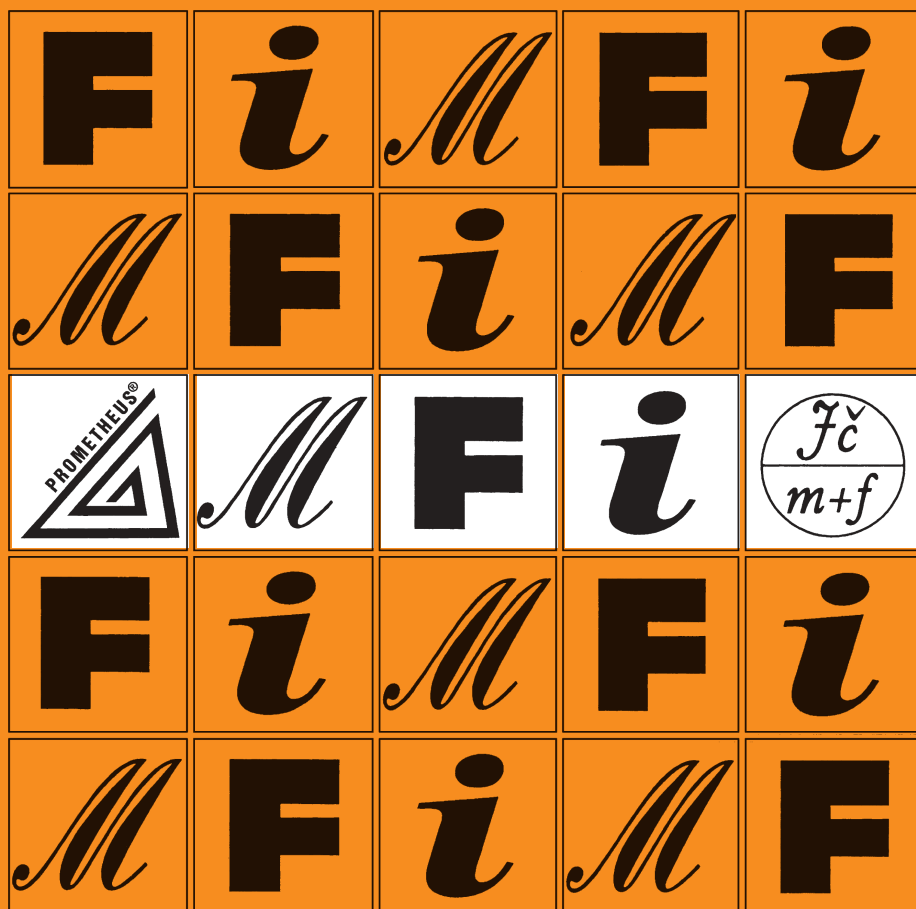


MATEMATIKA 2 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXXIII (2024), číslo 2

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku
Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek
Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška,
Karel Kolář, Michaela Křížová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil (předseda redakční rady),
Dana Mandíková, Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Jaromír Šimša,
Pavel Tlustý, Pavel Töpfer, Jaroslav Zhouf

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>P. Tlustý, I. Krech:</i> O kostkových hazardních hrách	81
<i>L. Juklová, J. Švrček:</i> Tětivové a tečnové pětiúhelníky	86
<i>M. Škorpilová:</i> Obsahy rovinných útvarů	93
<i>P. Leischner:</i> Ortocentrum trojúhelníku	100
Zajímavé matematické úlohy	108

FYZIKA

<i>D. Dvořák, I. Fikáčková:</i> O jedné zajímavé aplikaci druhého termodynamického zákona	111
<i>Č. Kodejška:</i> Nepřímé měření výstupního napětí Van de Graaffova generátoru	121
<i>J. Hošková Prokšová:</i> Sir William Thomson (ke dvoustému výročí narození)	129

INFORMATIKA

<i>Š. Gergelitsová, T. Holan:</i> Dělení kostky na vlastní oči	135
<i>E. Bartl:</i> Počítačová grafika, 4. díl	144

ZPRÁVY A INFORMACE

<i>P. Calábek:</i> Ústřední kolo 73. ročníku MO kategorie A	151
<i>P. Calábek:</i> Český úspěch na 13. Evropské dívčí matematické olympiádě	153
<i>L. Richterek:</i> Celostátní kolo FO 2024	155
<i>P. Töpfer:</i> Ústřední kolo 73. ročníku MO kategorie P	158

MATEMATIKA

O kostkových hazardních hrách

PAVEL TLUSTÝ – IRENEUSZ KRECH

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice – Uniwersytet komisji edukacji narodowej, Kraków, POLSKO

Pochopení základních principů hazardních her je jeden ze způsobů ochrany proti gamblerství. Umožňuje hráči racionálně myslet a vrátit se zpět do reality.

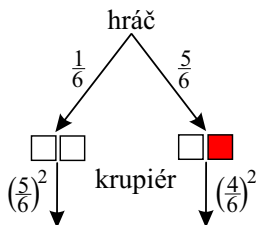
Hazardní hra je hra, jejíž výsledek závisí na náhodě. První zmínky o takových hrách najdeme v zemích Blízkého a Dálného východu již asi 4 tisíc let př. n. l. Kostkové hry byly velmi populární i ve starověkém Řecku a Římě. Ale teprve v 17. století matematici P. Fermat a B. Pascal, inspirováni problémy spojenými s hazardními hrami, začali řešit obecné otázky spojené s náhodou. Hledání racionálních herních strategií, optimálních rozhodnutí, zkoumání společných (i rozdílných) rysů více her, výpočet očekávaných zisků hráče a kasina atd., to byly problémy, které postupně vedly až ke vzniku zcela nové matematické disciplíny, kterou dnes známe jako *teorie pravděpodobnosti*. Ta v současnosti představuje velmi důležitou oblast matematiky, která jednak tvoří teoretický základ pro matematickou statistiku, ale má i široké pole praktických aplikací.

Cílem příspěvku je na třech konkrétních hazardních hrách ukázat základní ideu „pravděpodobnostního“ uvažování a metody řešení elementárních pravděpodobnostních úloh. Všechny tři níže uvedené úlohy jsou reálné hry, které pocházejí z nejrůznějších koutů světa.

Úloha 1 (2 kostky)

Hráč vsadí s Kč a dostane 2 hrací kostky, se kterými hodí. Pak hodí dvěma kostkami krupiéř. Pokud krupiéřovi padlo aspoň jedno stejné číslo jako padlo hráči, krupiéř vítězí v dané hře a získává hráčem vsazenou částku. V opačném případě vyhrává hráč a krupiéř mu vyplatí výhru $2s$ Kč. Je uvedená hra pro hráče výhodná?

Řešení. K posuzování výhodnosti nebo nevýhodnosti konkrétní hazardní hry se obvykle používá střední hodnota výhry (náhodné veličiny) hráče. Vypočítejme nejprve pravděpodobnost výhry hráče. K tomu využijeme obr. 1.



