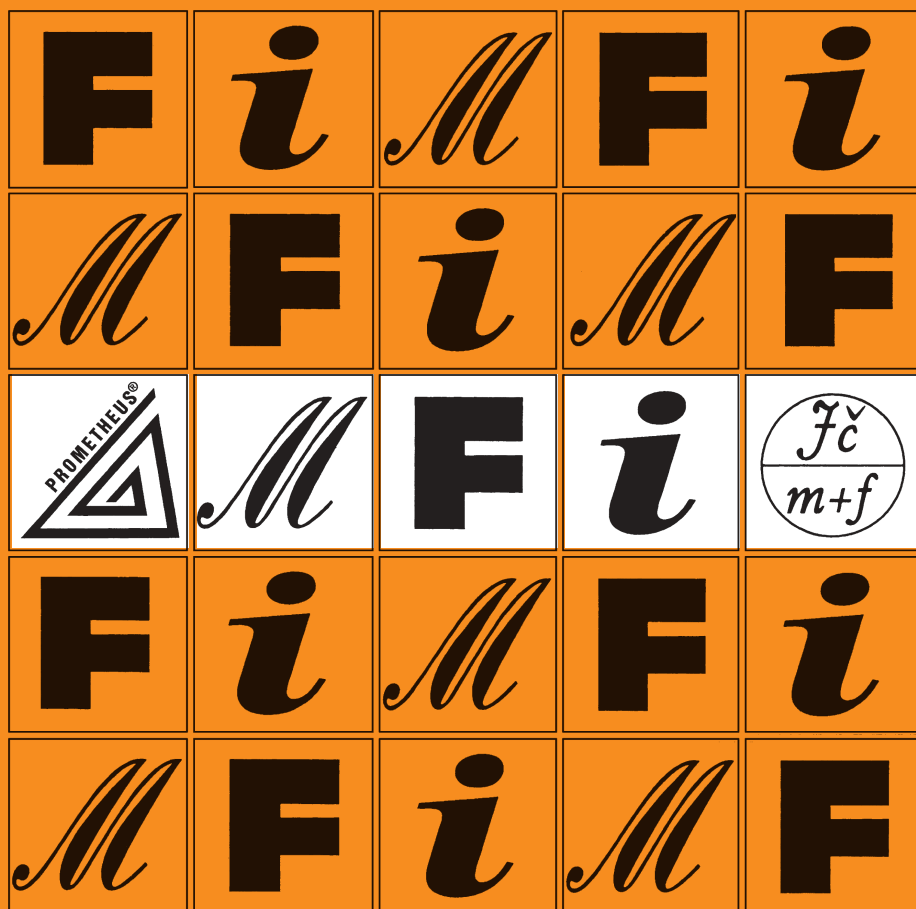


MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA

1

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXXIII (2024), číslo 1

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku
Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek
Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška,
Karel Kolář, Michaela Krížová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil (předseda redakční rady),
Dana Mandíková, Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Jaromír Šimša,
Pavel Tlustý, Pavel Töpfer, Jaroslav Zhouf

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>F. Kuřina, J. Cachová:</i> Didaktická struktura geometrie	1
<i>M. Chodorová, J. Švrček:</i> O konvexních pětiúhelnících	17
Zajímavé matematické úlohy	24

FYZIKA

<i>O. Lepil:</i> 60 let modernizačních snah ve výuce fyziky	29
<i>J. Kos, M. Krížová:</i> Strategie 2030+ v přípravě budoucích učitelů fyziky	39

INFORMATIKA

<i>M. Kolařík:</i> O programovacím jazyku PROLOG	52
<i>P. Töpfer:</i> Vlastnické vztahy (Úlohy z MO kategorie P, 47. část)	72

LITERATURA

<i>J. Molnár:</i> Bonaventura Cavalieri: Geometrie vyložena novým způsobem za pomoci nedělitelných spojitého	79
---	----

ZPRÁVY

<i>K. Kolář:</i> Přehledka popularizace fyziky 2023	80
---	----

Didaktická struktura geometrie

FRANTIŠEK KUŘINA – JANA CACHOVÁ

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

V první části tohoto příspěvku se budeme zabývat výkladem pojmu didaktická struktura, v druhé části uvedeme několik ilustrativních příkladů vhodných pro žáky základní nebo střední školy.

Dva přístupy k vyučování geometrii

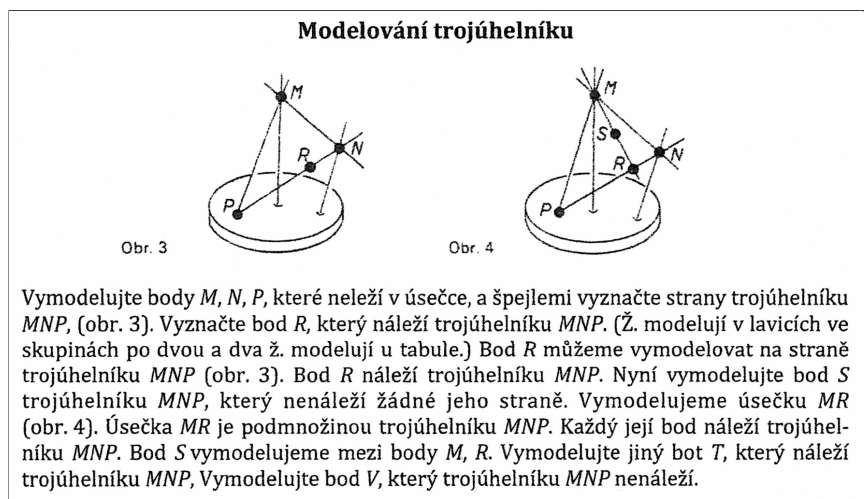
Kdy začíná dítě vnímat první podněty geometrického charakteru? S trochou nadsázky můžeme říci, že geometrii se dítě učí „od kolébky“. Dříve než začne mluvit, poznává omezenost prostoru, v němž žije (postýlka, ohrádka, pokoj, auto, byt, ...). Setkává se přirozeně i s pohybem (mávání ručičkou, příchod matky, pád hračky, jízda autem, ...). Rozumí příkazům „Pojď blíž“, „Otoč se...“. Skládání kostek do krabice, panenek do kočárku, bonbónů do krabičky, ... to jsou činnosti, které mají charakter vyplňování prostoru. Již v předškolním věku poznává dítě (aniž si to ovšem uvědomuje) i jevy různých dimenzí (stopa botičky v písku, stín míče, ...).

Podle našeho názoru bychom měli tyto jevy (dělení prostoru, vyplňování prostoru, pohyb v prostoru a dimenze prostoru) využívat při vyučování geometrie od první třídy ZŠ. Pozoruhodné je, že tyto skutečnosti můžeme vnímat v geometrickém vyučování od základní školy po maturitu (rýsování, měření, obsah útvaru, objem tělesa, shodná zobrazení, diferenciální a integrální počet, ...). Ukažme, že popsané principy jsou „pojmotvorné“. Přímka dělí rovinu na dvě části – poloroviny. Bod dělí přímku na dvě polopřímky. Kružnice dělí rovinu na dvě oblasti (vnitřní a vnější). ... Vyplňování prostoru jednorozměrného vede k měření úseček, „dláždění“ je vyplňování částí roviny, to je základ pojmu obsah útvaru, představa o vyplňování prostoru krychlemi je propedeutikou objemu tělesa. Rýsování (podle pravítka

či kružítka) se realizuje pohybem, pohyb je základem představ o shodnosti geometrických útvarů. Zobrazování těles je proces redukce dimenze: prostorového útvaru do jeho dvojdimenzionálního obrazu.

Naznačené přístupy nejsou ovšem základem vyučování geometrii na našich školách. To je silně ovlivněno tradicí, která se táhne od Eukleida k Hilbertovi. Je založeno na mýtu, že geometrie musí začínat „od začátku“, tedy od základních pojmů, jako jsou např. bod, přímka, incidence, ... Vyučování je silně ovlivněno axiomatickým budováním geometrie.

V tomto, řekněme klasickém pojetí geometrie, se na samém začátku musíme zabývat otázkami, které můžeme stěží uspokojivě zodpovědět, např. Co je to bod? Je tomu tak i v tzv. množinovém pojetí vyučování, které u nás „vykvetlo“ v reformu, v níž např. trojúhelník byl zaveden způsobem reprodukováním na obr. 1 z publikace [6]. Body jsou zde modelovány kuličkami z plastické gumy. Strany trojúhelníka (úsečky) jsou rovněž utvářeny souborem kuliček.



Obr. 1

Je tedy úsečka množinou bodů? Jistě nikoli v pojetí podle obr. 1, ale ani v pojetí Jana Vyšiny: body – můžeme dobře modelovat korálky navlečenými na niti [5]. Množina korálků na napjaté niti by byla pochopitelně touž množinou, pověsíme-li korálky na krk. Chápání bodu jako malé kuličky do matematiky nepatří. Jak bychom při tomto přístupu mohli při-

jmout fakt, že množina bodů vnitřní oblasti kružnice s poloměrem 1 cm je stejně početná (má stejnou mohutnost) jako množina bodů vnější oblasti. Rovnost početnosti těchto množin můžeme dokázat i na úrovni základní školy. Stačí přiřadit libovolnému bodu X roviny různému od středu kružnice poloměru 1 bod X' polopřímky SX , pro který platí $|SX| \cdot |SX'| = 1$. Zkonstruovali jsme tedy prosté zobrazení vnitřní oblasti kružnice na oblast vnější.

Bod bychom měli (podle našeho názoru) chápat jako místo v rovině (nebo v prostoru). Úsečka je tedy množinou takovýchto míst, množinou bodů, z nichž pro každé dva je definována vzdálenost. Množiny bodů jsou podmnožinami určitého metrického prostoru. Úsečka AB je množinou všech bodů X , pro které platí $|AX| + |XB| = |AB|$.

Tím se dostáváme k tradičnímu pojmu školské geometrie: geometrickým místům bodů.

V roce 1964 Jan Vyšín píše: „Neměli bychom užívat zastaralého termínu ‚geometrické místo bodů‘ (tento název pochází od Platona!) a měli bychom důsledně říkat množina bodů! Tento požadavek má hlubší důvody než pouhé ‚zmodernizování‘ termínu; chceme totiž vštípit žákům, že ‚geometrická místa bodů‘ jsou útvary mnohem rozmanitější než jisté křivky (...) a chceme s těmito útvary skutečně pracovat jako s množinami“ ([5, s. 102]). Tato Vyšínova výzva se ujala. V našich současných učebnicích se termín geometrické místo bodů zpravidla nevyskytuje. Naši autoři chtějí být moderní a termín geometrické místo bodů nepoužívají (Pomykalová, Herman, Cihlář, Míček a další). Výjimku tvoří snad jen Hejný, který má v učebnici D z r. 2017 kapitolu Geometrické místo bodů ([3, s. 27]).

Souhlasíme s názorem Jaroslava Šedivého, že termín geometrické místo bodů „označuje takovou část některé základní geometrické množiny, jejíž prvky mají dané charakteristické vlastnosti. Jde tedy o množiny určené podobně jako množiny kořenů rovnic atp.“ V souladu s výkladem o úsečce doporučujeme tedy užívat termín geometrické místo bodů, užívat však ve stejném smyslu termín množina nelze považovat za chybu.

Učivo o geometrických místech bodů je vlastně učivem o dělení na části: body geometrického místa U mají vlastnost V a body doplňku U' vlastnost V nemají.

V souvislosti s tím, že v geometrii vycházíme z reality žákova světa, připomeňme, že některé britské učebnice užívají nejen termín náměstí (square) místo čtverec, ale i disk (disc) místo kruh, drak (kite) místo deltoid, ... Ve slovníku [1] je dokonce definován n -rozměrný míč (obr. 2).

ball The n -ball E^n ($n \geq 1$) is the subspace of n -dimensional *Euclidean space R^n of points $(x_1, \dots, x_n)$ such that $\sqrt{(x_1)^2 + \dots + (x_n)^2} \leq 1$. It contains the $(n-1)$ -sphere S^{n-1} (see sphere) as a subspace.

For example, E^2 is a circular disc and E^1 is the closed interval $[-1, 1]$.

Obr. 2

Hilbertovy Grundlagen der Geometrie, které vyšly r. 1899, ovlivnily, jak už jsme zde zmínili, velmi výrazně školskou geometrii. V r. 1898 vyšly Přednášky z geometrie francouzského matematika Hadamarda, které svým pojetím jsou dosti blízké didaktické struktuře geometrie.

V axiomaticky budované geometrii se, jak známo, tzv. primitivní pojmy (např. bod, přímka, ...) zavádějí nepřímou. Axiomy jsou jejich implicitními definicemi. Tento přístup není ovšem možný realizovat ve školním vzdělávání. Nevhodné je i pojetí Eukleidovo: „Bod jest, co nemá dílu“ [2].

Úlohy

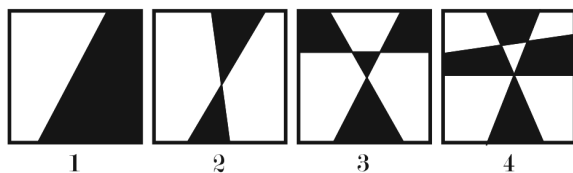
V této části uvádíme 10 řešených úloh z učiva střední školy. Úlohy jsou většinou známé a „klasické“. Jsou dokladem faktu, že ačkoliv naše škola explicitně didaktickou strukturu nezmiňuje, je tato struktura ve školském učivu implicitně obsažena.

Úlohy 1 a 2 se týkají dělení prostoru, úlohy 3 a 4 jsou na geometrická místa bodů, úlohy 5 a 6 pojednávají o dělení a vyplňování prostoru, úlohy 7 a 8 popisují pohyb v prostoru, úlohy 9 a 10 ukazují vztahy mezi dimenzemi 3 a 2. Poslední dva zde uváděné principy vedly dokonce k vydělení samostatných oborů: kinematické a deskriptivní geometrii.

Úloha 1 Dokažte, že „mapu“, kterou vytváří n přímek roviny, můžeme vybarvit dvěma barvami při zachování těchto pravidel:

- oblasti, které mají vzájemnou hranici ve tvaru úsečky, nebo polopřímky, musíme vybarvit různými barvami,
- oblasti, které se stýkají pouze v bodech musíme vybarvit stejnou barvou.

Na obr. 3 jsou nakresleny příklady výsledků pro 1, 2, 3 a 4 přímků.

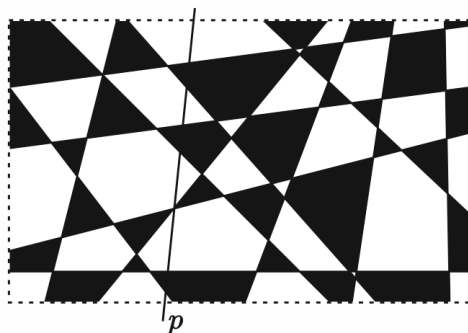


Obr. 3

Dokazujeme, že tvrzení platí pro libovolné přirozené n . Pro $n = 1$ jsme tvrzení ověřili na obr. 3.

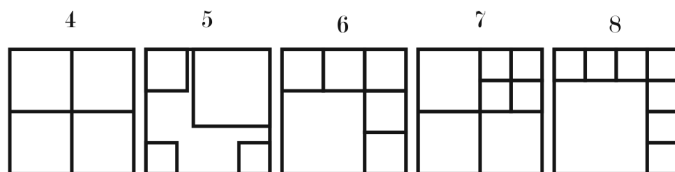
Předpokládejme, že mapu tvořenou $(n - 1)$ přímkami můžeme vybarvit dvěma barvami.

Přidáme-li však další n -tou přímkou p , mapa nebude správně vybarvena. Zaměníme-li však v jedné polorovině barvy, bude mapa opět vybarvená správně (obr. 4). Tím je věta dokázána pro libovolné přirozené n .



Obr. 4

Úloha 2 Dokažte, že každý čtverec lze rozložit na n čtverců, kde n je libovolné přirozené číslo různé od 2, 3 a 5.



Obr. 5

Na obrázku 5 je nakresleno dělení na 4, 6, 7 a 8 čtverců. Na 5 čtverců čtverec rozložit nelze, neboť čtverce v rozích znemožňují konstrukci pátého čtverce.

Protože rozdělením libovolného čtverce podle prvního obrázku přibudou další 3 čtverce, je počet možných rozdělení

$$6 + 3k = 3 \cdot (k + 2) = 3m$$

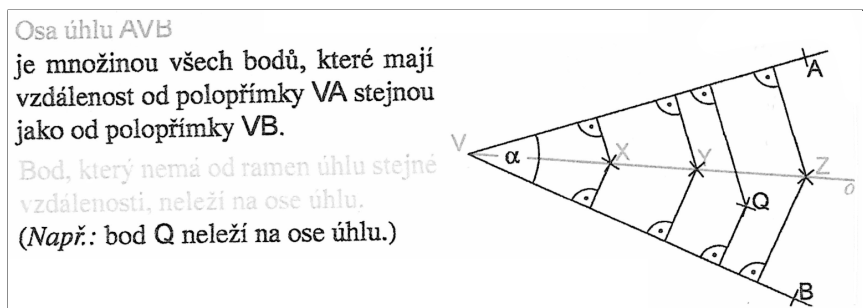
$$7 + 3k = 2 \cdot 3 + 1 + 3k = 3(k + 2) + 1 = 3n + 1$$

$$8 + 3k = 2 \cdot 3 + 2 + 3k = 3(k + 2) + 2 = 3p + 2.$$

Protože každé přirozené číslo lze některým z těchto tvarů vyjádřit, je tvrzení dokázáno.

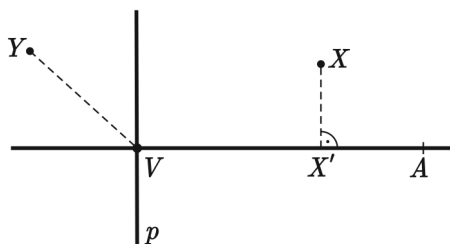
Úloha 3 V řadě našich učebnic můžeme najít text, který reprodukuje na obr. 6 z učebnice [8, s. 73].

Posuďte tuto ukázkou.



Obr. 6

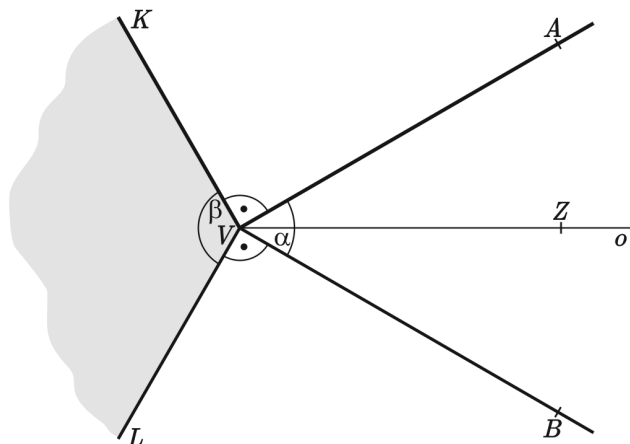
Tvrzení zde uváděné není správné, neboť vzdálenost bodu od polopřímky měříme podle obr. 7.



Obr. 7

V polovině pA je vzdálenost bodu X od polopřímky PA velikost úsečky XX' . V polovině opačné k polovině pA je vzdálenost bodu Y od polopřímky VA velikost úsečky YV .

Množinou bodů stejně vzdálených od polopřímky VA jako od polopřímky VB je tedy sjednocení osy $o = VZ$ s úhlem $\beta = \sphericalangle KVL$ (obr. 8).



Obr. 8

Protože pojem vzdálenost bodu od polopřímky není obvykle na ZŠ definován, měli bychom naši úlohu formulovat např. takto: Určete množinu všech bodů úhlu AVB , které mají od přímky VA stejnou vzdálenost jako od přímky VB .

Úloha 4 Kružnice $k(K; r)$ se dotýká zevnitř kružnice $l(L; R)$ v bodě U . Vyšetřete geometrické místo středů X kružnic x , které mají vnější dotyk s kružnicí k a vnitřní dotyk s kružnicí l (obr. 9).

Je-li X bod hledaného geometrického místa bodů, pak v označení podle obr. 9 platí:

$$|KX| = r + \varrho, \text{ kde } \varrho \text{ je poloměr jedné z hledaných kružnic a}$$

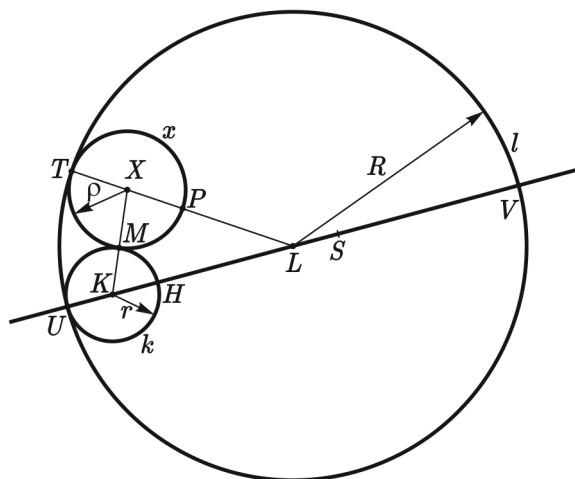
$$|LX| = R - \varrho.$$

Je tedy

$$|KX| + |LX| = r + R. \quad (1)$$

Bod X proto leží na elipse e s ohnisky K a L a hlavní osou $r + R$. Tato elipsa prochází bodem U a středem S úsečky HV (v označení podle obr. 9).

