

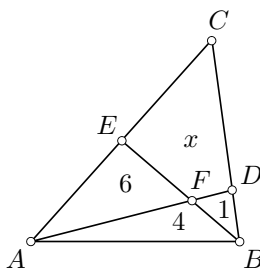
## Zkřížené žebříky

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Poznatky označované jako *věty o zkřížených žebřících* (*Crossed ladders theorems*) se nedávno staly populárními, protože usnadňují řešení některých úloh o poměrech obsahů částí trojúhelníků. Může se stát, že je žák najde například na YouTube a překvapí učitele neočekávaným řešením úlohy z obr. 1:

$$\frac{1}{x+11} + \frac{1}{4} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{x+11} = \frac{2+4-5}{20} = \frac{1}{20} \Rightarrow x = 9.$$



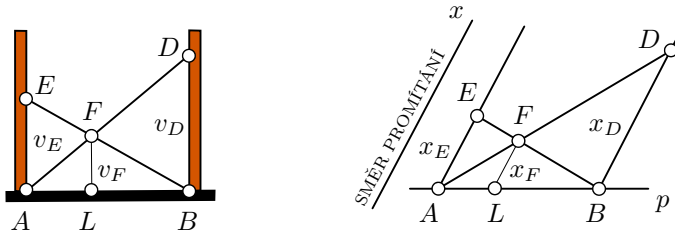
Obr. 1 Určete obsah  $x$ , jestliže  $S_{AFE} = 6$ ,  $S_{ABF} = 4$  a  $S_{BDF} = 1$

Tento příspěvek si klade za cíl důkladněji seznámit čtenáře s danou problematikou.

### Věty o zkřížených žebřících a jejich původ

Na počátku byla klasická úloha neznámého původu (tak ji označuje Gardner [1, str. 62]), která vychází ze situace na obr. 2 vlevo. Spočívá v určení vztahu mezi výškou  $v_F$  průsečíku  $F$  žebříků  $AD$  a  $BE$  opřených

o zdi a výškami  $v_D$  a  $v_E$  míst  $D$  a  $E$ , v nichž se horní konce žebříků dotýkají zdi.



Obr. 2 Zkřížené žebříky a obrázek k větě 1

Výsledný vztah

$$\frac{1}{v_F} = \frac{1}{v_D} + \frac{1}{v_E}, \tag{1}$$

souvisí s faktem, že délka té příčky lichoběžníku, která prochází průsečíkem jeho úhlopříček rovnoběžně se základnami, je harmonickým průměrem délek základen (viz např. [2, str. 157–159] nebo [4]).

Roku 2002 vztah zobecnil americký středoškolský učitel *Harold Joseph Stengel* [3]. Jeho příspěvek shrneme ve třech větách, jež pronikly do povědomí veřejnosti včetně názvů, které se v článku vyskytovaly.

Budeme se zabývat promítáním do přímky  $p$ , rovnoběžným s přímkou  $x$ . Délku úsečky ohraničené libovolným bodem  $Z$  a jeho průmětem značíme  $x_Z$ . Termín *ceviána* užíváme pro úsečku s krajními body ve vrcholu trojúhelníku a ve vnitřním bodě protilehlé strany.

**Věta 1** (věta o zkřížených žebřících) Nechť body  $E, D$  leží v téže poloovině s hraniční přímkou  $p$ . Jejich průměty v promítání do  $p$  ve směru přímky  $x \parallel p$  označíme po řadě  $A, B$ . Je-li  $F$  průsečík úseček  $AD$  a  $BE$  (obr. 2 vpravo), pak

$$\frac{1}{x_F} = \frac{1}{x_D} + \frac{1}{x_E}. \tag{2}$$

*Důkaz.* Platí  $\triangle ALF \sim \triangle ABD$  a  $\triangle LBF \sim \triangle ABE$ . S využitím obou podobností dostáváme

