybu rotačnej aparatury, z ktorého sa odmeria závislosť počtu polotáčok od času zastavovaním videa v príslušných polohách hliníkovej tyče (po prejení polotáčky). (Vplyv odporu prostredia nie je pre experiment vo videomeraní významný, preto ho zanedbávame, podrobnejšiu diskusiu k otázke tlmenia pohybu možno nájsť v [2].) Videomerania použité v tomto článku sú dostupné na stránke Katedry fyziky FEI TUKE [3].

Princíp merania

Z pohybovej rovnice

$$\varepsilon = \frac{M}{I} \quad (1)$$

vyplýva, že ak teleso vykonáva otáčavý pohyb vplyvom nemenného momentu sily M , je možné zmenou momentu zotrvačnosti I meniť jeho uhlové zrýchlenie ε . Na overenie tohto predpokladu použijeme dve videá, na ktorých je rotačná aparatura uvádzaná do pohybu prostredníctvom rovnakého závažia $m = 30$ g, ktoré je zavesené na lanku navinutom na malom hriadelí, tým je zabezpečené, že moment pôsobiacich síl je konštantný.

Na záväzie pôsobí tiažová sila F_g a ťahová sila závesu F_l , ktorých výslednica udeľuje závažiu konštantné zrýchlenie a , s ktorým klesá nadol, pohybová rovnica má tvar

$$ma = F_g - F_l. \quad (2)$$

Moment sily, ktorý roztáča kladku, je rovný súčinu ťahovej sily závesu F_l a polomeru hriadela r

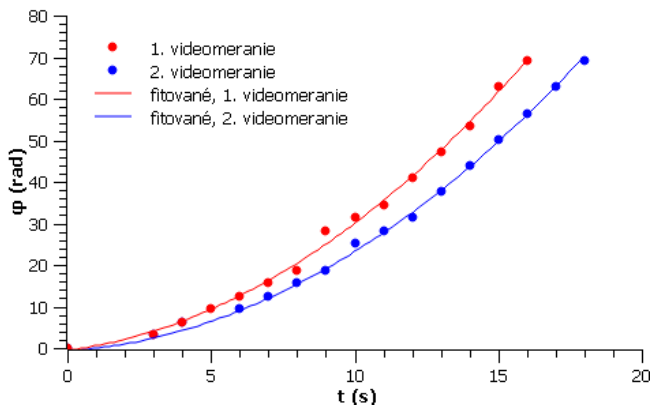
$$M = rF_l, \quad (3)$$

v dôsledku ktorého vykonáva rotačná aparatura rovnomerne zrýchlený otáčavý pohyb, ktorého uhlová dráha je daná

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2 + \varphi_0. \quad (4)$$

Na videách [3, 4] sú disky hmotnosti 200 g umiestnené v rôznych vzdialenostiach od osi otáčania, rotačná aparatura má rôzne momenty zotrvačnosti, preto odmerané hodnoty uhlových zrýchlení pre jednotlivé vzdialenosti budú mať rôznu hodnotu.

Pri meraní pomocou videa [3] je dobré si najprv pozrieť celé video a vybrať polohu, v ktorej video bude zastavované pri dosiahnutí požadovanej polotáčky. Najlepšie je zastaviť video, keď sa tyč nachádza vo vodorovnej polohe na obrazovke a odčítavať polotáčky na ľavej strane videa. Potom video pustíme ešte raz spomalene. Zaznamenáme časový okamih, v ktorom sa rotačná aparátúra dala do pohybu, ten budeme odčítavať od časových údajov pre jednotlivé polotáčky. Na videu je čas meraný v sekundách a zobrazovaný vo formáte 0:05 s (tento údaj predstavuje 5 s). Video zastavujeme postupne pri jednotlivých polotáčkach a odčítame príslušný čas. Odporúčam odmerať čas pre 20–24 polôh polotáčok. Keďže čas merania je zobrazovaný v celých sekundách, pri vyšších otáčkach odmeriame rovnaký čas pre dve alebo tri polotáčky, čo je určitá nepresnosť merania. V tomto prípade vyberieme len každé druhé meranie. Ako bude diskutované neskôr, je možné spresniť meranie času až na milisekundy.



Obr. 2 Odmerané závislosti

Každjej polotáčke prislúcha uhlová dráha $\varphi = n\pi$, kde $n = 1, 2, \dots$. V časovom okamihu, keď sa rotačná aparátúra začína otáčať, t. j. $t = 0$ s je $\varphi = 0$ rad. Z odmeranej závislosti $\varphi = f(t)$ je možné určiť hodnotu uhlového zrýchlenia rotačnej aparátúry. Keďže uhlová dráha (4) je kvadratickou funkciou času, na odmeranú závislosť môžeme nafitovať funkciu

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2. \quad (5)$$

Porovnaním koeficientov fitovacej funkcie s rovnicou uhlovej dráhy (4) pre uhlové zrýchlenie platí [5]

$$\varepsilon = 2c_2. \quad (6)$$

Výsledky merania

Videa, ktoré boli použité na meranie sú umiestnené na stránke [3]. V prvom videomeraní (web.tuke.sk/feikf/video/files/UR1_4tsc9t61.mp4) sa rotačná aparatúra začína otáčať v čase 14 s. V druhom videomeraní (web.tuke.sk/feikf/video/files/UR2_hqgjt1h1.mp4) sa rotačná aparatúra začína otáčať v čase 5 s. Tento čas odčítame od odmeraných hodnôt času pre jednotlivé polootáčky. Pre prvé meranie je poloha prvej polotáčky odmeraná v čase 17 s, reálne je to $t = 17 \text{ s} - 14 \text{ s} = 3 \text{ s}$ (tab. 1). Odmerané závislosti $\varphi = f(t)$ spolu s ich fitmi sú na obr. 2.

polotáčka	1. videomeranie		2. videomeranie	
	t/s	φ/rad	t/s	φ/rad
0	0	0	0	0
1	3	3,14	3	3,14
2	4	6,28	4	6,28
3	5	9,42	6	9,42
4	6	12,56	7	12,56
5	7	15,7	8	15,7
6	8	18,84	9	18,84
7	8	21,98	9	21,98
8	9	25,12	10	25,12
9	9	28,26	11	28,26
10	10	31,4	12	31,4
11	11	34,54	12	34,54
12	11	37,68	13	37,68
13	12	40,82	13	40,82
14	12	43,96	14	43,96
15	13	47,1	14	47,1
16	13	50,24	15	50,24
17	14	53,38	15	53,38
18	14	56,52	16	56,52
19	14	59,66	16	59,66
20	15	62,8	17	62,8
21	15	65,94	17	65,94
22	16	69,08	18	69,08

Tab. 1 Výsledky videomerania

Fitovaním oboch závislostí polynómom (5) určíme hodnoty parametrov c_2 , pomocou ktorých vypočítame uhlové zrýchlenie α pre obe merania podľa vzťahu (6); viď (tab. 2).

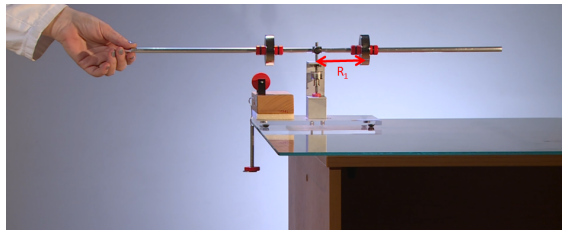
	c_2/s^{-1}	$\varepsilon/\text{s}^{-1}$	$I/(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$	$M/(\text{N}\cdot\text{m})$
1. videomeranie	0,217	0,434	0,00428	0,00185
2. videomeranie	0,193	0,386	0,00563	0,00217

Tab. 2 Zrýchlenie, moment zotrvačnosti a moment sily

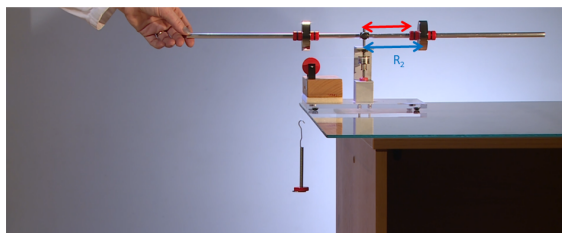
Pre moment zotrvačnosti sústavy tyč a disky platí

$$I = \frac{1}{12}m_T l^2 + 2m_d R^2, \quad (7)$$

kde l a m_T sú dĺžka a hmotnosť tyče, m_d je hmotnosť diskov a R je ich vzdialenosť od osi otáčania. Zo vzťahu (7) vyplýva, že moment zotrvačnosti rotačnej aparatury závisí len od polohy valčekov umiestnených na tyči. Porovnaním polôh diskov na obr. 3 a obr. 4 je zrejmé, že pri druhom videomeraní sú disky umiestnené vo väčšej vzdialenosti od osi otáčania ako pri prvom meraní, a teda $I_1 < I_2$.



Obr. 3 Prvá poloha disku



Obr. 4 Druhá poloha disku

Potom z pohybovej rovnice (1) vyplýva, že $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, pri prvom videomeraní sa rotačná aparátúra pohybuje s väčším zrýchlením, čo bolo meraním potvrdené (viď tab. 2). Tým sme overili platnosť pohybovej rovnice. (Odporúčam pozrieť aj naše demonštračné video, kde je to pekne vidieť [4]). Pomocou pohybovej rovnice je možné dopočítať hodnotu momentu pôsobiacich síl na rotačnú aparátúru, ktorý by mal byť konštantný. Z tab. 2 je zrejmé, že vypočítané hodnoty momentov pôsobiacich síl na rotačnú aparátúru nie sú vďaka nepresnostiam pri meraní úplne rovnaké.

Pre náročnejších

Skutočnú hodnotu momentu zotrvačnosti je možné v oboch videomeraníach vypočítať, ak poznáme skutočné hodnoty dĺžky tyče, jej hmotnosť a hmotnosť diskov umiestnených na tyči. Ich hodnoty sú $l = 60$ cm, $m_T = 0,05817$ kg, $m_d = 200$ g. Potom odmeriame na videu pásmovým meradlom dĺžku tyče l' a vzdialenosť diskov od osi otáčania R' . Skutočnú hodnotu vzdialenosti diskov od osi otáčania nanormujeme podľa vzťahu

$$R = \frac{l}{l'} R'.$$

Moje vypočítané hodnoty sú $R_1 = 7,97$ cm, $R_2 = 9,86$ cm. Na výpočet momentu zotrvačnosti rotačnej aparátúry použijeme vzťah (7), vypočítané hodnoty sú uvedené v tab. 2.

Spresnenie merania času

Navrhnutým spôsobom overovali platnosť pohybovej rovnice otáčavého pohybu dvaja študenti druháci na bakalárskom stupni štúdia FEI TUKE v rámci predmetu Fyzikálne meranie. Ako som vyššie v článku spomenula, je meranie času polôh polotáčok ovplyvnené chybou, ktorá je spôsobená malou presnosťou času na videu. Je možné túto presnosť zlepšiť stiahnutím doplnkového modulu pre program VLC v prostredí Windows 10 (link [6]) a nainštalovať si ho podľa pokynov [7]. Potom sa čas na videu zobrazuje v milisekundách. Spomenuté vylepšenie navrhli moji študenti, ktorí toto meranie robili sami z domu. Odmerané závislosti $\varphi = f(t)$ sú v tab. 3 a na obr. 5. Týmto spôsobom odmerali porovnateľné hodnoty uhlových zrýchlení $\varepsilon_1 = 0,467 \text{ s}^{-2}$, $\varepsilon_2 = 0,35 \text{ s}^{-2}$ vzhľadom na hodnoty v tab. 2. Hodnoty momentov síl vypočítané študentmi sú vzhľadom na hodnoty v tab. 2 oveľa presnejšie, sú takmer rovnaké ($M_1 = 0,00199 \text{ N} \cdot \text{m}$, $M_2 = 0,00197 \text{ N} \cdot \text{m}$).

polotáčka	1. videomeranie		2. videomeranie	
n	t/s	φ/rad	t/s	φ/rad
0	0	0	0	0
1	3,015	3,14	3,201	3,14
2	4,403	6,28	4,702	6,28
3	5,503	9,42	6,202	9,42
4	6,365	12,56	7,202	12,56
5	7,069	15,7	7,701	15,7
6	7,819	18,84	8,951	18,84
7	8,369	21,98	9,701	21,98
8	9,119	25,12	10,451	25,12
9	9,619	28,26	11,201	28,26
10	10,369	31,4	11,701	31,4
11	10,869	34,54	12,451	34,54
12	11,369	37,68	12,951	37,68
13	11,869	40,82	13,701	40,82
14	12,369	43,96	14,151	43,96
15	12,869	47,1	14,901	47,1
16	13,369	50,24	15,401	50,24
17	13,619	53,38	15,95	53,38
18	14,12	56,52	16,201	56,52
19	14,619	59,66	16,952	59,66
20	15,119	62,8	17,451	62,8
21	15,619	65,94	17,709	65,94
22	15,869	69,08	18,202	69,08

