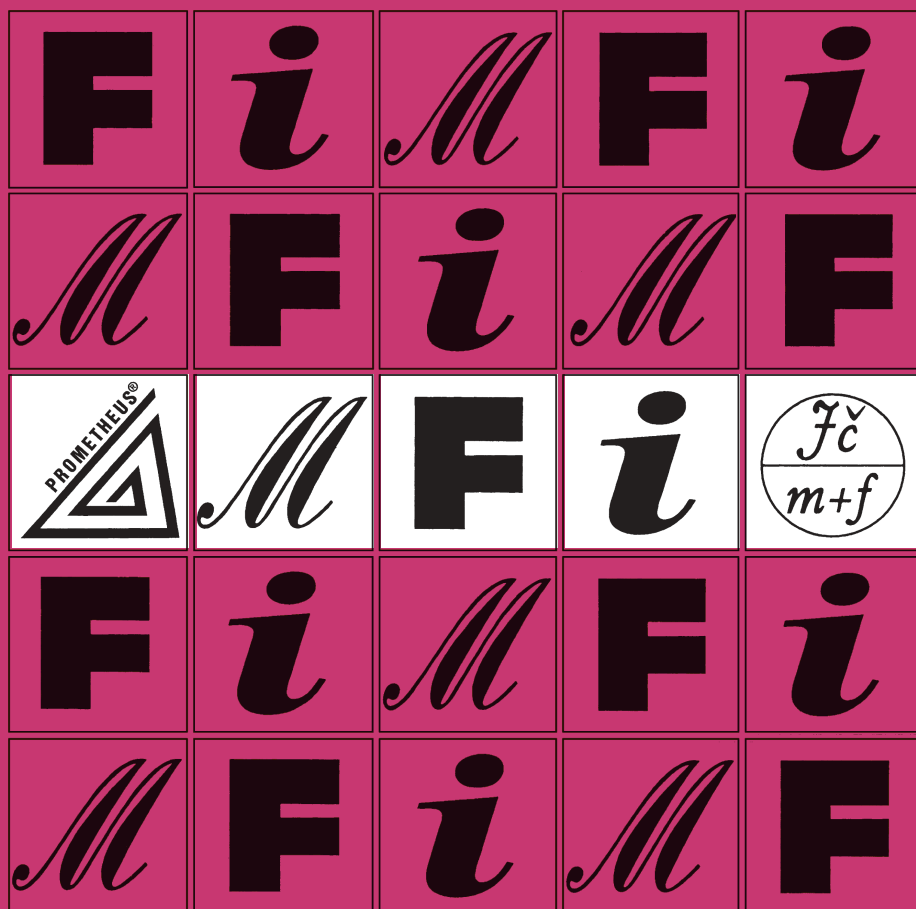


MATEMATIKA 3 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXXI (2022), číslo 3

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku
Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek
Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška, Michaela Křížová, Miluše Lachmannová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil (předseda redakční rady), Dana Mandíková, Oldřich Odvárko, Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel Töpfer

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>M. Chodorová, J. Švrček:</i> K základním větám o pravoúhlém trojúhelníku	161
<i>D. Hrubý:</i> Z historie výuky infinitezimálního počtu 2	168
<i>D. Nocar, V. Vaněk:</i> Matematický klokan pro žáky základních škol I	178
Zajímavé matematické úlohy	188

FYZIKA

<i>O. Lepil:</i> Parametrické kmitání oscilátoru	191
<i>J. Šmahel:</i> Výuka fyziky s využitím žákovských mentorů	201
<i>V. Štefl:</i> Johann Gregor Mendel a pozorování slunečních skvrn	207

INFORMATIKA

<i>P. Töpfer:</i> Veletrh dortů (Úlohy z MO kategorie P, 44. část)	215
<i>E. Bartl:</i> Počítačová grafika, 3. díl	220

ZPRÁVY

<i>P. Calábek:</i> 10. ročník CPSJ	231
<i>J. Tkadlec:</i> 63. ročník Mezinárodní matematické olympiády	233
<i>P. Töpfer:</i> Informatické olympiády CEOI 2022 a IOI 2022	236

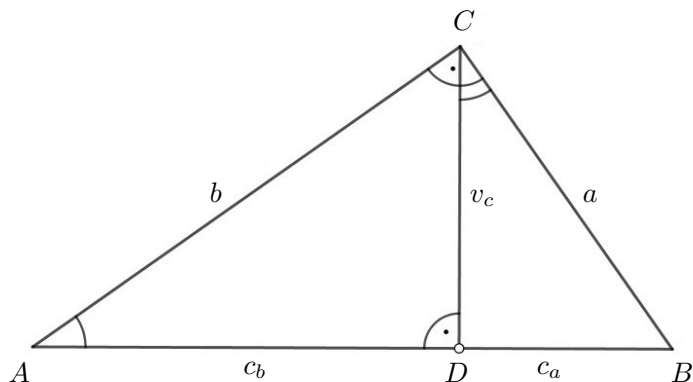
K základním větám o pravoúhlém trojúhelníku

MARIE CHODOROVÁ – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Již na základní a dále i na střední škole se žáci seznamují se třemi důležitými větami z geometrie pravoúhlého trojúhelníku. Jsou jimi Eukleidovy věty (o odvěsnách a o výšce) a Pythagorova věta.

Dříve než připomeneme jejich znění, zavedeme následující označení, které budeme využívat v celém příspěvku. V libovolném trojúhelníku ABC , jehož pata výšky D z vrcholu C je vnitřním bodem strany AB , budeme délky jeho stran značit $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$ a dále $c_a = |BD|$, $c_b = |AD|$ a $v_c = |CD|$ – stejně jako v pravoúhlém trojúhelníku ABC s přeponou AB na obr. 1.



Obr. 1

Věta 1 (Eukleidova — o odvěsnách)

Je-li ABC pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB , *pak* platí rovnosti

$$a^2 = c \cdot c_a, \quad b^2 = c \cdot c_b. \quad (1)$$

Věta 2 (Eukleidova — o výšce)

Je-li ABC pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB , *pak* platí vztah

$$v_c^2 = c_a \cdot c_b. \quad (2)$$

Věta 3 (Pythagorova)

Je-li ABC pravoúhlý trojúhelník s přeponou AB , *pak* pro délky jeho odvěsen a , b a délku c přepony platí rovnost

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (3)$$

V některých učebnicích matematiky pro ZŠ a SŠ se můžeme setkat s alternativními formulacemi výše uvedených tří vět. Např. v [1] je Pythagorova věta formulována následovně:

Věta 3'

V každém pravoúhlém trojúhelníku je druhá mocnina délky přepony rovna součtu druhých mocnin délek obou odvěsen.

V této formulaci Pythagorovy věty se však průměrnému žákovi může ztrácet struktura této věty, v níž se jedná o *složenou výrokovou formu ve tvaru implikace*.

Důkazy prvních dvou vět (věta 1 a 2) se opírají o užití podobnosti trojúhelníků. Snadno se totiž vidí (obráz. 1), že podle věty *uu* platí

$$\triangle ABC \sim \triangle CBD \sim \triangle ACD.$$

Uvedením odpovídajících podobnostních poměrů dostaneme (po jejich snadné úpravě) přímo vztahy (1) a (2).

Ze vztahů (1) a z rovnosti $c_a + c_b = c$ pak plyne přímo (3). Platí totiž

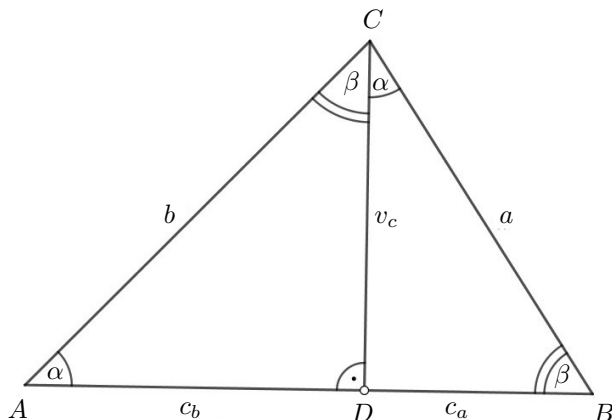
$$a^2 + b^2 = c \cdot c_a + c \cdot c_b = c(c_a + c_b) = c^2,$$

což dokazuje tvrzení věty 3 (Pythagorovy).

Cílem další části našeho příspěvku je poukázat na využití někdy méně akcentovaných – obrácených vět k větám 1–3, a to zejména při řešení konkrétních úloh. Níže uvedená trojice tvrzení (vět) je totiž z praktického

hlediska mnohem více využitelná než jen např. při důkazech kolmosti dvojice přímek (úseček) nebo k ověření skutečnosti, že trojúhelník s danými prvky je pravoúhlý.

V následujících dvou větách (věty 4 a 5) budeme *předpokládat*, že pata D výšky z vrcholu C v trojúhelníku ABC je *vnitřním bodem* jeho strany AB (obr. 2).



Obr. 2

Věta 4 (obrácená věta k Eukleidově větě o odvěsnách)

Jestliže v trojúhelníku ABC platí $a^2 = c \cdot c_a$ nebo $b^2 = c \cdot c_b$, pak tento trojúhelník je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C .

Důkaz provedeme pouze za předpokladu rovnosti $a^2 = c \cdot c_a$ (v případě rovnosti $b^2 = c \cdot c_b$ lze postupovat analogicky). Z dané rovnosti v předpokladu věty tak plyne

$$\frac{a}{c} = \frac{c_a}{a}.$$

Protože navíc

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle CBD|,$$

jsou trojúhelníky ABC a CBD podle věty *sus* podobné. Vzhledem k tomu, že úhel BDC je pravý (obr. 2), je pravý také úhel BCA , tj. trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C , což jsme chtěli dokázat.

Věta 5 (obrácená věta k Eukleidově větě o výšce)

Nechť v trojúhelníku ABC platí $v_c^2 = c_a \cdot c_b$, pak tento trojúhelník je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C .

Důkaz. Podle předpokladu věty platí

$$\frac{v_c}{c_a} = \frac{c_b}{v_c}.$$

Odtud plyne, že trojúhelníky ADC a CDB jsou podobné (*sus*), neboť platí $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle CDB| = 90^\circ$ (vnitřní úhly při vrcholu D v obou trojúhelnících jsou pravé, viz obr. 2). Pak ale $|\sphericalangle CAD| = |\sphericalangle BCD| = \alpha$ a $|\sphericalangle CBD| = |\sphericalangle ACD| = \beta$, viz obr. 2. Pro součet vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC přitom platí

$$\alpha + \beta + (\alpha + \beta) = 2(\alpha + \beta) = 180^\circ,$$

tedy $|\sphericalangle BCA| = \alpha + \beta = 90^\circ$, což znamená, že trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C . Tím je důkaz uzavřen.

Věta 6 (obrácená věta k větě Pythagorově)

Jestliže pro délky a, b, c stran trojúhelníku ABC platí $a^2 + b^2 = c^2$, pak je tento trojúhelník pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C .

Důkaz. Protože platí $a^2 + b^2 = c^2$, je $(a < c) \wedge (b < c)$. Kromě toho platí také

$$(a + b)^2 = (a^2 + b^2) + 2ab = c^2 + 2ab > c^2.$$

Odtud plyne $a + b > c$, což představuje nutnou a postačující podmínku pro existenci trojúhelníku ABC o stranách délek a, b a c .

Podle předpokladu pro délky a, b, c stran trojúhelníku ABC platí

$$a^2 + b^2 = c^2. \quad (4)$$

Užitím kosinové věty v trojúhelníku ABC dostáváme také

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma = c^2, \quad (5)$$

kde $\gamma = |\sphericalangle BCA|$. Odečtením (5) od (4) pak po úpravě obdržíme $\cos \gamma = 0$, tj. $\gamma = 90^\circ$. To znamená, že trojúhelník ABC je pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu C , čímž je důkaz této věty ukončen.

Závěrem uvádíme trojici příkladů, v jejichž řešeních najdete přímé aplikace výše uvedených základních vět o pravoúhlém trojúhelníku. Poslední z příkladů je určen čtenářům k samostatnému procvičení prezentované problematiky.

Příklad 1

Nechť AC a BD jsou navzájem kolmé úsečky, které se protínají v bodě P , pro který platí $|AP| : |CP| = 1 : 4$ a $|BP| = |DP| = 4$. Určete délku úhlopříčky AC čtyřúhelníku $ABCD$, který je tětiový.

Řešení. Ze zadání je patrné, že čtyřúhelník $ABCD$ je deltoid, který je osově souměrný podle přímky AC . Tento deltoid je tětiový, právě když je jeho úhlopříčka AC průměrem kružnice tomuto deltoidu opsané, tj. právě když oba jeho vnitřní úhly při vrcholech B a D jsou pravé (jedná se tedy o Thaletovu kružnici sestrojenou nad průměrem AC).

Označme $u = |AP|$, pak $|CP| = 4u$ (obr. 3). Podle věty 2 (Eukleidova věta o výšce) v pravoúhlém trojúhelníku ABC platí

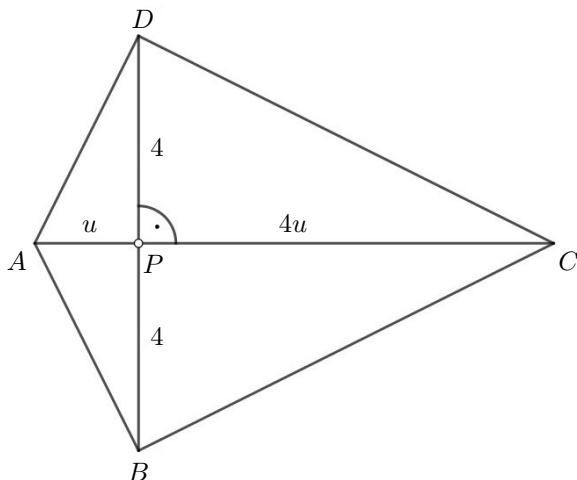
$$16 = 4^2 = |BP|^2 = |AP| \cdot |CP| = u \cdot 4u,$$

tj.

$$4u^2 = 16.$$

Kladným kořenem této ryze kvadratické rovnice je $u = 2$. Platí tedy

$$|AC| = |AP| + |CP| = u + 4u = 2 + 8 = 10.$$



Obr. 3

ZÁVĚR. Úhlopříčka AC čtyřúhelníku $ABCD$, který vyhovuje podmínkám úlohy, má délku 10.

Příklad 2

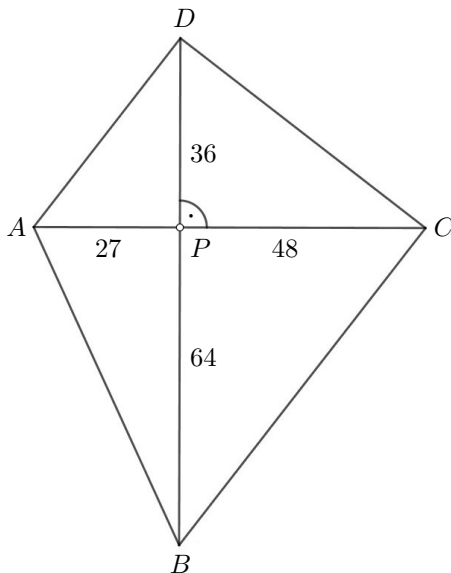
Nechť AC a BD jsou navzájem kolmé úsečky, které se protínají v bodě P , kde $|AP| = 27$, $|BP| = 64$, $|CP| = 48$, $|DP| = 36$. Dokažte, že $ABCD$ je pravoúhlý lichoběžník s pravými úhly při vrcholech C a D .

Řešení. Při řešení této úlohy lze zvolit několik možných postupů, které se opírají o kombinaci výsledků výše uvedených vět. Mezi nejelegantnější řešení však bezesporu patří dvojí využití věty 5 (obrácené věty k Eukleidově větě o výšce).

V trojúhelníku BCD je patou výšky z vrcholu C průsečík P obou daných, navzájem kolmých úseček AC a BD . Podle věty 5 tedy v trojúhelníku BCD (obr. 4) platí

$$2\,304 = 48^2 = |CP|^2 = |BP| \cdot |DP| = 64 \cdot 36,$$

a proto je úhel BCD (podle věty 5) pravý.



Obr. 4

Podobně v trojúhelníku ACD s patou P výšky z jeho vrcholu D platí

$$1\,296 = 36^2 = |DP|^2 = |AP| \cdot |CP| = 27 \cdot 48,$$

a tedy i úhel CDA je pravý.

Tím jsme dokázali, že $ABCD$ je pravoúhlý lichoběžník s pravými úhly při vrcholech C a D a se základnami BC a DA ($BC \parallel DA$).

Jiné řešení využívá nejprve větu 3 (Pythagorovu) v pravoúhlých trojúhelnících BCP , CDP a DAP s pravými úhly při vrcholu P . Platí tak

$$|BC|^2 = |BP|^2 + |CP|^2 = 64^2 + 48^2 = 4\,096 + 2\,304 = 6\,400,$$

$$|CD|^2 = |CP|^2 + |DP|^2 = 48^2 + 36^2 = 2\,304 + 1\,296 = 3\,600,$$

$$|DA|^2 = |DP|^2 + |AP|^2 = 36^2 + 27^2 = 1\,296 + 729 = 2\,025.$$

Dále pro délky stran trojúhelníků BCD a ACD použijeme *obrácenou větu* k větě Pythagorově (věta 6). Platí, viz obr. 4,

$$\begin{aligned} 6\,400 + 3\,600 &= |BC|^2 + |CD|^2 = \\ &= |BD|^2 = (|BP| + |DP|)^2 = (64 + 36)^2 = 10\,000 \end{aligned}$$

a také

$$\begin{aligned} 2\,025 + 3\,600 &= |AD|^2 + |CD|^2 = \\ &= |AC|^2 = (|AP| + |CP|)^2 = (27 + 48)^2 = 5\,625. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že oba trojúhelníky BCD a ACD jsou pravoúhlé s přeponami po řadě BD a AC , a tudíž $ABCD$ je pravoúhlý lichoběžník se základnami BC a DA , což jsme chtěli dokázat.

Příklad 3 (XVII Olimpiada Matematyczna Juniorów, 2021/2022, viz [2])

Jsou dány dvě navzájem kolmé úsečky AB a CD , které se protínají v bodě P . Je známo, že $|AC| = |BD|$, $|AD| = |BP|$ a $|DP| = 1$. Určete délku úsečky CP .

Literatura

- [1] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia – planimetrie (5. vydání). Prometheus, Praha, 2018.
- [2] Olimpiada Matematyczna Juniorów. Dostupné z: <https://omj.edu.pl>

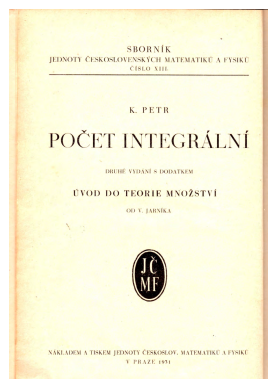
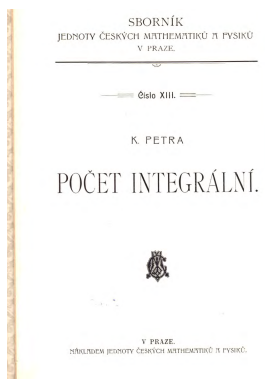
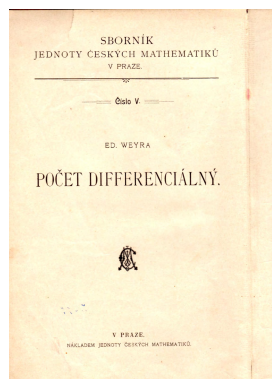
Z historie výuky infinitezimálního počtu 2

DAG HRUBÝ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Tento text navazuje na článek [1], v jehož závěru bylo připomenuto vydání knihy Eduarda Weyra *Počet diferenciální* v roce 1902. Protože brzy po vydání této knihy Eduard Weyr zemřel (1903), nedošlo k vydání počtu integrálního, jak měl Weyr v úmyslu.

Knihu *Počet integrální*, která měla být pokračováním knihy Eduarda Weyra napsal na podnět JČMF Karel Petr (1868–1950). Byla vydána v roce 1915 nákladem JČMF. Jako zajímavost uvádím, že na straně 101 této učebnice se objevují následující pojmy: *konečné množství čísel*, *horní hranice množství číselného*, *dolní hranice množství číselného*. Zřejmě se jedná o první uvedení pojmu *množství* v učebnici matematické analýzy. Z toho lze usuzovat, že v roce 1915 byl pojem *die Menge* (*množina*) překládán do češtiny jako *množství*. Petrova kniha byla podruhé vydána v roce 1931, opět nákladem JČMF. Součástí tohoto druhého vydání je dodatek s názvem *Úvod do teorie množství*, který napsal, na žádost Karla Petra, Vojtěch Jarník. Jak uvádí v předmluvě Karel Petr, jedná se o první výklad teorie množství v české řeči.



První vysokoškolskou učebnicí, která se soustavně zabývá teorií množin napsal *Eduard Čech* (1893–1960). Kniha *Bodové množiny* byla vydána nákladem JČMF (Jednota československých matematiků a fyziků) v roce 1936. Na rozdíl od Vojtěcha Jarníka už nepoužívá pojem *množství*, ale pojem *množina*. Podle Karla Havlíčka (*Cesty moderní matematiky*, Horizont Praha 1976) se slovo *množství* špatně skloňuje a proto čeští matematici volili slovo *množina*, jehož pády jsou jasněji odlišeny koncovkami. V roce 1926 vychází nákladem JČMF kniha *Úvod do počtu diferenciálního*, kterou napsal *Miloš Kössler* (1884–1961). V předmluvě Kössler uvádí, že v knize jsou vynechány téměř všechny aplikace diferenciálního počtu v geometrii, fyzice a jiných přírodních vědách a odkazuje čtenáře na učebnici *Základy matematiky ke studiu věd přírodních a technických*, kterou napsal *Jan Vojtěch* (1879–1953). Vojtěchova kniha vyšla v sedmi vydáních v letech 1916 až 1946, dotisky posledních vydání v roce 1949. Jako pokračování Kösslerovy knihy vychází v roce 1938, nákladem JČMF, kniha *Úvod do integrálního počtu*, kterou napsal *Vojtěch Jarník* (1897–1970). V roce 1942 vydává JČMF v edici *Cesta k vědě, sv. 20* publikaci *Co je a nač je vyšší matematika?*, kterou napsal *Eduard Čech* (1893–1960). Úvodní část této knihy je věnována pojmu funkce, druhá část se zabývá spojitostí, limitou a derivací funkce, třetí část je věnována integrálu a poslední část se zabývá metodou postupného půlení, obecnými vlastnostmi spojitých funkcí a derivace a důkazem existence integrálu. Po válce, v roce 1946, vychází Jarníkův *Úvod do počtu diferenciálního*. Pokračováním této knihy je *Úvod do počtu integrálního*, který vychází v roce 1948. Tato kniha je podstatným rozšířením Jarníkovy knihy stejného názvu z roku 1938. Z učebnic vydaných v roce 1946 a 1948 vznikly postupně čtyři slavné Jarníkovy učebnice *Diferenciální počet I.* (7. vydání v roce 1984), *Diferenciální počet II.* (4. vydání v roce 1984), *Integrální počet I.* (6. vydání v roce 1984), *Integrální počet II.* (3. vydání v roce 1984).