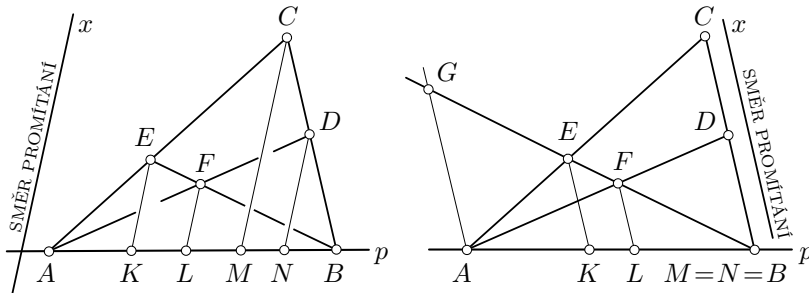
$$1 = \frac{|AL| + |LB|}{|AB|} = \frac{|AL|}{|AB|} + \frac{|LB|}{|AB|} = \frac{x_F}{x_D} + \frac{x_F}{x_E}$$

a odtud vztah (2), který je pro  $x \perp p$  ekvivalentní s (1).

Stengel se dále zabýval situací, kdy jsou žebříky opřeny o stěny chodby trojúhelníkového profilu.

**Věta 2** (zobecněná věta o zkřížených žebřících) V rovině trojúhelníku  $ABC$  uvažujme promítání do přímky  $AB$  rovnoběžné s přímkou  $x$ . Označíme-li  $F$  průsečík cvián  $AD$  a  $BE$  trojúhelníku, pak platí

$$\frac{1}{x_D} + \frac{1}{x_E} = \frac{1}{x_F} + \frac{1}{x_C}. \quad (3)$$



Obr. 3 Vlevo ilustrace k větě 2, vpravo obrázek k jejímu důkazu

*Důkaz.* Uvažujme nejprve situaci na obr. 3 vpravo, pro niž je  $x \parallel BC$ . Průměty bodů  $E$  a  $F$  nechť jsou po řadě  $K$  a  $L$ . Body  $C$  a  $D$  se zobrazí do  $B$ . Označme ještě  $G$  ten bod přímky  $BE$ , který se promítne do  $A$ .

Aplikací věty 1 na body  $G, D$ , a pak na body  $G, C$  dostáváme

$$\frac{1}{x_F} = \frac{1}{x_G} + \frac{1}{x_D} \quad \text{a} \quad \frac{1}{x_E} = \frac{1}{x_G} + \frac{1}{x_C}. \quad (4)$$

Oba vztahy lze přepsat do tvaru

$$\frac{1}{x_G} = \frac{1}{x_F} - \frac{1}{x_D} = \frac{1}{x_E} - \frac{1}{x_C}.$$

V něm je poslední rovnost ekvivalentní se vztahem (3), jenž jsme měli dokázat.

Jiné situace netřeba vyšetřovat, protože vztah (3) nezávisí na směru promítání. Označíme-li totiž průměty bodů  $E, F, C$  a  $D$  pro promítání určené přímkou  $x' \parallel x$  po řadě  $K', L', M'$  a  $N'$ , pak ze vzájemné podobnosti trojúhelníků  $EKK', FLL', CBM'$  a  $DBN'$  plyne

$$\frac{x'_E}{x_E} = \frac{x'_F}{x_F} = \frac{x'_C}{x_C} = \frac{x'_D}{x_D} = k.$$

Odtud a ze vztahu (3) dokázaného pro  $x \parallel BC$  zjistíme

$$\frac{1}{x'_D} + \frac{1}{x'_E} = \frac{1}{k} \cdot \left( \frac{1}{x_D} + \frac{1}{x_E} \right) = \frac{1}{k} \cdot \left( \frac{1}{x_F} + \frac{1}{x_C} \right) = \frac{1}{x'_F} + \frac{1}{x'_C}.$$

Uvažujme dále situaci z věty 2 za předpokladu, že  $x \perp AB$ . Vztah (3) je pak ekvivalentní s rovností

$$\frac{1}{\frac{1}{2}|AB|v_D} + \frac{1}{\frac{1}{2}|AB|v_E} = \frac{1}{\frac{1}{2}|AB|v_F} + \frac{1}{\frac{1}{2}|AB|v_C},$$

kde  $v_D$ ,  $v_E$ ,  $v_F$  a  $v_C$  jsou výšky trojúhelníků  $ABD$ ,  $ABE$ ,  $ABF$  a  $ABC$ .