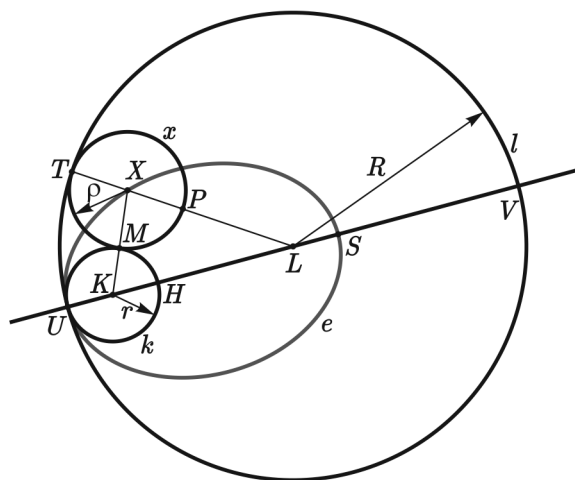
Je-li X libovolný bod elipsy e , označme M průsečík úsečky KX s kružnicí k a T průsečík polopřímky LX s kružnicí l . Každá kružnice $x(X; |XM|)$ se v bodě M dotýká kružnice k . Každá kružnice $x(X; |TX|)$ se v bodě T dotýká kružnice l .



Obr. 9

Protože podle konstrukce je $|MX| = |KX| - r$ a $|TX| = R - |LX|$, je $|MX| = |TX|$, neboť tato rovnost je ekvivalentní s rovností $|KX| - r = R - |LX|$, neboli (1).

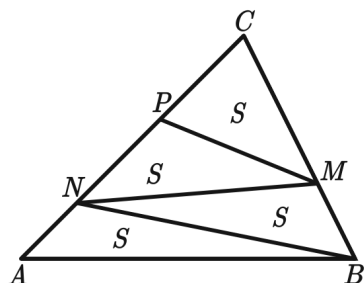
Náleží-li bod X elipse e , pak je středem kružnice, která se dotýká kružnic k a l .



Obr. 10

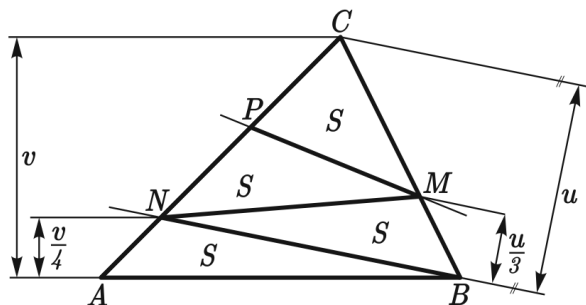
Množinou středů kružnic, které se dotýkají k a l , je tedy elipsa e s ohnisky K a L a hlavní osou $r + R$. Bod U musíme ovšem z hledaného geometrického místa vynechat.

Úloha 5 Rozdělte trojúhelník ABC na 4 trojúhelníky téhož obsahu podle obr. 11.



Obr. 11

Protože obsah S trojúhelníku ABN je $1/4$ obsahu $\triangle ABC$, můžeme bod N sestrojit podle obr. 12.



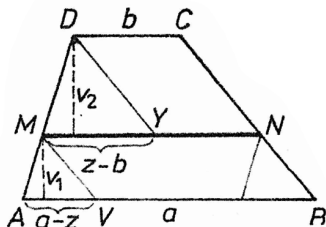
Obr. 12

Protože obsah trojúhelníku MNB je $1/3$ obsahu trojúhelníku NBC , můžeme bod M sestrojit podle obrázku analogicky. Těžnice MP trojúhelníku NMC dělí tento trojúhelník na dva trojúhelníky téhož obsahu S .

Úloha 6 Rozdělte lichoběžník $ABCD$ přímkou MN rovnoběžnou se základnami na dva lichoběžníky téhož obsahu.

Je-li MN hledaná úsečka, pak v označení podle obr. 13 (přímky DY , MV a CB jsou rovnoběžné, $|MN| = z$) platí:

$$\begin{aligned}(a+z) \cdot v_1 &= (b+z) \cdot v_2 \\ (z-b) \cdot v_1 &= (a-z) \cdot v_2\end{aligned}\tag{2}$$

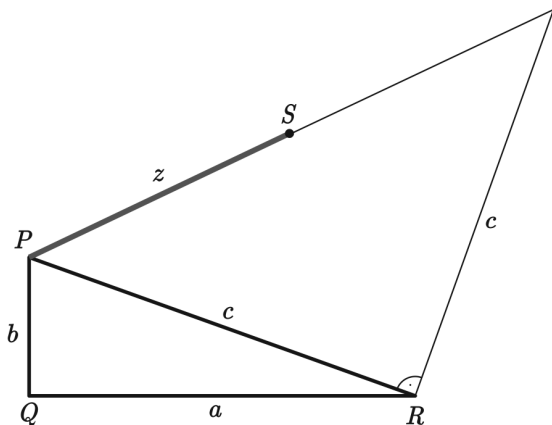


Obr. 13

První rovnost vyplývá z rovnosti obsahů lichoběžníků $ABNM$ a $MNCD$, druhá z podobnosti trojúhelníků AVM a MYD . Z rovnic (2) získáme výpočtem

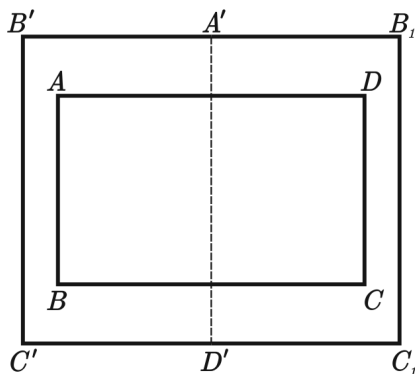
$$|MN| = z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Úsečku délky z můžeme sestrojit např. takto: Pravoúhlý trojúhelník PQR s odvěsnami a , b má přeponu $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Z rovnosti $z = \frac{c}{\sqrt{2}} = \frac{c\sqrt{2}}{2}$ plyne podle obr. 14 konstrukce.



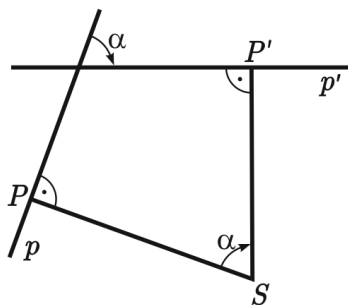
Obr. 14

Úloha 7 Deska skládacího stolu se má nejdříve otočit z polohy $ABCD$ do polohy $A'B'C'D'$ ($A \rightarrow A'$, $B \rightarrow B'$) podle jistého středu S . Pak se má získat překlopením jedné desky dvojitého stolu podle hrany $A'D'$ obdélníkový stůl $B'C'C_1B_1$. Určete polohu bodu S , podle něhož se stůl otáčí (obr. 15). (Viz [9, s. 127]).



Obr. 15

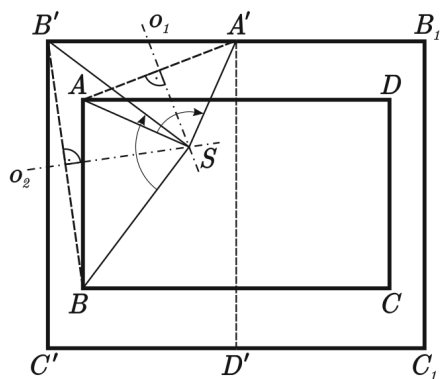
Protože přímka AB je kolmá k přímce $A'B'$, je takové otočení možné, neboť přímka a její obraz v otočení o úhel α svírá úhel α (obr. 16).



Obr. 16

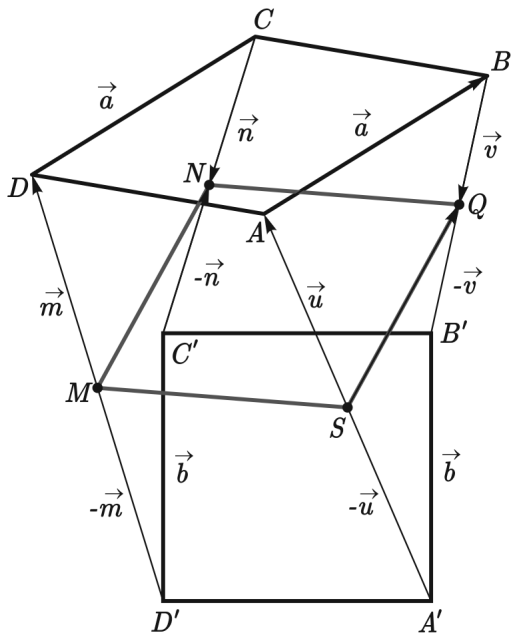
Střed otočení, které převádí bod A do bodu A' , musí ležet na ose o_1 úsečky AA' , střed otáčení, které převádí bod B do bodu B' , musí ležet na ose o_2 úsečky BB' . Střed S musí tedy ležet v průsečíku těchto os. V rotaci $\mathcal{R}(S, 90^\circ)$ přejde bod A do bodu A' a bod B do bodu B' (obr. 17).

Překlopením obdélníku $A'B'C'D'$ podle přímky $A'D'$ dostaneme výslednou polohu $B'C'C_1B_1$ rozložené desky stolu.



Obr. 17

Úloha 8 Čtverec ABCD je v prostoru libovolně přemístěn do polohy $A'B'C'D'$. Dokažte, že středy S, Q, N, M úseček AA', BB', CC' a DD' jsou vrcholy rovnoběžníku (obr. 18, obrazy daných čtverců jsou rovnoběžníky).



Obr. 18

V označení podle obrázku platí:

$$\overrightarrow{SQ} = \vec{u} + \vec{a} + \vec{v},$$

$$\overrightarrow{SQ} = -\vec{u} + \vec{b} - \vec{v},$$

neboli

$$2\overrightarrow{SQ} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{SQ} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

Podobně platí:

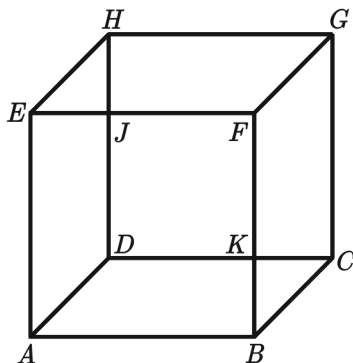
$$\overrightarrow{MN} = \vec{m} + \vec{a} + \vec{n},$$

$$\overrightarrow{MN} = -\vec{m} + \vec{b} - \vec{n},$$

$$2\overrightarrow{MN} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

Strany SQ a MN jsou tedy rovnoběžné a shodné a čtyřúhelník $SQNM$ je rovnoběžník.

Úloha 9 Na obr. 19 je nakreslen mnohostěn, jehož všechny hrany jsou viditelné. Sestrojte síť tohoto tělesa. (F. Kuřina)

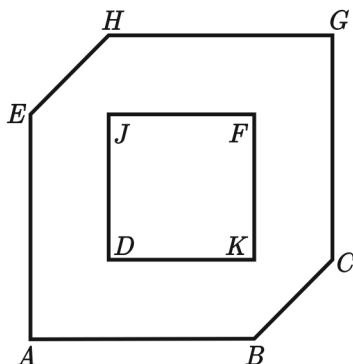


Obr. 19

Mají-li být všechny hrany tělesa viditelné, musí jeho stěny tvořit trojúhelníky BCK a EHJ , lichoběžníky $ABKD$, $CGFK$, $GHJF$, $AEJD$, čtverec $DKFJ$, a ovšem i šestiúhelník $ABCGHE$, z něhož jsou viditelné pouze strany.

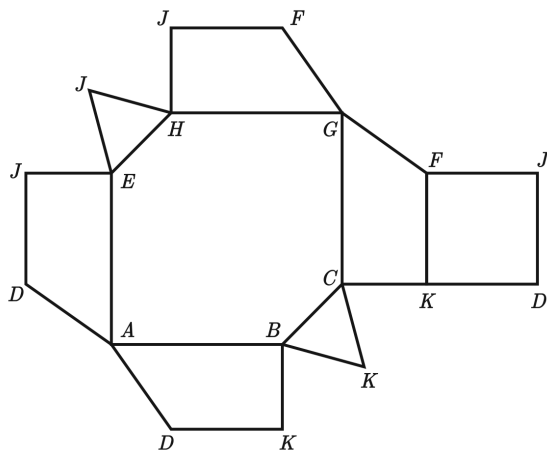
Činí-li někomu problém představit si hledaný mnohostěn, těleso, které Milan Hejný nazval v článku [4] Kuřinův osmistěn, je to patrně, je to patrně proto, že v obr. 19 vidí názorný obrázek průhledné krychle. Na tento obrázek se však můžeme dívat jako na půdorys konstruovaného mnohostěnu

nad šestiúhelníkem $ABCGHE$. Nad tímto šestiúhelníkem je v prostoru v určité výšce v rovině rovnoběžné s rovinou šestiúhelníku umístěn čtverec $DKFJ$ podle obr. 20.



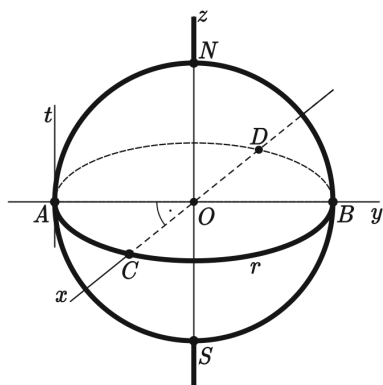
Obr. 20

Síť nebude obr. 19 určena jednoznačně, neboť z tohoto obrázku není patrná vzdálenost roviny čtverce od roviny šestiúhelníku. V síti bude úsečka KB (a další) větší než tato úsečka na obr. 19. Úsečky HG a JF jsou základny lichoběžníku a vrcholy B, C, K jsou vrcholy trojúhelníku. Podobně to platí pro zbývající části mnohostěnu. Provedeme-li otočení trojúhelníků a lichoběžníků do roviny šestiúhelníku, dostaneme spolu se čtvercem $KDJF$ síť hledaného tělesa (obr. 21).



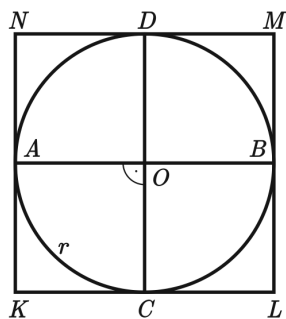
Obr. 21

Úloha 10 Jaké chyby jsou na obrázku 22 kulové plochy se středem v počátku souřadnicového systému. Rovník, který je kružnicí, se podle obr. 22 zobrazí jako elipsa.

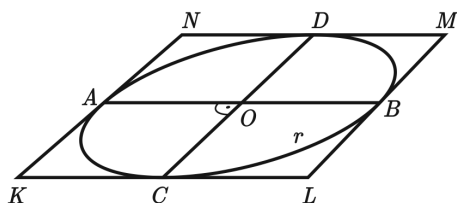


Obr. 22

K sobě kolmé průměry AB a CD rovniku (na obr. 23) se zobrazí do průměrů AB a CD , které svírají ostrý úhel (obr. 24).

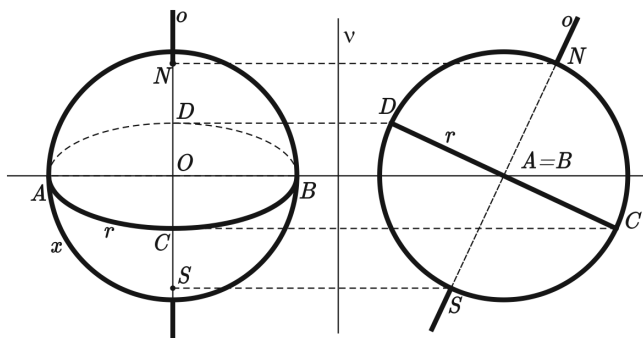


Obr. 23



Obr. 24

Protože rovnoběžné přímky zobrazujeme jako rovnoběžné přímky a obrazem tečny vzoru je tečna obrazu, zobrazí se čtverec $KLMN$ opsaný rovniku (obr. 23) do rovnoběžníku $KLMN$ na obr. 24. Rovník se tedy zobrazí do elipsy vepsané do rovnoběžníku $KLMN$ na obr. 24. Tečna rovniku v bodě A na obr. 22 má být rovnoběžná s CD podle obr. 24 a nemůže být k AB kolmá. Na obr. 22 jsou dále nesprávně zobrazeny póly N a S . To nahlédneme podle obr. 25.



Obr. 25

Má-li být obrazem rovniku elipsa, nemůže být její rovina rovnoběžná s nákrešnou. Při bočním pohledu je nákrešna zobrazena jako přímka v a rovník jako úsečka CD . Pak ovšem póly N a S se nemohou zobrazit na obrys obrazu kulové plochy, jak je nakresleno na obr. 22.

Tento článek je informací o didaktickém přístupu k vyučování geometrii, který je poněkud odlišný od tradiční cesty realizované na našich školách. Jsme přesvědčeni, že uvedené pojetí může přispívat k hlubšímu porozumění geometrii a ke zvyšování zájmu žáků o matematiku.

Literatura

- [1] *Daintith, J., Nelson, R. D.*: The Penguin Dictionary of Mathematics. Dictionary, Penguin Serie, Penguin Books, 1989.
- [2] *Eukleides*: Základy. OPS Nymburk, 2007.
- [3] *Hejný, M. a kol.*: Matematika pro 2. stupeň ZŠ, D. H-mat, Praha, 2017.
- [4] *Hejný, M.*: F. K. inspirující. In: Vyučování matematice a kultivace myšlení. Gaudeamus, Hradec Králové, 1997, s. 20–26.
- [5] *Hruša, K., Vyšín, J.*: Vybrané kapitoly z metodiky vyučování matematice na základní škole. SPN, Praha, 1964.
- [6] *Kabele, J., Janků, M., Hruša, K.*: Metodický list pro učitele k učebnici matematiky pro 2. ročník ZŠ. SPN, Praha, 1976.
- [7] *Kuřina, F.*: Hilbert nebo Hadamard. Pokroky matematiky, fyziky, astronomie, roč. 57, č. 3 (2012).
- [8] *Rosecká, Z., Míček, A.*: Geometrie 8. Nová škola, Brno, 1999.
- [9] *Šedivý, J.*: O modernizaci školské matematiky. Matematická knižnice, SPN, Praha, 1969.
- [10] *Kutuzov, B. V.*: Geometrija. Učpedgiz, Moskva, 1950.

O konvexních pětiúhelnících

MARIE CHODOROVÁ – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Ve srovnání s nejjednoduššími rovinnými polygony, kterými jsou trojúhelníky a čtyřúhelníky, není v naší matematické literatuře (a to ani v časopisecké) mnoho příspěvků, které jsou svým obsahem zaměřeny na konvexní pětiúhelníky. Mezi výjimky patří mj. články [1] a [3], v nichž jsou uvedeny některé zajímavé vlastnosti *pravidelných* pětiúhelníků.

Tento příspěvek, který volně navazuje na [1], je věnován některým vlastnostem základních prvků v konvexních pětiúhelnících, jimiž jsou délky jeho stran a úhlopříček, velikosti jeho vnitřních a vnějších úhlů, příp. jeho obsah, a dále pak jejich aplikacím při řešení planimetrických úloh.

Úvodem připomeňme jednu důležitou větu, která se týká součtu velikostí vnitřních (a v důsledku i vnějších) úhlů v konvexním n -úhelníku. Uvedené tvrzení, které lze využít při řešení některých níže uvedených úloh, lze nalézt již např. v klasické učebnici geometrie pro středoškoláky [4].

Věta

V každém konvexním n -úhelníku ($n \geq 3$) je součet velikostí jeho vnitřních úhlů roven $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

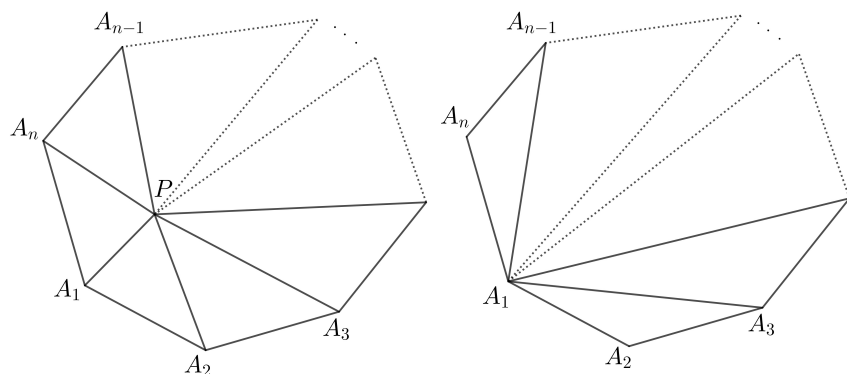
Důkaz. Zvolme libovolný vnitřní bod P konvexního n -úhelníku $A_1 \dots A_n$, který spojíme se všemi jeho vrcholy (obr. 1, vlevo). Součet velikostí vnitřních úhlů ve všech n takto vzniklých trojúhelnících (tzv. *triangulace* n -úhelníku $A_1 A_2 \dots A_n$) zmenšený o plný úhel, který je součtem velikostí vnitřních úhlů u vrcholu P ve všech trojúhelnících se společným vrcholem P , udává hledaný součet S velikostí všech vnitřních úhlů v tomto konvexním n -úhelníku. Platí tak

$$S = n \cdot 180^\circ - 360^\circ = n \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ = (n - 2) \cdot 180^\circ,$$

což jsme chtěli dokázat.

Jiný důkaz (viz např. v [4]). Zvolme libovolný z vrcholů uvažovaného n -úhelníku (bez újmy na obecnosti např. A_1) a pomocí všech jeho úhlopříček vycházejících z vrcholu A_1 jej rozdělíme na $n - 2$ trojúhelníků

(obr. 1, vpravo). Pro součet S velikostí všech vnitřních úhlů v konvexním n -úhelníku $A_1A_2 \dots A_n$ tak přímo obdržíme $S = (n - 2) \cdot 180^\circ$.



Obr. 1

Důsledek 1

Součet velikostí všech vnitřních úhlů v každém konvexním pětiúhelníku je roven 540° .