V dalším textu se zaměřím na středoškolské učebnice matematiky, které byly vydány ještě v době Rakousko-Uherska. Jak bylo uvedeno v článku [1], infinitezimální počet se stal součástí osnov matematiky středních škol až po roce 1908 v důsledku Marchetovy reformy. V rámci této reformy byly vydány nové osnovy pro gymnázia, reálky, reálná gymnázia a reformní reálná gymnázia. První učebnice podle těchto nových osnov byly vydány v roce 1910. Dříve, než se k nim vyjádřím, rád bych připomněl některé publikace, které se zabývají infinitezimálním počtem a byly vydány před rokem 1908. V roce 1864 vyšla kniha *Přídavek k Algebře pro vyšší gymnasia* [2], kterou napsal Václav Šimerka, farář ve Slatině. Šimerkova kniha *Přídavek k Algebře pro vyšší gymnasia* je první česky psanou publikací, která obsahuje diferenciální a integrální počet. Původně byl tento text součástí jeho učebnice *Algebra čili počtářství obecné pro vyšší gymnasia* [3]. Na této knize začal pracovat na gymnáziu v Českých Budějovicích, kde působil v letech 1853–1862 jako suplent. Jeho šance na ustanovení c. k. profesorem byla na gymnáziu malá. Důvodem byly, jak uvádí K. Čupr [4], třenice mezi českou a německou národností a Šimerkova svobodomyslnost. Na svou vlastní žádost se stal 20. července 1862 farářem ve Slatině u Žamberka. Rukopis knihy *Algebra čili počtářství obecné pro vyšší gymnasia* odevzdal v květnu 1861 c. k. místodržitelství se žádostí, aby byl přijat za školní knihu. Po roce dostal rukopis zpět spolu se čtyřmi recenzemi. Jedna z nich, jak uvádí K. Čupr [4], od profesora Janděčky z Hradce Králové, byla velmi pochvalná, další dvě se držely ve vědeckých mezích, ale čtvrtá od německého profesora Macka z Malostránského gymnázia v Praze překypovala žlučí, bezpochyby proto, že kniha od Čecha sepsána byla. Ministerstvo souhlasilo s tím, aby rukopis měl právo učebné knihy, ale bez diferenciálního a integrálního počtu. Žáci by tím prý byli přetíženi. Šimerka se proto rozhodl vydat infinitezimální počet samostatně. Původně měl vydat tuto knihu knihtiskař Augusta z Litomyšle, se kterým Šimerka vše projednal na podzim 1862. Rukopis byl vytištěn, ale bez tří prvních archů, protože v tiskárně neměli zlomkové písmo. Brzy na to udělal Augusta bankrot a ujel do Ameriky. Šimerka zatím našel prostřednictvím G. Skřivana, profesora na pražské technice (spolupracovník F. J. Studničky), jiného nakladatele, dr. E. Grégra, který knihu *Přídavek k Algebře pro vyšší gymnasia* v roce 1864 vydal. K. Čupr v roce 1914 napsal [4]: „Pokus Šimerkův nelze nazvat zdařilým, jest příliš stručný a učený, než aby mu středoškolský student mohl porozumět. Ani výběr látky není šťastně volen, jest jí příliš mnoho. Z každé stránky jest patrné, že jest to učebnice

knižní, nezaložená na zkušenosti získané ve škole.“ Z druhé strany je nutno poznamenat, že Šimerka svojí knihou předběhl dobu.



Václav Šimerka



Josef Úlehla

Pozoruhodnou událostí v roce 1906, týkající se infinitezimálního počtu, bylo vydání knihy *Infinitesimální počet*, kterou napsal Josef Úlehla [5], významný moravský pedagog, učitel na obecních a měšťanských školách. Josefem Úlehlou a jeho knihou se zabývá ve své práci Lukáš Vízek [6]. Připomínám, že v roce 1906 byly k dispozici česky psané učebnice matematické analýzy F. J. Studničky a E. Weyra, které však byly určeny pro studium na vysokých školách. Pro středoškoly existovala pouze neschválená učebnice V. Šimerky, kterou pokládá J. Úlehla za příliš stručnou. Podle L. Vízka [6] Úlehlou kniha nevyvolala zájem odborné matematické veřejnosti, nebyly zaznamenány ani žádné reakce ze strany Jednoty českých matematiků, jejímž byl činným členem. L. Vízek dohledal pouze tři nepodepsané recenze a to v časopisech *Komenský, Škola měšťanská a Pedagogické rozhledy*. Úlehlou kniha se dočkala druhého vydání a to v roce 1944 [7]. Z této knihy jsem vybral následující úlohu:

Hodnota zlomku $\frac{0}{0}$

Zlomek $y = \frac{x^4 - 81}{4x^2 - 36}$ bude pro $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ mít hodnoty $y = 2\frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}, \frac{0}{0}, 6\frac{1}{4}, \dots$. Viděti, že y také pro $x = 3$ má určitou hodnotu. Kterou? y jest zlomek, jehož číselník a jmenovatel jsou funkce proměnné x . Smíme psáti $y = \frac{fx}{Fx}$. Hodnota tohoto zlomku se nezmění, zvětší-li se číselník i jmenovatel o veličinu nekonečně malou, o svůj diferenciál. Pak bude $y = \frac{fx + dfx}{Fx + dFx}$, a když se stane, že bude $fx = 0$ i $Fx = 0$, bude $y = \frac{dfx}{dFx} = \frac{f'x dx}{F'x dx} = \frac{f'x}{F'x}$. Zde je $fx = x^4 - 81$, $f'x = 4x^3$, $Fx = 4x^2 - 36$, $F'x = 8x$. Pro $x = 3$ jest pak $y = \frac{x^2}{2} = \frac{9}{2}$.

I když není cílem tohoto článku věnovat se německy psaným textům, učiním jednu výjimku. Významným středoškolským profesorem, který působil na německých školách v Prostějově, Olomouci a ve Vídni byl *Ludwig Erik Tesař* (1879–1968), někdy také Tesar. Studoval matematiku a fyziku na technice a univerzitě ve Vídni. Vedle matematiky a fyziky se zabýval teorií umění, kulturní kritikou a psal sociálně-filozofické eseje. Byl respektovanou osobností v oblasti reformní pedagogiky a členem spolku *Deutsche Mittelschule für Nordmähren in Olmütz*. V době, kdy vyučoval matematiku a fyziku na německé reálce v Olomouci (K. k. deutsche Staats-Realschule, Olmütz) napsal knihu [8], která se zabývá diferenciálním a integrálním počtem. Podrobnou recenzi této knihy napsal B. Bydžovský pro *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*, Vol. 36 (1907), No. 2, 157–160. Své názory na zavedení infinitezimálního počtu do středních škol vyjádřil Tesař v článku [9].



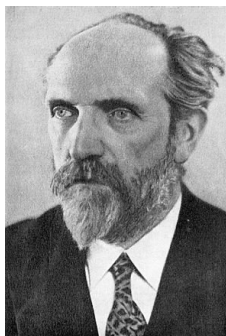
Ludwig Tesař

Před Marchetovou reformou patřila mezi nejznámější učebnice *Algebra vyšším třídám středních škol českých*, kterou napsal *Emanuel Taftl* (1842–1920). Tato kniha se dočkala sedmi vydání (1883, 1885, 1887, 1892, 1901, 1903, 1907). Poslední tři přepracoval *Hynek Soldát* (1850–1915). V této učebnici a v učebnici *Algebra pro vyšší reálky* z roku 1892, kterou napsal *František Hoza* (1843–1914) jsou zmíněny pojmy maximum a minimum v souvislosti s kvadratickou rovnicí. Pojem funkce nebyl do výuky matematiky v té době ještě zaveden. Z Taftlovy učebnice z roku 1907 jsem vybral následující úlohy:

1. Danou délku a rozdělití je na dvě úsečky tak, aby součet jich čtverců byl veličinou stálou (s^2). Jak dlouhé jsou úsečky ty? Kdy bude součet čtverců nejmenší?
2. Do trojúhelníku o podstavě a a výšce v vepsán jest obdélník, jehož plocha je q^2 , tak, že jedna jeho strana je na podstavě trojúhelníka. Které jsou strany obdélníka? Kdy bude obdélník obsahem největší?
3. Který obdélník má při určitém obvodu ($2s$) největší plochu, a který při určité ploše (a^2) nejmenší obvod?

Po roce 1908 se do vydávání nových učebnic matematiky výrazně zapojila Jednota českých matematiků. Na návrh Karla Petra a Bohumila Kučery byly zřízeny dvě komise, matematická a fyzikální, které se poprvé

sešly 26. dubna 1909. Jejich hlavním úkolem bylo vybrat autory nových učebnic a zajistit jejich přísné recenzní řízení. Za autory učebnic matematiky byli vybráni: *Bohumil Bydžovský* (1880–1969), *Ladislav Červenka* (1874–1947), *Jan Vojtěch* (1879–1953), *Miloslav Valouch* (1878–1952).



Bohumil Bydžovský



Miloslav Valouch



Jan Vojtěch

V letech 1910–1912 byly vydány na základě nových osnov z let 1908–1909 následující učebnice matematiky:

BYDŽOVSKÝ, Bohumil. *Arithmetika pro IV. a V. třídu gymnasií a reálných gymnasií*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 11. června 1910, č. 16.102. Praha: Jednota českých matematiků, 1910.

BYDŽOVSKÝ, Bohumil. *Arithmetika pro IV. třídu škol reálných*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 14. května 1910, č. 15.654. Praha: Jednota českých matematiků, 1910.

BYDŽOVSKÝ, Bohumil. *Arithmetika pro VI. a VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 27. února 1911, č. 6903. Praha: Jednota českých matematiků, 1911.

BYDŽOVSKÝ, Bohumil. *Arithmetika pro V. až VII. třídu reálék*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 16. března 1911, č. 8667. Praha: Jednota českých matematiků, 1911.

ČERVENKA, Ladislav. *Arithmetika pro I. třídu středních škol*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 22. dubna 1910, č. 11.267. Praha: Jednota českých matematiků, 1910.

ČERVENKA, Ladislav. *Arithmetika pro II. třídu středních škol*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 27. srpna 1910, č. 30.330. Praha: Jednota českých matematiků, 1910.

ČERVENKA, Ladislav. *Arithmetika pro III. třídu středních škol*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 11. května 1911, č. 20847. Praha: Jednota českých matematiků, 1911.

VOJTĚCH, Jan. *Geometrie pro IV. třídu gymnasií*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 11. června 1910, č. 20.212. Praha: Jednota českých matematiků, 1910.

VOJTĚCH, Jan. *Geometrie pro IV. třídu reálék*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 11. června 1910, č. 23.224. Praha: Jednota českých matematiků, 1910.

VOJTĚCH, Jan. *Geometrie pro V. třídu gymnasií*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 8. října 1910, č. 32.418. Praha: Jednota českých matematiků, 1910.

VOJTĚCH, Jan. *Geometrie pro V. třídu reálných gymnasií*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 8. října 1910, č. 32.418. Praha: Jednota českých matematiků, 1910.

VOJTĚCH, Jan. *Geometrie pro V. třídu reálék*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 4. ledna 1911, č. 49.813. Praha: Jednota českých matematiků, 1911.

VOJTĚCH, Jan. *Geometrie pro VI. třídu gymnasií a reálných gymnasií*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 20. března 1911, č. 5701. Praha: Jednota českých matematiků, 1911.

VOJTĚCH, Jan. *Geometrie pro VI. třídu reálék*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 20. března 1911, č. 11.731. Praha: Jednota českých matematiků, 1911.

VOJTĚCH, Jan. *Geometrie pro VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 10. ledna 1912, č. 49.187. Praha: Jednota českých matematiků, 1912.

VOJTĚCH, Jan. *Geometrie pro VII. třídu reálék*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 10. ledna 1912, č. 49.187. Praha: Jednota českých matematiků, 1912.

VALOUCH, Miloslav. *Měřictví pro I. třídu středních škol*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 9. června 1910, č. 23.488. Praha: Jednota českých matematiků, 1910.

VALOUCH, Miloslav. *Měřictví pro II. třídu gymnasií a reálných gymnasií*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 29. srpna 1910, č. 34.312. Praha: Jednota českých matematiků, 1910.

VALOUCH, Miloslav. *Měřictví pro II. třídu škol reálných*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 29. srpna 1910, č. 34.312. Praha: Jednota českých matematiků, 1910.

VALOUCH, Miloslav. *Měřivost pro III. třídu gymnasií a reálných gymnasií*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 11. července 1911, č. 28009. Praha: Jednota českých matematiků, 1911.

VALOUCH, Miloslav. *Měřivost pro III. třídu škol reálných*. Schváleno výnosem ministerstva kultu a vyučování 11. července 1911, č. 28009. Praha: Jednota českých matematiků, 1911.

Tyto učebnice se staly nepoužívanějšími učebnicemi na gymnáziích a reálkách až do roku 1950. Vedle těchto učebnic byly vydávány tzv. pomocné knihy, které podle výnosu ministerstva kultu a vyučování ze dne 18. března 1912, č. 13 237 nepotřebují schválení ministerstva. Matematiky se týkají následující publikace:

BYDŽOVSKÝ, Bohumil a Jan VOJTĚCH. *Mathematika pro nejvyšší třídu gymnasií a reálných gymnasií*. Praha: Jednota českých matematiků, 1912.

BYDŽOVSKÝ, Bohumil a Jan VOJTĚCH. *Mathematika pro nejvyšší třídu reálék*. Praha: Jednota českých matematiků, 1912.

BYDŽOVSKÝ, Bohumil a Jan VOJTĚCH. *Sbírka úloh z matematiky*. Praha: Jednota českých matematiků, 1912. Sbírka byla vydána jv roce 1948 ve 4. vydání za spolupráce Stanislava Teplého a Františka Vyčichla pod názvem *Sbírka úloh z matematiky pro IV.–VIII. třídu středních škol*.

Protože nás zajímá učivo, které se týká infinitezimálního počtu, vybral jsem ukázkou z učebnice B. Bydžovského *Arithmetika pro V. až VII. třídu škol reálných* (1911). Na stranách 122–124 je kapitola s názvem *Sečna, tečna paraboly*.

Buďtež oba body M, M_1 dány na parabole o rovnici $y = ax^2 + bx + c$. Budiž $x_1 = x + \Delta x, y_1 = y + \Delta y$, t. j. $\Delta x = x_1 - x, \Delta y = y_1 - y$. Pokládejme (x, y) za pevné hodnoty; pak Δx je přírůstek proměnné, Δy příslušný přírůstek její funkce. Směrnice přímky určené body M, M_1 je $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ t. j. rovna podílu obou přírůstků. Ježto body M, M_1 leží na parabole, vyhovují jejich souřadnice rovnici paraboly, t. j. $y = ax^2 + bx + c, y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c$. Odečtením obdržíme

$$y_1 - y = \Delta y = a(x_1^2 - x^2) + b(x_1 - x) = a\Delta x(x + x_1) + b\Delta x.$$

Dosadíme-li do výrazu pro směrnici:

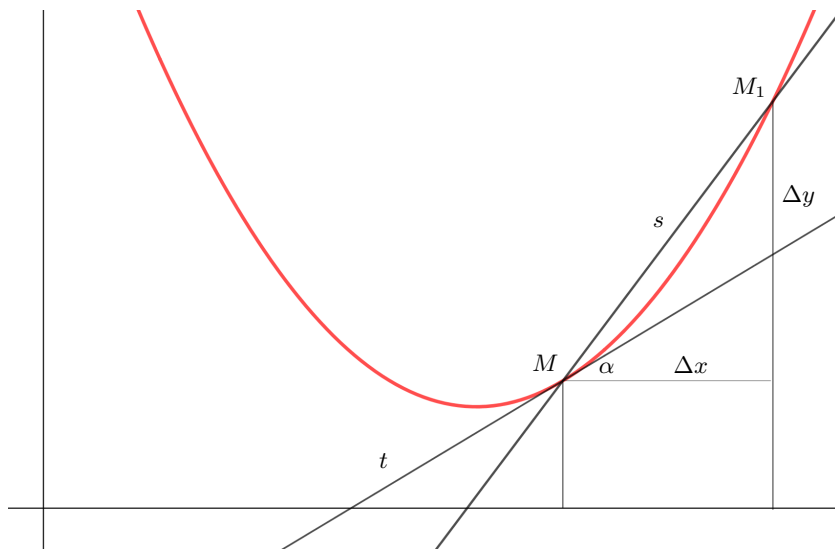
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x + x_1) + b = 2ax + b + \Delta x.$$

Představme si, že bod M_1 se pohybuje po parabole a blíží se bodu M *neomezeně*, t. j. tak, že délka obloučku MM_1 se stává menší než délka libovolně malá. Pak přímka MM_1 se otáčí kol bodu M a blíží se přitom neomezeně určitě

mezí poloze, ve které ji nazýváme – jak známo – tečnou. Zároveň Δx se blíží neomezeně 0 a totéž se děje s Δy ; avšak poměr $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ značí stále směrnici sečny, a když sečna se blíží k tečné, blíží se tento poměr určité mezní hodnotě, totiž směrnici tečné. Avšak z hořejší rovnice vysvítá, že když Δx se blíží k 0, blíží se $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ hodnotě $2ax + b$; je tedy $\operatorname{tg} \alpha = 2ax + b$ směrnice tečné. Pravíme, že výraz $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ blíží se mezi (limitě) rovně $2ax + b$, když Δx se blíží nulle; píšeme

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2ax + b$$

a čteme: *limes* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, když Δx se blíží nulle (stručněji, avšak méně přesně: pro $\Delta x = 0$).



Obr. 1

Porovnáme-li výsledek této úvahy s výsledkem odst. 120 (v tomto odstavci byla zkoumána funkce $y = ax^2 + bx + c$ a výraz $2ax + b$ označen jako derivace kvadratické funkce), můžeme vyslovit větu: *Derivace kvadratické funkce pro určitou hodnotu proměnné je rovna směrnici tečné v příslušném bodu paraboly funkci graficky znázorňující.* Výraz $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ označujeme stručně y' ; jinak také $\frac{dy}{dx}$, přičemž však tento výraz nutno pokládati zase za pouhý znak, nikoliv za zlomek, jehož čitatel by byl dy atd. Tvarem zlomku označujeme právě, že tento výraz vznikl jako mez zlomku $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Vzhledem k tomu bývá derivace nazývána také *diferenciálním poměrem*.

Pozorného čtenáře může překvapit, že žádná z výše uvedených učebnic nemá v názvu, že je určena pro reformní reálné gymnázium. Vysvětlení je poměrně jednoduché. I když existence těchto gymnázií byla možná od roku 1908, tak před první světovou válkou byla v Čechách, na Moravě a ve Slezsku jen dvě německá reformní reálná gymnázia (Nový Bohumín, Vrchlabí). Třetí reformní reálné gymnázium, rovněž německé, vzniklo v Jeseníku v roce 1918 [10].

Po roce 1918 postupně docházelo k tvorbě učebnic od dalších autorů. Mezi známější patřili *Karel Šilháček* (1882–1957), *Hynek Sechovský* (1882–1935), *Josef Vinš* (1872–1956), *Jindřich Muk* (1871–1945), *Stanislav Teplý* (1878–1929), *František Vyčichlo* (1905–1958). Učivo z infinitezimálního počtu bylo zastoupeno jak v učebnicích aritmetiky, tak v učebnicích geometrie. Ke změnám došlo v souvislosti s vydáním nových osnov středních škol v roce 1933 (Dérerova reforma). Výuka infinitezimálního počtu byla omezena na reformní reálná gymnázia a reálky.

Literatura

- [1] *Hrubý, D.*: Z historie výuky infinitezimálního počtu. MFI, roč. 30 (2021), č. 2, s. 96–105.
- [2] *Šimerka, V.*: Příklad k Algebře pro vyšší gymnasia. Dr. E. Grégr, Praha, 1864.
- [3] *Šimerka, V.*: Algebra, čili, Počítárství obecné pro vyšší gymnasia. Dr. E. Grégr, Praha, 1863.
- [4] *Čupr, K.*: Málo známé jubileum. Časopis pro pěstování matematiky a fyziky, roč. 43 (1914), č. 3–4, s. 482–489.
- [5] *Úlehla, J.*: Počet infinitesimální. Dědictví Komenského, Praha, 1906.
- [6] *Vízek, L.*: Život a dílo Josefa Úlehly. Disertační práce. Univerzita Karlova, MFF, Katedra didaktiky matematiky, Praha, 2017.
- [7] *Úlehla, J.*: Vyšší matematika bez učitele. Počet infinitesimální. Česká grafická unie, Praha, 1944.
- [8] *Tesar, L.*: Elemente der Differential und Integralrechnung. Hilfsbuch für den mathematischen Unterricht zum gebrauch an höheren Lehranstalten. B. G. Teubner, Leipzig, 1906.
- [9] *Tesar, L.*: Zur Frage der Behandlung der Infinitesimalrechnung im Mittel-schulunterricht. Zeitschrift für das Realschulwesen, 30, 1905.
- [10] *Bulíř, M.*: Gymnázia a školy gymnaziálního typu. Retrospektiva let 1788–1990. Český statistický úřad, Praha, 1992.

Matematický klokan pro žáky základních škol I

DAVID NOCAR – VLADIMÍR VANĚK

Pedagogická fakulta UP – Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Mezinárodní soutěž Matematický klokan (MK) není třeba představovat. Soutěž na základních školách, resp. v ekvivalentních ročnících víceletých gymnázií, probíhá ve čtyřech kategoriích: Cvrček (2.–3. ročník), Klokánek (4.–5. ročník), Benjamín (6.–7. ročník) a Kadet (8.–9. ročník). Schéma soutěže, její historii, organizační záležitosti i statistiky najdete např. v [1].

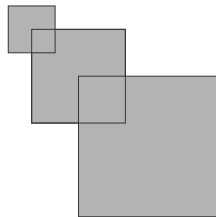
Cílem tohoto příspěvku je nabídnout čtenářům – zájemcům o uvedenou soutěž – úplná řešení vybraných zajímavých úloh z kategorie Benjamín, která je určena žákům 6. a 7. ročníků základní školy a 1. a 2. ročníkům osmiletých gymnázií. Úlohy byly převzaty z ročníků soutěže Matematický klokan pořádaných v letech 2017–2021, případně se jedná o úlohy, které byly navrženy mezinárodní asociací (Association Kangourou sans Frontières), avšak do finálního výběru se nedostaly.

Všechny „klokanské“ úlohy jsou formulovány tak, aby byly řešitelné pouhou úvahou přiměřenou věku řešitele. V textu lze nalézt jak řešení, která využívají matematický aparát, který může přesahovat znalosti žáků daného věku, tak řešení úvahou, která se u úloh tohoto typu očekává. Neklademe si za cíl předložit všechna možná řešení úloh. Vybírali jsme především ta řešení, jež může učitel využít při výuce příslušné oblasti školské matematiky.

Připomeňme, že v případě Matematického klokana hovoříme o uzavřených úlohách, tj. *žáci si vybírají z nabízených odpovědí, z nichž právě jedna je správná*. Mohou tak využívat i strategie, které jsou zaměřeny na eliminaci distraktorů, aniž by danou úlohu přímo řešili.

Benjamín (MK 2017, úloha č. 16)

Na obrázku vidíš tři čtverce, které se překrývají. Nejmenší čtverec má délku strany 2 cm, střední čtverec má délku strany 4 cm a jeden z jeho vrcholů leží ve středu nejmenšího čtverce. Největší čtverec má délku strany 6 cm a jeden z jeho vrcholů leží ve středu



středního čtverce. Urči obsah celého útvaru.

- (A) 51 cm^2 (B) $7,5 \text{ cm}^2$ (C) 8 cm^2 (D) $8,2 \text{ cm}^2$ (E) $8,5 \text{ cm}^2$

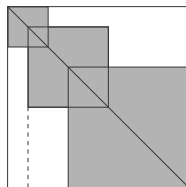
Řešení. Začneme metodou, která není nejrychlejší, ale žáky pravděpodobně napadne nejdříve. Označme S_1 , S_2 , S_3 po řadě obsahy čtverců od nejmenšího po největší. Je-li vrchol středního čtverce středem nejmenšího čtverce, je jejich průnikem opět čtverec o straně, jejíž délka je polovinou délky nejmenšího čtverce a tudíž o obsahu $\frac{1}{4}$ obsahu nejmenšího čtverce. Obdobně pro průnik největšího a prostředního čtverce. Obsah zadaného útvaru je tedy

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 + S_3 - (S_1 \cap S_2) - (S_2 \cap S_3) = \\ &= (4 + 16 + 32 - 1 - 4) \text{ cm}^2 = 51 \text{ cm}^2. \end{aligned}$$

Podobně bychom mohli řešit úlohu jen přičítáním obsahů nepřekrývajících se ploch. Začneme obsahem největšího čtverce a přičteme $\frac{3}{4}$ obsahu menšího čtverce a nakonec ještě přičteme $\frac{3}{4}$ obsahu nejmenšího čtverce:

$$S = S_3 + \frac{3}{4}S_2 + \frac{3}{4}S_1 = (36 + 12 + 3) \text{ cm}^2 = 51 \text{ cm}^2.$$

Jiné řešení vychází z doplnění daného útvaru na jeden velký čtverec, viz. obrázek. Díky symetrii tohoto útvaru (osová souměrnost podle úhlopříčky doplněného čtverce) stačí zjistit obsah poloviny útvaru a výsledek zdvojnásobit. Doplněný čtverec má délku strany $a_4 = a_3 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_1 = 9 \text{ cm}$ a obsah $S_4 = 81 \text{ cm}^2$. Od obsahu poloviny tohoto čtverce odečteme obsahy dvou vyznačených obdélníků ($S_{o_1} = 1 \text{ cm} \cdot 7 \text{ cm} = 7 \text{ cm}^2$, $S_{o_2} = 2 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 8 \text{ cm}^2$), čímž získáme polovinu hledaného obsahu zadaného útvaru:



$$\frac{S}{2} = \frac{S_4}{2} - S_{o_1} - S_{o_2} = 25,5 \text{ cm}^2.$$

Celkem tedy $S = 51 \text{ cm}^2$.