Tab. 3 Výsledky spresneného videomerania

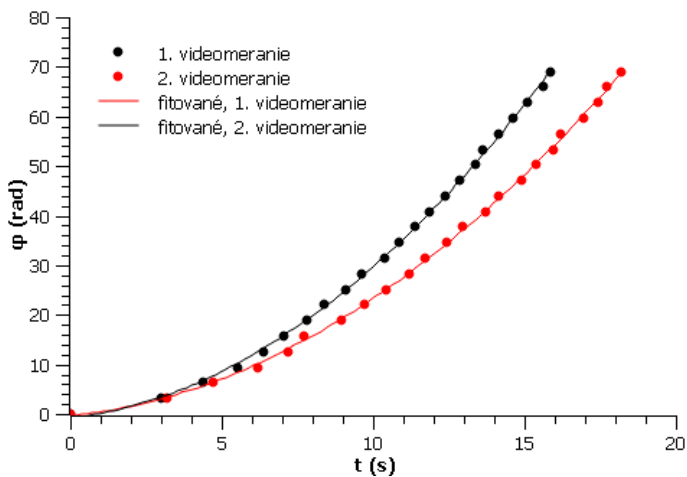
Ďalšie možnosti merania s rotačnou aparátúrou

Pomocou rotačnej aparátúry je možné overiť vzťah (7), podľa ktorého moment zotrvačnosti aparátúry I závisí od druhej mocniny vzdialenosti diskov od osi otáčania R , pričom sa nemení moment zotrvačnosti tyče

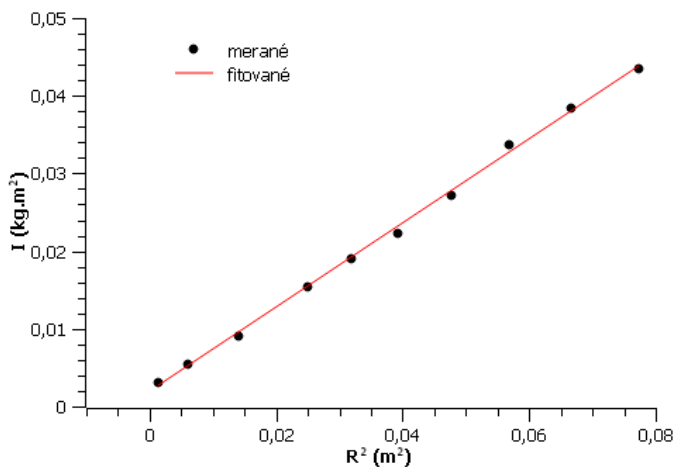
$$I_{\text{T}} = \frac{1}{12} m_{\text{T}} l^2.$$

Pri overovaní tohto vzťahu, stačí meniť vzdialenosť diskov od osi otáčania R , ktorú meníme s krokom po troch centimetroch po stred diskov. Pre

každú vzdialenosť odmeriame uhlové zrýchlenie ε a pomocou vzťahu $I = M/\varepsilon$ určíme moment zotrvačnosti pre dané R . Závislosť $I = f(R^2)$ je približne lineárna, čím je potvrdená platnosť tohto vzťahu (obr. 6).



Obr. 5 Odmerané závislosti $\varphi = f(t)$



Obr. 6 Fitovanie momenta zotrvačnosti

Ak odmeriame dráhu s , ktorú prejde závažie hmotnosti m smerom nadol počas rovnomerne zrýchleného otáčavého pohybu rotačnej aparatury a dobu t , je možné určiť hodnotu uhlového zrýchlenia ε aj pomocou odmeranej dráhy a porovnať ju s nameranou hodnotou určenou pomocou videozáznamov. Smerom nadol závažie vykonáva rovnomerne zrýchlený priamočiary pohyb, ktorého dráha je daná $s = at^2/2$. Pre uhlové zrýchlenie platí

$$\varepsilon = \frac{a}{r} \quad (8)$$

kde r je polomer hriadeľa a zrýchlenie

$$a = \frac{2s}{t^2} \quad (9)$$

Dráhu s nevieme určiť z videozáznamov, nie je celá zaznamenaná, preto urobíme reálne meranie, pri ktorom pre zvolené hodnoty vzdialenosti R odmeriame príslušné dráhy a doby (tab. 4).

	R/cm	s/m	t/s	$a/(\text{m}\cdot\text{s}^{-2})$	$\varepsilon/\text{s}^{-2}$
1. meranie	7,97	0,62	17,94	0,00385	0,428
2. meranie	9,86	0,625	18,68	0,00358	0,398

Tab. 4 Určenie úlového zrýchlenia z dráhy s

Porovnaním získaných hodnôt uhlového zrýchlenia, pomocou odmeranej dráhy a doby závažia klesajúceho nadol (tab. 4), s hodnotami určenými pomocou videozáznamov (tab. 2) vychádzajú podobné hodnoty. Je možné pomocou odmeraných hodnôt v tab. 4 určiť aj moment zotrvačnosti a porovnať ho s hodnotami určenými pomocou rovnice (7). Z rovnice (1) pre moment zotrvačnosti $I = M/\varepsilon$, kde na určenie momentu sily použijeme rovnice (2) a (3)

$$M = m(g - a)r,$$

v ktorej $F_1 = mg - ma$. Uhlové zrýchlenie vyjadríme pomocou rovníc (8) a (9)

$$\varepsilon = \frac{2s}{t^2 r}.$$

Potom pre moment zotrvačnosti získame

$$I = \frac{m(g - a)r^2 t^2}{2s} \quad (10)$$

Použitím odmeraných hodnôt v tab. 4, hmotnosti závažia $m = 0,03$ kg a polomeru hriadeľa $r = 0,009$ m určíme hodnotu momentu zotrvačnosti pre obe vzdialenosti R (tab. 5).

	R/cm	$I_{\text{rov}7}/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$	$I_{\text{rov}10}/(\text{kg} \cdot \text{m}^2)$
1. meranie	7,97	0,00428	0,00618
2. meranie	9,86	0,00563	0,00665

Tab. 5 Určenie momentov zotrvačnosti

Hodnoty momentu zotrvačnosti určené pomocou rovnice (10) sú vyššie ako hodnoty určené pomocou rovnice (6). Je to z toho dôvodu, že sú vždy pri pohybe rotačnej aparatury prítomné odporové sily, ktorých veľkosť nepoznáme. Odporové sily ovplyvňujú veľkosť uhlovej rýchlosti otáčania rotačnej aparatury [8]. Tieto sily nie sú konštantné, preto pohybová rovnica $M = I\varepsilon$ neposkytuje úplne hodnoverný údaj o momente. Napriek tomu, pohyb rotačnej aparatury pri menších rýchlostiach, môže byť modelovaný ako približne rovnomerne zrýchlený.

Poznámka: Pri určovaní uhlového zrýchlenia rotačnej aparatury môžeme použiť okrem videozáznamov aj ďalšie dva postupy merania. Použijeme spôsob navrhnutý výrobcom [1], kde sa určuje stredná hodnota uhlového zrýchlenia, tak, že sa odmeria doba, za ktorú prejde závažie celú dráhu zostupu t_1 , v zapätí sa odmeria doba t_2 , za ktorú tyč vykoná posledné dve otáčky. Pomocou doby t_2 sa určí uhlová rýchlosť na konci zostupu

$$\omega = \frac{4\pi}{t_2}$$

a následne priemerné uhlové zrýchlenie

$$\varepsilon = \frac{\omega - 0}{t_1 - 0} = \frac{\omega}{t_1}.$$

Tento postup je možné použiť aj pri vyššie navrhnutom overovaní pohybovej rovnice pomocou videomeraní, z ktorých vieme jednotlivé časy určiť.

Alebo je možné použiť systém Coach, kde sa k rotačnej aparature pripojí merací panel, senzor polohy a počítač (obr. 7).

Senzor polohy zaznamenáva závislosť počtu polotáčok od času pri otáčavom pohybe. Pri spracovaní nameraných dát postupujeme rovnako, ako to bolo navrhnuté pri meraní pomocou videozáznamov, kde pomocou fitovania určíme hodnotu uhlového zrýchlenia.



Obr. 7 Propojenie zo systémom Coach

Záver

Videomeranie úplne nenahradí reálne meranie v danom čase, študentom pri ňom chýba kontakt s prístrojmi. Napriek tomu navrhnutý spôsob merania pomocou videomerania pokladám za možnú alternatívu reálneho merania. Z reakcií mojich študentov vyplýva, že toto meranie bolo pre nich zaujímavé, dôkazom bola ich snaha zlepšiť presnosť merania času a aj sa vyjadrili, že sa im toto meranie páčilo. Museli pri ňom použiť aj nejaké meradlá a zistiť správny spôsob merania času pre dané polohy polotáčok. Boli donútení k väčšej samostatnosti, ale aj k vzájomnej spolupráci, pretože do ich merania som nevstupovala, poskytla som im iba návod a inštrukcie k meraniu. Navyše porovnaním odmeraných hodnôt uhlových zrýchlení určených s menšou presnosťou merania času s hodnotami odmeranými s lepšou presnosťou, sa javí navrhnutý spôsob merania pomerne presný a dostatočný.

Okrem toho výhodou videomerania je možnosť ho použiť pri prezenčnej výučbe, v prípade, že nemáme k dispozícii podobnú aparatúru na otáčavý pohyb. Môžeme ho použiť aj v prípade, ak chceme odmerať len uhlové zrýchlenie, resp. ďalšie kinematické veličiny otáčavého pohybu (uhlová rýchlosť, počiatočná uhlová dráha, ktoré dostaneme fitovaním rovnice pre uhlovú dráhu a porovnaním koeficientov), kde použijeme jedno videomeranie a súčasne s ním demonštrovať rovnomerne zrýchlený otáčavý pohyb.

Pri reálnom meraní rotačná aparatúra pokytuje aj ďalšie možnosti merania, napr. overiť Steinerovu vetu, skúmať vplyv trecích a viskózných síl na otáčavý pohyb, určiť uhlové zrýchlenie viacerými spôsobmi, ale aj skúmať ďalšie kinematické a dynamické veličiny pri tomto pohybe.

Literatúra

- [1] *3B Scientific Physics: Rotational Motion Apparatus*, [online]. Dostupné z: https://www.3bscientific.com/product-manual/1006785_EN.pdf.
- [2] *Kladivová, M., Kovařáková, M., Gibová, Z., Fričová, O., Hutníková, M., Kecer, J.*: Laboratory experiment for the study of friction forces using rotating apparatus. *European Journal of Physics*, roč. 37 (2016), č. 6, 065055 (s. 1–15).
- [3] <http://web.tuke.sk/feikf/video/videomerania-.html>.
- [4] <http://web.tuke.sk/feikf/video/ota-avy-pohyb-.html>.
- [5] *Gibová, Z., Fričová, O., Hutníková, M., Kecer, J., Kladivová, M., Kovařáková, M.*: Demonstrační experiment s grafickou podporou systému IP-Coach. In: MITAV 2015. Univerzita obrany, Brno 2015, s. 1–6.
- [6] *Time v3.2 – addons.videolan.org* [online]. Dostupné z: <https://addons.videolan.org/p/1154032/>.
- [7] *How to View Milliseconds in VLC Media Player on Windows 10?* [online]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=A9yq8qT0hqY>.
- [8] *Kovařáková, M., Kladivová, M., Fričová, O., Gibová, Z., Hutníková, M., Kecer, J.*: Viscous friction in standard rotational motion experiments. *European Journal of Physics*, roč. 41 (2020), č. 3, s. 1–10.

Rudolf Clausius

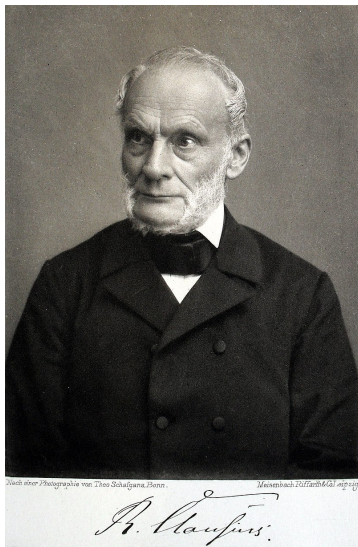
(k dvoustému výročí narození)

JITKA HOŠKOVÁ PROKŠOVÁ

Fakulta pedagogická ZČU, Plzeň

Rudolf Julius Emanuel Clausius patřil k předním německým fyzikům 19. století. V mládí u něj nad zájmem o historii převážilo zaujetí o aplikaci matematiky, a ty ho přivedly ke studiu optických a tepelných jevů. V polovině 19. století se zasloužil o vznik termodynamiky jako teoretické disciplíny a o její užití na obecné makroskopické procesy.

Rudolf se narodil 2. ledna 1822 v tehdy pruském Köslinu (nynějším polském městě Koszalinu) v Pomorānsku. Stal se šestým dítětem velké rodiny, která se časem rozrostla až na osmnáct dětí. Jeho otec působil jako ředitel soukromé školy, kterou založil a v níž také sloužil jako protestantský pastor. Školu svého otce navštěvoval Rudolf několik let. Později studoval na gymnāziu ve Štětíně, kde se těšil pověsti velmi spolehlivého a nadaného studenta, jehož úsudku si mnozí vážili. V roce 1840 nastoupil na univerzitu v Berlíně. Přestože ho velmi zajímala historie, rozhodl se nakonec pro přírodní vědy. Po čtyřech letech dokončil studia matematiky a fyziky a svůj první rok praxe strávil výukou na Friedrich-Werder-Gymnasium v Berlíně [1].



