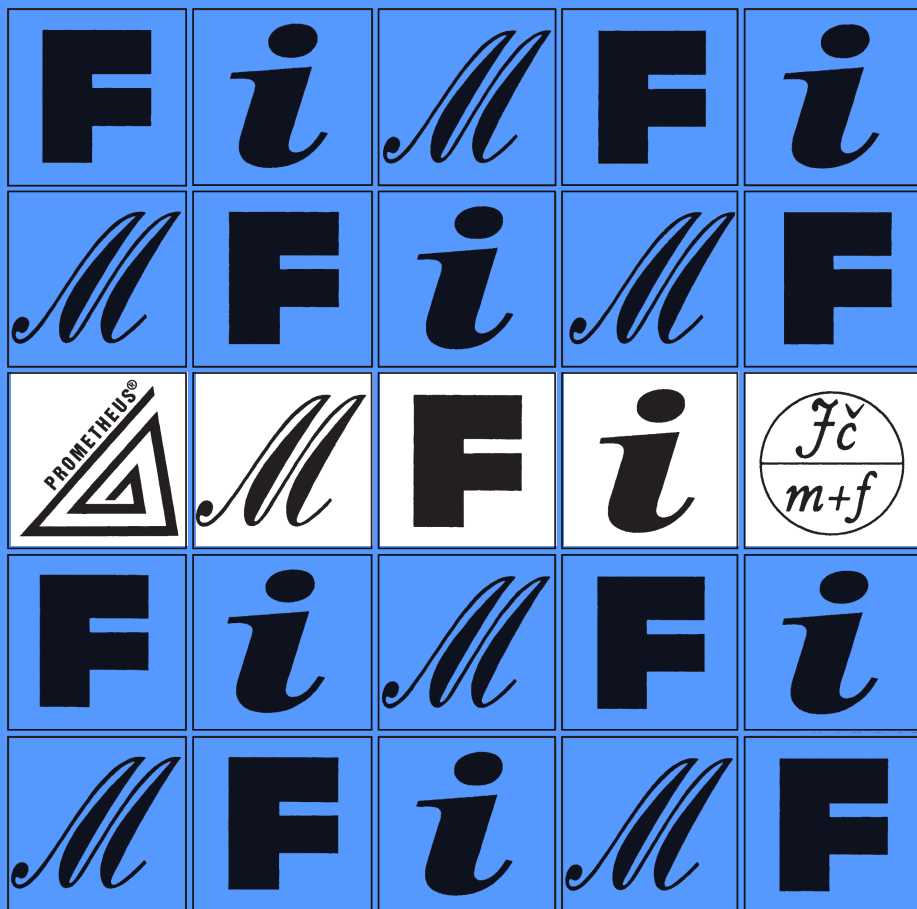


2

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXXII (2023), číslo 2

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku

Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek

Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška, Karel Kolář, Michaela Křížová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil (předseda redakční rady), Dana Mandíková, Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel Töpfer, Jaroslav Zhouf

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>P. Tlustý, M. Hrušešová</i> : Pravděpodobností modely spojené s hody kostkou . . .	81
<i>D. Nocar, V. Vaněk</i> : Matematický klokan II	86
<i>P. Leischner</i> : O úloze ze 43. ročníku Matematické olympiády	99
<i>D. Hrubý</i> : GaoKao – přijímací zkouška na čínské univerzitě	109
Zajímavé matematické úlohy	114

FYZIKA

<i>O. Lepil</i> : K vývoji fyzikálního vzdělávání na gymnáziu (1933–1983)	117
<i>V. Bartáková, P. Šimová</i> : Úlohy z mechaniky v letošním ročníku Výfuku	131

INFORMATIKA

<i>F. Frank, M. Zíka</i> : Úlohy pro výuku JavaScriptu z předmětu Programování 1 (2. díl)	141
---	-----

LITERATURA

<i>Z. Půlpán</i> : Recenze knihy Johannese Keplera Nové stereometrické výpočty vinných sudů – Stereometrie Archiméda	152
--	-----

ZPRÁVY A INFORMACE

<i>J. Molnár, J. Švrček</i> : Miloslav Zedek – významný český didaktik matematiky .	153
<i>P. Calábek</i> : Ústřední kolo 72. ročníku MO kategorie A	154
<i>P. Töpfer</i> : Ústřední kolo 72. ročníku MO kategorie P	156
<i>L. Richterek</i> : Celostátní kolo FO 2023	158

Pravděpodobností modely spojené s hody kostkou

PAVEL TLUSTÝ – MARIKA HRUBEŠOVÁ

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

K modelování konečných pravděpodobnostních prostorů se běžně používají kostky, karty, koule atd. Pravděpodobnosti konkrétních jevů pak představují vlastnosti těchto pravděpodobnostních prostorů. Například při hodu hrací kostkou nás zajímá: „Jaká je pravděpodobnost, že padne číslo 3?“, nebo „S jakou pravděpodobností padne číslo větší než 4?“ atd. Pro pokročilejší studenty jsou takové otázky příliš snadné. Jednoduchou modifikací ale můžeme snadno přejít k nekonečným pravděpodobnostním prostorům. Tak se nám otevírá možnost hledat odpovědi na nové, komplikovanější problémy s různým stupněm obtížnosti. Ukažme si to na následujících příkladech.

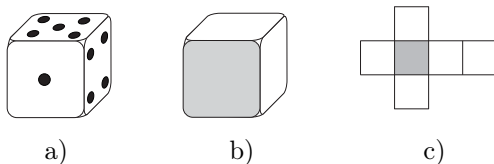
Na začátku hry „Člověče, nezlob se“ hráč hází hrací kostkou tak dlouho, dokud mu nepadne šestka. Teoreticky mu nemusí padnout nikdy, tj. může v házení pokračovat do nekonečna.

Úloha 1. *Kolikrát musíme „v průměru“ hodit hrací kostkou, než nám padne číslo 6?¹⁾*

Je dobré si uvědomit, že při čekání na šestku není podstatné (pokud nepadla šestka), jaké konkrétní číslo padlo. Z tohoto důvodu si můžeme představit, že házíme „speciální“ kostkou, která má jednu stěnu šedivou a ostatní stěny jsou bílé (obr. 1 b, c). Takovou kostkou házíme tak dlouho,

¹⁾ Odhad počtu hodů můžeme najít empiricky. Házíme opakovaně kostkou tak dlouho, až padne šestka, a zapisujeme počet vykonaných hodů. Aritmetický průměr takto získaných čísel je hledaným odhadem.

dokud nepadne šedivá stěna. Ukažme si několik různých řešení uvedeného úlohy.



Obr. 1

Řešení 1: UVědomíme si, že dobu čekání na nastání nějakého jevu můžeme modelovat pomocí tzv. geometrického rozdělení. „Průměrná“ doba čekání na šestku představuje střední hodnotu tohoto rozdělení. Po dosazení do vzorce pro střední hodnotu geometrického rozdělení dostaneme $EX = 6$ (podrobněji viz [3]). Tedy v průměru musíme šestkrát hodit kostkou, než nám padne šestka.

Řešení 2: Střední (očekávanou) hodnotu počtu hodů kostkou vypočteme podle definice, tj.

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \cdot p_n.$$

Je zřejmé, že $x_n = n$, neboť jde o počet hodů. V prvním hodu padne šestka s pravděpodobností $\frac{1}{6}$. K tomu, aby první šestka padla právě ve druhém hodu, je nutné, aby v prvním hodu šestka nepadla (to nastane s pravděpodobností $\frac{5}{6}$) a ve druhém padla (to se stane s pravděpodobností $\frac{1}{6}$). Podobně i pro další hody. Postupně tak dostáváme:

$$\begin{array}{ccccccc} x_n: & 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ p_n: & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} & \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} & \dots & \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} & \dots \end{array}$$

Tedy

$$\begin{aligned} EX &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \left(\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) + \dots + n \cdot \left(\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}\right) + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Hledaný součet vypočteme s využitím vzorce

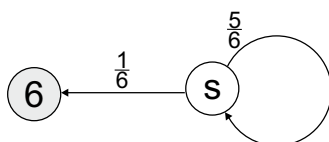
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot q^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

odvozeného v [4] a dostaneme

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6} = 6.$$

Řešení 3: K výsledku lze dojít i následující úvahou: Hrací kostka má celkem šest stěn. Vzhledem k její symetrii je zřejmé, že doba čekání na padnutí libovolného (předem zvoleného) čísla musí být pro všechna čísla stejná. K tomu, aby padlo každé číslo aspoň jednou, je třeba nejméně 6 hodů, tj. $EX \geq 6$. Kdyby $EX > 6$, pak by nutně muselo nějaké číslo mít dobu čekání na první padnutí kratší než 6, což není možné. Tedy $EX = 6$.

Řešení 4: Problém „čekání na šestku“ interpretujeme jako hru a k nalezení řešení použijeme stochastický graf. Na začátku hry stojí figurka v bodě ⑤ (viz obr. 2). Hodíme kostkou a pokud nepadne šestka, figurka zůstane stát na místě a házení kostkou se opakuje. Jakmile padne šestka, figurka se posune do bodu ⑥ a hra končí. Zbývá určit, jak dlouho to bude v „průměru“ trvat, tj. kolik hodů máme očekávat, že budeme muset vykonat, než se figurka přesune do bodu ⑥?



Obr. 2

Figurka stojí v bodě ⑤. Označme EX očekávaný počet hodů, které musíme vykonat, než figurka přejde do bodu ⑥. Co může nastat? Buď padne šestka hned v prvním hodu (to nastane s pravděpodobností $\frac{1}{6}$), nebo padne jiné číslo (s pravděpodobností $\frac{5}{6}$) a situace je opět na začátku, ale už jsme vykonali jeden neúspěšný hod. Odtud dostaneme rovnici

$$EX = 1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot (EX + 1),$$

která po vyřešení dává výsledek $EX = 6$.

Na uvedená řešení můžeme nahlížet z mnoha různých úhlů. Například zda lze takový postup jednoduše aplikovat i na nejruznější modifikace daného problému. Uvažujme následující pozměněnou situaci:

Úloha 2. *Kolikrát musíme „v průměru“ hodit hrací kostkou, než*

a) *padnou dvě šestky po sobě (série ... 66),*

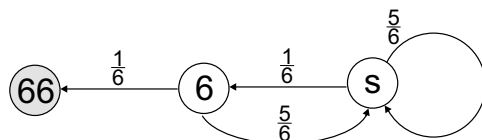
b) *padne 5 a po ní 6 (série ... 56)?*

Mohlo by se zdát, že doby čekání na obě zmíněné série jsou stejné. Nejprve čekáme, až padne číslo 5 nebo 6 (to nastane v obou případech v průměru po šesti hodech) a pak v obou případech čekáme, až padne číslo 6. Tato úvaha ale není správná!

Z postupů použitých k řešení úlohy 1 lze pouze techniku stochastických grafů snadno modifikovat na řešení úlohy 2.

Řešení:

a) Situaci opět interpretujeme jako hru. Na začátku stojí figurka v bodě $\textcircled{S}$ (obr. 3).



Obr. 3

Z řešení úlohy 1 víme, že figurka se z bodu $\textcircled{S}$ do bodu $\textcircled{6}$ přesune v průměru po šesti hodech (proto je v níže uvedené rovnici číslo 6). Je-li figurka v bodě $\textcircled{6}$ a padne 6, přesune se do bodu $\textcircled{66}$ a hra končí (to nastane s pravděpodobností $\frac{1}{6}$, proto výraz $1 \cdot \frac{1}{6}$). Pokud figurka stojí v bodě $\textcircled{6}$ a padne jiné číslo než 6 (to nastane s pravděpodobností $\frac{5}{6}$), figurka se přesune zpět do počáteční pozice $\textcircled{S}$ a doba čekání je o jeden hod delší (proto výraz $\frac{5}{6} \cdot (EX + 1)$). Odtud tedy dostáváme rovnici

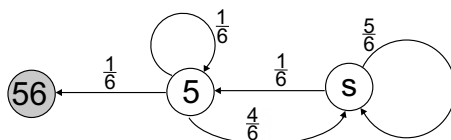
$$EX = 6 + 1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot (EX + 1)$$

a po jejím vyřešení $EX = 42$.

Série „... 66“ tedy nastává v průměru po 42 hodech.

b) Už jsme zmínili výše, že doba čekání na sérii (... 56) není stejná jako doba čekání na sérii (... 66). Jednoduché vysvětlení plyne z porovnání stochastických grafů obou sérií (obr. 3 a obr. 4).

Stojí-li figurka na obr. 3 v bodě ⑥ a nepadne-li v následujícím hodu šestka, vrátí se figurka zpět do bodu ⑤, tj. do počáteční pozice. Stojí-li figurka na obr. 4 v bodě ⑤ a nepadne-li v následujícím hodu číslo 6, přesune se figurka do bodu ⑤ pouze v případě, že padne číslo 1, 2, 3 nebo 4. V případě, že padne číslo 5, zůstává figurka stát v bodě ⑤ a házení pokračuje. Odtud je zřejmé, že doba čekání na sérii (...56) musí být kratší než doba čekání na sérii (...66).



Obr. 4

Označme EX dobu čekání na sérii (...56) a EX_6 „průměrný počet hodů“, které vykonáme, než přejde figurka z bodu ⑤ do bodu ⑤6. Analogicky jako v předchozím případě dostaneme vztahy:

$$EX = \frac{1}{6} \cdot (EX_6 + 1) + \frac{5}{6} \cdot (EX + 1),$$

$$EX_6 = 1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot (EX_6 + 1) + \frac{4}{6} \cdot (EX + 1).$$

Po vyřešení dostáváme $EX = 36$.

Série (...56) nastává v průměru po 36 hodech.

Podrobněji je technika stochastických grafů při řešení nejruznějších pravděpodobnostních úloh popsána v [1].

Literatura

- [1] Krech, I., Thustý, P.: Stochastické grafy a jejich aplikace. Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2012.
- [2] Płocki, A., Thustý, P.: Kombinatoryka wokół nas. 3. vydání, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 2017.
- [3] Płocki, A., Thustý, P.: Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé. Prometheus, Praha, 2007.
- [4] Thustý, P., Krech, I.: Užití stochastického grafu ke sčítání aritmeticko-geometrické řady. MFI, roč. 26 (2017), č. 4, s. 1–5.

Matematický klokan pro žáky základních škol II

DAVID NOCAR – VLADIMÍR VANĚK

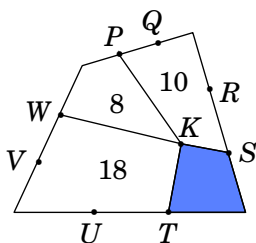
Pedagogická fakulta UP – Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V příspěvku [1] jsme se věnovali úplným řešením vybraných úloh soutěže Matematický klokan, kategorie Benjamín. Nyní se zaměříme na kategorii Kadet. Hlavním cílem tohoto příspěvku je opět nabídnout čtenářům – zájemcům o uvedenou soutěž – úplná řešení zajímavých úloh, které jsou určeny žákům 8. a 9. ročníků základní školy a odpovídajícím ročníkům víceletých gymnázií.

Všechny „klokanské“ úlohy jsou formulovány tak, aby byly řešitelné pouhou úvahou přiměřenou věku řešitele. V textu lze nalézt jak řešení, která využívají matematický aparát přesahující znalosti žáků daného věku, tak řešení úvahou, které se u úloh tohoto typu očekává. Neklademe si za cíl uvést všechna řešení úloh. Vybírali jsme především taková řešení, která může učitel využít ve výuce v rámci konkrétního učiva.

Kadet (MK 2021, úloha č. 24)

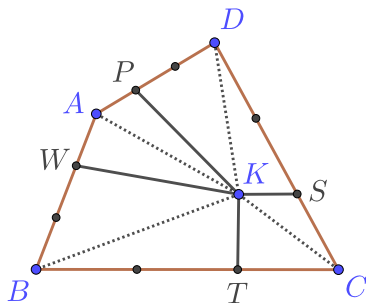
Na obrázku je velký čtyřúhelník rozdělený na čtyři menší se společným vrcholem K . Ostatní označené body rozdělují strany velkého čtyřúhelníku vždy na tři stejné části. Čísla udávají obsahy příslušných malých čtyřúhelníků.



Jaký je obsah modrého čtyřúhelníku?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 6,5 (E) 7

Řešení 1. Uvažujme velký čtyřúhelník $ABCD$, kde $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$ (viz obrázek). Nechť s je obsah hledaného čtyřúhelníku. Rozdělme každý ze čtyř malých čtyřúhelníků na dva trojúhelníky tak, jak je naznačeno na obr. 1.



Obr. 1

Následující rovnice vyjadřují obsahy jednotlivých malých čtyřúhelníků, kde v_a , v_b , v_c a v_d jsou po řadě délky výšek v trojúhelnících ABK , BCK , CDK a DAK z vrcholu K .

$$S_{BTKW} : \quad \frac{2}{3}(\frac{1}{2}a \cdot v_a) + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}b \cdot v_b) = 18, \quad (1)$$

$$S_{WKPA} : \quad \frac{1}{3}(\frac{1}{2}a \cdot v_a) + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}d \cdot v_d) = 8, \quad (2)$$

$$S_{PKSD} : \quad \frac{2}{3}(\frac{1}{2}c \cdot v_c) + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}d \cdot v_d) = 10, \quad (3)$$

$$S_{KTCS} : \quad \frac{1}{3}(\frac{1}{2}b \cdot v_b) + \frac{1}{3}(\frac{1}{2}c \cdot v_c) = s. \quad (4)$$

Odečteme-li rovnici (3) od dvojnásobku rovnice (2), resp. dvojnásobek rovnice (4) od rovnice (1), dostáváme

$$\frac{2}{6}(a \cdot v_a - c \cdot v_c) = 6,$$

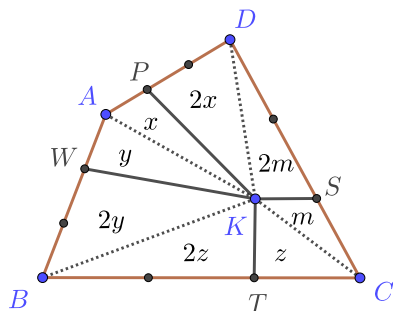
resp.

$$\frac{2}{6}(a \cdot v_a - c \cdot v_c) = 18 - 2s.$$

Odtud $s = 6$.

Řešení 2. Jiné řešení vychází ze stejného obrázku, ovšem explicitně nevyužívá výšek trojúhelníku. Trojúhelníky BTK a TCK mají stejnou výšku v_b ,

ovšem velikosti základů jsou v poměru 2 : 1. Tedy obsahy trojúhelníků jsou rovněž v poměru 2 : 1. Obdobně pro další dvojice trojúhelníků. V obrázku můžeme vyznačit písmeny x , y , z , m obsahy příslušných trojúhelníků.



Obr. 2

Odtud

$$2x + 2m = 10, \quad (5)$$

$$x + y = 8, \quad (6)$$

$$2y + 2z = 18, \quad (7)$$

$$m + z = s. \quad (8)$$

Sečtením rovnic (5) a (7), získáme po úpravě rovnici $x + y + m + z = 14$. Vzhledem k rovnici (6) pak platí $s = m + z = 6$, což je hledaný výsledek.

Závěr: Obsah hledaného čtyřúhelníku je 6.

Kadet (MK 2013, úloha č. 19)

Lukáš si vybral pětimístné kladné celé číslo a vymazal jednu číslici, aby měl čtyřmístné číslo. Součet tohoto čtyřmístného čísla a původního pětimístného čísla je 52 713. Vypočítejte součet číslic původního pětimístného čísla.

- (A) 17 (B) 19 (C) 23 (D) 24 (E) 26

Řešení. Nechť původní pětimístné číslo má tvar $\overline{abcde}$. Je zřejmé, že vymazanou číslici musela být ta na místě jednotek, tedy e . Pokud by Lukáš vymazal kteroukoliv jinou, pak by součet původního pětimístného a nového čtyřmístného čísla byl sudý, což není. Graficky může součet označit

takto:

$$\begin{array}{r} \overline{abcde} \\ + \overline{abcd} \\ \hline 52713 \end{array}$$

Pro původní pětimístné číslo jistě platí:

$$\overline{abcde} = \overline{abcd0} + e = 10 \cdot \overline{abcd} + e.$$

Můžeme tedy Lukášův součet psát ve tvaru

$$10 \cdot \overline{abcd} + e + \overline{abcd} = 52713,$$

neboli

$$11 \cdot \overline{abcd} = 52713 - e, \quad \text{kde } e \in \{0, 1, \dots, 9\}.$$

Vzhledem k uvedenému musí být výraz na pravé straně dělitelný jedenáctí a to pro nejvýše jedno číslo e . Snadno podle kritéria dělitelnosti jedenáctí zjistíme, že hledané $e = 1$. Pokud kritérium neznáme, stačí číslo 52713 dělit 11 a dohledat zbytek po dělení.

Nyní můžeme postupovat několika způsoby. Například využijeme dosažení $e = 1$ do výše zmíněného grafického zápisu součtu a postupně dohledáváme zbývající číslice (pokud jsme v předchozím kroku využili kritéria dělitelnosti), případně dělením čísla 52713 číslem 11, získáme přímo hodnotu $\overline{abcd} = 4792$.

Závěr: Součet číslic původního pětimístného čísla je $4 + 7 + 9 + 2 + 1 = 23$.

Kadet (MK 2014, úloha č. 22)

Skupina lidí se skládá z *pravdomluvných* (vždy říkají pravdu), *střídavých* (pravidelně střídají pravdu a lež, tj. odpovědí-li na první otázku lživě, na druhou odpovědí pravdivě, na třetí zase lživě atd.), a *lhářů* (vždy lžou). Každému byly po sobě položeny tři následující otázky. Na otázku: „Jste pravdomluvný?“ odpovědělo 17 lidí „Ano“. Na otázku: „Jste střídavý?“ odpovědělo 12 lidí „Ano“ a na otázku: „Jste lhář?“ odpovědělo „Ano“ 8 lidí. Kolik je ve skupině pravdomluvných?

- (A) 4 (B) 5 (C) 9 (D) 13 (E) 17

Řešení 1: Pro větší přehlednost si nejprve označme počet pravdomluvných P , počet střídavých, kteří právě mluví pravdu S_P , počet střídavých, kteří aktuálně lžou S_L , a počet lhářů L .

Začneme analyzovat odpovědi od poslední (třetí) otázky „Jste lhář?“. Na ni mohli odpovědět „Ano“ pouze střídaví, kteří aktuálně lhali, tedy $S_L = 8$.

Na druhou otázku „Jste střídavý?“ odpověděli „Ano“ pouze lháři a střídaví, kteří aktuálně mluvili pravdu. Jsou to stejní střídaví, kteří na třetí otázku lhali, nebo-li $L + S_P = L + 8 = 12$, odtud $L = 4$.

Na první otázku „Jste pravdomluvný?“ odpověděli „Ano“ všichni pravdomluvní, lháři a střídaví, kteří aktuálně lhali (a lhali i u třetí otázky). Celkem $P + L + S_L = P + 4 + 8 = 17$, tedy $P = 5$.

Řešení 2: Úlohu lze zjednodušit úvahou, že pokud střídavý člověk odpoví pravdivě na první otázku, budou všechny jeho odpovědi znít „Ne“, tudíž lze tuto skupinu ve výpočtu zanedbat. Naopak pokud střídaví v první otázce odpoví lživě „Ano“, budou odpovídat „Ano“ na všechny otázky. Označme si tuto skupinu S_{L_1} . Pak lze úlohu řešit od první otázky a jednoduše ji zaznačit do tabulky:

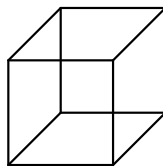
	P	S_{L_1}	L	odpovědi „Ano“
1. otázka	P	S_{L_1}	L	17
2. otázka	0	S_{L_1}	L	12
3. otázka	0	S_{L_1}	0	8

Z tabulky je rovněž patrné, že informace o odpovědích na třetí otázku není pro řešení úlohy nutná.

Závěr: Ve skupině je 5 pravdomluvných osob.

Kadet (MK 2015, úloha č. 21)

Kamil má sedm kousků drátu o délkách 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm a 7 cm. Některé z těchto kousků použije k vytvoření drátěné modelu krychle o hranách délky 1 cm bez jakýchkoli překrytí. Určete nejmenší počet drátů, které může Kamil použít.