Důsledek 2

V každém konvexním n -úhelníku ($n \geq 3$) je součet velikostí všech jeho vnějších úhlů roven 360° .

Důkaz. S ohledem na tvrzení výše uvedené věty je tedy součet velikostí n vnějších úhlů v libovolném konvexním n -úhelníku roven rozdílu

$$n \cdot 180^\circ - (n - 2) \cdot 180^\circ = 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ.$$

V další části uvedeme pětici řešených úloh, v nichž budeme pracovat se základními prvky v konvexním pětiúhelníku. Poslední dvě z nich se týkají obsahů konvexních pětiúhelníků.

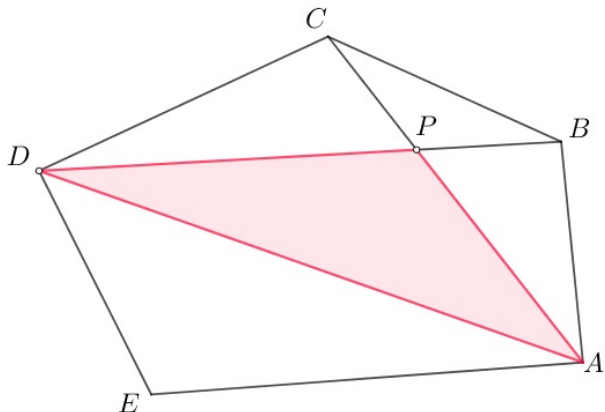
Příklad 1

Dokažte, že v každém konvexním pětiúhelníku existuje trojice jeho úhlopříček, z nichž lze sestrojit trojúhelník.

Řešení. K důkazu využijeme *metodu extrémálního prvku*. Mezi všemi (pěti) úhlopříčkami konvexního pětiúhelníku $ABCDE$ uvažujme tu, která má nej-

větší délku, popř. je jedna z nejdelších. Nechť je to (bez újmy na obecnosti) např. úhlopříčka AD . Označme P průsečík úhlopříček AC a BD v konvexním čtyřúhelníku $ABCD$. Protože evidentně platí $|AP| < |AC|$ a $|PD| < |BD|$, viz obr. 2, plyne z trojúhelníkové nerovnosti v trojúhelníku APD

$$|AD| < |AP| + |PD| < |AC| + |BD|. \quad (1)$$



Obr. 2

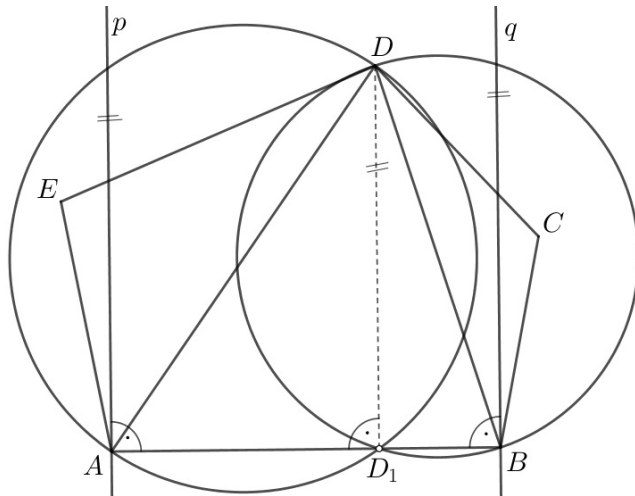
Vzhledem k tomu, že podle předpokladu je AD nejdelší úhlopříčka (jedna z nejdelších), platí $|AC| \leq |AD|$ a současně $|BD| \leq |AD|$, což spolu s (1) garantuje existenci trojúhelníku o stranách délek $|AD|$, $|AC|$ a $|BD|$. Tím je důkaz uzavřen.

Příklad 2

Je dán konvexní pětiúhelník, jehož všechny vnitřní úhly jsou tupé. Dokažte, že existuje taková dvojice jeho úhlopříček, že kruhy uvažované nad těmito úhlopříčkami (jako průměry) pokrývají daný pětiúhelník.

Řešení. K důkazu lze opět využít metodu extrémálního prvku. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že AB je *nejdelší* stranou konvexního pětiúhelníku $ABCDE$, který vyhovuje podmínkám úlohy. Kolmice k AB , které procházejí vrcholy A , B , označme po řadě p , q . Uvažujme nyní pás omezený rovnoběžkami p , q (obr. 3). Vrcholy C a E uvažovaného pětiúhelníku leží vně tohoto pásu, neboť úhly ABC a EAB jsou tupé. Současně však vrchol D tohoto pětiúhelníku leží uvnitř uvažovaného pásu (v opačném případě by totiž strana AB nebyla nejdelší stranou pětiúhelníku $ABCDE$).

Pata D_1 kolmice z vrcholu D k přímce AB je tedy vnitřním bodem strany AB uvažovaného pětiúhelníku.



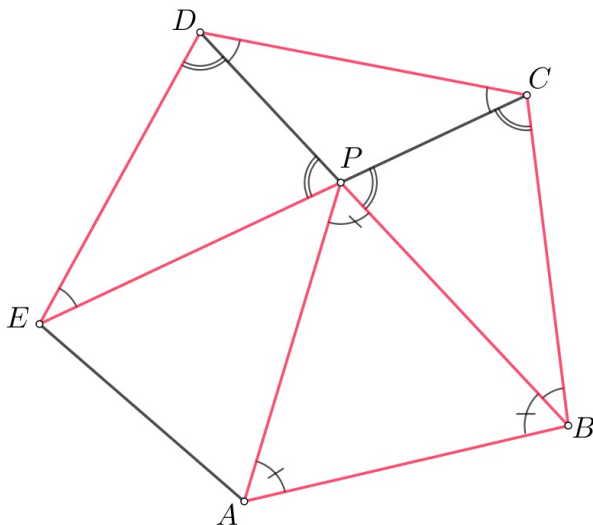
Obr. 3

Oba kruhy nad průměry AD a BD tak evidentně pokrývají uvažovaný pětiúhelník $ABCDE$, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 3

Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$, v němž $|AB| = |BC| = |CD| = |DE|$, $\sphericalangle ABC = 96^\circ$ a $\sphericalangle BCD = \sphericalangle CDE = 108^\circ$. Určete, jakou velikost má jeho vnitřní úhel při vrcholu E .

Řešení. Označme P průsečík úhlopříček BD a CE . Ze zadání plyne, že trojúhelníky BCD a CDE jsou rovnoramenné po řadě se základnami BD a CE . Přitom $\sphericalangle CDB = \sphericalangle DBC = \sphericalangle ECD = \sphericalangle DEC = 36^\circ$. Protože $\sphericalangle BCD = 108^\circ$, platí $\sphericalangle BCP = \sphericalangle BPC = 72^\circ$. Trojúhelník BCP je tedy rovnoramenný se základnou CP . Podobně zjistíme, že i trojúhelník DEP je rovnoramenný se základnou DP (obr. 4). Díky zadání platí také $|AB| = |BC| = |BP| = |EP|$ a dále $\sphericalangle ABP = 96^\circ - 36^\circ = 60^\circ$. Odtud již bezprostředně plyne, že trojúhelník ABP je rovnostranný a trojúhelník AEP je rovnoramenný se základnou AE . Dopočítáním vnitřních úhlů v rovnoramenném trojúhelníku APE snadno zjistíme, že platí $\sphericalangle APE = 180^\circ - 72^\circ - 60^\circ = 48^\circ$, tudíž $\sphericalangle AEP = 66^\circ$. Dostáváme tedy $\sphericalangle AED = 36^\circ + 66^\circ = 102^\circ$.



Obr. 4

Závěrem uvedme, že k dopočítání velikosti úhlu AED lze využít také větu 1.

Příklad 4

Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ s pravými úhly při vrcholech C a E , kde

$$|AB| = |CD| = |DE| = 1 \quad \text{a} \quad |BC| + |EA| = 1.$$

Dokažte, že jeho obsah je 1.

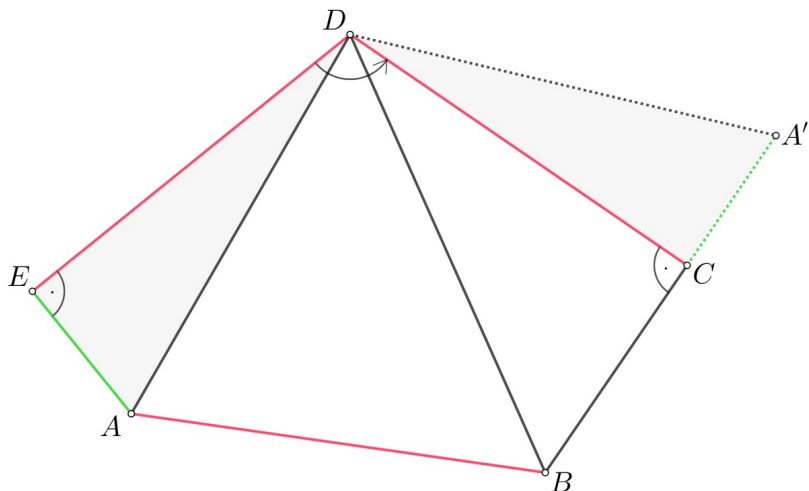
Řešení. V otočení se středem D a orientovaným úhlem EDC se vrchol E pětiúhelníku $ABCDE$ zobrazí na vrchol C , neboť podle zadání $|DE| = |CD| = 1$.

Pravoúhlý trojúhelník DEA s pravým úhlem při vrcholu E se v tomto otočení zobrazí na pravoúhlý trojúhelník DCA' , tj. platí $|EA| = |CA'|$, kde A' je obrazem vrcholu A . Bod A' pak leží na polopřímce BC za vrcholem C (obr. 5). Podle zadání platí

$$|BA'| = |BC| + |CA'| = |BC| + |EA| = 1.$$

Obsah pětiúhelníku $ABCDE$ je tak roven obsahu čtyřúhelníku $ABA'D$, v němž jsou trojúhelníky ABD , $A'BD$ shodné podle věty *sss*. Trojúhelník

$A'BD$ má přitom obsah $1/2$, proto pětiúhelník $ABCDE$ má obsah 1, jak jsme chtěli dokázat.



Obr. 5

Příklad 5

Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ s pravými úhly při vrcholech B a E , v němž platí $|AB| = |BC|$, $|DE| = |EA|$ a $|BE| = 10$ cm. Určete v cm^2 obsah daného pětiúhelníku $ABCDE$.

Řešení. Označme F, G průsečíky přímky CD s kolmicemi k přímce BE , které procházejí po řadě vrcholy B, E daného pětiúhelníku (obr. 6). Na úhlopříčce BE uvažujme bod P , pro nějž platí $|BP| = |BF|$. V otočení se středem B a orientovaným úhlem -90° je přitom obrazem bodu P bod F a obrazem bodu A je bod C . Trojúhelníky ABP a CBF jsou tudíž podle věty *sus* shodné, neboť $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle CBF|$ a také $|\sphericalangle APB| = |\sphericalangle CFB|$. Vzhledem k tomu, že přímky BF a EG jsou rovnoběžné, platí (s ohledem na shodnost trojúhelníků ABP a CBF)

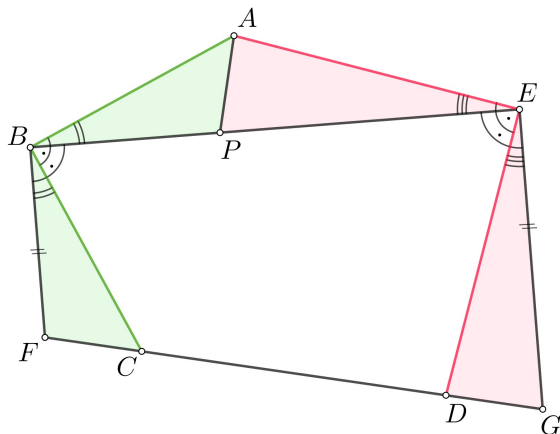
$$|\sphericalangle DGE| = 180^\circ - |\sphericalangle CFB| = 180^\circ - |\sphericalangle APB| = |\sphericalangle APE|,$$

tedy trojúhelníky DGE a APE jsou shodné (*usu*), a proto $|EG| = |EP|$; navíc, první z nich je obrazem druhého v otočení se středem E a orientovaným úhlem $+90^\circ$. Dále platí

$$|BF| + |GE| = |BP| + |EP| = |BE| = 10 \text{ cm}.$$

Obsah daného pětiúhelníku $ABCDE$ je tak roven obsahu lichoběžníku $BFG E$ se základnami BF a GE , tedy

$$\frac{1}{2} |BE| (|BF| + |GE|) = \frac{1}{2} |BE|^2 = 50 \text{ cm}^2.$$



Obr. 6

Problematika obsahů konvexních pětiúhelníků se objevila mj. v 72. ročníku MO v kategorii C (úlohy C–I–5 a C–II–3).

Závěrem uvádíme pět neřešených úloh, které doporučujeme zájemcům k samostatnému procvičení této problematiky.

Příklad 6 (matematický folklor, viz např. [2], str. 177 – pěticípá hvězda)

Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$. Dokažte, že platí rovnost

$$|\sphericalangle CAD| + |\sphericalangle DBE| + |\sphericalangle ECA| + |\sphericalangle ADB| + |\sphericalangle BEC| = 180^\circ.$$

Poznámka. Uvažovanou pěticípou hvězdu lze sestavit jedním tahem (jedná se o tzv. *uzavřenou lomenou čáru*). Pokuste se o to sami.

Příklad 7

Rozhodněte, zda existuje konvexní pětiúhelník $ABCDE$ s tupými úhly ABD , BCE , CDA , DEB a EAC .

[Neexistuje. Uvažujte *nejkratší* z úhlopříček pětiúhelníku $ABCDE$ (nechť je to např. AC , tj. $|AC| \leq |AD|$) a ukažte spor s existencí trojúhelníku ACD .]

Příklad 8

Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ s pravými úhly při vrcholech B a E . Dokažte, že obvod trojúhelníku ACD není menší než $2|BE|$.

[Návod. Označme P , Q středy úhlopříček po řadě AC , AD . Ukažte, že délka lomené čáry $BPQE$ je rovna polovině obvodu trojúhelníku ACD .]

Příklad 9 (9. geometrická olympiáda I. F. Šarygina, 2013)

Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ s pravými úhly při vrcholech B a E , v němž $|AB| = |AE|$ a $|BC| = |CD| = |DE|$. Necht P je průsečík jeho úhlopříček BD a CE . Dokažte, že $|PA| = |AB|$.

Příklad 10 (XVII. MO juniorů – Polsko, 2022, viz [5])

V konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ s pravým úhlem při vrcholu D platí $|AC| = |AD|$ a $|BD| = |BE|$. Dokažte, že trojúhelník ABD a čtyřúhelník $ABCE$ mají stejný obsah.

Literatura

- [1] Juklová, L., Švrček, J.: Pět pěkných příkladů pro pravidelný pětiúhelník. MFI, roč. 31 (2022), č. 1, s. 15–20.
- [2] Kuřina, F.: Matematika a řešení úloh. Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2011.
- [3] Švrček, J.: Konstrukce pravidelného pětiúhelníku. Matematika a fyzika ve škole, roč. 16 (1986), č. 8, s. 524–527.
- [4] Vojtěch, J.: Učebnice geometrie pro IV. třídy středních škol. Knihotiskárna Prometheus, Praha, 6. vydání, 1933.
- [5] Olimpiada Matematyczna Juniorów. Dostupné z: <https://omj.edu.pl/>

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 6. 2024 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 291

Pro trojmístné číslo uvažujeme tři součiny všech dvojic číslic tohoto čísla. Určete počet trojčiferných čísel, v nichž je aspoň jeden uvedený součin roven aritmetickému průměru zbylých dvou součinů. *Jaroslav Zhouf*

Úloha 292

Určete všechny dvojice (x, y) reálných čísel, které vyhovují soustavě rovnic

$$\sin(x + y) = \cos(x - y)$$

$$\cos(x + y) = \sin(x - y)$$

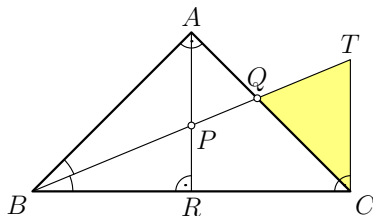
Jaroslav Švrček

Dále uvádíme řešení úloh 287 a 288, jejichž zadání jsme zveřejnili ve třetím čísle loňského (32.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 287

Je dán pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC s přeponou BC . Osa vnitřního úhlu při vrcholu B protíná výšku AR a odvěsnu AC daného trojúhelníku po řadě v bodech P a Q . Dokažte, že $|CQ| = 2|PR|$.

Jaroslav Švrček



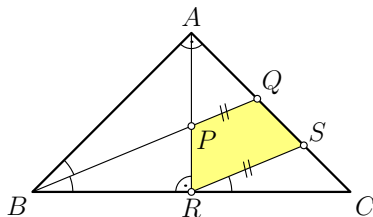
Řešení. Označme T průsečík kolmice k přímce BC procházející bodem C s přímkou BP . Bod R jako pata výšky rovnoramenného trojúhelníku ABC je středem jeho přepony BC .

Z podobnosti pravoúhlých trojúhelníků BRP a BCT se shodným vnitřním úhlem u vrcholu B plyne $|CT| = 2|PR|$. K důkazu rovnosti ze zadání tak stačí ověřit $|CQ| = |CT|$, tedy že trojúhelník QCT je rovnoramenný se základnou QT .

V rovnoramenném pravoúhlém trojúhelníku ABC jsou velikosti vnitřních úhlů u vrcholů B a C rovny 45° . Jelikož osa úhlu u vrcholu B tento úhel pólí, je velikost úhlu QBC rovna $22,5^\circ$ a velikost vnějšího úhlu CQT trojúhelníku BCQ je $45^\circ + 22,5^\circ = 67,5^\circ$. Z pravoúhlého trojúhelníku BCT platí $|\sphericalangle BTC| = 180^\circ - |\sphericalangle TBC| - |\sphericalangle TCB| = 180^\circ - 22,5^\circ - 90^\circ = 67,5^\circ$.

Trojúhelník QCT je tak rovnoramenný se základnou QT , což jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Opět jako v předchozím řešení si uvědomíme, že bod R je středem úsečky BC . Necht' RS je střední příčka trojúhelníku BCQ rovnoběžná se stranou BQ . Bod S je středem úsečky CQ a k důkazu rovnosti ze zadání stačí ověřit $|QS| = \frac{1}{2}|CQ| = |PR|$. Což vzhledem k rovnoběžnosti úseček PQ a RS znamená dokázat, že lichoběžník $PRSQ$ je rovnoramenný.



Osa úhlu ABC o velikosti 45° tento úhel půlí, z rovnosti střídavých úhlů QBC a SRC plyne $|\sphericalangle SRC| = 22,5^\circ$, tedy $|\sphericalangle SRP| = 90^\circ - 22,5^\circ = 67,5^\circ$. Podobně velikost vnějšího úhlu QSR u vrcholu S trojúhelníku RCS je $45^\circ + 22,5^\circ = 67,5^\circ$. Tedy lichoběžník $PRSQ$ je rovnoramenný, což jsme chtěli dokázat.

Jiné řešení. Pata R výšky k základně BC v rovnoramenném trojúhelníku ABC je jejím středem, bod R tak je středem přepony BC pravoúhlého trojúhelníku ABC .

Necht' $|BR| = |CR| = |AR| = 1$, potom z Pythagorovy věty plyne $|AB| = |AC| = \sqrt{2}$ a obsah S trojúhelníku ABC je

$$S = \frac{1}{2}|AB| \cdot |AC| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1.$$

Výška v rovnoramenném trojúhelníku je současně osou jeho vnitřního úhlu, bod P jako průsečík os vnitřních úhlů trojúhelníku ABC tak je středem jeho kružnice vepsané a PR jejím poloměrem. Ze známého vzorce pro poloměr kružnice trojúhelníku vepsané platí

$$|PR| = \frac{S}{\frac{1}{2}(|AB| + |BC| + |CA|)} = \frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 2 + \sqrt{2})} = \sqrt{2} - 1.$$

Osa vnitřního úhlu trojúhelníku dělí protější stranu v poměru přilehlých odvěsen, platí tak

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|AQ|}{|QC|} = \frac{|AC| - |QC|}{|QC|} = \frac{|AC|}{|QC|} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{|QC|} - 1.$$

Odtud snadno dopočteme

$$|QC| = \frac{2}{\sqrt{2}+1} = 2(\sqrt{2}-1) = 2|PR|,$$

což jsme chtěli dokázat.

Poznámka. Z trojúhelníku BPR plyne $\operatorname{tg} 22,5^\circ = |PR|/|BR| = \sqrt{2}-1$. Řešitelé, kteří tuto úlohu řešili užitím pravoúhlých trojúhelníků BPR a AQB , získávali uvedenou hodnotu užitím vzorců pro goniometrické funkce polo-
vičního argumentu.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Lubomír Hajdanka* z Michalovců, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Piotr Szatan*, II LO v Tarnovských Horách (Polsko), *Zuzana Bárnetová* a *David Schmidt*, oba G U Balvanu, Jablonec nad Nisou, *Anastasia Bredikhina* a *Helena Muchová*, obě GJK, Praha 6, *Tereza Černá*, G, Praha 9, *Lito-měřická*, *Dalibor Englisch*, SPŠEI, Ostrava, *Viktor Gola*, MG, SZŠ a VOŠ Vsetín, *David Hromádka*, G, Praha 6, *Nad Alejí*, *Erik Ježek* SSPŠ a G, Praha 5, *Markéta Kalendová* a *Veronika Menšíková*, obě AG, Praha 2, *Korunní*, *Tereza Krejčí*, *Tomáš Pazourek*, *Richard Materna*, všichni G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Terezie Kladivová*, GAJ, Litomyšl, *Lucian Poljak* a *Lenka Poljaková*, oba GJŠ, Přerov, *Jan Slíva*, MG, Praha 6, *Štěpán Varhaník*, GJR Chrudim a *Ivan Žemlička*, G, Praha 8, Ústavní.