Obr. 1 Zdroj [Wikipedie](#)

Dál se vzdělával a pracoval na své disertační práci, týkající se problematiky odrazu a lomu slunečního světla v atmosféře (zabýval se v ní také vysvětlením modré barvy oblohy, soumrakovými jevy a polarizací světla). V roce 1847 ji předložil vědecké radě univerzity v Halle a získal doktorát s vyznamenáním. Později lord Rayleigh (1842–1919) ale ukázal, že místo odrazu a lomu, jak předpokládal Clausius, souvisí modrá barva oblohy s rozptylem světla. I přesto byla ve své době jeho disertační práce velmi ceněná pro nezvykle hlubokou aplikaci matematiky [2].

V následujících letech se Clausius zabýval kalorickou teorií, která považovala teplo za nezničitelné tepelné fluidum, jež si látky vzájemným kontaktem předávají. V té době již byla dobře známá analýza účinnosti parního stroje, kterou v roce 1824 publikoval Sadi Carnot (1796–1832). Závěry této analýzy převědł Emil Clapeyron (1799–1864) o deset let později do matematických vztahů. Koncem čtyřicátých let 19. století se zavedení pojmu energie a hledání co nepřesnější formulace zákona zachování energie věnovala řada vědců – byli to především Julius Mayer (1814–1878), Hermann von Helmholtz (1821–1894) a William Thomson (1824–1907), jejichž úvahy experimentálně doplnil James Joule (1818–1889) [1, 3, 5].

Rudolf Clausius dokázal vyřešit protikladné výsledky jejich závěrů¹⁾ a 18. února 1850 v Berlínské akademii završil své úsilí přednesením příspěvku *O hybné síle tepla* (Über die bewegende Kraft der Wärme), který byl ve stejném roce publikován v *Annalen der Physik* [3]. Tato jeho nejslavnější práce se stala základem pro vznik termodynamiky jako teoretické disciplíny s možností aplikovat ji na obecné makroskopické procesy.

Clausius nejprve rozvedl myšlenku, že maximální práce získaná z tepla přenášeného médiem v Carnotově cyklu mezi teplejším a chladnějším zásobníkem závisí pouze na jejich teplotách. Samovolný přechod tepla tedy není možný z chladnějšího tělesa na teplejší, čímž formuloval druhý termodynamický zákon.²⁾ Dále se věnoval matematickému zápisu prvního termodynamického zákona, který vyjádřil v dodnes používaném tvaru:

$$\partial Q = dU + \partial W',$$

kde ∂Q je teplo dodané do termodynamického systému, které se spotřebuje na změnu vnitřní energie dU a práci vykonanou tímto systémem $\partial W'$.

Clausius přitom vycházel jak z vlastních experimentálních výsledků, tak i ze závěrů Jouleových pokusů. Neúplné diferenciály tepla ∂Q a práce $\partial W'$ tak odlišily procesní veličiny od stavové veličiny vnitřní energie U , jejíž změnu určuje úplný diferenciál dU .

Rok 1850 uzavřel Rudolf Clausius získáním titulu soukromý docent na berlínské univerzitě, kde 18. prosince přednesl svou inaugurační přednášku. Kromě toho už od září tohoto roku působil jako profesor fyziky na Královské dělostřelecké a inženýrské škole v Berlíně.

Jeho vědecká práce se těšila uznání odborné veřejnosti, a tak mu byla o pět let později, v srpnu 1855, nabídnuta profesura na polytechnice v Zürichu.³⁾ Přijal ji a na tomto vynikajícím místě, obklopený významnými matematiky a fyziky, strávil dalších dvanáct let. Přestože se mu stýskalo po vlasti, odmítl v roce 1858 nabídku z polytechniky v Karlsruhe i několik dalších nabídek v následujících letech [1].

V Zürichu se vrhl do vědecké práce s plným nasazením. V roce 1857 uveřejnil článek *O povaze pohybu, který nazýváme teplo* (Über die Art der

¹⁾Na protiklad závěrů Clapeyrona ohledně Carnotovy představy, která zdůrazňovala zachování celkového množství tepla (přenos tepla beze ztrát), a výsledků Jouleových měření, ze kterých vyplýval opak, poukázal jako první William Thomson. Řešení však nenavrhl.

²⁾„Je nemožné pro samovolně pracující stroj, kterému není pomáháno zvnějšku, převádět teplo z tělesa při jedné teplotě na jiné těleso s teplotou vyšší.“ [3]

³⁾ETC Zürich – švýcarský federální technologický institut

Bewegung, welche wir Wärme nennen) [4], ve kterém rozvinul své představy o mikroskopických zákonitostech v plynech. Novou teorii plynů nazval kinetickou a věnoval se zejména určení rychlosti molekul v plynech nebo tlaku plynu na stěnu nádoby. Předpokládal, že molekuly se pohybují přímočaře konstantní rychlostí, přičemž svůj směr mohou měnit buď srážkou s jinou molekulou nebo se stěnou nádoby. Kromě translačního pohybu nevyloučil ani rotaci a vibraci molekul a zavedl pojem střední volné dráhy částic. Jeho výpočty se staly inspirací pro skotského geniálního fyzika Jamese C. Maxwella (1831–1879), který zmíněnou konstantní rychlost molekul nahradil rozdělovací funkcí rychlostí [5].

Jako sedmatřicetiletý založil Rudolf Clausius v Zürichu rodinu – 19. listopadu 1859 se oženil s Adelheid Rimpam. Našel zde i celoživotního přítele v Albertu Moussonovi (1805–1890), který vyučoval experimentální fyziku a zajímal se o zoologii [6].

V šedesátých letech 19. století začal věnovat Clausius velkou pozornost matematickému vyjádření termodynamických zákonitostí. V roce 1865 provedl matematický rozbor obecného cyklického děje, ze kterého vyvodil známou, později po něm pojmenovanou, Clausiovu nerovnost:

$$dS \geq \frac{\partial Q}{T}.$$

Touto nerovností zavedl novou stavovou veličinu entropii S .⁴⁾ Ta se později stala jedním z nejdůležitějších pojmů⁵⁾ ve fyzice především díky Ludwigu Boltzmannovi (1844–1906), který našel vztah mezi entropií a pravděpodobností makrostavu zkoumaného systému. Boltzmannova mikroskopická interpretace tohoto pojmu umožnila, aby entropie překročila hranice termodynamiky a uplatnila se v mnoha vědních oborech (jako např. v chemii, biologii, matematice, teorii informace aj.).

V roce 1867 byla Clausiovi nabídnuta profesura na univerzitě v německém Würzburgu, kterou přijal, protože už nemohl déle odolat své touze vrátit se zpět do vlasti. K významným pracím z období 1865–1867 patří např. *Mechanická teorie tepla* (Die mechanische Wärmetheorie) [7], která

⁴⁾Entropie (z řečtiny éntrepein = obracet) byla v němčině vyjadřována slovem Verwandlungsinhalt, což se dá doslovně přeložit jako *změna obsahu*. Lze se setkat i s jinými volnými překlady jako *změna směru* nebo *změna formy*.

⁵⁾Historickou zajímavostí je, že Clausius stanovil i jednotku entropie:

$$1 \text{ Clausius} = 1 \text{ kalorie} / 1 \text{ stupeň Celsia.}$$

V současnosti se entropie vyjadřuje v jednotkách $\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$.

kompiluje a zpřesňuje jeho původní práce v termodynamice a kinetické teorii.

Sotva však Clausius pobyl ve Würzburgu jeden rok, projevila o něj zájem mnichovská univerzita. Možnost brzkého stěhování odmítl, ale roku 1869 přijal nabídku univerzity v Bonnu. Nedlouho poté však politické události, které vedly k prusko-francouzské válce, významně ovlivnily i život Clausiův. Přestože se blížil padesátce, jeho vlastenecké cítění mu nedovolilo, aby se nepřihlásil do vojenské služby. Ujal se vedení záchranného sboru, který vytvořil z bonnských studentů, a ve dvou klíčových bitvách⁶⁾ pomáhal mírnit utrpení raněných. Sám však byl během německého tažení zraněn a po zbytek života trpěl silnými bolestmi v noze. Za své zásluhy obdržel v roce 1871 Železný kříž.

O čtyři roky později postihla Clausiovu rodinu tragická událost. Při porodu šestého dítěte zemřela Adelheid a Rudolf zůstal na výchovu svých dětí sám. Spolu s bolestmi z válečného zranění se jen obtížně dokázal v tomto období soustředit na vědeckou práci. Na doporučení lékaře se rozhodl věnovat se jízdě na koni, brzy se stal zkušeným jezdcem a vyrovnal se tak s problémy, které mu přinášelo dlouhé přednášení na univerzitě [1, 6].

V roce 1884 se stal rektorem univerzity v Bonnu a o dva roky později se pak znovu oženil se Sophií Stack. Z jejich krátkého manželství se ještě narodil syn.

Úvahy týkající se prvního i druhého termodynamického zákona a jejich převedení do matematické podoby ho sice provázely řadu let, ale zabýval se i dalšími oblastmi fyziky – společně s Emilem Clapeyronem formulovali důležitou rovnici,⁷⁾ umožňující zjistit, jak změna tlaku ovlivní změnu teploty fázového přechodu 1. druhu. Také se věnoval elektrolýze a vysvětlení termoelektrických jevů a angažoval se při formulování elektrodynamické teorie.

Kromě výše zmíněných charakterních vlastností je třeba k dokreslení Clausiovy povahy zmínit i s ním spojovanou výraznou kritičnost. Vedl spory s významnými vědci své doby o prvenství ve stanovení různých experimentálních dat nebo ohledně tvrzení o rovnocennosti práce a tepla (např. s Williamem Thomsonem nebo Peterem Taitem). Tyto kritiky a rozepře byly patrně nejčastěji motivovány Clausiovým vlastenectvím, kdy se svým ostrým postojem snažil zajistit historické prvenství pro německý

⁶⁾ V bitvách u Vionville a Gravelotte (1870–1871) ztratili Němci zhruba 20 tisíc mužů na rozdíl od Francouzů, kteří přišli o 13 tisíc vojáků.

⁷⁾ V teorii fázových přechodů je známá jako Clausiova–Clapeyronova rovnice.

národ [6, 8].

Během svého života obdržel řadu ocenění a vyznamenání. Stal se členem Královské společnosti v Londýně (1868), členem Královské švédské akademie věd (1878) a členem Německé akademie věd (1880). Získal Huygensovu (1870) a Copleyho medaili (1879) a za významný vědecký pokrok mu byla udělena Francouzskou akademií věd Ponceletova cena (1883).

Rudolf Julius Emanuel Clausius zemřel v Bonnu 24. srpna 1888.

Literatura

- [1] Rudolf Clausius (1822–1888) – Biography – MacTutor History of Mathematics, [online, 2. 1. 2022]. Dostupné z: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Clausius/>.
- [2] *Clausius R.*: Über die Intensität des durch die Atmosphäre reflectirten Sonnenlichts. Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, vol. **36** (1848), s. 185–215.
- [3] *Clausius R.*: Über die bewegende Kraft der Wärme. Annalen der Physik, vol. **155** (1850), s. 368–397. 1850. Dostupné z: <https://archive.org/details/ueberdiebewegen00claugoog/page/n5/mode/2up>.
- [4] *Clausius R.*: Über die Art der Bewegung, welche wir Wärme nennen. Annalen der Physik, vol. **176** (1857), s. 353–380. Dostupné z: <https://zenodo.org/record/1423644#.YfUFoO-LreQ>.
- [5] *Lacina A.*: Vznik a vývoj termodynamiky a statistické fyziky, [online, 10. 1. 2022]. Dostupné z: <https://www.physics.muni.cz/kof/clanky/vznikt.pdf>.
- [6] Clausius, Rudolf | Encyclopedia.com, [online, 3. 1. 2022]. Dostupné z: <https://www.encyclopedia.com/science/dictionaries-thesauruses-pictures-and-press-releases/clausius-rudolf>.
- [7] *Clausius R.*: Die mechanische Wärmetheorie. Braunschweig (Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn), 1876. Dostupné z: https://books.google.cz/books/about/Die_mechanische_w%C3%A4rmetheorie_bd_Entwick.html?id=yzJLAAAYAAJ&redir_esc=y.
- [8] *Clausius R.*: Über ein neues Grundgesetz der Elektrodynamik. Annalen der Physik, vol. **232** (1875), s. 657–660. Dostupné z <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.18752321215>.

Motivační videoexperimenty ve výuce fyziky mikrosvěta

ANNA KUFOVÁ – LUKÁŠ RICHTEREC

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Motivace

Jak demonstrační, tak žákovské experimenty jsou nezbytnou součástí hodin fyziky. S příchodem března roku 2020 se výuka přesunula na monitory počítačů a mobilních zařízení. Řada z nás si vyzkoušela, že skloubit distanční výuku fyziky s demonstračními experimenty je poměrně náročné. Zatímco některé pokusy z mechaniky nebo molekulové fyziky a termiky mohou žáci realizovat sami i v domácích podmínkách, hodně experimentů z elektřiny a magnetismu, optiky a fyziky mikrosvěta vyžaduje vybavení, které není běžnou součástí dokonce ani středoškolské laboratoře. V takových situacích se jako nejprijatelnější řešení nabízí poskytnout žákům webové odkazy na vybrané videoexperimenty. V tomto článku shrnujeme zkušenosti z vytváření motivačních videí z oblasti fyziky mikrosvěta, jež vznikala v rámci diplomové práce [2] a jsou volně dostupná na serveru YouTube [1].