Obr. 1 Strom pro výpočet pravděpodobnosti výhry hráče

Při hodu dvěma kostkami mohou hráči padnout dvě stejná čísla, což nastane s pravděpodobností $\frac{1}{6}$ (na obr. 1 to schématicky značíme □□), nebo mu s pravděpodobností $\frac{5}{6}$ padnou dvě různá čísla (na obr. 1 to znázorňujeme □■). V prvním případě hráč vyhraje, pokud krupiéroví nepadne □, tj. může mu padnout kterékoli ze zbývajících pěti čísel. Ve druhém případě hráč vyhraje, pokud krupiéroví nepadne žádné z čísel □■, tj. může mu padnout kterékoli ze zbývajících čtyř čísel. Odtud dostáváme

$$P(\text{hráč vyhraje}) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{35}{72} \doteq 0,486.$$

Střední hodnota výhry hráče je tedy

$$EX = 2s \cdot 0,486 + 0 \cdot (1 - 0,486) = 0,972s.$$

Po skončení hry má hráč „v průměru“ méně než na začátku hry, a proto je tato hra pro něj nevýhodná. Krupier získává v průměru

$$(1 - 0,972)s = 0,028s,$$

tj. 2,8 % ze vsazené částky.

Úloha 2 (12 kostek)

Hráč vsadí s Kč a dostane 12 hracích kostek, se kterými háže. Pokud mu padne aspoň jednou každé z čísel 1, 2, ..., 6, kasino mu vyplatí $2s$ Kč. V opačném případě je vsazená částka ziskem kasina. Je uvedená hra pro hráče výhodná?

Řešení. Matematickým modelem uvedené hry je klasický pravděpodobnostní prostor (všechny možné výsledky hodu 12 kostkami považujeme za stejně pravděpodobné). V takovém prostoru je pravděpodobnost jevu dána podílem počtu výsledků jevu příznivých a počtu všech možných výsledků.

Hod 12 kostkami má celkem 6^{12} různých výsledků. Určíme počet výsledků, kdy nepadne žádné z čísel 1, 2, ..., 6.

Použitím *principu inkluze a exkluze* dostaneme, že takových výsledků je celkem

$$\binom{6}{1} \cdot 5^{12} - \binom{6}{2} \cdot 4^{12} + \binom{6}{3} \cdot 3^{12} - \binom{6}{4} \cdot 2^{12} + \binom{6}{5} \cdot 1^{12}.$$

Tedy číslo

$$6^{12} - \binom{6}{1} \cdot 5^{12} + \binom{6}{2} \cdot 4^{12} - \binom{6}{3} \cdot 3^{12} + \binom{6}{4} \cdot 2^{12} - \binom{6}{5} \cdot 1^{12}$$

představuje počet všech možných výsledků hodu 12 kostkami, v nichž padne každé z čísel 1, 2, ..., 6 aspoň jedenkrát. Pravděpodobnost výhry hráče je

$$\frac{6^{12} - \binom{6}{1} \cdot 5^{12} + \binom{6}{2} \cdot 4^{12} - \binom{6}{3} \cdot 3^{12} + \binom{6}{4} \cdot 2^{12} - \binom{6}{5} \cdot 1^{12}}{6^{12}} \doteq 0,438.$$

Střední hodnota výhry hráče je tedy

$$EX = 2s \cdot 0,438 + 0 \cdot (1 - 0,438) = 0,876s.$$

Po skončení hry má hráč „v průměru“ méně než na začátku hry, a proto je tato hra pro něj nevýhodná. Bankéř získává v průměru

$$(1 - 0,876)s = 0,124s,$$

tj. 12,4 % ze vsazené částky.

Úloha 3 (n kostek)

Hráč vsadí s Kč a může si zvolit své „šťastné číslo“ (od 1 do 6) i počet hracích kostek, s kterými bude házet. Pokud mu padne jeho šťastné číslo právě jednou, kasino mu vyplatí $2s$ Kč. V opačném případě je vsazená částka ziskem kasina. Kolika kostkami má hráč házet, aby jeho šance na výhru byla maximální? Je tato hra pro hráče výhodná?

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že možnost volby šťastného čísla je jen marketingový tah kasina. Ze symetrie je zřejmé, že nezáleží na tom, které z čísel 1, 2, ..., 6 si hráč zvolí. Pravděpodobnostní model je pro všechna čísla stejný.

Předpokládejme, že hráč si vybral za své šťastné číslo třeba 3 a bude házet n kostkami. K tomu, aby vyhrál, je nutné, aby právě na jedné z n kostek padla 3. Tento jev nastane s pravděpodobností

$$n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}. \quad (1)$$

Zbývá určit, pro která n nabývá výraz (1) maximální hodnoty. Takové n musí splňovat nerovnosti

$$(n-1) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \leq n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

a

$$n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \geq (n+1) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Z první nerovnosti dostaneme podmínku $n \leq 6$, druhá nerovnost vede na podmínku $n \geq 5$. Vypočteme hodnoty výrazu (1) pro $n = 5$ a $n = 6$.

$n = 5$:

$$5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3\,125}{7\,776} \doteq 0,402$$

$n = 6$:

$$6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{3\,125}{7\,776} \doteq 0,402$$

Optimální rozhodnutí je tedy házet pěti nebo šesti kostkami. V obou případech je pravděpodobnost hráčovy výhry 0,402.

Střední hodnota výhry hráče je

$$EX = 2s \cdot 0,402 + 0 \cdot (1 - 0,402) = 0,804s$$

Po skončení hry má hráč „v průměru“ méně než na začátku hry, a proto je hra pro něj nevýhodná. Bankéř získává v průměru téměř 20 % ze vsazené částky.

V současné době existuje celá řada nejrůznějších hazardních her – ruleta, keno, craps, chuck-a-luck, sportka, šťastných 10, různé kostkové hry, hrací automaty a mnohé další. Všechny tyto hry mají jedno společné –

jejich matematický model je vytvořen tak, aby „střední hodnota“ výhry byla pro provozovatele hazardní hry kladná. Tedy provozovatel hazardní hry (při mnoha opakováních této hry) má zaručen s velmi vysokou pravděpodobností zisk. To však v *žádném případě neznamená*, že musí být nutně všichni hráči ve ztrátě.