Úloha 288

Pro nezáporné reálná čísla x, y uvažujme nerovnost

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{1 + \sqrt{x+y}} \geq 2\sqrt{2} - 2$$

a výraz $V(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

- Najděte množinu M_1 všech možných hodnot výrazu V pro dvojice nezáporných x, y , které vyhovují uvedené nerovnosti.
- Najděte množinu M_2 všech možných hodnot výrazu V takových, že pro libovolnou dvojici nezáporných reálných čísel x, y , pro kterou $V(x, y) \in M_2$, platí uvažovaná nerovnost.

Ján Mazák

Řešení. Označme $V = V(x, y)$ a nerovnost ze zadání ekvivalentně upravme do tvaru, s nímž budeme dále pracovat

$$\sqrt{x+y} \leq \frac{V}{2\sqrt{2}-2} - 1 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}V - 1. \quad (1)$$

a) Užitím nerovnosti mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem máme

$$\frac{V}{2} = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} \leq \sqrt{\frac{x+y}{2}}, \quad \text{tedy} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} V \leq \sqrt{x+y}.$$

Odtud a z (1) dostáváme dále

$$\frac{\sqrt{2}}{2} V \leq \sqrt{x+y} \leq \frac{\sqrt{2}+1}{2} V - 1.$$

Z nerovnosti mezi prvním a posledním členem snadno dostaneme $V \geq 2$. Protože rovnost v nerovnosti mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem nastává, právě když $x = y$, může výraz V nabýt libovolné hodnoty z množiny $M_1 = \langle 2; +\infty \rangle$.

b) Pokud $y = 0$, má nerovnost (1) tvar

$$\sqrt{x} \leq \frac{\sqrt{2}+1}{2} \sqrt{x} - 1,$$

odtud snadno $\sqrt{x} \geq 2(\sqrt{2}+1)$ a tedy nutně i $V \geq 2(\sqrt{2}+1)$. Ukážeme, že pokud pro nezáporná reálná čísla x, y platí $V \geq 2(\sqrt{2}+1)$, pak platí i nerovnost (1).

Nechť $V \geq 2(\sqrt{2}+1)$. Snadnou úpravou dokážeme, že tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$V \leq \frac{\sqrt{2}+1}{2} V - 1.$$

Navíc platí

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - 2\sqrt{xy}} \leq \sqrt{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} = \sqrt{x} + \sqrt{y} = V,$$

což s předcházející nerovností dává (1). Tedy $M_2 = \langle 2(\sqrt{2}+1); +\infty \rangle$.

Správná řešení zaslali *Anastasia Bredikhina* GJK, Praha 6, *Tereza Černá*, G, Praha 9, *Litoměřická*, *Patrik Čermák*, Nový PORG, Praha 4, *David Hromádka*, G, Praha 6, *Nad Alejí*, *Erik Ježek*, SSPŠ a G, Praha 5, *Tereza Krejčí*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Jan Slíva*, MG, Praha 6 a *Patrik Štencel*, MG, Opava.

Neúplná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Markéta Kalendová* a *Veronika Menšíková*, obě AG Praha 2, *Korunní* a *Terezie Kladivová*, GAJ Litomyšl.

Pavel Calábek

60 let modernizačních snah ve výuce fyziky

OLDŘICH LEPIL

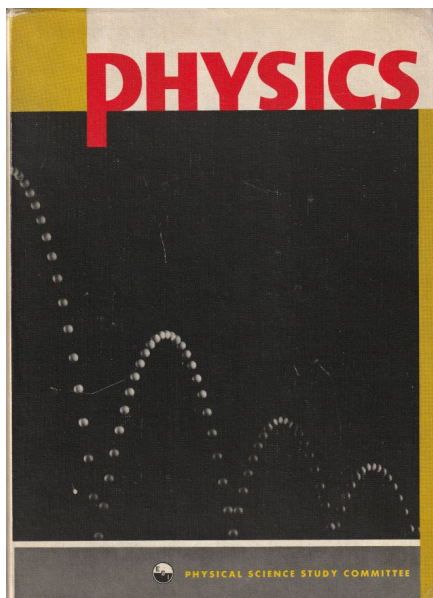
Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Pro středoškolské fyzikální vzdělávání od 60. let 20. století byly charakteristické výrazné modernizační tendence, které se dotýkaly jak koncepce didaktického systému učebního předmětu, tak obsahu, metod i prostředků výuky. Zásadním podnětem pro vznik modernizačního hnutí byly úspěchy v oblasti letů do vesmíru a nástup polovodičových technologií a tím podmíněné elektronizace, která postupně zasáhla všechny oblasti společnosti. Tyto pokroky v oblasti vědy a technologií také ukázaly, že škola dostatečně nepřipravuje absolventy, aby mohli co nejlépe zvládat nově kladené požadavky. K tomu přistupuje i jistá nechuť mladé generace studovat poměrně náročné a abstraktní poznatky spojené např. s poznáváním smyslům nedostupného mikrosvěta. V USA se to již v 50. letech projevilo např. tím, že jen cca 25 % žáků si na střední škole volilo jako učební předmět fyziku.

Tato situace vedla k potřebě zásadních přeměn kurikula fyziky, výběru učiva, jeho didaktického zpracování a posílení metod výuky zaměřených zejména na experimentální činnosti žáků. Výsledkem těchto snah je vznik několika velkých, komplexně propracovaných modernizačních projektů fyziky, které byly následně inspirací modernizačních snah v mnoha zemích. K nejznámějším projektům té doby patřil zejména projekt označovaný zkráceně PSSC (*Physical Science Study Committee*). Tento mimořádně rozsáhlý projekt vytvořil tým pracovníků ze všech typů škol a jeho základ tvořila netradičně koncipovaná učebnice [1] (obr. 1). Její obsah tvořily čtyři tematické celky (*Vesmír, Optika a vlny, Mechanika, Elektřina a stavba atomu*), kterými autoři opustili ustálenou posloupnost učiva od

mechaniky po atomistiku. Projekt zahrnoval také metodickou příručku pro učitele, soubor laboratorních cvičení včetně potřebných pomůcek, doplňující textové materiály, zkušební testy a výukové filmy.

Východiskem pojetí učiva v učebnici projektu PSSC byla kritika tradičního přístupu k výuce fyziky s přetrvávajícím důrazem na její historické pojetí. Tradiční výuka se opírá především o klasickou newtonovskou mechaniku, která dostatečně nepřispívá k pochopení současných technologií. Ukazuje se, že výuku fyziky je třeba založit spíše na porozumění obecnějším principům, jako jsou třeba zákony zachování, než na množství matematicky vyjádřených vztahů, určených hlavně k zapamatování. Tomuto pojetí odpovídají i laboratorní práce, zaměřené ve větší míře na objevování, než na jednoduché ověřování jednotlivých poznatků v učivu.



Obr. 1

Modernizační hnutí a JČMF

Celosvětové modernizační hnutí našlo odraz i u nás právě na základě podnětů obsažených v projektu PSSC a v některých dalších zahraničních projektech tzv. druhé generace (např. HPP – *Harvard Project Physics*

z roku 1975 nebo anglický projekt NAS – *Nuffield Advanced Science* z roku 1966) [2]. Klíčovým okamžikem vzniku modernizačních aktivit byla iniciativa Jednoty českých matematiků a fyziků (JČMF), na jejímž základě byly svolány dvě pracovní konference zaměřené na modernizaci výuky fyziky. První se konala ve dnech 2. až 4. prosince 1963 v Olomouci a druhá ve dnech 28. až 29. dubna 1964 v Liblicích u Mělníka [3]. Hlavní referát na první konferenci přednesl místopředseda JČMF *prof. M. Valouch* na téma *Snahy o modernizaci vyučování fyzice v zahraničí*, v němž podal detailní informaci o projektu PSSC a uvedl i další projekty, které jsou významnými příspěvky k modernizačním snahám v Evropě [4]. Na konferenci se také ukázalo, že je nezbytně nutné řešit otázky modernizace vyučování fyziky v těsné spolupráci s matematiky, s odborníky výzkumných ústavů, s pedagogy a psychology.

V začátcích měly modernizační snahy významnou podporu v tom, že tehdejší ministr školství *dr. F. Kahuda* byl v letech 1956–1969 rovněž předsedou JČMF. Pro Jednotu zajistil potřebné finanční dotace na modernizaci a v Brně vzniklo tiskové středisko, kde se tiskly experimentální učební texty. Konkrétním krokem bylo také vytvoření tří experimentálních základních škol, které v roce 1963 zřídilo ministerstvo školství na doporučení JČMF v Praze, Brně a v Bratislavě [5]. Na nové koncepci výuky fyziky začaly pracovat také modernizační kroužky JČMF vedené v Praze *prof. E. Kašparem*, v Olomouci *prof. J. Fukou* a v Bratislavě *prof. J. Vanovičem*. Brzy se však ukázalo, že tak náročný úkol, v němž byla zahrnuta i tvorba učebních textů pro experimentální školy, je nad síly dobrovolného sdružení a výzkum v experimentálních školách převzal Výzkumný ústav pedagogický (VÚP).

Dílní práce však pokračovaly i v Jednotě a do roku 1967 se uskutečnilo k problematice modernizace šest pracovních konferencí, na nichž se dále rozpracovávaly výsledky práce modernizačních kroužků. Ve spolupráci s pracovníky VÚP a dalšími odborníky se posuzovaly učební plány, osnovy a učebnice, avšak hlavní úsilí bylo soustředěno na přípravu nového pojetí vyučování fyzice. Úkolem těchto pracovních konferencí bylo důkladně prodiskutovat koncepci výuky fyziky na ZDŠ, tak jak ji pod vedením *dr. M. Chytilové* navrhl VÚP v Praze, a nastínit postup modernizace výuky fyziky na střední všeobecně vzdělávací škole (SVVŠ).

Předmětem diskuse na pracovních konferencích byly dva návrhy didaktického systému učiva na SVVŠ. Návrh pražského modernizačního kroužku zpracoval *prof. M. Valouch* a znamenal zásadní změnu dosavadního pojetí

učiva na SVVŠ. Návrh sledoval postupně rostoucí složitost a obtížnost základních představ, pojmů a fyzikálních i matematických vztahů, které jsou potřebné k hlubšímu, příčinnému výkladu probíraných jevů. Zejména šlo o mikrostrukturní pohled na stavbu látek v souvislosti s jejich vlastnostmi od jednoduchého modelu atomu jako diskrétní částice, přes složitější modely atomů a jejich chování v podmínkách jednotlivých skupenství, až k modelům atomových jader a elementárních částic látky. Třebaže učivo v návrhu nebylo po obsahové stránce detailněji rozpracováno, bylo zřejmé, že se bude podstatně lišit od dosavadního pojetí učiva středoškolské fyziky a bude náročné na rozumové schopnosti žáků.

Návrh olomouckého modernizačního kroužku, který zpracoval autor tohoto příspěvku, si nekladal tak náročné cíle, pokud jde o modernizaci obsahu a pojetí učiva. Jeho obsah byl však podrobněji propracován. Požadavkem bylo, aby se současná struktura fyziky na SVVŠ modernizovala především v těchto směrech:

- Zařazením některých nových poznatků fyziky 20. století a změnou pojetí určitých tradičních témat.
- Změnou uspořádání a posloupnosti učiva tak, aby lépe vynikly vnitřní a obecné souvislosti mezi jednotlivými fyzikálními jevy a zvýšila se produktivita výkladu.
- Přehodnocením technických aplikací a poznatků v učivu z hlediska jejich významu pro současnou praxi, perspektivu dalšího studia žáků a pro všeobecné vzdělání.

Nové pojetí bylo konkretizováno návrhem modelu uspořádání poznatků fyziky do tří ročníků SVVŠ:

1. *ročník*: Poznatky o tělesech z hlediska jejich pohybu, vlastností a fyzikálního stavu.
2. *ročník*: Děje ve stacionárních silových polích a poznatky z astronomie.
3. *ročník*: Děje s nestacionárním průběhem ve všech oblastech fyziky.

Některé náměty tohoto pojetí osnov pak byly zapracovány do návrhů, které vzešly z následujících výzkumných projektů. V definitivní podobě byly uplatněny v osnovách fyziky na gymnáziu a v učebnicích vytvořených v 80. letech 20. století.

Rezortní výzkumné úkoly

Na činnosti modernizačních kroužků se podíleli především pracovníci fakult připravujících učitele fyziky, ale jejich práce navazovaly na rezortní výzkumné úlohy ministerstva školství, které řešila příslušná pracoviště VÚP v Praze a Bratislavě. Tak tomu bylo především v případě výzkumného úkolu „Pojetí vyučování fyziky na II. stupni základní školy“, který vedla dr. M. Chytilová a později také *doc. R. Kolářová*. Vedle návrhu nové koncepce výuky zahrnoval projekt také pokusné vyučování fyziky a volitelného předmětu praktikum z fyziky na experimentálních školách, tvorbu pokusných učebních textů a metodických příruček pro učitele. Zcela novým úkolem řešitelů projektu byla skutečnost, že na rozdíl od historického pojetí, kdy se na nižším gymnáziu fyzika vyučovala ve 3. a 4. ročníku, se výuka fyziky posunula na základní škole již do 6. ročníku. Z hlediska věku žáků to odpovídalo posunu o dva ročníky, což odpovídá věku žáků v 1. ročníku tradičního osmiletého gymnázia.

Výsledkem byl nový didaktický systém učiva fyziky, opírající se o integrující pojmy: *částicová a elektrická stavba látek, silové pole, fyzikální veličiny a energie*. Z hlediska struktury didaktického systému šlo o propedeutickou část učiva v 6. ročníku a systematickou část v 7. a 8. ročníku. Po prodloužení školní docházky na ZŠ bylo připojeno i učivo 9. ročníku. Vznikl tak ucelený, komplexně zpracovaný projekt, který do té doby u nás neměl obdobu. V učitelské veřejnosti se tato koncepce vžila natolik, že zařazení některých, v době vzniku projektu diskutabilních témat se ve struktuře učiva zcela ustálilo a jsou tak řazena dosud (např. zařazení části optiky hned za mechaniku v 7. ročníku).

Obdobně byl v rámci rezortního výzkumného úkolu VÚP v Praze řešen úkol „Nové pojetí vyučování fyziky na čtyřleté všeobecně vzdělávací škole“ (1971–1975). Za řešení úkolu odpovídal pracovník VÚP *dr. J. Maršák*, a podílela se na něm především skupina didaktiků fyziky z PřF UP v Olomouci a MFF UK v Praze. I když se nepodařilo vytvořit tak ucelený projekt, jaký vznikl v rámci projektu pro základní školu, bylo vypracováno několik návrhů inovací vybraných témat středoškolské fyziky. Této problematice byla věnována pracovní konference o novém pojetí vyučování fyziky na gymnáziu (Luhačovice, 20. až 22. září 1971) [6]. Zásadní referát k tématu konference přednesl prof. E. Kašpar [6] a k dílčím otázkám nového pojetí učiva se vyjádřili další řešitelé rezortního úkolu (viz [7]).

První příležitostí k uplatnění navržených inovací učiva v praxi byla tvorba tzv. Doplnků k učivu fyziky, které vznikly počátkem 70. let v ná-

vaznosti na přeměnu tříleté SVVŠ na čtyřleté gymnázium. To se týká především Doplnků pro III. a IV. ročník gymnázia ([8, 9], obr. 2). Zde byly nově zpracovány poznatky o polovodičích, učivo bylo rozšířeno o polovodičové součástky s přechodem PN (polovodičová dioda a tranzistor). Nová metodika byla použita při výkladu učiva o elektromagnetickém kmitání a vlnění, poprvé bylo na středoškolské úrovni zpracováno učivo o speciální teorii relativity a inovovány byly poznatky fyziky mikrosvěta.



Obr. 2

Modernizační aktivity pak pokračovaly i v navazujícím projektu „Pojetí výchovy a vzdělávání na gymnáziu“ (1976–1980), který koordinoval VÚP v Bratislavě. Pro realizaci dílčích výsledků modernizačních snah byla příznivá situace daná politickým dokumentem z roku 1976, nazvaným *Další rozvoj československé výchovně vzdělávací soustavy*. Na jeho základě došlo ke zvětšení rozsahu učebního plánu výuky fyziky na gymnáziu na celkových 13 hodin výuky ve čtyřletém gymnáziu, s možností využít jednu hodinu týdně pro praktická a teoretická cvičení v dělené třídě. Celková koncepce nového pojetí výuky fyziky byla projednána na celostátní konferenci, která se uskutečnila ve dnech 12.–14. listopadu 1981 ve Vyškově [10]. Zde byl diskutován návrh nových osnov fyziky na gymnáziu, které zahrnovaly i výsledky modernizačních snah. V definitivní podobě vstoupily nové osnovy fyziky v platnost v roce 1983 a na jejich základě byl v letech 1984–1991 vytvořen rozsáhlý soubor 16 původních učebních textů pro povinnou, nepovinnou a volitelnou výuku fyziky (obr. 3; podrobněji viz [11]).



Obr. 3

Kabinet pro modernizaci vyučování fyziky

Významným krokem v modernizačních aktivitách bylo zřízení *Kabinetu pro modernizaci vyučování matematice a fyziky JČMF*, který zahájil svoji činnost v lednu 1966. Kabinet byl koncipován jako vědecko-výzkumné pracoviště pro základní výzkum v problematice modernizace vyučování. Jeho vedoucím pracovníkem se stal prof. M. Valouch a vědeckou radu tvořila řada osobností matematiky, fyziky, pedagogiky a psychologie z ústavů ČSAV a českých i slovenských vysokých škol [12]. V roce 1969 došlo k rozdělení kabinetu na *Kabinet pro modernizaci vyučování matematice*, který byl připojen k Matematickému ústavu ČSAV, a *Kabinet pro modernizaci vyučování fyziky* (KMVF), který se stal součástí Ústavu fyziky pevných látek ČSAV.¹⁾

¹⁾Později se KMVF jako Kabinet pro výzkum vzdělávání ve fyzice stal pracovištěm Fyzikálního ústavu ČSAV.

Vědeckému zaměření KMVF odpovídalo zapojení do státního výzkumu organizovaného ČSAV a řešené výzkumné úkoly se týkaly obecnějších otázek vědecké práce v didaktice fyziky a vývojových tendencí ve vzdělávání. Z hlediska modernizace fyzikálního vzdělávání měl největší význam úkol *Model perspektivního pojetí výuky fyziky*, řešený v letech 1976–1980. Jednou z hlavních osobností KMVF jako řešitelského pracoviště, jehož vedení po prof. M. Valouchovi převzal *prof. J. Vachek*, byla *prof. J. Fenclová*, která koordinovala výzkumné práce 28 pracovníků z dalších pracovišť, převážně z vysokých škol připravujících učitele fyziky (podrobněji viz [13]). Cílem výzkumu bylo připravit pro perspektivní projekt výuky fyziky řadu zjištění podložených jak teoretickými analýzami, tak didaktickými experimenty ve školách. V rámci projektu se konaly pravidelné semináře organizované KMVF většinou ve školícím zařízení ve Štiříně u Prahy, kterého se zúčastňovali i didaktici jiných oborových didaktik. Hlavní výsledky toho výzkumného úkolu jsou shrnuty v kolektivní publikaci [14].

Dalším výsledkem tohoto pracoviště je teoreticko-analytická studie, jejímž cílem bylo zpracovat podkladový materiál v podobě návrhu integrovaného matematicko-přírodovědného vzdělání (podrobněji viz [15]). Na tomto úkolu se podílel především *doc. L. Pekárek*, který se spolupracovníky zpracoval koncept netradičně pojaté výuky fyziky, založené na budování fyzikálních poznatků od elementárních částic mikrosvěta, až po poznatky o vesmíru. Ukázkou tohoto pojetí může být časopisecká publikace [16], avšak k celkové realizaci tohoto netradičního projektu již nedošlo.

Závěr

Vývoj po roce 1990 charakterizuje liberalizace vzdělávacích cest, kdy jsou východiskem tvorby jednotlivých školních vzdělávacích programů (ŠVP) nepřilíš konkrétní rámcové vzdělávací programy (RVP). Jen obtížně bychom v RVP hledali nějakou reflexi modernizačního hnutí, když např. poznatky o polovodičích začínají a končí polovodičovou diodou, základy speciální teorie relativity přestaly být středoškolským učivem a integrační tendence charakteristické pro moderní přístup ke struktuře didaktického systému učiva jsou zapomenuty. Pro učitele jsou tak relevantním materiálem pro tvorbu ŠVP především učebnice fyziky. Jejich autoři se však přizpůsobili požadavkům stávajících RVP a výuka se tak vrátila k uspořádání učiva, jaké se u nás formovalo v 30. letech 20. století (viz [17]).

V příspěvku jsme se zabývali v podstatě jen modernizací struktury a obsahu didaktického systému výuky fyziky, s větším důrazem na střední

všeobecně vzdělávací školu. Je samozřejmé, že k modernizaci docházelo a stále dochází zejména v oblasti prostředků výuky, především v souvislosti s didaktickým využitím IT v nejrůznějších podobách. Nejde např. jen o uplatnění počítačových systémů pro podporu školního experimentu a laboratorních měření. Nové technické prostředky zasahují stále více do oblasti prezentace učiva v podobě elektronických učebních materiálů. Ve stručném výčtu to mohou být např.:

- Elektronické doplňky učebnic
- Elektronické učebnice
- Učební materiály s hypertextovou strukturou
- Audiovizuální učební materiály
- Výukové audiovizuální programy
- Animace a simulace
- Multimediální učebnice
- Aplikace pro mobil

Aktuálním úkolem se tak stává modernizace a nové pojetí praktické vyučovací činnosti učitele. Řešení této problematiky probíhá spontánně, obrazně řečeno „za pochodu“ a měli bychom mu věnovat náležitou pozornost, ať už se jedná o kvalitu nepřeborného množství elektronických materiálů dostupných na webu, tak způsobu, jakým jsou tyto zdroje v praxi využívány.