Volba tématu navazovala na bakalářskou práci [3, 4] věnovanou videoexperimentům z mechaniky a akustiky. Už rešerše ukázala, že v oblasti výukových videí je poměrně opomíjena fyzika mikrosvěta. Přitom se jedná o problematiku, která může být užitečná a potřebná. Navíc detektory ionizujícího záření, vzorky radionuklidů nebo katodové trubice nejsou levnou záležitostí a celá řada škol si proto takové pomůcky nemůže dovolit. Pokusy z fyziky mikrosvěta, vhodné modely a animace (obr. 1) jsou užitečným prostředkem k lepšímu pochopení dějů ze světa atomů a molekul, které nelze pozorovat přímo.

Obsah práce a videí

Cílem bylo navrhnout, natočit a zpracovat několik experimentů, jež by mohly být doplňkem k učebnici fyziky pro gymnázia věnované fyzice mikrosvěta [7], a to buď jako motivace nebo ilustrace probíraného učiva.

FERMIONY			BOSONY	
u	c	t	g	H
d	s	b	γ	
e	μ	τ	Z	
ν_e	ν_μ	ν_τ	W	
I.	II.	III.		

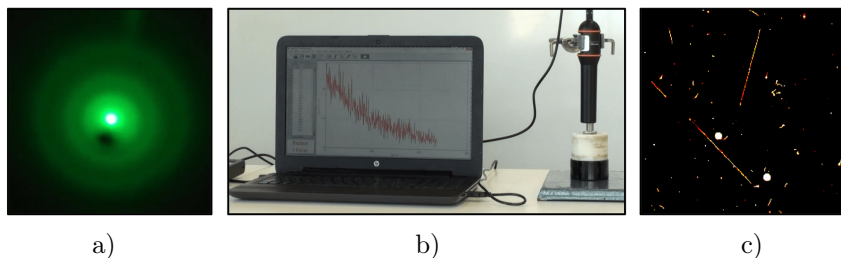
Obr. 1 Ukázka grafického zpracování tabulky základních elementárních částic

Součástí videí je vždy stručné vysvětlení pozorovaných dějů s pomocí vhodných modelů přibližujících abstraktní a obtížnou problematiku. Text diplomové práce [2] je členěn do pěti kapitol zahrnujících rešerši videoexperimentů z fyziky mikrosvěta z hlediska české i zahraniční tvorby, popis použitého vybavení a pomůcek i nástin principů různých detektorů ionizujícího záření a charakter přeměn zkoumaných radionuklidů. Dále je popsána základní konstrukce katodových trubice, připomenuty jsou i bezpečnostní zásady pro práci se zdroji ionizujícího záření. Všechna deset vytvořených videí je podrobně popsáno (v příloze práce [2] lze nalézt kompletní scénáře) a je diskutována možnost jejich využití ve výuce fyziky či chemie.

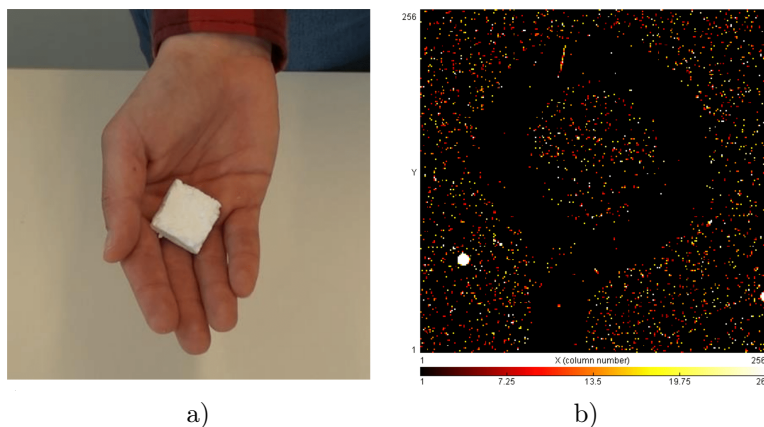
Multimediální část tvoří samotná videa o celkové délce 100 min. Jednotlivým částem učiva v učebnici [7] odpovídají i názvy videoexperimentů:

1. Co je fotoelektrický jev?
2. Elektron – částice nebo vlna?
3. Luminiscence aneb jak vypadá studené světlo
4. Radioaktivita: alfa záření
5. Radioaktivita: beta záření
6. Radioaktivita: zdroje gama záření
7. Ochrana před gama zářením
8. Zákony radioaktivních přeměn aneb pravděpodobnost a statistika v jaderné fyzice
9. Měření radiace s dozimetrem
10. Standardní model částic a detekce mionů

Videa, jak napovídá název, zahrnují především experimenty (obr. 2) a jejich vysvětlení, dále základní teoretické poznatky, motivační prvky i příklady aplikace v praxi (např. v medicíně). V pokusech se využívají nejrůznější pomůcky, včetně částicové kamery (obr. 3) nebo dozimetru (obr. 4). Některé využívají i vlastnoručně vyrobená zařízení (obr. 5) a mohou být i na pohled vizuálně vděčné (obr. 6). Námetry na další experimenty lze najít např. v [6, 8].



Obr. 2 a) Difrakce elektronů na vrstvě grafitu; b) Detekce γ záření ze vzorku metastabilního barya $^{137m}_{56}\text{Ba}$; c) Snímek z částicové kamery MX-10 zachycující stopy čtyř mionů (delší čáry) a dvou částic α (větší bílé tečky)



Obr. 3 a) Polystyrenový kvádrík obsahující neznámý kovový předmět; b) Snímek kvádríku pořízený částicovou kamerou při jeho prozařování gama zářičem



a)

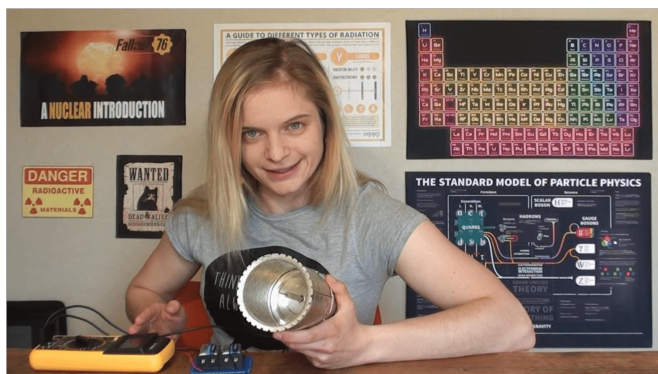


b)

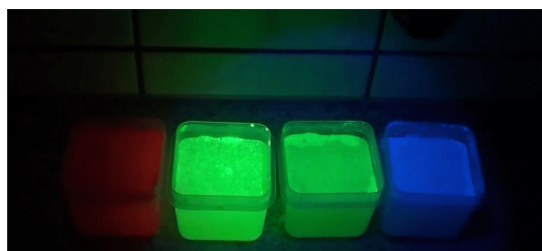


c)

Obr. 4 Měření ekvivalentního dávkového příkonu dozimetrem v laboratoři i v terénu: a) v misce s draselným hnojivem; b) na Václavském náměstí; c) v blízkosti sklenice z uranového skla



Obr. 5 Pokusy s vlastnoručně vyrobenou ionizační komorou podle návodu z [5] v domácím studiu



a)

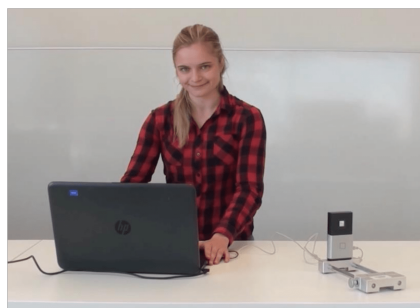


b)

Obr. 6 a) Fotoluminiscence vody s barvivem na bázi hlinitanu strontnatého; b) Sklenice a náramek z uranového skla ve tmě při ozařování UV zářivkou

Tvorba videí

Jedna z kapitol práce [2] popisuje samotný proces tvorby videí a může tak posloužit případným zájemcům, kteří by se do natáčení chtěli sami pustit. V souladu s tradiční filmovou tvorbou je rozdělena na tři části – před-produkci, produkci a postprodukci. K natáčení byla použita kamera Sony HDR-XR155E s HD rozlišením, náhlavní mikrofon, LED reflektory pro dostatečné osvětlení scény a počítač. Z pomůcek k experimentům uvedme jen nejdůležitější: částicová kamera MX-10, detektor radiace značky Vernier, dozimetr GMC-300E Plus, amatérská ionizační komora, vzorky radionuklidů, katodové trubice, zdroje UV záření, laserová ukazovátka a další zdroje světla atd. Kromě laboratoře školních pokusů a dalších výukových laboratoří na PřF UP (obr. 7a) byla vytvořena i vlastní domácí scéna s fyzikálními motivy (obr. 7b), kde bylo možné pracovat i v době covidových omezení.



a)



b)

Obr. 7 a) Natáčení s částicovou kamerou MX-10 v laboratořích PřF UP; b) Domácí studio pro natáčení

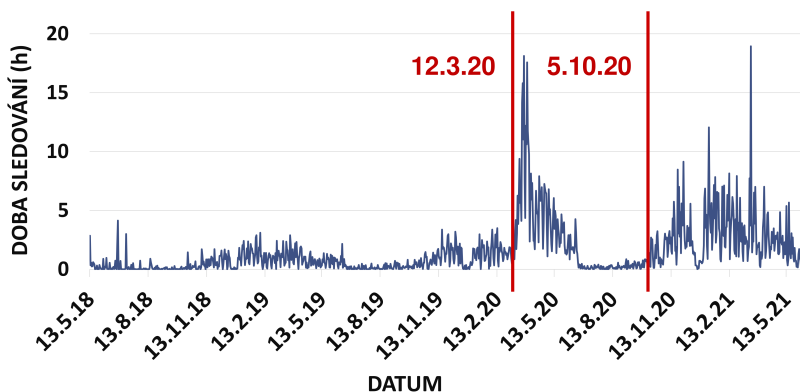
Zpracování natočených záběrů, jejich propojení s modely, animacemi a dalším obrazovým i zvukovým materiálem se neobejde bez využití vhodného software. Pro střih videí se osvědčil Windows Movie Maker, pro nahrávání a zpracování zvuku program Audacity, pro úprava fotografií Adobe Photoshop, pro přípravu animací a dalších grafických prvků MS PowerPoint a Blender. K získání dat z měření i řízení experimentů programy Logger Lite (k detektoru radiace Vernier) a Pixelman (k částicové kameře). K dalšímu zpracování naměřených hodnot byly postačující MS Excel nebo GNU Octave. Až na výjimky jde o volně dostupné programy, což pro výukové účely představuje ideální volbu.

Využití a sledovanost

Videoexperimenty mají nepochybně velký potenciál a široké spektrum využití ve výuce. Namátkou zmiňme prezenční i distanční výuku fyziky nebo chemie na SŠ, přírodovědné kroužky a tábory, vzdělávací kurzy a v neposlední řadě popularizaci vědy mezi lidmi všech věkových kategorií.

Každého tvůrce proto přirozeně zajímá, zda a jaký mají videa ohlas a jak je hodnotí samotní žáci. Připravená videa byla v březnu roku 2021 začleněna do distanční výuky fyziky a chemie na 5 vybraných středních školách v ČR i SR a do jednoho vzdělávacího kurzu. V následném dotazníkovém šetření 95,3 % žáků (123 z celkového počtu 129) uvedlo, že jim videa pomohla lépe pochopit probírané učivo.

Videa jsou veřejně přístupná na serveru YouTube [1]. Podle statistik serveru k polovině února 2022 měla celkem 15 000 zhlédnutí a 840 hodin sledování. Význam videoexperimentů v distanční výuce dokumentuje nárůst sledovanosti videoexperimentů z mechaniky a akustiky [3] v souvislosti s uzavřením škol v březnu 2020 a říjnu 2021 v důsledku epidemie COVID-19 (obr. 8).



Obr. 8 Sledovanost videoexperimentů z mechaniky a akustiky na serveru YouTube; zvýrazněná data odpovídají vyhlášení 1. a 2. nouzového stavu v souvislosti s COVID-19

Věříme, že publikované videoexperimenty budou oporou pro učitele fyziky nejen v těžkých časech distanční výuky, k níž se asi většina z nás nechce často vracet, ale i v časech postcovidových, kdy jimi lze zpestřit

běžnou prezenční výuku a mohou i žákům pomoci k hlubšímu pochopení základních, někdy abstraktnějších zákonitostí fyziky mikrosvěta.