I když každá z uvedených hazardních her je pro hráče nevýhodná, přece jen mezi nimi existují významné rozdíly. Ty spočívají v tom, jaká část z hráčem vložené částky připadne „v průměru“ provozovateli hry. Rozumný hráč se pak samozřejmě snaží vybrat si takovou hru, kde je tento podíl procentuálně nejmenší. Následující tabulka ukazuje porovnání některých běžně dostupných hazardních her právě z tohoto úhlu pohledu.

název hry	podíl z hráčova vkladu, který připadne v „průměru“ provozovateli
francouzská ruleta	2,7 %
americká ruleta	5,3 %
chuck-a-luck	7,9 %
hrací automaty	od 20 % (v závislosti na typu)
keno, šťastných 10	i 50 % (v závislosti na výplatní tabulce)

Tab. 1 Porovnání „výhodnosti“ hazardních her

Racionální je tedy nehrát vůbec. Pokud se už rozhodneme hrát, tak si vybereme hru, ve které je střední hodnota výhry co možná největší. Na prohranou částku pak nahlédneme jako na poplatek za možnost si zahrát a pobavit se.

Literatura

- [1] *Płocki, A., Tlustý, P.*: Kombinatoryka wokół nas. 3. vydání. Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 2017.
- [2] *Płocki, A., Tlustý, P.*: Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé. Prometheus, Praha, 2007.

Tětivové a tečnové pětiúhelníky

LENKA JUKLOVÁ – JAROSLAV ŠVRČEK

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

V článcích [3] a [4], na něž náš příspěvek navazuje, jsou uvedeny (a příklady doplněny) některé zajímavé vlastnosti konvexních (speciálně též pravidelných) pětiúhelníků. V tomto příspěvku budou prezentovány na bázi řešených úloh méně známé vlastnosti tzv. *tětivových*, resp. *tečnových* pětiúhelníků, tj. pětiúhelníků, jimž lze opsat, resp. vepsat kružnici. Uvedené téma není obsahem základního učiva geometrie na našich základních a středních školách, přesto je tato problematika poměrně frekventovaná v různých matematických soutěžích pro žáky SŠ i ZŠ. Článek je určen především těm učitelům, kteří pracují s matematicky nadanými žáky, a také dalším zájemcům o uvedenou problematiku.

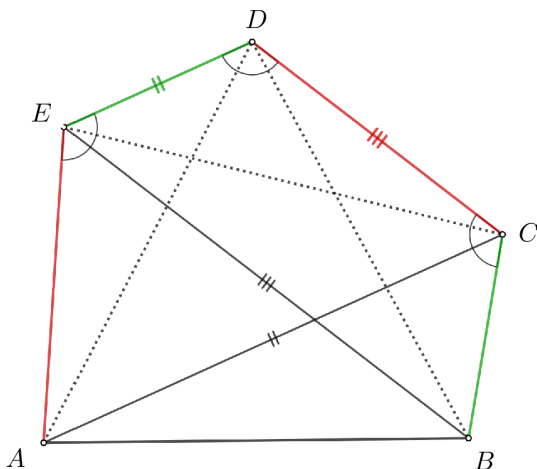
V další části uvedeme pětici řešených úloh, jež se týkají tětivových a tečnových čtyřúhelníků. Prezentované úlohy popisují jisté netriviální vlastnosti těchto speciálních pětiúhelníků. V jejich řešeních přitom podstatným způsobem využíváme (ze školské matematiky známé) vlastnosti tětivových a tečnových čtyřúhelníků.

Tětivové pětiúhelníky

Příklad 1 (XV. Matematický Duel, 2007, B–I–3, J. Švrček, viz [2])

Je dán konvexní pětiúhelník $ABCDE$ se shodnými vnitřními úhly při vrcholech C , D a E , v němž $|BC| = |DE|$ a $|CD| = |EA|$. Dokažte, že tento pětiúhelník je *tětivový*.

Řešení. Ze zadání plyne, že trojúhelníky ADE , CED a DBC jsou shodné (podle věty *sus*). Trojúhelníky ADE , CED mají shodné výšky z vrcholů A a C ke straně DE (obr. 1). Odtud plyne $AC \parallel DE$, a tedy $ACDE$ je rovnoramenný lichoběžník se základnami AC a DE . Podobně ukážeme, že také $EBCD$ je rovnoramenný lichoběžník se základnami EB a CD . Oba uvedené lichoběžníky jsou přitom tětivové. Vzhledem k tomu, že vrcholy C , D , E daného pětiúhelníku leží na *téže* kružnici (opsané trojúhelníku CDE), jsou obě kružnice opsané rovnoramenným lichoběžníkům $ACDE$ a $EBCD$ *identické*, a tudíž i vrcholy A , B leží na této kružnici.



Obr. 1

Závěr. Daný pětiúhelník $ABCDE$ je tedy tětívový, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 2

Je dán *tětívový* pětiúhelník $ABCDE$, v němž $|AB| = |BC|$. Označme K průsečík jeho úhlopříček AD a BE . Dále necht' L značí průsečík jeho úhlopříček BD a CE . Dokažte, že přímky KL a AC jsou rovnoběžné.

Řešení. Protože podle zadání platí $|AB| = |BC|$, jsou přímky BD , BE osami vnitřních úhlů po řadě při vrcholech D , E v trojúhelnících ACD , ACE .

Vzhledem k tomu, že $ABCDE$ je tětívový pětiúhelník, platí $|\sphericalangle ADC| = |\sphericalangle AEC|$ (obr. 2), a tedy

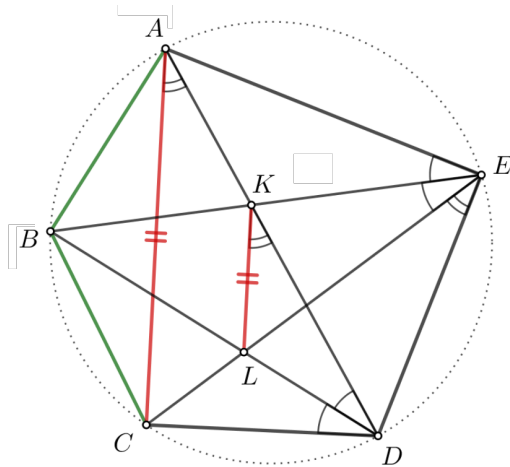
$$|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle BEC|.$$

Čtýřúhelník $KLDE$ je tedy tětívový, a platí tudíž

$$|\sphericalangle LKD| = |\sphericalangle LED| = |\sphericalangle CED| = |\sphericalangle CAD|.$$

Úhly LKD a CAD jsou tedy souhlasné, a proto jsou přímky KL a AC rovnoběžné.

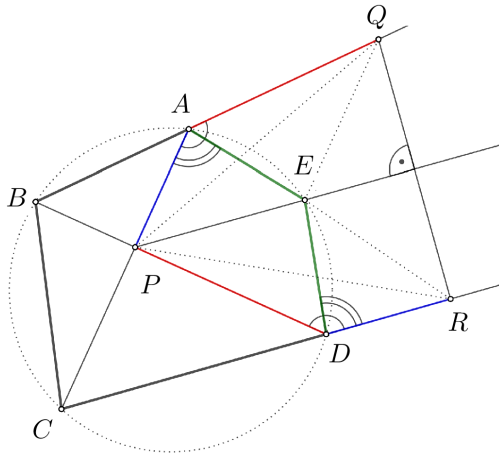
Tím je důkaz uzavřen.