Literatura

- [1] Physics. Physical Science Study Committee. D. C. Heath & Comp., Boston 1960.
- [2] *Vachek, J., Fenclová, J.*: Modernizace výuky v ČSSR. Československý časopis pro fyziku, roč. 30 (1980), č. 2, s. 148.
- [3] *Fuka, J.*: Konference o modernizaci vyučování fyzice. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 9 (1964), č. 6, s. 352. Dostupné na: <http://dml.cz/dmlcz/139557>.
- [4] *Valouch, M. A.*: Snahy o modernizaci vyučování fyzice v zahraničí. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 9 (1964), č. 2, s. 99. Dostupné na: <http://dml.cz/dmlcz/137659>.

- [5] *Jelínek, M.*: K 125. výročí JČSMF. Jednota před 30 lety a František Kahuda. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 32 (1987), č. 6, s. 322. Dostupné na: <http://dml.cz/dmlcz/139476>.
- [6] *Kašpar, E.*: Modernizace školské fyziky – iluze a skutečnost. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 17 (1972), č. 4, s. 207. Dostupné na: <http://dml.cz/dmlcz/138958>.
- [7] *Lepil, O.*: Konference o novém pojetí vyučování fyzice na gymnasiu. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 17 (1972), č. 2, s. 113. Dostupné na: <http://dml.cz/dmlcz/138518>.
- [8] *Lepil, O., Chytilová, M.*: Doplněk k učivu fyziky pro III. ročník gymnasia. SPN, Praha, 1973.
- [9] *Fuka, J.*: Doplněk k učivu fyziky pro IV. ročník gymnasia. SPN, Praha, 1974.
- [10] *Lepil, O.*: K novému pojetí vyučování fyzice na gymnáziu. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 27 (1982), č. 3, s. 178. Dostupné na: <http://dml.cz/dmlcz/139698>.
- [11] *Lepil, O.*: K vývoji fyzikálního vzdělávání na gymnáziu (1933–1983). Matematika–fyzika–informatika, roč. 32 (2023), č. 2, s. 117. Dostupné na: <https://mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/725>.
- [12] Zahájení činnosti Kabinetu pro modernizaci vyučování matematice a fyzice JČMF. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 11 (1966), č. 2, s. 111. Dostupné na: <http://dml.cz/dmlcz/139054>
- [13] *Fenclová, J., Vachek, J.*: Rozvoj modernizace všeobecného vzdělání ve fyzice. Pedagogika, roč. 1979, č. 1, s. 37. Dostupné na: https://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/?attachment_id=6199&edmc=6199.
- [14] *Fenclová, J. a kol.*: K perspektivám fyzikálního vzdělání v didaktickém systému přírodních věd. Academia, Praha 1984.
- [15] *Vachek, J., Kluíber, Z., Pekárek, L.*: K vytváření perspektivní koncepce fyzikálního vzdělání na středních školách. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 31 (1986), č. 5, s. 281. Dostupné na: <http://dml.cz/dmlcz/138969>.
- [16] *Rojko, M., Pekárek, L.*: Pokus o novou koncepci vyučování fyzice na střední škole. Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, roč. 33 (1988), č. 1, s. 37. Dostupné na: <http://dml.cz/dmlcz/139600>.
- [17] *Lepil, O.*: K vývoji učebnic fyziky pro střední školu gymnaziálního typu. Matematika–fyzika–informatika, roč. 22, č. 4, s. P16. Dostupné na: <https://mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/78>.

Strategie 2030+ v přípravě budoucích učitelů fyziky

JIŘÍ KOS – MICHAELA KRÍŽOVÁ

Přírodovědecká fakulta, Univerzita Hradec Králové

Nebojíme se tvrdit, že velkou část českých didaktiků fyziky v současné době trápí (mimo jiné) naplňování Strategie vzdělávací politiky ČR do roku 2030+ (nazýváno též Strategie 2030+, [1]). Konkrétně pak její dva vybrané aspekty – značně ožehavé téma revize Rámcových vzdělávacích programů (dále označujeme RVP) a plánovaná reforma přípravy budoucích učitelů.

Aktuálnost a důležitost těchto otázek je zřejmá. Úpravou již prošel Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (RVP ZV) i Rámcový vzdělávací program pro gymnázia (RVP G) a školy, které vzdělávají žáky v příslušných oborech vzdělávání, musí na tuto změnu povinně zareagovat v nejbližších letech. Čerství absolventi učitelsky zaměřených studijních programů se tak s revizí budou zcela jistě bezprostředně potýkat. Reforma přípravy budoucích učitelů je pak tzv. evergreen českého školství. Vzdělávací systém je navíc laickou veřejností velmi sledován a podrobován značné kritice (viz trefně a vtipně shrnující komentář „*každý, kdo nikdy neučil, je děsný chytrák a rozumí tomu, jak to ve školství chodí – vždyť do toho vidí něée, má přeci děti a kdysi do školy chodil*“ na portálu Vzdělávací služby, [2]).

Situace je pro didaktiky o to nepříjemnější, že změny ve struktuře vysokoškolských studijních programů není snadné realizovat příliš pružně, neboť akreditační procedura není vůbec snadná a představuje velkou administrativní zátěž. Pro některé univerzity je sice akreditační proces jednodušší, pokud mají v dané oblasti vzdělávání institucionální akreditaci, ale například bakalářské studijní programy se zaměřením na přípravu budoucích učitelů mají běžně akreditaci i na deset let, takže nelze předpokládat, že by vysoké školy hromadně přetvářely studijní programy předčasně. Vysoké školy (didaktici) si tedy musí často poradit v rámci platné struktury předmětů daného programu. Na metodickém portálu Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy (dále MŠMT) edu.cz je navíc výslovně uvedeno, že

tvorba nových akreditací není nutná, protože podle [3] *fakulty mají nové akreditované a inovované programy, kterým věří. K reakreditaci by mělo docházet tehdy, pokud fakulta sama dospěje k názoru, že stávající akreditační nepřípravují dostatečně dobře absolventy k tomu, aby se stali hlavními hybateli proměny vzdělávání podle Strategie 2030+.*

V tomto článku bychom rádi trochu podrobněji popsali rámec změn, které jsme výše uvedli, a představili, jak na katedře fyziky Přírodovědecké fakulty UHK (alespoň částečně) s naznačenými problémy pracujeme.

Něco málo ke kompetenčnímu vzdělávání, Strategii 2030+ a revizi RVP

Předně bychom rádi podotkli, že se Strategie 2030+ netýká pouze rozvoje tzv. kompetenčního vzdělávání, dalším cílem je i snížení nerovnosti v přístupu ke vzdělávání a umožnit maximální rozvoj potenciálu dětí, žáků a studentů. Tímto strategickým cílem si ale dovolíme nezabývat, protože se jedná o velkou samostatnou problematiku, kterou tímto článkem rozhodně neobsáhneme.

Přechod ke kompetenčnímu vzdělávání Česká republika zahájila již v roce 2002. Původní záměr byl vymezen v Národním programu rozvoje vzdělávání v České republice (zkráceně Bílá kniha, [4], právně byl zakotven v zákoně č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání (v tzv. školském zákoně), ve znění pozdějších předpisů, a do praxe byl převeden formou RVP pro různé stupně vzdělávání.

Proces přechodu nadále pokračuje, avšak za zhruba 20 let od formulace základních cílů vzdělávání došlo v oblasti lidského poznání k velkému pokroku, na který je jistě třeba vhodně reagovat tak, aby výsledkem vzdělávání byl občan, který má rozvinuté klíčové kompetence nezbytné pro život ve 21. století. Oblasti, ve kterých je nutné upravit obsah vzdělávání, pojmenovává strategický dokument Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy z roku 2020 – Strategie vzdělávací politiky ČR do roku 2030+.

Právě na základě Strategie 2030+ probíhají revize jednotlivých Rámcových vzdělávacích programů. Revize samozřejmě budou probíhat postupně, avšak již nyní je v plném proudu tzv. malá revize, která se zabývá zejména digitálním vzděláváním. *Konkrétně vznikla nová klíčová kompetence (digitální) a vzdělávací oblast Informační a komunikační technologie ustoupila nové vzdělávací oblasti Informatika.*

Reforma přípravy budoucích učitelů

Na Strategii 2030+ je logicky navázána i plánovaná reforma přípravy učitelů. Hlavní východiska jsou uvedena v dokumentu s názvem *Reforma přípravy učitelů a učitelek v ČR* [5]. Hned v jeho úvodu je trefně poznamenáno, že *cílem reformy je, aby ve vzdělávací soustavě byl dostatek učitelů, kteří jsou připraveni naplňovat cíle Strategie 2030+, takže i rozvíjet u žáků digitální kompetence* (respektive všechny kompetence).

V další části dokumentu je pak uvedeno celkem šest hlavních příležitostí pro zlepšení, které jsou následně podrobně rozvedeny. Jednou z nich je i *propojení studia s praxí*. Minimální požadavek na podíl praxí ve studiu je v případě učitelství pro základní a střední školy 8 %. A i když je údajně tento podíl v praxi vyšší (fakulty do svých studijních programů zakomponovaly praxe více), přesto je to méně než v některých jiných evropských zemích (např. v Belgii více než třikrát více). Nejedná se ale jen o délku (počet) praxí, ale i o jejich kvalitu. Problematické je zajištění dostatku kvalitních učitelů, kteří by praxe vedli a prováděli s posluchači učitelských programů reflexe, je nedostatek didaktiků daných předmětů, didaktické předměty bývají zpravidla zařazeny až ve vyšších ročnících studia.

Aktuální stav na vybraných českých vysokých školách

Byť jsou v dokumentu *Reforma přípravy učitelů a učitelek v ČR* uváděny některé teze o současném stavu učitelských studijních programů (například procento skutečného zastoupení praxí), netvoří zdrojová data přílohu dokumentu, ani na ně není uveden žádný odkaz. Z tohoto důvodu jsme se rozhodli projít data, která jsou dostupná ze studijních informačních systémů vysokých škol.

Zaměřili jsme se na studijní programy vybraných vysokých škol, které na bakalářské úrovni připravují budoucí učitele fyziky („Fyzika se zaměřením na vzdělávání“ a „Fyzika pro vzdělávání“). Klíč pro výběr konkrétních univerzit byl pro nás poměrně jasný – vybrali jsme tzv. regionální univerzity (přesněji řečeno univerzity, které jsou zapojeny v Mezuregionální univerzitní radě [6]). Mezi tyto školy se totiž řadí i naše mateřská Univerzita Hradec Králové a jednou z myšlenek zmiňovaného uskupení je i sdílení dobré praxe napříč zapojenými institucemi.

Zjišťovali jsme zastoupení předmětů zaměřených na praxi a zastoupení předmětů zaměřených na práci s digitálními technologiemi. Hned na začátku je třeba říci, že z volně dostupných informací samozřejmě není možné zjistit skutečný stav zcela přesně. Nelze vyloučit, že se posluchači vydají na

praxi do školy i v předmětech, které nejsou explicitně zaměřeny na praxe (například v předmětech zaměřených na pedagogiku a didaktiku jako jeden z úkolů na semináře, v předmětech zaměřených na pedagogickou diagnostiku na pozorování sociálního klimatu ve třídě...). Zároveň je dost dobře možné, že studenti v předmětech fyzikálního praktika pracují s počítačem řízenými měřicími systémy, byť se nejedná přímo o náplň předmětu uvedenou v sylabu. Tato praxe je navíc přímo podporována výše uvedenou myšlenkou MŠMT o nepotřebnosti reakreditace. Na druhou stranu to však vyvolává otázky nad statistickými daty z dokumentu Reforma přípravy učitelů a učitelek v ČR.

Zjištěné předměty, jejich časové ohodnocení a doporučené zařazení do semestru ukazují tabulky 1 a 2. Údaje tabulek jsou doplněny podrobným komentářem.

Z informačního systému *Západočeské univerzity v Plzni* [7] jsme se dozvěděli, že posluchači se do prostředí školy vydají jen a pouze díky předmětu Náslechová praxe – bakalářská (F). Předmět je zařazen v letním semestru druhého ročníku s rozsahem jedna hodina týdně. Jak název napovídá, nejedná se o aktivní výstupy studentů, ale o náslechy v hodinách vybraného vyučujícího. Součástí praxe je i cvičná příprava didaktických materiálů. V rámci společného základu je pak ještě zařazen předmět Pedagogická praxe v mimoškolních aktivitách (explicitně je uvedeno vedení kroužků, spoluúčast na organizaci letních táborů, lyžařských kurzech... , akceptováno není doučování). Rozsah těchto aktivit je 10 dní za semestr. Co se týče předmětů zaměřených na práci s digitálními technologiemi, podařilo se nám jeden dohledat hned v prvním semestru, a to v předmětu s názvem Využití počítačů ve fyzice 1. Jedná se o předmět oborové specializace, který je vyučován dvě hodiny týdně. Náplní je dle sylabu zejména práce s kancelářským balíčkem MS Office, ale je zařazena i práce s poněkud starším softwarem pro fyzikální výpočty Famulus. V sylabech dalších oborových předmětů již práce s digitálními technologiemi jako hlavní náplň nefiguruje. Ve všech bakalářských studijních programech zaměřených na vzdělávání (letní semestr druhého ročníku) se pak nachází předmět Informační technologie ve výuce, u něž je uveden rozsah dvě hodiny týdně (nikoli však přímé výuky, nýbrž plnění zadaných úloh z e-learningového kurzu). Náplň představují vzdělávací aplikace, vyhledávání informací na internetu, využívání sociálních sítí na internetu a pod. Další povinný předmět se v informačním systému nepodařilo vyhledat. Za zmínku však stojí povinně-volitelný předmět s názvem Moderní technologie ve vzdělávání.

	1. ročník		2. ročník		3. ročník		neurčeno
	zimní semestr	letní semestr	zimní semestr	letní semestr	zimní semestr	letní semestr	
Západočeská univerzita v Plzni				Následová praxe – bakalářská (F) 1 h / týden			Pedagogická praxe v mimoskolních aktivitách 10 dnů / semestr
Technická univerzita v Liberci		Pedagogické praktikum 2 h / týden	Asistenční praxe 2 h / týden			Úvod do pedagogické praxe 2 h / týden	
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích				Asistenční pedagogická psychologická praxe a její reflexe 2 h / týden			Asistenční praxe – matur 2 h / týden
Univerzita Hradec Králové		Pedagogická praxe I 1 h / týden		Pedagogické praktikum 2 h / týden		Asistenční praxe 30 h / semestr	
				Pedagogická praxe 2 1 h / týden			
Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem			Observační pedagogická praxe 1 týden / semestr	Klinická pedagogická praxe 14 h / semestr	Asistenční pedagogická praxe 1 týden / semestr	Reflexivní seminář pedagogické praxe 1 h / týden	
				Přípravný seminář k pedagogické praxi 1 h / týden			

Tabulka 1 Zařazení předmětů zaměřených na praxe dle jednotlivých univerzit (pokud je předmět uveden v obou semestrech daného ročníku, znamená to, že přesný semestr není v informačním systému určen)

	1. ročník		2. ročník		3. ročník		neurčeno
	zimní semestr	letní semestr	zimní semestr	letní semestr	zimní semestr	letní semestr	
Západočeská univerzita v Plzni	Využití počítačů ve fyzice 2 h / týden			Informační a komunikační technologie ve výuce 2 h / týden			Moderní technologie ve vzdělávání 2 h / týden
Technická univerzita v Liberci		Zpracování elektronických dokumentů 2 h / týden					Multimédia ve školních projektech 3 h / týden
Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích	Práce s informačními zdroji 8 h / semestr						
Univerzita Hradec Králové	Programování fyzikálních problémů 1 1 h / týden	ICT ve vzdělávání 1 1 h / týden	Programování fyzikálních problémů 3 1 h / týden		ICT ve vzdělávání 2 1 h / týden	Počítač a experiment 2 h / týden	
		Programování fyzikálních problémů 2 1 h / týden			Numerické metody ve fyzice 2 h / týden		
Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem			Informační a komunikační technologie I 1 h / týden	Informační a komunikační technologie II 1 h / týden			

Tabulka 2 Zařazení předmětů zaměřených na práci s digitálními technologiemi dle jednotlivých univerzit (modře uvedeny povinně-volitelné předměty, zeleně volitelné předměty; pokud je předmět uveden v obou semestrech daného ročníku, znamená to, že přesný semestr není v informačním systému určen)

Je vyučován dvě hodiny týdně, v rámci kterých jsou realizovány přednášky vybraných expertů z dané problematiky a v rámci kterých studenti pracují na vlastním projektu z oblasti využití technologií ve vzdělávání. Projekty následně hodnotí ustanovená komise, která nejlepším výstupům udělí stipendium. Veškeré vytvořené materiály jsou pak zveřejněny online [8].

Na *Technické univerzitě v Liberci* [9] žádný oborový předmět zaměřený na praxi ve školském prostředí není do plánu programu zařazen. Naproti tomu ve společné části všech programů „se zaměřením na vzdělávání“ jsou tři předměty tohoto charakteru. První z nich (Pedagogické praktikum) je zařazen hned v letním semestru prvního ročníku a je zaměřen na asistentskou práci při vedení skupin dětí (škola, školní družina, zájmové kroužky...). Hodinová dotace činí 2 hodiny týdně za semestr. Ve druhém ročníku (bez určení semestru) posluchači absolvují předmět Asistenční praxe – jeden den v týdnu po celou dobu semestru navštěvují fakultní školu, kde se formou asistence vyučujícímu seznamují s prací učitele (rozsah stanoven dle popisu v sylabu předmětu, uvedená hodinová dotace jsou 2 h týdně). Poslední předmět (Úvod do pedagogické praxe) je zařazen ve třetím ročníku (letní semestr). Opět se jedná o následově zaměřený předmět, jehož sylabus však explicitně zdůrazňuje zprostředkování vazby mezi teoretickými poznatky pedagogicko-psychologického základu a odpozorovanými jevy. Dotace předmětu jsou 2 hodiny týdně, ale z plánu semestru není jasné, jaká část se odehrává na seminářích a kolik v praxi. Oborový předmět explicitně zařazen za účelem rozvoje digitálních kompetencí se v plánu programu nevyskytuje, v dokumentaci předmětu Metody zpracování dat je však uvedeno, že je ukázáno využití počítače při zpracování výsledků měření (Excel, Origin). Je tedy otázkou, jak velká pozornost je tomuto aspektu zpracování dat věnována. Společný základ pak obsahuje předmět Zpracování elektronických dokumentů, zaměřený na práci s kancelářskými balíky. Vyučován je v letním semestru prvního ročníku, a to 2 hodiny týdně. Zajímavě se jeví předmět Multimédia ve školních projektech, který je zařazen v bloku volitelných předmětů bez určení studovaného semestru. Rozsah je stanoven na 3 hodiny týdně a cílem předmětu je oboznámit studenty s možnostmi zařazení audiovizuálních materiálů (například nahrávky a animace) do materiálů k výuce. Vzhledem ke statutu předmětu je ale opět otázkou, kolik studentů si jej zapíše.

Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích [10] zařadila v rámci pedagogicko-psychologického základu dva předměty zaměřené na praxi. Konkrétně se jedná o předmět Asistentská pedagogicko-psychologická praxe

a její reflexe v letním semestru druhého ročníku v rozsahu dvě hodiny týdně a Asistentská praxe – maior, která nemá určený semestr studia (taktéž v rozsahu dvou hodin týdně). U prvního jmenovaného předmětu chybí v informačním systému bližší informace, ale na webových stránkách školy [11] lze dohledat, že se oba předměty zaměřením odpovídají názvům, tj. jsou cíleny na hospitační činnost a na asistenci fakultnímu učiteli. Povinný oborový předmět zaměřený na rozvoj digitálních kompetencí je ve studijních plánech pouze jeden – Práce s informačními zdroji. Zařazen je hned v zimním semestru prvního ročníku, nicméně je velmi úzce zaměřen – na práci s online informačními zdroji.

Veškeré předměty zaměřené na praxi studentů jsou na *Univerzitě J. E. Purkyně v Ústí nad Labem* [12] vedeny pracovníky katedry fyziky, lze je tedy považovat za oborové praxe (některé jsou oborové, některé zajišťuje Centrum pedagogické praxe). Konkrétně je zařazeno pět předmětů. Observační pedagogická praxe (zimní semestr druhého ročníku) ihned zprostředkovává jeden týden praxe na vybrané škole a stínování jejich pracovníků. Podobným předmětem je Klinická pedagogická praxe v letním semestru druhého ročníku. Časová náročnost praxe je 14 hodin a kromě stínování pracovníků školy je akcentováno seznámení s kurikulárními dokumenty školy. Výuka předmětu Přípravný seminář k pedagogické praxi probíhá ve stejném semestru jako Klinická pedagogická praxe, neboť cílem předmětu je připravit studenta na praxi v „terénu“ a zároveň tyto praxe reflektovat (1 h týdně). Na obdobném principu pak funguje dvojice předmětů Asistentská pedagogická praxe a Reflektivní seminář pedagogické praxe ve třetím ročníku. Asistentská praxe probíhá v zimním semestru v rozsahu jeden týden a je zaměřena nejen na hospitační činnost, ale i na aktivní podíl posluchačů (asistence vyučujícím, mikrovýstupy, ...). Reflektivní semináře mají četnost 1 hodinu týdně v letním semestru. Ve studijním plánu není oborový předmět, který by explicitně cílil na rozvoj digitálních kompetencí, avšak v sylabu předmětu Úvod do teorie měření je uvedeno využití výpočetní techniky pro zpracování výsledků měření. Ve všech programech „pro vzdělávání“ jsou v zimním semestru druhého ročníku zařazeny dva předměty – Informační a komunikační technologie I a Informační a komunikační technologie II, které svou náplní k rozvoji digitálních kompetencí jednoznačně přispívají. Obsahem je nejen kancelářský balík, ale i práce se školními informačními systémy, využití cloudových služeb, úpravy fotografií atd. Předměty však mají podobu jednohodinových přednášek (Informační a komunikační technologie I) a jednohodinových cvičení (Informační a komunikační technologie II), takže lze těžko posou-

dit jejich skutečný dopad na zapsané studenty.