Literatura

- [1] *Kufová, A.*: Fyzika mikrosvěta. Playlist [on-line]. Dostupné z: <https://www.youtube.com/c/UraniumGirl>.
- [2] *Kufová, A.*: Motivační videoexperimenty ve výuce fyziky mikrosvěta. Diplomová práce, Olomouc, UP, 2021.
Dostupné z: https://theses.cz/id/2oquvm/DP_Kufova.pdf.
- [3] *Kufová, A.*: Motivační videoexperimenty z mechaniky a akustiky. Bakalářská práce, Olomouc, UP, 2019.
Dostupné z: https://theses.cz/id/zusy70/BP_Kufova.pdf.
- [4] *Kufová, A., Kodejška, Č.*: Videoexperimenty jako motivační prvek ve výuce fyziky. Matematika–Fyzika–Informatika, roč. 28, č. 2 (2019), s. 105–115.
- [5] *Pazdera, V.*: Výroba $3\times$ jinak. In: Dílny Heuréky 2014, Jiráskovo gymnázium, Náchod, 3.–5. 10. 2014, 147–155. Dostupné z: <https://kdf.mff.cuni.cz/heureka/ke-stazeni/sborniky-dilen-heureky/sborniky/SbornikDilenHeureky2014.pdf>.
- [6] *Silver, J.*: 125 physics projects for the evil genius. McGraw Hill Professional, 2009.
- [7] *Štoll, I.*: Fyzika pro gymnázia – Fyzika mikrosvěta. Praha, Prometheus, 2010.
- [8] *Vícha, V.*: Experimenty s pixelovým detektorem pro výuku jaderné a částicové fyziky. Praha, ČVUT, 2016.

Bipartitní graf (Úlohy z MO kategorie P, 43. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V dnešním pokračování série článků o soutěžních úlohách Matematické olympiády kategorie P (programování) si ukážeme, jak se postupy používané při řešení různých úloh občas opakují. Autoři úloh mají k dispozici jenom omezený počet standardních algoritmů, jejichž znalost mohou od řešitelů očekávat. Olympiáda přitom existuje již 36 let a v současné době zadáváme v každém ročníku 14 soutěžních úloh: po čtyřech ve školním a v krajském kole, šest v ústředním kole. Archív soutěže tak dosahuje úctyhodného rozsahu kolem 500 úloh.

Ukážeme si dvě soutěžní úlohy ze starších ročníků olympiády, které vypadají na první pohled rozdílně a týkají se každá úplně jiné problematiky. Jejich řešení ale bude v principu naprosto shodné – v obou případech budeme zjišťovat, zda je doplněk zadaného grafu bipartitní. Studenti se znalostmi základních grafových algoritmů mohli při řešení těchto úloh využít standardní algoritmus a obě úlohy vyřešili bez velkého vlastního úsilí. Správné řešení ale dokázali nalézt i ti soutěžící, kteří nebyli seznámeni zrovna s bipartitními grafy, ale ovládali obyčejné procházení grafu do hloubky nebo do šířky, což se u řešitelů olympiády předpokládá. Zbytek už nebylo těžké samostatně vymyslet.

Obě prezentované úlohy jsou již poměrně staré – první z nich pochází z krajského kola 43. ročníku MO (školní rok 1993/94) a druhá z domácího kola 47. ročníku MO (školní rok 1997/1998). Pro potřeby našeho článku jsme původní zadání úloh formulačně trochu upravili, na charakteru úloh a jejich řešení se tím ovšem nic nezměnilo.

Úloha 1

V zemi je N měst označených čísly od 1 do N . Mezi městy je vybudována silniční síť. Každá silnice spojuje vždy dvojici měst, všechny silnice jsou obousměrné. Mezi některými dvojicemi měst přímá silnice nevede, ale z každého města je možné dojet po silnicích do libovolného jiného města, třeba i více různými způsoby. Všechna případná křížení silnic mimo města jsou mimoúrovňová (pomocí mostů) a neumožňují vozidlům přejet z jedné silnice na druhou.

Napište program, který určí, zda je možné rozdělit města do dvou skupin tak, aby každá dvojice měst patřících do stejné skupiny byla spojena přímou silnicí (jinými slovy: uvnitř každé skupiny vede přímá silnice mezi každými dvěma městy). Nezáleží přitom na velikosti jednotlivých skupin, jedna ze skupin může být případně i prázdná. Každé město ale musí být do některé skupiny zařazeno.

Vstupem programu je počet měst N a dále seznam všech silnic vedoucích mezi městy. Každá silnice je zadána dvojicí čísel měst, mezi nimiž vede. Výstupem programu je jedno vyhovující rozdělení měst do dvou skupin nebo zpráva, že žádné takové rozdělení neexistuje.

Na první pohled je zřejmé, že se jedná o grafovou úlohu. Zadanou silniční síť reprezentujeme pomocí souvislého neorientovaného grafu: vrcholy grafu představují města a hrany odpovídají silnicím. Úkolem je zjistit, zda lze všechny vrcholy grafu rozdělit do dvou skupin tak, aby obě skupiny byly tzv. *klikou*. Klikou nazýváme takový podgraf zadaného grafu, který je úplný, tzn. mezi každými dvěma jeho vrcholy vede hrana.

Úlohu vyřešíme nejsnáze tak, že budeme zkoumat *doplněk* zadaného grafu. Doplněk grafu G rozumíme graf se stejnou množinou vrcholů, ve kterém jsou vrcholy u, v spojeny hranou právě tehdy, když v původním grafu G hrana mezi vrcholy u, v nevede. V naší úloze chceme zjistit, zda lze rozdělit vrcholy doplněku zadaného grafu do dvou skupin tak, aby v rámci každé skupiny nevedla žádná hrana, neboli aby každá hrana spojovala dvojici vrcholů náležejících do různých skupin. Graf s touto vlastností nazýváme *bipartitní*. Zadání úlohy tedy můžeme přeformulovat: chceme zjistit, zda je doplněk daného grafu bipartitní.

Řešení úlohy zahájíme načtením vstupních dat, na jejichž základě si vybudujeme graf představující doplněk zkoumané silniční sítě. Uvědomte si, že ačkoliv je silniční síť podle zadání souvislá, graf představující doplněk této silniční sítě být souvislý nemusí. Souvislost původní silniční sítě při řešení úlohy vůbec nevyužijeme.

Jak jsme již uvedli, ověření bipartitnosti grafu je založeno na postupném procházení celého grafu. Je přitom jedno, zda zvolíme procházení do hloubky pomocí rekurzivní funkce, nebo průchod grafu do hloubky pomocí zásobníku a cyklu, nebo průchod do šířky pomocí fronty a cyklu. Ve všech případech dojdeme ke stejnému správnému výsledku a ve všech případech bude mít řešení i stejnou časovou složitost.

Algoritmus řešení úlohy si můžeme názorně představit tak, že při procházení grafu a rozdělování jeho vrcholů do dvou skupin budeme jednotlivé vrcholy „obarvovat“ dvěma barvami podle toho, do které skupiny byl vrchol zařazen. Vrcholům zařazeným do první skupiny přiřadíme barvu 1 a vrcholům z druhé skupiny barvu -1 . Na začátku výpočtu není žádný vrchol nijak obarven, neboť dosud nebyl zařazen do žádné ze skupin (všechny vrcholy tedy mají barvu 0). Evidence obarvení jednotlivých vrcholů nám při procházení grafu poslouží k tomu, abychom nevstupovali opakovaně do vrcholů, které jsme již navštívili a obarvili dříve. Po úspěšném ukončení výpočtu nám pak obarvení vrcholů určuje hledaný výsledek, tedy jedno přípustné rozdělení vrcholů do dvou skupin.

Procházení grafu zahájíme tím, že jeden libovolný vrchol (například vrchol s číslem 1) zařadíme do skupiny 1. Vrcholy, do kterých z něj vede hrana, nesmí patřit do stejné skupiny. Zařadíme je proto do druhé skupiny a obarvíme je barvou -1 . Podobně postupujeme dále. Obecně platí, že když byl nějaký vrchol zařazen do jedné ze skupin, musí být všechny jeho sousední vrcholy zařazeny do opačné skupiny. Přitom musíme průběžně kontrolovat, zda nenastal *konflikt*. Konflikt nastane tehdy, objeví-li se v grafu dva sousední vrcholy obarvené stejnou barvou. V takovém případě rozdělení vrcholů do skupin není možné, zkoumaný graf není bipartitní a výpočet ihned ukončíme. Jinak pokračujeme v obarvování vrcholů tak dlouho, dokud jsme nuceni podle uvedených pravidel obarvovat další vrcholy (vlastně jako důsledek počátečního obarvení prvního vrcholu). Tímto způsobem projdeme celou komponentu souvislosti, do níž náleží počáteční vrchol. Pokud je graf souvislý, obarvíme takto všechny jeho vrcholy a po bezkonfliktním skončení výpočtu víme, že graf je bipartitní. V opačném případě se proces zastaví, ale v grafu ještě existují neobarvené vrcholy. Budeme tedy pokračovat stejným způsobem. Jeden libovolný z nich (například ten s nejmenším číslem) můžeme obarvit libovolnou barvou (třeba 1) a od něj opět projdeme a obarvíme jeho komponentu souvislosti. Celý výpočet skončí ve chvíli, když buď jsou všechny vrcholy grafu obarveny a zkontrolovány, že jejich obarvení nezpůsobuje žádný konflikt (graf je bipartitní,

výsledné obarvení vrcholů určuje jedno možné rozdělení vrcholů do skupin), nebo když při obarvování dojde ke konfliktu (graf není bipartitní, neexistuje žádné přípustné rozdělení jeho vrcholů do dvou skupin).

Z uvedeného postupu přímo plyne správnost algoritmu. Postupem obarvování je zajištěno, že se nikdy nemohou dostat do téže skupiny dva vrcholy grafu, mezi nimiž vede hrana. Pokud tedy nalezneme bez konfliktu obarvení všech vrcholů, určuje toto obarvení správné rozdělení vrcholů do skupin a graf je proto bipartitní. Naopak, konflikt nastane jedině ve chvíli, kdy by již obarvený vrchol měl být zařazen do opačné skupiny, než kam nyní patří, tj. když rozdělení vrcholů do skupin neexistuje. Konečnost výpočtu je dána tím, že v každém kroku je zpracován jeden vrchol a žádný vrchol není zpracováván opakovaně vícekrát. Počet kroků výpočtu je tedy roven nejvýše počtu všech vrcholů N . Každý krok výpočtu představuje provedení tolika operací, kolik hran z tohoto vrcholu vede – prochází se seznamem všech jeho sousedů. Během celého výpočtu se tedy projdou dohromady seznamy následníků všech vrcholů grafu. Součet jejich délek je $2M$, kde M je počet hran procházeného doplňkového grafu (každá neorientovaná hrana je v seznamech následníků uložena dvakrát). Odtud plyne časová složitost uvedeného algoritmu $O(N + M)$, což lze také odhadnout jako $O(N^2)$.

Budeme-li chtít odvodit časovou složitost celého řešení úlohy, musíme započítat ještě náročnost vytvoření doplňkového grafu ze vstupních dat popisujících silniční síť. Zde bude záležet na tom, jakou datovou reprezentaci grafu zvolíme. Testování bipartitnosti grafu je založeno na procházení grafu do hloubky nebo do šířky, při kterém potřebujeme ke každému zpracovávanému vrcholu co nejrychleji určit jeho sousední vrcholy. Pro efektivní implementaci takového algoritmu si můžeme uložit graf buď ve formě seznamů následníků jednotlivých vrcholů, nebo pomocí matice sousednosti. Připomínáme, že všechny silnice jsou obousměrné, takže pokud mezi městy u, v nevede silnice, v případě první uvedené volby musíme vložit vrchol v do seznamu následníků vrcholu u , ale také vložit vrchol u do seznamu následníků vrcholu v . Při druhé volbě datové reprezentace bude matice sousednosti A symetrická a musíme tedy zajistit hodnotu **True** v jejích prvcích $A[u][v]$ a také $A[v][u]$. Řešení s maticí sousednosti je sice paměťově náročnější, ale implementačně jednodušší. Připravíme si matici A velikosti N^2 se samými hodnotami **True**, poté budeme číst ze vstupu jednotlivé silnice a vždy při zpracování silnice (u, v) vložíme hodnotu **False** do prvků $A[u][v]$, $A[v][u]$. Tím bude doplňkový graf vytvořen v čase $O(N^2)$, takže i

celé řešení úlohy bude mít asymptotickou časovou složitost $O(N^2)$.