Obr. 2

Příklad 3 (Kanadská MO, 2018)

Je dán tětívový pětiúhelník $ABCDE$, v němž $|DE| = |AE|$. Necht' P značí průsečík jeho úhlopříček AC a BD . Dále necht' Q je bod na polopřímce opačné k AB , kde $|AQ| = |PD|$, a R je bod na polopřímce opačné k DC , kde $|DR| = |PA|$. Dokažte, že přímky PE a QR jsou navzájem kolmé.



Obr. 3

Řešení. Ze zadání je patrné, že $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDC|$. Navíc platí

$$|\sphericalangle QAP| = |\sphericalangle QAC| = |\sphericalangle RDB| = |\sphericalangle RDP|.$$

Trojúhelníky APQ a DRP jsou tedy shodné (*sus*), proto $|PR| = |PQ|$. Bod P tak leží na ose úsečky RQ .

Z tětívového čtyřúhelníku $ACDE$ plyne

$$|\sphericalangle CAE| = |\sphericalangle PAE| = |\sphericalangle RDE|,$$

tudíž trojúhelníky PAE a RDE jsou shodné (*sus*), a tedy $|PE| = |RE|$.

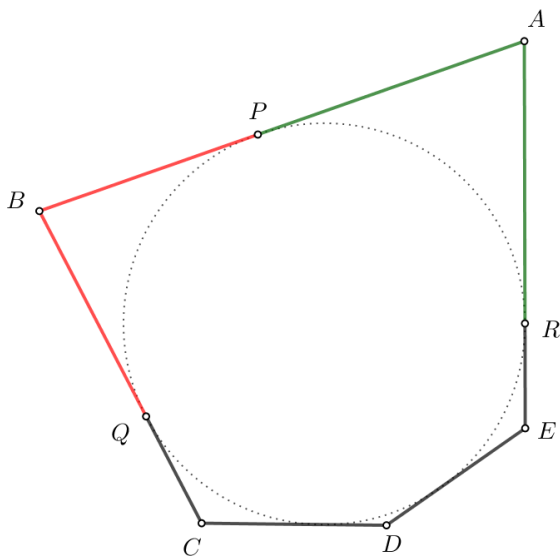
Analogicky ukážeme, že i trojúhelníky PDE a QAE jsou shodné, proto také $|PE| = |QE|$. Bod E je tak středem kružnice opsané trojúhelníku PRQ , a leží proto rovněž (kromě bodu $P \neq E$) na ose úsečky RQ .

Tím jsme dokázali, že $PE \perp RQ$.

Tečnové pětiúhelníky

Příklad 4

V každém *tečnovém* pětiúhelníku existují tři jeho strany, z nichž lze sestrojit trojúhelník. Dokažte.



Obr. 4

Řešení. Necht' bez újmy na obecnosti je AB nejdelší stranou tečnového pětiúhelníku $ABCDE$. Dotykové body kružnice jemu vepsané se stranami AB , BC , AE označme po řadě P , Q , R . Ze shodnosti úseků AP a AR , resp. BP a BQ , viz obr. 4, plyne

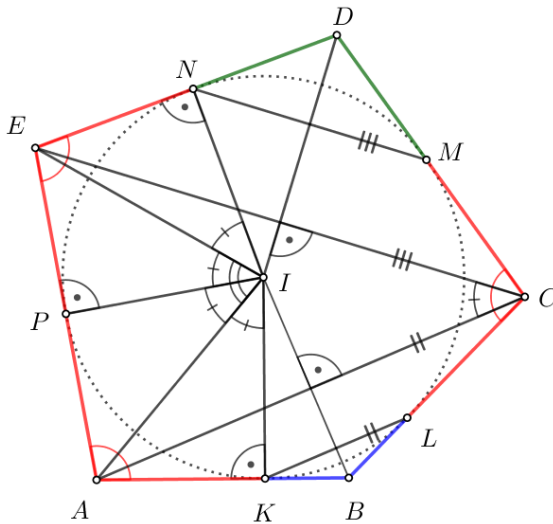
$$|AB| = |AP| + |BP| = |AR| + |BQ| < |AE| + |BC|.$$

Tato nerovnost je vzhledem k podmínkám $|AB| \geq |BC|$ a $|AB| \geq |AE|$ nutnou a postačující podmínkou pro existenci trojúhelníku o stranách délek $|AB|$, $|AE|$ a $|BC|$, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 5 (44. Turnaj měst, 2022/2023, podzimní část)

Je dán *tečnový* pětiúhelník $ABCDE$, jehož vnitřní úhly při vrcholech A , C , E mají velikost 100° . Určete velikost úhlu ACE .

Řešení. Označme K , L , M , N , P dotykové body kružnice vepsané danému pětiúhelníku $ABCDE$ po řadě s jeho stranami AB , BC , CD , DE , EA (obr. 5).



Obr. 5

Ze shodnosti vnitřních úhlů při vrcholech A , C a E plynou pro úseky, které vytínají tyto vrcholy daného pětiúhelníku a dotykové body kružnice jemu vepsané, následující rovnosti

$$|AK| = |AP| = |EP| = |EN| = |CL| = |CM|.$$

Dále též platí $|BK| = |BL|$ a $|DM| = |DN|$. Odtud plyne, že oba trojúhelníky ABC a CDE jsou rovnoramenné se základnami po řadě AC a CE a příčky KL a MN v těchto trojúhelnících jsou navíc rovnoběžné se základnami AC a CE rovnoramenných trojúhelníků ABC a CDE . Přímkami, na nichž leží výšky z hlavních vrcholů v obou těchto trojúhelnících, jsou tedy osami vnitřních úhlů při vrcholech B a D , a protínají se tak v bodě I , který je středem kružnice vepsané danému pětiúhelníku $ABCDE$. Současně však jsou tyto přímkami osami stran AC a CE v trojúhelníku ACE , takže jejich průsečík I je současně středem kružnice opsané tomuto trojúhelníku, přičemž osa strany AE také prochází tímto bodem.

Přímkami AI a EI jsou navíc osami shodných vnitřních úhlů při vrcholech A a E v daném pětiúhelníku, neboť čtyři pravoúhlé trojúhelníky AKI , API , PEI a NEI jsou podle věty *sus* navzájem shodné. Protože $|\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle AED| = 100^\circ$, mají oba (shodné) pravoúhlé trojúhelníky API a EPI shodné také vnitřní úhly při vrcholu I velikosti $90^\circ - \frac{1}{2} \cdot 100^\circ = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

Velikost středového úhlu AIE v trojúhelníku ACE je tedy $2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$. Odpovídající obvodový úhel ACE má proto poloviční velikost, platí tedy $|\sphericalangle ACE| = 40^\circ$.