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

Řešení: Krychle má 8 vrcholů, 12 hran a každý vrchol je koncovým bodem tří hran. Každý z drátů má zřejmě dva konce a v každém vrcholu bude buď jeden, nebo tři konce některých drátů. V osmi vrcholech tak musí být minimálně osm konců drátů, proto nám nemohou stačit ani jeden, ani dva,

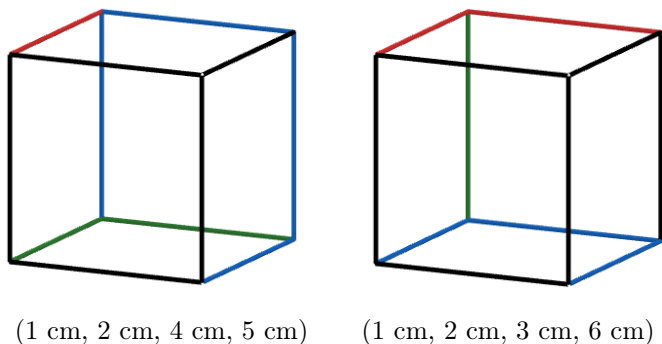
ani tři dráty. Musíme tedy použít minimálně čtyři dráty. Ukažme, že jich nemůže být více.

Zadané délky drátů jsou 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, a 7 cm, přičemž pro uvedený drátěný model krychle je potřeba celkem 12 cm drátu. Pokud bychom chtěli využít pěti drátů, zjistíme, že součet délek pěti nejkratších drátů 15 cm.

Nutnou podmínkou pro řešení úlohy je tedy využití čtyř drátů. Vzhledem k pravidlům soutěže jsme řešení našli. Ovšem o úplném řešení úlohy nemůžeme mluvit. Nejedná se totiž o podmínku postačující. Musíme ukázat, že takový model lze ze čtyř drátů sestavit.

Využijme znovu součet délek hran krychle (12 cm). Z nabízených drátů můžeme vybrat pouze čtveřice (1 cm, 2 cm, 4 cm, 5 cm), nebo (1 cm, 2 cm, 3 cm, 6 cm).

Obě možnosti vidíme na obr. 3.



Obr. 3

Závěr: K vytvoření zadaného modelu krychle je třeba čtyř drátů.

Kadet (MK 2015, úloha č. 24)

Včera jsem si zapsal telefonní číslo svého přítele Emila. Telefonní číslo na mém lístečku má šest číslic, ale vzpomínám si, že Emilovo číslo má číslic sedm. Vůbec si nevzpomínám, kterou z číslic jsem zapomněl napsat ani kde se v telefonním čísle nacházela. Najděte nejmenší možný počet různých telefonních čísel, která budu muset zkusit, abych měl jistotu, že mezi nimi je správné telefonní číslo. (Telefonní číslo může začínat jakoukoliv číslicí včetně 0.)

- (A) 55 (B) 60 (C) 64 (D) 70 (E) 80

Řešení: Emilovo číslo, které jsem si napsal na lísteček označme následujícím způsobem $\overline{ABCDEF}$, kde $A, B, C, D, E, F \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Označme $\star$ pozice (je jich celkem sedm), kde se může nacházet zapomenutá číslice, která je opět z množiny $\{0, 1, \dots, 9\}$:

$$\star A \star B \star C \star D \star E \star F \star.$$

Pozici první hvězdičky zleva můžeme obsadit deseti různými číslicemi. Nastane právě jeden případ, kdy na prvních dvou místech $\star A$ sedmimístného čísla $\star \overline{ABCDEF}$ jsou stejné číslice. Pokud by zapomenutá číslice byla na pozici druhé $\star$ zleva, pak ji můžeme obsadit pouze devíti různými číslicemi. Musíme vynechat případ, kdy je na prvních dvou pozicích $A\star$ opět dvojice stejných čísel (ten jsme již jednou započítali). Totéž platí pro všechny další pozice.

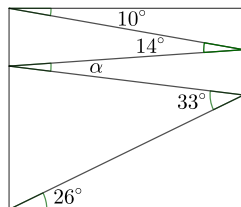
Celkem máme deset možností pro hodnotu první $\star$ a po devíti možnostech u všech zbývajících $\star$, tedy $10 + 9 \cdot 6 = 64$.

Závěr: Hledaných telefonních čísel je tedy 64.

Kadet (MK 2018, úloha č. 12)

Petr rýsuje uvnitř obdélníku úsečky, které svírají úhly o velikostech 10° , 14° , α , 33° , 26° , jak je znázorněno na obrázku. Určete α .

(A) 11° (B) 12° (C) 16° (D) 17° (E) 33°



Řešení 1: Úlohu lze řešit různými přístupy a dle toho užít různého matematického aparátu. Začneme např. zleva, tj. budeme postupovat podle levé strany obdélníku (viz obr. 4). Začínáme v levém horním vrcholu pravým úhlem. Od jeho velikosti odečteme známou část 10° .

$$90^\circ - 10^\circ = 80^\circ.$$

Dále dopočítáme zbývajících hodnotu třetího úhlu v trojúhelníku. Již známe hodnoty dvou vnitřních úhlů trojúhelníku tj. vypočítaná hodnota 80° a zadaná hodnota 14° .

$$180^\circ - (80^\circ + 14^\circ) = 86^\circ.$$

Totéž provedeme odspodu počínaje levým spodním vrcholem obdélníku. Od jeho velikosti odečteme známou část 26° .

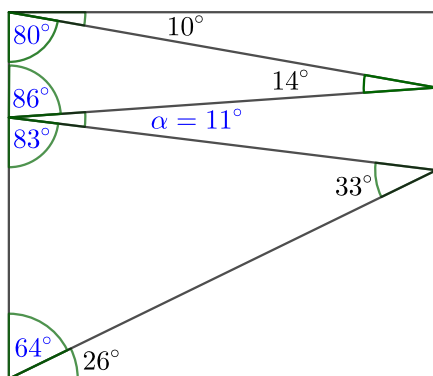
$$90^\circ - 26^\circ = 64^\circ.$$

Opět pokračujeme dopočítáním velikosti třetího vnitřního úhlu v trojúhelníku. Znamé hodnoty zbývajících dvou úhlů jsou vypočítaná hodnota 64° a zadaná hodnota 33° .

$$180^\circ - (64^\circ + 33^\circ) = 83^\circ.$$

Nyní se dostáváme k úhlu α , jehož velikost vypočítáme *jako doplněk do přímého úhlu*. V prvním kroku jsme se dopočítali k části přímého úhlu rovné 86° a ve druhém kroku jsme se dopočítali k části přímého úhlu rovné 83° .

$$\alpha = 180^\circ - (86^\circ + 83^\circ) = 11^\circ.$$



Obr. 4

Řešení 2: Zde budeme postupovat obdobně jako u předchozího řešení, ale budeme postupovat podél pravé strany obdélníku (viz obr. 5). Začneme v pravém horním vrcholu pravým úhlem. Ten je součástí pravoúhlého trojúhelníku s dalším známým úhlem velikosti 10° . Dopočítáme velikost zbývajících úhlů v trojúhelníku.

$$180^\circ - (90^\circ + 10^\circ) = 80^\circ.$$

Vypočítaná hodnota velikosti zbývajících úhlů v trojúhelníku je příslušná vrcholu trojúhelníku, který budeme dále považovat za vrchol přímého úhlu rozděleného na tři části. Neznámou třetí část získáme z vypočítané hodnoty v předchozím kroku a zadané hodnoty 14° .

$$180^\circ - (80^\circ + 14^\circ) = 86^\circ.$$

Stejným způsobem budeme pokračovat odspodu. Pravý spodní vrchol obdélníku je součástí pravoúhlého trojúhelníku s dalším známým úhlem velikosti 26° . Dopočítáme velikost zbývajících úhlů v trojúhelníku.

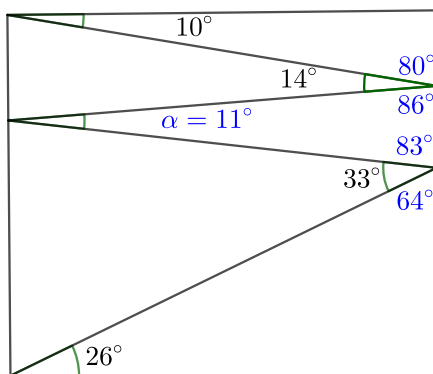
$$180^\circ - (90^\circ + 26^\circ) = 64^\circ.$$

Vrchol příslušný tomuto úhlu v pravoúhlém trojúhelníku budeme dále považovat za vrchol přímého úhlu rozděleného na tři části. Hodnota jedné části je výsledkem předchozího kroku a dále známe zadanou hodnotu 33° . Vypočítáme hodnotu zbývajících částí.

$$180^\circ - (64^\circ + 33^\circ) = 83^\circ.$$

Nyní můžeme vypočítat velikost úhlu α jako velikost neznámého úhlu v trojúhelníku. V prvním kroku jsme se dopočítali k jednomu úhlu v trojúhelníku o velikosti 86° . V druhém kroku jsme se dopočítali k dalšímu úhlu o velikosti 83° téhož trojúhelníku.

$$\alpha = 180^\circ - (86^\circ + 83^\circ) = 11^\circ.$$



Obr. 5

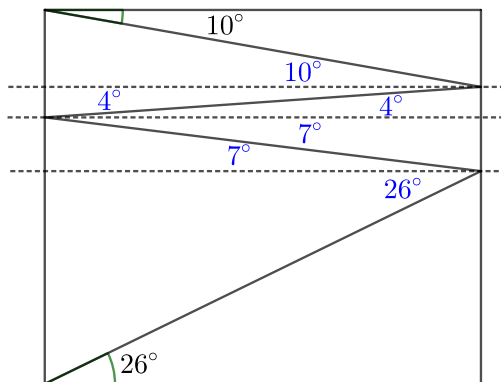
V předchozích dvou řešeních, i když v prvním se velikost úhlu α , získala jako doplněk do přímého úhlu a v druhém řešení se tatáž hodnota získala jako velikost třetího úhlu v trojúhelníku, ve finále vyplynul stejný vztah se stejnými hodnotami. V podstatě veškeré vypočítané hodnoty byly u obou řešení stejné. Kromě toho, že velikost přímého úhlu je totožná se součtem vnitřních úhlů trojúhelníku je zde i další souvislost mezi velikostmi úhlů v zadaném obrazci.

Řešení 3: Jelikož se jedná o „klokanskou“ úlohu, lze předpokládat existenci rychlejšího řešení, než které plyne na první pohled za zadání a s tím související užitý matematický aparát. Úlohu jsme již řešili zleva i zprava, nyní zkusíme něco mezi. Mezi ramena vytyčených úhlů doplníme přímky procházející jejich vrcholy rovnoběžné s dolní stranou obdélníku. Původně zkonstruované úhly v obdélníku se nám rozdělí na dílčí části (kromě krajních). Velikosti úhlů začneme počítat např. shora (viz obr. 6).

Vezmeme-li v úvahu horní stranu obdélníku a první rovnoběžku, získáváme dvojici střídavých úhlů, které jsou shodné. Tudíž k úhlu velikosti 10° získáváme druhý shodný úhel a zbytek do zadaného úhlu velikosti 14° představuje úhel velikosti 4° . Druhá rovnoběžka nám dělí úhel α na dvě části. Jedno jeho rameno v pásu mezi první a druhou rovnoběžkou opět vymezuje shodné střídavé úhly, a to o velikosti 4° . Nyní již známe velikost jedné ze dvou částí úhlu α .

Stejným způsobem postupujeme na obrázku zdola. Uvažujeme dvojici rovnoběžek dolní stranu obdélníku s rovnoběžkou k ní nejbližší. Tato rovnoběžka nám dělí úhel velikosti 33° na dvě části. Ze shodnosti střídavých úhlů je větší část rovna 26° , tudíž zbývající část musí být úhel velikosti 7° . Analogicky směrem k další rovnoběžce, která prochází vrcholem úhlu α ve vymezeném pásu, získáváme hodnotu druhé části úhlu α z dvojice střídavých úhlů s úhlem velikosti 7° .

Nyní již známe velikosti obou částí úhlu α , tedy $\alpha = 4^\circ + 7^\circ = 11^\circ$.



Obr. 6

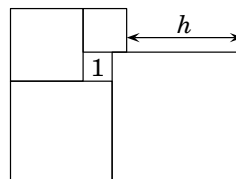
Závěr: Velikost úhlu α je 11° .

Poznámka. Jednou z možností řešení úlohy ze soutěže Matematický klokan je eliminace distraktorů¹⁾. V této úloze jsou nabízené alternativy odpovědí až na jednu velmi blízké hodnoty, proto nelze touto strategií eliminovat veškeré distraktory. Dále by bylo vhodné žáky před řešením úlohy upozornit, že obrázek je pouze ilustrativní, tudíž jak uvedené, tak naměřené hodnoty nemusí odpovídat skutečnosti.

Kadet (MK 2021, úloha č. 14)

Na obrázku je pět dotýkajících se čtverců. Nejmenší má obsah 1 cm^2 . Určete v centimetrech délku h .

- (A) 3 (B) 3,5 (C) 4 (D) 4,2 (E) 4,5



Řešení 1: Úloha je velmi jednoduchá, ale žáky by mohla zaskočit malým množstvím vstupních informací. Hledáme konkrétní hodnotu h jako část strany čtverce, která nemá pevně danou délku. Pokud by si žáci obrázek sami kreslili, asi by si nebyli jisti, jakou délku strany dalšího čtverce např. nad tím nejmenším čtvercem si zvolit, protože prozatím neví, že na tom nezáleží. To se dozví, až úlohu vyřeší.

Nejprve vyjdeme z informace, že nejmenší čtverec má obsah 1 cm^2 , z čehož plyne, že délka jeho strany je rovna 1 cm . (Pro větší přehlednost nebudeme v dalším textu ani v obrázcích uvádět fyzikální jednotky.) Další čtverec v pořadí dle velikosti má o nějakou hodnotu svou stranu delší. Tuto hodnotu si označíme x (viz obr. 7). Délka strany druhého čtverce je tedy rovna $1 + x$.

Další čtverec v pořadí dle velikosti má oproti předchozímu čtverci svou stranu delší o délku strany výchozího nejmenšího čtverce, tj. o 1 . Délka jeho strany je tedy rovna $1 + (1 + x)$.

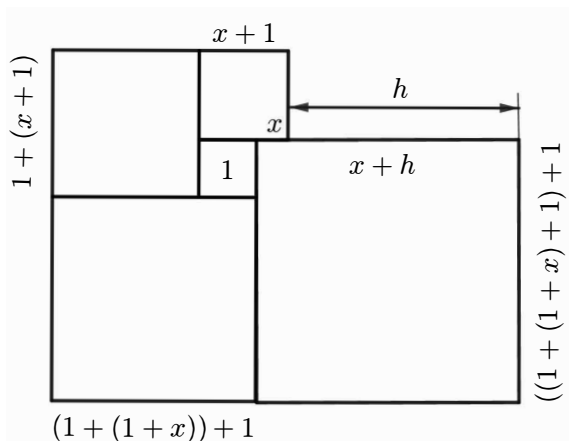
Stejným způsobem pokračujeme dál k dalšímu čtverci, jehož délka strany je o 1 delší než délka strany čtverce předchozího, tj. $(1 + (1 + x)) + 1$.

Nyní se dostáváme k největšímu čtverci, jehož délka strany je opět o 1 delší než délka strany čtverce předchozího, tj. $((1 + (1 + x)) + 1) + 1$.

Při nárůstu délek stran čtverců jsme si sčítance zapisovali v pořadí dle obrázku, ale u součtu na pořadí sčítanců nezáleží, proto si výslednou délku největšího čtverce můžeme upravit následovně:

$$((1 + (1 + x)) + 1) + 1 = x + 1 + 1 + 1 + 1 = x + 4.$$

¹⁾tj. alternativa odpovědi v položkách s volbou, často podobná, ale nesprávná varianta odpovědi (SCS.ABZ.CZ slovník cizích slov)



Obr. 7

Již na počátku našeho řešení jsme označili část strany druhého nejmenšího čtverce x . Tato hodnota x je ale také částí délky strany největšího čtverce, kde zbývající délka strany je hledaná hodnota h . Proto délka strany největšího čtverce je rovna $x + h$.

Nyní máme k dispozici dvě vyjádření délky strany téhož čtverce, proto se tyto hodnoty sobě musí rovnat:

$$x + 4 = x + h.$$

Z této jednoduché rovnice je patrné, že hledaná hodnota $h = 4$. Zde si žáci mohou uvědomit, co již bylo zmíněno na počátku, že v dané úloze na délce x vůbec nezáleží.

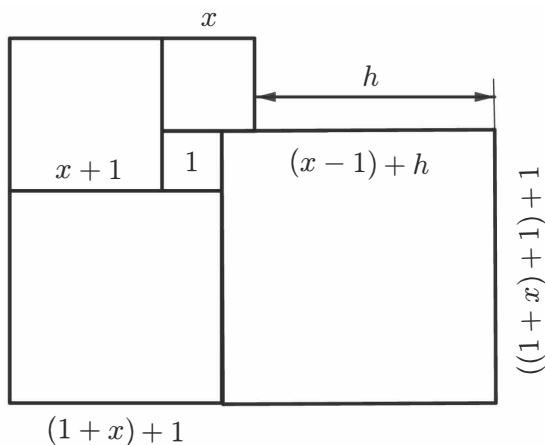
Řešení 2: Můžeme si ukázat ještě jeden postup, který je ale analogický, liší se pouze tím, co si v obrázku označíme za neznámou hodnotu x .

Opět vyjdeme z počáteční informace o nejmenším čtverci, jehož obsah je 1 a tudíž délka jeho strany je rovna 1. S touto hodnotou budeme počítat o něco později, nyní si délku strany dalšího čtverce v pořadí dle velikosti označíme jako neznámou x (viz obr. 8).

Nyní postupujeme analogicky jako při předchozím řešení. Další čtverec má délku strany rovnu $1 + x$, další čtverec o 1 víc, tj. $(1 + x) + 1$ a největší čtverec má délku strany také ještě o 1 větší, tj. $((1 + x) + 1) + 1 = x + 3$.

Vrátíme-li se na začátek našeho postupu, kdy jsme délku v pořadí dle velikosti druhého čtverce označili x , dostáváme, že zbývající část strany

největšího čtverce mimo hodnotu h je rovna $x - 1$. Proto délku strany největšího čtverce můžeme vyjádřit $(x - 1) + h$.



Obr. 8

Nyní máme opět k dispozici dvě vyjádření délky strany téhož čtverce, proto se tyto hodnoty sobě musí rovnat:

$$x + 3 = (x - 1) + h.$$

Např. dle asociativity operace sčítání můžeme zapsat: $x + 3 = x + (h - 1)$. Z tohoto tvaru rovnice je patrné, že $3 = h - 1$, z čehož plyne, že $h = 4$.

Závěr: Hledaná délka h je rovna 4 cm.

Literatura

- [1] Nocar, D., Vaněk, V.: Matematický klokan pro žáky základních škol I. MFI, roč. 31 (2022), č. 3, s. 178–188.
- [2] *Matematický klokan* [online]. Olomouc, 2022 [cit. 1.12.2022]. Dostupné z: <http://www.matematickyklokan.net/>
- [3] *Mathematical Kangaroo* [online]. Paříž, 2022 [cit. 29.12.2022]. Dostupné z: <https://support.aksf.org/default.aspx>
- [4] *Association Kangourou sans Frontieres* [online]. Paříž, 2022 [cit. 12.12.2022]. Dostupné z: <http://aksf.org/>

O úloze ze 43. ročníku Matematické olympiády

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

V Matematické olympiádě byly do soutěže dvakrát vybrány úlohy s neúplným autorským řešením, což pak způsobilo komplikace. Poprvé to byla úloha A-I-8 z prvního ročníku MO. Je i s kompletním řešením dostupná v ročence [5]¹⁾ a její historii popsal J. Vyšín [4].

Druhou úlohou je MO 43 A-S-2 navržená J. Vinárkem. Organizace soutěže tehdy prodělávala krizi, a tak byla příprava úloh pro tento ročník jedním z prvních činů Úlohové komise ustanovené v září roku 1992 za účelem nápravy.

Až při soutěži se zjistilo, že autorské řešení této geometrické úlohy vynechalo jednu z možných situací. Pokusy doplnit řešení překračovaly rozsah učiva matematiky SŠ. Jedním z nich byl i můj návrh převést úlohu na sestrojení tečen z bodu k hyperbole.

Kolem roku 2009 jsem se k úloze vrátil a vyřešil ji metodou obsahů, která kromě znalosti funkce sinus a planimetrie na úrovni ZŠ požadovala jen umět řešit lineární a kvadratické rovnice. Kolegové z úlohové komise mě za to pochválili a zařadili i mezi autory ročenky [1], v níž však mé řešení nahradili abstraktnějším, jež využívá úsekový tvar rovnice přímky v kosoúhlých souřadnicích. Můj původní postup považuji za přístupnější širšímu okruhu zájemců. Uvedu jej i s historickým komentářem.

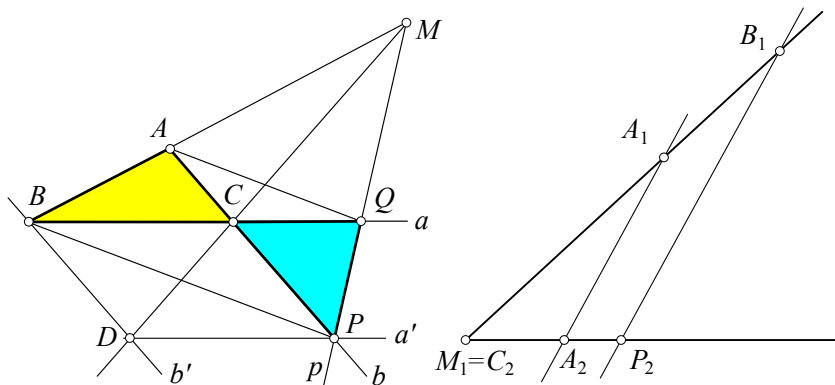
Úloha MO 43 A-S-2

Je dán trojúhelník ABC a bod M na polopřímce opačné k polopřímce AB . Bodem M veďte přímku $p \neq AB$ tak, aby její průsečíky P , Q s přímkami AC , BC určovaly trojúhelník PQC stejného obsahu, jako má trojúhelník ABC .

¹⁾Všechny ročenky MO by měly být brzy dostupné v elektronické podobě z rozcestníku na stránkách Matematické olympiády.

Autorské řešení a průběh soutěže

Řešení popíšeme stručně pomocí obr. 1 vlevo. Z rovnosti obsahů trojúhelníků PQC a ABC plyne $S_{AQP} = S_{AQC} + S_{PQC} = S_{AQC} + S_{ABC} = S_{AQB}$. Navíc mají trojúhelníky AQP a AQB společnou základnu AQ , a proto k ní stejné výšky. Úsečky BP a AQ jsou tedy rovnoběžné a stejno-
lehlé ve stejno-
lehlosti se středem M , která zobrazí trojúhelník AQC na trojúhelník BPD , kde D je průsečík přímky MC a rovnoběžky b' vedené z bodu B k přímce $b = AC$.



Obr. 1 Řešení úlohy, pokud bod C leží mezi body A , P

Tím je dána konstrukce bodu D . Bod P nalezneme jako průsečík přímky AC s přímkou $a' \parallel BC$ vedenou bodem D . Úloha má za daných podmínek vždy jediné řešení, přímku $p = MP$. Triviální situaci $M = A$ zmíníme později.

Podstatné je, že autorské řešení nevyšetřuje další možnosti. Soutěžící, kteří si nakreslili obrázek s bodem A mezi body C a P , nedokázali úlohu vyřešit.