Nebyla by to „klokanská“ úloha, kdybychom ji nezkusili řešit posouzením nabízených odpovědí.

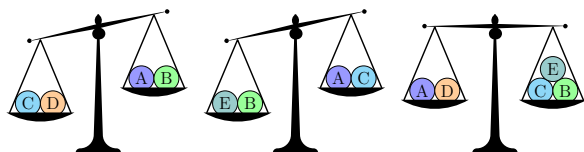
Je potřeba opět stanovit kritéria, na jejichž základě je možné distrakory eliminovat. Máme určit obsah útvaru složeného ze tří částečně se překrývajících čtverců. Je zřejmé, že jeho obsah musí být větší, než obsah

největšího ze čtverců ($S > S_3 = 36 \text{ cm}^2$). Jediná nabízená odpověď, která splňuje stanovené kritérium je (A).

Závěr: Obsah zadaného útvaru je 51 cm^2 .

Benjamín (MK 2018, úloha č. 18)

Pět míčků váží 30 g, 50 g, 50 g, 50 g a 80 g. Podle obrázků rovnoramenných vah určí, který z míčků váží 30 g.



(A) A

(B) B

(C) C

(D) D

(E) E

Řešení. Při standardním řešení můžeme využít rovnice a nerovnice. Z druhého obrázku vidíme, že pro hmotnosti platí $B + E > A + C$. Třetí obrázek pak dává do rovnosti hmotnosti $A + D = B + C + E$. Jestliže $B + E > A + C$, pak $B + C + E > A + C + C$. Dosazením do rovnosti získáme $A + D = B + C + E > A + C + C$, neboli $D > 2C$. Vzhledem k hmotnostem uvedeným v zadání úlohy je zřejmé, že hledaným míčkem je C.¹⁾

Úlohu lze řešit ekvivalentní úvahou: Z třetího obrázku vidíme, že nejlehčí míček musí být na pravé straně vah. Tedy B, nebo C, nebo E. Ovšem druhé váhy nám říkají, $B + E$ je těžší než $A + C$. Zřejmě je C nejlehčím míčkem na vahách.

Závěr: Míček C váží 30 g.

Benjamín (MK 2018, úloha č. 22)

Kolem kulatého stolu sedí 14 osob. Každá z nich je buď lhář, nebo mluví pravdu. Každá tvrdí: „Oba mí sousedé jsou lháři.“ Zjistěte největší možný počet lhářů u stolu.

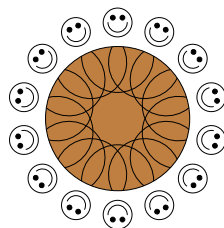
(A) 7

(B) 8

(C) 9

(D) 10

(E) 14



Řešení: Jedná se o poměrně běžnou logickou úlohu Matematického klokanu. Její řešení, jak už to u „klokanských“ úloh bývá, je postaveno na jednoduché úvaze. Místo na maximální počet lhářů (L) se zaměříme na

¹⁾V originálním celosvětovém zadání se skutečně v obrázku objevily tři rovnoramenné váhy. V české verzi byly první váhy odstraněny, protože zjevně nejsou k řešení potřeba.

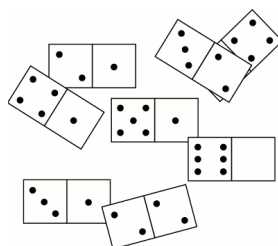
minimální počet pravdomluvných (P). Každý pravdomluvný člověk musí mít po obou svých stranách lháře, tedy tvoří tříčlenné skupinky LPL .

Tyto skupinky mohou být maximálně čtyři. Máme tak usazeno vedle sebe 12 osob, zbývají dvě osoby. Obě nemohou být lháři, protože pak by seděli čtyři lháři vedle sebe a jeden z nich by říkal pravdu, což není možné. Oba nejsou ani pravdomluvní, protože dva pravdomluvní vedle sebe sedět nemohou. Musí zde být tedy jeden pravdomluvný a jeden lhář. Celkem jsou ve čtyřech skupinkách LPL čtyři pravdomluvní a jeden ve zbývajících dvojici. U stolu tak sedí pět pravdomluvných.

Závěr: U stolu sedí 9 lhářů.

Benjamín (MK 2018, úloha č. 23)

Na obrázku je 8 klasických dominových kostek. Polovina jedné dominové kostky je překryta. Ze všech osmi dominových kostek jsme vytvořili čtverec 4×4 tak, že počet ok v každém řádku i sloupci byl stejný. Kolik ok je na zakryté části dominové kostky?



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Řešení: Nejprve si uvědomme, že na polovině dominové kostky může být nejvýše 6 ok. Představme si, že již máme z dominových kostek sestaven požadovaný čtverec. V každém řádku (sloupci) je součet ok stejný, označme jej n . Celkový součet všech ok ve čtverci je pak $4n$, tedy číslo dělitelné čtyřmi. Na obrázku vidíme pouze 37 ok. Nejbližší větší číslo dělitelné čtyřmi je 40.

Závěr: Na zakryté části dominové kostky jsou 3 oka.

Benjamín (MK 2018, nepoužita)

Mikuláš chce rozdělit čísla 2, 3, 4, ..., 10 do několika skupin tak, aby součet čísel v těchto skupinách byl stejný. Určete největší možný počet takových skupin.

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) jiná odpověď

Řešení: Sečteme-li všechna Mikulášova čísla, dostaneme 54. Součet čísel v každé skupině musí být minimálně 10. Hledáme tedy nejmenšího dělitele čísla 54 ($54 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$), který je současně větší než 10. Hledaným číslem je 18 ($2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$). Tato hodnota udává součet čísel v každé ze skupin. Je-li součet čísel v každé skupině 18, pak existují 3 takové skupiny ($54 : 18 = 3$).

Závěr: Mikuláš mohl čísla rozdělit maximálně do tří skupin.

Benjamín (MK 2019, úloha č. 24)

Mírek má 2 automaty: v prvním získá za 1 bílý žeton 4 červené žetony, zatímco ve druhém získá za 1 červený žeton 3 bílé. Mírek měl na začátku 4 bílé žetony. Po 11 výměnách má 31 žetonů. Kolik z nich je červených?

- (A) 11 (B) 14 (C) 17 (D) 21 (E) 27

Řešení: Označme x počet výměn prvního typu (1 bílý $\rightarrow$ 4 červené) a y počet výměn druhého typu (1 červený $\rightarrow$ 3 bílé). Každá výměna prvního typu zvýší počet žetonů o 3 kusy, každá výměna druhého typu zvýší počet žetonů o 2 kusy. Na počátku měl Mírek 4 žetony a po 11 výměnách 31 žetonů. Získal tak celkem 27 žetonů navíc. Můžeme tak sestavit následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 27, \\ x + y &= 11, \end{aligned}$$

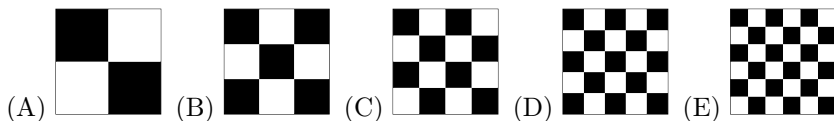
jejímž vyřešením (dosazovací, nebo sčítací metodou) získáme řešení $x = 5$ a $y = 6$. Pro počet červených žetonů platí $4 \cdot x - 1 \cdot y = 14$.

Žáci 6. a 7. ročníku ZŠ ovšem řešení soustav lineárních rovnic neznají. Úlohu je ale možné řešit jednoduchou úvahou. Ponechme označení jako v předchozím textu, tedy x značí počet výměn prvního typu (1 bílý $\rightarrow$ 4 červené) a y počet výměn druhého typu (1 červený $\rightarrow$ 3 bílé). Každá výměna prvního typu nám zvýší počet žetonů o 3 kusy, každá výměna druhého typu zvýší počet žetonů o 2 kusy, tedy o jeden méně. Na počátku jsme měli 4 žetony a po 11 výměnách 31 žetonů. Získali jsme tak celkem 27 žetonů navíc. Pokud bychom prováděli pouze výměny prvního typu, získali bychom po 11 výměnách navíc 33 žetonů což je o šest více, než potřebujeme. Proto musí být šest výměn prvního typu nahrazeno šesti výměnami druhého typu. Celkem $x = 5$ a $y = 6$.

Závěr: Po jedenácti výměnách má Mírek 14 červených žetonů.

Benjamín (MK 2019, úloha č. 13)

Pět shodných čtverců je rozděleno na menší čtvercové díly (černé a bílé). U kterého čtverce je největší obsah všech černých částí?



Řešení: Můžeme samozřejmě rozhodnout o tom, který čtverec má největší

obsah černých částí i bez znalosti konkrétních vyjádření jednotlivých obsahů, nejprve si však ukážeme řešení, v němž jednotlivé obsahy černých částí čtverců konkrétně vyjádříme. Použijeme přitom známý vzorec pro výpočet obsahu čtverce $S = a^2$.

Označíme-li délku strany celého čtverce a , budou mít délky stran černých čtverečků u jednotlivých případů hodnoty uvedené v následující tabulce. Dále dopočítáme obsah černého čtverečku a na základě zjištěného počtu čtverečků spočítáme obsah celé černé části původního čtverce.

<i>Případ</i>	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
Délka strany černého čtverečku	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{5}$	$\frac{a}{6}$
Obsah černého čtverečku	$\frac{a^2}{4}$	$\frac{a^2}{9}$	$\frac{a^2}{16}$	$\frac{a^2}{25}$	$\frac{a^2}{36}$
Počet černých čtverečků	2	5	8	13	18
Součet obsahů černých čtverečků	$\frac{a^2}{2}$	$\frac{5a^2}{9}$	$\frac{a^2}{2}$	$\frac{13a^2}{25}$	$\frac{a^2}{2}$
Součet obsahů černých čtverečků ²⁾	$\frac{225}{450}a^2$	$\frac{250}{450}a^2$	$\frac{225}{450}a^2$	$\frac{234}{450}a^2$	$\frac{225}{450}a^2$

Ze získaných hodnot, vyjadřujících obsah všech černých čtverečků, je největší hodnota v případě (B).

Dalším možným řešením je porovnání zlomků, vyjadřujících podíl počtu černých čtverečků (označme c) ku počtu všech čtverečků (označme v).

<i>Případ</i>	(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
v	4	9	16	25	36
c	2	5	8	13	18
$\frac{c}{v}$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{5}{9} = 0,5\overline{5}$	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{13}{25} = 0,52$	$\frac{1}{2} = 0,5$

Můžeme vidět, že oba předešlé přístupy k řešení úlohy jsou téměř totožné. Pokud bychom si zvolili v prvním postupu řešení za délku strany velkého čtverce jednotku ($a = 1$), bude součet obsahů černých čtverečků totožný s podílem černých čtverečků ku všem čtverečkům v celém velkém čtverci.

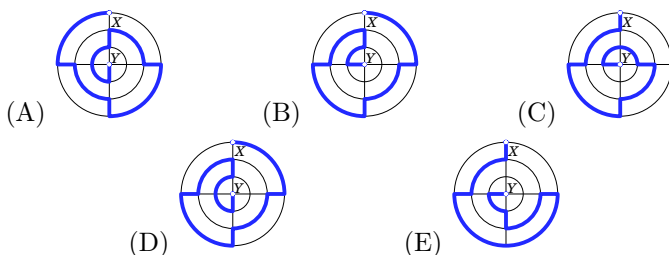
²⁾Rozšířeno na zlomky o stejném jmenovateli.

Ještě ukážeme postup, který bychom od žáků při řešení této úlohy očekávali. Při předešlém řešení jsme ukázali podíl obsahu černých částí na celkovém obsahu čtverce. Kromě toho se lze podívat i na poměr obsahu černých částí ku obsahu bílých částí. Zde si všimneme, že pokud je strana čtverce rozdělena na sudý počet stejných částí, je poměr černé části ku bílé části 1 : 1. Takové možné odpovědi jsou zde tři: (A), (C), (E). To je z principu pravidel soutěže Matematický klokan vylučuje (vždy je jediná správná odpověď). Odpovědi tedy může být buď (B), nebo (D). V obou případech je vždy o jeden černý čtvereček víc než je čtverečků bílých. Tento černý čtvereček navíc je největší u prvního lichého dělení (tj. rozdělení strany čtverce na 3 části).

Závěr: Největší obsah černých částí je u čtverce v případě (B).

Benjamín (MK 2020, úloha č. 12)

Na následujících obrázcích je vyznačeno 5 různých cest z bodu X do bodu Y . Která z nich je nejkratší?



Řešení: Chceme-li úlohu vyřešit pomocí konkrétních číselných hodnot, můžeme zvolit poloměr nejmenší kružnice jako jednotku. Poloměr každé další kružnice je o tuto jednotku větší: $k_1(Y, r_1 = 1)$, $k_2(Y, r_2 = 2)$, $k_3(Y, r_3 = 3)$. Spočítáme-li délku kružnice $o = 2\pi r$, získáme i délku polokružnice a čtvrtkružnice. Všechny rovné úseky pak mají délku zvolené jednotky: $o_1 = 2\pi$, $o_2 = 4\pi$, $o_3 = 6\pi$. Délky tras z bodu X do bodu Y jsou potom následující:

$$(A) \quad \frac{1}{4}o_3 + 1 + \frac{1}{4}o_2 + 1 + \frac{1}{4}o_3 + 1 + \frac{1}{4}o_2 + 1 + \frac{1}{2}o_1 + 1 = 6\pi + 5,$$

$$(B) \quad \frac{1}{4}o_3 + 1 + \frac{1}{4}o_2 + 1 + \frac{1}{4}o_3 + 1 + \frac{1}{4}o_2 + 1 + \frac{1}{4}o_1 + 1 = \frac{11}{2}\pi + 5,$$

$$(C) \quad 1 + \frac{1}{4}o_2 + 1 + \frac{1}{4}o_3 + 1 + \frac{1}{4}o_2 + 1 + \frac{1}{2}o_1 + 1 = \frac{9}{2}\pi + 5,$$

$$(D) \quad \frac{1}{4}o_3 + 1 + \frac{1}{4}o_2 + 1 + \frac{1}{4}o_3 + 1 + \frac{1}{4}o_2 + 1 + \frac{1}{2}o_1 + 1 = 6\pi + 5,$$

$$(E) \quad 1 + \frac{1}{4}o_2 + 1 + \frac{1}{2}o_3 + 1 + \frac{1}{4}o_2 + 1 + \frac{1}{4}o_1 + 1 = \frac{11}{2}\pi + 5.$$

Nejmenší číselnou hodnotou představující délku trasy z bodu X do bodu Y je $\frac{9}{4}\pi + 5$, tj. trasa (C).

Takto ale v rámci soutěže, která je časově omezená, nebude určitě nikdo úlohu řešit. V této úloze nejde ani o konkrétní hodnoty délek tras, a dokonce ani o znalost výpočtu délky kružnice (obvodu kruhu). Kratším řešením je omezení výpočtu jen na součty částí kružnic – bez výpočtu jejich délek.

Ještě snazší řešení plyne pouze z porovnání těch částí, ve kterých se zadané trasy liší. Všechny rovné úseky jsou stejně dlouhé a ve všech případech je jejich počet stejný, proto je můžeme ignorovat. Stejně tak můžeme ignorovat všechny části kružnic, které jsou společné všem případům $(\frac{1}{4}o_3, \frac{1}{2}o_2, \frac{1}{4}o_1)$. Stačí tedy porovnat jen počet zbývajících částí kružnic:

(A) $\frac{1}{4}o_3 + \frac{1}{4}o_1$, (B) $\frac{1}{4}o_3$, (C) $\frac{1}{4}o_1$, (D) $\frac{1}{4}o_3 + \frac{1}{4}o_1$, (E) $\frac{1}{4}o_3$.

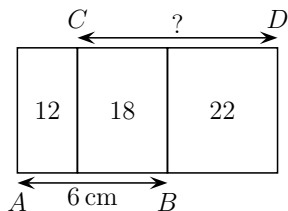
Vzhledem k jednoznačnosti řešení, nemůže být správným řešením žádný z distraktorů z dvojice stejných hodnot (A), (D), resp. (B), (E).

Závěr: Nejkratší vyznačená cesta z bodu X do bodu Y je tedy znázorněna na obrázku (C).

Benjamín (MK 2021, úloha č. 12)

Obdélník na obrázku je rozdělen na tři menší obdélníky, kde čísla uvnitř udávají jejich obsahy v cm^2 . Jestliže délka úsečky AB je 6 cm, jaká je délka úsečky CD ?

(A) 7 cm (B) 7,5 cm (C) 8 cm
(D) 8,2 cm (E) 8,5 cm



Řešení: K řešení úlohy lze přistoupit různými způsoby. Na obrázku vidíme tři obdélníky a jim příslušné obsahy. Tyto číselné hodnoty jsou v určitém poměru. Nebudeme počítat poměr všech tří obsahů, neboť dalším známým údajem je součet stran dvou sousedících obdélníků. Použijeme poměry po dvojicích. Nejprve zavedeme následující označení: Strana b má pro všechny tři obdélníky stejnou délku. Ostatní strany dílčích obdélníků označíme po řadě (zleva doprava) a_1, a_2, a_3 . Pak pro jednotlivé obsahy obdélníků platí:

$$S_1 = 12 = a_1 \cdot b, \quad S_2 = 18 = a_2 \cdot b, \quad S_3 = 22 = a_3 \cdot b, \quad a_1 + a_2 = 6.$$

Pro poměr obsahů prvního a druhého obdélníku platí:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{3} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{6 - a_2}{a_2}.$$

Odtud $a_2 = 3,6$ cm a $a_1 = 2,4$ cm

Pro poměr obsahů druhého a třetího obdélníku platí:

$$\frac{S}{S_3} = \frac{9}{11} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{18}{5a_3}.$$

Odtud $a_3 = 4,4$ cm, tudíž $a_2 + a_3 = 8$ cm.

Jde o jednu z možností, jak úlohu vyřešit, ale opět se v rámci soutěže Matematický klokan (ani mimo ni) takovýto postup neočekává.

Mnohem rychlejší a jednodušší přístup k řešení této úlohy vychází z rozdělení původního obdélníku na tři menší obdélníky a na jejich opětovné slučování po dvojicích, neboť je zadána i dotazována délka součtu dvou stran. Tento součet představuje délku strany nějakého dalšího obdélníku podle obrázku.

Spojením prvního a druhého obdélníku vznikne obdélník o straně délky 6 cm a obsahu rovnajícímu se součtu obsahů S_1 a S_2 , tj. 30 cm^2 . Ze vzorce pro výpočet obsahu obdélníku (v našem případě $S_1 + S_2 = (a_1 + a_2) \cdot b$) dostaneme

$$b = \frac{S_1 + S_2}{a_1 + a_2} = \frac{30 \text{ cm}^2}{6 \text{ cm}} = 5 \text{ cm}.$$

Délka strany b je stejná pro všechny vytvořené obdélníky. Délku úsečky CD v obdélníku, který vznikne spojením druhého a třetího obdélníku s obsahy S_2 a S_3 , v součtu 40 cm^2 , získáme opět ze vztahu pro výpočet obsahu obdélníku a známé společné strany b :

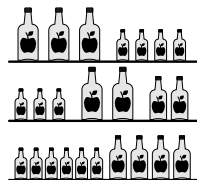
$$|CD| = a_2 + a_3 = \frac{S_2 + S_3}{b} = \frac{40 \text{ cm}^2}{5 \text{ cm}} = 8 \text{ cm}.$$

Závěr: Délka úsečky CD vyznačené na obrázku je 8 cm.

Benjamín (MK 2021, úloha č. 23)

Na každé polici je uskladněno 64 decilitrů džusu. Láhve s džusem mají tři různé velikosti: velkou, střední a malou. Kolik decilitrů džusu obsahuje střední láhev?

- (A) 3 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 14



Řešení: Úlohu lze řešit pomocí soustavy lineárních rovnic, kde V značí objem džusu ve velké láhvi, S ve střední láhvi a M v malé láhvi.

$$3V + 4M = 64,$$

$$2V + 2S + 3M = 64,$$

$$4S + 6M = 64.$$

Řešením této soustavy (metodou dosazovací, sčítací nebo jejich kombinací) obdržíme $V = 16$, $S = 10$ a $M = 4$.

Žáci ovšem mohou řešit úlohu bez užití soustavy lineárních rovnic následovně:

1. možnost

Ze spodních dvou polic je zřejmé, že objem dvou velkých láhví je stejný jako součet objemů dvou středních a tří malých láhví. V prostřední polici tudíž můžeme nahradit dvě střední a tři malé láhve dvěma velkými.

$$\underline{V \quad V \quad V \quad V} = 64$$

Celkem tedy 4 velké láhve obsahují 64 decilitrů džusu. Z horní police dopočítáme objem džusu v malé láhvi a následně z dolní police objem střední láhve.

2. možnost

Jinou možností je využití horní a prostřední police k určení vztahu $V + M = 2S$. V prostřední polici nahradíme dvě velké láhve a dvě malé láhve čtyřmi středními láhvemi.

$$\underline{M \quad S \quad S \quad S \quad S \quad S \quad S \quad S} = 64$$

Stojí na ní tak jedna malá láhev a šest středních láhví. Projdeme si nyní distraktory. Pokud by střední láhev obsahovala 14 decilitrů džusu, pak šest středních láhví obsahuje 84 decilitrů džusu, což není přípustné. Pokud by střední láhev obsahovala 8 decilitrů džusu, pak šest středních láhví obsahuje 48 decilitrů džusu a malá láhev by musela pojmout 16 decilitrů a byla by větší než střední láhev, obdobně pro distraktory (A) a (B). Jediným možným řešením je tak (D).

Závěr: Ve střední láhvi je 10 decilitrů džusu.

V následujícím čísle časopisu Matematika–Fyzika–Informatika najdou čtenáři obdobný příspěvek obsahující řešené úlohy z kategorie Kadet.

Literatura

- [1] Vaněk, V., Calábek, P., Nocar, D.: České stopy v Matematickém klokanovi. Matematika–fyzika–informatika, roč. 27 (2018), č. 5, s. 334–346.
- [2] Matematický klokan [online]. Olomouc, 2022 [cit. 15.3.2022]. Dostupné z: <http://www.matematickyklokan.net/>

- [3] Mathematical Kangaroo [online]. Paříž, 2022 [cit. 29.4.2022]. Dostupné z: <https://support.aksf.org/default.aspx>
- [4] Association Kangourou sans Frontieres [online]. Paříž, 2022 [cit. 19.4.2022]. Dostupné z: <http://aksf.org/>

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část naší pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 31. 12. 2022 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz.

Úloha 279

Dokažte, že pro všechna reálná čísla $a \geq 1$, $b \geq 2$, $c \geq 1$, $d \geq 2$ platí nerovnost

$$4\sqrt{a^2 - 1} + 2\sqrt{b^2 - 4} + 4\sqrt{c^2 - 1} + 2\sqrt{d^2 - 4} \leq (a + c)(b + d)$$

a určete, pro které hodnoty přirozených čísel a^2 , b^2 , c^2 , d^2 nastane rovnost.

Jaroslav Zhouf

Úloha 280

V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$x(x^2 + 1) = y^3 + 1,$$

$$y(y^2 + 1) = z^3 + 1,$$

$$z(z^2 + 1) = x^3 + 1.$$

Jaroslav Švrček

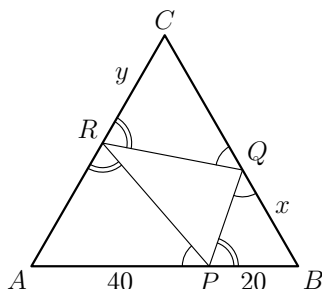
Dále uvádíme řešení úloh 275 a 276, jejichž zadání jsme zveřejnili v prvním čísle letošního (31.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 275

Uvažujme rovnostranný trojúhelník ABC se stranou délky 60 a bod P strany AB ve vzdálenosti 40 od bodu A . Paprsek z bodu P se od strany BC odrazil v bodě Q a po odrazu od strany CA dopadl opět do bodu P . Určete vzdálenost bodů B a Q .

Pavel Calábek

Řešení. Označme R bod dopadu paprsku na stranu CA . Z rovnosti úhlů dopadu a odrazu paprsku v bodě Q plyne shodnost úhlů PQB a CQR . Odtud a z rovnosti vnitřních úhlů rovnostranného trojúhelníku ABC u vrcholů B a C plyne podobnost trojúhelníků BPQ a CRQ . Podobně z rovnosti úhlů dopadu a odrazu paprsku v bodě R plyne, že tyto dva trojúhelníky jsou navíc podobné trojúhelníku ARP . Ze zadání snadno dopočteme $|PB| = 20$, označme dále x hledanou délkou úsečky BQ a y délkou úsečky CR .