Jiné řešení (podle Lenky Poljakové z G Jakuba Škody v Přerově). Protože součet velikostí vnitřních úhlů v daném konvexním pětiúhelníku je roven 540° , viz např. [3], důsledek věty 1, platí

$$|\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CDE| = 540^\circ - 3 \cdot 100^\circ = 240^\circ.$$

Označme β velikost vnitřního úhlu při vrcholu B v daném pětiúhelníku $ABCDE$, tj. $|\sphericalangle ABC| = \beta$. Pak $|\sphericalangle CDE| = 240^\circ - \beta < 180^\circ$, odkud $180^\circ > \beta > 60^\circ$. Z obr. 5 dále vidíme, že v rovnoramenných trojúhelnících ABC a CDE platí

$$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BCA| = 90^\circ - \frac{\beta}{2} \tag{1}$$

a

$$|\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle DCE| = \frac{\beta}{2} - 30^\circ. \tag{2}$$

Pro velikost vnitřního úhlu při vrcholu C v tomto pětiúhelníku tedy platí

$$100^\circ = |\sphericalangle BCD| = |\sphericalangle BCA| + |\sphericalangle ACE| + |\sphericalangle DCE|.$$

Užitím vztahů (1) a (2) odtud přímo obdržíme

$$\begin{aligned} |\sphericalangle ACE| &= 100^\circ - |\sphericalangle BCA| - |\sphericalangle DCE| = \\ &= 100^\circ - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) - \left(\frac{\beta}{2} - 30^\circ\right) = 40^\circ. \end{aligned}$$

... a ještě tři úlohy navíc

Příklad 6 (Kazašská MO, 2014/2015)

Je dán *tětivový* pětiúhelník $ABCDE$, v němž $|\sphericalangle CAD| = 50^\circ$. Určete součet velikostí jeho vnitřních úhlů při vrcholech B a E .

[Hledaný součet velikostí obou úhlů je 230° . *Návod*: Využijte vztahy pro součty velikostí protilehlých úhlů v tětivových čtyřúhelnících $ABCD$ a $ACDE$.]

Příklad 7 (viz [1])

Je dán pravidelný pětiúhelník $ABCDE$. Označme P libovolný bod kratšího oblouku AB kružnice opsané danému pětiúhelníku. Dokažte, že platí

$$|AP| + |BP| + |DP| = |CP| + |EP|.$$

[Využijte Ptolemaiovu větu pro tětivové čtyřúhelníky $APBC$, $APBD$ a $APBE$.]

Příklad 8 (18. ročník MO (1968/69), C–II–1)

Dokažte, že v každém *tečnovém* pětiúhelníku s celočíselnými délkami stran a obvodem, kterým je sudé číslo, mají také délky všech úseček na jeho stranách, jejichž krajními body jsou vrcholy a dotykové body kružnice jemu vepsané, rovněž celočíselné velikosti.

Literatura

- [1] *Càssola, C.*: Geometria piana per le gare di matematica. Scienza Express edizioni, U Math, Trieste, 2018.
- [2] *Geretschläger, R., Kalinowski, J., Švrček, J.*: A Central European Olympiad (The Mathematical Duel). World Scientific Publishing, Singapore, 2018.
- [3] *Chodorová, M., Švrček, J.*: O konvexních pětiúhelnících. MFI, roč. 33 (2024), č. 1, s. 17–24.
- [4] *Juklová, L., Švrček, J.*: Pět pěkných příkladů pro pravidelný pětiúhelník. MFI, roč. 31 (2022), č. 1, s. 15–20.

Obsahy rovinných útvarů

MARTINA ŠKORPILOVÁ

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Náplní článku jsou konkrétní příklady na výpočty obsahů rovinných obrazců složených z několika jednodušších geometrických útvarů. Ve výuce můžeme tyto úlohy použít například jako doplňující aktivity pro rychleji počítající žáky či jako příklady pro zpestření hodin různých matematických seminářů.

Problematika obsahů (a také obvodů) základních rovinných geometrických útvarů je zpracována například ve středoškolské učebnici [1].

Obrazce znázorněné na níže uvedených obr. 1 a 2 jsou dostupné rovněž mezi soubory umístěnými na webové stránce [2], a to v takové podobě, aby je mohli učitelé bez jakýchkoliv úprav použít (v tištěné či elektronické verzi) ve svých hodinách.

Obsah obrazce je v každém z příkladů značen S . Jednotlivé útvary, z nichž se obrazec skládá, jsou na obrázcích označeny přirozenými čísly. Obsah i -tého útvaru je označen S_i . Dolní index i je použit i u všech dalších značení příslušejících i -tému útvaru.

Obrázky jsou zakresleny ve čtvercových sítích, délka strany jednoho čtverečku je zřejmá z ilustrací.

V příkladech nejsou uvedeny jednotky; při výuce je však samozřejmě možné stanovit, s jakými jednotkami mají žáci počítat. Středry všech zkonstruovaných kružnic či kružnicových oblouků jsou v obrázcích vyznačeny křížky.

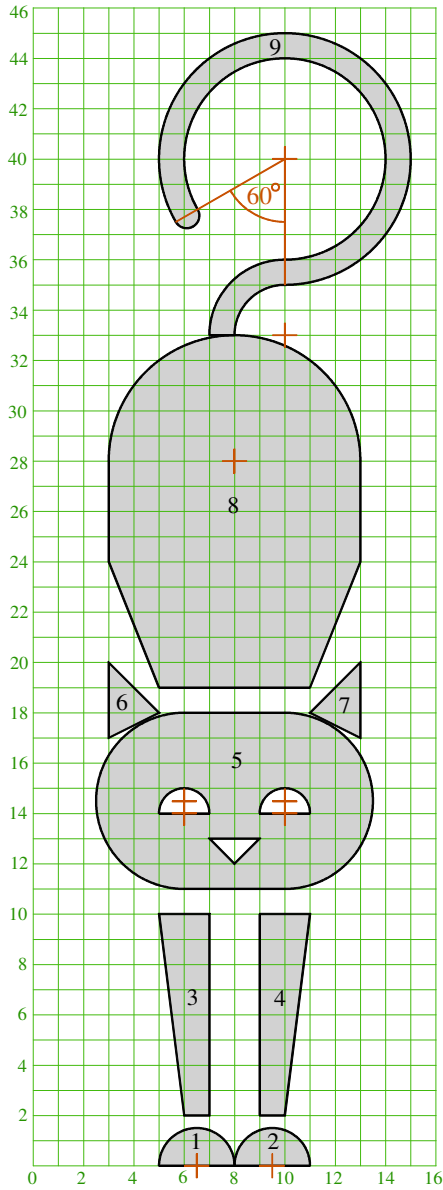
Příklad 1

Určete obsah obrazce znázorněného na obr. 1.

Řešení. Obrázek kočky se skládá z devíti útvarů.