A v neposlední řadě naše domovská instituce – *Univerzita Hradec Králové* [13]. Naši posluchači se s oborovou praxí setkají pouze v letním semestru třetího ročníku v celkovém rozsahu 30 hodin za semestr v předmětu Asistentská praxe. Neoborové praxe pak zastupují předměty Pedagogická praxe 1, Pedagogická praxe 2 a Pedagogické praktikum. První ze jmenovaných předmětů je zařazen v letním semestru druhého ročníku při dotaci jedné hodiny týdně. Předmět je zaměřen na následky v hodinách, studium dokumentů navštívené instituce a vlastní realizaci mimoškolních aktivit. Pedagogickou praxi 2 studenti plní v letním semestru druhého ročníku a stanovená dotace je jedna hodina týdně. Na rozdíl od Pedagogické praxe 1 již není kladen důraz na mimoškolní aktivity, nýbrž na participaci ve výuce na vybrané škole. Kromě následků studenti realizují i mikrovýstupy a připravují vlastní didaktickou pomůcku. Pedagogické praktikum (dvě hodiny týdně) je vyučováno ve stejném semestru jako Pedagogická praxe 2 a doplňuje ji – jsou rozebírány dokumenty školy, vytvořené hospitační záznamy, studenti se učí pracovat se systémem Bakaláři aj. Digitální technologie jsou hlavní náplní neoborových předmětů ICT ve vzdělávání 1 (letní semestr prvního ročníku, jedna hodina týdně) a ICT ve vzdělávání 2 (zimní semestr třetího ročníku, jedna hodina týdně). Obsah tvoří interaktivní tabule a programy pro jejich využití, tablety ve výuce, výukové systémy, práce s informačními zdroji a pod. Předměty však nemají přímou prezenční výuku, jsou realizovány prostřednictvím online kurzů v systému Moodle. Co se týče oborových předmětů tohoto zaměření, je ve studijním plánu zařazen jediný povinný kurz – Počítač a experiment v letním semestru třetího ročníku. Časová dotace jsou dvě hodiny týdně a jak již název napovídá, předmět je zaměřen na realizaci fyzikálních měření s počítačem. Jako povinně volitelné předměty si mohou studenti v prvních třech semestrech zvolit na sebe navazující předměty Programování fyzikálních problémů 1, 2 a 3 (v každém semestru je vyučován jeden předmět, a to v rozsahu jedné hodiny týdně), ve kterých jsou seznámeni se základy algoritmizace, se základy vybraného programovacího jazyka a s využitím těchto poznatků ve fyzice. Na tyto předměty navazuje v zimním semestru povinně volitelný předmět Numerické metody ve fyzice (dvě hodiny týdně).

Komentář průzkumu

Průběh praxí v bakalářských studijních programech zaměřených na přípravu budoucích učitelů fyziky se na jednotlivých vysokých školách poměrně liší. Zatímco na některých univerzitách jsou studenti vysíláni do

škol již v prvním ročníku, na velké části univerzit až o rok později. Někde bývají praxe doplněny předměty, jejichž výuka probíhá přímo na půdě univerzity, kde jsou praxe rozebírány, jinde je průběh reflektován až na vypsání termínu zápočtu. Kromě praxí na školách bývají zahrnuty i mimoškolní aktivity (vedení kroužků, táborů...). Obecně je však praxe zařazena v poměrně skromném rozsahu a je zaměřena zejména následově, případně na asistenci učitelů. Vlastní výstupy studentů jsou v omezené míře, a to nejčastěji formou krátkých mikrovýstupů v hodinách učitele, který praxi vede.

Lze polemizovat o příčinách tohoto stavu – některé příčiny dle MŠMT jsme již nastínili dříve (nedostatek kvalitních fakultních učitelů, jejich podfinancování, absence zkušeností z praktické výuky u velké části didaktiků), zároveň je ale například jasné, že studenti nižších ročníků ještě neprošli na vysoké škole dostatečným počtem předmětů potřebných k rozsáhlejšímu působení v pozici učitele (ať už z pedagogicko-psychologického základu nebo z odborných předmětů své aprobace).

Co se týče digitálních technologií jako hlavní náplně předmětů, je situace ještě více různorodá než u praxí. Ve studijních programech některých univerzit nalezneme předměty zaměřené explicitně na tvorbu kvalifikačních prací, na jiných na tvorbu multimediálního obsahu prezentací, na počítačem podporovaný experiment, na programování apod.

Pokus – Otevřené laboratoře katedry fyziky

Na katedře jsme se rozhodli ověřit, jak náš studijní program zapadá do Strategie 2030+. Kromě vlastního kritického zkoumání jsme jej porovnali se studijními programy ostatních univerzit a dospěli jsme k závěru, že aktuálně není třeba náš program reakreditovat. Zastoupení praxí ve studijním plánu nikterak nevybočuje z nastaveného standardu. Posluchači se do „terénu“ vydávají již v prvním ročníku, zároveň je praxe zastoupena ve všech ročnících, její náročnost je stupňována. Zastoupení předmětů zaměřených na digitální technologie je taktéž adekvátní. Kromě neoborových předmětů máme samostatný kurz Počítač a experiment, jehož náplní je didaktické využití počítačem podporovaných experimentů, a poměrně velké množství povinně volitelných předmětů.

I když z našeho pohledu program nevyžaduje reakreditaci, přesto jsme uvažovali, jak našim studentům ještě více zpřístupnit reflektované (pokud možno aktivní) praxe v oboru a jak jim dodat jistotu ve využívání digitálních technologií ve výuce fyziky.

Rozhodli jsme se tak v akademickém roce 2022/23 vyzkoušet projekt tzv. otevřených laboratoří [14]. Koncepce je jednoduchá – třídy ze středních škol v Královéhradeckém kraji po sjednání vhodného termínu navštíví laboratoř počítačem podporovaného experimentu u nás na katedře. Každá taková návštěva je zaměřena na sérii osmi jednoduchých desetiminutových experimentů s vybavením pro výuku přírodovědných předmětů firmy Vernier, jejíž téma (rozumějme partie fyziky) je předem domluveno (například mechanika). Žáci se ve dvojicích střídají u jednotlivých stanic (například zákon síly, zákon akce a reakce, odstředivá síla), kterými je provází připravený návod s potřebným teoretickým úvodem, postupem měření a předpřipraveným doplňovatelným závěrem.



Obr. 1 Stanoviště z elektřiny a magnetismu s přiloženým návodem pro žáky [14]

Žákům v laboratořích se pod vedením oborové didaktičky ve svém volnu věnují naši studenti bakalářského studijního programu, kteří dobrovolně stojí o to, aby se do projektu zapojili a rozšířili tak svoji praxi a dovednosti v oboru digitálních technologií. Jejich úkolem je žáky jednotlivými stanovišti v případě potřeby provázet, dovysvětlovat jim fyzikální principy, navádět je v obsluze měřicích přístrojů...

Domníváme se, že možnost podílet se na realizaci je pro naše studenty mimořádně přínosná. A moc nás těší, že se z jejich strany setkáváme s velkým zájmem. Sami studenti potvrzují, že je přítomnost didaktičky, která jim přímo na základě pozorování jejich praxe poskytuje po odchodu žáků střední školy zpětnou vazbu, nesmírně cenná. Neoddiskutovatelným pří-

nosem je i to, že studenti jsou po několika setkáních připraveni na to, aby podobná laboratorní cvičení realizovali ve své pozdější praxi, a tak u žáků rozvíjeli digitální kompetence.



Obr. 2 Studenti učitelství fyziky pomáhají žákům při měření úlohy z mechaniky [14]

Otevřené laboratoře v akademickém roce 2022/23 v číslech

Je to až neuvěřitelné, s jak velkým zájmem se náš pokus shledal, za což jsme velmi vděční. Pro ilustraci uvádíme na obr. 3 několik čísel.



Obr. 3 Statistika projektu Otevřené laboratoře KFY PŘF UHK

Závěr

Naplnění Strategie 2030+ je dlouhá cesta, která si ještě (nejen od didaktiků fyziky) vyžádá hodně práce. Ze zkušenosti ale víme, že učitelé mají tu obdivuhodnou vlastnost, že překážky, které se jim v „pedagogickém terénu“ staví do cesty, neúnavně zdolávají. Ať už je to zvýšená administrativní nebo třeba distanční výuka v době pandemie. Doufáme, že naši absolventi budou mít díky projektu Otevřené laboratoře katedry fyziky o jednu překážku k překonávání méně.

Poděkování. Článek vznikl s finanční podporou specifického výzkumu PrF UHK 2109/2023, řešitelé za tuto podporu děkují.

Literatura

- [1] *Fryč, J. a kol.*: Strategie vzdělávací politiky České republiky do roku 2030+. Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy, Praha, 2020.
- [2] Reakce na téma Učitelé by po 15 letech měli dostat půlroční volno. [online]. 15. 2. 2017 [cit. 2023-09-19]. Dostupné z: <https://www.vzdelavacisluzby.cz/forum/kategorie-6/podkategorie-1/prispevek-436>.
- [3] Pregraduální příprava učitelů. Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy. Edu.cz [online]. 2022 [cit. 2023-09-19]. Dostupné z: <https://www.edu.cz/pregradual/>.
- [4] Národní program rozvoje vzdělávání v České republice: bílá kniha. Tauris, Praha, 2001.
- [5] Reforma přípravy učitelů a učitelek v ČR. Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy [online]. [cit. 2023-09-24]. Dostupné z: <https://www.edu.cz/wp-content/uploads/2022/01/Reforma-pr%C8%8Ci%C8%81pravy-uc%C8%8Citelu%C8%8A.pdf>.
- [6] Meziregionální univerzitní rada [online]. 2022 [cit. 2023-09-24].
- [7] Západočeská univerzita v Plzni. Portál ZČU, [online]. [cit. 2023-09-24]. Dostupné z: <https://portal.zcu.cz/>.
- [8] Západočeská univerzita v Plzni. Studentské projekty [online]. 2023 [cit. 2023-09-24]. Dostupné z: <https://studentskeprojekty.zcu.cz/>.
- [9] Západočeská univerzita v Plzni. Portál TUL [online]. [cit. 2023-09-24]. Dostupné z: <https://stag.tul.cz/>.
- [10] Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. Portál JU [online]. [cit. 2023-09-24]. Dostupné z: <https://wstag.jcu.cz/>.
- [11] Učiteléské praxe. Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích. [online]. 2021 [cit. 2023-09-24]. Dostupné z: <https://www.jcu.cz/cz/studium/ucitelske-praxe>.
- [12] Univerzita Jana Evangelisty Purkyně v Ústí nad Labem. Portál UJEP [online]. [cit. 2023-09-24]. Dostupné z: <https://portal.ujep.cz/>.
- [13] Univerzita Hradec Králové. Portál UHK [online]. [cit. 2023-09-24]. Dostupné z: <https://stag.uhk.cz/>.
- [14] Otevřené laboratoře katedry fyziky aneb fyzika hrou!. Univerzita Hradec Králové [online]. 2023 [cit. 2023-09-24]. Dostupné z: <https://www.uhk.cz/cs/prirodovedecka-fakulta/prf/aktualne/otevrene-laboratore-katedry-fyziky-aneb-fyzika-hrou>.

O programovacím jazyku PROLOG

MIROSLAV KOLAŘÍK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

PROLOG je interpretační (neprocedurální) jazyk. Patří mezi deklarativní programovací jazyky – potlačuje imperativní¹⁾ složku. PROLOG je využíván především v oboru umělé inteligence a v počítačové lingvistice (obzvláště pro zpracování přirozeného jazyka, pro nějž byl původně navržen). PROLOG je založen na predikátové logice. Základními využívanými přístupy jsou unifikace (speciální substituce), rekurze a backtracking (metoda prohledávání do hloubky).

O logickém programování

Program je souborem tvrzení, kterými programátor (uživatel, expert) popisuje určitou část okolního světa. Výpočet nad daným programem, který je iniciován zadáním dotazu, je hledání důkazu dotazu z daného souboru tvrzení.

Logické programování je jedním z paradigmat programování (programovacích stylů). Základními rysy, kterými se logické programování zásadně odlišuje od ostatních programovacích paradigmat jsou:

- programátor specifikuje, co se má vypočítat, a ne jak se to má vypočítat a kam uložit mezivýsledky,
- nejsou potřeba příkazy pro řízení běhu výpočtu ani pro řízení toku dat, nejsou potřeba příkazy cyklů, větvení, ani přiřazovací příkaz,

¹⁾Imperativní paradigma popisuje, jak vyřešit problém. Deklarativní paradigma popisuje, co je problém.

- neexistuje rozdělení proměnných na vstupní a výstupní,
- nerozlišuje se mezi daty a programem.

Dále je typické, že logický program je konečná množina logických formulí, přičemž výpočet je zahájen zadáním dotazu, což je logická formule, kterou zadává uživatel. Cílem výpočtu je najít důkaz potvrzující, že dotaz logicky vyplývá z logického programu. Pokud je zjištěno, že dotaz z programu vyplývá, výpočet končí a uživateli je oznámeno **true** s hodnotami případných proměnných, které se v dotazu vyskytují. Pokud není zjištěno, že dotaz z programu vyplývá, výpočet končí a uživateli je oznámeno **false**. Dodejme, že se může stát, že výpočet neskončí, protože uvázne v nekonečném cyklu.

Abychom si osvojili základní principy logického programování, zaměříme se na programovací jazyk PROLOG.

Základem PROLOGu je databáze klauzulí, které lze dále rozdělit na fakta a pravidla, nad kterými je možno klást dotazy formou tvrzení, u kterých PROLOG zhodnocuje jejich pravdivost. Nejjednoduššími klauzulemi jsou fakta, která pouze vypovídají o vlastnostech objektu nebo vztazích mezi objekty. Složitějšími klauzulemi jsou pravidla, která umožňují odvozovat nová fakta. Zapisují se ve tvaru

```
hlava :- telo.
```

kde **hlava** definuje odvozovaný fakt, **telo** podmínky, za nichž je pravdivý. Tělo pravidla obsahuje jeden či více cílů. Pokud se interpretu podaří odvodit, že je tělo pravdivé, ověří tím pravdivost hlavy.

První příklad

Víme, že se dá z Prahy letět přímo do Paříže a do Lyonu. Dále víme, že se dá přímo letět z Paříže do Marseille a z Marseille přímo do Vídně. Letecká spojení mezi městy jsou buď přímá nebo přes nějaká další města.

Uvedené informace nyní přepíšeme tak, aby syntaxe odpovídala PROLOGu. Dostaneme následující logický program:

```
direct(praha,pariz).
direct(praha,lyon).
direct(pariz,marseille).
direct(marseille,viden).
connection(X,Y) :- direct(X,Y).
connection(X,Z) :- direct(X,Y), connection(Y,Z).
```

První čtyři řádky jsou fakta, předposlední a poslední řádek jsou pravidla. Všimněme si, že jak fakta, tak pravidla jsou zakončena tečkou, a že před levou závorkou nikdy není mezera. Jelikož jsou velká počáteční písmena vyhrazena pro proměnné, píšeme zde města s malými počátečními písmeny.

Nainstalujeme si nyní SWI-PROLOG. Je to jedna z mnoha aplikací, ve které můžeme vytvářet, překládat a testovat programy psané v PROLOGu. Autorem SWI-PROLOGu je Jan Wielemaker z University of Amsterdam. Zdarma lze stáhnout (verze pro Unix, MS-Windows) ze stránky²⁾:

<http://www.swi-prolog.org>

Do právě staženého programu můžeme načítat programy v PROLOGu (a to přes nabídku: **File** → **Consult ...**)³⁾. Ihned po načtení konkrétního souboru můžeme zadávat konkrétní dotazy, na které nám interpret PROLOGu obratem odpoví. Zkopírujte (nebo přepište) výše uvedených šest řádků do (obyčejného) textového souboru a po uložení (typicky s příponou `.pl`) soubor načtete do aplikace SWI-PROLOG. Nyní je PROLOG připraven na dotazy, které se zapisují za symboly „?-“⁴⁾. Nyní vyzkoušíme zadat některé jednoduché dotazy.⁵⁾ Níže uvedené dotazy vyzkoušejte na počítači. Nebojte se vyzkoušet i chybně položené dotazy⁶⁾, ať víte, jak na ně interpret PROLOGu zareaguje.

```
?- direct(praha,lyon).
```

Jelikož je tento fakt součástí našeho programu, odpoví PROLOG:

```
true.
```

Nyní položíme podobný dotaz:

```
?- direct(lyon,praha).
```

²⁾Nebo se podívejte do repozitářů své distribuce.

³⁾Pokud máte swipl puštěný v konzoli (a ne v okenním prostředí), tak lze načtení souboru „file.pl“ provést pomocí „[file]“.

⁴⁾Každý dotaz musí být ukončen tečkou. Klávesou „Enter“ se aktivuje vyvolání odpovědi.

⁵⁾Po vložení dotazu PROLOG spustí inferenční mechanismus a snaží se najít odpověď na dotaz. Odpověď je buďto nalezena (a zodpovězena) nebo nikoliv (například proto, že se interpret dostal do nekonečného cyklu).

⁶⁾Například dotaz se špatným počtem argumentů, nebo s chybějící závorkou, nebo s neznámým relačním symbolem a tak podobně.

Tento dotaz z našeho programu nijak nevyplývá, proto na něj PROLOG odpoví:

```
false.
```

Nyní zadáme dotaz s proměnnou **X**:

```
?- direct(praha,X).
```

Na tento dotaz můžeme v souladu s naším programem dostat dvě různé (pravdivé odpovědi):

```
X=pariz;  
X=lyon.
```

Pomocí středníku požadujeme další odpovědi, které můžeme na náš dotaz obdržet. Pokud bychom místo středníku stiskli klávesu „Enter“, seznam případných dalších odpovědí nedostaneme; můžeme však položit nový dotaz. Všimněme si, že při zadání dotazu s proměnnou **X** dostáváme jako odpověď možné hodnoty této proměnné.

Zkuste odhadnout a poté si sami ověřte, jaké odpovědi dá PROLOG na dotaz obsahující dvě různé proměnné **X** a **Y**.

```
?- direct(X,Y).
```

Složitější a zajímavější je binární relace **connection**, která je definována pomocí dvou pravidel. Pravidlo

```
connection(X,Y) :- direct(X,Y).
```

nám říká, že spojení mezi místy **X** a **Y** může být přímé a pravidlo

```
connection(X,Z) :- direct(X,Y), connection(Y,Z).
```

nám říká, že spojení mezi místy **X** a **Z** může vést také přes místo **Y**, případně přes další místa, mezi kterými je přímé spojení.

Na dotaz

```
?- connection(praha,viden).
```

tak dostaneme odpověď

```
true.
```

neboť z Prahy vedou přímá spojení (přes jednotlivá města) až do Vídně, konkrétně přes Paříž a Marseille. V případě relace **connection** používáme princip rekurze (silný a v PROLOGu často používaný nástroj), který ještě několikrát výhodně použijeme.

Druhý příklad

PROLOG je programovací jazyk pro symbolické, nenumerníké výpočty. Zejména je vhodný pro řešení problémů, které obsahují objekty a vztahy (relace) mezi objekty. V následujícím příkladu budeme popisovat rodinné vztahy (mezi jistými osobami). Fakt, že Tom je rodičem Roberta zapíšeme v PROLOGu takto:

```
rodic(tom,robert).
```

Zde jsme zvolili **rodic** jako jméno relace; **tom** a **robert** jsou jejími argumenty. Jména píšeme s malými počátečními písmeny, aby je překladač PROLOGu nepovažoval za proměnné. Podobně můžeme pomocí faktů definovat další vztahy.

V následujícím příkladu budeme uvažovat jednoduchou databázi faktů zachycující hierarchii příbuzenských vztahů. Tato databáze obsahuje fakta zapsaná pomocí binární relace **rodic**, definující vztah: člověk **X** je rodičem člověka **Y**. V databázi jsou dále použity dvě unární relace **muz** a **zena** definující pohlaví dané osoby.⁷⁾

```
rodic(pavla,robert).
rodic(tom,robert).
rodic(tom,liza).
rodic(tom,vilem).
rodic(robert,anna).
rodic(robert,patricie).
rodic(patricie,jan).
```

⁷⁾ Unární relací rozumíme relaci s jedním argumentem, tedy konkrétní vlastnost nějakého objektu. Binární relací rozumíme relaci popisující vztah mezi dvěma objekty, tedy relaci se dvěma argumenty. Podobně ternární relací rozumíme relaci se třemi argumenty. Například ternární relace **stred(A,S,B)** může být interpretována tak, že bod **S** je středem úsečky určené body **A** a **B**. Obecně *n*-ární relací rozumíme relaci s *n* argumenty, tedy relaci, která popisuje vztah *n* objektů, kde *n* je přirozené číslo. Dále doplníme, že každá relace se skládá z identifikátoru, za nímž následuje výraz v kulatých závorkách, který obsahuje příslušný počet argumentů.

```
zena(pavla).  
zena(liza).  
zena(anna).  
zena(patricie).  
muz(tom).  
muz(robert).  
muz(jan).
```

Lze vyčíst, že Pavla je rodičem Roberta. Dále, že Tom je rodičem Roberta, Lízy a Viléma a tak dále. Všimněme si, že databáze například nedefinuje, kdo je druhým rodičem Jana, ačkoliv bychom jeho existenci mohli intuitivně předpokládat.