Z podobností trojúhelníků BPQ , CRQ a BPQ , ARP plyne (po úpravě)

$$\begin{aligned} \frac{20}{x} &= \frac{|BP|}{|BQ|} = \frac{|CR|}{|CQ|} = \frac{y}{60 - x}, \\ \frac{20}{x} &= \frac{|BP|}{|BQ|} = \frac{|AR|}{|AP|} = \frac{60 - y}{40} = \frac{3}{2} - \frac{y}{40}. \end{aligned} \quad (1)$$

Z první rovnice soustavy (1) obdržíme

$$y = \frac{1200}{x} - 20.$$

Dosazením do druhé rovnice soustavy (1) za y dostaneme

$$\frac{20}{x} = \frac{3}{2} - \frac{30}{x} + \frac{1}{2}$$

a odsud již snadno vypočteme $x = 25$.

Hledaná vzdálenost vzdálenost bodů B a Q je 25.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Lukáš*

Lukášek z G Jablonec nad Nisou, U Balvanu, Lenka Poljaková a Štěpán Pospíšil, oba z GJŠ v Přerově.

Úloha 276

Určete počet všech čtyřmístných čísel, v nichž je součet posledních tří číslic roven trojnásobku součtu prvních tří číslic.

Jaroslav Zhouf

Řešení. Označme hledané číslo $\overline{abcd}$. Jeho číslice a, b, c, d jsou z množiny $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $a \neq 0$. Podle zadání má platit

$$b + c + d = 3(a + b + c),$$

což po úpravě dává

$$d = 3a + 2(b + c).$$

Jelikož d je číslice desítkové soustavy, vidíme odtud, že nutně $a \in \{1, 2, 3\}$. Uvažujme dále tři možnosti:

- Pro $a = 1$ dostaneme $d - 3 = 2(b + c)$, což jednoznačně určuje číslici d pro $b + c \in \{0, 1, 2, 3\}$. Číslice b a c pak můžeme volit $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ způsoby.
- Pro $a = 2$ dostaneme $d - 6 = 2(b + c)$, což jednoznačně určuje číslici d pro $b + c \in \{0, 1\}$. Číslice b a c pak můžeme volit $1 + 2 = 3$ způsoby.
- Pro $a = 3$ dostaneme $d - 9 = 2(b + c)$, což jednoznačně určuje číslici d pro $b + c = 0$. Číslice b a c pak můžeme volit jedním způsobem.

Celkem tedy existuje $10 + 3 + 1 = 14$ čísel dané vlastnosti. Jsou to čísla (v pořadí dle naší konstrukce) 1003, 1015, 1105, 1027, 1117, 1207, 1039, 1129, 1219, 1309, 2006, 2018, 2108 a 3009.

Správná řešení zaslali Karol Gajdoš z Trnavy, Anton Hnáth z Moravan, František Jáchim z Volyně, Jáchym Kouba, Jindřich Kukla, Lucien Poljak a Lenka Poljaková, všichni z GJŠ v Přerově, Kryštof Tahal z G Jablonec nad Nisou, U Balvanu.

Neúplné řešení zaslal Ľubomír Hajdanka z Michalovců.

Pavel Calábek

Parametrické kmitání oscilátoru

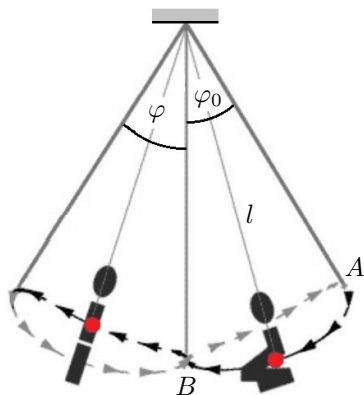
OLDŘICH LEPIL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Obsahem učiva o mechanickém i elektromagnetickém kmitání jsou dva druhy kmitání, které se liší tím, jak oscilátoru dodáváme z vnějšku energii. Je to jednak *vlastní kmitání*, kdy oscilátoru energii dodáme jen v počátečním okamžiku a pak oscilátor tlumeně kmitá, jednak *nucené kmitání*, při němž oscilátoru dodáváme energii nepřetržitě a oscilátor kmitá s konstantní amplitudou a s frekvencí zdroje nuceného kmitání. Učivo o nuceném kmitání zpravidla končí výkladem rezonance a poznatkem, že amplituda nucených kmitů dosahuje maxima při shodě vlastní úhlové frekvence oscilátoru a frekvence zdroje, který kmity v oscilátoru vynucuje. V tomto příspěvku věnujeme pozornost třetí možnosti, kterou je parametrické kmitání oscilátoru.

1. Parametrické kmitání kyvadla

Jako názorný příklad podmínky, při níž lze dosáhnout rezonance mechanického oscilátoru, se obvykle uvádí pohyb dětské houpačky. Tu rozkmitáme vychýlením z rovnovážné polohy a dalším periodickým vnějším silovým působením, např. úderem do houpačky rukou. Tyto silové impulsy musejí mít stejnou periodou, jakou má houpačka. Amplituda houpačky pak zůstane konstantní, nebo se i může postupně zvětšovat. Každé dítě má však zkušenost, že k rozhoupání nepotřebuje trvalého pomocníka u houpačky, ale že stačí, když houpačku jen trochu rozhoupneme a pak si dítě dokáže amplitudu kmitání zvětšovat samo. Děje se to tak, že dítě, které např. na houpačce stojí, při pohybu z největší výchylky (bod *A* na obr. 1) přejde do dřepu a naopak při průchodu rovnovážnou polohou (bod *B*), kdy se houpačka pohybuje největší rychlostí, se vztyčí. To se pak opakuje v průběhu periody kmitání vždy dvakrát a tím se dosáhne postupného narůstání amplitudy kmitání.

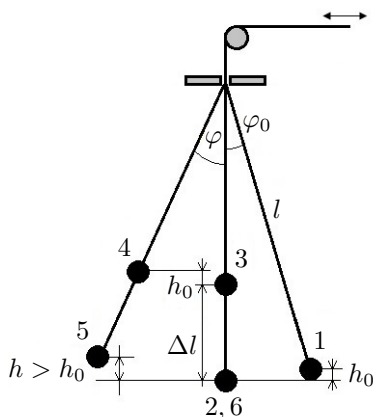


Obr. 1

Z fyzikálního hlediska je pohyb dítěte spojen se změnou těžiště jeho těla, což v podstatě odpovídá periodické změně délky tohoto mechanického oscilátoru a tedy jeho parametru l . Takové kmitání oscilátoru, jehož parametr se v průběhu kmitání řízeným způsobem mění, se označuje jako *parametrické kmitání* a odlišuje se od druhů kmitání, jejichž parametry se v průběhu kmitání nemění. Při určité periodě změny parametrů lze tak dosáhnout udržení amplitudy kmitání, nebo jejího postupného zvětšování i bez vnějšího působení na oscilátor. Dochází k *parametrické rezonanci oscilátoru*. Charakteristické přitom je, že na rozdíl od buzení kmitů vnější silou, které se děje s frekvencí shodnou s vlastní frekvencí oscilátoru, probíhá parametrické buzení kmitů s odlišnou frekvencí, která je dvojnásobkem vlastní frekvence.

Ve výuce můžeme ukázat parametrické kmitání jednoduchým pokusem s kyvadlem v podobě kuličky zavěšené na vlákne, jehož horní část vedeme přes kladku a konec vlákna držíme v ruce (pokus je popsán např. v [1]). Když bude kyvadlo v klidu v rovnovážné poloze, tak ho taháním za konec závěsu nerozkmitáme. Pokud ale kulička kyvadla bude kmitat alespoň s malou amplitudou, pak se při periodickém pohybu konce vlákna s poloviční periodou kmitů kyvadla začne amplituda kmitů postupně zvětšovat a dosáhneme parametrické rezonance.

Na příkladu tohoto jednoduchého oscilátoru objasníme zdánlivý paradox, že se energie kmitání oscilátoru zvětšuje, aniž by kyvadlu byla z vnějšku dodávána energie. Pro výklad použijeme schematické zobrazení předcházejícího pokusu (obr. 2).



Obr. 2

Kyvadlo tvoří vlákno délky l , na němž je zavěšena kulička o hmotnosti m , které vychýlíme z rovnovážné polohy o úhel φ_0 (obr. 2, poloha 1). Když kuličku kyvadla pustíme, pohybuje se do rovnovážné polohy (2), kde má maximální rychlost v_0 . V tomto okamžiku zkrátíme závěs kyvadla o délku Δl a kulička se přesune do polohy (3), což ale nemá vliv na velikost rychlosti v_0 a tedy ani na kinetickou energii kyvadla. Pohyb kuličky pokračuje po trajektorii s menším poloměrem, až dosáhne polohy (4), která je o vzdálenost h_0 výše, než v poloze (3) a závěs se odkloní o úhel $\varphi > \varphi_0$. V tomto okamžiku se závěs opět prodlouží o délku Δl a kulička bude v poloze (5), která je ve výšce $h > h_0$ nad rovnovážnou polohou (2). Těleso kyvadla tedy bude mít větší polohovou energii ve srovnání s energií v poloze (1) a rovnovážnou polohou při pohybu vpravo projde rychlostí větší rychlostí v_1 ($v_1 > v_0$).

Jestliže se tento způsob změny délky závěsu kyvadla bude opakovat dvakrát za periodu, bude se celková energie kmitavého pohybu kyvadla zvětšovat. Je to dáno tím, že energie potřebná ke zvednutí kmitajícího tělesa o Δl je větší, než energie, kterou ztratí při přemístění z polohy (4) do polohy (5), tzn. když

$$\Delta l_1 = \Delta l \cos \varphi.$$

Popíšeme přeměny energie při tomto parametrickém kmitání. Poněvadž závěs kyvadla je v rovnovážné poloze (2) napínán tíhovou silou $F_G = mg$ působící na kuličku a odstředivou silou $F_0 = m \frac{v_0^2}{l}$, vykoná se při zkrácení

závěsu práce

$$\Delta W_1 = \left(mg + \frac{mv_0^2}{l} \right) \Delta l.$$

Naopak prodloužení závěsu z polohy (4) do polohy (5) odpovídá práce

$$\Delta W_2 = -mg\Delta l \cos \varphi = -mg\Delta l \left(1 - \frac{h}{l} \right).$$

Poněvadž rozdíl mezi h_0 a h je malý ($h \approx h_0$), je zvětšení energie ΔE kyvadla

$$\begin{aligned} \Delta E &= \Delta W_1 + \Delta W_2 = \\ &= mv_0^2 \frac{\Delta l}{l} \left(1 - \frac{gh}{v_0^2} \right) = 2 \frac{\Delta l}{l} E_0 \left(1 - \frac{h}{2h_0} \right) \approx 3 \frac{\Delta l}{l} E_0, \end{aligned}$$

kde $v_0^2 = 2gh_0$, $\frac{1}{2}mv_0^2 = E_0$.

Popsané přeměny energie však nezahrnují reálné tlumení pohybu kyvadla, při němž se ztrácí část energie kmitání v závislosti na součiniteli tlumení δ . Za polovinu periody se tak počáteční energie pohybu kyvadla E_0 změní na hodnotu

$$E_1 = E_0 e^{-\delta T}.$$

Pokud je tlumení oscilátoru malé ($\delta T < 0,1$), dojde při pohybu kyvadla jen k malému úbytku energie

$$\Delta E_1 = E_0 - E_1 = E_0 (1 - e^{-\delta T}) = E_0 \delta T.$$

Abychom dosáhli parametrické rezonance, tzn. udržení, popř. zvětšení amplitudy kmitání, je třeba, aby $\Delta E > \Delta E_1$. Tento požadavek ovlivňuje tzv. *hloubku modulace parametru* $\frac{\Delta l}{l}$, pro kterou přibližně platí

$$\frac{\Delta l}{l} \approx \frac{1}{Q},$$

kde Q je *činitel jakosti oscilátoru* (viz např. [2]). Čím větší je činitel jakosti oscilátoru, tím menší změny parametru jsou nutné, aby se kmitání oscilátoru udrželo.

Parametrické kmitání jednoduchého kyvadla může nastat i za jiných podmínek. Kdyby např. tělesem kyvadla byla ocelová kulička a pod její rovnovážnou polohu bychom umístili elektromagnet, dosáhli bychom urychlení

kyvadla a tím náhrady ztrát energie periodickým zapínáním elektromagnetu v okamžiku, kdy se kulička blíží do rovnovážné polohy, a vypnutím elektromagnetu v okamžiku, kdy kulička projde rovnovážnou polohou. Podobně jako při houpání na houpačce je tedy pro dosažení parametrické rezonance nutné měnit zvolený parametr s dvojnásobnou frekvencí, než je frekvence vlastního kmitání soustavy.

2. Model parametrického kmitání oscilátoru

Podmínky vzniku parametrické rezonance si můžeme ověřit jednoduchým počítačovým modelem. Předpokládejme, že délka závěsu kyvadla se bude pohybovat okolo střední hodnoty l_0 s amplitudou $A = \Delta l$ podle vztahu

$$l(t) = l_0 - A \sin(\Omega t),$$

kde Ω je budicí frekvence vnějšího působení na kyvadlo. Diferenciální rovnice tohoto oscilátoru pak bude vyjádřena vztahem

$$ma + bv + \frac{mg}{l_0 - A \sin(\Omega t)} x = 0,$$

kde m je hmotnost kyvadla a b je konstanta úměrnosti mezi odporovou silou a rychlostí tlumení¹⁾. Z rovnice určíme zrychlení a a pro $m = 1$ kg sestavíme dynamický model parametrického kmitání kyvadla (veličina h je časový krok: $h = 0,05$ s):

$$a = - \frac{g}{l_0 - A \sin(\Omega \cdot t)} x - b \cdot v$$

$$x_{i+1} = x_i + v_i \cdot h$$

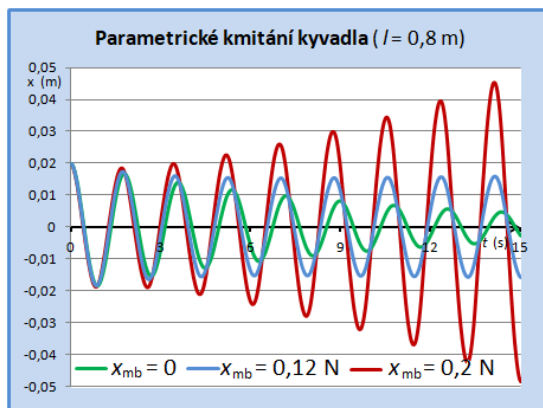
$$v_{i+1} = v_i + a_i \cdot h$$

$$t_{i+1} = t_i + h$$

Pokud bude budicí frekvence menší než dvojnásobek vlastní úhlové frekvence kyvadla ($\omega_b < 2\omega_0$), bude výsledné kmitání tlumené (zelená křivka na obr. 3). Při dvojnásobné frekvenci dochází k parametrické rezonanci a v závislosti na amplitudě změn délky kyvadla (parametrické modulaci)

¹⁾Ve standardní diferenciální rovnici mechanického oscilátoru je tlumení vyjádřeno součinitelem tlumení $\delta = \frac{b}{2m}$ a úhlová frekvence tlumeného oscilátoru je $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

vzniknou buď netlumené kmity s konstantní amplitudou (modrá křivka), nebo se amplituda kmitů bude postupně zvětšovat (červená křivka).



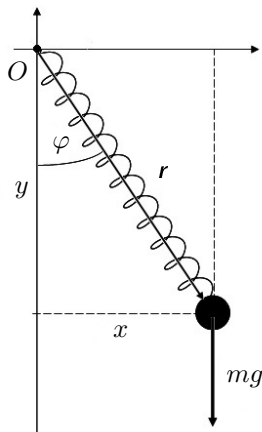
Obr. 3

V případě kyvadla délky $l_0 = 0,8 \text{ m}$ je $\omega_0 \approx 3,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ a parametrická rezonance nastane při $\Omega \approx 7,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Uvedené hodnoty jsou jen přibližné, poněvadž se v počítačovém modelu mohou poněkud lišit podle volby velikosti časového kroku. Podle zvolené hodnoty součinitele tlumení b je pak třeba nastavit velikost amplitudy A budících kmitů. Při malé amplitudě nedojde v průběhu periody k náhradě ztrát vzniklých tlumením a soustava kmitá tlumeně. Rezonančního zesílení kmitů dosáhneme změnou amplitudy A pomocí posuvníku v menu počítačového modelu. Model je zájemcům dostupný v sešitu aplikace MS Excel ([ZDE](#)).

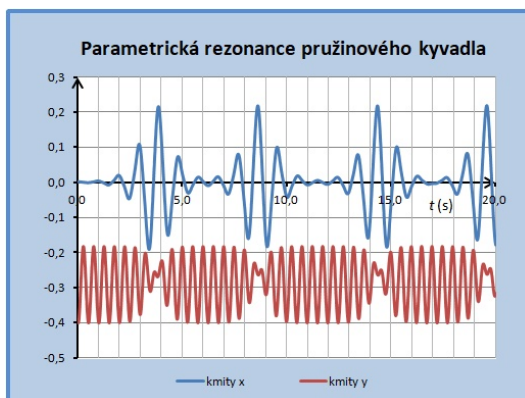
3. Parametrická rezonance pružinového kyvadla

Příkladem oscilátoru, v němž může nastat parametrická rezonance, je také *pružinové kyvadlo* (obr. 4). Jestliže rozkmitáme těleso kyvadla přesně ve směru osy pružiny, bude kyvadlo konat jen *podélné kmity* ve svislém směru s úhlovou frekvencí danou parametry kyvadla, tzn. hmotností m a tuhostí pružiny k . Jestliže se však závaží třeba jen náhodně od svislého směru odchýlí, vzniknou *příčné kmity* v horizontálním směru, jejichž perioda je určena měnící se délkou pružiny, tedy parametru l kyvadla. Při vhodné volbě parametrů pružinového kyvadla lze dosáhnout poměru úhlových frekvencí podélných a příčných kmitů 2 : 1 a dojde k parametrické rezonanci. Soustava pružinového oscilátoru se chová jako dvojice vázaných

oscilátorů, v níž dochází k periodické výměně energie příčných a podélných kmitů a to se projeví vznikem rázů (obr. 5). Ten to děj je však nestabilní a již při nepatrné změně některého z parametrů dochází k chaotickému pohybu tělesa kyvadla. Podrobněji je tento zajímavý případ parametrického kmitání popsán v příspěvku [3], k němuž je připojen sešit aplikace MS Excel s jednoduchým programem, který umožňuje interaktivně si ověřit vznik parametrické rezonance.



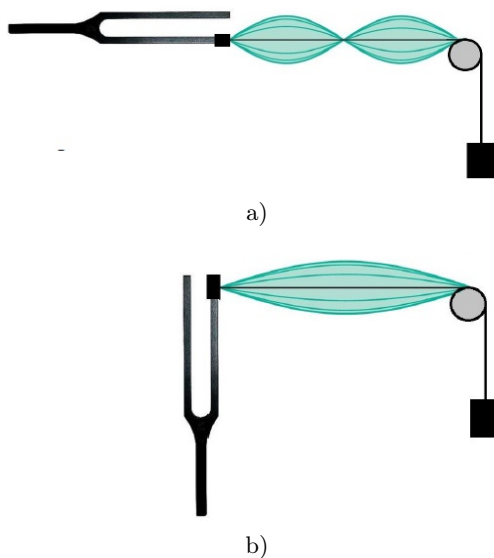
Obr. 4



Obr. 5

4. Meldeův pokus

I když parametrická rezonance našla praktické uplatnění až v technické praxi 2. poloviny 20. století, její historie je delší. Zkoumal ji v roce 1859 německý fyzik *Franz Melde* (1832–1901), který studoval interferenci vlnění v řadě bodů a objevil tak stojaté vlnění, kterému dal i název. K tomu vytvořil zařízení, které je z historie fyziky známo jako *Meldeův pokus* a patří ke klasickým experimentům, dnes již zmodernizovaným do nejrůznějších podob (viz např. [4]). Melde zkoumal vznik stojatého vlnění v pružném vlákně, jehož jeden konec byl pevný a druhý byl spojen s raménkem ladičky (obr. 6). Přitom zjistil zajímavý rozdíl, když ladička byla buď v poloze (a), nebo v poloze (b). Při určitém napětí vlákna, které lze měnit zátěží na pevném konci, nastane rezonance a na vlákně vzniknou kmitny a uzly stojatého vlnění.



Obr. 6

Obr. 6a je zobrazuje případ, kdy je volbou závaží nastaveno napětí vlákna tak, aby rezonance nastala při 2. harmonické frekvenci, takže se na vlákne vytvoří celá stojatá vlna. Vlákno je raménkem ladičky rozkmitáváno příčně, takže se napětí vlákna nemění a je to obdoba dětské houpačky rozkmitávané vnější silou. Vlákno koná nucené kmitání.

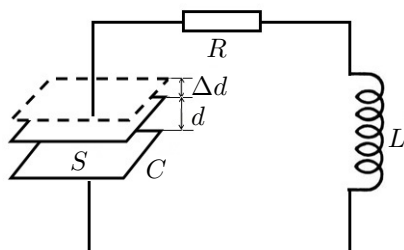
V případě na obr. 6b je však situace odlišná. Raménko ladičky ovlivňuje nepatrnými výchylkami délku vlákna, tedy jeho parametr. Tím se periodicky mění napětí vlákna, nastává tzv. parametrické buzení kmitů ve vlákne a dochází k parametrické rezonanci. Na vlákne vznikne při stejné frekvenci ladičky stojatá vlna o dvojnásobné vlnové délce, takže zobrazena je jen polovina vlny.

5. Parametrické kmitání elektromagnetického oscilátoru

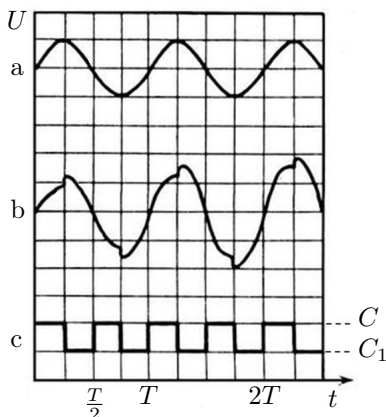
Podstatu parametrického kmitání jsme si ukázali na příkladech mechanických oscilátorů. Ty se však praktického využití nedočkaly. Současná technická praxe využívá parametrické zesilování signálů v parametrických zesilovačích ve vysokofrekvenční elektronice, kvantové optice nebo radio-

astronomii. Základní předností parametrických zesilovačů je v těchto případech hlavně nízká hladina rušivého šumu.

Princip parametrického zesilování elektromagnetického kmitání si ukážeme na jednoduchém modelu oscilačního obvodu s měnitelnou kapacitou (obr. 7).



Obr. 7



Obr. 8

Kapacita deskového kondenzátoru je určena známým vztahem

$$C = \varepsilon \frac{S}{d},$$

kde ε je permeabilita prostředí, S je plocha desek kondenzátoru a d je jejich vzdálenost. To znamená, že při zvětšení vzdálenosti desek o Δd se kapacita zmenší na hodnotu $C_1 < C$. Když napětí U na deskách kondenzátoru dosáhne největší hodnoty (viz obr. 8a), bude náboj desek $q = CU$. V tomto okamžiku zvětšíme vzdálenost desek o Δd a kapacita kondenzátoru se zmenší na C_1 (viz obr. 8c). Náboj kondenzátoru se nezmění, ale jeho napětí se zvětší. Přitom se vykoná práce potřebná k překonání sil elektrického pole mezi deskami a tím se zvětší energie kondenzátoru o ΔE :

$$\Delta E = \frac{q^2}{2C_1} - \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2}{2C} \left[\frac{C}{C_1} - 1 \right] = E_0 \frac{\Delta d}{d} = E_0 \mu,$$

kde $E_0 = \frac{q^2}{2C}$ je energie oscilátoru před změnou kapacity kondenzátoru a $\frac{\Delta d}{d} = \mu$ je opět modulace parametru.

Od okamžiku dosažení maximálního napětí se kondenzátor začíná přes cívkou vybíjet a napětí na kondenzátoru se zmenšuje. Když dosáhne nulové hodnoty, znovu se desky posunou na původní místo a kapacita kondenzátoru se zvětší. Tento děj se opakuje dvakrát v průběhu jedné periody, tedy s poloviční periodou než je perioda vlastního kmitání oscilátoru. Při každém cyklu se také zvětšuje celková energie kmitání oscilátoru, a pokud přírůstek je větší než ztráty energie, amplituda napětí na kondenzátoru narůstá a nastává parametrická rezonance oscilátoru. Podobně jako u mechanického parametrického kmitání je parametrická rezonance ovlivněna činitelem jakosti oscilátoru. Čím větší je činitel jakosti Q , tím menší může být modulace parametru, při níž dojde k parametrické rezonanci.