Protože útvarem číslo 1 (a rovněž útvarem číslo 2) je půlkruh o poloměru $r_1 = 1,5$, je

$$S_1 = S_2 = \frac{\pi r_1^2}{2} = \frac{1,5^2 \pi}{2} = 1,125\pi.$$



Obr. 1

Útvarem číslo 3 (a rovněž útvarem číslo 4) je lichoběžník o základnách $a_3 = 1$, $b_3 = 2$ a výšce $v_3 = 8$. Tudíž

$$S_3 = S_4 = \frac{(a_3 + b_3)v_3}{2} = \frac{(1 + 2) \cdot 8}{2} = 12.$$

Na útvar číslo 5 lze nahlížet jako na rozdíl dvou množin bodů v rovině (dvou rovinných obrazců). Větší z nich lze složit ze dvou shodných půlkruhů o poloměru $r_5 = 3,5$ a obdélníku o stranách délek $a_5 = 4$ a $b_5 = 7$. Menší z nich je sjednocením dvou shodných půlkruhů o poloměru $p_5 = 1$ a trojúhelníku, jehož jedna strana má délku $c_5 = 2$ a výška k této straně je $v_5 = 1$. Proto

$$\begin{aligned} S_5 &= \pi r_5^2 + a_5 b_5 - \left(\pi p_5^2 + \frac{c_5 v_5}{2} \right) = \\ &= (3,5^2 - 1^2) \pi + 4 \cdot 7 - \frac{2 \cdot 1}{2} = 27 + 11,25\pi. \end{aligned}$$

Jelikož útvarem číslo 6 (a rovněž útvarem číslo 7) je trojúhelník, jehož jedna strana má délku $a_6 = 3$ a příslušná výška je $v_6 = 2$, platí

$$S_6 = S_7 = \frac{a_6 v_6}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3.$$

Útvar číslo 8 lze složit z lichoběžníku o základnách $a_8 = 6$, $b_8 = 10$ a výšce $v_8 = 5$, dále z obdélníku o stranách délek $b_8 = 10$ a $c_8 = 4$ a z půlkruhu o poloměru $r_8 = 5$. Z toho plyne, že

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{(a_8 + b_8)v_8}{2} + b_8 c_8 + \frac{\pi r_8^2}{2} = \\ &= \frac{(6 + 10) \cdot 5}{2} + 10 \cdot 4 + \frac{5^2 \pi}{2} = 80 + 12,5\pi. \end{aligned}$$

Útvar číslo 9 lze složit z částí dvou mezikruží a z půlkruhu. Hraniční kružnicové oblouky části prvního mezikruží mají poloměry $R_9 = 3$, $r_9 = 2$ a příslušný středový úhel má velikost 90° . Hraniční kružnicové oblouky části druhého mezikruží mají poloměry $P_9 = 5$, $p_9 = 4$ a příslušný středový úhel má velikost 300° . Půlkruh má poloměr $q_9 = 0,5$. Proto

$$\begin{aligned} S_9 &= \frac{90}{360} \cdot (\pi R_9^2 - \pi r_9^2) + \frac{300}{360} \cdot (\pi P_9^2 - \pi p_9^2) + \frac{\pi q_9^2}{2} = \\ &= \frac{\pi}{4} (3^2 - 2^2) + \frac{5\pi}{6} (5^2 - 4^2) + \frac{0,5^2 \pi}{2} = \frac{71\pi}{8} = 8,875\pi. \end{aligned}$$

Obsah S vybarvené plochy na obr. 1 je tudíž

$$S = \sum_{i=1}^9 S_i = 1,125\pi + 1,125\pi + 12 + 12 + 27 + 11,25\pi + \\ + 3 + 3 + 80 + 12,5\pi + 8,875\pi = 137 + 34,875\pi \doteq 246,6.$$

Příklad 2

Určete obsah obrazce znázorněného na obr. 2.

Řešení. Obrázek motorky se skládá z deseti útvarů.

Útvarem číslo 1 je část mezikruží ohraničeného kružnicovými oblouky o poloměrech $R_1 = 30$ a $r_1 = 25$. Jelikož oblouky přísluší úhlu o velikosti 72° , je

$$S_1 = \frac{72}{360} \cdot (\pi R_1^2 - \pi r_1^2) = \frac{\pi}{5} \cdot (30^2 - 25^2) = 55\pi.$$

Útvarem číslo 2 je mezikruží, které je ohraničené kružnicemi o poloměrech $R_2 = 20$ a $r_2 = 15$. Proto

$$S_2 = \pi R_2^2 - \pi r_2^2 = \pi (20^2 - 15^2) = 175\pi.$$

Útvarem číslo 3 je obdélník, jehož strany mají délky $a_3 = 25$ a $b_3 = 5$. Tedy

$$S_3 = a_3 b_3 = 25 \cdot 5 = 125.$$

Útvarem číslo 4 je pětiúhelník, který můžeme rozdělit horizontální úsečkou vedenou jeho levým dolním vrcholem (v příslušné čtvercové síti jím prochází vertikální čára označená 60) na trojúhelník a lichoběžník. Jedna ze stran trojúhelníku má délku $a_4 = 45$ a příslušnou výšku $v_4 = 5$, lichoběžník má základny $a_4 = 45$, $b_4 = 75$ a výšku $w_4 = 30$. Z toho vyplývá, že

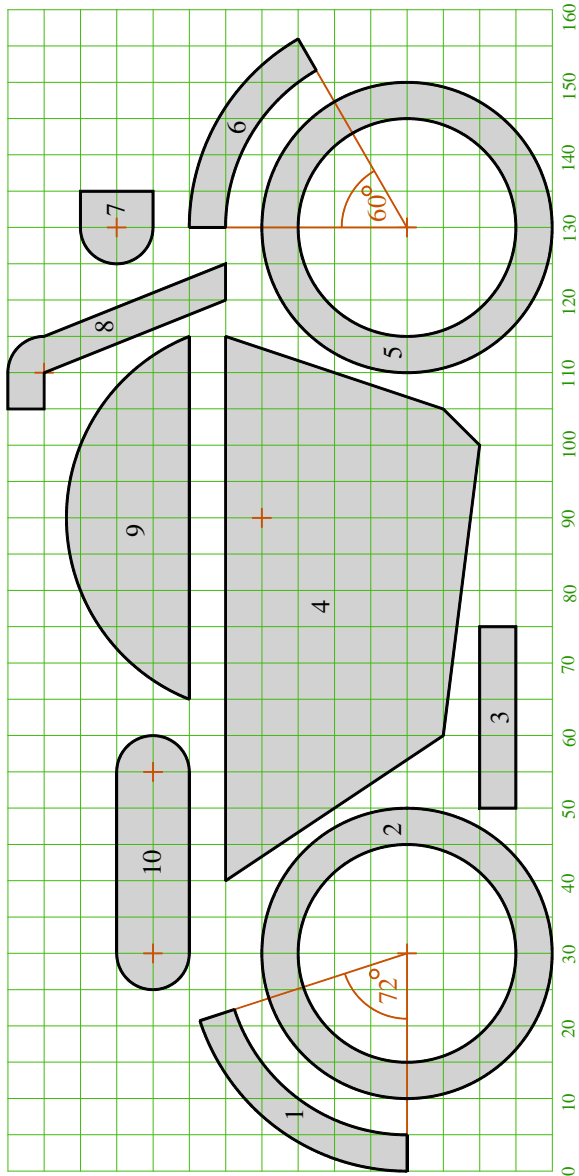
$$S_4 = \frac{a_4 v_4}{2} + \frac{(a_4 + b_4) w_4}{2} = \frac{45 \cdot 5}{2} + \frac{(45 + 75) \cdot 30}{2} = \frac{3825}{2}.$$