Ukážeme si nyní jednu možnou implementaci popsaného algoritmu v programovacím jazyce Python. Použijeme v ní reprezentaci doplňkového grafu pomocí matice sousednosti, tento graf budeme procházet do hloubky s použitím vlastního zásobníku a cyklu.

```
# Úloha 1 - rozdělení měst

import sys
n = int(input("Počet_měst:_"))
a = [[True] * (n+1) for _ in range(n+1)] # matice sousednosti
print("Silnice:")
for line in sys.stdin:
    line = line.split()
    u, v = int(line[0]), int(line[1])
    a[u][v] = False
    a[v][u] = False
for i in range(1, n+1):
    a[i][i] = False # máme uložen doplňkový graf

barva = [0] * (n+1) # barvy jednotlivých vrcholů
obarven = 0 # počet obarvených vrcholů
konflikt = False # nenastal konflikt
start = 1 # výchozí vrchol pro obarvování

while not konflikt and obarven < n:
    while barva[start] != 0:
        # hledáme první neobarvený vrchol
        start += 1
    barva[start] = 1
    obarven += 1
    seznam = [start]
    while not konflikt and seznam != []:
        # jedna komponenta souvislosti
        u = seznam.pop()
        for v in range(1, n+1):
            if a[u][v]:
                if barva[v] == 0:
                    # souseda obarvíme opačnou barvou
                    barva[v] = -barva[u]
                    obarven += 1
                    seznam.append(v)
                elif barva[v] == barva[u]:
                    konflikt = True

if konflikt:
    print("Rozdělení_měst_do_skupin_neexistuje")
```



```

else:
    print("Jedno_přípustné_rozdělení_měst:")
    for v in range(1, n+1):
        if barva[v] == 1:                # první skupina měst
            print(v, end = "_")
    print()
    for v in range(1, n+1):
        if barva[v] == -1:              # druhá skupina měst
            print(v, end = "_")
    print()

```

* * * * *

Úloha 2

Na večírku se sešlo několik hostů. Víme, kteří z nich se vzájemně znají a kteří ne. Vztah „znát se“ uvažujeme zásadně jako symetrický, takže o libovolné dvojici lidí platí, že buď se oba navzájem znají, nebo ani jeden z dvojice nezná toho druhého. Hostitel chce posadit každého hosta buď v hale, nebo v obývacím pokoji. Napište program, který určí, kolika způsoby může hostitel rozmístit své hosty do obou místností tak, aby se v rámci každé místnosti všichni navzájem znali.

Vstupem programu je počet hostů N a dále seznam těch dvojic hostů, kteří se spolu znají. Jednotlivé hosty si označíme celými čísly od 1 do N , takže na vstupu bude zadán seznam dvojic čísel hostů. Výsledkem bude jedno číslo udávající počet možných rozmístění hostů.

Příklad: Je-li $N = 4$ a znají se pouze dvojice hostů (1,2) a (3,4), má hostitel dvě možnosti: buď usadí hosty 1 a 2 do haly a hosty 3 a 4 do obývacího pokoje, nebo naopak hosté 1 a 2 budou sedět v obývacím pokoji a hosté 3 a 4 v hale. Výsledkem bude tedy číslo 2.

Také tato úloha je zjevně grafová, pomocí neorientovaného grafu můžeme reprezentovat vztahy mezi pozvanými hosty na večírku. Vrcholy grafu odpovídají jednotlivým hostům, hrany propojují dvojice vrcholů odpovídající hostům, kteří se vzájemně znají. Podobně jako v první úloze popsané výše chceme rozdělit vrcholy grafu do takových dvou skupin tak, aby obě skupiny představovaly kliku v grafu, neboli aby se všichni členové skupiny vzájemně znali. Namísto nalezení jednoho konkrétního vyhovujícího rozdělení tentokrát ale chceme určit, kolik takových rozmístění hostů existuje.

Jedná se v podstatě o úplně stejnou úlohu, jakou jsme řešili v první části článku, shodný proto bude také postup řešení: opět sestrojíme doplňkový

graf a budeme zkoumat, zda je bipartitní – tedy zda lze jeho vrcholy rozdělit do dvou skupin tak, aby uvnitř žádné skupiny nevedla žádná hrana. K tomu použijeme algoritmus procházení grafu popsany v řešení předchozí úlohy. Vrcholy grafu přitom budeme obarvovat barvami 1 a -1 , což odpovídá umístění hostů do místností označených čísly 1 a -1 . Prvního hosta můžeme umístit dvěma způsoby – do jedné nebo do druhé místnosti. Jakmile zvolíme jeho umístění (třeba do místnosti 1), je nezbytné usadit do místnosti -1 všechny hosty, s nimiž se první host nezná. Pokud by se mezi nimi našli dva, kteří se neznají, úloha nemá žádné řešení (takovému stavu jsme říkali konflikt). Jinak je umístíme do místnosti -1 a jsme pak nuceni umístit do místnosti 1 všechny takové hosty, s nimiž se někdo z místnosti -1 nezná. Podobně postupujeme tak dlouho, dokud je nějaké umístění hostů takto vynuceno. Jestliže jsme právě popsáním postupem rozmístili všech N hostů, jsme hotovi a výsledkem řešení úlohy jsou původní dvě možnosti, s nimiž jsme začínali u prvního hosta (všechna ostatní obarvení vrcholů byla vynucena podmínkami úlohy). Jestliže nám ovšem zůstaly nějaké neobarvené vrcholy (zatím neumístění hosté), můžeme libovolný z nich obarvit kteroukoliv barvou a začít od něj obarvovat další vrcholy jako na začátku. Pokud se nám takto K -krát stane, že barvu vrcholu můžeme zvolit libovolně, má náš doplňkový graf přesně K komponent souvislosti a existuje tedy celkem 2^K způsobů, jak lze všechny hosty rozmístit do dvou místností.

Programová ukázka se příliš neliší od řešení první úlohy. Při procházení a obarvování doplňkového grafu si pouze navíc evidujeme prozatímní počet možností, jak lze rozmístit hosty do obou místností. Po skončení průchodu pak místo vypsání jednoho možného rozdělení vrcholů grafu do dvou skupin program vypíše výslednou hodnotu počtu možných rozmístění. Pokud graf není bipartitní a při obarvování vrcholů nastane konflikt, úloha nemá řešení a program vypíše 0. Jestliže graf bipartitní je, počet přípustných rozdělení vrcholů do dvou skupin je roven hodnotě 2^k (počet komponent souvislosti). Komponenty souvislosti přitom není třeba předem vyhledávat, neboť algoritmus na testování bipartitnosti si je určuje sám.

Úloha 2 - rozdělení hostů

```
import sys
n = int(input("Počet_hostů:_"))
a = [[True] * (n+1) for _ in range(n+1)] # matice sousednosti
print("Dvojice_známých:")
for line in sys.stdin:
```

```

    line = line.split()
    u, v = int(line[0]), int(line[1])
    a[u][v] = False
    a[v][u] = False
for i in range(1, n+1):
    a[i][i] = False           # máme uložen doplňkový graf

barva = [0] * (n+1)         # barvy jednotlivých vrcholů
obarven = 0                  # počet obarvených vrcholů
konflikt = False             # nenastal konflikt
start = 1                    # výchozí vrchol pro obarvování
moznosti = 1                 # počet možných rozmístění hostů

while not konflikt and obarven < n:
    while barva[start] != 0:
        # hledáme první neobarvený vrchol
        start += 1
    barva[start] = 1
    obarven += 1
    moznosti *= 2
    seznam = [start]
    while not konflikt and seznam != []:
        # jedna komponenta souvislosti
        u = seznam.pop()
        for v in range(1, n+1):
            if a[u][v]:
                if barva[v] == 0:
                    # souseda obarvíme opačnou barvou
                    barva[v] = -barva[u]
                    obarven += 1
                    seznam.append(v)
                elif barva[v] == barva[u]:
                    konflikt = True

if konflikt:
    print(0)                  # rozmístění hostů není možné
else:
    print(moznosti)           # výsledný počet možných rozmístění

```

Počítačová grafika, 2. díl

EDUARD BARTL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Po delší přestávce se vracíme k seriálu o počítačové grafice. Motivací pro napsání nového dílu bylo pro autora mimo jiné setkání se středoškolskými učiteli, které pořádala na konci roku 2021 Katedra informatiky PřF UP v Olomouci [5]. Během setkání totiž vyjádřili přítomní středoškolští učitelé zájem o toto téma.

V předcházejícím dílu jsme uvedli definici digitálního obrazu. V tomto pokračování se budeme zabývat jeho úpravou. Důvody, proč je potřebné věnovat se metodám úpravy digitálního obrazu, jsou nasnadě. Digitálním obrazem může být například snímek pořízený digitálním fotoaparátem, tento snímek však může být nevhodně pořízený (například kvůli nedostačitému osvětlení) nebo poškozený (kvůli elektromagnetickému rušení). Můžeme také chtít fotografický snímek ozvláštnit nějakým speciálním efektem.

Všechny úpravy, kterými se budeme zabývat, se provádějí v takzvané *prostorové doméně*, tedy přímo s hodnotami pixelů obrázku. Existují i úpravy, které se provádějí ve *frekvenční doméně*. Manipuluje se pak s frekvencemi, které jsou jistým způsobem přítomny v každém obrázku. K pochopení této problematiky je však potřeba zvládnout aparát *teorie signálu*, zejména pak takzvanou *Fourierovu transformaci*. Jakkoli je toto téma zajímavé, zabývat se jím v tomto dílu nebudeme. Zvědavého čtenáře můžeme odkázat na pěkně napsanou knížku [1].

1. Převedení barevného obrazu na šedotónový

Představme si následující situaci. Digitálním fotoaparátem pořídíme snímek, který uložíme v podobě rastrového obrazu. Na tomto snímku je znázorněn například hrad Würzburg, obr. 1. Pro zdůraznění nálady tohoto snímku se rozhodneme převést ho na šedotónový.¹⁾

¹⁾V běžné mluvě se často používá termín *černobílý* snímek. Tento termín však poukazuje na skutečnost, že jsou ve snímku použity pouze dvě barvy – černá a bílá. Šedotónový obrázek naproti tomu může obsahovat i různé stupně šedi. Šedotónovým obrázkům se také někdy říká *achromatické*.



Obr. 1 Barevný snímek hradu Würzburg, foto autor

Předpokládejme, že snímek uložený v podobě rastrového obrazu má barevnou hloubkou 24 bitů a pro reprezentaci barev použijeme RGB model. Z předchozího dílu víme, že barva každého pixelu bude popsána trojicí $\langle r, g, b \rangle$, kde čísla r , g , b vyjadřují zastoupení základních barev RGB modelu a na reprezentaci každého tohoto čísla máme k dispozici jednu třetinu z celkové barevné hloubky, tedy 8 bitů. Číslům r , g a b budeme stručně říkat *barevné složky*. Tyto barevné složky tedy nabývají hodnot z množiny $\{0, 1, \dots, 255\}$; čím větší číslo, tím větší zastoupení dané barvy. Víme také, že každý pixel získaného šedotónového obrázku bude mít barvu, která se v RGB krychli nachází někde na tělesové úhlopříčce. To znamená, že všechny tři barevné složky budou mít stejnou hodnotu, kterou si označíme y (tímto označením poukazujeme na anglické slovo *gray* – šedý). Získaný šedotónový obrázek proto bude mít výrazně menší barevnou hloubku, v našem případě osmibitovou.

Zbývá však vymyslet to nejdůležitější – stanovit hodnotu y tak, aby výsledný šedotónový obrázek odpovídal naší (zkušeností dané) představě. Je zjevné, že se na hodnotě y musí podílet všechny tři barevné složky. Vzhledem k tomu, že RGB model používá aditivní skládání barev (jak jsme si vysvětlili v předchozím dílu), musí platit, že čím větší bude některá barevná složka, tím bude výsledná barva světlejší a proto i hodnota y bude větší. Nabízí se tedy všechny tři barevné složky sečíst:

$$y = r + g + b.$$

Sečtením by však mohla hodnota y padnout mimo zobrazitelný rozsah (při námi zvolené barevné hloubce nad hodnotu 255). Výsledek je tak potřeba

normalizovat, tedy vydělit třemi (počtem barevných složek). Získáváme tak následující vzorec:

$$y = \frac{r + g + b}{3}. \quad (1)$$

Nesmíme však zapomenout, že stupeň šedi vyjadřujeme přirozeným číslem, výsledek výše uvedeného podílu proto musí být zaokrouhlen.

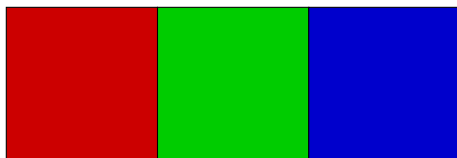
Vidíme, že se ve skutečnosti jedná o aritmetický průměr barevných složek. Toto řešení je z technického pohledu zcela správné. Podívejme se nyní na výsledný šedotónový snímek (obr. 2) a položme si otázku, zdali je výsledek přesně takový, jak jsme očekávali.



Obr. 2 Šedotónový snímek hradu Würzburg

Při podrobnějším prostudování obrázku možná dojdeme k závěru, že jednotlivé stupně šedi neodpovídají naší zkušenosti. Konkrétněji řečeno, části obrazu, které byly zelené, se mohou jevit jako příliš tmavé. Naopak části obrazu, které byly modré, jsou v šedotónovém obrazu příliš světlé.

Tento jev je dán skutečností, že lidské oko (přesněji řečeno mozek) vnímá zelenou barvu světlejší, než je ve skutečnosti, a naopak modrou barvu vnímá tmavější. Demonstrovat to můžeme na barevných čtvercích zobrazených na obr. 3. První čtverec je obarven barvou $\langle 204, 0, 0 \rangle$, druhý čtverec barvou $\langle 0, 204, 0 \rangle$ a třetí čtverec barvou $\langle 0, 0, 204 \rangle$. Pro každý čtverec platí, že jedna barevná složka nabývá hodnoty 204, zbývající dvě složky pak nabývají hodnoty 0. Všechny tři čtverce bychom tedy měli vnímat jako stejně světlé. Ve skutečnosti však většina lidí vnímá zelený čtverec jako nejsvětlejší a modrý čtverec jako nejtmavší.