Pro výklad jsme využili zjednodušený model, který by bylo obtížné realizovat. V technické praxi plní funkci proměnného parametru elektronické součástky. Jednou z nich je tzv. kapacitní dioda – *varikap*, jejíž přechod PN zapojený v závěrném směru se chová jako kondenzátor. Kapacita varikapu je závislá na připojeném napětí, které se mění podle vztahu

$$C = C_0(1 + \mu \sin \Omega t),$$

kde μ je modulace parametru a Ω je úhlová frekvence buzení kmitů s dvojnásobnou frekvencí, než je frekvence zesilovaného signálu.

Jako příklad jsme zvolili změnu kapacity, ale obdobným způsobem lze získat parametrické kmitání také změnou indukčnosti oscilačního obvodu. Velmi názorně je to ukázáno ve výukovém videu [6], které je shrnutím poznatků o parametrickém kmitání.

Literatura

- [1] Patč, B.: Pokusy s kyvadly. Veletrh nápadů učitelů fyziky 2, Plzeň, 1997. Dostupné z: http://vnuf.cz/sbornik_old/Veletrh_02/02_18_Patc.html
- [2] Lepil, O.: Rezonanční křivka – portrét oscilátoru. MFI, roč. 29 (2020), č. 3, s. 201–213. Dostupné z: https://mfi.upol.cz/files/29/2903/mfi_2903_201_213.pdf
- [3] Lepil, O.: Fázový portrét oscilátoru. MFI, roč. 29 (2020), č. 4, s. 280–297. Dostupné z: https://mfi.upol.cz/files/29/2904/mfi_2904_280_297.pdf
- [4] Lepil, O.: Tři pokusy s budičem mechanických kmitů. MFI, roč. 11 (2001), č. 4, s. 215.
- [5] Malov, N. N.: Osnovy teorii kolebanij. Prosvěščenije, Moskva, 1971.
- [6] Parametrische Anregung von Schwingungen. IWF, Göttingen 1986. Dostupné z: <https://av.tib.eu/media/14288>

Výuka fyziky s využitím žákovských mentorů

JAROSLAV ŠMAHEL

Gymnázium Kadaň

Jsem učitelem matematiky a fyziky na střední škole. V současnosti učím oba tyto předměty šestý rok, převážně na vyšším gymnáziu v Kadani. Tuto práci mám rád, ale asi jako každý učitel řeším při výuce několik stále se opakujících problémů, které však při současném nastavení systému vzdělávání mnoho možností řešení nemají. Neustále hledám cesty, jak do učebního procesu zapojit aktivně co nejvíc žáků a přitom nezanedbat pokročílejší výuku těch motivovaných a nadaných.

Pokud nechce žák studovat matematiku a fyziku a tyto předměty ho ani nebaví, je těžké ho zaujmout. Zpravidla je ale ve třídě vždy několik žáků, které daný předmět baví. V určité fázi probírání látky však nastane okamžik, kdy se právě ti schopnější a motivovaní při výuce začnou nudit. Navzdory pedagogickým poučkám prostě není čas připravovat jim úlohy navíc, a pokud ano, jde jen o okrajový moment, který zdaleka nestačí naplnit jejich potenciál – je tedy promarněno něco, co je skutečně velmi cenné. V „maratonu“ běžné výuky zbývá ovšem na motivované žáky jen omezený čas, většinou se zabýváme více těmi, kteří mají se zvládnutím látky problémy. Ti šikovnější se tak bohužel dostávají na okraj zájmu učitele.

Těmito problémy se zabývá mnoho pedagogických metod, nicméně ve své praxi jsem neustále konfrontován s tím, jak nalézt řešení v systému, který je již předem dán. V systému, kdy je málo času na výuku, hodně žáků ve třídě, žáci jsou přetíženi jinými předměty a kdy je zároveň třeba plnit požadavky na výstup studia – úspěšné složení maturitní zkoušky a přijímacích zkoušek na vysoké školy. Svoji roli hraje v neposlední řadě i vyčerpání učitele a jeho v čase ubývající motivace.

Z těchto důvodů jsem se rozhodl hledat způsob, jak rozvíjet nadané žáky a zároveň přitom co nejvíce pomoci ostatním. Se souhlasem ředitele jsem se tedy rozhodl vyzkoušet nový přístup, který by měl pomoci výše uvedené problémy řešit. Tento přístup má (na rozdíl od většiny před-

chozích) vstupní podmínku: musí žákům pomoci a zároveň nesmí zatížit učitele dalším nárokem na jeho čas.

Takovým řešením se ukázalo vytvoření skupiny tzv. *žakovských mentorů*. Pod pojmem mentor obvykle chápeme někoho zkušenějšího, často i staršího člověka, který v dané situaci uvádí do určitého oboru mladšího a méně zkušenějšího kolegu (z univerzitního prostředí známe tutorý, starší spolužáky, kteří pomáhají mladším). Ve své metodě jsem vytvořil podobně definovanou roli pro nadanější žáky – pro zjednodušení je zde dále nazývám „mentory“. Na rozdíl od toho, jak se podobné role obvykle chápou, zde není mentor starším rádce, ale vrstevníkem.

Způsob práce s využitím žakovských mentorů, který dále krátce představím, je založen čistě na mé osobní zkušenosti z učitelské praxe, není výsledkem vědeckého výzkumu. Metodu jsem využíval v předchozích letech nejprve příležitostně, nyní – od začátku školního roku 2021/22 – ji zavádím již systematicky celkem ve třech třídách vyššího gymnázia. Stále však jde o jistý experiment.

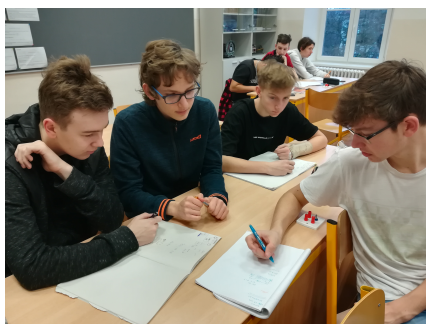
Popis metody

Nejprve je třeba definovat roli žakovských mentorů. Od mentora se očekává, že se stane jakousi prodlouženou rukou pedagoga. Jakmile mentoři (nadaní žáci) pochopí probíranou látku, vstupují aktivně do výuky. Oni v této chvíli již látku rozumí, zatímco zbytek třídy ještě ne.

Kdo může být mentorem? Oslovuji s touto nabídkou žáky, kteří mají na vysvědčení jedničky, jsou v daném předmětu nadaní, „jde jim to“ a jsou v hodinách aktivní. Musí mít schopnost komunikovat a vysvětlovat. Je také důležité, aby dopředu věděli, co je asi čeká a jasně vnímali, že jde o dobrovolnou nabídku. Rovněž je důležité, aby se oslovení žáků a jmenování mentorů událo před třídou. Stejně tak vysvětlení toho, co tato role obnáší.

Oslovuji žáky, které sám vyberu. Někdy odmítnou, sami cítí, že se jim do toho nechce. Stalo se mi také, že mentor ze své funkce odstoupil, protože na ni neměl čas. Také je možné – a už se to několikrát stalo –, že se mi ozvali žáci, kteří nejsou tak aktivní jak bych si představoval nebo mají na vysvědčení horší známky než jedničky. Je pak na zvážení učitele, zda je přijme, nebo ne. Už jsem některým vyhověl a některé odmítl. Role mentora sama o sobě však může méně aktivní žáky více aktivizovat. Je jen na zkušenostech pedagoga, kolik mentorů v dané třídě může a chce ustanovit. Ve třídě, kde učím nejvíce, jsem takto vybral 4 mentory z 16 žáků.

Mentorům zadávám úkoly. Jde o různé typy úloh k procvičení, přípravu experimentů nebo vedení laboratorní práce. Jejich úkolem je si tyto úkoly rozdělit. Je-li například třeba procvičit jisté úlohy daného tématu, projdu s mentory typy úloh k procvičení a mentoři pak musí umět tyto typy úloh třídit i vytvořit sami. Někdy je potřeba s mentory dané téma probrat do větší hloubky, někdy to nutné není. Mentoři se tím dostávají za běžný rozsah znalostí spolužáků. Nakonec se sami rozhodnou, kdo z nich si připraví dané typy úloh k procvičení, kdo bude úlohy zadávat a vzorově řešit u tabule během hodiny a kdo bude pracovat v lavicích se skupinkami žáků.



Obr. 1 Práce mentora se spolužáky

Podobně si mentoři rozdělují funkce při laboratorních cvičení. Vždy mezi nimi určuji koordinátora, který dohlédne na jejich přípravu. Pak už se připravují sami, buď online, nebo se scházejí osobně.

V určených hodinách je třída rozdělena do skupin. Ty nejsou přesně definované, ale zpravidla se ustálí podle vztahů ve třídě. Ponechávám zcela na jednotlivých mentorech, které skupině budou pomáhat. Každý mentor dopředu ví, co se bude procvičovat. V průběhu hodiny se mentoři střídají u tabule nebo pomáhají s řešením úloh ostatním spolužákům.

Práci mentorů v hodině pozoruji ze zadní lavice a snažím se do jejich výuky vstupovat co nejméně – někdy je to však nutné. Zvláště zpočátku s nimi jejich práci rozebírám a hodnotím. Zpětná vazba je pro ně důležitá i v případě, kdy není co zlepšovat.

Mentoři sestavují dokonce i zkušební testy. Kontrola jimi sestavených testů z mé strany je samozřejmě nutná. Pokud jim stanovím klíč, jsou následně schopni testy také klasifikovat. Klasifikace testů je ve skutečnosti proces, který se snažím automatizovat. S mentory probírám, jak se bude to či ono známkovat. Nejasnosti při hodnocení dořeším sám. Stejně je to

s domácími úkoly v matematice. Mentoři mi svou činností ušetří spoustu času.

Testy nepřipravují výhradně žáci-mentori, některé zkušební testy, čtvrtletní písemné práce i některé další stále vytvářím sám. V některých třídách jsem si v průběhu času u hodnocení jistější, jinde více kontroluji, zda se známkování děje tak, jak bylo domluveno. Přirozenou otázkou je, co za tuto práci mentori mají. Dostávají jedničky. Zatímco svým spolužákům písemky klasifikují, oni z nich mají automaticky jedničku. To se může zdát i nespravedlivé, když ale zvážíme přípravu mentorů na procvičování učiva se spolužáky v hodinách, nespravedlivé to není. Navíc, jak již bylo zmíněno výše, jsou do této role vybíráni výborní žáci – jedničkáři.

S mentory se podle potřeby setkávám, zpravidla s celou skupinou z dané třídy najednou. Délka našeho setkání je dána situací: od krátké porady o přestávce až po dvouhodinové setkání po vyučování. Setkání bývají jedenkrát, někdy i čtyřikrát za měsíc.

Ne ve všech třídách lze tuto metodu zavést. V některých třídách jsem se doposud mentory jmenovat neodvážil, zatímco v jiných třídách to byl v podstatě přirozený proces, vycházející z předchozí práce se třídou.

Z výše uvedeného je patrné, že aby tato metoda byla životaschopná, je důležité, aby učitel žáky znal.

První zkušenosti

Někteří z mentorů po prvních měsících systematické práce potvrzují, že jejich znalosti jsou díky jejich roli větší. Důvodem je to, že je jejich role baví, určitým způsobem motivuje a vede k vědomí spoluzodpovědnosti. Proto jsou ochotni věnovat předmětu více úsilí než v pozici řadových žáků. Častokrát tak doučují ostatní doma, aniž bych o tom věděl. Tyto poznatky vychází z mého pozorování, nikoliv z exaktního měření, na to teprve musí dojít. Nicméně tyto žáky učím několik let a jejich pokrok sleduji.

Mentoři si ze své činnosti odnášejí i celou řadu dalších dovedností, které s fyzikou bezprostředně nesouvisí. Schopnost mluvit před druhými a něco vysvětlovat patří jednoznačně mezi ně.

Nedávno byla na našem gymnáziu školní inspekce. Inspektorka navštívila i jednu z mých hodin. Mentory jsem nepřiznal a učil jsem jakoby nic. Když se pak v průběhu hodiny střídali u tabule žáci zvyklí mluvit před třídou, vysvětlovat a řešit úlohy, byla inspektorka nadšená. Svoji metodu jsem jí představil zpětně.

Mentorská výuka má i některé nečekané přínosy. Máme žáky, kteří se stydí zeptat, ale i většina žáků, kteří se zeptat nestydí, se po nějaké době

běžného výkladu prostě ptát přestane. Jednoduše proto, že nechtějí stále zastavovat a brzdit hodinu. Pokud je ovšem v jejich blízkosti připravený mentor, neváhají se ho ptát mnohem častěji. Učivo tak najednou zvládnou i ti, kterým běžně unikalo. Také jsem už slyšel, že od mentorů chápou spolužáci látku více než ode mne.

Existují však i jistá rizika. Stalo se, že při procvičování udělala mentorka početní chybu a její skupinka jí to vyčítala. Sledoval jsem, jak tato malá hádka dopadne – dopadla dobře, aniž bych musel zasahovat. Když udělá chybu učitel, příliš na něj negativní reakce žáků nedopadá, jinak to ale může být u mentorů.

Jak už jsem se zmínil, příprava testů pomocí mentorů mi přináší významnou úsporu času. Ten mohu věnovat zase jim. Navíc jsem zjistil, že mentoři jsou při přípravě testů a cvičebních úloh často v určitém smyslu mnohem nápaditější než já. Obdobně jako mnoho mých kolegů si i já průběžně vytvářím soubory příkladů a úloh, ty později opakovaně používám. Každý učitel se tak do jisté míry stane „kuchařem“, který má za léta praxe v rukávu sadu výborných receptů skvělých jídel (rozuměj úloh), jejichž nevýhodou ale je, že se v jídelníčku stále opakují. Mentoři prosmýšlí internet a jsou schopni najít nebo vytvořit úlohy, které bych sám nehledal.

Při distanční výuce se ukázala i další výhoda existence mentorů. Právě proto, že jejich spolužáci vědí, že jsou oficiálně ustanoveni, obrací se na ně s požadavky na procvičování učiva. Dokonce i napříč třídami! Scházejí se se svými spolužáky jak online tak naživo a před testy s nimi učivo procvičují. Zatím jsem nezachytil náznaky toho, že by se své roli zpronevěřili a otázky z testů, které spoluvytváří, prozradili. Nicméně i toto je třeba zařadit mezi možná rizika.

Je třeba se ještě krátce zmínit o do určité míry kontroverzním kroku, jímž je rozhodnutí přenést na mentory část klasifikace. Známkování spolužáků působí jako silný motivátor, díky němu berou mentoři svoji roli mnohem vážněji, pomáhá jim to přistupovat k ní zodpovědně.

Z vnějšího pozorování třídního kolektivu lze také usuzovat, že sociální pozice mentorů mezi jejich spolužáky celkově roste. Možnost, že je tu někdo, kdo je ochoten pomoci druhým, je v očích spolužáků posouvá výše. Někdy se pak na ně, jak jsem již uvedl, obracejí i spolužáci z paralelních tříd. Zdá se mi, že si jich spolužáci více cení. Opět jde jen o vnější pohled učitele, ne exaktní průzkum.

Může se také časem ukázat, že na roli mentora daný žák „nemá“, že přecenil své schopnosti nebo časové možnosti. To samo o sobě není problé-

mem, pokud to mentor sám uzná, z role prostě odstoupí. I to už se stalo. Pokud by na to ovšem z různých důvodů neměl odvahu, mohl by tento skrytý vnitřní konflikt přinést tomuto žákovi místo pozitiv naopak pocity frustrace a efekt by mohl být opačný. Tato a další rizika je třeba dále sledovat. Jak se ukázalo v některých situacích, spolužáci práci mentorů kriticky sledují a pokud se jim zdá, že mentor nedělá svou práci dobře, dají to na jevo.

Závěr a další vize

Uvedenou metodu jsem uplatnil ve školním roce 2021/2022 takto systematicky poprvé. Zatím se ji pokouším rozvinout ve třech třídách vyššího víceletého gymnázia. Zdá se, že ideální počet mentorů je asi 1 mentor na 3 až 4 žáky – záleží to na dané třídě. V menších formách jsem tuto metodu používal i dříve (již asi dva roky), ale to s jednotlivci a jen občasné a náhodně. Myslím si, že v jistém smyslu tu a tam zavede podobnou metodu pro výjimečné děti řada učitelů. Zde jde o pokus tuto metodu systematizovat a přesněji určit, jak s mentory pracovat, jak a kde je ustanovit a jak je dál vést.

Právě z důvodu, aby bylo možné tuto metodu kvalitně rozvinout a definovat jí jako přenositelný systém, stala se předmětem mé disertační práce v rámci studia na Katedře didaktiky fyziky MFF UK. V práci budu mj. zpětně hodnotit zkušenosti, vyhodnocovat přínosy a systematicky vyhodnocovat zpětnou vazbu od spolužáků ustanovených mentorů i mentorů samotných. Je třeba zjistit, zda je tento systém práce přenositelný i na jiné typy středních škol, případně na jiné učitele. Další dosud nezodpovězenou otázkou zůstává, jak na roli mentora reagují, pokud vůbec, rodiče.

V současnosti se ukazuje potřeba vytvořit další formy práce s mentory. Byl jsem osloven některými žáky s tím, že by chtěli také nějakou podobnou roli. Věřím, že by je pak předmět začal bavit, protože to vidí u mentorů. Možnost zapojit se aktivně do výuky tedy láká i méně nadané žáky, kteří tak chtějí získat pro sebe motivaci. Přestože jsou jejich výsledky nedostačující, zdá se mi být jejich odmítání plýtváním jejich možnostmi. Chtěl bych tedy nějak definovat „měkčí“ formy mentorství. Zdá se, že aktivní zapojení do výuky motivuje i některé z těch, kteří v daném předmětu neexcelují.

Závěrem bych chtěl dodat, že ačkoliv tento způsob výuky v systematické podobě teprve rozvíjím, již první výsledky ukazují na významná pozitivní a musím přiznat, že bych se ve světle významných posunů u některých žáků této metody už nevzdal.

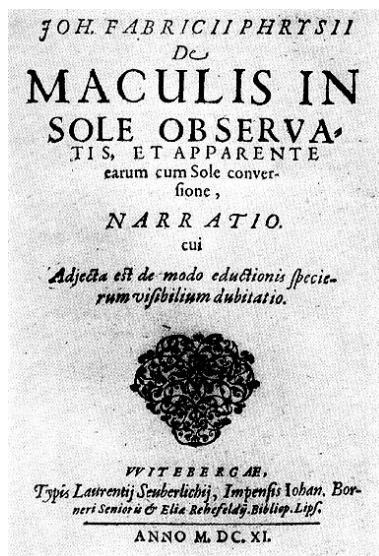
Johann Gregor Mendel

a pozorování slunečních skvrn

VLADIMÍR ŠTEFL

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

Sluneční skvrny, tmavá místa na disku Slunce pozorovala celá řada astronomů již od roku 1610. Jak dnes víme, jedná se o oblasti depresí ve fotosféře s nižší teplotou, než má jejich okolí. Jde o důsledek vyšší intenzity magnetického pole pod nimi, které brání přenosu energie z nitra k povrchu Slunce. První systematictější pozorování skvrn publikoval *Johannes Fabricius* (1587–1616) v spisu *Popis pozorovaných slunečních skvrn pohybujících se současně se Sluncem* (*De Maculis in Sole observatis, et apparente earum cum Sole conversione, Narratio, etc.* 1611) [1]. Mimo jiné se v něm zmínil o přesunu skvrn po disku Slunce. Titulní list spisu je na obr. 1.

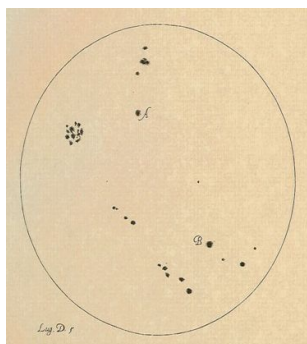


Obr. 1

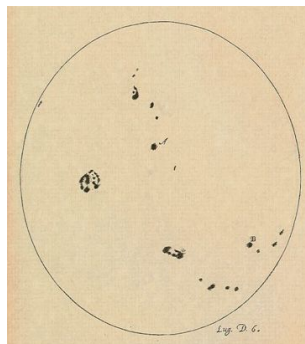
Přibližně od srpna roku 1610 pozoroval sluneční skvrny také *Galileo Galilei* (1564–1642). Zjistil jejich nepravidelný tvar, nestabilitu, změny vzhledu, pohyb ve skupinách a následný zánik. Během dalšího roku dospěl k závěru, že souvisejí s povrchem a postupují od východního okraje slunečního disku k západnímu. V roce 1612 o svém bádání napsal tři dopisy, které poslal do Augsburgu německému bankéři a mecenáši *Marku Welserovi* (1558–1614). Popsal v nich svá pozorování Slunce a úkazů na něm, včetně skvrn. Dopisy přeložené do anglického jazyka byly publikovány ve spisu [2]. Skvrny italský fyzik a astronom chápal jako tmavá oblaka v atmosféře Slunce. Jejich pohyb po disku interpretoval jako otáčení Slunce, skvrny samotné zůstávaly na svých místech povrchu. Domníval se, že všechny skvrny v jakékoliv heliografické šířce přecházejí přes sledovaný sluneční disk ve stejném čase. Ve skutečnosti Slunce nerotuje jako tuhé těleso, nýbrž doba rotace závisí na heliografické šířce, zvětšuje se od rovníku k pólům. Jedná se o tzv. *diferenciální rotaci*. Především však Galileo vyvrátil hypotézu, že skvrny představují objekty, které se nacházejí mezi Zemí a Sluncem, a potvrdil jejich souvislost s povrchem Slunce. Opíral se o skutečnost, že pohyb slunečních skvrn byl nerovnoměrný, v blízkosti okrajů Slunce pomalejší než uprostřed disku. Galileo své poznatky shrnul do spisku *Popis a důkazy slunečních skvrn (Historia e dimostrazioni intorno alle macchie solari e loro accidenti, 1613)* [3]. Polemizoval s názorem *Christophera Scheinera* (1573–1650), který se mylně domníval, že skvrny jsou planetami. Pečlivý pozorovatel Scheiner zjistil okrajové ztemnění disku Slunce či rozdílnou dobu průchodu skvrn v odlišných heliografických šířkách.

Problematiku podstaty slunečních skvrn diskutoval *Orazio Grassi* (1583–1654) ve spisu *Váha astronomická a filozofická (Libra astronomica et philosophica)* [4], v souvislosti s možnými vlastnostmi povrchu Slunce, jeho hladkostí respektive drsností. Grassi ve *Váze* polemizoval s názory Galileea, který v druhém dopisu Welserovi uvedl: „Slunce se otáčí kolem svého středu poháněno pohybem svého okolí; toto obklopující seskupení však musí být daleko lehčí než vzduch.“ Později Galileo v *Pruběři (Il Saggiatore)* [5], napsal: „Látka skvrn se nesbíhá ke Slunci, ale naopak z něj vychází.“ Popsal tamtéž metodu promítání obrazu Slunce na stínítko – papír, která se používá dodnes: „Velmi dobře to ukazuje zkušenost se zachytáváním obrazu Slunce na papír, jako když se zakreslují jeho skvrny; čím více se papír oddaluje od konce dalekohledu, tím větší kruh obtiskne kužel paprsků do papíru, a čím větší je kruh, tím méně zářivý je v porovnání se zbytkem papíru, na nějž volně dopadají paprsky Slunce.“

V *Prubíři* bylo široce diskutováno složení slunečních skvrn, italský astronom odlišil látku komet a slunečních skvrn: „Nikdy jsem netvrdil, že kometa a sluneční skvrny jsou ze stejné látky.“ K pochopení rotace Slunce vedlo sledování skvrn, o nichž Galileo uvedl: „Vidím, že skvrny se otočí zhruba za čtyři týdny.“ Odhadl tak přibližně dobu rotace, o níž dále zjistil, že probíhá ve stejném směru jako oběh planet kolem Slunce. Sklon rotační osy Slunce k ekliptice Galileo neobjevil. Na obr. 2 a 3 vedle sebe můžeme vidět Galileovy záznamy pozorování Slunce z 5. a 6. července 1612, která zachycují detaily struktury slunečních skvrn a změny jejich vzhledu v průběhu jednoho dne.