Jelikož útvar číslo 5 je shodný s útvarem číslo 2, je

$$S_5 = S_2 = 175\pi.$$

Útvarem číslo 6 je část mezikruží. Protože jeho hranici tvoří kružnicové oblouky o poloměrech $R_6 = 30$, $r_6 = 25$ a dále úsečky, které leží na ramenech úhlu o velikosti 60° , platí

$$S_6 = \frac{60}{360} \cdot (\pi R_6^2 - \pi r_6^2) = \frac{\pi}{6} \cdot (30^2 - 25^2) = \frac{275\pi}{6}.$$



Obr. 2

Útvar číslo 7 je složen z obdélníku, jehož strany mají délky $a_7 = 5$, $b_7 = 10$, a z půlkruhu o poloměru $r_7 = 5$. Tudíž

$$S_7 = a_7 b_7 + \frac{\pi r_7^2}{2} = 5 \cdot 10 + \frac{5^2 \pi}{2} = 50 + \frac{25\pi}{2}.$$

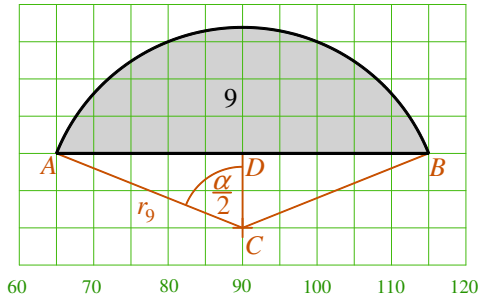
Útvar číslo 8 se skládá ze čtverce, jehož strana má délku $a_8 = 5$, ze čtvrtkruhu o poloměru $r_8 = 5$ a rovnoběžníku o straně $b_8 = 5$ a příslušné výšce $v_8 = 25$. Odtud plyne

$$S_8 = a_8^2 + \frac{\pi r_8^2}{4} + b_8 v_8 = 5^2 + \frac{5^2 \pi}{4} + 5 \cdot 25 = 150 + \frac{25\pi}{4}.$$

Útvar číslo 9 je kruhová úseč, u níž neznáme ani poloměr r_9 , ani velikost příslušného středového úhlu α . Oba údaje určíme pomocí pravoúhlého trojúhelníku ACD vyznačeného na obr. 3. Poloměr r_9 vypočítáme pomocí Pythagorovy věty jakožto délku přepony trojúhelníku:

$$r_9^2 = 10^2 + 25^2,$$

$$r_9 = \sqrt{725}.$$



Obr. 3

K vyjádření velikosti úhlu α využijeme funkci tangens:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{25}{10},$$

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{25}{10}.$$

Proto

$$\alpha \doteq 136,4^\circ.$$

Obsah kruhové úseče je roven rozdílu obsahu kruhové výseče o poloměru $r_9 = \sqrt{725}$ a příslušném středovém úhlu o velikosti $\alpha \doteq 136,4^\circ$ a obsahu trojúhelníku ACB , jehož jedna ze stran má délku $a_9 = |AB| = 50$ a výšku k této straně $v_9 = 10$. Tedy

$$S_9 = \frac{\alpha}{360} \cdot \pi r_9^2 - \frac{a_9 v_9}{2} \doteq \frac{136,4}{360} \cdot 725\pi - \frac{50 \cdot 10}{2} = \frac{9889\pi}{36} - 250.$$

Útvar číslo 10 lze složit ze dvou shodných půlkruhů o poloměru $r_{10} = 5$ a z obdélníku, jehož strany mají délky $a_{10} = 25$, $b_{10} = 10$. Tudíž

$$S_{10} = 2 \cdot \frac{\pi r_{10}^2}{2} + a_{10} b_{10} = 5^2 \pi + 25 \cdot 10 = 25\pi + 250.$$

Obsah obrazce znázorňujícího motorku je proto

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{10} S_i \doteq \\ &\doteq 55\pi + 175\pi + 125 + \frac{3825}{2} + 175\pi + \frac{275\pi}{6} + 50 + \\ &\quad + \frac{25\pi}{2} + 150 + \frac{25\pi}{4} + \frac{9889\pi}{36} - 250 + 25\pi + 250 = \\ &= 430\pi + \frac{12214\pi}{36} + \frac{4475}{2} \doteq \\ &= 769,3\pi + 2237,5 \doteq 4654,3. \end{aligned}$$

Příklady lze samozřejmě modifikovat tak, že žákům zadáme za úkol určit obvody jednotlivých útvarů, z nichž jsou obrazce složeny.

Literatura

- [1] *Pomykalová, E.*: Planimetrie. 5. vydání, Prometheus, Praha, 2021.
 [2] <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~stepanov/vyuka.html>

Ortocentrum trojúhelníku

PAVEL LEISCHNER

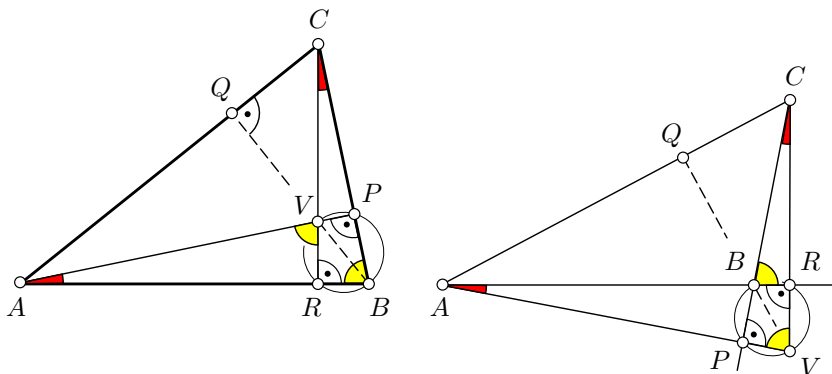
Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Poznatek, že se kolmice z vrcholů trojúhelníku k protilehlým stranám, tj. přímky, na nichž leží výšky, protínají v jednom bodě zvaném *průsečík výšek* neboli *ortocentrum*, patří do učiva základní školy. Seznámíme se zde s jeho historií a některými důsledky.