Ti úspěšnější vycházeli ze situace na obr. 1. Pokud zjistili, že $BP \parallel AQ$, dokončovali postup i jinak. Opravoval jsem tehdy klauzurní kolo na strakonickém gymnáziu a potěšilo mne řešení Jana Rychtáře ze třídy 3.A. Ten konstatoval, že jsou úsečky BP a AQ stejno-
lehlé dvojím způsobem. První stejno-
lehlost má střed C , druhá střed M . Absolutní hodnoty koeficientů stejno-
lehlostí jsou stejné, rovnají se podílu délek obou úseček, a tak

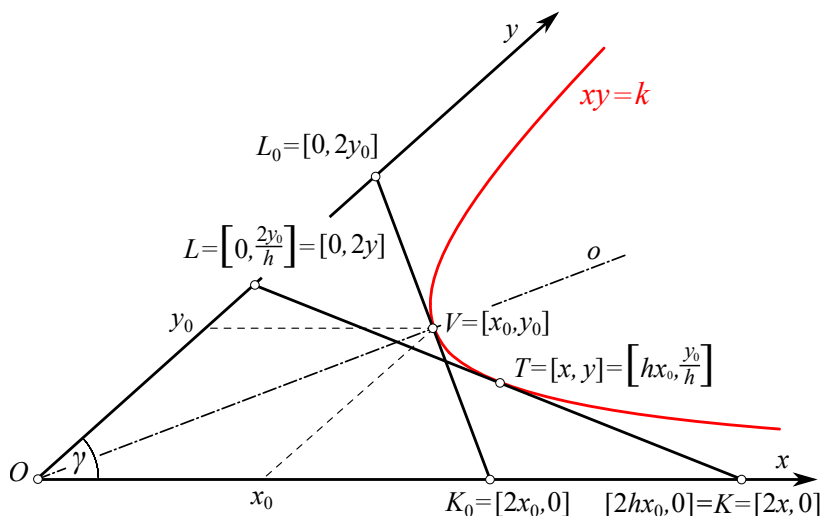
$$\frac{|CP|}{|CA|} = \frac{|MB|}{|MA|}.$$

Po soutěži

Řešení využívá poznatku, že tečny k hyperbole oddělují od úhlu jejich asymptot trojúhelníky téhož obsahu. Snadno to dokážeme pomocí zobrazení $\mathcal{H}$ zvaného *hyperbolická rotace*, jež je v ortonormální (ale ne nutně pravouhlé) soustavě souřadnic Oxy dáno předpisem

$$\mathcal{H}: x' = hx, \ y' = \frac{y}{h}, \quad \text{kde } h \notin \{0, 1\} \text{ je reálná konstanta.} \quad (1)$$

Nazývá se tak proto, že každý bod hyperboly $xy = k$ zobrazuje na jiný bod téže hyperboly. Dosazením parametrického vyjádření přímky nebo úsečky do (1) se lze přesvědčit, že zobrazuje přímku na přímku a úsečku na úsečku. Asymptoty hyperboly $xy = k$ (tzn. osy soustavy souřadnic) jsou samodružné.



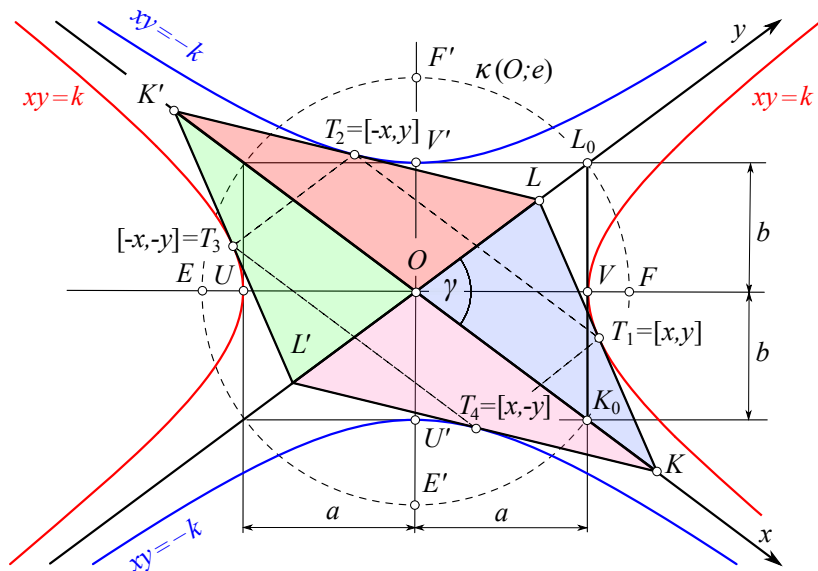
Obr. 2 K vlastnostem hyperbolické rotace

Uvažujme nejprve situaci na obr. 2. Úsečka K_0L_0 je část vrcholové tečny hyperboly $xy = k > 0$ ohraničená jejími asymptotami. Vrchol $V = [x_0, y_0]$ hyperboly je středem úsečky K_0L_0 , jak plyne ze souměrnosti podle přímky OV . Lze tedy psát $K_0 = [2x_0, 0]$ a $L_0 = [0, 2y_0]$.

Je-li $T = [x, y]$ jiný bod větve hyperboly, pak při volbě $h = \frac{x}{x_0}$ platí $T = \mathcal{H}(V)$. Tečna hyperboly v bodě T je obrazem tečny v bodě V . Protíná asymptoty v bodech $K = \mathcal{H}(K_0)$, a $L = \mathcal{H}(L_0)$. Odtud a z obr. 2 vidíme, že $K = [2x, 0]$, $L = [0, 2y]$ a dotykový bod T je středem úsečky KL . Trojúhelníky OKL a OK_0L_0 mají stejný obsah S , neboť

$$S = \frac{1}{2}|OK| \cdot |OL| \sin \gamma = 2xy \sin \gamma = 2x_0y_0 \sin \gamma = S_{OK_0L_0}.$$

Rozšířme nyní úvahy na celou rovinu. Asymptoty ji rozdělují na 4 úhly, v každém z nich se nachází jedna z větví hyperbol $xy = k$ a $xy = -k$. Jejich poloosy značíme a, b a excentricitu e . Z definice hyperboly je známo, že $a^2 + b^2 = e^2$ a v trojúhelníku OK_0L_0 je $|K_0L_0| = 2b$, $|OK_0| = |OL_0| = e$, $|OV| = a$ (obr. 3).



Obr. 3 Konstrukce tečen z bodu M k hyperbole

Mezi všemi tečnami k těmto hyperbolám existují vždy čtyři, jejichž body dotyku mají až na znaménka stejné souřadnice. Při označení podle obr. 3

tyto tečny ohraničují rovnoběžník $KLK'L'$, jehož úhlopříčky se protínají v počátku O soustavy souřadnic.

Není těžké ověřit, že pro obsah S každého z trojúhelníků OKL , OLK' , $OK'L'$ a $OL'K$ platí

$$S = \frac{1}{2}|OK| \cdot |OL| \sin \gamma = \frac{1}{2}e^2 \sin \gamma = ab = 2|xy| \sin \gamma = 2|k| \sin \gamma \quad (2)$$

Aplikací uvedených poznatků na úlohu A-S-2 zjišťujeme, že k jejímu vyřešení stačí zvolit soustavu souřadnic Cxy s osami x , y na přímkách CB , CA , a z bodu M sestrojít všechny tečny k hyperbolám o rovnících

$$xy = \pm \frac{e^2}{4}, \quad \text{kde } e = \sqrt{|CA| \cdot |CB|}. \quad (3)$$

Sestrojení tečen lze provést kružítkem a pravítkem, aniž bychom hyperboly rýsovali. Stačí znát jen umístění jejich ohnisek a vrcholů. Úsečku délky e potřebnou k určení ohnisek sestrojíme s využitím vztahu (3) pomocí některé z Eukleidových vět.

Má-li hyperbola ohniska E , F a vrcholy U , V , pak tzv. *vrcholová kružnice* sestrojená nad průměrem UV je množinou všech pat kolmic z ohnisek E , F na tečny hyperboly. Tečny z bodu M jsou tedy přímky MZ , kde bod Z patří do průniku vrcholové kružnice s Thaletovou kružnicí nad průměrem MF (nebo ME).

Na obr. 4 vidíme výsledek řešení úlohy pro situaci, kdy lze sestrojít všechny čtyři tečny z bodu M k hyperbolám. Jednou z nich je přímka AB , a tak úloze vyhovují nejvýše tři trojúhelníky PQC . Podrobnější diskusi řešitelnosti uvedeme níže.

Řešení z roku 2009

Úloha je polohová, trojúhelník ABC i s bodem M jsou již v rovině umístěny. Díky tomu lze zkoušet různé volby výchozích i neznámých veličin s cílem nalézt řešení. Cestu k úspěchu odhalil náčrtek situace na obr. 5, kde r , s , u , v jsou po řadě vzdálenosti bodů B , A , P , Q od přímky CM .

Situace 1. Nechť se bod A nachází mezi body P a C . Rovnost $S_{PCQ} = S_{ABC}$ lze zapsat ve tvaru

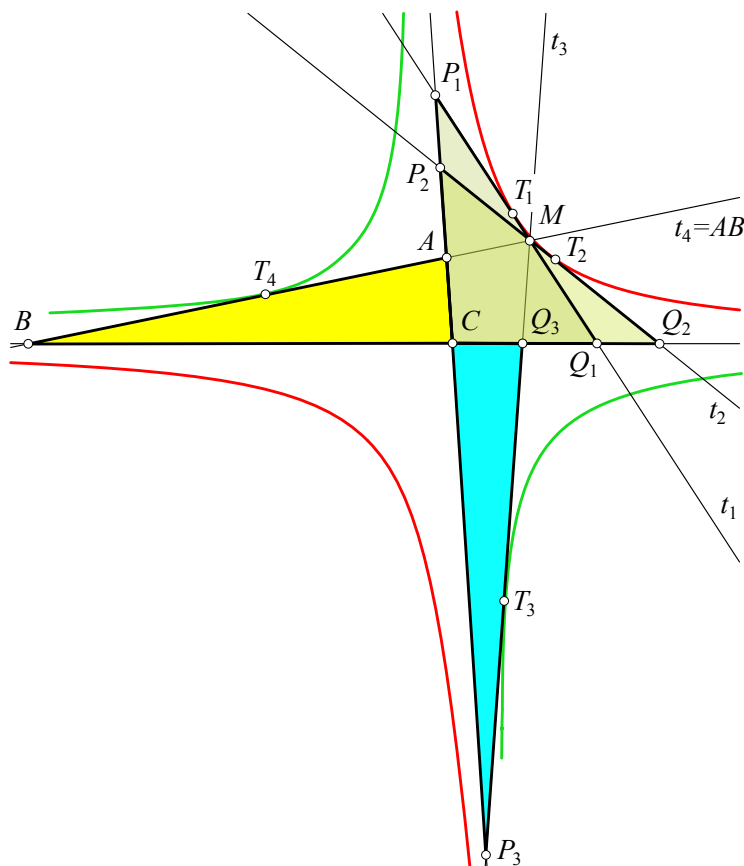
$$S_{CMP} + S_{CMQ} = S_{CMB} - S_{CMA}.$$

Odtud dostáváme vztah

$$\frac{1}{2}|CM|u + \frac{1}{2}|CM|v = \frac{1}{2}|CM|r - \frac{1}{2}|CM|s,$$

z něž plyne

$$u + v = r - s. \quad (4)$$



Obr. 4 Tři řešení úlohy A-S-2

Jiný zápis rovnosti $S_{PCQ} = S_{ABC}$ má tvar

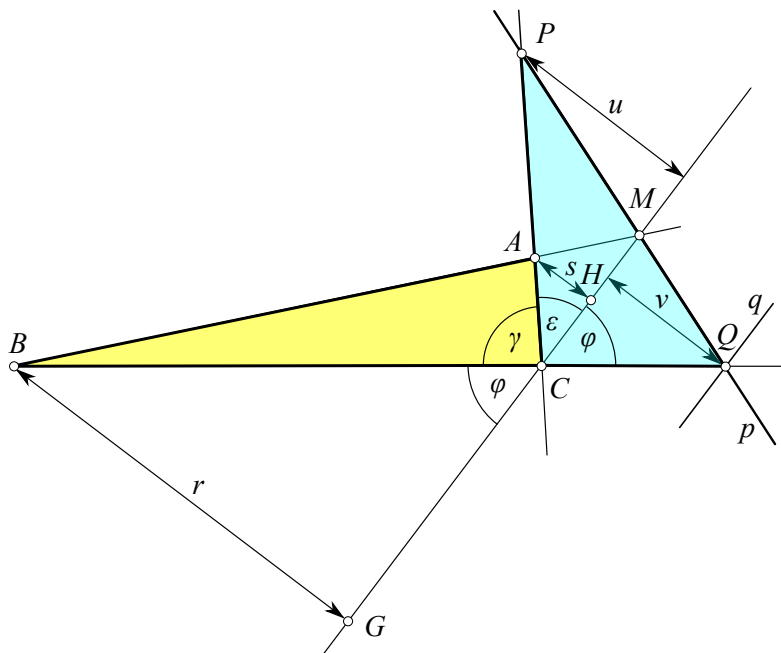
$$\frac{1}{2}|CQ| \cdot |CP| \sin(\pi - \gamma) = \frac{1}{2}|CB| \cdot |CA| \sin \gamma,$$

Při označení podle obr. 5 odtud dostáváme

$$(|CQ| \sin \varphi) \cdot (|CP| \sin \varepsilon) = (|CB| \sin \varphi) \cdot (|CA| \sin \varepsilon),$$

neboli

$$uv = rs. \quad (5)$$



Obr. 5 K rozboru při řešení z roku 2009

Vztahy (4) a (5) platí, i když se pata G kolmice z bodu B na přímku CM nachází na polopřímce CM (ověření je analogické), a představují soustavu rovnic s neznámými u a v . Eliminací neznámé v z ní obdržíme kvadratickou rovnici

$$u^2 - (r - s)u + rs = 0 \quad \text{s diskriminantem } D = (r - s)^2 - 4rs. \quad (6)$$

Ze vztahů (4) a (6) plyne $r - s > \sqrt{D}$, a tak

$$u_{1,2} = \frac{r - s \pm \sqrt{D}}{2} > 0, \quad \text{právě když } D \geq 0. \quad (7)$$

Podmínka $D \geq 0$ vede po dosazení ze vztahu (6) k nerovnosti

$$z^2 - 6z + 1 \geq 0,$$

s neznámou

$$z = \frac{r}{s} = \frac{|BM|}{|AM|} > 1.$$

(Viz obr. 5 a podobnost trojúhelníků BMG a AMH .)

Po jejím vyřešení zjistíme, že úloze vyhovují dva trojúhelníky MP_1Q_1 a MP_2Q_2 , právě když platí

$$0 < |AM| < (3 - 2\sqrt{2})|BM|, \quad \text{neboli} \quad 0 < |AM| < \frac{\sqrt{2} - 1}{2}|AB|.$$

Konstrukci úseček o délkách $u_{1,2}$ na základě předešlých výpočtů ponecháváme čtenáři. Jedna z možností je popsána v příspěvku [3]. Sestrojení přímek $q_{1,2} \parallel AC$, které určují body $Q_{1,2}$, jakož i přímek $p_{1,2}$, je zřejmé.

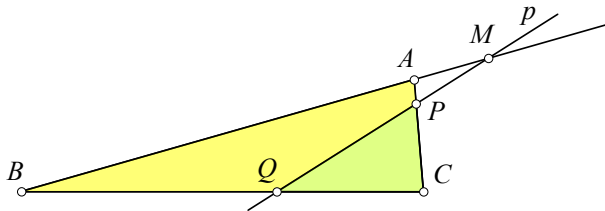
Pokud platí

$$|AM| = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}|AB|,$$

což je ekvivalentní s podmínkou $r = (3 + 2\sqrt{2})s$, má rovnice (6) dvojnásobný kořen $u_1 = u_2 = (1 + \sqrt{2})s$. Úloze vyhovuje jediný trojúhelník PQC .

Situace 2. Možnost $P = A$ nastane, jen když platí $M = A$, a odtud $s = v = 0$. Ze vztahu (4) dostáváme $u = r$. Řešením je trojúhelník AQC , kde Q je obraz bodu B ve středové souměrnosti se středem C .

Situace 3. Bod P leží na úsečce AC a $P \neq A$. Pak přímka $p = MP$ protíná úsečku BC v bodě Q . Trojúhelník PQC vznikne, jen když $P \neq C$. Nevyhovuje však podmínkám úlohy, neboť $S_{PQC} < S_{ABC}$ (obr. 6).



Obr. 6 Situace, kdy je bod P uvnitř strany AC

Situace 4. Bod C se nachází mezi body A, P , obr. 7. Platí

$$S_{CMP} - S_{CMQ} = S_{CMB} - S_{CMA}.$$

Analogicky, jako při řešení situace 1, dospějeme k soustavě

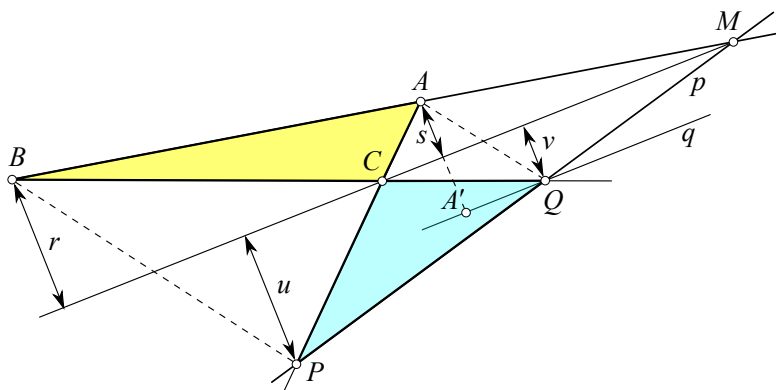
$$u - v = r - s$$

$$uv = rs,$$

z níž eliminací v , resp. u , získáme po úpravě rovnici

$$(u - r)(u + s) = 0, \quad \text{resp.} \quad (v - s)(v + r) = 0.$$

Úloze vyhovují jen kladné kořeny $u = r$ a $v = s$.



Obr. 7 Řešení úlohy za předpokladu, že bod C se nachází mezi body A, P

Stačí tedy sestavit obraz jednoho z bodů bodu A, B v osové souměrnosti podle CM a jím vést přímku $q \parallel CM$. Pak $Q \in q \cap BC$ a $p = MQ$. Úloha má pro tuto situaci vždy jediné řešení.

Poznámka. Nabízí se i využití dvojí stejnolehlosti úseček BP a AQ . Platí

$$\frac{r}{s} = \frac{|MB|}{|MA|} = \frac{|MP|}{|MQ|} = \frac{u}{v} \quad \text{a} \quad \frac{r}{v} = \frac{|CB|}{|CQ|} = \frac{|CP|}{|CA|} = \frac{u}{s},$$

odtud $su = rv$ a zároveň $vu = rs$. Z posledních vztahů plyne

$$u^2vs = r^2vs, \quad \text{resp.} \quad v^2ru = s^2ru,$$

odtud $u = r$ a $v = s$.

Důsledkem je poznatek, že přímka CM z obr. 7 prochází středy základů AQ a BP lichoběžníku $BPQA$, známý i z projektivní geometrie.

Shrnutí diskuse řešitelnosti úlohy. Označíme-li

$$m = \frac{\sqrt{2} - 1}{2},$$

má úloha jedno řešení, právě když platí $|AM| > m|AB|$, nebo $M = A$.

Je-li $0 < |AM| < m|AB|$, pak má úloha tři řešení, a za předpokladu $|AM| = m|AB|$ má dvě řešení.

Závěr

Malá epizoda z historie MO poskytla dva náměty pro práci s matematickými talenty.

Seznámení s afinitou (1) vede k rozšíření středoškolských poznatků o hyperbole. Spolu s využitím nástrojů dynamické geometrie může studenty zaujmout a lze je doplnit, například o vyšetřování množiny přímek, které dělí daný trojúhelník na dvě části téhož obsahu.

Druhé řešení úlohy MO 43 A-S-2 ukazuje, jak může vhodná volba proměnných usnadnit řešení problému. Zároveň upozorňuje na tzv. *metodu obsahů*, jejíž podstatou je získávání užitečných vztahů z rovnosti různých vyjádření obsahu rovnoplochých útvarů.

Literatura

- [1] Horák, K. a kol.: Čtyřicátý třetí ročník Matematické olympiady na středních školách, Univerzita Palackého v Olomouci, Olomouc, 2016
- [2] Kotín, O., Majorov, A.: Semjeistvo prjamych deljaščich ploščad' popolam, Kvant, roč. 21 (1990), č.8, s. 20-24.
- [3] Leischnner, P.: Příběh úlohy MO 43-A-S-2. Ani jeden matematický talent nazmar, sborník příspěvků 4. ročníku konference, Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Praha, 2009, s. 41-52. Dostupné na <https://www.suma.jcmf.cz/materialy-pro-ucitele/sborniky-z-konferenci/>
- [4] Vyšín, J.: Vyprávění o úlohách MO. Matematická olympiáda 1951-1981, Prometheus, Praha, 1981, s. 143-148.
- [5] Vyšín, J., Zelinka, R.: První ročník matematické olympiady, SPN, Praha, 1952

GaoKao – přijímací zkouška na čínské univerzity

DAG HRUBÝ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Cílem článku je informovat naše čtenáře o vstupní zkoušce na vysoké školy v Číně. Tuto zkoušku, která je známá pod názvem GaoKao¹⁾ – The National College Entrance Examination (NCEE), skládají čínští středoškoláci každoročně obvykle počátkem června. Je to také *jediné* kritérium pro přijetí na čínské univerzity. Zkouška trvá zhruba 9 hodin ve dvou nebo ve třech dnech, a to v závislosti na provincii, v níž se koná. V povinné části vykonají všichni žáci zkoušku z *čínského jazyka, cizího jazyka a matematiky*. Za každý z těchto tří předmětů lze získat maximálně 150 bodů, celkově tedy 450 bodů. Ve volitelné části si žáci vybírají ze *dvou zaměření*. Adepti společenských věd tak dále absolvují test z historie, politologie a geografie, uchazeči o přírodovědná a technická studia jsou testováni z fyziky, chemie a biologie, přičemž v každém z nich lze získat maximálně 300 bodů. Nejvyšší možný počet dosažených bodů je tedy 750.

Všechny zkoušky jsou písemné. K tomu, aby žák byl přijat na prestižní čínskou univerzitu musí dosáhnout aspoň 500 bodů. K přijetí na univerzity střední úrovně musí žák dosáhnout 333 až 375 bodů. Podle čínského ministerstva školství dosáhl počet zájemců o přijímací zkoušku GaoKao v roce 2022 celkově 11,93 milionu.

Mezi nejprestižnější čínské univerzity patří Univerzita Čching-chua (Tsinghua University) a Pekingská univerzita (Peking University). V žebříčku World University Rankings 2022 se šest čínských univerzit dostalo do první stovky nejlepších univerzit (např. v Německu je jich 7). Pekingská univerzita a univerzita Tsinghua se v žebříčku dělí společně o 16.–17. místo a jsou nejvýše hodnocenými univerzitami mimo Velkou Británii a USA. V roce 2021 univerzita Tsinghua požadovala pro přijetí aspoň 676 bodů ve zkoušce GaoKao, Pekingská univerzita požadovala aspoň 683 body.

Abychom si učinili představu o náročnosti této zkoušky z matematiky, uvedeme zadání některých úloh z roku 2022. Kromě modifikovaného řešení

¹⁾též Gao Kao nebo Gaokao

1. příkladu, viz [3], zde uvádíme také alternativní způsob řešení části a) této úlohy.

Příklad 1

Nechť S_n je součet prvních n členů posloupnosti (a_n) , kde $a_1 = 1$ a $\left(\frac{S_n}{a_n}\right)$ je aritmetická posloupnost s diferencí $\frac{1}{3}$.

a) Určete (a_n) .

b) Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2.$$

Řešení.

a) Pro každé n přirozené platí $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Označme $b_n = S_n/a_n$, přičemž podle zadání je (b_n) aritmetická posloupnost s diferencí $\frac{1}{3}$ a prvním členem $b_1 = S_1/a_1 = 1$. Pak platí

$$\frac{S_n}{a_n} = b_n = b_1 + (n-1)d = 1 + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{n+2}{3} \quad (1)$$

a odtud již bezprostředně plyne

$$S_n = \frac{1}{3}(n+2)a_n$$

a také

$$S_{n+1} = \frac{1}{3}(n+3)a_{n+1}.$$

Uvážíme-li ještě, že $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, obdržíme po dosazení za S_n a S_{n+1} z výše uvedených rovností

$$\frac{1}{3}(n+3)a_{n+1} = \frac{1}{3}(n+2)a_n + a_{n+1}$$

a po snadné úpravě následně

$$a_{n+1} = \left(\frac{n+2}{n}\right)a_n. \quad (2)$$

Dostáváme tak zadání posloupnosti (a_n) pomocí rekurentního vztahu (2), který je lineární, s prvním členem $a_1 = 1$. Naším cílem je však určit n -tý

člen této posloupnosti explicitně, tj. pouze pomocí n (jako funkci proměnné n). Platí tedy

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{n+1}{n-1}a_{n-1}, \\a_{n-1} &= \frac{n}{n-2}a_{n-2}, \\a_{n-2} &= \frac{n-1}{n-3}a_{n-3}, \\&\vdots \\a_3 &= \frac{4}{2}a_2, \\a_2 &= \frac{3}{1}a_1.\end{aligned}$$

Součinem všech $n-1$ předešlých rovností (s využitím $a_1 = 1$) po úpravě obdržíme

$$a_n = \frac{1}{2}n(n+1).$$

b) Nyní dokážeme, že pro všechna n přirozená platí nerovnost

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} < 2. \quad (3)$$

Vzhledem k tomu, že pro každé přirozené číslo k platí

$$\frac{2}{k(k+1)} = 2 \cdot \frac{(k+1) - k}{k(k+1)} = 2 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right),$$

lze levou stranu (3) napsat ve tvaru

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} &= \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{2}{n(n+1)} = \\&= 2 \left[\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right] = 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) < 2,\end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Důsledek

Pro součet S_n prvních n členů uvažované posloupnosti (a_n) pak platí

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \\ &= \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \dots + \binom{n+1}{2} = \binom{n+2}{3} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2), \end{aligned}$$

viz např. [1] nebo [2]. K témuž výsledku lze dospět také přímo užitím vztahu (1).