Platí tedy věta 3, které se též říká věta o (zkřížených) žebřících, třebaže ji Stengel označil jen jako důsledek věty 2.

**Věta 3** Protínají-li se ceviány  $AD$  a  $BE$  trojúhelníku  $ABC$  v bodě  $F$ , pak pro obsahy trojúhelníků  $ABD$ ,  $ABE$ ,  $ABF$  a  $ABC$  platí

$$\frac{1}{S_{ABD}} + \frac{1}{S_{ABE}} = \frac{1}{S_{ABF}} + \frac{1}{S_{ABC}}. \quad (5)$$

### Co Stengel neuvedl

Výsledek průzkumu situace, kdy jsou žebříky opřeny o stěny příkopu lichoběžníkového průřezu (obr. 4), popisuje následující věta.

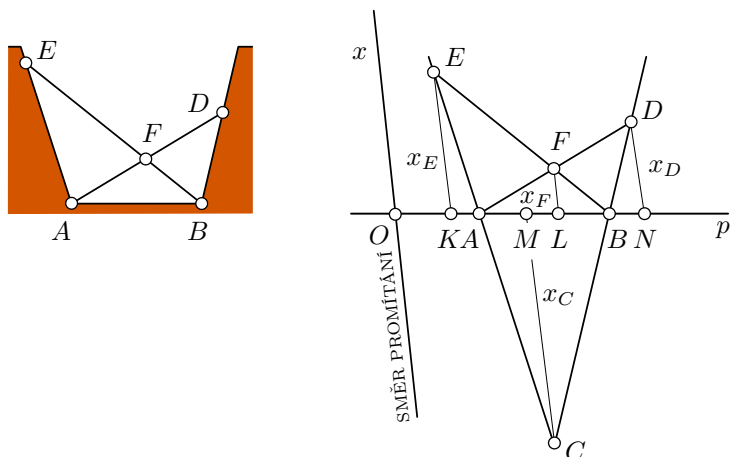
**Věta 4** V rovině trojúhelníku  $ABC$  uvažujme promítání do přímky  $AB$  rovnoběžné s přímkou  $x$ . Jsou-li  $D$ ,  $E$  po řadě vnitřní body polopřímek opačných k polopřímkách  $BC$ ,  $AC$  a je-li  $F$  průsečík úseček  $AD$  a  $BE$ , pak

$$\frac{1}{x_D} + \frac{1}{x_E} = \frac{1}{x_F} - \frac{1}{x_C} \quad \text{a} \quad \frac{1}{S_{ABD}} + \frac{1}{S_{ABE}} = \frac{1}{S_{ABF}} - \frac{1}{S_{ABC}}. \quad (6)$$

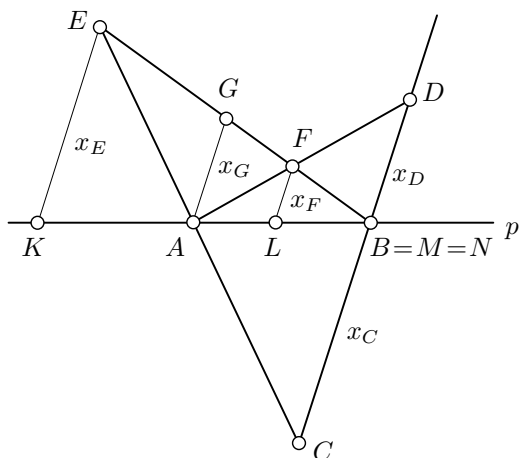
*Důkaz* se téměř neliší od důkazu věty 2. Jediný rozdíl spočívá v tom, že bod  $C$  nyní leží v opačné polorovině s hraniční přímkou  $AB$ , jak vidíme na obr. 5. Důsledkem je záměna bodů  $E$  a  $G$  v jejich pořadí na přímce  $BE$ , a tím i záměna zlomků  $\frac{1}{x_E}$  a  $\frac{1}{x_G}$  v druhém ze vztahů (4). Soustava má nyní tvar

$$\frac{1}{x_F} = \frac{1}{x_G} + \frac{1}{x_D} \quad \text{a} \quad \frac{1}{x_G} = \frac{1}{x_E} + \frac{1}{x_C},$$

z něž plyne (6).