Obr. 2



Obr. 3

Při sledování Slunce od června do srpna 1612 Galileo pořídil celkem třicet osm záznamů, časy pozorování v průběhu dne neupřesnil. Byly součástí zmiňovaného druhého dopisu Welserovi, umožňovaly zkoumat úroveň sluneční aktivity. Galileova pozorování spadala do období postupného útlumu aktivity Slunce, k němuž došlo v letech 1612–1644, kdy relativní číslo slunečních skvrn postupně klesalo. Jednalo se o dobu před Maunderovým minimem v letech 1645–1715. Podrobnější analýzy Galileových záznamů pozorování slunečních skvrn s ohledem na jejich heliografickou šířku byly provedeny moderními metodami. Rozbor záznamů a odtud zjištěný pohyb skvrn po slunečním disku v roce 1612 umožnil dodatečně stanovit rychlost rotace Slunce, její velikost vyjádřenou pootočením za jeden den a ověřit shodnost údajů s jinými prameny ze 17. století.

Přejdeme k hlavní postavě našeho článku, kterou je *Johann Gregor Mendel* (1822–1884), jehož dvoustleté výročí narození si připomínáme. Vedle genetiky se zabýval především meteorologií. V posledním období

svého života od roku 1878 také astronomií. Studoval astronomické knihy, zakoupil si dalekohled a za použití projekčního stínítka v průběhu roku 1882 pozoroval sluneční skvrny. Dalekohled tehdy nové konstrukce mimo-osého zrcadlového systému brachy¹⁾ mu opatřil *Gustav von Niessl* (1839–1919). Měl hlavní parabolické zrcadlo o průměru 112 mm, ohnisko 1 360 mm a vedlejší hyperbolické zrcátko o průměru 48 mm. Hlavní a vedlejší zrcadlo jsou vzájemně nakloněny (obr 4).

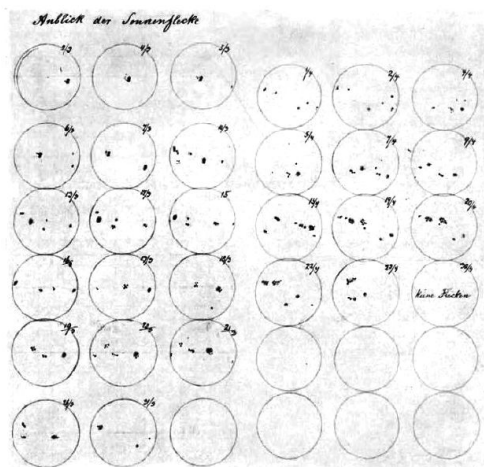


Obr. 4

Jeden z jeho zachovaných záznamů z první poloviny roku 1882, reprodukováný ve spisu [6], je na obr. 5. Při příznivých pozorovacích podmínkách v období března a dubna zachytil na obrázcích polohy slunečních skvrn a skupin. Například v březnu provedl sedmnáct pozorování, záznamy tak ukázaly téměř denní změny skvrn a vývoj skupin na slunečním disku, který měl v originále nakreslený průměr 30 mm. Jejich další zpracování, například výpočet sluneční aktivity zřejmě Mendel neprovedl. Rok 1882 byl obdobím, kdy sluneční aktivita narůstala k maximu, které nastalo v prosinci 1883. Tehdy již bylo známo Curyšské relativní číslo slunečních skvrn $R = k(10g + f)$, kde k označuje korekční člen, g počet skupin a f počet skvrn. Bylo zavedeno *Johannem Rudolfem Wolfem* (1816–1893) v polovině

¹⁾Tzv. brachyteleskop, z řec. brachys – krátký.

19. století. Wolf ze starých kronik našel korelaci výskytu polárních září s obdobím maxima slunečních skvrn. Desetiletou periodu ve výskytu slunečních skvrn objevil v roce 1843 *Samuel Heinrich Schwabe* (1789–1875).



Obr. 5

V Mendelově době, v druhé polovině 19. století existovaly dvě základní hypotézy původu slunečních skvrn. Především to byla teorie *Angela Secchiho* (1818–1878) o tom, že erupce procházejí neustále fotosférou a strhávají z nižších vrstev páry kovů, jenže se výrazně ochlazují a padají do fotosféry. Vytvářejí v ní prohlubně naplněné hmotou, která méně září a pohlcuje světlo. Prohlubně měly představovat sluneční skvrny. Podrobně vše Secchi rozvedl v roce 1877 ve spisu *Slunce (Le Soleil)* [7]. Druhou hypotézu formuloval v roce 1887 *Herve Faye* (1814–1902) ve spisu *Vznik světa (Sur l'origine du monde)* [8]. Vycházel z principu vzniku vírů uvnitř fotosféry, spojených s různými rychlostmi v důsledku diferenciální rotace Slunce.

V [8] Faye uvedl: „Protože v jeho rovnoběžných vrstvách existuje nerovnost rychlostí, proto zde musí také vznikat velké a malé víry. Ty malé jsou póry velké sluneční skvrny.“ Předpokládal analogii s víry cyklonů v zemské atmosféře. Vírová hypotéza neodpovídala pozorováním tvaru skvrn a jejich době života. Pokud by skvrny představovaly víry, potom by paprsky tvořící polostín měly být zakřivené, což však nebylo pozorováno. Rovněž různost rychlostí dvou bodů v blízkosti povrchu fotosféry by měly být velmi malé, téměř nezatelné, aby existovaly podmínky pro vznik víru.

V poslední třetině 19. století začala být rovněž studována spektra slunečních skvrn, která byla odlišná od obvyklého běžného spektra Slunce. Některé čáry Fraunhoferova spektra Slunce zmizely, naopak se objevily nové, např. Fe, Ti, Ni, Co. Rovněž se změnila intenzita čar. Celková četnost absorpčních čar ve spektru ukazovala na zesílení absorpce.

Vraťme se k Mendelovi, který zkoumal možnou hypotézu souvislosti vlivu slunečních skvrn na místní počasí. Na podzim roku 1882 byly pozorovány rozsáhlé polární záře v Evropě a Severní Americe. Podobně jako i jiní v té době Mendel zkoušel spojovat četnost slunečních skvrn s polárními zářemi, zemským magnetismem a místním počasím. Lze ho tak považovat za jednoho z průkopníků oboru kosmické počasí. Později *Kristian Birke-land* (1867–1917) na vyšší odborné úrovni, s modernějšími metodami sledoval souvislost polárních září, geomagnetických bouří a slunečních skvrn. Mimo jiné předpověděl roku 1916 existenci slunečního větru. Výše uvedené první kroky charakterizovaly přechod k nové disciplíně – *kosmickému počasí*, které se definitivně konstitovalo koncem 20. století.

Astronomická Mendelova činnost byla oceněna Mezinárodní astronomickou unií (IAU) pojmenováním kráteru o průměru 138 km na odvrácené straně Měsíce, jakož i planetky č. 3313 jeho jménem.

Literatura

- [1] *Fabricius, J.*: De Maculis in Sole observatis, et apparente earum cum Sole, conversione, Narratio, etc. Witebergae, 1611.
- [2] *Galilei, G., Scheiner, Ch.*: On Sunspots. Překlad do anglického jazyka a úvodní komentáře Reeves, E. van Helden, A. The University of Chicago Press, Chicago 2010.
- [3] *Galilei, G.*: Istoria e dimostrazioni intorno alle macchie solari e loro accidenti. Roma, 1613.
- [4] *Grassi, O.*: Libra astronomica et philosophica. Perusiae 1619. Překlad do českého jazyka a úvodní komentáře Ledvoňová, M., Malá, J., Štefl, V., Špelda, D. Togga, Praha, 2020.
- [5] *Galilei, G.*: Il Saggiatore. Roma 1623. Překlad do českého jazyka a úvodní komentáře Ledvoňová, M., Malá, J., Štefl, V., Špelda, D. Togga, Praha, 2020.
- [6] *Ittis, H.*: Gregor Johann Mendel. Leben, Werk und Wirkung. Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1924.
- [7] *Sacchi, A.*: Le Soleil. Paris, 1877.
- [8] *Faye, H.*: Sur l'origine du monde. Paris, 1884.

Veletrh dortů (Úlohy z MO kategorie P, 44. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V Matematické olympiádě kategorie P (programování) se setkáváme s mnoha velmi zajímavými úlohami. Některé z nich jsou snadné, jiné naopak značně náročné. V dnešním pokračování dlouhodobého seriálu věnovaného vybraným problémům z MO kategorie P (programování) si ukážeme jednu z těch velmi snadných. Jedná se o teoretickou úlohu z domácího kola nedávno skončeného 70. ročníku MO (školní rok 2020/21). Patří do kategorie často zadávaných úloh typu „práce s posloupnostmi čísel“. Úlohám tohoto typu jsme se věnovali již několikrát, obvykle jsme ale k optimálnímu vyřešení problému potřebovali použít nějakou netriviální programátorskou techniku typu dynamického programování nebo třeba předvýpočet prefixových součtů posloupnosti. Jak sami uvidíte, v optimálním řešení dnešní úlohy nic takového potřebovat nebudeme, vystačíme jenom s jednoduchou logickou úvahou. Ukážeme si ovšem, že i takto jednoduchý problém lze řešit různými způsoby a s různou časovou složitostí.

Nejprve se jako obvykle seznámíme s přesným zadáním úlohy. Některé jeho formulace jsme pro potřeby článku maličko upravili.

* * * * *

Radek se letos jako každý rok vypravil na veletrh dortů. Ten tvoří řada n stánků očíslovaných od 1 do n . Pravý důvod Radkovy přítomnosti je, že za malý poplatek a_i Kč může Radek v i -tém stánku ochutnat představovaný dort. Radek by samozřejmě rád ochutnal co nejvíce dortů, jenže má to dva háčky. Za prvé, Radek disponuje pouze omezenou částkou k Kč. Za druhé moc dobře ví, že jakmile poprvé ochutná dort v nějakém stánku i ,

nedá mu to a ochutná poté dort ve vedlejším stánku $i + 1$, následně ve stánku $i + 2$ a tak dále, než mu dojdou peníze nebo než dojde na konec řady (tehdy skončí, i kdyby mu ještě peníze zbývaly). Ve kterém stánku má Radek začít, aby ochutnal co nejvíce dortů?

Soutěžní úloha

Je zadána posloupnost n kladných celých čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$, kde a_i je cena i -tého dortu, a kladné celé číslo k , tedy počet korun, které má Radek k dispozici. Zjistěte, kolik nejvíce dortů může Radek sníst a u kterého stánku má začít, aby toho dosáhl. Vaším úkolem je vypsát dvě čísla d a p taková, že platí následující podmínky:

1. $1 \leq d \leq n$ a $1 \leq p \leq n - d + 1$.
2. $a_p + a_{p+1} + \dots + a_{p+d-1} \leq k$, tedy lze ochutnat d dortů, začne-li Radek na pozici p .
3. pro všechna $1 \leq q \leq n - d$ platí $a_q + a_{q+1} + \dots + a_{q+d} > k$, tedy více než d dortů ochutnat nelze.

Pokud existuje více vyhovujících pozic p , můžete vypsát kteroukoliv z nich.

Formát vstupu

První řádek obsahuje dvě kladná celá čísla n a k . Druhý řádek obsahuje n kladných celých čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Formát výstupu

Výstup je tvořen dvěma čísly d a p , kde d je největší počet dortů, které Radek může ochutnat, a p je číslo stánku, u něhož má začít, aby d dortů snědl.

Příklady

Vstup:	Výstup:
7 6	3 2
2 1 2 3 2 2 1	

Radek může ochutnat tři dorty, pokud začne ochutnávkou druhého dortu: za dorty zaplatí $1 + 2 + 3 = 6$ Kč. Jiné správné řešení by bylo začít na první nebo páté pozici.

Vstup:	Výstup:
3 10	0 1
100 100 100	

V tomto případě nemůže Radek ochutnat ani jeden dort, jeho prázdná řada dortů pak může začínat na pozici 1, 2, nebo 3.

Bodování

Plných 10 bodů získá řešení s optimální časovou složitostí.

Za řešení, které na běžném počítači vyřeší úlohu pro $n = 10^6$ během několika sekund, dostanete až 7 bodů.

Za řešení dostatečně efektivní pro $n = 5000$ dostanete až 4 body.

Za jakékoliv funkční řešení dostanete až 2 body.

* * * * *

Zadání soutěžních úloh MO kategorie P bývá obvykle zabalené do nějaké „pohádky“, jejímž cílem je buď ukázat praktickou využitelnost řešeného problému, nebo jenom jednoduše řešitele trochu pobavit. V tomto konkrétním případě se zjevně jedná o ten druhý případ. Podobnou formu ovšem mají i úlohy zadávané na mezinárodních olympiádách středoškoláků v informatice a dokonce i na obdobných soutěžích univerzitních, takže pro naše soutěžící je to i užitečná příprava na to, co je čeká v případě postupu do mezinárodních soutěží. Řešení každé úlohy proto začíná tím, že soutěžící musí pozorně přečíst celý text zadání, oddělit z něj to nepodstatné a z dlouhého „pohádkového“ povídání vyloupnout jádro řešeného problému. Úlohu je pak zpravidla možné přetransformovat do mnohem kratší podoby a tu vyjádřit strohou matematickou formulací. Náš dnešní problém takto můžeme shrnout jedinou větou: v zadané posloupnosti n kladných celých čísel nalezněte nejdelší souvislý úsek se součtem rovným nejvýše k .

Úloha má primitivní řešení spočívající v postupném otestování všech souvislých úseků dané posloupnosti. Přitom si průběžně pamatujeme nejdelší úsek, jehož součet nepřesáhl k ; ukládáme si jeho délku d a počáteční index p . V posloupnosti délky n existuje $O(n^2)$ souvislých úseků, neboť n způsoby můžeme zvolit začátek úseku i a pro každou volbu začátku můžeme $O(n)$ způsoby zvolit koncový index úseku j . Projít úsek $a_i, \dots, a_j$ a spočítat jeho součet představuje práci $O(n)$, takže celková časová složitost tohoto triviálního algoritmu je $O(n^3)$. Popsaný algoritmus vede ke správnému výsledku, ale je velmi neefektivní, takže v soutěži za něj bylo možné získat pouze 2 body z celkových 10 možných.

Naprogramovat uvedený postup je snadné. V Pythonu a také třeba ve všech programovacích jazycích z rodiny C se všechna pole a seznamy indexují od 0, zatímco v naší úloze jsou stánky na veletrhu označeny pořadovými čísly počínaje od 1. Tento drobný nesoulad vyřešíme v programu nejsnáze tím, že na začátek seznamu a s načtenými vstupními daty přidáme jeden fiktivní prvek, který tak dostane index 0 a s nímž poté v programu

už nebudeme vůbec pracovat.

```
n, k = map(int, input().split())
a = [None] + list(map(int, input().split()))

d, p = 0, 0
for i in range(1, n+1):
    for j in range(i, n+1):
        if j - i + 1 > d and sum(a[i:j+1]) <= k:
            d = j - i + 1
            p = i

print(d, p)
```

Výpočet můžeme značně urychlit lepší organizací práce. V předchozím řešení jsme počítali součet každého souvislého úseku zvlášť. Známe-li ovšem součet nějakého úseku $a_i, \dots, a_j$ a chceme určit součet úseku o jeden prvek delšího $a_i, \dots, a_{j+1}$, je zbytečné procházet tento nový úsek celý od začátku. Jednodušší a rychlejší je využít předchozí známou hodnotu součtu a pouze ji v konstantním čase upravit přičtením posledního prvku a_{j+1} . V programu tedy budeme postupně n způsoby volit začátek úseku i a pro každou volbu začátku zvolíme $O(n)$ způsoby konec úseku j . Součet prvků v úseku $a_i, \dots, a_j$ počítáme průběžně vždy s využitím známého součtu předchozího úseku, tedy v konstantním čase. Celková časová složitost takto upraveného algoritmu se tím sníží na $O(n^2)$. Za takového řešení s kvadratickou časovou složitostí mohli řešitelé olympiády dostat nejvýše 4 body.

```
n, k = map(int, input().split())
a = [None] + list(map(int, input().split()))

d, p = 0, 0
for i in range(1, n+1):
    soucet = 0
    for j in range(i, n+1):
        soucet += a[j]
        if j - i + 1 > d and soucet <= k:
            d = j - i + 1
            p = i
        if soucet > k:
            break

print(d, p)
```

Při řešení různých úloh na zpracování posloupnosti čísel lze často úspěšně využít techniku tzv. prefixových součtů. Zamysleme se, zda by nám něco

přinesla i v případě této úlohy. Řešení zahájíme předvýpočtem, při kterém si postupně pro každý koncový index j určíme součet prvních j členů posloupnosti, tzn. hodnotu $s_j = a_1 + a_2 + \dots + a_j$. Všechny tyto součty lze postupně vypočítat v lineárním čase. Nejprve položíme $s_0 = 0$ a dále pak když už známe hodnotu s_i , snadno z ní spočítáme v konstantním čase hodnotu s_{i+1} . Po ukončení předvýpočtu můžeme přikročit k vlastnímu řešení úlohy. Tak jako v našem prvním řešení budeme postupně zkoumat všechny souvislé úseky zadané posloupnosti. Pro každou volbu počátečního indexu i a koncového indexu j nyní dokážeme určit součet tohoto úseku v konstantním čase jako $s_j - s_{i-1}$. Časová složitost předvýpočtu je $O(n)$, časová složitost následného vlastního výpočtu je určena počtem souvislých úseků, což je $O(n^2)$. Celý algoritmus využívající prefixových součtů má tedy stejnou časovou složitost $O(n^2)$ jako naše předchozí řešení.

```
n, k = map(int, input().split())
a = [None] + list(map(int, input().split()))

s = [0] * (n+1)
for i in range(1, n+1):
    s[i] = s[i-1] + a[i]

d, p = 0, 0
for i in range(1, n+1):
    for j in range(i, n+1):
        if j - i + 1 > d and s[j] - s[i-1] <= k:
            d = j - i + 1
            p = i

print(d, p)
```

Zatím se zdá, že nám použití prefixových součtů nepřineslo nic nového. Již přece víme, že k vyřešení úlohy s kvadratickou časovou složitostí prefixové součty vůbec nepotřebujeme. Popsané řešení s prefixovými součty ale dokážeme ještě vylepšit pomocí binárního vyhledávání a dosáhneme tak podstatně lepší časové složitosti $O(n \log n)$. Za takové řešení se již v soutěži udělovalo až 7 bodů.

Nejprve si opět v čase $O(n)$ spočítáme prefixové součty zadané posloupnosti. Dále budeme procházet všechny počáteční indexy i a pro každý z nich nás zajímá, kterým indexem j bude končit co nejdelší souvislý úsek se součtem nepřevyšujícím hodnotu k . Již z minulého řešení víme, že tento úsek má součet rovný $s_j - s_{i-1}$. Všechny prvky zadané posloupnosti jsou kladná čísla, takže posloupnost jejich prefixových součtů je rostoucí. Ke zvolenému indexu i chceme tedy nalézt co největší j takové, aby platilo

$s_j - s_{i-1} \leq k$. K určení takového indexu j můžeme použít binární vyhledávání (metodu půlení intervalů), které má logaritmickou časovou složitost vzhledem k délce prohledávaného intervalu. Tímto intervalem, v němž hledáme index j , je rozmezí od i do n , takže časová složitost našeho binárního vyhledávání je $O(\log n)$. Binární vyhledávání indexu j provádíme zvlášť pro každou volbu počátečního indexu i , celková časová složitost tohoto algoritmu je proto skutečně $O(n \log n)$.

```
n, k = map(int, input().split())
a = [None] + list(map(int, input().split()))
```

```
s = [0] * (n+1)
for i in range(1, n+1):
    s[i] = s[i-1] + a[i]
```

```
d, p = 0, 0
for i in range(1, n+1):
    levy, pravy = i, n
    while levy <= pravy:
        j = (levy + pravy) // 2
        if s[j] - s[i-1] == k:
            break
        if s[j] - s[i-1] < k:
            levy = j+1
        else:
            pravy = j-1
    if levy > pravy:
        j = pravy
    if j - i + 1 > d:
        d = j - i + 1
        p = i
```

```
print(d, p)
```

Toto ale stále ještě není nejlepší možné řešení, naši úlohu lze řešit dokonce s lineární časovou složitostí vzhledem k délce zadané posloupnosti. Řešení s časovou složitostí $O(n)$ již bude jistě časově optimální, neboť k nalezení správného výsledku jistě musíme zadanou posloupnost délky n celou projít.

Řešení s lineární časovou složitostí nepoužívá předvýpočet prefixových součtů, jako tomu bylo v předchozích uvedených řešeních. Algoritmus je založen na technice dvou postupujících ukazatelů, která se často využívá v podobných úlohách s posloupnostmi kladných čísel. Využijeme skutečnosti, že jestliže nejdelší souvislý úsek se součtem nejvýše k začínající v posloupnosti na indexu i končí na indexu j , potom nejdelší souvislý úsek

se součtem nejvýše k začínající na indexu $i + 1$ musí končit buď také na indexu j , nebo na nějakém indexu vyšším než j .

Během výpočtu si budeme udržovat dvě proměnné i , j a součet všech prvků zadané posloupnosti s indexy z rozmezí od i do j (včetně obou krajních mezí), který označíme *soucet*. Proměnné i , j v každém okamžiku vymezují právě zkoumaný úsek posloupnosti. Na začátku výpočtu bude $i = 1$, $j = 1$ a v průběhu algoritmu budou obě tyto proměnné pouze růst. Pro každou hodnotu proměnné i budeme postupně zvyšovat j a současně přepočítávat hodnotu *soucet* tak dlouho, dokud $j \leq n$ a zároveň *soucet* $\leq k$. Tím najdeme nejdelší souvislý úsek se součtem nejvýše k začínající na indexu i . Jeho délku si zaznamenanáme a pokud jsme s j došli až na konec posloupnosti, výpočet ukončíme. V opačném případě proměnnou i zvýšíme o 1, čímž se patřičně sníží součet úseku uložený v proměnné *soucet*. Proměnnou j přitom ponecháme na poslední hodnotě z předchozího kroku výpočtu a popsáný výpočet zopakujeme pro novou hodnotu i . Výsledkem je nejdelší ze zaznamenaných délek.

```
n, k = map(int, input().split())
a = [None] + list(map(int, input().split())) + [0]
```

```
d, p = 0, 0
i, j, soucet = 1, 1, a[1]
while j <= n:
    if soucet <= k:
        if j - i + 1 > d:
            d = j - i + 1
            p = i
        j += 1
        soucet += a[j]
    else: #soucet > k
        soucet -= a[i]
        i += 1
```

```
print(d, p)
```

Uvedený algoritmus pro každé i najde největší možné j takové, aby součet úseku posloupnosti uložený v proměnné *soucet* nepřevýšil hodnotu k . Nakonec proto správně určí délku nejdelšího souvislého úseku posloupnosti se součtem nejvýše k . Časová složitost popsaneého algoritmu je skutečně $O(n)$, neboť v každém kroku výpočtu buď zvýšíme hodnotu i , nebo hodnotu j ; obě tyto proměnné jsou však na začátku rovny 1 a nikdy nepřesáhnou hodnotu n .

Počítačová grafika, 3. díl

EDUARD BARTL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Třetí díl série věnované počítačové grafice přímo navazuje na díl druhý. Zabývat se totiž budeme dalšími úpravami digitálního obrazu. Ukážeme si, jak změnit světlost a kontrast, podrobně se pobavíme o požití histogramu při úpravě obrazu.

V celém tomto dílu budeme pracovat s šedotónovým obrázkem s barevnou hloubkou k . Pixely tohoto obrázku tedy mohou nabývat celkem $K = 2^k$ různých hodnot (stupňů šedi). Dále budeme předpokládat, že má tento obrázek rozměry $m \times n$ pixelů. Hodnoty pixelů jsou popsány obrazovou funkcí $o: \{0, 1, \dots, m-1\} \times \{0, 1, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, 1, \dots, K-1\}$.

1. Úprava kontrastu

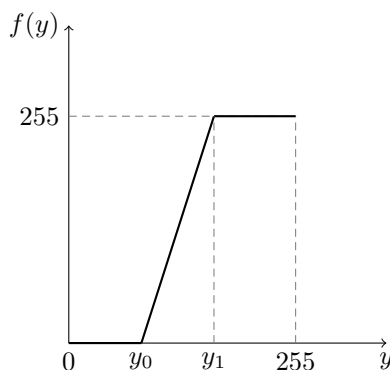
Ze zkušenosti víme, jak dopadne fotografie pořízená proti silnému světelnému zdroji – téměř každý pixel bude buď velmi světlý nebo velmi tmavý; jinými slovy, obrázek bude příliš *kontrastní*. Bude-li naopak snímek pořízen za nedostatečného osvětlení, bude působit šedivě, protože v něm budou chybět velmi tmavé a velmi světlé stupně šedi. Takový snímek bude nekontrastní. Typickou úpravou digitálního obrazu v prostorové doméně je tedy zvětšení nebo zmenšení kontrastu. Provádět ji budeme, stejně jako v případě prahování, aplikací vhodné zvolené funkce f na všechny pixely vstupního šedotónového obrázku.