Jiný způsob řešení části a) poskytl Jaroslav Švrček.

Nejprve vypočteme a_n pro několik prvních hodnot n . Zjistíme, že platí $a_2 = 3$, $a_3 = 6$, $a_4 = 10$ atd. Nyní můžeme vyslovit hypotézu: Pro všechna n přirozená platí $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Dokážeme ji užitím principu tzv. *silné* matematické indukce vzhledem k n .

(i) Pro $n = 1$ dané tvrzení platí, neboť $a_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1+1) = 1$.

(ii) Předpokládejme dále, že dané tvrzení platí pro všechna k přirozená, kde $1 \leq k \leq n$, tj. že platí

$$a_k = \frac{1}{2}k(k+1),$$

a tedy

$$S_k = \frac{1}{6}k(k+1)(k+2),$$

viz důsledek v závěru prvního řešení této úlohy. Nyní dokážeme, že tvrzení platí také pro $n+1$. Vzhledem k tomu, že (S_n/a_n) je aritmetická posloupnost s diferencí $\frac{1}{3}$, platí s využitím vztahu $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$

$$\frac{S_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{S_n + a_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{S_n}{a_{n+1}} + 1 = \frac{S_n}{a_n} + \frac{1}{3}.$$

Z poslední rovnice vpravo, uvedeného předpokladu (ii) a důsledku na konci prvního řešení, tj. dosazením za $S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$, po úpravě dostáváme

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(n+1)(n+2).$$

Tím je dokázáno, že tvrzení platí i pro $n+1$.

Spojením obou kroků (i) a (ii) je tak dokázáno, že pro všechna přirozená n platí $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Následující úlohy (2–4) z testů GaoKao a jsou určeny zájemcům o tuto problematiku. Nejzdařilejší čtenářská řešení těchto úloh zaslaná do redakce časopisu MFI rádi zveřejníme.

Příklad 2

V trojúhelníku ABC s vnitřními úhly α , β , γ a odpovídajícími stranami a , b , c platí

$$\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{\sin 2\beta}{1 + \cos 2\beta}.$$

a) Určete velikost β , je-li $\gamma = \frac{2\pi}{3}$.

b) Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$.

Příklad 3

Určete koeficient u členu x^2y^6 v rozvoji výrazu

$$\left(1 - \frac{y}{x}\right)(x + y)^8.$$

Poslední, náročnější úloha pochází ze sady testu GaoKao z roku 2008.

Příklad 4

Je dána funkce f reálné proměnné x

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{\frac{ax}{ax+8}},$$

s kladným reálným parametrem a . Dokažte, že pro všechna kladná reálná čísla x platí

$$1 < f(x) < 2.$$

Literatura

- [1] Švrček, J.: Úvod do kombinatoriky. Vydavatelství UP, Olomouc, 2008.
- [2] Vilenkin, N. J.: Kombinatorika. SNTL, Polytechnická knižnice, Praha, 1977.
- [3] 2022 China's Math GaoKao (Problem 17). Dostupné z:
<https://www.youtube.com/>

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 30. 9. 2023 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 285

Dokažte, že pro každou číslici $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ existuje takové přirozené číslo L_c , že počet všech přirozených čísel nejvýše rovných L_c , v jejichž desítkovém zápisu se vyskytuje číslice c , je roven $L_c/2$.

Józef Kalinowski (Polsko)

Úloha 286

Kružnice k, l se protínají v bodech A, B ($A \neq B$). Přímka, která prochází bodem A , protíná tyto kružnice po řadě v bodech C, D ($C \neq A \neq D$). Dokažte, že osy všech úseček CD procházejí společným bodem.

Pavel Leischner

Dále uvádíme řešení úloh 281 a 282, jejichž zadání jsme zveřejnili ve čtvrtém čísle loňského (32.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 281

Nechť d_k značí počet jednomístných dělitelů libovolného přirozeného čísla k .

a) Dokažte, že pro každé kladné celé číslo n platí

$$\frac{d_{n+1} + d_{n+2} + \dots + d_{n+20}}{20} < 3.$$

b) Dokažte, že existuje kladné celé číslo n , pro které platí

$$\frac{d_{n+1} + d_{n+2} + \dots + d_{n+19}}{19} > 3.$$

Josef Tkadlec

Řešení.

a) Jednomístní dělitelé jsou čísla $k \in \{1, 2, \dots, 9\}$. Místo toho, abychom počítali počet dělitelů každého z dvaceti po sobě jdoucích přirozených čísel

$n + 1, n + 2, \dots, n + 20$ určíme kolik z nich je dělitelných číslem každým z uvažovaných čísel k , tento počet označme s_k . Potom jistě

$$d_{n+1} + d_{n+2} + \dots + d_{n+20} = s_1 + s_2 + \dots + s_9.$$

Zřejmě pro 20 po sobě jdoucích čísel platí

$$s_k \leq \left\lceil \frac{20}{k} \right\rceil,$$

kde $\lceil x \rceil$ je *horní celá část* reálného čísla x , tedy nejmenší celé číslo, které je větší nebo rovno x . Platí

$$\begin{aligned} \frac{d_{n+1} + d_{n+2} + \dots + d_{n+20}}{20} &= \\ &= \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_9}{20} \leq \frac{\lceil \frac{20}{1} \rceil + \lceil \frac{20}{2} \rceil + \dots + \lceil \frac{20}{9} \rceil}{20} = \\ &= \frac{20 + 10 + 7 + 5 + 4 + 4 + 3 + 3 + 3}{20} = \frac{59}{20} < 3, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

b) Položme $n = 9! - 1$ a označme podobně jako v předcházející části s_k počet čísel z množiny (nyní 19 po sobě jdoucích čísel)

$$\{n + 1, n + 2, \dots, n + 19\},$$

která jsou dělitelná číslem k . Stejně jako v části a) nyní pro dané číslo n dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{d_{n+1} + d_{n+2} + \dots + d_{n+19}}{19} &= \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_9}{19} = \\ &= \frac{19 + 10 + 7 + 5 + 4 + 4 + 3 + 3 + 3}{19} = \frac{58}{19} > 3, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Poznámka 1. Stejnou úvahu v části b), která nám zajišťuje největší možný počet s_k , jsme mohli provést také pro číslo $n - 1$, kde n je nejmenším společným násobkem čísel $1, 2, \dots, 9$, tedy pro číslo $n = 2520 - 1 = 2519$.

Správná řešení zaslali *Anton Hnáth* z Moravan, *Petr Kneys* z G U Balvanu v Jablonci nad Nisou, *Jáchym Kouba* a *Lenka Poljaková*, oba z GJŠ v Přerově a *Piotr Szatan* z II LO v Tarnovských Horách (Polsko).

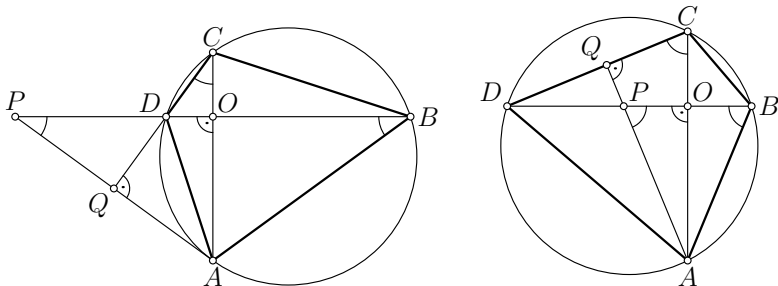
Neúplná řešení zaslali *Štěpán Pospíšil* a *Martin Skýpala*, oba z GJŠ v Přerově.

Úloha 282

Je dán tětivotý čtyřúhelník s navzájem kolmými úhlopříčkami. Označme P průsečík kolmice z vrcholu A k přímce CD s přímkou BD . Dokažte, že body P a B mají od vrcholu A stejnou vzdálenost.

Vojtěch Zlámal

Řešení. Označme dále Q patu kolmice z bodu A na přímkou CD a O průsečík úhlopříček čtyřúhelníku $ABCD$. Tětivotý čtyřúhelník je konvexní, bod Q proto leží na polopřímce CD a bod P tak leží na polopřímce OD . Na obrázcích jsou situace pro případy, kdy bod Q leží uvnitř či vně úsečky CD . Aby tvrzení ze zadání platilo stačí dokázat, že ABP je rovnoramenný trojúhelník s hlavním vrcholem A , což je ekvivalentní s tvrzením, že jeho vnitřní úhly při vrcholech B a P mají stejnou velikost.



Jelikož $ABCD$ je tětivotý čtyřúhelník, podle věty o obvodovém úhlu jsou úhly ABD (tedy ABP) a ACD (tedy ACQ) shodné. Pravoúhlé trojúhelníky ACQ a AOP s pravými úhly při vrcholech O a P se dále shodují ve vnitřním úhlu při vrcholu A , jsou tak podobné a úhel ACQ je shodný s úhlem APO (tedy APB), což jsme chtěli dokázat.

Poznámka 2. František Jáchim si všiml, že bod P je průsečíkem výšek trojúhelníku ACD . Pro výpočet velikosti úhlu APB pak lze použít známého tvrzení o úhlech, pod kterými se tyto výšky protínají.

Správná řešení zaslali *Eliška Andrášková*, *Radim Krška*, *Jindřich Kukla*, *Martin Skýpala*, *Lenka Poljaková* a *Lucian Poljak*, všichni z GJŠ v Přerově, *Anton Hnáth* z Moravan, *Sofie Choutková* z G U Balvanu v Jablonci nad Nisou a *František Jáchim* z Volyně.

Pavel Calábek

K vývoji fyzikálního vzdělávání na gymnáziu (1933–1983)

OLDŘICH LEPIL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Gymnázia jsou střední školy s nejdelší tradicí a jejich historie sahá do první poloviny 19. století. Vznik těchto škol je spojen s tzv. *Exner-Bonitzovou reformou* z roku 1849, na jejímž základě vznikly dva typy středních škol – *gymnázium* s osmi postupnými ročníky, které poskytovalo vyšší všeobecné vzdělání na základě klasických jazyků (latiny a řečtiny) a *reálka* s šesti (po roce 1868 se sedmi) postupnými ročníky. Její vznik si vyžádala potřeba prakticky zaměřených škol umožňujících absolventům studovat na technických vysokých školách. Počátkem 20. století vznikly na základě tzv. *Marchetovy reformy* (1908) ještě další typy osmitřídních gymnázií – *reálné gymnázium* (typ A) a *reformní reálné gymnázium* (typ B). Reálné gymnázium mělo 1. až 4. ročník shodný s gymnáziem a poskytovalo jak prohloubené jazykové vzdělání, tak vzdělání přírodovědné. Reformní reálné gymnázium mělo 1. až 4. ročník shodný s reálkou a vyšší ročníky byly více zaměřeny na humanitní předměty, především jazyky. Pro studium dívek pak existovalo šestitřídní *dívčí lyceum*.

Po skončení 1. světové války a po vzniku Československé republiky převzalo československé školství prakticky všechny tyto typy středních škol, ale ihned začaly práce na jejich reformě v národním duchu. Reforma však postupovala pomalu a teprve v období let 1930 až 1937 docházelo ke konkrétním krokům v podobě úpravy maturitních zkoušek, vytvoření nových učebních plánů, učebních osnov jednotlivých předmětů a nových učebnic.

V tomto příspěvku uvedeme, jak se vyvíjela výuka fyziky na střední škole gymnaziálního typu od prvních českých osnov fyziky pro výuku na

gymnáziu, které začaly platit v roce 1933, tedy právě před devadesáti lety. Zaměříme se však jen na vyšší stupeň tohoto typu školy.

Výuka fyziky podle osnov z roku 1933

Diskuse o reformě výuky na československých školách začaly již v roce 1919 a problém byl řešen často z protichůdných pohledů. Proto ministerstvo školství a národní osvěty (MŠ NO) zřídilo zvláštní reformní oddělení, do jehož čela byl postaven ministerský rada F. Mašek. V roce 1923 byl zveřejněn ministerský návrh, který se zabýval reformou tzv. občanské školy a střední školy i učitelským vzděláním. Návrh vyvolal širokou diskusi, ve které zazněly nejrůznější názory na reformu školy. K vyhodnocení těchto názorů byla vytvořena pracovní komise, jejímž vedením byl pověřen matematik *prof. Bohumil Bydžovský*. Výsledkem práce komise měl být projekt definitivní podoby středoškolské reformy.

Prof. Bydžovský byl významnou osobností Jednoty českých matematiků a fyziků (JČMF) a ve funkčním období 1930–1933 byl předsedou Jednoty. Není tedy divu, že reformní snahy se staly i rezonujícím tématem JČMF. Jednota se zúčastňovala diskusí o reformě střední školy hned po vzniku Československa a výsledkem byl propracovaný návrh, zveřejněný v roce 1920. Bylo navrženo, aby základem byla šestitřídní střední škola, do které by byli přijímáni 11letí žáci obou pohlaví bez přijímací zkoušky. Škola měla být základem i pro školy odborné. Současně bylo navrženo, aby v 5. popř. 6. ročníku proběhla tzv. *bifurkace* na dvě větve – směr latinský (s latinou a bez předmětů grafických) a směr reálný (bez latiny, s rýsováním a kreslením). Na šestitřídní střední školu navazovala dvouletá vysokoškolská příprava, na kterou však bylo nutné v 6. ročníku složit přijímací zkoušku. Tato část střední školy měla být diferencovaná na tři větve – filologicko-historickou, přírodovědeckou a matematickou. Absolvování školy pak opravňovalo studenty ke vstupu na všechny vysoké školy. K návrhu byly vypracovány podrobné učební osnovy pro matematiku, deskriptivní geometrii a fyziku. Součástí osnov fyziky byl také návrh povinných praktických cvičení v 7. a 8. ročníku.

Návrh JČMF byl pro fyziku velmi výhodný, poněvadž učební plán šestitřídní střední školy předpokládal celkem 10 týdenních vyučovacích hodin a dvouletá příprava 6 vyučovacích hodin, tedy celkem 16 hodin a ještě povinné praktikum. Osnovy lze celkově označit jako moderní, poněvadž výuka měla vycházet z učitelových i žákovských pokusů a byla uspořádána ve dvou cyklech, pro šestiletý základ a pro vysokoškolskou přípravku. Pojetí

učiva bylo založeno na výkladu fyzikálních jevů z energetického hlediska a zdůrazněn byl význam fyziky a přírodních věd vůbec pro myšlenkový rozvoj lidstva.

Tradiční střední škola však stále zůstávala v zajetí původní koncepce, vycházející z historického pojetí klasických jazyků jako „samospasitelného“ základu vzdělanosti. Proto nebylo možné předpokládat, že by návrh JČMF mohl být přijat v navržené podobě a bylo třeba najít kompromisy, které by vedly k reformě střední školy, k novým učebním plánům a osnovám učiva. Konkrétní řešení tak zůstalo v rukách ministerské komise expertů pro reformu školy vedené prof. Bydžovským. Prvním krokem komise byla úprava maturitní zkoušky z roku 1931 a hned nato komise přikročila ke svému hlavnímu úkolu – vypracování návrhu na novou organizaci a úpravu střední školy.

Nový učební plán a učební osnovy střední školy byly vydány v červenci 1933 s tím, že se podle nich začne vyučovat od 1. září 1933 v 1. až 4. ročníku gymnázií a reálných gymnázií a 1. až 5. ročníku reálných gymnázií. V dalších letech se pak postupně vyučovalo podle nových osnov v dalších ročnících těchto škol. Tyto osnovy zůstaly normou pro střední školy s malými změnami až do roku 1948.

Účelem tohoto příspěvku není podrobné uvedení celého učebního plánu reformované střední školy, proto se omezíme na srovnání rozsahu výuky přírodovědných předmětů v 5. až 8. ročníku gymnázia a reálného gymnázia, které patřily k nejčastějším typům střední školy. Pro celkový obraz rozsahu výuky jednotlivým předmětům je uveden také počet týdenních hodin za celé studium na gymnáziu.

Škola	Gymnázium					Reálné gymnázium				
	5.	6.	7.	8.	1.–8. ročník	5.	6.	7.	8.	1.–8. ročník
Matematika	3	3	2	1	23	3	3	2	2	24
Přírodopis	-	3	2	2	13	-	3	2	2	13
Chemie	3	-	-	-	5	2	2	-	-	6
Fyzika	-	-	3	2	10	-	-	3	3	11
Deskriptivní geometrie a rýsování	-	-	-	-	2	-	-	2	2	6

Tabulka 1

Rozsah výuky fyziky v reformním reálném gymnáziu a v realce byl shodný, avšak učební plán reálky byl rozšířen o nový předmět *praktická cvičení přírodovědná* v rozsahu dvou vyučovacích hodin v nejvyšším, tzn. v 7. ročníku. Současně bylo doporučeno zavádět praktická cvičení v nejvyšších třídách gymnázií jako nepovinný předmět. Jde o nový přístup k poznávání fyzikálních poznatků experimentální metodou, která umožňuje hlubší poznání fyzikálních jevů induktivním usuzováním.

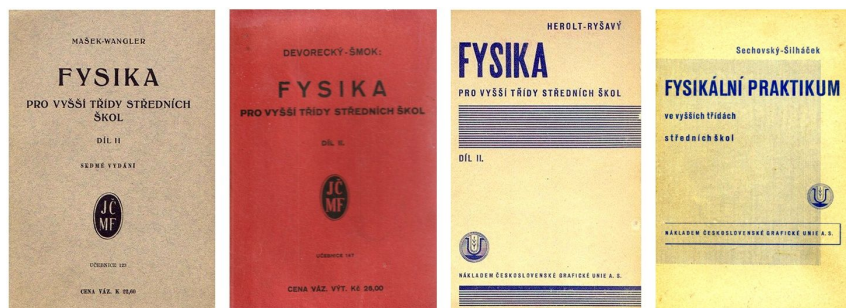
Samotná struktura a uspořádání tematických celků v nových osnovách nepřináší nic převratného. To je patrné již z výčtu tematických celků. Učivo v 7. ročníku (6. ročník reálky) má následující strukturu: Úvod fyziky, Geomechanika (kinematika a dynamika včetně harmonického pohybu kyvadla a pružnost a pevnost těles), Astronomie, Hydromechanika, Aeromechanika a Termika. V 8. ročníku (7. ročník reálky) jsou to tematické celky: Nauka o vlnění, Akustika, Magnetismus, Nauka o elektřině a) Elektřina statická, b) Elektřina kinetická, Optika.

K této struktuře učiva je třeba uvést, že obdobné uspořádání tematických celků měly již předcházející osnovy, které platily od roku 1909. Za pozornost stojí, že jedinou výraznou změnou je posunutí optiky, která byla původně zařazena za akustikou, až na závěr výuky fyziky. Stalo se tak dokonce výnosem MŠ NO již v roce 1930. I když není konkretizován důvod této změny, lze soudit, že je to způsobeno narůstajícím rozsahem a novými poznatky učiva elektřiny, zejména poznatky o elektromagnetickém vlnění a jeho využití v radiokomunikaci. Na začátku 20. století byly poznatky o mechanickém vlnění považovány za jakousi propedeutiku k poznatkům o základních druzích vlnění – zvuku a světle, takže optika byla zařazena hned za akustiku.

V současnosti si ovšem položí čtenář otázku, jestli se žák v 30. letech 20. století dozvěděl také něco z fyziky mikrosvěta, kterou současná středoškolská fyzika obvykle končí. Kdybychom se striktně drželi jen reformovaných osnov, poznatky z tzv. moderní fyziky by se omezily jen na výklad existence elektronu v souvislosti s katodovými paprsky. Celé učivo elektřiny uzavírá ještě heslo osnov *Hlavní zjevy radioaktivní*, které je přiřazeno k poznatkům o radiotelegrafii a radiofonii. Ale podobně jako v současnosti, kdy jsou východiskem výuky Rámcové vzdělávací programy, je rozhodující, jak se s touto problematikou vyrovnaly učebnice.

Na základě osnov z roku 1933 byly vytvořeny nové učebnice fyziky pro vyšší třídy středních škol (obr. 1). K nejrozšířenějším patřily učebnice vydávané JČMF. V případě nejvyššího ročníku gymnázia to byla učeb-

nice [2], která byla v podstatě přepracovaným 7. vydáním učebnice autorů B. Maška, J. Jeništy a J. Štěpánka z roku 1911. Podle nových osnov ji přepracoval A. Wangler. Druhou středoškolskou učebnicí vydanou JČMF napsali H. Devorecký a M. Šmok [3]. Pro reálky vznikla učebnice, kterou napsali E. Herolt a V. Ryšavý [4]. Zajímavostí je znění schvalovací doložky MŠ NO z r. 1935, podle níž je určena pro reálky s *československým jazykem vyučovacím ve znění českém*. Vznikla také první středoškolská učebnice pro praktická cvičení z fyziky [5].



Obr. 1

Podrobněji o těchto učebnicích pojednává publikace [6]. Zde bychom jen odpověděli na otázku, jak se učebnice z konce 30. let minulého století vyrovnaly s absencí fyziky mikrosvěta v osnovách z roku 1933.

Učebnice [2] se striktně přidržela nových osnov a bezprostředně za výklad vysílače a přijímače pro radiofonii a rozhlas zařazuje samostatnou kapitolu *Radioaktivita*. Rozsah učiva je omezen na necelé 4 strany textu, jehož pojetí vyplývá z názvů jednotlivých článků: Radioaktivní prvky, Vlastnosti radioaktivního záření, Radioaktivní přeměny a Stavba atomu. Podstatně modernější přístup, odlišný od formulace osnov, zvolili autoři učebnice pro reálky [4], když na závěr učebnice, za tematický celek *Optika* přidali samostatný tematický celek *Nauka o záření a o složení hmoty*. V úvodu jsou zařazeny ještě některé poznatky z fyziky záření, od ultrafialového po rentgenové záření. Pak pokračuje učivo stanovené osnovami, týkající se radioaktivity a závěrečnou část kapitoly tvoří články: Složení atomu, Složení jádra atomu, izotopy, Hmota, energie a záření a Závěr. Zajímavý je zejména článek věnovaný souvislosti hmoty a energie. V něm je uveden, snad poprvé v našich středoškolských učebnicích, základní poznatek Einsteinovy teorie relativity o závislosti hmotnosti tělesa (zde hmoty)

na rychlosti pohybu. Z něho pak vyplývá ikonický vztah moderní fyziky $E = mc^2$. K němu učebnice uvádí poněkud problematický závěr: „Odtud je pouze krok k myšlence, že veškerá hmota m tělesa je projev energie zhuštěné v jednom místě v obrovském množství.“

Učebnice zpracované podle osnov z roku 1933 zůstaly s menšími úpravami v platnosti až do roku 1949, kdy učebnice [2] ještě vyšla jako částečně změněný dotisk 7. vydání pro školní rok 1949/50. Na rozdíl od předcházejících vydání této učebnice určené pro vyšší třídy středních škol je poslední vydání určeno již přímo pro *čtvrtou třídu gymnasií*.