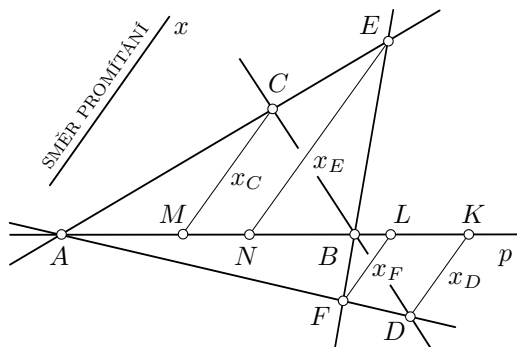
Obr. 4 Vlevo zkřížené žebříky v příkopu, vpravo ilustrace k větě 4



Obr. 5 Obrázek k důkazu věty 4

Další konfiguraci přímek  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ ,  $AD$  a  $BE$  představuje obr. 6. Asi se nám nepodaří motivovat ji zkříženými žebříky. Po zkušenostech z předchozích postupů však není těžké ověřit (užitím promítání rovnoběžného s jednou z přímek  $AC$ ,  $BC$ ), že platí

$$\frac{1}{x_E} - \frac{1}{x_D} = \frac{1}{x_C} - \frac{1}{x_F} \quad \text{a} \quad \frac{1}{S_{ABE}} - \frac{1}{S_{ABD}} = \frac{1}{S_{ABC}} - \frac{1}{S_{ABF}}.$$



Obr. 6 Další z možných konfigurací

Některé z dalších situací vidíme na obr. 7, ale zanechme raději analýzy a přistupme k syntéze. Abychom zahrnuli všechny situace do jediného celku, doplníme danou rovinu o *nevlastní body*. Na střední škole ovšem nebudeme seznamovat studenty s projektivním prostorem. Vystačíme s intuitivní představou nevlastního bodu jako směru rovnoběžek (tzv. průsečíku rovnoběžek v nekonečnu).

### Shrnutí

V dosud zkoumaných situacích byl pevně dán trojúhelník  $ABC$  a rovnoběžné promítání do přímky  $p = AB$  ve směru přímky  $x \parallel p$ . Na přímkách  $BC$  a  $AC$  volíme v daném pořadí body  $D$  a  $E$ , různé od vrcholů trojúhelníku. Průsečík přímk  $AD$  a  $BE$  značíme  $F$  a pro body  $Z \in \{C, D, E, F\}$  hledáme vztah mezi délkami  $x_Z$  a vztah mezi obsahy trojúhelníků  $ABZ$ .

Délku  $x_Z$  jsme definovali jako délku úsečky  $Z_0Z$ , kde  $Z_0$  je průmět bodu  $Z$ . Nahradíme ji reálným číslem  $\mathbf{x}_Z$  tak, aby platilo  $\mathbf{x}_Z = x_Z$ , jestliže  $Z$  leží v polorovině  $ABC$ , nebo  $\mathbf{x}_Z = -x_Z$ , pokud  $Z$  leží v polorovině opačné. Bude-li bod  $C$  nevlastní, zvolíme za polorovinu  $ABC$  libovolnou z polorovin s hraniční přímkou  $p$  a do obrázku ji vyznačíme šipkami (viz např. obr. 8 vlevo).

*Orientovanou vzdáleností*  $\mathbf{v}_Z$  bodu  $Z$  od přímky  $p$  rozumíme vzdálenost  $v_Z$  opatřenou znaménkem  $+$ , jestliže  $Z$  leží v polorovině  $ABC$ , nebo znaménkem  $-$ , pokud  $Z$  leží v polorovině opačné.