Následujícím dotazem s proměnnou **X** snadno zjistíme, kdo všechno je potomkem Toma.

```
?- rodic(tom,X).
```

```
X=robert;  
X=liza;  
X=vilem.
```

Vyzkoušíme si nyní dotaz⁸⁾ složený ze dvou částí, které mají být splněny současně:

```
?- rodic(tom,X), zena(X).
```

Ptáme se opět na potomky Toma, ale jen takové, které mají ženské pohlaví (ptáme se tedy na dcery Toma). Tentokrát dostaneme jedinou odpověď:

```
X=liza.
```

K programu postupně doplníme pravidla. Nejprve program rozšíříme zavedením binární relace **potomek**, jako inverzi k relaci **rodic**. Mohli bychom postupně dodefinovat nová fakta, například

```
potomek(robert,pavla).
```

Mnohem elegantnějším řešením je však využít již zavedené relace **rodic**

⁸⁾ Pokud chcete vyvolat předchozí dotazy, stiskněte několikrát klávesu „šipka nahoru“.

a definovat k ní inverzní relaci **potomek**. V PROLOGu toto pravidlo zapíšeme následovně:

```
potomek(Y,X) :- rodic(X,Y).
```

V pravidlu figurují dvě proměnné; můžeme ho číst takto: pro každé X a Y , jestliže X je rodičem Y , pak Y je potomkem X . Mezi fakty a pravidly si můžeme všimnout podstatného rozdílu. Každý fakt, například

```
rodic(tom,liza).
```

je něco, co je vždy, nepodmíněně, pravdivé. Na druhou stranu, pravidla specifikují věci, které jsou pravdivé, jestliže je splněna nějaká podmínka. Říkáme, že pravidla mají

- podmínkovou část (pravá strana pravidla), tzv. tělo pravidla
- důsledkovou část (levá strana pravidla), tzv. hlava pravidla.

Například, v pravidle

```
potomek(Y,X) :- rodic(X,Y).
```

je hlavou **potomek(Y,X)** a tělem **rodic(X,Y)**.

Pokud je podmínka **rodic(X,Y)** pravdivá, pak je jako logický důsledek pravdivá i relace **potomek(Y,X)**.

S přidaným pravidlem pro potomky nyní na dotaz

```
?- potomek(jan,patricie).
```

obdržíme odpověď **true**, ačkoliv relaci **potomek** mezi fakty nenajdeme.

Dále definujeme jednoduchým pravidlem unární relaci **mitdite(X)**, která bude pravdivá v případě, že proměnná X je rodičem libovolného dítěte. Jelikož při definici těla pravidla na daném dítěti nezáleží, použijeme tzv. anonymní proměnnou, kterou značíme podtržítkem⁹⁾, tedy symbolem „_“.

```
mitdite(X) :- rodic(X,_).
```

Unární relaci **mitdite** si sami otestujte.

Definujeme další dvě pravidla:

```
matka(X,Y) :- rodic(X,Y), zena(X).  
prarodic(X,Z) :- rodic(X,Y), rodic(Y,Z).
```

⁹⁾Přesněji řečeno, která začíná podtržítkem.

Čárka mezi dvěma podmínkami v těle pravidla znamená konjunkci obou podmínek, tedy to, že obě podmínky musí být současně pravdivé.

Jak vidíme relace **matka** je založena na následujícím tvrzení se dvěma proměnnými: pro každé¹⁰⁾ X a Y , X je matkou Y , jestliže X je rodičem Y a X je žena.

Relace **prarodic** je založena na následujícím tvrzení se třemi proměnnými: pro každé X , Y a Z , X je prarodičem Z , jestliže X je rodičem Y a zároveň Y je rodičem Z .

Na dotaz, kdo jsou prarodiče Patricie, obdržíme (v souladu s naším programem) dvě odpovědi:

```
?- prarodic(X,patricie).
```

```
X=pavla;  
X=tom;  
false.
```

Pokud by nás zajímalo, kdo všechno jsou prarodiče a nepotřebovali bychom znát jména vnoučat, využijeme dotaz s anonymní proměnnou:

```
?- prarodic(X,_).
```

```
X=pavla;  
X=tom;  
X=robert;  
false.
```

Přidejme nyní k našemu programu další dvě pravidla, která definují binární relaci **předek**. První pravidlo definuje přímé (bezprostřední) předky a můžeme ho popsat takto:

Pro každé X a Z : X je předkem Z , jestliže X je rodičem Z .

Druhé pravidlo definuje nepřímé předky. Řekneme, že X je nepřímým předkem některého Z , jestliže existuje rodičovský řetězec lidí mezi X a Z . Toto pravidlo definujeme pomocí sebe sama (využijeme tak rekurzi):

Pro každé X a Z : X je předkem Z , jestliže existuje Y takové, že

(1) X je rodičem Y

(2) Y je předkem Z .

¹⁰⁾Proměnné jsou vždy brány s obecnými kvantifikátory, tedy v nejširším možném rozsahu.

Následují obě pravidla přepsaná do PROLOGu:

```
predek(X,Z) :- rodic(X,Z).  
predek(X,Z) :- rodic(X,Y), predek(Y,Z).
```

Promyslete si, proč je relace **predek** korektně zavedena. Nakreslete si k tomu odpovídající obrázek. Funkčnost pravidla si vyzkoušíme na dotazu, který má za cíl zjistit, komu je Pavla předkem.

```
?- predek(pavla,X).
```

```
X=robert;  
X=anna;  
X=patricie;  
X=jan;  
false.
```

Poznámka 1. Rekurze znamená sebeopakování. Velmi často se používá v matematice a informatice. V programování rekurze představuje opakované vnořené volání stejné funkce (podprogramu); hovoříme o tzv. rekurzivní funkci. Nedílnou součástí rekurzivní funkce musí být ukončující podmínka určující, kdy se má rekurze zastavit. Po každém kroku volání sebe sama musí dojít ke zjednodušení problému. Pokud nenastane koncová situace, provede se rekurzivní krok. Rekurze je jedním ze základních principů programování v PROLOGu a je v něm často využívána.

Poznámka 2. U delších programů je vhodné využít komentáře. Řádkový komentář začíná symbolem %. Tedy vše, co je za znakem „%“ je až do konce řádku považováno za komentář. Blokový (víceřádkový) komentář začíná dvěma symboly /* a končí dvěma symboly */. Tedy vše, co je mezi symboly „/*“ a „*/“ je bráno jako komentář a při překladu programu je tato část ignorována.

Seznamy a práce s nimi

Dále se budeme věnovat, v PROLOGu velmi často používaným strukturám, tzv. „seznamům“. Seznamy nejprve definujeme a seznámíme se s jejich značením. Poté si na konkrétních ukázkách představíme základní operace se seznamy a přiblížíme si tak práci s nimi.

Seznam je jednoduchá datová struktura široce používaná v nenumeričném programování. Seznamem může být posloupnost libovolného po-

čtu položek, například jaro, léto, podzim, zima. Tento seznam může být v PROLOGu napsán takto:

```
[jaro,leto,podzim,zima]
```

Toto je ale pouze externí vzhled seznamu. Všechny struktury jsou v PROLOGu kořenové stromy¹¹⁾ a seznamy nejsou výjimkou.

Jak může být seznam reprezentován jako standardní objekt PROLOGu? Musíme vzít v úvahu dva případy: seznam je buď prázdný, nebo neprázdný. V prvním případě je seznam jednoduše zapsán takto: []. Ve druhém případě seznam sestává z:

- první položky, nazývané hlava seznamu,
- zbývající části seznamu, nazývané ocas.

Pro náš ukázkový seznam

```
[jaro,leto,podzim,zima]
```

je hlavou `jaro` a ocasem seznam:

```
[leto,podzim,zima]
```

Obecně, hlavou seznamu může být cokoliv (libovolný PROLOGovský objekt, například strom, nebo proměnná); ocas musí být vždy seznamem. Hlava a ocas jsou pak spojeny do struktury speciálním funktorem,

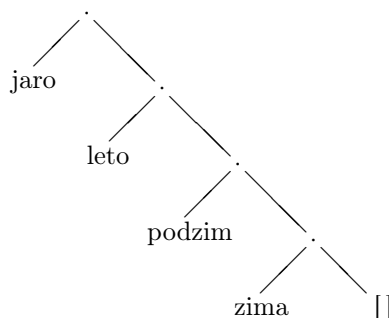
```
.(Hlava, Ocas)
```

Jelikož je ocas opět seznamem, je buď prázdný, nebo má vlastní hlavu a ocas. Proto k reprezentaci seznamu libovolné délky nepotřebujeme žádný další princip. Náš ukázkový seznam je tedy reprezentován jako:

```
.(jaro,.(leto,.(podzim,.(zima,[])))
```

a následující obrázek ukazuje odpovídající stromovou strukturu.

¹¹⁾Pod pojmem kořenový strom zde máme na mysli souvislý neorientovaný graf bez kružnic s jedním význačným vrcholem (tzv. kořenem).



My budeme nadále používat zejména reprezentaci seznamu pomocí hranatých závorek, přičemž budeme mít na paměti, že interní reprezentace je realizována pomocí binárních¹²⁾ stromů a odpovídá zápisu pomocí teček (tzv. tečkových párů). Poznamenejme ještě, že prvky seznamu mohou být objekty libovolného druhu; tedy i opět seznamy, například

`[ester, [19, 12], simon, [22, 12]]`

Uvedený seznam má čtyři prvky, kde druhým a čtvrtým prvkem je dvouprvkový seznam čísel.

Často je praktické mít možnost zacházet s celým ocasem jako s jediným objektem. Například, nechť

`L=[a,b,c]`

Pak můžeme psát `Ocas=[b,c]` a `L=.(a,Ocas)`.

Toto lze v notaci hranatých závorek pro seznamy vyjádřit pomocí svislé čárky (která separuje hlavu a ocas) takto:

`L=[a|Ocas]`

Zápis pomocí svislé čárky je ve skutečnosti ještě obecnější. Můžeme uvést libovolný počet prvků, po kterých následuje „|“ a seznam zbývajících položek. Alternativní zápisy výše uvedeného seznamu jsou:

`[a,b,c]=[a|[b,c]]=[a,b|[c]]=[a,b,c|[]]`

¹²⁾U binárních stromů má každý vrchol nejvýše dva potomky.

Vybrané operace na seznamech

Nyní se zaměříme na operaci náležení (membership), ověřující, zda je nějaký objekt prvkem seznamu. Implementaci provedeme s binární relací

```
member(X,L)
```

kde X je objekt a L je seznam. Dotaz `member(X,L)` je pravdivý, jestliže se X vyskytuje v L . Například

```
member(b,[a,b,c])
```

je pravda,

```
member(b,[a,[b,c]])
```

není pravda a

```
member([b,c],[a,[b,c]])
```

pravda je. Program pro relaci náležení vychází z následujícího pozorování. X je prvkem L , jestliže

- (1) X je hlavou L , nebo
- (2) X je prvkem ocasu L .

Oba dva body zapíšeme pomocí dvou klauzulí; první je jednoduchý fakt a druhá klauzule je pravidlo:

```
member(X,[X,Ocas]).  
member(X,[Hlava|Ocas]) :- member(X,Ocas).
```

Druhou operací se seznamy, kterou se budeme zabývat je spojení (concatenation) dvou seznamů do třetího seznamu. Pro spojení (též zřetězení) seznamů zavedeme ternární relaci:

```
conc(L1,L2,L3)
```

Zde jsou $L1$ a $L2$ dva seznamy a $L3$ jejich spojení. Například

```
conc([a,b],[c,d],[a,b,c,d])
```

je pravda, naproti tomu

```
conc([a,b],[c,d],[a,b,a,c,d])
```

je nepravda. Při definování relace `conc` budeme mít opět dva případy, závislé na prvním argumentu `L1`:

- (1) Jestliže je prvním argumentem prázdný seznam, pak musí být druhý a třetí argument stejný seznam `L`.
- (2) Jestliže první argument relace `conc` je neprázdný seznam, pak musí mít hlavu a ocas a musí vypadat takto:

```
[X|L1]
```

Výsledkem spojení seznamu `[X|L1]` a nějakého seznamu `L2` je seznam `[X|L3]`, kde `L3` je spojením seznamů `L1` a `L2`.

Oba body vyjádříme v `PROLOGu` jako jeden fakt a jedno pravidlo:

```
conc([],L,L).  
conc([X|L1],L2,[X|L3]) :- conc(L1,L2,L3).
```

Tento program již můžeme použít na spojení dvou daných seznamů, například:

```
?- conc([a,b,c],[1,2,3],L).
```

```
L=[a,b,c,1,2,3].
```

Přestože program `conc` vypadá poněkud jednoduše, může být flexibilně využit i jinými způsoby. Například můžeme `conc` využít obráceným způsobem pro rozklad daného seznamu na dva seznamy, například takto:

```
?- conc(L1,L2,[a,b,c]).
```

```
L1=[]
```

```
L2=[a,b,c];
```

```
L1=[a]
```

```
L2=[b,c];
```

```
L1=[a,b]
```

```
L2=[c];
```

```
L1=[a,b,c]
```

```
L2=[].
```

Je tedy možné seznam $[a, b, c]$ rozložit čtyřmi různými způsoby, které všechny našel náš program `conc` přes `backtracking`.

Snadno si rozmyslíme, jak přidat (`add`) do seznamu položku na první místo. Nová položka se tak stane novou hlavou seznamu. Jestliže X je nová položka a L je seznam, ke kterému má být X přidáno, pak má výsledný seznam tvar:

```
[X|L]
```

Nepotřebujeme tedy proceduru pro přidávání nového prvku na začátek seznamu. Nicméně, kdybychom ji chtěli explicitně definovat, tak ji můžeme vytvořit jako následující fakt:

```
add(X,L,[X|L]).
```

Dále se budeme zabývat vymazáním (`delete`) prvku X ze seznamu L . Použijeme k tomu relaci

```
del(X,L,L1)
```

kde $L1$ je rovno seznamu L bez prvku X . Relace `del` bude definována podobně jako relace `member`. Opět máme dva případy:

- (1) Jestliže X je hlavou seznamu, pak výsledkem po smazání je ocas seznamu.
- (2) Jestliže se prvek X vyskytuje v ocasu seznamu, pak je odtud smazán.

```
del(X,[X|Ocas],Ocas).  
del(X,[Y|Ocas],[Y|Ocas1]) :- del(X,Ocas,Ocas1).
```

Podobně jako u výše zavedené operace náležení (`member`) je relace `del` nedeterministická. Pokud má X více výskytů v seznamu, pak je `del` schopna smazat každý z nich pomocí `backtrackingu`. Samozřejmě každé alternativní provedení smaže pouze jeden výskyt X , přičemž ostatní výskyty zůstanou zachovány. Například:

```
?- del(a,[a,b,a,a],L).  
  
L=[b,a,a];  
L=[a,b,a];  
L=[a,b,a].
```

Relace `del` neuspěje, pokud seznam neobsahuje položku, která má být smazána, například:

```
?- del(x,[a,b,c,d],List).  
  
false.
```

Relace `del` může být použita také jiným způsobem. Například, pokud chceme vložit prvek `a` do seznamu `[1,2,3]`, můžeme to udělat tak, že položíme dotaz: co je `L`, když po vymazání prvku `a` z `L` získáme seznam `[1,2,3]`?

```
?- del(a,L,[1,2,3]).  
  
L=[a,1,2,3];  
L=[1,a,2,3];  
L=[1,2,a,3];  
L=[1,2,3,a].
```

Operaci vložení (`insert`) prvku `X` na libovolné místo seznamu `Seznam` (dávající `VetsiSeznam`), lze zavést pravidlem:

```
insert(X,Seznam,VetsiSeznam) :-  
    del(X,VetsiSeznam,Seznam).
```

Permutace

Občas je užitečné vygenerovat všechny permutace daného seznamu. Za tímto účelem definujeme relaci `perm` se dvěma argumenty. Argumenty jsou dva seznamy, takové, že jeden je permutací druhého. Záměrem je vytvářet permutace seznamu pomocí backtrackingu, jak je naznačeno v následujícím příkladu:

```
?- perm([a,b,c],P).  
  
P=[a,b,c];  
P=[a,c,b];  
P=[b,a,c];  
...
```

Program pro generování permutací bude opět založen na uvážení dvou případů souvisejících s prvním seznamem:

- (1) Jestliže je první seznam prázdný, musí být i druhý seznam prázdný.
- (2) Je-li první seznam neprázdný, tedy je ve tvaru $[X|L]$, pak nejprve vytvoříme permutace seznamu L , čímž obdržíme seznam $L1$, do kterého poté stačí vložit prvek X na každou možnou pozici.

Těmito dvěma případy odpovídají tyto dvě PROLOGovské klauzule:

```
perm([], []).
perm([X|L], P) :- perm(L, L1), insert(X, L1, P).
```

Například pro dotaz

```
?- perm([cervena, modra, bila], P).
```

dostaneme jako výsledek všech šest permutací:

```
P=[cervena, modra, bila];
P=[cervena, bila, modra];
P=[modra, cervena, bila];
P=[modra, bila, cervena];
P=[bila, cervena, modra];
P=[bila, modra, cervena].
```

Pokud ale zadáme dotaz ve tvaru

```
?- perm(L, [a, b, c]).
```

dostane se program do nekonečné smyčky, Je proto na místě nezbytná obezřetnost.

Základy aritmetiky

V této části se krátce zaměříme na základní aritmetické operace a jejich vyhodnocování.

Nejprve si představíme některé předdefinované operátory:

+	sčítání
-	odčítání
*	násobení
/	dělení

****** mocnina
// celočíselné dělení
mod modulo, zbytek po celočíselném dělení.

Jedná se o výjimečný případ, kdy se operátor může chovat jako operace. V takových případech je však nutná další indikace k provádění aritmetických výpočtů. Následující dotaz je naivním pokusem o aritmetický výpočet:

```
?- X=1+2.
```

PROLOG totiž odpoví

```
X=1+2.
```

a ne $X=3$, jak jsme nejspíše očekávali. Důvod je jednoduchý: výraz $1+2$ pouze označuje PROLOGovský term, kde $+$ je funktor a 1 a 2 jsou jeho argumenty. V posledním dotazu není nic, co by iniciovalo výpočet (aktivovalo operaci sčítání). Tento problém řeší předdefinovaný operátor `is`. Právě operátor `is` vynucuje vyhodnocení. Správný způsob k vyvolání vyhodnocení aritmetického výrazu je:

```
?- X is 1+2.
```

Nyní bude odpověď

```
X=3.
```

Sčítání zde bylo provedeno zvláštním postupem, pomocí speciální procedury¹³⁾, která je spojena (asociována) s operátorem `is`. Podobně fungují i další výše uvedené předdefinované operátory. Vyzkoušejme některé položením složeného dotazu:

```
?- X is 5/2, Y is 5//2, Z is 5 mod 2.
```

```
X=2.5,  
Y=2,  
Z=1.
```

¹³⁾ Takové procedury nazýváme vestavěné, anglicky built-in procedures.

Levým argumentem operátoru `is` je jednoduchý objekt. Pravým argumentem je aritmetický výraz složený z aritmetických operátorů, čísel a proměnných (jejichž hodnoty musí být při provádění výpočtu známy).

V PROLOGu také můžeme porovnávat aritmetické výrazy, jako například, zda-li je součin čísel 277 a 37 větší než 10000:

```
?- 277*37>10000.
```

```
true.
```

Poznamenejme, že podobně jako `is`, operátor „>“ vynutí vyhodnocování.

Představme si operátory pro porovnávání:

$X > Y$ X je větší než Y

$X < Y$ X je menší než Y

$X \geq Y$ X je větší nebo rovno než Y

$X \leq Y$ X je menší nebo rovno než Y

$X =: Y$ hodnoty X a Y jsou stejné

$X = \backslash Y$ hodnoty X a Y nejsou stejné.

Dodejme ještě, že operátor „=“ se podstatně liší od operátoru „=:“.
Rozdíly si nejprve demonstřujeme na konkrétních příkladech:

```
?- 1+2=:2+1.
```

```
true.
```

```
?- 1+2=2+1.
```

```
false.
```

```
?- 1+A=B+2.
```

```
A=2,
```

```
B=1.
```

Například, máme-li dotazy ve tvaru „ $X=Y$ “ a „ $X=:Y$ “, pak první z nich způsobuje porovnání objektů X a Y a může (pokud se X a Y shodují) konkretizovat hodnoty proměnných, které se v nich vyskytují. Na druhou stranu

druhý operátor „:=“ způsobuje aritmetické vyhodnocení a nemůže být nikdy použit ke konkretizaci hodnot proměnných.

Dále si ukážeme dva příklady, na kterých demonstrujeme použití aritmetických operací. První bude výpočet faktoriálu, zatímco druhý bude sloužit k určení počtu položek daného seznamu.

Uvažme následující program v PROLOGu:

```
factorial(0,1).
factorial(N,X) :-
    N >= 1,
    M is N-1,
    factorial(M,R),
    X is R*N.
```

Jak snadno ověříte, daný program umožňuje pro dané nezáporné celé číslo n vypočítat jeho faktoriál, tedy hodnotu $n!$. Například na dotaz `factorial(6,X)` vrátí PROLOG odpověď `X=720`.