Touto učebnicí skončila etapa vývoje fyzikálního vzdělávání, založená na reformě gymnázia v 30. letech 20. století. V květnu 1948 byl přijat *Zákon o základní úpravě jednotného školství (školský zákon)*, který zavedl tzv. jednotnou školskou soustavu se třemi stupni: I. stupeň – národní škola, II. stupeň – nediferencovaný čtyřletý nižší stupeň střední školy a III. stupeň, do něhož byly vedle odborných škol zahrnuty i čtyři nejvyšší třídy dřívějšího osmiletého gymnázia. Tato změna bývá označována také jako *Nejedlého reforma*, podle tehdejšího ministra školství a osvěty Z. Nejedlého. Na jejím základě byly vypracovány zcela nové osnovy, odlišné od osnov z roku 1933, i když výuka fyziky byla tradičně zařazena do 3. a 4. ročníku gymnázia. Přechodný učební plán zavádí v gymnáziích a reálných gymnáziích dvě větve – základní a technickou s hodinovou dotací 3 + 3 a 4 + 4 v posledních ročnících gymnázia. Osnova učiva byla pro obě větve společná.

Osnovy fyziky z roku 1948 (čtyřleté gymnázium)

3. ročník

Úvod. Mechanika. Astronomie. Vlastnosti kapalin a plynů v klidu. Nauka o proudění tekutin – fyzika letu. Molekulární vlastnosti. Nauka o vlnění. Akustika. Termika.

4. ročník

Nauka o magnetismu. Nauka o elektřině. Nauka o světle. Nauka o záření a stavbě hmoty. Základy astrofyziky.

Na tyto osnovy navazovaly také nové učebnice (obr. 2), vytvořené zcela novými autorskými kolektivy, které vedli M. Chytilová (3. ročník) a A. Bělař (4. ročník) (podrobněji viz [7]). Osnovy ani učebnice z této doby však neměly dlouhé trvání. Dne 24. dubna 1953 byl přijat *Zákon o školské soustavě a vzdělávání učitelů (školský zákon)*, který znamenal zásadní změnu celé školské soustavy podle sovětského vzoru.



Obr. 2

Výuka fyziky podle osnov z roku 1953

Na základě nového zákona byly tradiční typy škol nahrazeny osmiletou střední školou (OSS) a jedenáctiletou střední školou (JSŠ). Tím se dosavadní vzdělávání na devítileté střední škole a navazujícím čtyřletém gymnáziu zkracuje o 2 ročníky. JSŠ měla žákům v prvních osmi ročnících poskytovat základní všeobecné vzdělání a v posledních třech ročnících vyšší vzdělání potřebné k dalšímu studiu na vysokých školách. Tyto tři ročníky byly výběrové a mohly do nich být přijímáni žáci, kteří úspěšně ukončili OSS nebo prvních osm ročníků JSŠ. Ke změně došlo i ve vzdělávání učitelů výběrového stupně JSŠ, učitelů pedagogických a odborných škol, pro jejichž vzdělávání byly zřízeny *vysoké školy pedagogické*.

Podobně jako v případě osnov z roku 1933 uvedeme učební plán přírodovědně zaměřených vyučovacích předmětů (tabulka 2).

Předmět	Postupný ročník			
	9.	10.	11.	6. až 11. celkem
Matematika	6	6	6	36,5*
Fyzika	3	3	4	16
Astronomie	–	–	1	1
Chemie	3	2	3	11
Biologie	2	2	–	12

Tabulka 2

*V 8. ročníku bylo v 1. pololetí 5 a ve 2. pololetí 6 týdenních vyučovacích hodin.

Učební plán fyziky představuje zvětšení hodinové dotace o 3 vyučovací hodiny ve srovnání s původním gymnáziem, ale současně se začíná výuka fyziky ve třídách se žáky o dva roky mladšími než v gymnaziální septimě a oktávě.

Uspořádání učiva je patrné z přehledu tematických celků v osnovách.

Osnovy fyziky z roku 1953 (jedenáctiletá SŠ)

9. ročník

Úvod. Mechanika.

10. ročník

Molekulární fyzika a teplo. Základy nauky o vlnění a akustice. Geometrická optika.

11. ročník

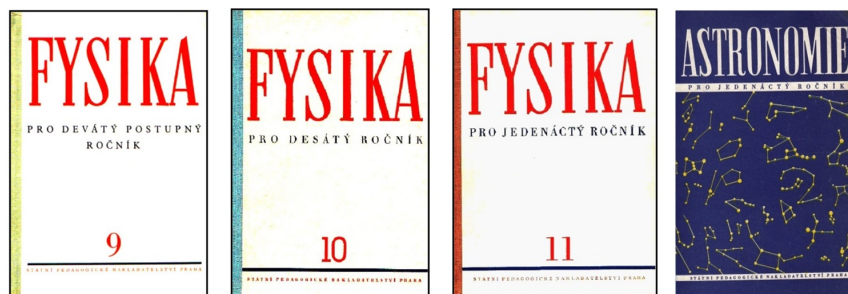
Elektrina. Nauka o záření a stavbě atomu.

Novinkou osnov z roku 1953 je, že poprvé v dějinách české střední školy byl na JSS zaveden samostatný předmět astronomie. To odpovídalo modelu sovětské střední školy, kde byla astronomie samostatným předmětem v 10. ročníku. Podle osnov měla astronomie přispívat zejména k vytvoření „dialekticko-materialistického světového názoru“ a k ateistické výchově. Obsah výuky astronomie zahrnoval základní poznatky o nebeských tělesech a jejich pohybu, seznámení se základními metodami astronomie (určování vzdálenosti hvězd, dalekohledy a spektrální analýza). Samostatnými tématy byly názory na uspořádání těles ve vesmíru a gravitační zákon, sluneční soustava, hvězdy a učivo uzavíral výklad vzniku a vývoje nebeských těles.

Praxe však ukázala nevýhodnost jednohodinového předmětu, který často vyučovali učitelé na doplnění úvazku, aniž by měli potřebnou kvalifikaci. Nicméně tuto jednu vyučovací hodinu můžeme považovat také za celkové posílení hodinové dotace fyziky ve srovnání s poválečným gymnáziem. Při další úpravě školské soustavy počátkem 60. let byl předmět astronomie zrušen a jeho obsah byl zahrnut do učiva fyziky.

Změny, které přinesl přechod na JSS, si vyžádaly také vytvoření nových učebnic fyziky (obr. 3). V letech 1953–1955 tak vznikly učebnice pro 9. až 11. ročník JSS, jejichž hlavním redaktorem byl J. Fuka (viz [7]). Nenašel se ale autor pro učebnici astronomie, takže byl převzat překlad učebnice používané v té době na školách v SSSR, jejímž autorem je ruský astronom

a popularizátor astronomie B. A. Voroncov-Veljaminov. Podle osnov JSŠ ji upravil F. Link.



Obr. 3

Učební plán JSŠ se však stal předmětem mnoha diskusí, které vyplývaly zejména z požadavku na posílení polytechnické výchovy. To vedlo k tomu, že ve školním roce 1956/57 byl ve vyšších ročnících JSŠ povinně zaveden předmět *praktika ze strojnictví, elektrotechniky a zemědělství* v celkovém rozsahu 6 vyučovacích hodin v 9. až 11. ročníku. Podle toho bylo nutné upravit i učební plán JSŠ, ale rozsahu výuky fyziky se to nedotklo. Sílil tlak na další rozšiřování výuky a tak v roce 1959 bylo rozhodnuto rozšířit výuku na nižším stupni o jeden rok, přičemž vyšší stupeň zůstal nezměněn a vznikla *dvánáctiletá střední škola* DSŠ. Její trvání však nebylo příliš dlouhé, poněvadž v prosinci 1960 byl přijat nový *Zákon o soustavě výchovy a vzdělávání (školský zákon)*, na jehož základě došlo k další strukturální změně střední školy.

Výuka fyziky podle osnov z roku 1961

Podle nového zákona se nižší stupeň JSŠ změnil na *základní devítiletou školu* (ZDŠ) a z vyššího stupně se stala *tříletá všeobecně vzdělávací škola* (SVVŠ). Je stále více zřejmé, že požadavek na rozšíření učební látky není možné splnit bez diferenciací výuky. Řešení tohoto problému vedlo ke zřízení tří větví: základní s volitelnými předměty, matematicko-fyzikální a chemicko-biologické. Podle toho byl upraven učební plán SVVŠ (tabulka 3). Zahrnoval také 8 hodin Základů výroby, které se však realizovaly mimo školu v některém výrobním podniku.

Předmět	Větev základní				Větev matematicko-fyzikální				Větev chemicko-biologická			
	1.	2.	3.	Celkem	1.	2.	3.	Celkem	1.	2.	3.	Celkem
Ročník	1.	2.	3.	Celkem	1.	2.	3.	Celkem	1.	2.	3.	Celkem
Matematika	4	4	4	12	5	5	5	15	4	4	4	12
Deskriptivní geometrie	–	–	–	–	–	2	2	4	–	–	–	–
Fyzika	3	3	4	10	4*	4*	5*	13	2	3	3	8
Chemie	2	2	2	6	2	2	–	4	3*	3*	4*	10
Biologie	2	2	2	6	–	–	2	2	2	3*	3*	8

Tabulka 3

Osnoy fyziky z roku 1961 (střední všeobecně vzdělávací škola)

1. ročník

Úvod. Mechanika.

2. ročník

Molekulová fyzika a termika. Kmity a vlnění, akustika. Elektřina a magnetismus I.

3. ročník

Elektřina a magnetismus II. Optika. Stavba atomu. Astronomie. Závěr.

Z přehledu osnov je zřejmé, že jednohodinový předmět astronomie byl zrušen a příslušné učivo bylo opět včleněno do učiva fyziky ve stejném rozsahu, tzn. celkem 33 vyučovacích hodin. Do prvního ročníku byla astronomie zařazena v návaznosti na učivo o gravitačním poli a v učebnici pro 3. ročník SVVŠ tvořila závěrečnou kapitolu.

Dochází také k významné změně ve složení autorských kolektivů učebnic pro SVVŠ v tom smyslu, že se na tvorbě poprvé podílejí také slovenští autoři. Hlavními autory učebnic byli: 1. ročník E. Kašpar, 2. ročník J. Vanovič, 3. ročník J. Fuka. Tento nový soubor učebnic byl ještě doplněn o učebnici Praktická cvičení fyziky, hlavní autor F. Živný. Byla to svého druhu první učebnice od 30. let 20. století, kdy vyšla kniha [5]. Učebnice obsahuje nejen obvyklé úlohy fyzikálního praktika, ale také základy fotografování, konstrukční práce z elektroniky, astronomická a meteorologická pozorování a byla určena pro výuku praktických cvičení v matematicko-fyzikální větví, popř. v nepovinném předmětu stejného zaměření (viz [7]).

*Z toho 1 hodina praktických cvičení týdně.



Obr. 4

V prosinci 1968 byl přijat nový *Zákon o gymnasiích*, kterým se změnila tříletá SVVŠ na čtyřleté gymnázium. Zkušenosti z výuky v SVVŠ ukázaly na neúnosný rozsah učiva. Proto bylo učitelskou veřejností dobře přijato rozhodnutí prodloužit gymnázium o jeden školní rok. Osnovy fyziky pro gymnázium vydané v roce 1969 obsahovaly učivo v rozsahu a pojetí osnov z roku 1961. Bylo však doplněno několik nových témat např. neinerciální soustavy (1. ročník) nebo základy speciální teorie relativity (4. ročník).

Na tyto změny bylo třeba reagovat nejen změnou učebního plánu, ale bylo třeba nové situaci přizpůsobit stávající učebnice, které v prvním vydání vyšly v roce 1965. Tento problém byl vyřešen tím, že byl pro každou třídu gymnázia vytvořen Doplněk učiva (obr. 5) a z učebnic byly některé kapitoly vyjmuty (viz [7]).



Obr. 5

Význam Doplněků byl i v tom, že bylo možné nově zpracovat některá témata moderněji, např. poznatky z fyziky mikrosvěta nebo učivo o rychle se vyvíjejících poznatcích polovodičové techniky apod. Praktický vliv Doplněků však nebyl příliš veliký, poněvadž mnozí vyučující nadále využívali

jen původní učebnice pro SVVŠ. Práce na Doplnících se však stala přípravou na historicky nejrozsáhlejší projekt přestavby výuky fyziky, který byl realizován v období 1977–1984 a je konkretizován osnovami fyziky z roku 1983.

Výuka fyziky podle osnov z roku 1983

Práce na novém projektu výuky fyziky byly iniciovány v roce 1976 politickým dokumentem nazvaným *Další rozvoj československé výchovně vzdělávací soustavy*. Odpovědnými řešiteli projektu byl Výzkumný ústav pedagogický v Praze, který garantoval přestavbu výuky na základní škole, a Výzkumný ústav pedagogický v Bratislavě, který byl gestorem projektu výuky na gymnáziu. V roce 1977 byla vypracována pracovní verze osnov fyziky a podle nich byly připraveny pokusné učební texty. Ty se pak ověřovaly na 35 pokusných školách v ČR i SR. Na základě vyhodnocení experimentální výuky byla vypracována finální verze učebních osnov a podle nich se ve školním roce 1984/85 začalo na gymnáziích vyučovat.

Učební plán měl strukturu 3 + 3 + 3 + 4, tzn. celkově 13 týdenních vyučovacích hodin. Tím byl vytvořen nejen větší prostor pro modernizaci obsahu zařazením nových, popř. prohloubením obsahu tradičních témat učiva, ale došlo i k výrazným změnám ve struktuře didaktické soustavy učiva. Příznivá hodinová dotace vedla k zavedení systému cvičení, pro něž byla v učebním plánu vymezena jedna týdenní hodina v dělené třídě. Kromě toho byl vytvořen systém nepovinných a volitelných předmětů. Ve fyzice to byla Cvičení z fyziky ve všech ročnících a pět volitelných předmětů ve 4. ročníku: Vybrané kapitoly z fyziky, Fyzika a technika, Fyzika pevných látek, Fyzika a filozofie a Fyzika hvězd a vesmíru.

Obsah nově připravovaných učebnic fyziky pro gymnázium byl vymezen osnovami fyziky z roku 1983 s následujícím uspořádáním tematických celků učiva.

Osnovy fyziky z roku 1983 (gymnázium)

1. ročník

Úvod. Formy a příčiny mechanického pohybu. Gravitační pole. Elektrické pole.

2. ročník

Struktura a vlastnosti látek. Elektrický proud v látkách.

3. ročník

Magnetické pole. Kmitání a vlnění.

4. ročník

Světlo a záření. Stavba atomu. Astrofyzika. Fyzikální obraz světa.

Na základě těchto osnov byly vytvořeny učebnice pro předmět Fyzika (obr. 6), jejichž hlavními autory byli J. Vachek (1. ročník), E. Svoboda (2. ročník), O. Lepil (3. ročník) a J. Pišút (4. ročník). Učebnice vyšly postupně v letech 1984 až 1987. Kromě toho byly vytvořeny učebnice pro nepovinné a volitelné předměty, dvoudílná Sběrka úloh z fyziky a Přehled středoškolské fyziky. Celkem tak v relativně krátkém časovém období vznikl ojedinělý soubor 16 učebnic pro všechny formy výuky (viz [7]).



Obr. 6

Učebnice vytvořené v rámci projektu však nebyly považovány za definitivní. Souběžně s výukou probíhalo jejich hodnocení, které bylo náplní celostátní konference JČMF v roce 1988 [8]. Po vyhodnocení měly být vypracovány učebnice definitivní. Vzhledem ke společenským změnám v roce 1989 však k jejich realizaci již nedošlo a projekt byl předčasně ukončen. Poslední publikací projektu tak je *Přehled středoškolské fyziky* (hlavní autor E. Svoboda), který vyšel v roce 1991.

Závěr

Na přibližně půl století trvajícím vývoji fyzikálního vzdělávání na školách gymnaziálního typu jsme ukázali, jak pojetí výuky, jeho rozsah a obsah ovlivňovaly nejen poznatky o zákonitostech fyziky, ale také změny školských systémů podle měnícího se politického uspořádání společnosti.

Můžeme však konstatovat, že tyto změny provázelo trvalé úsilí o zlepšování a modernizaci obsahu i metod výuky, ovlivňované i vývojovými trendy fyzikálního vzdělávání v zahraničí.

Přehled jsme ukončili projektem z 80. let 20. století, který znamenal přínos i pro rozvoj didaktiky fyziky jako vědecké disciplíny a přivedl k zájmu o fyzikální vzdělávání na nižších stupních škol i řadu pracovníků vysokoškolské sféry. Zdůraznit je také třeba podíl JČMF na školských reformách a na praktické realizaci modernizačních snah ve fyzikálním vzdělávání.

Literatura

- [1] *Vašek, L.*: Příspěvek k hodnocení vývoje učebních osnov fyziky na našich středních školách. Habilitační spis, Přírodovědecká fakulta UP Olomouc, rukopis, nedatováno.
- [2] *Mašek, B., Jeništa, J., Nachtikal, F., Štěpánek, J.*: Fysika pro vyšší třídy středních škol, díl I. a II. 7. vydání přepracoval podle učebních osnov z roku 1933 A. Wangler, JČMF, Praha, 1936.
- [3] *Devorecký, H., Šmok, M.*: Fysika pro vyšší třídy středních škol, díl I. a II. JČMF, Praha, 1935-36.
- [4] *Herolt, E., Ryšavý, V.*: Fysika pro vyšší třídy středních škol, díl I. a II. Česká grafická unie, Praha, 1935.
- [5] *Sechovský, H., Šilháček, K.*: Fyzikální praktikum ve vyšších třídách středních škol. Čs. grafická unie, Praha, 1935.
- [6] *Volf, I., Vybíral, B.*: Vývoj českých učebnic fyziky do poloviny 20. století. MFI 2013, roč. 22, č. 4, s. P2-P15. Dostupné na: [mfi_2204_p02_p15.pdf](#) (upol.cz)
- [7] *Lepil, O.*: K vývoji učebnic fyziky pro střední školu gymnaziálního typu. MFI 2013, roč. 22, č. 4, s. P16-P30. Dostupné na: [mfi_2204_p16_p30.pdf](#) (upol.cz)
- [8] Výuka fyziky na gymnáziu. Materiály celostátní konference Luhačovice, 14. až 17. listopadu 1988. Ed. O. Lepil, JČMF, Olomouc, 1989.

Úlohy z mechaniky v letošním ročníku Výfuku

VERONIKA BARTÁKOVÁ – PAVLA ŠIMOVÁ

Slovanské gymnázium Olomouc – Gymnázium Šumperk

Mezi žáky základních škol se setkáváme s mnoha různými přístupy k fyzice jako předmětu. Některé nadchne sama o sobě a chtějí jí porozumět více. Některým zase často připadá nudná a nebaví je učit se nazpaměť spousty vzorečků, kterým ani pořádně nerozumí. A jiným by se třeba i líbila, kdyby měli více prostoru si ji sami vyzkoušet a objevovat, jak doopravdy funguje.

Nejen pro všechny tyto je tu korespondenční seminář *Výpočty fyzikálních úkolů*, zkráceně *Výfuk*, který se snaží ukázat, že fyzika je vlastně velmi zábavné a fascinující téma. Pomocí zajímavých úloh, jak teoretických, tak experimentálních, jeho řešitelé pomalu poznávají zákony, podle kterých se svět kolem nás řídí.

Úlohy ve Výfuku jsou připraveny na míru žákům druhého stupně základních škol tím způsobem, aby zaujaly své řešitele a přiblížily jim fyziku a matematiku v celé jejich kráse, jak se můžete přesvědčit na dalších stránkách. Kromě úloh samotných je motivací pro účast v semináři také spousta zajímavých cen pro nejúspěšnější řešitele a především možnost zúčastnit se v průběhu roku několika akcí, mezi kterými je největší a nejoblíbenější událostí letní tábor. Na akcích se děti mohou setkat s organizátory a dalšími řešiteli. Často zde vznikají přátelství na dlouhá léta. Účastníci potkají podobně smýšlející kamarády a získají motivaci pro další studium. Mnohdy to následně dotáhnou k účasti na mezinárodních olympiádách nebo studiu na prestižních školách v Česku i zahraničí. Řešit Výfuk se zkrátka vyplatí.

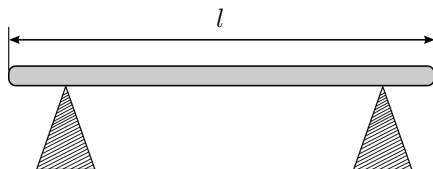
V tomto článku se tedy podíváme na to, na jaké zajímavé úlohy z oblasti mechaniky mohli řešitelé v letošním ročníku zatím narazit.

Dvě podpěry (1. úloha 2. série)

Mějme dvě stejně vysoké svislé podpěry a položme na ně homogenní tyč délky l (viz obr. 1). Lubora by zajímalo, jak daleko od sebe mají být podpěry

vzdáleny a jakým způsobem na ně položit tyč, aby byla tyč co nejstabilnější. Dokážete mu poradit?

Stabilitu definujeme jako minimální vzdálenost, o kterou musíme tyč posunout, než z libovolné podpěry spadne. Vzdálenost podpěr a polohu tyče vyjádřete v násobcích délky tyče l .



Obr. 1 Dvě podpěry (zadání)

První úlohy v každé sérii bývají vždy ty nejjednodušší. Proto jsou určeny pouze pro žáky šestých a sedmých tříd, starším řešitelům se za ně body neudělují. Přesto i mezi těmito příklady můžeme nalézt opravdu zajímavé kousky, jako je třeba právě tato úloha. U prvních úloh je časté, že existuje mnoho různých přístupů a cest, jak se dostat k jejich řešení. Zde uvádíme jedno řešení velmi intuitivní a jedno využívající jednoduchého, ale pěkného nápadu.

První přístup se snaží maximálně oddálit pád tyče. Lze si snadno uvědomit, že k převrnutí tyče dojde v jednom ze dvou případů. Buď v okamžiku, kdy se obě podpěry ocitnou pod stejnou polovinou tyče, nebo tehdy, kdy jedna z podpěr přestane tyč podpírat. Umístíme-li podpěry dále od sebe, dá nám větší práci, aby došlo k první z možností, zato však bude snazší dosáhnout druhé varianty. Dáme-li podpěry naopak blízko k sobě, situace se přesně obrátí. Nejvýhodnější pro nás tedy určitě je možnost, kdy dojde k oběma scénářům současně – tedy v jednom okamžiku bude jedna podpěra přesně uprostřed tyče a druhá přesně na jejím konci. Nejvýhodnější vzdálenost podpěr je tedy $l/2$.

Kromě tohoto postupu lze však úlohu vyřešit i přesněji za pomoci úvah o těžišti tyče. Opět si uvědomme, že tyč spadne ve chvíli, kdy ji jedna z podpěr přestane podpírat, nebo když se těžiště přestane nacházet mezi podpěrami.

Představíme-li si nyní pouze polovinu tyče, pak jeden její okraj je koncem tyče a druhý je těžištěm. Nyní je již dobře patrné, že podpěru musíme pro největší stabilitu umístit doprostřed poloviny tyče. Pokud bychom ji umístili blíže k jednomu z okrajů, tak se tím vždy zmenší vzdálenost pod-

pěry buď od těžiště, nebo od okraje, a tím pádem i vzdálenost, o kterou musíme tyč posunout, aby spadla. Po složení obou polovin tyče dohromady bude vzdálenost mezi podpěrami opět $l/2$.

Stav beztlíže (4. úloha 2. série)

Jirka se vydal na večerní procházku s přáteli. V průběhu večera si všiml, že přes oblohu přeletěla Mezinárodní vesmírná stanice (ISS). Jeden z kamarádů se jej zeptal, jak vysoko nad povrchem ISS obíhá. Jirka si však výšku nepamatuje a on, ani žádný z jeho přátel, nemají signál, proto si údaj nemohou vyhledat na internetu. Rozhodl se tedy, že výšku h ISS nad povrchem spočítá. Pozoroval proto noční oblohu a na hodinkách změřil, že další přelet ISS nastal o $T = 93$ min později. Dále si vzpomněl, že poloměr Země je $R = 6378$ km a gravitační zrychlení na povrchu je $a_g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Spočítejte, stejně jako Jirka, výšku ISS nad zemským povrchem s využitím pouze těchto tří údajů, když víte, že dvě tělesa o hmotnostech m a M , ve vzájemné vzdálenosti r na sebe působí gravitační silou o velikosti:

$$F_g = \frac{GMm}{r^2},$$

kde G je konstanta, jejíž číselnou hodnotu si Jirka rovněž nepamatuje.

Tato úloha je v sérii čtvrtá, jde tedy o středně těžký fyzikální příklad. Zatímco třetí příklad lze vyřešit pouze se znalostmi ze školy, zde se účastníci často dozví něco nového a musí se nad úlohou hlouběji zamyslet.