*Orientovaný obsah trojúhelníku*  $ABZ$  zavedeme vztahem

$$\mathbf{S}_{ABZ} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot \mathbf{v}_Z.$$

Pokud je některý z bodů  $Z$  nevlastní, klademe

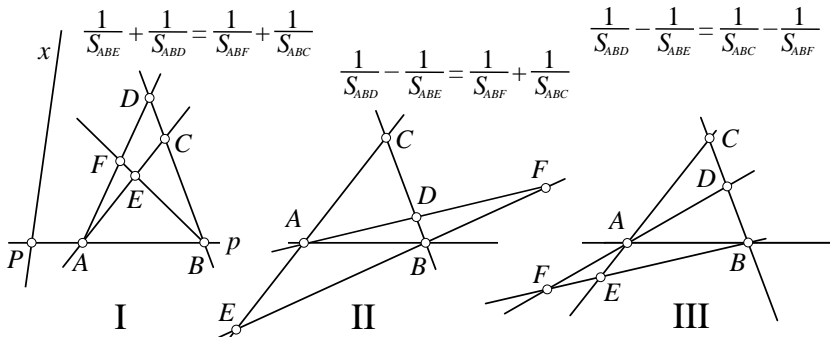
$$\frac{1}{\mathbf{x}_Z} = \frac{1}{x_Z} = 0, \quad \frac{1}{\mathbf{v}_Z} = \frac{1}{v_Z} = 0 \quad \text{a} \quad \frac{1}{\mathbf{S}_{ABZ}} = \frac{1}{S_{ABZ}} = 0.$$

Za těchto předpokladů vždy platí

$$\frac{1}{\mathbf{x}_D} + \frac{1}{\mathbf{x}_E} = \frac{1}{\mathbf{x}_C} + \frac{1}{\mathbf{x}_F} \quad \text{a} \quad \frac{1}{\mathbf{S}_{ABD}} + \frac{1}{\mathbf{S}_{ABE}} = \frac{1}{\mathbf{S}_{ABC}} + \frac{1}{\mathbf{S}_{ABF}}. \quad (7)$$

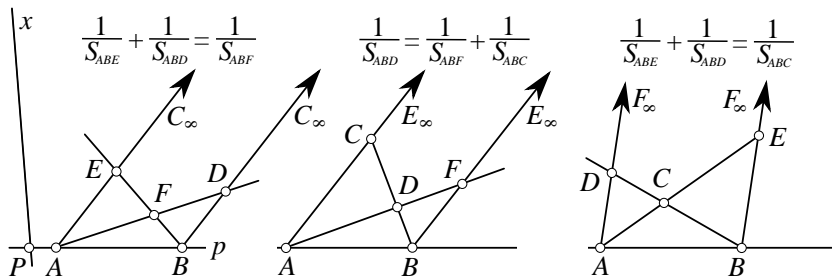
Všechny zkoumané situace lze roztrždit do šesti skupin podle toho, které z bodů  $C, D, E$  a  $F$  jsou vlastní a které z nich leží ve stejné polorovině.

- I. Body  $Z \in \{C, D, E, F\}$  jsou vlastní a leží v polorovině  $ABC$ , viz např. obr. 7 vlevo nebo obr. 3. Zlomky ve vztazích (7) mají po záměnách  $\mathbf{x}_Z$  za  $x_Z$  a  $\mathbf{S}_{ABZ}$  za  $S_{ABZ}$  stejné znaménko.
- II. Body  $Z$  jsou vlastní, tři z nich leží v jedné polorovině s hraniční přímkou  $AB$  a jeden v polorovině opačné (např. obr. 7 uprostřed nebo obr. 4). Jeden zlomek ve vztazích (7) má po záměnách  $\mathbf{x}_Z$  za  $x_Z$  a  $\mathbf{S}_{ABZ}$  za  $S_{ABZ}$  opačné znaménko než zbývající tři.
- III. Body  $Z$  jsou vlastní, dva z nich leží v polorovině  $ABC$  a dva v polorovině opačné, viz obr. 7 vpravo nebo obr. 6. Dva zlomky ve vztazích (7) mají po záměnách  $\mathbf{x}_Z$  za  $x_Z$  a  $\mathbf{S}_{ABZ}$  za  $S_{ABZ}$  znaménko plus, a druhé dva mínus.