Nejprve se věnujme zvětšení kontrastu. Jak jsme již řekli, v nekontrastním obrázku absentují velmi tmavé a velmi světlé stupně šedi. Lapidárně řečeno, nejtmavější stupně přítomné v obrázku jsou příliš světlé a naopak nejsvětlejší stupně jsou příliš tmavé.

Tento problém je řešitelný tak, že nejtmavější stupně ještě více ztmavíme a nejsvětlejší stupně ještě více zesvětlíme. Stupně šedi, které se nacházejí uprostřed, by neměly být naší úpravou výrazně dotčeny. Ze slovního popisu by mohlo být zřejmé, jak bude funkce f definována:

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y < y_0; \\ 255 \cdot \frac{y-y_0}{y_1-y_0} & \text{pro } y_0 \leq y \leq y_1; \\ 255 & \text{pro } y > y_1, \end{cases}$$

kde y_0 a y_1 jsou předem dané hodnoty stupňů šedi. Graf této funkce je ukázán na obr. 1. Jako obvykle je kvůli přehlednosti graf funkce f zakreslen pomocí spojité čáry, přestože je ve skutečnosti tvořen izolovanými body.



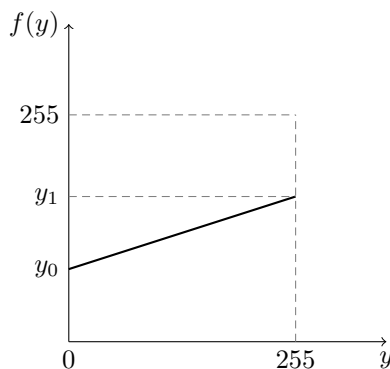
Obr. 1 Graf funkce realizující zvětšení kontrastu

Volba hodnot y_0 a y_1 se určuje právě podle hodnoty nejtmavějšího a nejsvětějšího stupně šedi přítomného ve vstupním obrázku. Je velmi jednoduché je určit z *histogramu*, o kterém se budeme bavit v jedné z následujících sekcí.

Funkce f realizující zmenšení kontrastu může být definována například takto:

$$f(y) = \frac{y_1 - y_0}{255} \cdot y + y_0.$$

Graf této funkce je ukázán na obr. 2.



Obr. 2 Graf funkce realizující zmenšení kontrastu obrázku

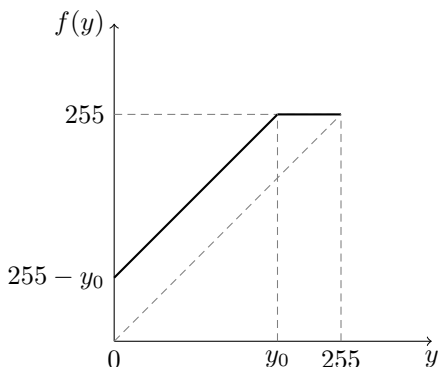
2. Úprava světlosti

Při fotografování se často dostáváme do situace, kdy je získaný snímek příliš světlý nebo naopak tmavý. Úprava světlosti se dá taktéž řešit volbou vhodné funkce f . Hodnoty pixelů vstupního obrázku pouze zvýšíme nebo naopak snížíme o konstantní hodnotu, která určuje míru zesvětlení nebo ztmavení.

Funkce f realizující zesvětlení obrázku je skutečně velmi jednoduchá:

$$f(y) = \begin{cases} 255 - y_0 + y & \text{pro } y < y_0; \\ 255 & \text{pro } y \geq y_0, \end{cases}$$

kde y_0 je parametr určující, jak moc bude obrázek zesvětlen. Hodnotu parametru y_0 můžeme nastavit na libovolné číslo z množiny $\{0, 1, \dots, 255\}$ – čím menší číslo, tím více bude obrázek zesvětlen. Je celkem jasné, že pro nastavení $y_0 = 255$ získáme funkci $f(y) = y$, která hodnotu libovolného pixelu zobrazí na sebe samu – obrázek tedy zůstane nezměněn. Pokud však parametr y_0 snížíme, obrázek se stane světlejším. Je však nutné si uvědomit, že každý pixel mající hodnotu alespoň y_0 se aplikováním funkce f stane zcela bílým. Všechny tyto pixely tedy splynou – použitím funkce f pro $y_0 < 255$ tedy může dojít ke ztrátě informace obsažené v obrázku. Graf funkce realizující zesvětlení vznikne posunutím grafu funkce $f(y) = y$ po svislé ose o hodnotu $255 - y_0$. Tento graf je ukázán na obr. 3.



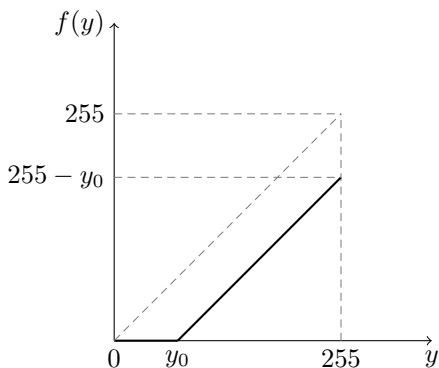
Obr. 3 Graf funkce realizující zesvětlení obrázku

Funkce f realizující ztmavení obrázku je velmi podobná, vše se však odehrává naopak – místo zvětšování hodnot pixelů dochází k jejich zmen-

šování:

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } y < y_0; \\ y - y_0 & \text{pro } y \geq y_0. \end{cases}$$

Graf této funkce je ukázán na obr. 4.



Obr. 4 Graf funkce realizující ztmavení obrázku

3. Histogram

Histogram je jednoduchým statistickým nástrojem používaným pro popis rozložení číselných dat. Významné použití nachází také v počítačové grafice, zejména v analýze digitálních obrazů. Histogram popisuje četnosti barev zastoupených v obrázku. Omezíme-li se na šedotónové obrázky, pak můžeme říci, že histogram popisuje četnosti jednotlivých stupňů šedi přítomných v daném obrázku.

Histogram h takového obrázku tedy můžeme definovat jako zobrazení $h: \{0, 1, \dots, K-1\} \rightarrow \mathbb{N}$ přiřazující stupni šedi $a \in \{0, 1, \dots, K-1\}$ počet pixelů, které mají hodnotu a . Matematicky zapsáno,

$$h(a) = \text{card}(\{\langle x, y \rangle \mid o(x, y) = a\}),$$

kde $\text{card}(\dots)$ označuje počet prvků množiny uvedené na místě tří teček. Pro histogram h libovolného šedotónového obrázku zjevně platí

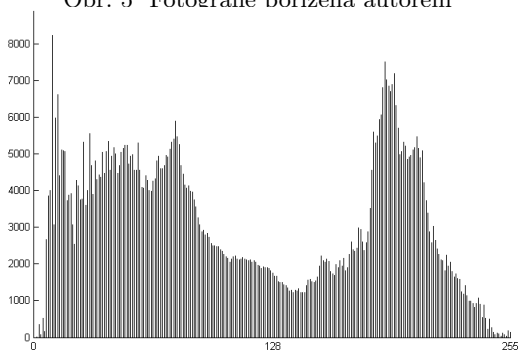
$$\sum_{a=0}^{K-1} h(a) = m \cdot n.$$

Jinými slovy, počet pixelů, které mají některou z hodnot $\{0, 1, \dots, K-1\}$ je roven počtu všech pixelů daného obrázku.

Na obr. 5 je znázorněna šedotónová fotografie s 8 bitovou barevnou hloubkou, počet stupňů šedi je tedy $K = 2^8 = 256$. Histogram této fotografie je ukázán na obr. 6. Vidíme, že je znázorněn pomocí sloupcového grafu; výška sloupečku, který je na vodorovné ose umístěný na pozici a , říká, kolik pixelů má v daném obrázku hodnotu a .



Obr. 5 Fotografie pořízená autorem



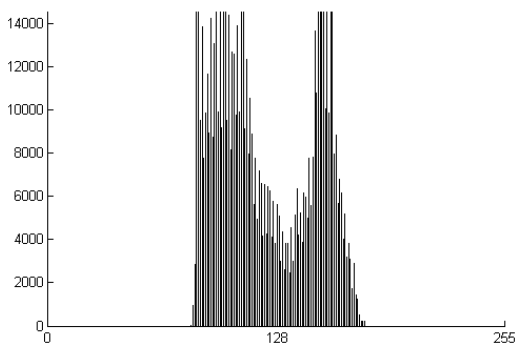
Obr. 6 Histogram obr. 5

Z histogramu můžeme ledacos vyčíst o příslušném obrázku. Například z uvedeného histogramu je dobře vidět, že velké množství pixelů je hodně tmavých (jejich hodnoty se blíží 0) nebo naopak hodně světlých (jejich hodnoty se blíží 255). Oproti tomu poměrně malé množství pixelů má hodnotu uprostřed šedotónové škály (tedy kolem hodnoty 128). Podle toho, jak vypadá tento histogram proto můžeme usoudit, že jemu příslušná fotografie je hodně kontrastní.

Pokud se naopak podíváme na histogram na obr. 8, můžeme okamžitě usoudit, že je jemu příslušný digitální obrázek velmi nekонтрастní. Z tohoto histogramu je totiž patrné, že tmavé (téměř černé) a světlé (téměř bílé) pixely nejsou v obrázku vůbec zastoupeny. Obrázek bude patrně působit jako kdyby byl zahalen v mlze. Skutečně tomu tak je, jak se můžeme přesvědčit z obr. 7.



Obr. 7 Fotografie pořízená autorem



Obr. 8 Histogram šedotónového obrázku

Je důležité si uvědomit, že histogram nic neříká o umístění pixelů v daném obrázku – nese pouze kvantitativní informaci o jednotlivých stupních šedi. Je proto snadné najít několik obrázků se stejným histogramem; stačí pouze změnit umístění některých pixelů, aniž bychom měnili hodnoty těchto pixelů.

Zamysleme se nyní nad otázkou, jakým způsobem histogram vypočítat. Je to jednoduché. Stačí pouze projít každý pixel obrázku,¹⁾ pokud hodnota daného pixelu bude rovna a , pak v histogramu zvětšíme o jedna výšku sloupečku, který je umístěný na vodorovné ose na pozici a . Výpočet histogramu je popsán algoritmem 1.

Algoritmus 1 Výpočet histogramu

Vstup: šedotónový obrázek o rozměrech $m \times n$ určený obrazovou funkcí o

Výstup: histogram h

```

for  $y = 0, 1, \dots, n - 1$  do
  for  $x = 0, 1, \dots, m - 1$  do
     $a = o(x, y)$ 
     $h(a) = h(a) + 1$ 
  end for
end for

```

Rychlost algoritmu 1 závisí především na počtu pixelů vstupního obrázku. Vzhledem k tomu, že je nutné projít všechny pixely, není možné najít jiný algoritmus pro výpočet histogramu, který by byl výrazným způsobem rychlejší.

4. Binning histogram

Pro obrázky s barevnou hloubkou výrazně větší než je 8 bitů se zpravidla používají takzvané *binning histogramy*.²⁾ Myšlenka je snadná: celou škálu stupňů šedi rovnoměrně rozdělíme do přihrádek, stupně patřící do jedné přihrádky pak reprezentujeme v binning histogramu jediným sloupečkem.

Předpokládejme tedy, že je celá škála stupňů šedi obsahujících K hodnot rovnoměrně rozdělena hodnotami $a_0, a_1, \dots, a_{B-1}$. Celkem tedy máme B přihrádek, i -tá přihrádka je ohraničena hodnotami a_i a a_{i+1} . Binning histogram h pak můžeme definovat jako zobrazení

$$h: \{0, 1, \dots, B - 1\} \rightarrow \mathbb{N},$$

¹⁾Často se pixely procházejí po jednotlivých řádcích, počínaje řádkem, který je zcela nahoře. Na způsobu průchodu však v tomto případě nezáleží, důležité je pouze projít je všechny.

²⁾Tento název je odvozen z anglického slova *bin*, což znamená *popelnice*. V tomto případě však budeme toto slovo překládat jako *přihrádka*.

které přiřazuje indexu i přihrádky počet pixelů, které mají hodnotu ležící v této přihrádce. Matematicky to můžeme vyjádřit následovně:

$$h(i) = \text{card}\{(x, y) \mid a_i \leq o(x, y) < a_{i+1}\},$$

kde $i \in \{0, 1, \dots, B-1\}$. Algoritmus 2 ukazuje, jak binning histogram vypočítat. Můžeme si všimnout, že je tento algoritmus velmi podobný algoritmu 1, pouze se v něm navíc řeší příslušnost stupně šedi do příslušné přihrádky. Funkce floor použitá v tomto algoritmu ořezává desetinnou část daného čísla.

Algoritmus 2 Výpočet binning histogramu

Vstup: šedotónový obrázek o rozměrech $m \times n$ určený obrazovou funkcí o ; počet přihrádek B

Výstup: binning histogram h

```

for  $y = 0, 1, \dots, n-1$  do
  for  $x = 0, 1, \dots, m-1$  do
     $a = o(x, y)$ 
     $i = \text{floor}(a \cdot \frac{B}{K})$ 
     $H(i) = H(i) + 1$ 
  end for
end for

```

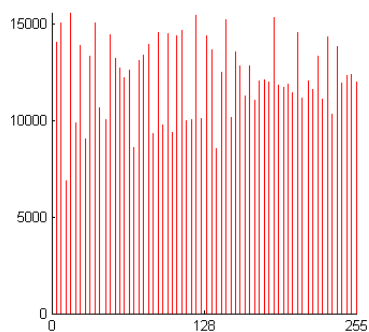
5. Histogram barevných obrázků

Zastavme se krátce u výpočtu histogramů barevných obrázků. K tomuto výpočtu je možné přistoupit velmi jednoduše. Barevný obrázek rozložíme na jednotlivé barevné složky. Získáme tak tři obrázky stejných rozměrů jako byl původní barevný obrázek – první z nich (v případě použití modelu RGB) nese informaci o zastoupení červené barvy, druhý z nich nese informaci o zastoupení zelené barvy a poslední z nich informaci o zastoupení modré barvy. Na každý z těchto obrázků tak můžeme v principu nahlížet jako na šedotónový obrázek (hodnota každého pixelu je jednotlivé číslo, nikoliv trojice, jak tomu bylo v případě barevného obrázku).

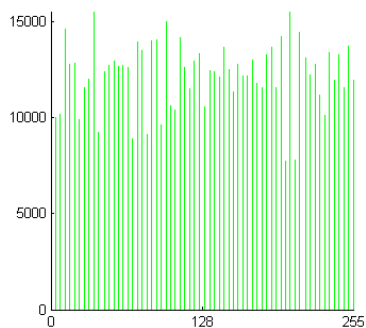
Pomocí algoritmu 1 nebo algoritmu 2 pak vypočteme pro každou barevnou složku samostatný histogram. Tyto histogramy si v souladu s označením jednotlivých barevných složek pojmenujeme jako h_R , h_G a h_B . Na histogram původního barevného obrázku **9** pak nahlížíme jako na trojici histogramů $\langle h_R, h_G, h_B \rangle$. Například pro barevný obr. **9** tak dostaneme histogramy znázorněné na obr. **10**, **11** a **12**.



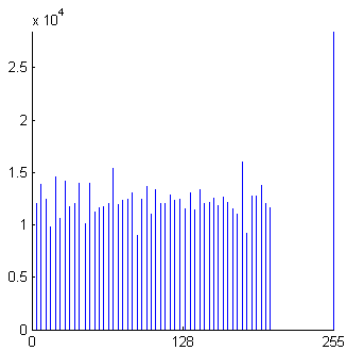
Obr. 9 Fotografie pořízená autorem



Obr. 10 Červená složka barevného obr. 9 a její histogram h_R



Obr. 11 Zelená složka barevného obr. 9 a její histogram h_G



Obr. 12 Modrá složka barevného obr. 9 a její histogram h_B

Právě uvedený přístup k reprezentaci histogramů má však jednu poměrně podstatnou nevýhodu. Předpokládejme, že o jistém barevném obrázku známe tyto hodnoty histogramů:

$$h_R(100) = 250,$$

$$h_G(100) = 250,$$

$$h_B(100) = 250.$$

Kolikrát je v daném obrázku zastoupená barva, která má v RGB krychli souřadnice $\langle 100, 100, 100 \rangle$? Je důležité si uvědomit, že barva $\langle 100, 100, 100 \rangle$ se v obrázku vyskytuje *nejvýše* 250krát – nemusí se proto v obrázku vyskytovat vůbec. Nevýhoda tak spočívá v tom, že četnost barvy v RGB modelu nemůžeme z dílčích histogramů stanovit přesně.

6. Automatická úprava kontrastu

Na začátku tohoto dílu jsme si ukázali, jak vypadá transformační funkce f realizující zvětšení kontrastu šedotónového obrázku. Zopakujme, že je tato funkce dána předpisem

$$f(a) = \begin{cases} 0 & \text{pro } a < a_0; \\ 255 \cdot \frac{a-a_0}{a_1-a_0} & \text{pro } a_0 \leq a \leq a_1; \\ 255 & \text{pro } a > a_1, \end{cases}$$

kde $a \in \{0, 1, \dots, K-1\}$. Řekli jsme si také, že se hodnoty a_0 a a_1 nastavují na hodnotu nejtmavějšího a nejsvětějšího stupně šedi přítomného

ve vstupním obrázku. Tyto hodnoty je tedy možné snadno odečíst z histogramu – hodnota a_0 je rovna pozici sloupečku s nenulovou výškou, který je v histogramu nejvíce nalevo; naopak a_1 je rovna pozici sloupečku s nenulovou výškou, který je v histogramu nejvíce napravo. Formálně zapsáno:

$$a_0 = \min\{a \mid h(a) \neq 0\},$$

$$a_1 = \max\{a \mid h(a) \neq 0\}.$$

Nyní máme k dispozici jednoduché vzorce pro výpočet hodnot a_0 a a_1 a úprava kontrastu tak může být provedena bez jakéhokoliv zásahu uživatele. Výše uvedená transformační funkce f je proto často nazývána *automatickou úpravou kontrastu*.

Tento díl seriálu o počítačové grafice se věnoval základním úpravám obrazu v prostorové doméně. Všechny tyto úpravy měly společnou jednu vlastnost: bylo možné je realizovat aplikací transformační funkce f na pixely vstupního obrázku. Obrazová funkce o' výsledného obrázku tak vznikne složením obrazové funkce o vstupního obrázku a transformační funkce f . Platí tedy:

$$o'(x, y) = f(o(x, y))$$

pro všechna $x \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ a $y \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Je patrné, že zmíněné úpravy berou v potaz pouze hodnotu upravovaného pixelu (pixelu o souřadnicích x a y) a nijak nezohledňují hodnoty některých jiných pixelů. V praxi je však občas potřebné provést úpravy, které z podstaty věci musí zohlednit hodnoty některý dalších pixelů; většinou se jedná o pixely, které jsou v bezprostředním okolí upravovaného pixelu. Mezi tyto úpravy patří například vyhlazení nebo naopak vyostření obrázku. Zabývat se jimi budeme v dalším pokračování seriálu.

Literatura

- [1] Gonzalez, R. C., Woods, R. E.: Digital Image Processing. 3. vydání. Pearson Prentice Hall, 2008.
- [2] Huges, J. F. a kol.: Computer Graphics. Principles and Practice. 3. vydání. Addison-Wesley, 2014.
- [3] Felkel, P., Sochor, J., Žára, J., Beneš, B.: Moderní počítačová grafika. 2. vydání. Computer Press, 2005.
- [4] Martíšek, D.: Matematické principy grafických systémů. Littera, 2002.

ZPRÁVY

10. ročník CPSJ

Po dvou letech improvizací, způsobených pandemií covidu-19, se ve dnech 15. až 18. května 2022 v Karlově pod Pradědem konal již 10. ročník Česko-polsko-slovenské matematické soutěže juniorů (CPSJ).¹⁾ Vznik této soutěže iniciovali polští kolegové, kteří chtěli vítěze své Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów (OMG) nechat nasát atmosféru mezinárodní soutěže a motivovat je tak k účasti na mezinárodních soutěžích v dalších letech.²⁾

Český reprezentační výběr byl sestaven na základě výsledků krajských kol kategorií A a C 71. ročníku Matematické olympiády a následného výběrového soustředění z žáků, kteří navštěvují nejvýše první ročník střední školy (kvintu osmiletých gymnázií). Účast v reprezentaci si vybojovali: *Anastasia Bredikhina* (5/8), Gymnázium Jana Keplera v Praze 6, *Dominik Doležel* (5/8), Gymnázium Brno, tř. Kapitána Jaroše, *Viktor Gola* (1/4), Masarykovo gymnázium, SZŠ a VOŠ Vsetín, *Erik*

Ježek (9), Základní škola Praha 10, Švehlova, *Pavla Šimová* (5/8), Gymnázium Šumperk a *Patrik Štencel* (1/4), Mendelovo gymnázium v Opavě.

Vedoucím české delegace byli *RNDr. Jaroslav Švrček, CSc.*, z PřF UP v Olomouci, *doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.*, z MFF UK v Praze a *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.*, z PřF UP v Olomouci.

Všichni účastníci se sešli v neděli 15. května v hotelu Karlov v Karlově pod Pradědem. V pondělí na ně čekala soutěž jednotlivců, v níž po dobu 3,5 hodiny řešili pět úloh. Zadání příkladů obdrželi soutěžící jak v mateřském jazyce, tak i v angličtině, řešení mohli odevzdávat ve svém mateřském jazyce. Po odpočinkovém programu a prezentaci svých řešení byli navečer soutěžící rozlosováni do šesti tříčlenných družstev; v každém z nich bylo po jednom českém, polském a slovenském účastníkovi. Druhý den pak tyto týmy v soutěži družstev řešily po dobu pěti hodin šest úloh – po dvou v češtině, polštině a slovenštině. Soutěžící si tak vyzkou-

¹⁾ V roce 2020 byla soutěž zrušena, v roce 2021 se konala online.

²⁾ V České republice a na Slovensku řeší žáci MO v pěti různých věkových kategoriích na základních školách (a v odpovídajících ročnících víceletých gymnázií) a dále ve třech věkových kategoriích na středních školách. Celostátním kolem však soutěž končí pouze v kategorii A. V Polsku dlouhodobě existovala matematická olympiáda (OM), kterou řešili žáci všech ročníků středních škol. Pro žáky druhého stupně základních škol (v Polsku dříve čtyřletá gymnázia) vznikla později matematická olympiáda OMG (ukončená třetím (celostátním) kolem) – po poslední školské reformě v Polsku před 5 lety, kdy byla gymnázia spojena se základními školami, byla OMG přejmenována (nyní nese název Olimpiada Matematyczna Juniorów).

šeli týmovou spoluprací, při níž musel každý svým spolusoutěžícím objasnit zadání úlohy i své řešení.



Ze soutěže jednotlivců (10. CPSJ), Karlov pod Pradědem, 16. 5. 2022

Jako obvykle uspěli v soutěži jednotlivců nejlépe polští soutěžící. Na prvním místě se umístil polský soutěžící *Michał Jacek*, který získal 24 z 25 možných bodů. Z českých soutěžících byl nejlepší *Patrik Štencel*, který obsadil dělené čtvrté a páté místo, v první polovině účastníků se ještě umístil *Erik Ježek*, a to na děleném pátém až osmém místě. Podrobné výsledky jak [soutěže jednotlivců](#), tak i [soutěže družstev](#) můžete najít na stránkách [Matematické olympiády](#). Vzorová řešení (v polštině) soutěží [jednotlivců](#) i [družstev](#) na stránkách polských kolegů.

Na závěr uvádíme zadání soutěžních úloh, přitom úlohy soutěže družstev uvádíme tak, jak je obdrželi soutěžící.