ISS obíhá nad Zemí po kruhové dráze. Aby se těleso pohybovalo po kružnici musí na něj působit dostředivá síla o velikosti

$$F_d = \frac{mv^2}{r},$$

kde m je hmotnost pohybujícího se tělesa, v jeho rychlost a r poloměr kružnice. V tomto případě je dostředivou silou právě síla gravitační, což nám dává rovnici, která je zásadní pro vyřešení celé úlohy.

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r}.$$

My však chceme vypočítat výšku nad zemským povrchem, která zatím v rovnici nefiguruje. Můžeme si však uvědomit, že poloměr kruhové trajektorie r , což je totéž jako vzdálenost mezi středem Země a stanicí, je

součtem poloměru Země R a výškou stanice nad povrchem h :

$$r = R + h.$$

Další neznámou veličinou je rychlost pohybu stanice v . Pro její vyjádření využijeme znalost periody T a jako dráhu do základního vzorce pro rychlost použijeme délku oběžné dráhy, tedy délku kružnice o poloměru $R + h$:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{2\pi(R + h)}{T}.$$

A nyní už neznáme pouze hodnotu součinu GM . K jejímu výpočtu využijeme znalost tíhového zrychlení na povrchu Země a_g , pro které spojením druhého Newtonova zákona a Newtonova gravitačního zákona získáme vztah, z něž můžeme právě hledanou hodnotu součinu vyjádřit:

$$a_g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow GM = a_g R^2.$$

Přichází velké finále, vše, co jsme odvodili, dáme dohromady a vyjádříme neznámou h :

$$\frac{4\pi^2(R + h)^2}{T^2(R + h)} = \frac{a_g R^2}{(R + h)^2},$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{a_g R^2 T^2}{4\pi^2}} - R.$$

Po dosazení číselných hodnot vychází, že ISS obíhá zhruba 422 km nad zemským povrchem, což velice dobře odpovídá realitě.

Můžeme si všimnout velmi zajímavé skutečnosti a to, že během řešení tohoto příkladu jsme mimo jiné odvodili třetí Keplerův zákon ve speciálním případě, kdy je pohyb kruhový. Stačí, když trochu upravíme výslednou rovnici a za součin GM nebudeme dosazovat, a vyjde jedna z podob třetího Keplerova zákona

$$\frac{T^2}{(R + h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Výraz na pravé straně rovnice bude pro všechny oběžnice daného tělesa (v tomto případě Země) stejný, proto se musí pro libovolná dvě obíhající tělesa rovnat i levé strany:

$$\frac{T^2}{(R + h)^3} = \frac{T_1^2}{r_1^3}, \quad \frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}.$$

Samozřejmě, že pokud bychom tento zákon rovnou použili při řešení úlohy, ulehčili bychom si tím práci s řešením. Zároveň bychom se tím však ochudili o velkou část pochopení toho, jak pohyb těles v gravitačním poli funguje, a to by byla škoda.

Nebezpečný manévř (5. úloha 4. série)

Tom Cruise měl ve filmu *Top Gun: Maverick* za úkol připravit skupinu mladých vojáků na nebezpečnou misi. Součástí této mise bylo proletět ve stíhačce komplikovaným prostorem v omezeném čase. Let byl náročný i z důvodu velkých zrychlení, která Tom Cruise při letu pociťoval. Při jednom z manévřů napřed ve stíhačce stoupal pod úhlem 45° a poté provedl vertikální otočku o 90° tak, že na konci tohoto manévřu klesal pod úhlem 45° . Předpokládejte, že se během otočky stíhačka pohybovala po části kružnice rychlostí $300 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a že celý manévř trval 8 sekund.

1. Spočítejte velikost maximálního pocitového zrychlení, které Tom Cruise při tomto manévřu pociťoval (manévřem rozumíme let stíhačky po zmíněné části kružnice za účelem změny směru letu).
2. Porovnejte ho s minimálním pocitovým zrychlením při manévřu a určete poměr $a_{\max-p}/a_{\min-p}$.

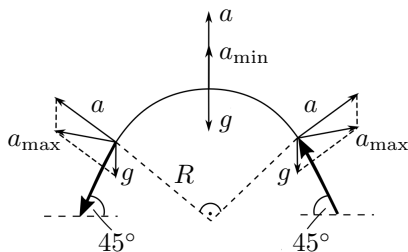
Bonus: Tom Cruise si následně uvědomil, že způsob, kterým otočku provádí (tedy let po části kružnice), není zdaleka optimální. Zkuste se zamyslet nad tím, jaké může být nejmenší možné maximální zrychlení letadla. Následně také určete, po jaké trajektorii se letadlo v takovém případě bude pohybovat. Je to zároveň i trajektorie s nejmenším maximálním pocitovým zrychlením?

Poznámka: Pocitovým zrychlením rozumíme tíhu, kterou naše tělo pociťuje. Tedy například pokud stojíme v klidu na zemi, tak cítíme zrychlení $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, i když naše tělo nezrychluje. Naopak astronauti na Mezinárodní vesmírné stanici se zrychleným pohybem pohybují, ale cítí stav beztlíže.

Pátá úloha je většinou ze všech nejnáročnější. K vyřešení vyžaduje hlubší pochopení problému a využití nadstandardních fyzikálních znalostí. Pro lepší orientaci bývá rozdělena do více podúloh, které zároveň navádí řešitele, jak k úloze přistupovat.

1. Nejprve si musíme uvědomit, kdy pociťuje pilot největší zrychlení. Během manévřu se k tíhovému zrychlení g (vektorově) přičítá ještě zdán-

livé odstředivé zrychlení a_o . Nejmenší zrychlení pilot pocítí v nejvyšším bodě trajektorie, kdy se tato zrychlení navzájem částečně odečtou. Největší naopak bude cítit v okamžik, kdy celý manévř začne – úhel mezi vektory zrychlení je v tomto okamžiku nejmenší a výslednice tak bude největší (viz obr. 2).



Obr. 2 Nebezpečný manévř (řešení)

Nejprve zjistíme velikost odstředivého zrychlení:

$$a_o = \frac{v^2}{R},$$

kde v je nám známá rychlost letounu a R je poloměr kružnice, po níž letadlo letí. Ten získáme díky tomu, že známe dráhu, kterou letadlo uletí během manévřu, a zároveň víme, že jeho trajektorie je čtvrtinou kružnice:

$$s = vt = \frac{2\pi R}{4} \Rightarrow R = \frac{2vt}{\pi}.$$

Zkombinováním těchto dvou vztahů získáme výsledné odstředivé zrychlení:

$$a_o = \frac{\pi v}{2t}.$$

Nyní potřebujeme vektorově sečíst tíhové zrychlení g a odstředivé zrychlení a_o . Nejjednodušší by bylo využít kosinovou větu, kterou ovšem žáci druhých stupňů ZŠ většinou neznají. K výsledku lze však, dokonce náznornějším způsobem, dospět i pouze s pomocí Pythagorovy věty. Odstředivé zrychlení a_o si můžeme rozdělit na horizontální složku a_x a vertikální složku a_y :

$$a_x = a_y = a_o \sin 45^\circ = a_o \cos 45^\circ.$$

Celkové vertikální zrychlení se pak bude rovnat $a_y - g$, horizontální složka celkového zrychlení bude stále a_x . Tyto dvě složky už jen stačí sečíst pomocí zmiňované Pythagorovy věty:

$$\begin{aligned} a_{\max-p} &= \sqrt{(a_y - g)^2 + a_x^2} = \\ &= \sqrt{a_o^2 \sin^2(45^\circ) - 2a_o g \sin(45^\circ) + g^2 + a_o^2 \cos^2(45^\circ)} = \\ &= \sqrt{a_o^2 + g^2 - \sqrt{2}a_o g} = \sqrt{\left(\frac{\pi v}{2t}\right)^2 + g^2 - \frac{\sqrt{2}\pi v}{2t}g}. \end{aligned}$$

Pro zadané hodnoty vychází maximální pocitové zrychlení při manévru $52,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2. Největší zrychlení známe, potřebujeme tedy nalézt to nejmenší v průběhu letu. Jak jsme již zmínili, letec jej bude cítit v nejvyšším bodě trajektorie, kdy se od odstředivého zrychlení a_o odečte tíhové zrychlení g , tedy:

$$a_{\min-p} = a_o - g = \frac{\pi v}{2t} - g.$$

Hledaný poměr pak bude pro zadané veličiny vycházet:

$$\frac{a_{\max-p}}{a_{\min-p}} \doteq 1,07.$$

Bonus

Nejzajímavější částí na celé této úloze je bezpochyby její bonusová část. Na první pohled se jedná o dost složitou úlohu. Pokud bychom se pokusili řešit ji pouze pomocí matematických úvah, ke správnému výsledku bychom se dostali jen s opravdu velkými obtížemi. Znalosti základoškoláků by na to zdaleka nestačily. K úloze se ale dá přistupovat i trochu odlišným způsobem, fyzikální úvahou. Aby byl manévr co nejefektivnější, musí mít zrychlení směr změny rychlosti. Při letu po kružnici se tento směr mění, rozhodně to tedy nemůže být optimální trajektorie. Změna rychlosti má směr přímo dolů a velikost

$$\Delta v = 2v_y = 2v \cos 45^\circ = \sqrt{2}v.$$

Nejefektivnější trajektorie tedy bude taková, při níž bude zrychlení směřovat přímo dolů. Maximální zrychlení musí být větší nebo rovno průměr-

nému zrychlení. Aby tedy bylo $a'_{\max}$ co nejmenší, musí se rovnat průměrnému zrychlení:

$$a'_{\max} = \frac{\Delta v}{t} \doteq 53 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

Pohybuje-li se letadlo se zrychlením směřujícím přímo k zemi, jedná se o analogii k šikmému vrhu. Trajektorií tedy bude parabola.

Poslední otázkou je, jestli při tomto letu bude i maximální pocitové zrychlení to nejmenší možné. Opět se bude od zrychlení (které směřuje přímo k zemi) odečítat tíhové zrychlení, neboť má přesně opačný směr. Jelikož zrychlení letadla je nejmenší možné, bude i pocitové zrychlení nejmenší.

Ukázali jsme si, že řešení úvahou a slovním popisem nemusí být v některých případech na škodu, ba naopak nám může cestu ke správnému výsledku velmi usnadnit. Rozhodně to tedy není něco, čemu bychom se měli vyhýbat.

Kulička na provázku (5. úloha 6. série)

Jirka doma našel kuličku o hmotnosti $m = 50 \text{ g}$ zavěšenou na tenkém nehmotném provázku délky $l = 50 \text{ cm}$ a začal s ní provádět pokusy.

- 1. Napřed kuličku roztočil takovým způsobem, že obíhala po kružnici v horizontální rovině s frekvencí $f_1 = 1 \text{ Hz}$. O jaký úhel byl provázek vychýlený proti svislému směru?*
- 2. Nyní by chtěl kuličku roztočit tak, aby po kruhové dráze obíhala 2krát pomaleji, tedy s frekvencí $f_2 = 0,5 \text{ Hz}$. Podaří se mu to? Pokud ano, tak o jaký úhel bude nyní provázek vychýlený? Pokud ne, vysvětlete, proč se mu to nepodaří a co se bude s kuličkou dít? (tj. nemusíte nic počítat).*

Jirka kuličku roztáčí tak, že ji vždy vychýlí o vhodný úhel a poté jí udělí vhodnou rychlost kolmou na směr odchýlení. V úloze zanedbejte odporové síly.

1. Na kuličku působí dvě síly – tíhová síla a síla, kterou působí na kuličku provázek, jejichž výslednicí je dostředivá síla, díky níž se kulička pohybuje po kružnici. Pro tíhovou sílu F_g platí

$$F_g = mg.$$

Hmotnost kuličky m i tíhové zrychlení g známe. O mnoho složitější nebude ani situace u dostředivé síly F_d , pro kterou při pohybu po kružnici platí vztah

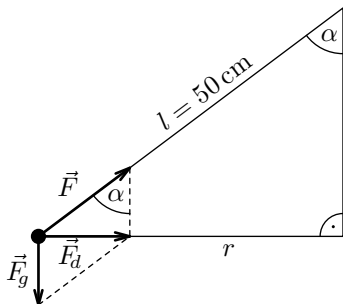
$$F_d = m\omega^2 r,$$

kde ω je úhlová rychlost, s níž se kulička otáčí, a r poloměr její kružnicové trajektorie. K vyjádření úhlové rychlosti využijeme zadanou frekvenci otáčení f_1 :

$$\omega = 2\pi f_1.$$

Poloměr křivosti r můžeme vyjádřit z pravoúhlého trojúhelníku, ve kterém provázek s kuličkou tvoří přeponu a kolmice k zemi a poloměr r tvoří odvěsny (viz obr. 3). Úhel mezi lankem a kolmicí (tedy ten, jehož velikost chceme najít) označme α :

$$r = (\sin \alpha)l.$$



Obr. 3 Kulička na provázku (řešení)

Síly, které na kuličku působí, také vytváří pravoúhlý trojúhelník. Odvěsnami jsou tentokrát tíhová a dostředivá síla, přeponou je tahová síla lanka. Tahová síla lana a tíhová síla spolu také svírají úhel α . Pomocí sil F_g a F_d tedy můžeme vyjádřit $\tan \alpha$:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{F_d}{F_g} = \frac{m(2\pi f_1)^2 (\sin \alpha) l}{mg}.$$

Upravením výrazu získáme finální vzorec, z něž můžeme určit úhel α :

$$\cos \alpha = \frac{g}{(2\pi f_1)^2 l}.$$

Pro zadané hodnoty a $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ vychází $\alpha \doteq 60,2^\circ$.

2. Vycházíme ze stejných předpokladů, jako v první podúloze. Nemění se hmotnost kuličky, délka provázku ani trajektorie (kulička se stále má točit po kružnici), odlišná je pouze frekvence otáčení. Můžeme tedy použít i stejné rovnice, jako v předchozím případě.

Dosazením do finálního vzorce získáme:

$$\cos \alpha \doteq 2.$$

Funkce kosinus však nabývá maximální hodnoty 1. Jak je tedy možné, že výsledek vychází nesmyslně? Je pravděpodobné, že část řešitelů začne v tento moment hledat chybu ve svém postupu. V prvním případě sice finální vzorec funguje, nyní však vychází zdánlivě nesmysly, což je velmi matoucí.

Jestliže však není důvod hledat chybu v postupu, proč matematicky nevychází rozumné řešení? A je možné, že to je vlastně správně?

Pomoci s představou může pomoci reálná zkušenost. Asi každý někdy držel provázek s nějakým závažím, třeba klíči, a zkoušel s ním točit. Časem pak dojde ke zjištění, že při menších rychlostech se bude závaží pohybovat po menších kružnicích. Při zpomalení pod určitou limitní rychlost už vůbec nebude možné, aby se závaží pohybovalo po kružnici – závaží by se totiž muselo pohybovat tak pomalu, že působící dostředivá síla provázku, bude pro pohyb po kružnici příliš velká pro jakýkoliv úhel, a tak stáhne závaží blíže středu. Tím se ovšem rychlost závaží zvětší až se nakonec začne od středu opět vzdalovat. Celkem by tedy trajektorie závaží mohla přibližně připomínat elipsu.

Tímto způsobem se dá poměrně jednoduše vysvětlit na první pohled nesprávný číselný výsledek a ukázat, že někdy i zdánlivě nesmyslný výsledek je správný výsledek. I takováto informace je důležitým výstupem, který si naši účastníci mohou z řešení problémů odnést.

Tímto jsme představili jen lehkou ochutnávku z nepřeberného množství úloh, které Výfuk nabízí. Během roku zveřejňuje seminář několik sérií, v nichž kromě představených teoretických úloh najdeme i experimentální úlohu či krátký doprovodný studijní text o zajímavých fyzikálních tématech – *Výfučtení*. Žáci mají možnost zaslat svá řešení a získat kromě bodů do soutěže i cennou zpětnou vazbu, jak svá řešení zlepšit. Pokud vás seminář Výfuk zaujal, neváhejte navštívit jeho webové stránky vyfuk.org, kde naleznete spoustu dalších úloh i jiných informací.

Úlohy pro výuku JavaScriptu z předmětu Programování 1 (2. díl)

FILIP FRANK – MIROSLAV ZÍKA

Fakulta pedagogická ZČU v Plzni

Představujeme zbývající úlohy používané v rámci předmětu PGM1P na Katedře výpočetní a didaktické techniky na Fakultě pedagogické při Západočeské univerzitě v Plzni. V prvním díle jsme si představili kompletní seznam úloh, ale z důvodu rozsahu jsme nemohli představit všechny úlohy. Zbývající úlohy popisujeme v tomto příspěvku a to, stejně jako v minulém případě, včetně opakovaně pozorovaných chyb. V prvním dílu jsme se zároveň seznámili s požadavky na studenty, očekávanými výstupy a zařazením z pohledu RVP, neboť se jedná o budoucí učitele informatiky.

Představené úlohy jsou používané při výuce studentů bakalářského studia. Z důvodu velmi rozdílných zkušeností studentů s programováním je zapotřebí začít s výukou programování od skutečných základů. Pro příklad rozpětí si můžeme uvést, že mezi studenty se řadí absolventi gymnázií, absolventi elektrotechnických škol, ale také absolventka oboru cukrářství.

Ovocné hrátky s polem

Tato úloha si klade za cíl seznámit studenty s prací s polem. Protože se jedná o první využití array, tak primárním cílem je studentům představit připravené metody, které jazyk JavaScript při manipulaci s poli využívá. Bude se jednat zejména o přidávání prvků, jejich odstraňování, prohazování nebo získávání dat z pole. Zároveň by studenti měli pochopit, proč je pro ně pole výhodnější než třeba string, který jsme používali v úkolu

se smilíky. Zmíněná úloha by totiž ve své podstatě byla pomocí pole lépe řešena.

Jako v jiných úlohách, ani v této se nebudeme zabývat CSS. Studenti si na začátku připraví HTML strukturu podle předlohy a až následně budeme vše „oživovat“. Vše, co budou studenti pro rozvržení HTML částí potřebovat je tag `<br>`.

V JavaScriptu studenti nejprve deklarují pole a rovnou jej naplní čtyřmi výchozími hodnotami. Aby nemuseli zbytečně přemýšlet nad slovy vyplňující pole, využíváme k jeho naplnění názvy ovoce. Prvním úkolem, který studenti s polem budou realizovat, je jeho výpis. Zde hraje významnou roli využívaný programovací jazyk (např. jazyk PHP používá *implode(separator, array): string*). JavaScript k tomuto účelu využívá funkci *Join()*, jejímž jediným parametrem je oddělovač jednotlivých hodnot. Vzhledem k tomu, že řešení považujeme za poměrně jednoduché a snadno zjištělné, studenti funkci vyhledají a pokoušejí se aplikovat zcela sami.

Další částí úlohy je výpis konkrétního prvku podle zadané číselné hodnoty. Zde je nutné si uvědomit, že pole se indexují od 0 a ne od 1. Pokud budeme mít pole „ovoce = [\"Banány\", \"Pomeranče\", \"Jablka\", \"Hrušky\"]“ a uživatel zadá číslo 2, dojde k výpisu slova „Jablka“. Studenti by však měli upravit uživatelský vstup tak, aby výstup odpovídal konvenčnímu způsobu počítání od jedné. Pokud tedy uživatel zadá 2, měli by studenti zařídit, aby byl vypsáný „Pomeranč“.

Dále studenti musí dokázat přidat prvek na konec nebo na začátek pole. Obecně doporučujeme studentům začít přidáváním na poslední pozici. Tato problematika má dvě řešení – buď je možné zjistit délku celého pole pomocí funkce *length()* (vrácená je vždy o jedna větší, než je nejvyšší index) a na tento index umístíme nový prvek. Pole se nám tím rozšíří o nový prvek, který bude umístěn na konci. Druhou možností je v JavaScriptu připravená funkce *Push()*, která rovněž přidává prvek na konec pole. Výběr použité metody je čistě na uvážení studentů, nicméně jsme vyzpozorovali větší frekvenci funkce *Push()*. Navíc postup, který využívá funkci *length()* funguje díky tomu, že všechna pole v JavaScriptu jsou dynamická. Pro přidání na začátek pole pak studenti mohou použít funkci *unshift()*. Zmíněná funkce posune všechny prvky o jeden index výš a následně na první místo umístí zadaný prvek.

Závěrečným úkolem je možnost mazat z pole konkrétní prvky. Pro smazání na začátku mohou studenti využít funkci *shift()* a ke smazání posledního prvku mohou použít funkci *pop()*. Problém nastává při mazání prvku

na jiných indexech, protože přímo k tomu vytvořená funkce není. Nabízí se využití cyklu *while*, který by kopíroval prvek vždy na vedlejší a tím bychom získali na konci pole dva stejné prvky. Poslední bychom pak smazali pomocí existující funkce. Přesto, že neexistuje předpřipravená funkce, je možné řešit tento problém i jednodušeji a sice funkcí *splice()*. Funkce *splice()* je na webu W3Schools popisována jako funkce, která v poli prvky přidává nebo nahrazuje, přičemž navrácí pole smazaných prvků. Právě při správném nastavení parametrů je možné funkci *splice()* použít na smazání jakéhokoli prvku z pole. Stačí nastavit první parametr, pomocí něhož s využitím číselné hodnoty stanovujeme index, kde se budeme pohybovat na pozici mazaného prvku. Druhý parametr pak nastavíme na hodnotu 1. Při tomto nastavení bude smazán jeden prvek na indexu určeného pomocí prvního parametru. Hodnotu nejen smaže, ale odstraní celou buňku z pole, takže v poli nevznikají „díry“. (1)

Číslo ovoce	Odeslat		
Přidejte ovoce	Přidat na začátek	Přidat na konec	
Smazat pozici číslo	Smazat záznam	Smazat poslední záznam	Smazat první záznam
Vypiš celé pole			

Obr. 1 Úloha *Ovocné hrátky s polem* (Zdroj: Vlastní)

Kód úlohy je k dispozici na <https://codepen.io/filip-frank/pen/mGNwEg>.

Pozorované chyby

Nejčastější chyby studentů je problém s uvědoměním, že indexy v poli začínají od nuly. Tento fakt nejprve vůbec neřeší. Např. uživatel zadá číslo 2 a místo druhé položky smaže z pole třetí. Následně mají studenti problém pochopit, zda jedničku přičítají, nebo odčítají. Uvědomění si tohoto standardu obvykle trvá ještě několik dalších úloh.

Druhou velmi častou chybou je, že se studenti pokouší pole vypisovat tím, že jej přiřadí rovnou do HTML prvku. Alternativně se jej zkouší přetypovat na datový typ string. Tento způsob funguje, ale pouze částečně, protože mezi jednotlivými prvky následně chybí jakýkoli oddělovač.

Poslední evidovaná chyba se týká mazání prvku na konkrétním indexu. Často mazání prvku z pole realizují pomocí vložení prázdného textu. Na první pohled se sice hodnota z pole může jevit jako smazaná, pokud však pole vypíšeme s oddělovači, objeví se na místě tímto způsobem odstraně-

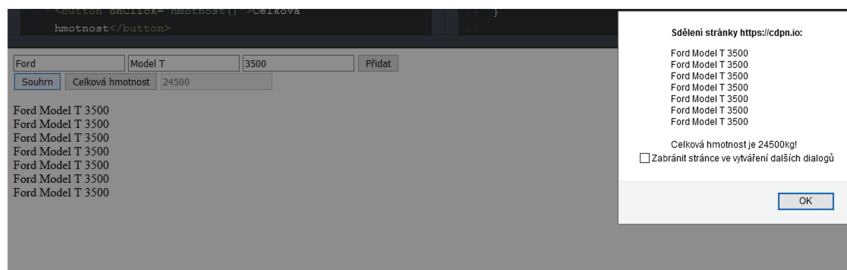
ného prvku oddělovač zdvojeně. Zároveň pak máme problém s adresováním v rámci pole, protože v něm vznikají pomyslné „díry“.

Auta a cykly

Tato úloha si klade za cíl hlouběji seznámit studenty s prací s polem, představit si objekty a prohloubit práci s cykly. Studenti mají za úkol vytvořit pole, do kterého budou následně zadávány značky aut a jejich vlastnosti. Automobily budou vytvořeny jako objekt a jejich vlastnosti budou vlastnosti objektu. Studenti si mimo jiné uvědomí rozdíl mezi běžnou proměnnou, polem a objektem. Náznorně uvidí, že by sice bylo možné vytvořit si neomezené množství různých proměnných pro každý vůz a jeho vlastnosti, avšak následná práce s těmito proměnnými by byla velmi těžkopádná.