Vyzkoušejte, zda si PROLOG poradí i s velkou hodnotou, například položením následujícího dotazu:

```
factorial(20000,X).
```

Druhým příkladem je určení délky seznamu. I zde se nám bude hodit aritmetika. Budeme totiž počítat počet položek v seznamu. K tomuto účelu definujeme proceduru `delka(Seznam,N)` se dvěma argumenty, která bude počítat prvky v seznamu `Seznam` a v `N` zaznamenávat jejich počet. Jistě bude užitečné uvažovat dva případy:

- (1) Jestliže je seznam prázdný, pak je jeho délka 0.
- (2) Je-li seznam neprázdný, tedy je ve tvaru `Seznam=[Hlava|Ocas]`, pak je jeho délka rovna číslu 1 plus délka ocasu `Ocas`.

Tyto dva případy korespondují s následujícím programem:

```
delka([],0).

delka([_|Ocas],N) :-
    delka(Ocas,N1),
    N is 1+N1.
```

Program je hotov. Zkuste si sami rozmyslet, co by se stalo, kdybychom

v něm prohodili poslední dva řádky. My program vyzkoušíme položením jednoho konkrétního dotazu:

```
?- delka([a,b,[c,d],e],N).
```

```
N=4.
```

Závěrem

PROLOG je programovací jazyk zvláště vhodný pro problémy, které zahrnují objekty a vztahy mezi nimi. Silným nástrojem pro vytváření programů v PROLOGu je rekurze. Programy v jazyku PROLOG se skládají z výrazů, které tvoří fakta a pravidla. Zvláštní výrazy, které nejsou přímou součástí programů, jsou dotazy, někdy nazývané cíle. Programy v PROLOGu slouží k vyjádření (popisu) naší znalostní báze. Programy píšeme v roli „programátorů“, pomocí cílů aktivujeme výpočet, přičemž cíle zadáváme v roli „uživatelů“ vytvořeného programu.

Seznámili jsme se se seznamy, v PROLOGu často používanými datovými strukturami. Víme, že seznam je buď prázdný, nebo sestává z „hlavy“ a „ocasů“, který je také seznamem. V souvislosti s operacemi se seznamy, umíme naprogramovat relaci pro: náležením do seznamu, spojení dvou seznamů, přidání prvku do seznamu, smazání prvku ze seznamu. Dozvěděli jsme se, že aritmetika je v PROLOGu spjata s vestavěnými procedurami. Vyhodnocení¹⁴⁾ aritmetického výrazu je zajištěno přes proceduru `is` a také pomocí operátorů pro porovnávání: `<`, `<=` atd. Poznali jsme také vestavěné procedury asociované s předdefinovanými operátory: `+`, `-`, `*`, `/` a podobně.

Z prostorových důvodů jsme nepředstavili pokročilejší techniky, které umožňují ovlivňovat výpočetní proces, například tzv. řezy s jejichž pomocí je snadné naprogramovat cykly, podmíněné výrazy a pracovat s negací. Dodejme, že PROLOG je plnohodnotným programovacím jazykem, ve kterém lze naprogramovat veškeré algoritmy (třeba algoritmy třídící či nějaký složitý expertní systém).

Literatura

- [1] *Bratko, I.: PROLOG Programming for Artificial Intelligence (4th Edition).* Pearson Education Canada, 2011.

¹⁴⁾Při vyhodnocování aritmetického výrazu musí mít všechny argumenty číselné hodnoty.

Vlastnické vztahy

(Úlohy z MO kategorie P, 47. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V dnešním pokračování se seznámíme s jednou soutěžní úlohou z domácího kola 44. ročníku Matematické olympiády kategorie P (programování). Tento ročník olympiády probíhal ve školním roce 1994/95, tedy před téměř třiceti lety. Zadání úlohy je poměrně krátké a uvedeme ho sice v původní podobě, ale s drobnými formulačními úpravami, které přispějí k vyjasnění a upřesnění řešené úlohy.

* * * * *

Občas se stává, že některé společnosti jsou *částečnými vlastníky* jiných společností, neboť získaly část jejich akcií. Jedna společnost může vlastnit například 12 % akcií jiné společnosti. Řekneme, že společnost A *kontroluje* společnost B, pokud

- buď společnost A vlastní více než 50 % akcií společnosti B,
- nebo společnost A vlastní p procent společnosti B a zároveň kontroluje k ($k \geq 1$) společností $C_1, \dots, C_k$ takových, že C_i vlastní x_i procent společnosti B (pro všechna i , $1 \leq i \leq k$) a přitom platí $p + x_1 + \dots + x_k > 50$.

Je zadán celkový počet všech společností n , jednotlivé společnosti si označíme čísly do 1 do n . Dále je dán seznam trojic celých čísel (i, j, p) , které znamenají, že společnost i vlastní p % společnosti j . Platí $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq p \leq 100$.

Napište program, který v co nejkratším čase určí všechny dvojice (i, j) takové, že společnost i kontroluje společnost j . Výsledek ve formě seznamu dvojic (i, j) uspořádejte podle rostoucí hodnoty i .

* * * * *

Vlastnickou strukturu společností si můžeme znázornit pomocí orientovaného grafu s ohodnocenými hranami. Vrcholy tohoto grafu budou představovat společnosti, hrany grafu reprezentují vlastnické vztahy. Orientovaná hrana vedoucí v grafu z vrcholu i do vrcholu j s ohodnocením p znamená, že společnost i vlastní p procent společnosti j . Seznam trojic čísel zadaný na vstupu programu je tedy přesně výčtem hran uvažovaného grafu.

Popsaný graf můžeme reprezentovat v našem programu některým ze standardních způsobů uložení grafu – například pomocí matice ohodnocení hran nebo pomocí seznamů následníků jednotlivých vrcholů. Pokud zvolíme matici ohodnocení hran, pak budeme pracovat se čtvercovou maticí m , v níž hodnota $m[i, j] = p$ představuje orientovanou hranu z vrcholu i do vrcholu j s ohodnocením p . Znamená tedy, že společnost i vlastní p procent společnosti j .

Dříve, než přistoupíme k vlastnímu řešení úlohy, uvědomíme si několik důležitých skutečností:

1. Nejjednodušším způsobem, jak může společnost A kontrolovat společnost B, je přímo vlastnit více než 50 % akcií společnosti B. Tomu odpovídá hrana v grafu s ohodnocením větším než 50.

2. Pokud cizí společnosti vlastní dohromady nejvýše 50 % akcií společnosti B, pak zcela jistě nikdo nemůže kontrolovat společnost B. Tato situace odpovídá tomu, že součet ohodnocení všech hran vedoucích do vrcholu B je roven nejvýše 50.

3. Společnost B nemusí nikdo kontrolovat, ani když jiné společnosti vlastní třeba i všechny její akcie – to nastane, pokud například společnosti C_1 , C_2 vlastní každá 50 % akcií společnosti B a přitom akcie společnosti C_1 , C_2 nikdo jiný nevlastní.

4. Ke kontrolování nějaké společnosti je zapotřebí ovládat (přímo nebo nepřímo) více než polovinu jejích akcií a to může vždy nejvýše jedna společnost.

5. V orientovaném grafu znázorňujícím vlastnické vztahy společností mohou být obsaženy cykly – například společnost A může být částečným vlastníkem společnosti B, společnost B částečným vlastníkem společnosti C a společnost C částečným vlastníkem společnosti A.

Pojem „kontrolovat společnost“ je definován rekurzivně, takže se přirozeně nabízí využít rekurzi i při návrhu řešení. První varianta řešení bude proto velmi jednoduchá a názorná.

Sestrojíme rekurzivní funkci *kontroluje*(*i*, *j*), která bude přesně podle definice určovat, zda společnost *i* kontroluje společnost *j*. Nejprve snadno ověříme platnost podmínek podle bodu 1 a 2 z předchozího odstavce. Kontrola první podmínky je přímočará: jednoduše otestujeme, zda platí $m[i, j] > 50$. Jestliže ano, funkce rovnou vrátí hodnotu **True**. Také otestování druhé podmínky je jednoduché: pokud součet ohodnocení všech hran, které vstupují do vrcholu *j*, nebude větší než 50, pak je zjevně správnou odpovědí **False**. Jestliže naopak součet ohodnocení všech hran vstupujících do vrcholu *j* převyšuje hodnotu 50, pak musíme ověřit, zda je mezi nimi taková skupina hran se součtem ohodnocení větším než 50, které vycházejí z vrcholů kontrolovaných vrcholem *i* (včetně případné hrany z vrcholu *i* samotného). To zjistíme opakovaným rekurzivním voláním *kontroluje*(*i*, *k*) pro všechny vrcholy *k*, z nichž vede hrana do *j*.

Rekurzivní funkce na určení, zda společnost *i* kontroluje společnost *j*, může vypadat třeba takto:

```
def kontroluje(i, j): # ověření, zda "i" kontroluje "j"
    if m[i][j] > 50:
        return True # přímé vlastnictví (hrana > 50)
    suma = 0
    for k in range(1, n+1):
        suma += m[k][j]
    if suma <= 50:
        return False # součet všech vstupních hran <= 50
    suma = 0
    for k in range(1, n+1):
        if k == i or (m[k][j] > 0 and kontroluje(i, k)):
            suma += m[k][j]
    if suma > 50:
        return True
    return False
```

Právě popsanou funkci *kontroluje*(*i*, *j*) zavoláme postupně pro všechny dvojice společností *i*, *j*. Dvojice s kladnou odpovědí uložíme do výsledného seznamu nebo je ve správném pořadí budeme přímo vypisovat:

```
n = int(input("Počet společností: "))
m = [[0] * (n+1) for _ in range(n+1)]
# matice ohodnocení hran
v = int(input("Počet vlastnických vztahů: "))
print("Vztahy: KDO vlastní KOHO a KOLIK procent")
```

```

for h in range(v):
    i, j, p = [int(c) for c in input().split()]
    m[i][j] = p

for i in range(1, n+1):
    for j in range(1, n+1):
        if kontroluje(i, j):
            print(i, j)      # výsledky: kdo koho kontroluje

```

Dvourozměrné pole m zde představuje matici ohodnocení jednotlivých hran a slouží tedy jako datová reprezentace grafu, který zobrazuje vlastnické vztahy mezi společnostmi. Nulová hodnota $m[i][j]$ znamená, že společnost i nevlastní žádný podíl ve společnosti j , neboli v grafu neexistuje orientovaná hrana z vrcholu i do vrcholu j . Všimněte si, že ačkoliv máme n společností, matice m je v programu definována o rozměrech $(n+1) \times (n+1)$. To je ale jenom technická záležitost způsobená skutečností, že všechny seznamy se v Pythonu (i v mnoha jiných programovacích jazycích) indexují od 0, zatímco společnosti jsou podle zadání úlohy očíslovány od 1 do n . Prvky pole m s indexem 0 k ničemu nevyužíváme.

Výše uvedené řešení vypadá na první pohled správně a celkem elegantně, ale má jednu dost podstatnou vadu: pro některá vstupní data nefunguje správně. Program dává správné výsledky tehdy, pokud ve vlastnických vztazích společností nejsou žádné cyklické závislosti, neboli pokud uvažovaný graf neobsahuje žádné orientované cykly. V případě existence cyklů v grafu se ovšem může stát, že se výpočet programu dostane do nekonečné smyčky rekurzivních volání. Můžete se o tom sami přesvědčit na takto jednoduchých vstupních datech: máme 4 společnosti a mezi nimi 8 vlastnických vztahů (1 2 30), (2 1 30), (1 4 30), (4 1 30), (3 2 40), (2 3 40), (3 4 40), (4 3 40). Pro výpočet hodnoty $kontroluje(1, 2)$ potřebujeme znát hodnotu $kontroluje(1, 3)$, k jejímu určení se ovšem zavolá $kontroluje(1, 2)$, a tak stále dokola.

Abychom naše řešení opravili, doplníme funkci $kontroluje(i, j)$ o evidenci, s jakými hodnotami parametrů (i, j) jsme ji v aktuálním rekurzivním řetězci volání již zavolali. Díky tomu ji se stejnou dvojicí hodnot nikdy nebudeme volat opakovaně, a proto nemůže nastat nekonečná rekurze. K tomu nám poslouží globální seznam z , který bude představovat obsah volacího zásobníku v průběhu rekurzivních volání funkce $kontroluje(i, j)$. Na začátku funkce vložíme do zásobníku dvojici hodnot parametrů (i, j) a před ukončením funkce tuto dvojici ze zásobníku opět odstraníme. Ja-

kékoliv rekurzivní volání funkce provedeme pouze s takovými parametry, které se momentálně nenacházejí v seznamu z . Tím vyloučíme možnost nekonečné rekurze, ale zároveň se tím ani nepřipravíme o žádné řešení úlohy.

```

z = []                                     # volací zásobník

def kontroluje(i, j): # ověření, zda "i" kontroluje "j"
    if m[i][j] > 50:
        return True      # přímé vlastnictví (hrana > 50)
    suma = 0
    for k in range(1, n+1):
        suma += m[k][j]
    if suma <= 50:
        return False      # součet všech vstupních hran <= 50
    suma = 0
    z.append((i, j))
    for k in range(1, n+1):
        if k == i or (m[k][j] > 0 and
                       (i, k) not in z and kontroluje(i, k)):
            suma += m[k][j]
    z.pop()
    if suma > 50:
        return True
    return False

```

Použití volacího zásobníku z vyřešilo naše problémy s nekonečným výpočtem rekurzivních volání, takto opravený program již dává správné výsledky pro všechna vstupní data. Nevyřešilo ale neefektivitu výpočtu, pro rozsáhlá a komplikovaná vstupní data bude výpočet našeho programu velmi pomalý. Během výpočtu totiž může být funkce $kontroluje(i, j)$ postupně zavolána mnohokrát se stejnými vstupními parametry i, j , takže se budou zbytečně opakovaně počítat hodnoty, které jsme již někdy dříve spočítali. Snadno se o tom můžete přesvědčit, když si na úplný začátek funkce $kontroluje(i, j)$ doplníte příkaz

```
print(">>>", i, j)
```

Ten způsobí, že se při každém zavolání funkce vypíše na výstup jeden řádek s informací, s jakými hodnotami parametrů jsme funkci právě zavolali. Zkuste si sami spustit program s takto upravenou funkcí třeba se vstupními daty, která jsme před chvílí použili při řešení problému s nekonečnou rekurzí.

Ještě názorněji uvidíte rozsah problému, když použijete vstupní data s 6 společnostmi a 30 vlastnickými vztahy, kde každá společnost vlastní 20 % akcií v každé ze zbývajících pěti společností.

Zmíněnou neefektivitu odstraníme nejlépe tak, že do programu doplníme globální dvojrozměrnou tabulku t , do které si budeme ukládat všechny již spočítané výsledné návratové hodnoty funkce *kontroluje*(). Tabulku na začátku výpočtu inicializujeme hodnotami `None`. Jakmile funkce *kontroluje*(i, j) zjistí, zda společnost i kontroluje společnost j , tento výsledek `True/False` nejen vrátí jako svoji návratovou hodnotu, ale zároveň ho uloží do tabulky jako hodnotu $t[i][j]$. Kdykoliv by funkce *kontroluje*() chtěla provést rekurzivní volání s nějakou dvojicí parametrů (i, k), nejprve se podívá do tabulky t , zda potřebnou hodnotu již nemá spočítanou z dřívějšího. Pokud ano, rekurzivní volání nebude provádět, ale použije uloženou hodnotu $t[i][k]$.

Obdobnou úpravu provedeme také v hlavním programu, rovněž tam místo volání funkce *kontroluje*() použijeme hodnotu z tabulky t , pokud ji už známe z předchozího výpočtu.

```
def kontroluje(i, j): # ověření, zda "i" kontroluje "j"
    if m[i][j] > 50:
        t[i][j] = True
        return True # přímé vlastnictví (hrana > 50)

    suma = 0
    for k in range(1, n+1):
        suma += m[k][j]
    if suma <= 50:
        t[i][j] = False
        return False # součet všech vstupních hran <= 50

suma = 0
z.append((i, j))
for k in range(1, n+1):
    if k == i:
        suma += m[i][j]
        continue
    if m[k][j] == 0 or t[i][k] == False:
        continue
    if t[i][k] == True:
        suma += m[k][j]
        continue
```

```

        if (i, k) not in z and kontroluje(i, k):
            suma += m[k][j]
    z.pop()

    if suma > 50:
        t[i][j] = True
        return True
    t[i][j] = False
    return False

n = int(input("Počet společností: "))
m = [[0] * (n+1) for _ in range(n+1)]
                                # matice ohodnocení hran
z = []                          # volací zásobník
t = [[None] * (n+1) for _ in range(n+1)]
                                # tabulka známých hodnot

v = int(input("Počet vlastnických vztahů: "))
print("Vztahy: KDO vlastní KOHO a KOLIK procent")
for h in range(v):
    i, j, p = [int(c) for c in input().split()]
    m[i][j] = p

for i in range(1, n+1):
    for j in range(1, n+1):
        if t[i][j] or (t[i][j] == None and
                        kontroluje(i, j)):
            print(i, j)      # výsledky: kdo koho kontroluje

```

Popsaná úprava přináší naprosto zásadní úsporu času. Zatímco předchozí řešení úlohy mělo v nejhorším případě exponenciální časovou složitost vzhledem k počtu společností n , nyní bude funkce *kontroluje()* zavolána pro každou dvojici parametrů pouze jednou, takže časová složitost celého řešení je $O(n^2)$.

Doplnění rekurzivního řešení úlohy o pole sloužící k uložení již spočítaných hodnot je známá programovací technika, která se pro zrychlení výpočtu běžně používá a můžete se s ní setkat i při řešení mnoha jiných úloh.

LITERATURA

Bonaventura Cavalieri: Geometrie vyložená novým způsobem za pomoci nedělitelných spojitého

Při výuce objemů kosých těles se zmiňujeme o Cavalieriho principu, se kterým jsme byli seznámeni především ze sekundárních zdrojů. Karel Vašíček překladem a vydáním ve svém soukromém nakladatelství umožňuje zájemcům o historii matematiky ponořit se do myšlení a zkoumání Bonaventury Cavalieriho poněkud hlouběji.

V předmluvě autor připomíná relevantní výsledky Eukleidovy, Archimédovy i Keplerovy. Následuje *Kniha první, ve které se sdělují některé elementární znalosti, hlavně o řezech válečků a kuželíků, stejně jako obdobných těles; v ní se dokazují rovněž některá tvrzení, nosící charakter lemmat, k následujícím knihám*. Při definování pojmů i uvádění jejich vlastností Cavalieri vychází často z Eukleidových Základů, ale zmiňuje se i o dalších matematicích, mezi něž patří např. Apollonius z Pergy.

Pro zajímavost si uveďme jedno z autorových tvrzení, které v současnosti označujeme jako Cavalieriho princip pro rovinné útvary, a to ve Vašíčkově překladu originálního znění: „Když jakékoliv navzájem podobné útvary jsou sestrojeny na přímých čarách, rovných navzájem a jevících se jejich shodnými přímkami, a když tyto útvary budou navzájem naneseny takovým způsobem, že se uvedené přímé čáry při nanesení ztotožní, a útvary budou shodně rozmístěny, pak se také útvary při nanesení ztotožní.“ V závěru první knihy se dočteme informace i o parabolických či hyperbolických konoidech.

Jak je u publikací zmiňovaného nakladatelství zvykem, jsou v jedné knize uvedeny další zajímavosti, jako jsou Vašíčkovy blogy či překlady, v tomto případě to jsou János Bolyai. Apendix: Teorie prostoru či Korepondence mezi Pascalem a Fermatem aj.

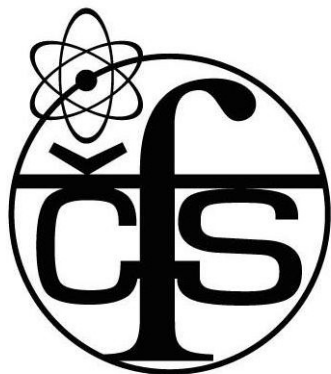
Knihu s ISBN 978-80-903838-7-6 vytiskla v nákladu 175 ks Tiskárna Reprocentrum, a. s. Blansko.

Josef Molnár

ZPRÁVY

Přehlídka popularizace fyziky 2023

Přehlídka popularizace fyziky, pořádaná Českou fyzikální společností JČMF, se konala v pátek 1. prosince 2023 na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy v Troji.



Tato akce, konaná jednou za dva roky, probíhá jako setkání organizátorů rozličných aktivit, jejichž jedním z cílů je popularizace fyziky. Celým názvem jde o „Soutěžní přehlídku významných činů ve zpřístupňování fyziky (a matematiky) veřejnosti“.

Na přehlídce byla představena široká škála projektů a aktivit, a to od popularizačních knih přes přednášky či workshopy až například po fyzikální

soutěže. Na organizaci těchto aktivit se podíleli jak vědečtí redaktoři, vysokoškolskí pedagogové, středoškolskí učitelé, tak i studenti vysokých škol či středoškoláci.

Přehlídka zdůraznila význam praktického přístupu k vědě, který je pro pochopení fyziky (a matematiky), a zapojení se do ní, nezbytný. Projekty předvedené na akci ukázaly, jak lze vědu zpřístupnit veřejnosti a přitom udržet její odbornou kvalitu a pro širokou veřejnost i atraktivitu. Takový přístup je důležitý nejen pro šíření znalostí, ale též pro inspiraci budoucích generací vědců.

V soutěžní části jsou aktivity hodnoceny, hodnotí se, zda jsou pro popularizaci fyziky skutečně přínosné. Ty oceněné získávají diplom „Významný čin v popularizaci fyziky“ či „Trvalý významný čin při popularizaci fyziky“. Tento diplom získalo nakladatelství Prometheus, a to i díky jeho podpoře časopisu Matematika–fyzika–informatika.

Odkazy na jednotlivé aktivity najdete v programu akce, na který se dostanete přes <https://prometheus-data.cz/odkaz/prehlidka-2023> – můžete se tak inspirovat a do nějaké aktivity se zapojit, a to ať už jako účastník, tak třeba i jako organizátor.

Karel Kolář