Obr. 7 K situacím I, II a III

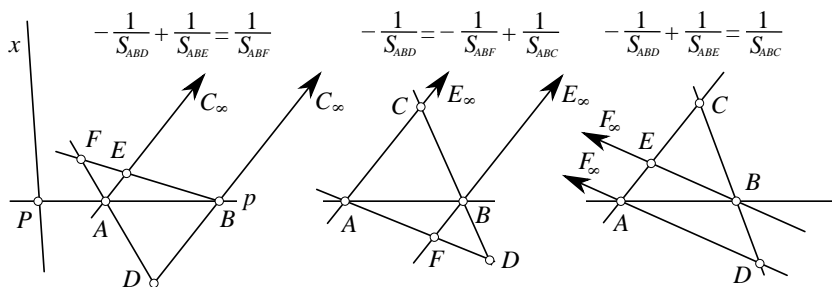
IV. Právě jeden z bodů  $Z$  je nevlastní a všechny tři vzniklé trojúhelníky leží v téže polorovině s hranicí  $p$ . Tři z možných situací vidíme na obr. 8. Představují až na označení totéž, zkrřížené žebříčky z našich počátečních úvah.



Obr. 8 Různé možnosti pro situaci IV

V. Právě jeden z bodů  $Z$  je nevlastní a všechny tři vzniklé trojúhelníky neleží v téže polorovině s hranicí  $p$ . Obr. 9 znázorňuje některé možnosti jako různé interpretace téže situace, z níž pro obsahy všech tří částí trojúhelníku rozděleného příčkou rovnoběžnou s jednou jeho stranou a libovolnou z úhlopříček vzniklého lichoběžníkového dílu plyne při označení podle obr. 10 vztah

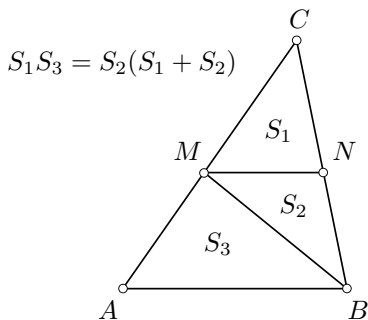
$$S_1 S_3 = S_2 (S_1 + S_2) \quad (8)$$



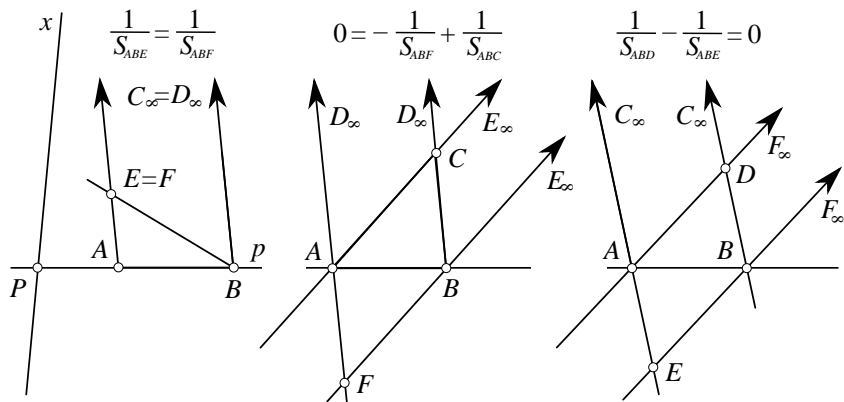
Obr. 9 Různé možnosti pro situaci V

VI. Jestliže jsou právě dva z bodů  $Z$  nevlastní, vzniknou jen dva trojúhelníky. Jejich obsahy si jsou podle (7) rovny, což snadno ověříme i názorně.





Obr. 10 Důsledek vztahů (7) pro situaci V



Obr. 11 Různé možnosti pro situaci VI

Jsou-li body  $C$  a  $D$  nevlastní, pak  $C = D$  a  $E = F$ . Trojúhelníky  $ABE$  a  $ABF$  jsou totožné, obr. 11 vlevo. Situace pro nevlastní body  $C$  a  $E$  je analogická.