V průběhu zadávání nových modelů aut se aktualizuje pole s jejich celkovou hmotností a při vkládání nové položky se vypíše na konec výpisu. Zmíněné pole objektů aut by uživatel neměl dokázat měnit. Výsledkem celé práce je vyskakovací okno, které lze vyvolat stisknutím tlačítka souhrn. V něm se vypíší všechny zadané vozy s jejich vlastnosti. Ve spodní části se objeví celková hmotnost všech vozů.

Úplně stejnou úlohu používáme i při zápočtových testech. V testu se pouze úloha změní na *Účtenku* a studenti musí počítat cenu jednotlivých položek. Na rozdíl od úlohy *Auta a cykly* se po zaplacení vše vynuluje do počátečního stavu, aby „mohl přistoupit další zákazník“. Chyby v účtence jsou totožné s chybami níže.



Obr. 2 Úloha *Auta a cykly* (Zdroj: Vlastní)

Kód úlohy *Účtenka* je k dispozici na <https://codepen.io/PGM1Ptest/pen/ZVENVM>.

Kód úlohy *Auta a cykly* je k dispozici na <https://codepen.io/filip-frank/pen/MzxqPg>.

Pozorované chyby

Studenti se vždy pokouší vypisovat pole pomocí funkce *Join()*. Tento postup však není možné použít, protože v poli jsou komplexnější objekty. Funkce umí pracovat pouze s polem, ve kterém jsou hodnoty umožňující převod do datového typu *string*. Při aplikaci na pole se objekty vypíše *[Object object]*. V tomto bodě se často studenti zaseknou a neví, jakým způsobem pole manuálně vypsát. Jen s programováním zkušenější studenti bez problémů využijí cyklus, ostatní musí navést vyučující.

V průběhu používání cyklu *FOR* je opakující se chybou špatný počet opakování. Studenti často odečítají od délky pole hodnotu 1, čímž si nevyepisují poslední hodnotu v poli. Zároveň také zadávají konkrétní hodnotu pro počet průchodů, místo určování počtu průchodů podle měnící se délky pole (vlastnost *length*).

Úvod do canvasu a odrážecí kulička

Úloha *Úvod do canvasu a odrážecí kulička* je úloha, která není úplně konzistentní. Je tvořena jednotlivými ukázkami práce s canvasem, jeho možnostmi a nástroji. Díky tomu si studenti vyzkouší všechny základní nástroje s jejichž použitím mohou vyřešit i komplexní úlohy. Jednotlivé sekce vždy zakomentujeme, abychom mohli vytvořit další část. Pokud by tento postup studentům nevyhovoval, mohou si každou sekci uložit do jiného souboru.

V první části se studenti pokusí vykreslit čtverec pomocí příkazů *lineTo()* a *moveTo()*. Pomocí příkazů nejprve přesunou „Štětce“ do požadované pozice a následně pomocí čtyř čar vykreslí čtverec. Bohužel zároveň zjistí, že takto vytvořený čtverec nemá výplň – je tvořen pouze čarami.

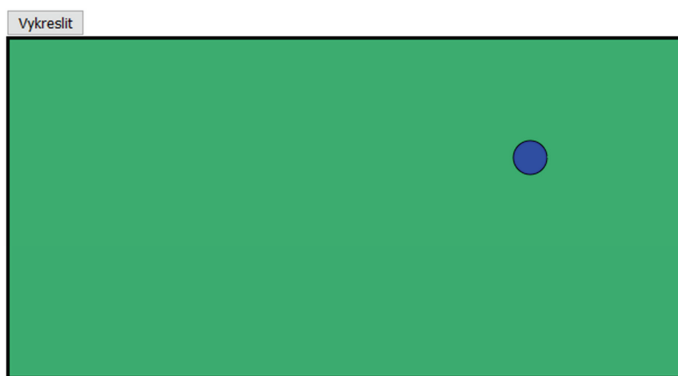
Kvůli nedostatkům prvního pokusu se přesouváme k druhé části, kdy se studenti seznamují s příkazem *rect()*. Tento příkaz vykresluje čtverec nebo obdélník definovaný čtyřmi parametry. První dva parametry udávají pozici levého horního rohu a druhé dva posun. Podle kladných a záporných hodnot tak vykreslíme tvar o námi zvolené velikosti. Následně studenti vytvoří druhý čtverec, který bude o něco níž a bude vyplněn jinou barvou. Zde je potřeba dávat pozor na uzavírání jednotlivých částí. Každý samostatný čtverec by měl být uzavřen mezi příkazy *beginPath()* a *closePath()*. Pokud budou oba čtverce ve stejné sekci, přebarví se nám první na barvu udanou pro druhý čtverec.

Další částí je rozpohybování čtverce. Opět tedy vytvoříme čtverec pomocí příkazu *rect()*, nyní však nebudeme do souřadnice vrcholu zapisovat

konkrétní hodnotu, ale využijeme zde proměnné. Díky tomu můžeme vytvořit zdánlivý pohyb čtverce tak, že vždy vymažeme celé plátno a při každém vykreslení čtverce přičteme k souřadnici osy x zvolenou hodnotu. My jsme zvolili 5 px, které jsou dostatečně velký posun, aby se čtverec hýbal, ale zároveň jde o dostatečně malý skok, aby to vypadalo, jako kdyby se čtverec sunul. Tuto část následně ještě rozvineme o odraz čtverce od konce plátna, jeho souřadnice vždy budou v rozsahu plátna. Zde si je potřeba uvědomit, že pokud máme plátno orámované, kus plátna zakrývá rámeček. Dalším problémem je fakt, že čtverec je nějak veliký. O velikost čtverce tedy musíme posunout hranici odrazu čtverce. Pokud bychom tak neudělali, čtverec by se odrážel svým levým horním okrajem.

Poslední částí je vytvoření kuličky, která se odráží od všech stěn a poletuje po plátně. Nejprve je tedy potřeba nějakým způsobem vykreslit kolečko. Pro jeho vykreslení se využívá příkaz `arc()`, který opět využívá několik parametrů. První dva určují umístění středu kolečka na souřadnicích x a y . Třetí určuje poloměr kolečka, čtvrtý určuje, zda budeme chtít vykreslovat kružnici po směru, nebo proti směru hodinových ručiček a poslední parametr určuje kolik radiánů se z kružnice vykreslí (při zadání $2 * \text{Math.PI}$ se vykreslí kružnice celá). Následně kružnici jen vybarvíme.

Canvas



Obr. 3 Úloha Úvod do Canvasu a odrážecí kulička (Zdroj: Vlastní)

Nyní, když máme připravené kolečko, je potřeba vyřešit jeho pohyb. Místo obou souřadnic na osách zadáme proměnné. Tyto proměnné budeme při každém kroku navyšovat o zvolenou hodnotu. Pokud bude na-

výšení u obou hodnot stejné, bude se kulička pohybovat pod úhlem 45° . Klíčové je správné nastavení okrajů plátna. Vždy když tedy kulička dosáhne stanoveného okraje, je potřeba rozhodnout, zda se jedná o okraj souřadnice x nebo y . Podle toho, o kterou z os se jedná, vynásobíme její posun -1 a tím se kulička odrazí.

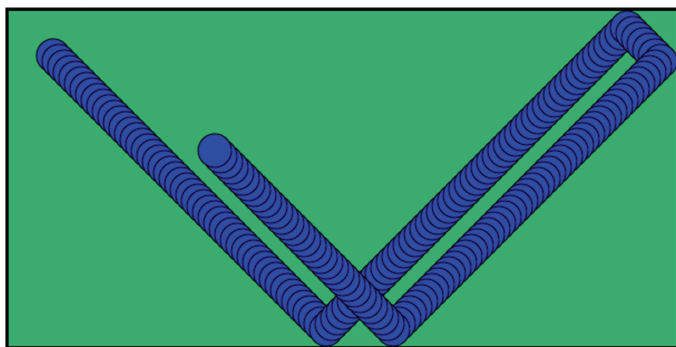
Kód úlohy je k dispozici na <https://codepen.io/filip-frank/pen/rNaNer0>.

Pozorované chyby

Nejčastěji opakovaná chyba vzniklá při této úloze je, že studenti si připraví celý tvar, ale následně jej nevykreslí. Při dotazu jsme zjistili, že nejde o zapomínání, studenti nevidí důvod pro další vykreslování. Myslí si, že už příkazem *lineTo()* dělají čáru. Z toho důvodu zprvu nevidí důvod použít příkaz *stroke()*. V případě výplně, tedy příkazu *fill()*, tento problém nevzniká.

Při práci s výplní se opakuje jiná chyba a sice, že studenti při rozdílně barevných objektech vybarví oba stejnou barvou. Neuvědomují si, že je potřeba jednotlivé objekty uzavírat. Obvyklý průběh je pak takový, že vybarví první objekt správnou barvou, následně změní barvu a zavolají příkaz pro vybarvení, čímž vybarví druhý objekt. Problémem je, že pokud nejsou objekty odděleny, přebarví se i první.

Klasickou chybou u pohybujících se objektů je zanechání stopy. Studenti zapomínají že to, co namalují do canvasu tam bude zůstat. V případě pohybujících objektů si neuvědomují, že je třeba vždy canvas smazat a nakreslit objekt s upravenou pozicí.



Obr. 4 Chyba nemazání objektu (Zdroj: Vlastní)

Dále si studenti špatně vypočítávají místo, kde se jim má objekt odrazit. Výsledkem je buď zanořování, výjezd z canvasu, nebo naopak nedosažení úplné hranice, tedy odraz od ničeho.

Poslední opakující se chybou je špatné pozicování. S osou x obvykle studenti nemají problém, protože je pro ně přirozené, že směr doprava je kladný. Přetrvávající problémy se však objevují u osy y , která je pro studenty nepřirozeně rostoucí směrem dolů.

Náhodný graf

Úloha *Náhodný graf* prohlubuje práci s canvasem a ukazuje studentům jedno z praktických využití tohoto HTML prvku. V tomto případě budeme chtít vykreslovat sloupcový graf. Abychom si ověřili, že všechny funkce pracují podle očekávání, budeme pro vykreslování generovat náhodné hodnoty.

Na začátku si studenti připraví HTML strukturu a volitelně si mohou obarvit plátno pomocí CSS. Při další práci už se budeme zabývat pouze JavaScriptem. Prvním problémem je vytvoření pole s náhodnými hodnotami. Abychom předešli v grafu neviditelným sloupcům o nulové hodnotě, omezíme si hodnoty zdola a sice hodnotou 20. Je vhodné omezit hodnoty i shora, abychom viděli vždy vrchol sloupce a nesplynul nám s případným orámováním. V rámci příkladu je zvolena maximální hodnota na 100. Tímto vytvořeným generátorem jsme si nechali vytvořit 14 hodnot, které následně vykreslíme do grafu. Pro kontrolu vygenerovaných si vytvoříme v HTML výpis, kam indexy pole vypíšeme.

Dále budeme potřebovat vypočítat průměr, maximum a minimum ze všech hodnot. Pro zjištění maximální hodnoty v poli můžeme použít připravenou funkci, která vezme z pole prvek a uloží si jej. Tento uložený prvek porovná vůči vedlejšímu, pokud je vedlejší prvek větší, uloží si ho, v opačném případě zachová původní. Stejným způsobem funguje i funkce pro minimum.

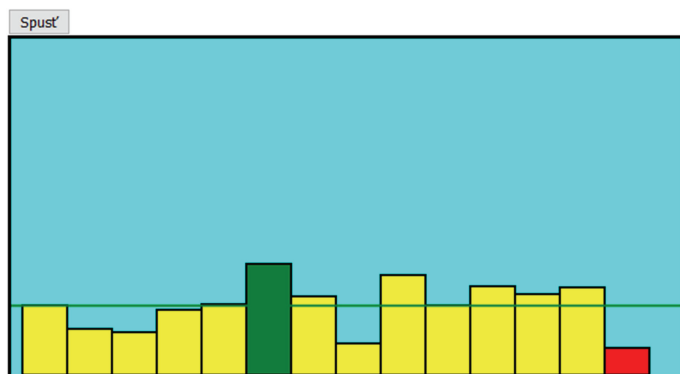
Pro aritmetický průměr si musíme funkci vytvořit sami. Vytvoříme si tedy cyklus s pevným počtem opakování, který projde celé pole a vytvoří sumu hodnot. Výsledek vydělíme délkou pole, čímž získáme průměr. Pokud všechny dosavadní kroky fungují, přesuneme se k vykreslování grafu.

Než začneme pracovat na grafu, je potřeba si uvědomit, že souřadnicový systém počítá obráceně, než budeme chtít vykreslovat graf. Souřadnicový systém funguje tak, že adresa 0,0 je v levém horním rohu a směrem doprava a dolů hodnoty stoupají. Pro vytvoření sloupců odsopoda nahoru si

tedy budeme muset uvědomit, že se musíme přesunout na ose y na její maximální hodnotu. V našem případě má plátno rozměr 600×300 px. Souřadnici y tedy nastavíme na 300. Osa x se bude měnit, takže zde zanecháme proměnnou. Šířka sloupce je libovolná, my jsme použili hodnotu 40 px. Nyní zbývá zadat hodnotu z pole. Vzhledem k tomu, že budeme chtít vykreslovat odspoda nahoru, musíme hodnotu vynásobit -1 . Díky tomu bude hodnota záporná a od hodnoty 300 se přiblíží vzhůru k 0. Na závěr musíme přičíst k proměnné na ose x hodnotu 40, abychom posunuli příští sloupec o šířku vykresleného sloupce vpravo. Všechny sloupce budeme chtít mít sytě černě orámované a ve výchozím stavu ve žluté barvě.

Pokud při procházení pole program zjistí, že pracuje s maximální hodnotou, vybarví patřičný sloupec zeleně. Při vykreslování minimální hodnoty barva sloupce na červenou. Na závěr vykreslíme zelenou vodorovnou čáru přes celý graf. Zde je nutné si opět uvědomit, že nestačí zadat do osy y hodnotu průměru, ale je potřeba odečíst hodnotu průměru od maximální hodnoty osy y , tedy 300.

Náhodný graf



Obr. 5 Úloha *Náhodný graf* (Zdroj: Vlastní)

Kód úlohy je k dispozici na <https://codepen.io/filip-frank/pen/JjoGbNe>.

Pozorované chyby

Studenti mají obvykle problém s datovým typem u proměnné *soucet*. Tato chyba je způsobena tím, že JavaScript si určuje datové typy sám

(většinou je určuje správně). V tomto případě bohužel datový typ správně neurčí. Při výpočtu průměrné hodnoty, kterou získáme dělením součtu počtem prvků v poli, dojde k vyvolání chyby *prumer is NaN*. Proto je nutné při deklarování proměnné do součtu na příklad rovnou uložit 0. Zároveň si tím ošetřujeme, že při opětovném spuštění nebude v součtu předchozí hodnota.

Další opakovanou chybou je obarvení žlutých sloupců zeleně nebo červeně. Tato situace nastane ve chvíli, kdy je špatně uzavřeno kreslení maximálních a minimálních hodnot. Chyba se projevuje buď u všech následujících sloupců, nebo minimálně u sousedního. Podle toho, jakým způsobem je chyba vytvořena.

Někteří studenti se potýkají s problémem, kdy se jim obarví orámování všech sloupců zeleně. Tento problém se objevuje, pokud student nejprve vykresluje průměr, špatně čáru uzavře a pro orámování sloupců neurčí barvu, ale spoléhá na defaultní černou.

Často se objevuje chyba, kdy jsou sloupce malé, takřka neviditelné. Vytvoří prakticky jen rámeček, který se objevuje nad spodním orámováním plátna. Tento problém je způsoben špatnou prací se souřadnicovým systémem. Sloupce jsou sice správně velké, ale vedou dolů mimo plátno. S touto chybou se pojí i podobná, kdy je vše správně, jen vedou sloupce z horního okraje plátna dolů. Maximum i minimum bývá v těchto případech správně, pouze jsou v grafu shora dolů.

Opakovanou chybou je vykreslení všech sloupců na sobě. Tato chyba v některých případech vypadá, že se vykreslilo pouze maximum. Je to způsobeno tím, že studenti zapomínají posunout souřadnice na ose x o šířku sloupce. Je to způsobeno buď tím, že nemění proměnnou nebo místo proměnné použijí hodnotu. U studentů využívající proměnnou jde obvykle jen o zapomenutí. U studentů zapisující hodnotu přímo jde o algoritmickou chybu, kdy si nejsou plně vědomi způsobu fungování.

Poslední opakovanou chybou je špatné umístění čáry průměru a její nesprávná barva. Nesprávná barva je obvykle způsobena opomenutím změny barvy z defaultní na zelenou. Špatné umístění je způsobeno tím, že student neodčítá hodnotu průměru od 300 – čára průměru je tedy vysoko nad grafem.

V této úloze se pak objevuje studenty domnělá chyba. Při generování náhodných čísel se někdy může stát, že se vygeneruje několik stejných čísel a zrovna jde o maxima nebo minima. V takovém případě, pokud je vše správně naprogramováno, se nám objeví několik zelených sloupců nebo

několik červených sloupců. Jedná se o normální běh programu, protože vše jsou to maxima a minima. Studenti však často toto chování považují za špatné vyhodnocení a tráví poměrně dlouhý čas nad opravou. Situace obvykle končí dotazem na vyučujícího.

Závěr

Představená sada příkladů je využita pro výuku programování v jazyce JavaScript na Katedře výpočetní a didaktické techniky. Vzhledem k velmi různorodému předchozímu vzdělání studentů jsou příklady koncipovány tak, aby se při jejich plnění seznámili s nejčastějšími chybami spjatými nejen se zvoleným jazykem, ale také programátorskými chybami způsobené nevhodným postupem (rozdílné datové typy, důležitost správné struktury programu, znovu využitelnost kódu aj.). Díky dodržení principu návaznosti a rostoucí úrovně komplikovanosti dochází k postupnému objevování různorodých cest, které lze využít pro splnění požadovaného cvičení. V rámci předmětu PGM1P je studentům hodnoceno pouze, zda daný příklad funguje, nebo nefunguje, a to i u zkoušky. S ohledem na velmi různorodou vstupní úroveň neřešíme v rámci PGM1P efektivitu kódu, nebo best practices.

Na závěr je nutno podotknout, že předmět PGM1P je zaměřen pouze na základní prvky programovacího jazyka JavaScript a jejich využití v rámci strukturovaného programování. Na tento předmět je navazováno předmětem PGM2B, v němž se studenti seznámí se základy objektově orientovaného programování pomocí obdobně koncipovaných příkladů.

Literatura

- [1] Programování 1 pro vzdělávání. Západočeská univerzita, Plzeň.
- [2] Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání. Dostupné z: <https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2021/07/RVP-ZV-2021.pdf>
- [3] *Frank, F., Zíka, M.*: Úlohy pro výuku JavaScriptu z předmětu Programování 1. Matematika–fyzika–informatika, roč. 31 (2022), č. 4, s. 303–314.

LITERATURA

Recenze knihy Johanneše Keplera *Nové stereometrické výpočty vinných sudů – Stereometrie Archiméda*

Matematikům je známo, že Johannes Kepler se zabýval nejen astronomickými měřeními z nichž odvodil své tři zákony pohybu planet, ale i daleko prostším problémem výpočtu objemu vinných sudů. Důvody, proč se Kepler také pustil do řešení tak „přízemního problému“ jako je zjišťování objemů různých typů vinných sudů veřejnosti již tak známa není. V prvním českém vydání z dílny překladatele, nakladatele a vydavatele matematika RNDr. Karla Vašíčka vyšla citovaná Keplerova kniha v nákladu pouhých 175 výtisků v roce 2021 (ISBN 978-80-903838-5-2).

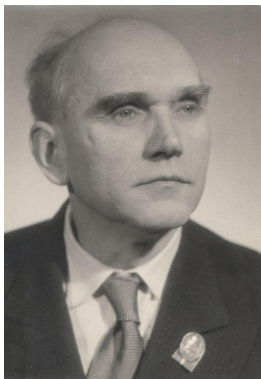
Obdivuhodné je úsilí vydavatelovo postupně seznamovat matematickou veřejnost, hlavně však středoškolské učitele matematiky, s originály zásadní matematické literatury od starověku po novověk v českém překladu. (Dosud vyšly např. knihy *Cesta k integrálu* od V. A. Nikiforovského, H. N. Jahnkeho *Historie analýzy*, Newtonovy *Matematické principy přírodní filosofie*, B. Cavalieriho *Geometrie vyložena jiným způsobem za pomocí nedělitelných spojitého*, G. M. de L'Hôpitala *Analýza nekonečně malého za účelem chápání křivek*.) Krom stěžejního díla (v našem případě Keplerova) zařazuje Karel Vašíček do knih i překlady jiných důležitých statí, které by samostatně knihu nevytvořily. Zde najdeme článek N. I. Lobačevského *Geometrické výzkumy v teorii rovnoběžných čar* s komentářem prof. V. F. Kagana, J. Bolyaie *Apendix, Teorie prostoru* a velmi zajímavou *Korespondenci mezi Blaisem Pascalem a Pierrem de Fermatem*. Máme zde v češtině první literaturu ze základů neeukleidovské geometrie a úvahy o sázkách, které vyjasnily pisatelům dopisů principy teorie pravděpodobnosti.

V knize najdeme nejen prosté Keplerovo zdůvodnění, proč se začal zabývat studiem výpočtu objemů vinných sudů, ale projdeme rozsáhlou geometrickou teorií té doby od základních úvah (určení obvodu a obsahu kruhu Aristotelovou metodou) až ke stereometrickým výpočtům a numerickým odhadům konkrétních objemů a obsahů různých útvarů a jejich částí (tedy nejen sudů). Text je doplněn velkým množstvím odkazů a obrázků. Čtenář získá poučení o tom, jak velký génius tvořil matematickou teorii a jak se ji snažil v té době prezentovat. A při tom se přesvědčí, že to, co autor sepsal, není tak triviální jak sám název knihy napovídá.

Zdeněk Půlpán

ZPRÁVY A INFORMACE

Miloslav Zedek – významný český didaktik matematiky



V červnu letošního roku si připomeneme 115. výročí od narození jedné z nejvýznamnějších osobností české školy didaktiky matematiky po 2. světové válce – profesora Miloslava Zedka.

Miloslav Zedek (1908–2001) zahájil svou profesní dráhu jako učitel (později se stal ředitelem) na Slovanském gymnáziu v Olomouci. Zde se iniciativně zapojil do organizace Matematické olympiády (MO) v rámci celého olomouckého regionu. V této činnosti pak pokračoval i po svém přechodu (v roce 1954) na tehdejší Fakultu přírodních věd Vysoké školy pedagogické v Olomouci, která se od roku 1958 stala součástí Univerzity Palackého. V letech 1955–1970 byl členem ÚV MO. Koncem šedesátých let se podílel jako koordinátor a spoluautor na tvorbě sbírky *Vybrané úlohy z matematické olympiády pro kategorie B a C*.

Od šedesátých let se jako vedoucí Katedry metodiky matematiky a elementární matematiky na Přírodovědecké fakultě UP výrazně podílel na modernizačním hnutí ve vyučování matematice. Byl spoluautorem učebnic pro SVVŠ a pro nově vznikající čtyřletá gymnázia, dále řady pokusných učebních textů z matematiky, vysokoškolských skript a časopiseckých publikací, které svým moderním pojetím výrazně ovlivnily výuku matematiky nejen v Československu. Významný podíl na tom měla jeho úzká spolupráce s předními českými didaktiky matematiky, mezi něž tehdy patřili především Karel Hruša, Jan Vyšín, Emil Kraemer, Jiří Mikulčák, Jaroslav Šedivý a další.

Jeho dodnes aktuální názory na vyučování geometrii na středních školách jsou shrnuty v dvojdielném vysokoškolském skriptu *Metodika vyučování matematice na školách II. cyklu*, které vyšlo v Praze (SPN, 1966). Jako řešitel projektů ministerstva školství a jedna z vůdčích osobností modernizačních snah ve vyučování matematice se koncem sedmdesátých let stal koordinátorem kompletní řady učebnic matematiky pro gymnázia schválených ministerstvem školství, jejichž spoluautory byli naši významní matematici, didaktici a učitelé matematiky.

Pro většinu svých žáků, vysokoškolských posluchačů a kolegů se prof. Zedek stal vzorem vysoce kvalitního učitele matematiky, a to především díky své náročnosti, odbornému a metodickému nadhledu.