Soutěž jednotlivců

(16. 5. 2022)

1. Nechť $n \geq 3$ je přirozené číslo. Předpokládejme, že $a_1, a_2, \dots, a_n$ je n navzájem různých reálných čísel. V závislosti na n určete nejmenší možný počet

různých hodnot mezi n čísly

$$a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, \\ a_{n-1} + a_n, a_n + a_1.$$

(Josef Tkadlec, CZE)

2. V oboru celých čísel řešte následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^2 &= yz + 1, \\ y^2 &= zx + 1, \\ z^2 &= xy + 1. \end{aligned}$$

(Jaroslav Švrček, CZE)

3. V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ platí

$$\begin{aligned} |\sphericalangle EAB| &= 60^\circ, \\ |\sphericalangle ABC| &= 100^\circ, \\ |\sphericalangle BCD| &= 140^\circ. \end{aligned}$$

Dokažte, že tento pětiúhelník je možno umístit do kruhu o poloměru $\frac{2}{3}|AD|$.
(Michał Kieza, POL)

4. Nechť a, b jsou přirozená čísla s vlastností $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$. Dokažte, že platí

$$\frac{a}{b} - \frac{1}{2ab} > \sqrt{2}.$$

(Łukasz Bożyk & Arkadiusz Męcel, POL)

5. Řekneme, že přirozené číslo n nazveme *dobré*, právě když splňuje následující podmínku:

Jestliže je některé přirozené číslo dělitelné každým z devíti čísel $n + 1, n + 2, \dots, n + 9$, potom je také dělitelné číslem $n + 10$.

Kolik přirozených čísel n je dobrých?
(Josef Tkadlec, CZE)

Soutěž družstev

(17. 5. 2022)

1. Určete největší možnou hodnotu výrazu $ab + bc + 2ac$ pro nezáporná reálná čísla a, b, c , jejichž součet je 1.

(Patrik Bak, SVK)

2. Na tabuli je napísané číslo 2022. V každom kroku nahradíme niektorú z číslic 2 čísлом 2022. Napríklad

$2022 \Rightarrow 2020222 \Rightarrow 2020220222 \Rightarrow \dots$

Po koľkých krokoch môže byť na tabuli napísané číslo deliteľné 22? Určte všetky možnosti.

(Pavel Calábek, CZE)

3. Body D, E, F ležia odpovedne na bokoch BC, CA, AB trojúhelníka ABC v takém způsobu, že $FB = BD$, $DC = CE$ oraz přímky EF i BC są rovnoběžné. Střezná do okružku opisaného na trojúhelníku DEF v bodě F přezná odcinek AD v bodě P . Symetrická odcinka EF přezná odcinek AC v bodě Q . Vykaž, že přímky PQ i BC są rovnoběžné.

(Michal Janík, CZE)

4. Najděte všechny trojice (a, b, c) celých čísel, které vyhovují rovnicím $a + b = c$ a $a^2 + b^3 = c^2$.

(Łukasz Bożyk, POL)

5. Je daný pravidelný devětúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$ s délkou strany 1. Úhlopříčky A_3A_7 a A_4A_8 sa přezná v bodě P . Zistite délku úsečky PA_1 .

(Łukasz Bożyk, POL)

6. Wyznacz wszystkie liczby całkowite $n \geq 4$ o następującej własności:

Każde pole tabeli $n \times n$ można pomalować na biało albo na czarno w taki sposób, aby każde pole tej tabeli miało ten sam kolor, co dokładnie dwa sąsiadujące z nim pola. (Pola są sąsiadujące, jeśli mają dokładnie jeden wspólny bok.)

Ile jest różnych kolorowań pól tabeli 6×6 spełniających powyższe warunki? (Jaroslav Švrček, CZE)

Příští, jedenáctý ročník soutěže se uskuteční v květnu 2023 na Slovensku.

Pavel Calábek

63. ročník Mezinárodní matematické olympiády



OSLO2022

Letošní 63. ročník Mezinárodní matematické olympiády proběhl v červenci 2022 po dvouleté přestávce způsobené koronavirovou pandemií opět přezněně, a to v norském hlavním městě Oslu. Aktuálního ročníku soutěže se zúčastnilo 589 soutěžících ze 104 zemí celého světa.

Jako první do Norska přezstovali vedoucí národních delegací, jejichž hlavním úkolem bylo vybrat šestici úloh pro soutěž z 33 přezdem přezprave-

ných návrhů rozdělených v takzvaném shortlistu do čtyř kategorií (algebra, kombinatorika, geometrie, teorie čísel). Je potěšující, že mezi těmito 33 návrhy byly i 3 české a 3 slovenské návrhy. Byť byly všechny tyto návrhy hodnoceny pochvalně, do vlastní soutěže se nakonec dostal jen jeden z nich, konkrétně geometrická úloha *Patrika Baka*, a to jako první úloha druhého dne (zadání všech šesti úloh najdete na konci této zprávy).

Soutěžící a pedagogičtí vedoucí dorazili do Osla o tři dny později. Ubytování bylo zajištěno v hotelech Scandic St. Olavs a Scandic Holberg v centru města. Pro soutěžící bylo k dispozici rovněž přílehlé volnočasové centrum příznačně pojmenované Rebel.

Vlastní soutěž proběhla tradičně ve dvou dnech 11. a 12. července na půdě místní univerzity. Soutěžící měli každý den 4,5 hodiny na řešení tří obtížných úloh. Za každou z nich mohli získat až 7 bodů. Připomeňme, že zhruba polovina soutěžících si z olympiády přiveze medaili, přičemž počet udělených zlatých (G), stříbrných (S) a bronzových (B) medailí je v přibližném poměru 1 : 2 : 3.

Českou republiku reprezentoval tým ve složení *Matouš Šafránek*, *Michal Janík*, *Samuel Rosiar* (všichni z Gymnázia J. Keplera v Praze), *Benedikt Bareš* z Gymnázia Dobruška, *Zdeněk Pezlar* z Gymnázia Brno, tř. Kpt. Jaroše a *Robert Jaworski* z Gymnázia v Praze 8, Ústavní. Robert Jaworski zastoupil vítěze celostátního kola *Tomáše Flídra* z gymnázia v Kojetíně, který se bohužel nemohl soutěže zúčastnit ze zdravotních důvodů.

Vedoucím týmu byl *Josef Tkadlec* z Harvardovy univerzity a pedagogickým vedoucím *Michal Rolínek* ze společnosti G-Research, která výpravu rovněž finančně podpořila.

Přehled výsledků českého týmu uvádíme v tabulce:

Umístění	Body za úlohu						Cena
	1	2	3	4	5	6	Σ
112.–145. Matouš Šafránek	7	7	0	7	1	7	29 S
214.–229. Michal Janík	7	7	0	7	5	0	26 B
214.–229. Samuel Rosiar	6	7	1	7	5	0	26 B
394.–419. Zdeněk Pezlar	7	7	0	0	1	0	15 HM
429.–435. Benedikt Bareš	7	3	0	1	2	0	13 HM
429.–435. Robert Jaworski	7	3	0	1	1	1	13 HM
Celkem	41	34	1	23	15	8	122

Čeští soutěžící přivezli ze soutěže jednu stříbrnou medaili, dvě bronzové medaile a tři čestná uznání (HM) za bezchybné vyřešení alespoň jedné úlohy.



České reprezentační družstvo ve složení (zleva): Robert Jaworski, Michal Janík (bronz), Matouš Šafránek (stříbro), Samuel Rosiar (bronz), Benedikt Bareš, Zdeněk Pezlar a Michal Rolínek (pedagogický vedoucí).

Pro srovnání uvádíme i výsledky slovenského týmu, kterému se letos dařilo lépe:

Umístění	Body za úlohu						Cena
	1	2	3	4	5	6	Σ
112.–145. Eliška Macáková	7	7	2	7	5	1	29 S
247.–268. Matej Vasky	7	7	1	7	1	1	24 B
247.–268. Jakub Šoňovička	7	7	1	7	2	0	24 B
269.–285. Viktor Balan	7	7	0	1	1	7	23 B
269.–285. Viktor Imříšek	7	7	0	7	2	0	23 B
429.–435. Samuel Koribanič	5	7	0	0	1	0	13 HM
Celkem	40	42	4	29	12	9	136

V neoficiálním pořadí států suverénně zvítězila Čína, která se stejně jako několik dalších asijských států kvůli místním koronavirovým opatřením účastnila distančně. Všechny šest čínských soutěžících navíc získalo plný počet bodů, což je úžasný výkon, který se naposledy podařil v roce 1994 týmu USA. Kromě čínských studentů na plný počet 42 bodů dosáhli ještě čtyři další soutěžící.

Na pomyslné druhé a třetí příčce se těsně za sebou dle očekávání seřadily Korea a USA, překvapením je naopak umístění v první desítce pro Rumunsko (5.) a Německo (7.) – v obou případech po více jak 10 letech.

Česká republika skončila v (první) polovině startovního pole na 52. příčce o šest příček za Slovenskem. Kompletní výsledky jsou dostupné na adrese imo-official.org. Podrobné informace najdete také na stránce <http://www.matematickaolympiada.cz/>.

Úlohy byly letos snazší než v předchozích letech, jak naznačuje výkon čínského týmu. Konkrétně druhá úloha byla (co do počtu udělených bodů) nejsnazší dvojkou za posledních deset let. Totéž platí i o třetí a čtvrté úloze, navíc zbylé tři úlohy byly za posledních deset let „druhé nejsnazší“. Na získání bronzové medaile tak bylo letos potřeba nasbírat bezprecedentních 23 bodů – loni stačilo na získání bronzové medaile pouhých

12 bodů a za 24 bodů už se bralo zlato.

Na závěr uvádíme zadání soutěžních úloh (v závorce je uvedena země, která úlohu navrhla).

11. července 2022

1. Banka města Oslo razí mince dvou druhů: aluminiové (značené A) a bronzové (značené B). Magnus má n aluminiových mincí a n bronzových mincí v řadě v nějakém počátečním pořadí. *Blokem* rozumíme podposloupnost sousedních mincí stejného druhu. Pro dané pevné kladné celé číslo $k \leq 2n$ provádí Magnus opakovaně následující krok: určí nejdelší blok obsahující k -tou minci zleva a přesune všechny mince z tohoto bloku na levý konec řady. Například pro $n = 4$, $k = 4$ a počáteční pořadí $AABBBABA$ vypadá proces takto:

$$\begin{aligned} AABBBABA &\rightarrow BBBAAABA \rightarrow \\ &\rightarrow AAABBBBA \rightarrow BBBBAAAA \rightarrow \\ &\rightarrow BBBBAAAA \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Najděte všechny dvojice (n, k) splňující $1 \leq k \leq 2n$ takové, že pro každé počáteční pořadí se v nějaký okamžik stane, že levých n mincí je stejného druhu.

(Francie)

2. Označme $\mathbb{R}^+$ množinu kladných reálných čísel. Naleznete všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}^+$ existuje právě jedno $y \in \mathbb{R}^+$ splňující

$$xf(y) + yf(x) \leq 2.$$

(Nizozemsko)

3. Necht k je kladné celé číslo a necht S je konečná množina lichých prvočísel. Dokažte, že existuje nejvýše jeden způsob (až na otočení a překlopení) jak umístit prvky S podél obvodu kruhu tak, aby součin každých dvou sousedních čísel byl tvaru

$$x^2 + x + k$$

pro nějaké kladné celé číslo x .

(USA)

12. července 2022

4. Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ splňující

$$|BC'| = |DE|$$

a uvnitř něj bod T , pro který platí

$$|TB| = |TD|, \quad |TC| = |TE|$$

a

$$|\sphericalangle ABT| = |\sphericalangle TEA|.$$

Přímka AB protne přímky CD a CT postupně v bodech P a Q tak, že body P, B, A, Q leží na přímce v tomto pořadí. Podobně přímka AE protne přímky CD a DT postupně v bodech R a S tak, že body R, E, A, S leží na přímce v tomto pořadí. Dokažte, že body P, S, Q, R leží na jedné kružnici.

(Slovensko)

5. Najděte všechny trojice (a, b, p) kladných celých čísel takových, že p je prvočíslo a platí

$$a^p = b! + p.$$

(Belgie)

6. Necht n je kladné celé číslo. *Nordický čtverec* je tabulka $n \times n$ vyplněná navzájem různými celými čísly od

1 po n^2 . Dvě různá políčka považujeme za sousední, pokud sdílejí stranu. Řekneme, že políčko je *dolík*, pokud je v něm menší číslo než ve všech sousedních políčkách. Řekneme, že posloupnost jednoho či více políček je *krpál*, pokud současně platí:

1. první políčko posloupnosti je dolík,
2. každé další políčko posloupnosti sousedí s předchozím políčkem,
3. čísla v políčkách posloupnosti jsou v rostoucím pořadí.

V závislosti na n určete nejmenší možný celkový počet krpálů v nordickém čtverci.

(Srbsko)

Následující ročník Mezinárodní MO se uskuteční v roce 2023 v Japonsku.

Josef Tkadlec

Informatické olympiády CEOI 2022 a IOI 2022

Po dvou letech distančního soutěžení způsobeného epidemií koronaviru se ve školním roce 2021/22 naše národní i obě mezinárodní olympiády v informatice konaly již opět normální prezenční formou.

Na základě výsledků ústředního kola 71. ročníku Matematické olympiády kategorie P jsme pozvali všechny úspěšné řešitele na tradiční víkendové výběrové soustředění, v němž se určuje složení českých reprezentačních družstev pro mezinárodní olympiády. Letošní výběrové soustředění proběhlo ve druhé polovině dubna formou praktické online soutěže a konečný výběr

reprezentantů závisel na součtu výsledků ústředního kola MO-P a výsledků dosažených na tomto výběrovém soustředění. Čtyři soutěžící s nejlepším součtem bodů dostali jako obvykle příležitost reprezentovat Českou republiku na celosvětové Mezinárodní olympiádě v informatice IOI (International Olympiad in Informatics), zatímco další čtyři úspěšní řešitelé z nematuritních ročníků se připravili soutěžit na Středoevropské olympiádě v informatice CEOI (Central European Olympiad in Informatics).

CEOI 2022



Již v loňském roce 2021 připadlo pořadatelství Středoevropské olympiády v informatice Chorvatsku. Olympiáda ovšem tehdy proběhla pouze distanční formou a chorvatští organizátoři se proto rozhodli zopakovat CEOI na stejném místě i v roce 2022.

Letošní 29. ročník CEOI se tedy konal ve dnech 24.–30. 7. 2022 ve městě Varaždin na severu Chorvatska. Zúčastnilo se ho celkem 52 soutěžících ze 12 zemí. Vedle osmi tradičních účastnických středoevropských států (Česká republika, Chorvatsko, Maďarsko, Německo, Polsko, Rumunsko, Slovensko, Slovinsko) se navíc přihlásili jako hosté soutěžící z Itálie, Rakouska, Švýcarska a Ukrajiny. Tyto země se nepodílejí na střídavém pořádání olympiády, a proto musí svoji účast uhradit. Jako obvykle

se zúčastnilo také druhé družstvo z pořadatelské země.

České reprezentační družstvo na CEOI 2022 bylo tvořeno těmito studenty: *Adam Červenka*, 7/8, Gymnázium, tř. Kpt. Jaroše, Brno, *Viktor Číhal*, 2/4, Smíchovská SPŠ a gymnázium, Praha 5, *Adam Kundrát*, 7/8, Gymnázium, Brno-Řečkovice, *Štěpán Mikéska*, 7/8, Gymnázium, tř. Kpt. Jaroše, Brno.

Vedoucími české delegace na CEOI 2022 byli jmenováni *Jiří Kalvoda* a *Jonáš Havelka*, oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Vlastní soutěž proběhla jako obvykle ve dvou soutěžních dnech, a to v úterý 26. 7. a ve čtvrtek 28. 7. Již v pondělí 25. 7. ovšem soutěži předcházelo cvičné nesoutěžní kolo, určené k seznámení studentů s počítači a se soutěžním prostředím (tzv. practice session). V každém soutěžním dnu studenti řešili tři náročné algoritmické úlohy, na jejichž vyřešení měli pět hodin.

Vždy večer před soutěží vedoucí všech delegací společně schválili soutěžní úlohy navržené pořadatelskou zemí, upravili podle potřeby jejich formulace a přeložili je pak do mateřského jazyka svých studentů. Čeští studenti tedy dostali jak anglickou, tak i českou verzi zadání úloh.

Každý soutěžící pracuje na přiděleném osobním počítači s nainstalovaným soutěžním prostředím, které umožňuje vyvíjet a testovat programy a odesílat je k vyhodnocení. Správnost vypracovaných programů organizátoři automaticky testují v průběhu soutěže

pomocí předem připravené sady testovacích dat, každý test je navíc omezen časovým limitem. Tím je zajištěna nejen kontrola správnosti výsledků, ale pomocí časových limitů se také odliší kvalita použitého algoritmu. Při testování každé úlohy se používají sady testovacích dat různé velikosti, takže teoreticky správné řešení založené na neefektivním algoritmu zvládne dokončit včas výpočet pouze pro některé testy – pro ty menší a jednodušší. Takové řešení je potom ohodnoceno částečným počtem bodů. Částečné body lze získat také za vyřešení některých speciálních případů, zatímco plný počet bodů přinese až řešení fungující v plné obecnosti.

Krátce po odevzdání vypracovaného programu do vyhodnocovacího systému se soutěžící dozví hodnocení svého řešení a má pak ještě možnost opravit ho a odevzdat znovu. Podobný systém používáme v posledních letech i u nás v Matematické olympiádě kategorie P pro hodnocení praktických úloh domácího a ústředního kola.

Každá ze soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body, celkově tak bylo teoreticky možné dosáhnout 600 bodů. Zatímco v prvním soutěžním dnu získali dva soutěžící plný počet 300 bodů, jedna soutěžní úloha zadaná ve druhém soutěžním dnu se ukázala natolik obtížná, že za ni nikdo ze soutěžících nezískal více než 40 bodů.

Celkovým vítězem soutěže se stala dvojice studentů se shodným bodovým ziskem 540 bodů – *Dorijan Lendvaj* z Chorvatska a *Alexandru Luchianov* z Rumunska.

Úspěšnější polovina soutěžících do-

stává na CEOI medaili, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se rozdělují v přibližném poměru 1 : 2 : 3. Na CEOI 2022 bylo uděleno celkem 28 medailí těm řešitelům, kteří získali alespoň 130 bodů (5 zlatých, 11 stříbrných a 12 bronzových medailí). Středoevropská olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců, žádné pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlašováno.

Naši reprezentující dosáhli následujících výsledků:

- 22. *Štěpán Mikéska*, 152 bodů, bronzová medaile,
- 29. *Viktor Číhal*, 120 bodů,
- 48. *Adam Červenka*, 20 bodů,
- 51. *Adam Kundrát*, 10 bodů.

Zisk pouze jedné bronzové medaile pro nás představuje spíše horší výsledek, ale odpovídá skutečnosti, že na rozdíl od mnoha jiných zemí posíláme na CEOI soutěžit mladší studenty, kteří se v příslušném roce ještě nedostali na IOI. Tento postup se nám dlouhodobě osvědčil, naši mladší soutěžící tak získají na CEOI mezinárodní zkušenosti a často se pak stává, že v následujícím školním roce velmi dobře uspějí na IOI.

Slovenské družstvo bylo letos úspěšnější než my a získalo dvě stříbrné medaile.

Nejúspěšnějšími zeměmi na CEOI 2022 byly Polsko se dvěma zlatými, jednou stříbrnou a jednou bronzovou medailí a Rumunsko s jednou zlatou a třemi stříbrnými medailemi.

Veškeré informace o soutěži, texty soutěžních úloh i podrobné výsledky všech soutěžících lze nalézt na Internetu na adrese

<https://ceoi.hsin.hr>.

Příští jubilejní 30. ročník Středoevropské olympiády v informatice se bude konat v Německu v Magdeburku pravděpodobně ve dnech 13.–19. 8. 2023.

IOI 2022



Mezinárodní olympiáda v informatice IOI měla letos již svůj 34. ročník. Soutěž se konala v Indonésii v týdnu 7.–15. 8. 2022.

Většina družstev se olympiády zúčastnila tradičním prezenčním způsobem, ale s ohledem na pokračující epidemií koronaviru v různých státech světa organizátoři umožnili i distanční nebo hybridní účast reprezentačních družstev těch zemí, odkud soutěžící nemohli přijet. Představitelé národních výborů olympiády museli v takovém případě soustředit svoje distanční soutěžící na společném místě a stálým dohledem zajistit regulérnost soutěže.

Letošní mezinárodní olympiády v informatice se zúčastnilo 353 soutěžících z 90 zemí celého světa, mimo soutěž navíc řešilo úlohy ještě druhé družstvo pořádající země. Celkem 62 delegací přijelo soutěžit na místo, 8 zemí se zúčastnilo hybridním způsobem (někteří studenti přijeli, někteří soutěžili distančně) a 20 národních delegací se olympiády zúčastnilo pouze na dálku.

Oproti loňskému roku se tak počet zúčastněných zemí zvýšil o dvě a také celkový počet soutěžících mírně vzrostl. Počet zemí i počet soutěžících studentů tím dosáhly rekordních hodnot v celé historii IOI.

Naše družstvo na IOI 2022 mělo následující složení: *Robert Jaworski*, 8/8, Gymnázium Ústavní, Praha 8, *Daniel Skýpala*, 8/8, Gymnázium Olomouc-Hejčín, *Benjamin Swart*, 7/8, Mensa gymnázium, Praha 6, *Lukáš Tomoszek*, 6/6, Gymnázium Trinec.

Vedoucími české delegace na IOI 2021 byli RNDr. *Matěj Konečný* a Bc. *Josef Minařík*, oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy.



České soutěžního družstvo – bohužel v respirátorech

Celá akce byla výborně připravena. Účastníci byli ubytováni ve dvou kvalitních hotelech – v jednom bydleli soutěžící a ve druhém vedoucí a hosté. Přímo v hotelu, v němž byli soutěžící ubytováni, probíhala i vlastní soutěž, zatímco v hotelu pro vedoucí se konala všechna jednání mezinárodní jury. Soutěžící ani vedoucí tak nemuseli absolvovat žádné zbytečné přesuny z místa na místo, jak se někdy na olympiádách stává.

Průběh soutěže je obdobný, jak byl popsán již výše u Středoevropské olympiády v informatice. Vlastní soutěž se konala ve dvou soutěžních dnech ve středu a v pátek, změnou oproti minulým letům bylo pouze její zařazení do programu až po obědě. Ve zbývajících dnech pobytu se konalo cvičné soutěžní kolo určené pro seznámení soutěžících s počítači a prostředním, slavnostní zahájení, několik výletů a nakonec samozřejmě také zakončení olympiády spojené s vyhlášením výsledků.

Každá ze šesti soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body, takže celkem bylo možné získat až 600 bodů. To se letos podařilo dvěma studentům, absolutními vítězi soutěže s plným počtem bodů se stali čínští studenti *Jiangqi Dai* a *Shaoruan Tang*.

Na základě přesně stanovených pravidel se na IOI podle dosažených bodů rozdělují medaile. Některou z medailí obdrží nejvýše polovina účastníků soutěže, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se rozdělují v poměru 1 : 2 : 3 s ohledem na to, aby soutěžící se stejným bodovým ziskem získali stejnou medaili. Způsob rozdělení medailí je na IOI stanoven striktními pravidly, na rozdíl od CEOI ho nemohou členové mezinárodního výboru ani vedoucí národních delegací nijak ovlivnit. Na letošní IOI bylo uděleno celkem 176 medailí, z toho 30 zlatých, 58 stříbrných a 88 bronzových.

Výsledky našich soutěžících:

- 108. *Benjamin Swart*, 231,61 bodů, bronzová medaile,
- 173. *Daniel Skýpala*, 148 bodů, bronzová medaile,
- 231. *Robert Jaworski*, 103 bodů,

245. *Lukáš Tomoszek*, 86 bodů.

Dvě bronzové medaile představují pro Českou republiku průměrný výsledek, podobný jako v minulých letech.

Mezinárodní olympiáda v informatice je soutěží jednotlivců – oficiální pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlašováno. Není tedy ani stanoveno, zda by se mělo určovat podle počtu medailí, podle celkového počtu bodů získaných soutěžícími dané země nebo třeba podle součtu jejich dosažených umístění. Naše letošní výsledky nás každopádně řadí přibližně do poloviny v celkovém pořadí zúčastněných zemí.

Slovenské družstvo dopadlo letos podobně jako naše – získalo pouze jednu medaili, ale zato stříbrnou.

Nejúspěšnější zemí se čtyřmi zlatými medailemi se stejně jako v předchozích dvou letech stala Čína. Její reprezentanti měli dokonce tak silnou převahu, že obsadili první čtyři místa v celkovém pořadí. Dalšími velmi úspěšnými zeměmi byly Japonsko (rovněž čtyři zlaté medaile) a USA (tři zlaté a jedna stříbrná medaile).

Všechny podrobnosti o soutěži i texty soutěžních úloh lze najdete na adrese <https://ioi2022.id/>, kompletní výsledková listina je k dispozici na webové stránce se statistikami <http://stats.ioinformatics.org/results/2022>.

Další ročníky Mezinárodní olympiády v informatice se budou konat v Maďarsku (2023) a potom v Egyptě (2024). Příští IOI 2023 je naplánována do maďarského Szegedu od 28. 8. do 4. 9. 2023.

Pavel Töpfer