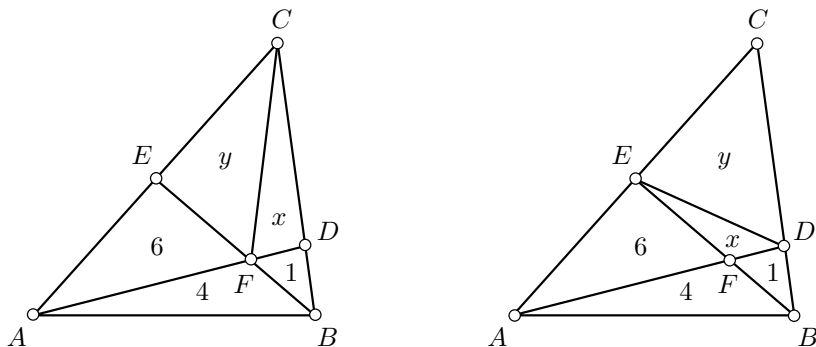
Zvolíme-li jako nevlastní body  $D$  a  $E$ , obdržíme trojúhelník  $ABF$  shodný s trojúhelníkem  $ABC$ , obr. 11 uprostřed.

Analogická situace nastane, když jsou nevlastní body  $C$  a  $F$  (obr. 11 vpravo).

Pokud by byl nevlastní bod  $F$  a jeden z bodů  $D$  a  $E$ , byl by nevlastní i druhý z nich. Konfiguracemi, kdy jsou alespoň tři body  $Z$  nevlastní se však nezabýváme (vzniká nejvýš jeden trojúhelník).

## O aplikacích

S jedním využitím věty 3 jsme se seznámili na začátku článku. Starší způsob řešení této úvodní úlohy se opírá o poznatek VI/1 z Eukleidových Základů, sice že poměr obsahů dvou stejně vysokých trojúhelníků je roven poměru jejich základů.



Obr. 12 Jiná řešení úlohy z obr. 1

Po dokreslení úsečky  $CF$  do obr. 1 a označení podle obr. 12 vlevo platí

$$\begin{aligned} S_{AFC} : S_{FDC} &= |AF| : |FD| = S_{AFB} : S_{FDB}, \\ S_{EFC} : S_{FBC} &= |EF| : |FB| = S_{EFA} : S_{FBA}. \end{aligned}$$

Odtud obdržíme soustavu rovnic

$$\frac{6+y}{x} = \frac{4}{1}, \quad \frac{y}{x+1} = \frac{6}{4},$$

jež má řešení  $x = 3$  a  $y = 6$ . Je tedy  $S_{EFDC} = x + y = 9$ .

Analogický postup podle obr. 12 vpravo vede k soustavě

$$\frac{x+y+6}{5} = \frac{y}{x+1}, \quad \frac{x}{1} = \frac{6}{4}$$

s řešením  $x = \frac{3}{2}$  a  $y = \frac{15}{2}$ .

Řešení složitějších úloh usnadňuje kombinace obou metod. Jako příklad určíme obsahy všech částí trojúhelníku  $ABC$ , které vznikly jeho rozřezáním podél cvián  $AD$ ,  $BE$  a  $CF$ . Přitom předpokládáme, že trojúhelník má obsah  $S$  a  $|AF| : |FB| = |BD| : |DC| = |CE| : |EA| = 1 : 2$ .

Při označení podle obr. 13 vlevo zjistíme pomocí věty VI/1, že platí

$$S_{ABD} = \frac{S}{3}, \quad S_{ABE} = \frac{2S}{3}.$$

Vztah (5) má tvar

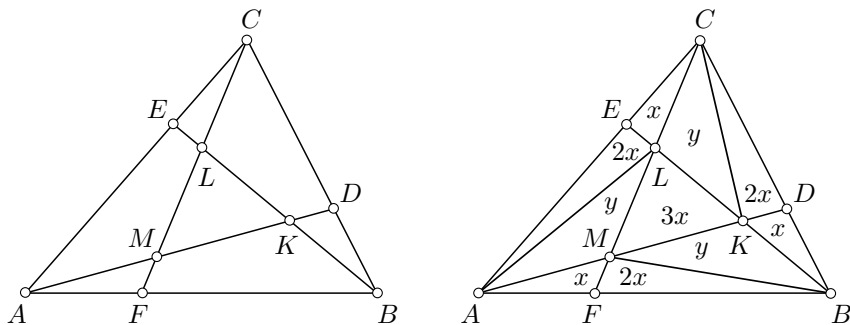
$$\frac{3}{S} + \frac{3}{2S} = \frac{1}{S_{ABK}} + \frac{1}{S}.$$