Josef Molnár a Jaroslav Švrček

Ústřední kolo 72. ročníku MO kategorie A

Ústřední kolo 72. ročníku Matematické olympiády kategorie A uspořádalo Gymnázium Zlín – Lesní čtvrť. Záštitu nad ním převzali *RNDr. Miloš Vystrčil*, předseda Senátu Parlamentu České republiky, *Ing. Radim Holíš*, hejtmán Zlínského kraje, *Ing. Mgr. Zuzana Fišerová, Ph.D.* radní Zlínského kraje pro oblast školství a kultury, *Ing. et Ing. Jiří Korec*, primátor statutárního města Zlína, *prof. Mgr. Milan Adámek, Ph.D.*, rektor Univerzity Tomáše Bati ve Zlíně a *doc. Ing. Jiří Vojtíšek, Ph.D.*, děkan její Fakulty aplikované informatiky. Na uspořádání ústředního kola se dále podílela Ústřední komise matematické olympiády, Jednota českých matematiků a fyziků a Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR. Všichni soutěžící, členové Ústřední komise kategorie MO a pozvaní hosté byli ubytováni v hotelu Baltaci, vlastní soutěž a slavnostní zahájení pak probíhalo v prostorách Fakulty aplikované informatiky UTB, vyhlášení výsledků pak na zlínské radnici. Na slavnostním zahájení přivítal soutěžící hlavní organizátor *Mgr. Pavel Simkovič, RNDr. Jan Chudárek*, ředitel gymnázia, nositelé záštity a nechyběla ani tradiční motivační přednáška *doc RNDr. Jaromíra Šimši, CSc.*

Na základě jednotné koordinace úloh krajského kola kategorie A pozvala Ústřední komise MO k účasti v ústředním kole 45 nejlepších účastníků, mezi nimiž bylo 9 dívek. Na řešení obou trojic soutěžních úloh měli soutěžící po oba dny, 20. a 21. března,

vždy 4,5 hodiny čistého času. Za každou úlohu mohli soutěžící získat nejvýše 7 bodů (s celočíselnými bodovými zisky).

Organizátoři závěrečného kola MO připravili pro soutěžící a pro členy ústřední komise pestrý doprovodný program. Odpoledne po prvním soutěžním dnu absolvovali prohlídku Baťovy vily, přijetí na Krajském úřadě Zlínského kraje, prohlídku Baťova mrakodrapu i města. Druhý den to pak byla návštěva Zoo Zlín a návštěva představení „Baskerville: Záhada Sherlocka Holmese“ v městském divadle Zlín.

Vyhlášení výsledků soutěže a předání cen nejlepším řešitelům III. kola kategorie A se uskutečnilo ve středu 22. března dopoledne. Slavnostního aktu se zúčastnili také zástupci skupiny ČEZ, kteří speciálně ocenili tři nejlepší řešitele ústředního kola soutěže. Předseda ÚK MO *doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.* v závěrečném projevu poděkoval celému týmu organizátorů za kvalitní přípravu a mimořádně zdařilý průběh celého ústředního kola.

Dle organizačního řádu MO bylo vyhlášeno deset vítězů ústředního kola, absolutním vítězem se pak stal *Samuel Rosiar* z G Jana Keplera v Praze 6 se ziskem 41 bodů. Dále bylo oceněno jedenáct úspěšných řešitelů. Podrobnější výsledky najdete na stránkách **72. ročníku MO**. Zde najdete také **vsuvová řešení** soutěžních úloh, jejichž zadání uvádíme níže.

1. soutěžní den (20. března)

1. Alice a Bohouš hrají hru na plánu se 72 políčky rozmístěnými po obvodu kruhu. Na začátku Bohouš položí na některá políčka po jednom že-

tonu. V každém kole nejprve Alice zvolí jedno prázdné políčko a Bohouš pak na něj musí posunout žeton z jednoho sousedního políčka. Pokud to nesvede, hra končí; jinak následuje další kolo. Určete nejmenší počet žetonů, pro který Bohouš umí zajistit, že ve hře proběhne aspoň 2023 kol. (Václav Blažej)

2. Necht' $n \geq 3$ je celé číslo a $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou délky stran libovolného n -úhelníku. Dokažte nerovnost

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n > \sqrt{2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)}.$$

(Jaroslav Švrček)

3. V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme H průsečík jeho výšek a I střed kružnice mu vepsané. Necht' D je kolmým průmětem bodu I na přímku BC a E je obrazem bodu A v souměrnosti se středem I . Dále je F kolmým průmětem bodu H na přímku ED . Dokažte, že body B, H, F a C leží na téže kružnici.

(Patrik Bak)

2. soutěžní den (21. března)

4. Uvažujeme posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ kladných celých čísel splňující pro každý index $n \geq 3$ podmínku

$$a_n = a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_{n-2} a_{n-1} - 1.$$

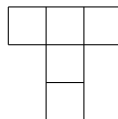
- Dokažte, že některé prvočíslo je dělitelem nekonečně mnoha členů této posloupnosti.
- Dokažte, že takových prvočísel je nekonečně mnoho.

(Tomáš Bárta)

5. V trojúhelníku ABC označme M, N, P po řadě středy stran BC, CA, AB a G jeho těžiště. Necht' kružnice opsaná trojúhelníku BGP protíná přímku MP v bodě K různém od P a kružnice opsaná trojúhelníku CGN protíná přímku MN v bodě L různém od N . Dokažte, že $|\angle BAK| = |\angle CAL|$.

(Josef Tkadlec)

6. Necht' $n \geq 3$ je celé číslo. Uvažujme čtverečkovaný papír o rozměrech $n \times n$, jehož jednotlivé čtverečky mohou mít buď bílou, nebo černou barvu. V každém kroku změníme barvy pěti čtverečků, které tvoří obrazec



v libovolném natočení. Na počátku jsou všechny čtverečky bílé. Rozhodněte, pro která n lze po konečném počtu kroků dosáhnout toho, že všechny čtverečky budou černé.

(Jaroslav Zhouf)



Vítězové ústředního kola: zleva Michal Janík (2. místo), Samuel Rosiar (1. místo), Jakub Štěpo (3. místo)

Všichni vítězové a úspěšní řešitelé z nematuritních ročníků byli pozváni na výběrové soustředění, kde budou bojovat o místa v reprezentačních družstvech na Mezinárodní matematickou olympiádu v Japonsku a Středoevropskou matematickou olympiádu na Slovensku.

Všichni řešitelé z nematuritních ročníků pak budou v pozvání na tradiční zářijové soustředění nejlepších řešitelů kategorie A do Janských Lázní.

Pavel Calábek

Ústřední kolo 72. ročníku MO kategorie P

Ústřední kolo 72. ročníku Matematické olympiády kategorie P se konalo ve Zlíně ve dnech 22.–24. 3. 2023. Jako obvykle přímo navazovalo na ústřední kolo MO kategorie A. Devět studentů, kteří letos postoupili do ústředního kola MO v obou nejvyšších kategoriích MO, tak absolvovali obě soutěže na jednom místě v průběhu jednoho týdne. Celé ústřední kolo Matematické olympiády organizačně výborně připravili pracovníci Krajské komise MO Zlínského kraje a Gymnázia Zlín-Lesní čtvrť. Na přípravě a zajištění odborné části ústředního kola MO kategorie P se podíleli zejména pracovníci Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, kteří se postarali o přípravu soutěžních úloh, opravování a vyhodnocení odevzdaných řešení a přípravu soutěžního prostředí pro praktickou část soutěže.

V letošním ústředním kole MO kategorie P soutěžilo 29 nejlepších úspěšných řešitelů krajských kol. Největší

zastoupení měli tentokrát kraje Praha a Jihomoravský kraj, oba s jedenácti účastníky. Šest krajů nemělo v letošním ústředním kole žádného řešitele – ve třech z nich nikdo nepostoupil z krajského kola, ve třech se krajské kolo vůbec nekonalo. Polovina soutěžících byla z maturitních ročníků (celkem 14), ostatní byli mladší (celkem 15).

Soutěž byla zahájena ve středu večer. Po krátkém přivítání se soutěžící seznámili s pravidly soutěže a dostali také nezbytné organizační pokyny. Ve čtvrtek dopoledne proběhla teoretická část soutěže, v níž studenti řešili úlohy zaměřené na návrh efektivního algoritmu. V této části se nepracuje na počítačích, soutěžící odevzdávají svoje řešení zpracovaná v písemné podobě. Na vyřešení tří zadaných úloh mají vymezen čas 4,5 hodiny. Jedna z teoretických úloh každoročně využívá nějaký netradiční výpočetní model, který připraví autoři úloh vždy pro všechna soutěžní kola příslušného ročníku MO.

Druhý soutěžní den v pátek probíhal u počítačů za obdobných podmínek a podle stejných pravidel, jako jsou organizovány i mezinárodní středoškolské olympiády v informatice. Každý soutěžící pracuje na přiděleném osobním počítači se soutěžním prostředím a v průběhu 4,5 hodiny má za úkol vyřešit tři úlohy. Řešení praktických úloh je třeba dovést do podoby odladěných, plně funkčních programů. Odevzdané programy jsou již v průběhu soutěže okamžitě testovány pomocí předem připravené sady testovacích vstupních dat. Hodnotí se nejen správnost, ale pomocí nastavených časových limitů také rychlost výpočtu. V bodovém hodnocení lze díky tomu odlišit kvalitu různých

ných řešení z hlediska časové složitosti použitého algoritmu. Řešitelé se průběžně dozvídají ohodnocení svých řešení, mají možnost řešení opravit a odevzdat ho opakovaně vícekrát.

Tradiční součástí ústředního kola Matematické olympiády bývá vždy i zajímavý doprovodný program. Organizátoři obvykle připravují jiný výlet pro účastníky kategorie A a jiný pro účastníky kategorie P, aby byl program stále zajímavý i pro ty studenty, kteří soutěží v obou kategoriích. Pro soutěžící kategorie P byla tentokrát na čtvrtek odpoledne připravena prohlídka města. Organizátoři se v té době věnovali instalaci počítačů na praktickou část soutěže a opravování odevzdaných řešení teoretických úloh. Večer ještě následovala návštěva počítačových učeben, kde si všichni mohli prakticky vyzkoušet práci na počítačích se soutěžním a vyhodnocovacím prostředím CMS. Soutěžící k němu přistupují pomocí webového rozhraní, jehož prostřednictvím mohou nejen odevzdávat k vyhodnocení svá řešení soutěžních úloh, ale mohou také klást dotazy k úlohám a dozvídat se, jak byla odevzdaná řešení ohodnocena. Jde o stejné prostředí, jaké se používá i na mezinárodních olympiádách v informatice.

Ústřední kolo 72. ročníku MO bylo zakončeno slavnostním vyhlášením výsledků kategorie P v Baťově zlínském mrakodrapu. Každá soutěžní úloha byla hodnocena nejvýše 10 body, celkem tedy mohli soutěžící získat maximálně 60 bodů. Tohoto výsledku sice nikdo nedosáhl, ale ti nejlepší se mu přiblížili, absolutní vítěz ústředního kola obdržel 56 bodů. Zatímco v teoretické části každý z řešitelů nějaké body ztratil, v praktické části hned pět stu-

dentů vyřešilo všechny soutěžní úlohy na plný počet bodů. Podle součtu dosažených bodů z obou soutěžních dnů dohromady se stanoví výsledné pořadí. Úspěšnými řešiteli letošního ústředního kola MO kategorie P se stali soutěžící na 1. až 14. místě v celkovém pořadí, tedy všichni, kteří získali alespoň 22 bodů. Šest nejlepších z nich bylo vyhlášeno vítězi ústředního kola.

Výsledky ústředního kola 72. ročníku MO kategorie P

Vítězové

1. Štěpán Mikéska, 8/8, Gymnázium tř. Kpt. Jaroše, Brno, 56 bodů
2. Benjamin Swart, 8/8, Mensa gymnázium, Praha 6, 50 bodů
3. Viktor Číhal, 3/4, Smíchovská SPŠ a gymnázium, Praha 5, 46 bodů
4. Antonín Maloň, 7/8, Gymnázium tř. Kpt. Jaroše, Brno, 44 bodů
- 5.–6. Adam Červenka, 8/8, Gymnázium tř. Kpt. Jaroše, Brno, 43 bodů
- 5.–6. Patrik Číhal, 3/4, Střední škola DELTA, Pardubice, 43 bodů

Úspěšní řešitelé

- 7.–8. Samuel Rosiar, 4/4, Gymnázium Jana Keplera, Praha 6, 39 bodů
- 7.–8. Petr Slonek, 8/8, Gymnázium tř. Kpt. Jaroše, Brno, 39 bodů
9. Jan Slíva, 6/8, Mensa gymnázium, Praha 6, 36 bodů
10. Erik Ježek, 1/4, Smíchovská SPŠ a gymnázium, Praha 5, 35 bodů
- 11.–12. Adam Hrnčárek, 7/8, Gymnázium tř. Kpt. Jaroše, Brno, 26 bodů
- 11.–12. Ondřej Pupík, 3/4, Gymnázium Rožnov pod Radhoštěm, 26 bodů
13. Jakub Kopčil, 8/8, Gymnázium Mikulášské nám., Plzeň, 25 bodů
14. Šimon Genčur, 7/8, Biskupské gymnázium, Brno, 22 bodů

Ostatní účastníci: Filip Majer, 6/8, Gymnázium Jana Keplera, Praha 6, 21 b., Svatava Šimečková, 5/8, Gymnázium tř. Kpt. Jaroše, Brno, 20 b., Vít Hanika, 4/4, Gymnázium Jana Keplera, Praha 6, 19 b., Adam Kundrát, 8/8, Gymnázium Brno-Řečkovice, 18 b., David Kolář, 4/4, Gymnázium Jírovcova, České Budějovice, 16 b., Vojtěch Lančarič, 4/4, SPŠ a gymnázium Na Třebešíně, Praha 10, 14 b., Jan Kotovský, 8/8, Gymnázium Písnická, Praha 4, 13 b., Zuzana Aubrechtová, 8/8, Gymnázium Jaroslava Heyrovského, Praha 5, 12 b., Eduard Dlabola, 7/8, Gymnázium tř. Kpt. Jaroše, Brno, 12 b., Ondřej Trinkewitz, 8/8, Gymnázium a SPŠEI Frenštát pod Radhoštěm, 11 b., Jakub Vojtek, 6/8, Gymnázium Brno-Řečkovice, 10 b., Lukáš Wendzel, 4/4, Gymnázium a SPŠEI Frenštát pod Radhoštěm, 9 b., Lenka Poljaková, 7/8, Gymnázium Jakuba Škody, Přerov, 8 b., Lucie Roskovská, 6/8, Gymnázium Elišky Krásnohorské, Praha 4, 7 b., Jan Václavek, 5/8, Gymnázium tř. Kpt. Jaroše, Brno, 7 b.

Na základě výsledků dosažených v ústředním kole 72. ročníku Matematické olympiády kategorie P byli všichni úspěšní řešitelé pozváni na krátké výběrové soustředění. To se uskutečnilo na MFF UK v Praze ve dnech 11.–14. dubna. Cílem tohoto soustředění bylo vybrat reprezentanty pro obě mezinárodní olympiády v informatice. Při výběru reprezentantů sčítáme body získané v ústředním kole MO-P a výsledky dosažené na výběrovém soustředění. Čtyři nejlepší řešitelé budou reprezentovat Českou republiku na 35. mezinárodní olympiádě v informatice IOI 2023, která se

bude konat ve dnech 28. 8.–4. 9. 2023 v Maďarsku ve městě Szeged. Další čtyři mladší úspěšní řešitelé, kteří letos ještě nebudou maturovat, se zúčastní 30. středoevropské olympiády v informatice CEOI 2023. Středoevropskou olympiádu bude letos hostit Německo v Magdeburku ve dnech 13.–19. 8. 2023. O průběhu a výsledcích obou mezinárodních olympiád v informatice vás budeme informovat v našem časopise.

Podrobné informace o celém 72. ročníku MO kategorie P, kompletní výsledková listina, texty soutěžních úloh a jejich vzorová řešení jsou k dispozici na adrese <http://mo.mff.cuni.cz/>. Na stejném místě se můžete seznámit i se staršími ročníky této soutěže a také se všemi aktuálními informacemi týkajícími se kategorie P Matematické olympiády.

Pavel Töpfer

Celostátní kolo FO 2023

Celostátní kolo 64. ročníku Fyzikální olympiády kategorie A ve školním roce 2022/2023 hostil ve dnech 6.–9. března 2023 Karlovarský kraj a především *Gymnázium Cheb* (www.gymcheb.cz). Soutěž proběhla za podpory Gymnázia Cheb, města Cheb, Karlovarského kraje a skupiny ČEZ. Na základě výsledků krajských kol soutěže, jež proběhla 18. 1. 2023, přijelo změřit své síly celkem 44 soutěžících (z toho 2 dívky).

V úterý 7. 3. dopoledne čekaly soutěžící v prostorách Fakulty ekonomická Západočeské univerzity v Plzni čtyři teoretické úlohy, s nimiž se museli vypořádat během pěti hodin. Auto-

rem prvních tří byl *RNDr. Jan Thomas* (První české gymnázium Karlovy Vary), autorem čtvrté *RNDr. Josef Jirů* (Gymnázium a Obchodní akademie Pelhřimov). První úloha s názvem *Klimatizace místnosti* vycházela z modelu klimatizačního zařízení jako tepelného stroje a řešitelé za ni získali v průměru 7,11 bodu z deseti možných. Druhá úloha s názvem *Dvě nabitě kuličky* se zaměřila na kinetickou energii nabitých kulíček, jež se odpuzují pod vlivem elektrostatických sil, a průměrný zisk byl 4,55 bodu. Třetí úloha *Ohyb a interference neutronů* obsahovala jednak výpočet de Broglieho vlnové délky i zpomalování neutronů při srážkách s jádry deuteria; soutěžící dosáhli v průměru 7,28 bodu. Čtvrtá, nejobtížnější úloha s názvem *Střela a tyč*, která navazovala na studijní text [1], byla věnována pohybu tyče po zasažení střelou na jednom z jejích konců a soutěžící získali v průměru 2,45 bodu. Závěrečnou redakci zadání i autorského řešení úloh provedl *RNDr. Jan Šlégr, Ph.D.* (Přírodovědecká fakulta UHK).



Před řešením teoretických úloh v aule FEK ZČU

Ve středu 8. 3. soutěžící ve dvou skupinách řešili praktickou úlohu věnovanou ohybovým jevům a popsanou

na stránkách MFI v [2]. Soutěžící ji zvládli velmi dobře a získali v průměru 15,36 bodu.

K celostátnímu kolu tradičně patří i bohatý navazující program, jenž zahrnoval komentovanou prohlídku města Cheb i přednášku *RNDr. Vladimíra Wagnera, CSc.* z Ústavu jaderné fyziky AV v aule gymnázia.

Poslední den, v čtvrtek 9. 3. dopoledne, proběhlo aule gymnázia slavnostní vyhlášení výsledků. Uvedme základní statistické údaje: jedenáct účastníků se stalo vítězi, dvacet sedm úspěšnými řešiteli a šest účastníky soutěže. Pomyslnou zlatou medaili vybojoval *Mikuláš Fiala* (G Praha 2, Botičská), stříbrnou *Lukáš Javora* (G Zlín-Lesní čtvrť) a bronzovou *Samuel Rosiar* (G Jana Keplera, Praha 6). Držme palce pěti našim soutěžícím na Mezinárodní fyzikální olympiády, která má proběhnout od 10. do 17. července 2023 v Japonsku (viz ipho2023.jp).

Je třeba poděkovat obětavým organizátorům z pořadajícího gymnázia – řediteli *RNDr. Ing. Jaroslavu Kočvarovi, MBA*, a *Mgr. Janu Dirlbeckovi*, kteří se rozhodující měrou zasloužili o hladký průběh soutěže, pohostinnost a příjemnou pracovní atmosféru.

Zájemci a příznivci soutěže najdou všechny potřebné aktuální informace včetně zadání i řešení úloh na čtenářům MFI jistě dobře známých internetových stránkách ÚKFO www.fyzikalniolympiada.cz.

Literatura

- [1] *Vybíral, B., Šedivý, P.*: Mechanika rovinného pohybu tuhého tělesa. Knihovnička FO č. 65. MAFY, Hradec Králové, 2008.

Dostupné z: fyzikalniolympiada.cz/texty/r_pohyb.pdf.

- [2] Kříž, J., Studnička, F., Šlégrová, L., Šlégr, J.: Fyzikální úlohy Evropské experimentální olympiády EOES. *MFI*, roč. 31 (2022), č. 4, 289–296. Dostupné z: <https://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/677>.

Výsledková listina celostátního kola

<https://osmo.fyzikalniolympiada.cz/public/kolo/53/vysledky>

Vítězové

1. Fiala Mikuláš (G Praha 2, Botičská, 54 b),
2. Javora Lukáš (G Zlín, 54 b),
3. Rosiar Samuel (G Jana Keplera, Praha 6, Parlérova, 53,5 b),
4. Andrš Šimon (G Jana Keplera, Praha 6, Parlérova, 50 b),
5. Bálek David (G Příbram, 48,5 b),
6. Gerža Jakub (G Dobruška, 47,5 b),
7. Růžička Bronislav (G a SOŠ Rokycany, 47 b),
8. Čtvrtečka Daniel (G Christiana Dopplera, Praha 5, 46,5 b),
9. Štěpo Jakub (G Kladno, 45,5 b),
10. Brázda Vít (G Pardubice, Dašická, 45,5 b),
11. Pluskal Vojtěch (G Olomouc, Hejčín, Tomkova, 45,5 b).

Úspěšní řešitelé

12. Hynšt Josef (Biskupské G Brno a MŠ, 44 b),
13. Provazník Pavel (G Pardubice, Dašická, 42,5 b),
14. Pat-sch Tomáš (Slovanské G Olomouc, 42,5 b),
15. Plass Štěpán (G Jihlava, 42 b),
16. Zbončák Jakub Radim (G Brno, Křenová, 40 b),
17. Mišta Matouš (G Olomouc, Hejčín, Tomkova, 39,5 b),
18. Voltrová Tereza (G Plzeň, Mikulášské nám., 38,5 b),
19. Trinkl-witz Ondřej (G a SPŠ elektrotech-

niky a informatiky, Frenštát pod Radhoštěm, 37,5 b),- 20. Ježek Johan (G Plzeň, Mikulášské nám., 36 b),
- 21. Potůček Jaromír (G Jana Keplera, Praha 6, Parlérova, 36 b),
- 22. Genčur Šimon (Biskupské G Brno a MŠ, 35,5 b),
- 23. Engler Jan (G, Obchodní akademie a Jazyková škola, Hodonín, 35 b),
- 24. Kopčil Jakub (G Plzeň, Mikulášské nám., 34,5 b),
- 25. Dygrýn Tomáš (G Václava Beneše Třebízkého, Slaný, 34,5 b),
- 26. Linhart Lukáš (G Petra Bezruče, Frýdek-Místek, 34 b),
- 27. Andrlík Jakub (G Polička, 33,5 b),
- 28. Ježek Jakub (G Boženy Němcové, Hradec Králové, 33,5 b),
- 29. Hadač Jakub (G Václava Hlavatého, Louny, 33 b),
- 30. Genčur Jakub (G Matyáše Lercha, Brno, 32,5 b),
- 31. Švehla Michael (G Brno, třída Kapitána Jaroše, 31 b),
- 32. Piňos Petr (Biskupské G Brno a MŠ, 30,5 b),
- 33. Vyškovský Jakub (Masarykovo G, SZŠ a VOŠ zdravotnická, Vsetín, 30,5 b),
- 34. Řádek Robin (G Žďár nad Sázavou, 29,5 b),
- 35. Červenka Adam (G Brno, třída Kapitána Jaroše, 28 b),
- 36. Theiss Daniel (G Cheb, 28 b),
- 37. Tabery Lukáš (Cyri-lometodějské G, ZŠ Prostějov, 27,5 b),
- 38. Šimová Pavla (G Šumperk, 27,5 b).

Účastníci

39. Dvořáček Jindřich (G Benešov, 26,5 b),
40. Marek Matěj (G Dr. Antona Randy, Jablonec nad Nisou, 25,5 b),
41. Zářecký Jan (G Brno, třída Kapitána Jaroše, 25,5 b),
42. Sloup Dominik (Biskupské G J. N. Neumanna a Církevní ZŠ České Budějovice, 22,5 b),
43. Turner Jakub (G Jaroslava Vrchlického, Klatovy, 22 b),
44. Tengler Jáchym (G Polička, 21 b).

Lukáš Richterek