Obr. 3 Zelenou barvu vnímáme jako nejsvětější

Tento problém vyřešíme tak, že místo aritmetického průměru použijeme průměr vážený:

$$y = \frac{v_1 \cdot r + v_2 \cdot g + v_3 \cdot b}{v_1 + v_2 + v_3},$$

přičemž váhy v_1 , v_2 , v_3 nastavíme tak, že největší bude v_2 , menší v_1 a nejmenší v_3 . Pokud navíc tyto váhy zvolíme tak, že jejich součet bude roven jedné, jmenovatel zlomku vypadne. Zkušenost ukázala, že lidskému vnímání nejlépe vyhovují následující hodnoty vah: $v_1 = 0,299$, $v_2 = 0,587$, $v_3 = 0,114$. Konečný vzorec pro výpočet hodnoty y pak vypadá takto:

$$y = 0,299 \cdot r + 0,587 \cdot g + 0,114 \cdot b. \quad (2)$$

Opět nezapomeňme, že je nutné provést zaokrouhlení.

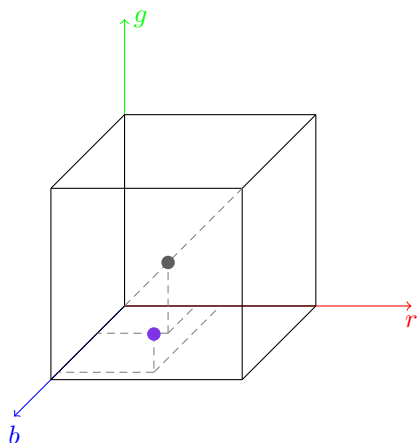
2. Desaturace barvy

Dalším zajímavým příkladem úpravy obrázku je *desaturace barev*. Naší snahou bude snížit *sytnost* barevných odstínů v obrázku; v tomto smyslu se proto budeme snažit přiblížit barevný obrázek k šedotónovému. Míra tohoto přiblížení bude dána hodnotou parametru, který bude zadán na vstupu desaturační metody. Na desaturaci barvy tak můžeme pohlížet jako na zobecnění metody popsané v předchozí sekci.

Uvažujme fialovou barvu, ta má v RGB krychli souřadnice $\langle 128, 51, 230 \rangle$. Tato barva je znázorněna fialovým bodem na obr. 4. V tomtéž obrázku je dále na tělesové uhlopříčce zobrazen šedý bod, který je šedotónovou variantou dané fialové barvy. Jeho souřadnice $\langle 94, 94, 94 \rangle$ jsme získali pomocí vzorce (2):

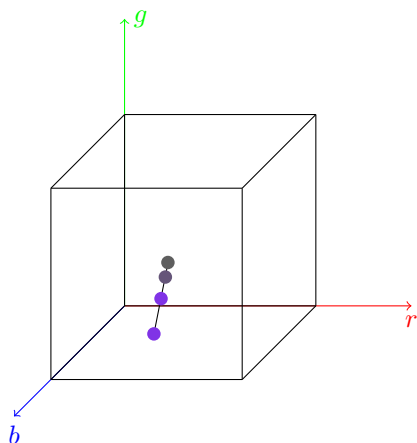
$$y = 0,299 \cdot 128 + 0,587 \cdot 51 + 0,114 \cdot 230 \doteq 94.$$

Geometrický pohled na desaturaci barvy je takový, že se snažíme po přímce posunout z fialového bodu do šedého bodu – čím blíže budeme



Obr. 4 Fialová barva a příslušná šedá barva v RGB krychli

šedému bodu, tím více bude fialová barva desaturovaná. Musíme tedy zavést parametr d určující, jak moc budeme chtít danou barvu desaturovat; jinými slovy, jak moc se budeme chtít vzdálit od fialové barvy směrem k příslušné šedé barvě. Parametr d bude proto nabývat hodnot z intervalu $[0, 1]$. Čím větší bude jeho hodnota, tím více bude daná barva desaturovaná (pro $d = 0$ nebude desaturovaná vůbec, pro $d = 1$ bude desaturovaná zcela, splyne tedy s příslušnou šedou barvou), jak můžeme vidět na obr. 5.



Obr. 5 Desaturace fialové barvy znázorněná v RGB krychli

Další odvození zkusme provést obecně. Uvažujme barvu s barevnými složkami $\langle r, g, b \rangle$. Naším úkolem je stanovit barevné složky desaturované barvy $\langle r_d, g_d, b_d \rangle$ v závislosti na hodnotě parametru $d \in [0, 1]$. Není to nijak složité, využijeme-li základních poznatků z analytické geometrie, dostaneme následující rovnost:

$$\langle r_d, g_d, b_d \rangle = \langle r, g, b \rangle + d \cdot \langle y - r, y - g, y - b \rangle,$$

kde y je šedá barva vypočtená podle vztahu (2). Provedme ještě jednoduchou úpravu:

$$\begin{aligned} \langle r_d, g_d, b_d \rangle &= \langle r, g, b \rangle + d \cdot \langle y - r, y - g, y - b \rangle = \\ &= \langle r, g, b \rangle + d \cdot \langle y, y, y \rangle - d \cdot \langle r, g, b \rangle = \\ &= (1 - d) \cdot \langle r, g, b \rangle + d \cdot \langle y, y, y \rangle. \end{aligned} \quad (3)$$

Díky této drobné úpravě můžeme pěkně vidět vliv parametru d na výslednou desaturovanou barvu $\langle r_d, g_d, b_d \rangle$ – zvětšování hodnoty d vede k nárůstu vlivu šedé (zcela desaturované) barvy $\langle y, y, y \rangle$ a současně k poklesu vlivu původní (plně satureované) barvy $\langle r, g, b \rangle$.²⁾

Vrátíme se nyní k příkladu s fialovou barvou a právě odvozený vzorec pro desaturaci barvy si vyzkoušíme na konkrétních číslech. Jak jsme si řekli, pokud zvolíme $d = 0$, dostaneme plně satureovanou fialovou barvu

$$\langle r_0, g_0, b_0 \rangle = \langle r, g, b \rangle = \langle 128, 51, 230 \rangle,$$

pro $d = 0,5$ získáme

$$\langle r_{0,5}, g_{0,5}, b_{0,5} \rangle = 0,5 \cdot \langle 128, 51, 230 \rangle + 0,5 \cdot \langle 94, 94, 94 \rangle \doteq \langle 111, 72, 162 \rangle,$$

pro $d = 0,8$ platí

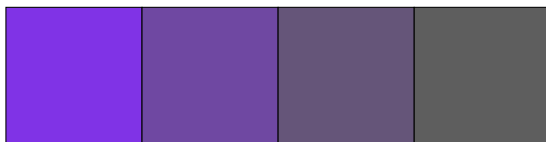
$$\langle r_{0,8}, g_{0,8}, b_{0,8} \rangle = 0,8 \cdot \langle 128, 51, 230 \rangle + 0,8 \cdot \langle 94, 94, 94 \rangle \doteq \langle 101, 85, 121 \rangle,$$

a pro $d = 1$ na závěr dostaneme

$$\langle r_1, g_1, b_1 \rangle = \langle y, y, y \rangle = \langle 94, 94, 94 \rangle.$$

Všechny tyto barvy jsou znázorněny na obr. 6.

²⁾Vztahu (3) se říká *konvexní kombinace* bodů $\langle y, y, y \rangle$ a $\langle r, g, b \rangle$.



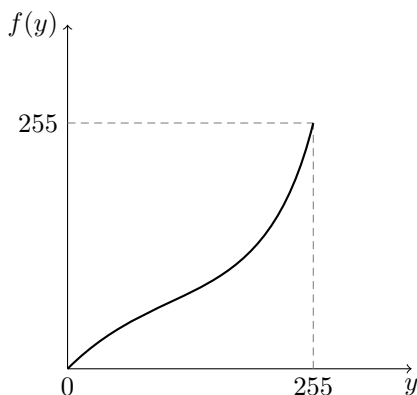
Obr. 6 Desaturovaná fialová barva; parametr d je pro jednotlivé čtverce (zleva) nastaven na 0, 0,5, 0,8 a 1

3. Prahování

Ve zbytku tohoto dílu se omezíme pouze na úpravu šedotónových obrázků. Uvažovat tedy budeme digitální rastrový obraz s barevnou hloubkou například 8 bitů, stupně šedi jednotlivých pixelů vyjádříme čísly z množiny $\{0, 1, \dots, 255\}$ (čím větší číslo, tím světlejší šedá). Všechny zbývající metody úpravy jsou založeny na transformaci těchto hodnot pixelů. Hledáme tedy funkci

$$f: \{0, 1, \dots, 255\} \rightarrow \{0, 1, \dots, 255\}$$

převádějící hodnotu pixelu $y \in \{0, 1, \dots, 255\}$ na hodnotu $f(y) \in \{0, 1, \dots, 255\}$ tak, aby to vyhovovalo požadovanému záměru. Tuto funkci znázorníme pomocí grafu, který může vypadat podobně jako graf na obr. 7.



Obr. 7 Graf funkce, která transformuje stupně šedi

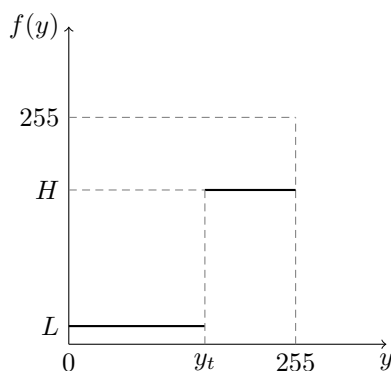
Zdůrazněme však, že tento graf není spojitý, je tvořen oddělenými body.

Jako spojitý vypadá jen kvůli zvolenému měřítku. Označení y vodorovné osy může působit nezvykle, nezapomeňme však, že na tuto osu vynášíme stupně šedi jednotlivých pixelů vstupního obrázku, které označujeme právě písmenem y .

První velmi jednoduchou úpravou, kterou budeme řešit volbou vhodné funkce f , je takzvané *prahování*. Jde pouze o to, že si nejprve zvolíme hodnotu prahu y_t ; stupně šedi, které tuto hodnotu přesáhnou, zobrazíme na hodnotu H , ostatní hodnoty zobrazíme na L . Velmi často se L nastavuje na 0 (jedná se tedy o černou barvu) a H na 255 (jde proto o bílou barvu). Funkce f je tak dána následujícím předpisem:

$$f(y) = \begin{cases} L & \text{pro } y \leq y_t; \\ H & \text{pro } y > y_t. \end{cases}$$

Graf funkce f , která realizuje prahování, je pak znázorněn na obr. 8.



Obr. 8 Graf funkce realizující prahování

Je zjevné, že prahováním je vstupní šedotónový obrázek převeden na obrázek obsahující pouze dvě různé barvy,³⁾ v tomto případě se jedná o dva různé stupně šedi. Navzdory jednoduchosti prahování nachází tato metoda úpravy obrazu v počítačové grafice značné uplatnění. Uveďme například, že je možné volbou vhodné prahové hodnoty y_t separovat určité objekty v obrazu od pozadí.

³⁾Takovému obrázku se říká *monochromatický*.

Závěr

V příštím pokračování se budeme věnovat dalším úpravám digitálního obrazu, například změně kontrastu, světlosti a podobně. Postupně se také dostaneme k obtížnějším tématům, jako je kupříkladu histogram a jeho využití v automatických úpravách obrazu.

Literatura

- [1] *Gonzalez, R. C., Woods, R. E.*: Digital Image Processing. 3. vydání. Pearson Prentice Hall, 2008.
- [2] *Huges, J. F. a kol.*: Computer Graphics. Principles and Practice. 3. vydání. Addison-Wesley, 2014.
- [3] *Felkel, P., Sochor, J., Žára, J., Beneš, B.*: Moderní počítačová grafika. 2. vydání. Computer Press, 2005.
- [4] *Martíšek, D.*: Matematické principy grafických systémů. Littera, 2002.
- [5] Webové stránky Katedry informatiky PřF UP v Olomouci, sekce věnovaná spolupráci se středními školami <https://www.inf.upol.cz/setkani-ucitelu-informatiky>

Programování bez proměnných

JAN LAŠTOVIČKA

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Proměnné ve většině programovacích jazyků hrají zásadní roli: vkládají hodnoty na určitá místa výrazů, uchovávají dočasné výsledky a v neposlední řadě označují argumenty funkce. Článek představuje jazyk Joy, kde pojem proměnné neexistuje.

Joy je navíc čistě funkcionální jazyk. Přestože funkcionální jazyky mají bohatou historii, jejich prvky prosakují do moderních jazyků až poslední dobou. Jazyk Joy tak může poskytnout netradiční úvod do stále více populárnějších technik funkcionálního programování.

1. Historie

Odstraňováním proměnných z matematických tvrzení se na začátku dvacátých let minulého století zabýval ruský matematik Moses Schönfinkel. Jeho postupy dále rozvedl americký matematik Haskell Curry, který vzniklý formální systém pojmenoval *kombinatorická logika*. Významnou částí kombinatorické logiky je výpočetní model založený na několika abstraktních funkcích zvaných *kombinátory*. Ukázalo se, že každý myslitelný mechanický výpočet lze vyjádřit vhodným aplikováním kombinátorů.