Odtud

$$S_{ABK} = \frac{2}{7}S \quad \text{a} \quad S_{BDK} = S_{ABD} - S_{ABK} = \frac{S}{21}.$$

Výpočty pro obsahy trojúhelníků  $BCL$ ,  $CEL$ ,  $CAM$  a  $AFM$  jsou analogické, obdržíme

$$\begin{aligned} S_{AFM} &= S_{BDK} = S_{CEL} = \frac{S}{21}, \\ S_{FBKM} &= S_{DCLK} = S_{EAML} = \frac{2S}{7} - \frac{S}{21} = \frac{5S}{21}, \\ S_{KLM} &= S_{BAE} - (S_{ABK} + S_{EAML}) = \frac{S}{7}. \end{aligned}$$



Obr. 13 Rozřezání trojúhelníku  $ABC$  na sedm částí

Jiné řešení, jež obchází aplikaci věty 3, využívá symetrického zadání úlohy. Body  $D$ ,  $E$  a  $F$  rozdělují strany trojúhelníku stejným způsobem. Pokud například nalezneme postup určení obsahu  $S_{AFM}$ , pak cyklickou záměnou bodů v trojicích  $(A, B, C)$ ,  $(D, E, F)$  a  $(K, L, M)$  obdržíme tentýž výsledek pro  $S_{BDK}$  nebo  $S_{CEL}$ . Můžeme tedy stejné obsahy trojúhelníků  $AFM$ ,  $BDK$  a  $CEL$  označit  $x$ . Po přidání úseček  $AL$ ,  $BM$  a  $CK$  (obr. 13 vpravo) zvolíme pro každý z obsahů trojúhelníků  $MBK$ ,  $KCL$  a  $LAM$  znak  $y$ . Trojúhelníky  $BMF$ ,  $CKD$  a  $ALE$  mají stejný obsah  $2x$ .

Snadno ověříme, že  $S_{ABD} + S_{BCE} + S_{CAF} = S$ , proto je součet obsahů částí, v nichž se tyto trojúhelníky překrývají, roven obsahu jimi nepokryté části  $KLM$  trojúhelníku  $ABC$ , tedy

$$S_{KLM} = S_{AFM} + S_{BDK} + S_{CEL} = 3x.$$

Z podmínky  $S_{FBL} = 2S_{AFL}$  obdržíme rovnost

$$5x + y = 2(x + y),$$

z níž plyne  $y = 3x$ . Sečtením obsahů všech dílů zjistíme  $S = 21x$ , odtud  $x = \frac{S}{21}$ . Triviální dopočtení ostatních obsahů vede k již uvedeným výsledkům.

## Závěr

Harmonický průměr  $h$  dvou kladných čísel  $a$  a  $b$  je definován vztahem

$$\frac{2}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

a tak lze větu 3 vyslovit i jako zajímavý a snadno zapamatovatelný poznatek:

*Harmonický průměr obsahů trojúhelníků  $ABD$  a  $ABE$  je roven harmonickému průměru obsahu jejich průniku a obsahu trojúhelníku  $ABC$ .*

Tato věta usnadňuje a urychluje řešení určitého typu úloh z matematických olympiád, což je pro řešitele výhodou. Při soutěži ušetří čas. Používání poznatku samotného při řešení úloh příliš nerozvíjí geometrické myšlení. Student se totiž aplikací naučeného vztahu vyhne důkladnější analýze načrtnutého obrázku.

Článek je v plném rozsahu použitelný pro práci v zájmové matematice. Po motivaci klasickou úlohou o žebřících mohou žáci při vhodném vedení sami nalézat další situace a řešit je, jak bylo výše uvedeno.

## Literatura

- [1] Gardner, M.: Mathematical circus. MAA, Washington, 1992.
- [2] Kuřina, F.: Umění vidět v matematice. SPN, Praha, 1989.
- [3] Stengel, H., F.: Extended crossed ladders theorem. Mathematical Spectrum, roč. 35 (2002/2003), č. 1, s. 18–20.
- [4] Vallo, D., Leischner, P.: Priečky rovnobežné so základňou lichobežníka. MFI, roč. 20 (2010/2011), č. 6, s. 321–328.