Začátkem sedmdesátých let americký programátor Charles Moore představil jazyk Forth. Jazyk obešel použití proměnných zavedením jednoho univerzálního zásobníku, ze kterého programy získávají a kam ukládají hodnoty. Díky jednoduchému způsobu vykonávání programů našel jazyk uplatnění ve vestavěných systémech. Řídil například přistání sondy Philae na kometě.

Australský filozof Manfred von Thun vytvořil začátkem dvacátého prvního století jazyk Joy¹⁾. Jazyk vychází ze zjištění, že některé programy jazyka Forth lze chápat jako funkce, které mají zásobník na vstupu i na výstupu. Jazyk navíc umožňuje pracovat s programy jako s daty. Díky tomu lze v programech používat obdoby kombinátorů. Na rozdíl od kombinatorické logiky v jazyce Joy nové programy nevznikají aplikací funkcí, ale jejich skládáním.

2. Skládání programů

Ze všech možných čísel se zaměříme pouze na přirozená čísla včetně nuly. Uvažujme nejdříve programy, které číslu na vstupu výpočtem přiřazují číslo na výstupu. Takové programy můžeme přirozeně chápat jako funkce. Vezměme například program **succ**, který číslu přiřadí následovníka (číslo o jedno větší) a program **square**, který počítá čtverec (druhou mocninu) zadaného čísla.

Ze dvou libovolných programů A a B můžeme vytvořit program, který nejprve danému číslu N přiřadí programem A číslo M a poté číslu M přiřadí programem B číslo K . Říkáme, že program vznikl *složením* programů A , B a označíme jej prostě tak, že programy napíšeme za sebe: $A\ B$.

Například program **succ square** vzniklý složením **succ** a **square** přiřadí číslu N číslo $(N + 1)^2$.

¹⁾[https://en.wikipedia.org/wiki/Joy_\(programming_language\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Joy_(programming_language))

Prázdným programem máme na mysli program, který neobsahuje žádný znak. Prázdný program libovolnému číslu přiřadí to samé číslo.

Jména programů (např. **succ** a **square**) řadíme mezi takzvané *atomické programy*.

Dva programy A, B považujeme za *rovné*, pokud libovolnému možnému vstupu přiřadí program A stejnou hodnotu jako program B . Rovnost programů označíme $A = B$.

Program **succ square** není rovný programu **square succ**. První jmenovaný přiřadí číslu jedna číslo $4 = (1 + 1)^2$, ale druhý číslo $2 = 1^2 + 1$.

Pokud skládáme programy A, B a C , je lhostejné, zda jsme nejprve složili A a B a výsledek složili s C , nebo jsme složili A s výsledkem složení B a C . V obou případech obdržíme programy, které nejprve použijí program A , poté program B a nakonec program C . Tedy zápis $A B C$ jejich složení je jednoznačný. Program **succ square succ** přiřazuje číslu N číslo $(N + 1)^2 + 1$.

Programy můžeme *vykonávat* jen s použitím jediného místa v paměti na uložení čísla. Vstupní číslo vložíme na místo, vykonáme program a jeho výsledek najdeme na místě. Prázdný program se vykoná triviálně tak, že neudělá vůbec nic. Vykonání neprázdného programu provedeme tak, že vykonáme postupně všechny jeho atomy. Vykonání atomu musí být definováno.

Pokud bychom dali na místo v paměti číslo jedna, pak by vykonání programu **succ square** znamenalo nejprve vykonání programu **succ**, které zvýší číslo na místě na dva, a poté vykonání programu **square**, které nahradí číslo na místě jeho čtvercem. Na místě se po skončení vykonávání nalézá číslo čtyři, které je tedy výstupem programu.

Pojmenováním libovolného programu rozšiřujeme jazyk. Nové jméno se stává atomickým programem a jeho vykonání probíhá tak, že se vykoná pojmenovaný program. Programům dáváme jména přirozeně použitím rovnítky. Například můžeme definovat:

$$f = \text{succ square}$$

Vykonání **f** pro číslo jedna na vstupu povede k vykonání programu **succ square** a tím pádem na výstupu dostaneme, jak již víme, číslo čtyři.

Jak zadat hodnotu vstupu jen za použití skládání programů? Stačí číslo N považovat za atomický program, který libovolnému číslu na vstupu přiřadí číslo N . Číslo lze tedy skládat s jinými programy. Výstup programu **1 succ** bude neohledě na číslo na vstupu vždy 2. Program **1 succ** předsta-

vuje hodnotu, kterou `succ` přiřadí číslu jedna. Dostáváme $1 \text{ succ} = 2$.

Část programu můžeme nahradit jiným programem, který se části rovná. Přesněji, pokud A , B_1 , B_2 , C jsou programy, kde $B_1 = B_2$, pak:

$$A \ B_1 \ C = A \ B_2 \ C$$

Využitím předchozího pravidla odvodíme jakou hodnotu program `f` přiřadí číslu jedna:

$$1 \ f = 1 \ \text{succ} \ \text{square} = 2 \ \text{square} = 4$$

3. Programy s více vstupy

Zbývá vyřešit, jak umožnit programům mít více vstupů. Výpočet sčítající dvě zadaná čísla můžeme považovat za program `+`, který na vstupu dostane dvojici čísel a jim přiřadí jejich součet. Program by dvojici čísel $(1, 2)$ přiřadil 3. Vstup a výstup programu ale nejsou stejného typu: vstup je dvojice čísel a výstup číslo. Aby bylo možné programy volněji skládat, potřebujeme sjednotit typ vstupu a výstupu.

Ukazuje se, že vhodným typem pro vstup a výstup programu je *zásobník*. Zásobník si představujeme jako uspořádanou n -tici hodnot (nazývaných *prvky* zásobníku), kde můžeme odebrat hodnotu ze začátku (říkáme také *vrcholu*) zásobníku a přidat hodnotu zase na vrchol zásobníku.

Zavedeme program `+` tak, aby zásobníku Z přiřadil zásobník, který vznikne tak, že se ze Z odeberou dvě vrchní čísla N , M a přidá jejich součet $N + M$. Pokud $(1, 2, 3)$ představuje zásobník, kde je na vrcholu 1, pak `+` přiřadí zásobníku $(1, 2, 3)$ zásobník $(3, 3)$. Volněji budeme říkat, že `+` nahrazuje dvě vrchní čísla na zásobníku jejich součtem.

Upravíme všechny naše programy tak, aby pracovaly se zásobníky. Prázdný program zásobník nezmění. Číslo přidá samo sebe na zásobník. Například program `1` přidá na vrchol zásobníku číslo jedna. Program `succ` nahradí číslo na vrcholu zásobníku jeho následovníkem a program `square` jeho čtvercem.

Vykonávání programů probíhá přesně tak, jak je popsáno výše, s tím rozdílem, že nyní na místě v paměti není číslo ale zásobník.

Program `1 2` přidá na vrchol zásobníku nejprve číslo jedna a poté číslo dva (to tedy bude na vrcholu zásobníku). Použití zásobníku umožnilo programům mít více výstupů.

Program `1 2` můžeme složit s programem `+` a vypočítat součet čísel jedna a dva: $1 \ 2 \ + = 3$.

Program `1 +` zvýší hodnotu na vrcholu zásobníku o jedna. Program `succ` lze nyní definovat jako `succ = 1 +`.

Nahrazení vrchních tří čísel zásobníku jejich součtem provedeme programem `++`. Např. dostáváme:

$$1 \ 2 \ 3 \ + \ + = 1 \ 5 \ + = 6$$

Zavedeme program `*` nahrazující dvě vrchní čísla zásobníku jejich součinem. Máme například `2 3 * = 6`.

Můžeme pomocí `*` definovat program `square` počítající čtverec čísla? Jistě platí, že čtverec čísla tři získáme programem `3 3 *`. Pro výpočet čtverce libovolného čísla musíme nejprve zavést program `dup`, který znovu vloží na zásobník jeho vrchní prvek. Například `3 dup = 3 3`. Nyní stačí položit `square = dup *`.

Hodnotu, kterou program `f` přiřadí jedničce, můžeme detailněji získat výpočtem:

$$\begin{aligned} 1 \ f &= 1 \ \text{succ} \ \text{square} = 1 \ 1 \ + \ \text{square} = \\ &= 2 \ \text{square} = 2 \ \text{dup} \ * = 2 \ 2 \ * = 4 \end{aligned}$$

Pro práci se zásobníkem si ukážeme další dva užitečné programy. Program `pop` odstraní ze zásobníku vrchní prvek a program `swap` prohodí dva vrchní prvky zásobníku. Můžete je zkusit využít k napsání programu, který odstraní druhý prvek ze zásobníku.

Víme, že u sčítání nezáleží na pořadí sčítanců. Konkrétněji pro libovolná čísla N , M je:

$$N \ M \ + = M \ N \ +$$

Bez odkazu na sčítance lze předchozí rovnost úsporněji zapsat takto:

$$+ = \text{swap} \ +$$

Uměli byste (bez proměnných) rovnosti programů vyjádřit, že sčítání čísla samo se sebou dává jeho dvojnásobek?

4. Citované programy

Skutečnost, že u sčítání tří čísel N , M , K nezáleží na pořadí jejich součtů, můžeme vyjádřit rovností:

$$N \ M \ K \ + \ + = N \ M \ + \ K \ +$$

Aby bylo možné odstranit z rovnosti odkazy na čísla N , M , K , potřebujeme mít schopnost vykonat $+$ na druhý a třetí prvek zásobníku. Obecně chceme vykonat jistý program tak, aby neovlivnil první prvek zásobníku.

Uzavřením programu do hranatých závorek potlačíme jeho vykonání. Přesněji pro libovolný program A je $[A]$ takzvaný *citovaný program*. Citovaný program považujeme za atomický program, jehož vykonání spočívá v tom, že se pouze (podobně jako číslo) vloží na zásobník.

Pro zrušení citace programu zavedeme program `dip`, který ze zásobníku odebere citovaný program $[A]$ a libovolnou hodnotu V (číslo nebo citovaný program). Dále vykoná program A a poté vrátí na zásobník hodnotu V . Činnost programu `dip` lze také popsat rovností:

$$V \ [A] \ \text{dip} = A \ V$$

Nyní dostáváme

$$N \ M \ K \ [+]\ \text{dip} \ += N \ M \ + \ K \ +$$

a nezávislost pořadí součtů můžeme úsporně formulovat takto:

$$+ \ + = [+]\ \text{dip} \ +$$

Program `cons` vytváří citované programy. Pokud A je program a V hodnota, pak platí:

$$V \ [A] \ \text{cons} = [V \ A]$$

Zajímavé je, že `swap` můžeme nyní definovat programem $[] \ \text{cons} \ \text{dip}$. Poznamenejme, že $[]$ je citace prázdného programu. Sami si můžete ověřit, že je definice správná.

5. Kombinátory

Programy rušící citace jiných programů se nazývají *kombinátory*. Program `dip` je tedy kombinátor. Představíme si nejjednodušší kombinátor `i`, který pouze zruší citaci programu; pro program A platí:

$$[A] \ i = A$$

Také můžeme říci, že program `i` odebere ze zásobníku citovaný program $[A]$ a vykoná program A .

Můžete si sami zkontrolovat, že vykonávání programu [dup i] dup i nikdy neskončí.

Vhodnou úpravou předchozího programu lze psát rekurzivní programy. Jazyk však poskytuje několik kombinátorů, které psaní rekurze značně zjednodušují. Vezměme si kombinátor **primrec**, jehož chování vyjadřují rovnosti

$$0 [A] [B] \text{ primrec} = A$$

$$N [A] [B] \text{ primrec} = N \text{ dup } 1 - [A] [B] \text{ primrec } B$$

kde N je nenulové číslo a A, B jsou libovolné programy.

Zkusíme si naprogramovat faktoriál čísla. Připomeňme, že faktoriál nuly je jedna a faktoriál nenulového čísla N je součin N a faktoriálu čísla $N - 1$. Program počítající faktoriál definujeme:

$$[1] [*] \text{ primrec}$$

Například dostáváme:

$$\begin{aligned} 5 [1] [*] \text{ primrec} \\ &= 5 \text{ dup } 1 - [1] [*] \text{ primrec } * \\ &= 5 \ 4 [1] [*] \text{ primrec } * \\ &\dots \\ &= 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 0 [1] [*] \text{ primrec } * * * * * \\ &= 5 \ 4 \ 3 \ 2 \ 1 \ 1 * * * * * = 120 \end{aligned}$$

Můžete si vyzkoušet pomocí **primrec** napsat program, který spočítá součet čtverců všech čísel menších nebo rovných zadanému číslu.

Ukazuje se, že podobně jako v kombinatorické logice, lze každý program zapsat jen pomocí několika základních programů jejich citováním a skládáním. Za základní programy si můžeme vzít **dip**, **cons**, **dup** a **pop**.

Dokážete vyjádřit program **i** pomocí základních programů?

Jak bylo zmíněno v úvodu, kombinátorová logika je především matematická teorie. V připravovaném článku nabídneme formou jednoduché deskové hry úvod do teorie kombinátorů. Kartičky ve hře představují kombinátory a vhodné umístění kartiček na herní ploše jejich aplikaci.