Větu o ortocentru znal již Archimédés, užil ji například při důkazu tvrzení 5 z Knihy lemmat [1, s. 305–306]. Pravděpodobně ji i dokázal v některé z jeho ztracených prací. Dále větu zmiňují Pappus, Proklos, Regiomontanus a další. Avšak až do 17. století bez důkazu, nebo s nekorektním zdůvodněním.

Nejstarší známý důkaz [4, s. 454] byl nalezen v nepublikovaném Newtonově manuskriptu z roku 1680. Stojí za to se s ním (v upravené formě) seznámit:

Nechť je dán trojúhelník ABC s průsečíkem V výšek AP a CR . Předpokládejme nejprve, že je ostroúhlý, obr. 1 vlevo. Čtyřúhelník $PVRB$ je v důsledku Thaletovy věty tětíivový. Jeho vnější úhel AVR je tedy shodný s protilehlým vnitřním úhlem CBR .



Obr. 1 K Newtonově důkazu s rozlišením dvou možných situací

Analogicky lze ověřit, že je rovnost $|\sphericalangle AVR| = |\sphericalangle CBR|$ splněna, i když je úhel ABC tupý (obr. 1 vpravo). Pravoúhlé trojúhelníky AVR a CBR

jsou v obou situacích podobné a platí

$$|\sphericalangle VAR| = |\sphericalangle BCR| \quad \text{a} \quad \frac{|RV|}{|RB|} = \frac{|RA|}{|RC|}. \quad (1)$$

Odtud

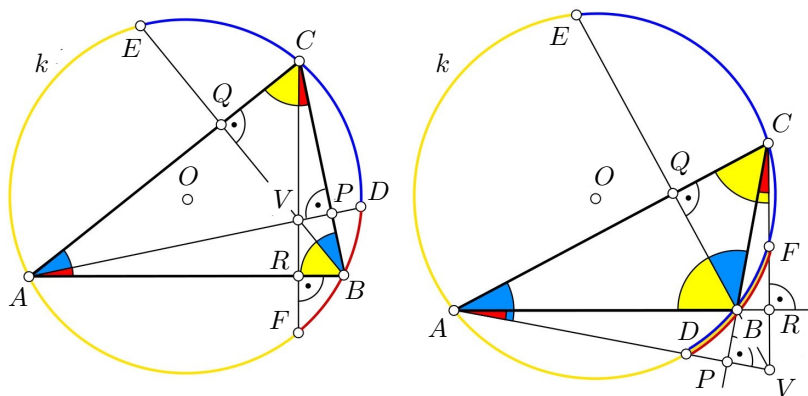
$$|RV| = \frac{|RA| \cdot |RB|}{|RC|}. \quad (2)$$

Analogickým postupem pro výšky BQ a CR s průsečíkem V' nalezneme pro délku úsečky RV' stejný výraz. Je tedy $V' = V$.

Z Newtonova postupu plynou další poznatky. Jestliže průsečík přímky VR s kružnicí k opsanou trojúhelníku ABC označíme F ($F \neq C$, obr. 2), pak pomocí mocnosti bodu R ke kružnici k a vztahu (2) dostáváme

$$|RF| = \frac{|RA| \cdot |RB|}{|RC|} = |RV|$$

a odtud užitečnou větu 1.



Obr. 2 Vrcholy A , B a C leží ve středech oblouků EF , FD a DE

Věta 1

Obrazy ortocentra v osových souměrnostech podle stran trojúhelníku leží na kružnici trojúhelníku opsané.

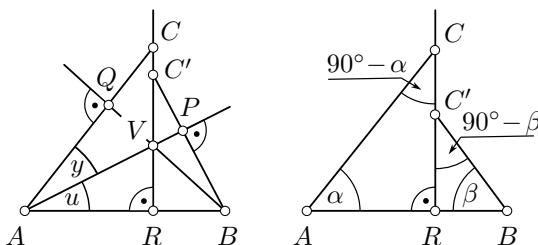
Důsledek 1

Kružnice opsané trojúhelníkům ABC , ABV , BCV a ACV jsou shodné. (Zřejmé z osových souměrností podle stran trojúhelníku ABC .)

Důsledek 2

Při označení podle obr. 2 leží vrcholy A , B a C po řadě ve středech oblouků EF , FD a DE kružnice k , neboť shodným obvodovým úhlům přísluší shodné oblouky.

Vraťme se ještě k důkazům věty o ortocentru. Anglická Wikipedie i jiné zdroje uvádí, že první důkaz věty o ortocentru podal roku 1749 britský geodet W. Chapple (69 let po Newtonovi). Dalo by se to považovat za nejstarší známý publikovaný důkaz, kdyby to důkaz byl. Podívejme se na jeho postup ze stránek <https://www.cut-the-knot.org/triangle/Chapple.shtml>.



Obr. 3 K Chappleovu „důkazu“, 180° je součet úhlů vyznačených napravo

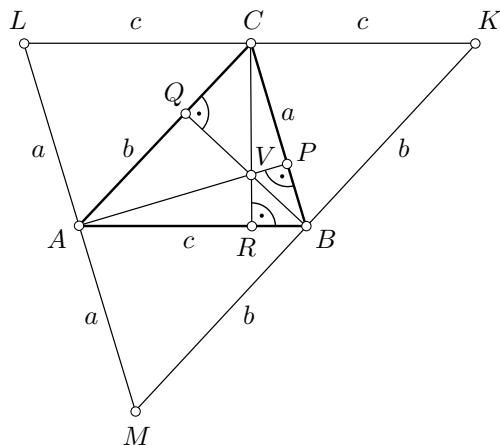
Chapple vycházel z trojúhelníku ABV na obr. 3 vlevo, značení upraveno. Paty kolmic z vrcholů B , A na přímky AV , BV označil P , Q a průsečíky kolmice RV na stranu AB s přímkami BP a AQ označil C' a C . Zbývalo dokázat, že $C' = C$.

Naznačil určování velikostí dalších úhlů na obrázku pomocí veličin u a y . A pak prohlásil, že nakonec pro součet velikostí úhlů při vrcholech A , B , C' a C vyjde 180° (což je zřejmé i bez výpočtů, viz obr. 3 vpravo) a podle věty I.37 z Eukleidových Základů¹⁾ platí $C' = C$.

Věta o ortocentru se při výuce obvykle dokazuje podle Gausse, a to buď s využitím stejnolehlosti ([3, s. 169–170]) nebo doplňováním trojúhelníku ABC na rovnoběžníky $ABKC$, $BCLA$, $CAMB$, obr. 4. Výšky z vrcholů A , B a C jsou pak totožné s osami stran trojúhelníku KLM , o nichž již žáci vědí, že se protínají ve středu kružnice opsané trojúhelníku KLM .

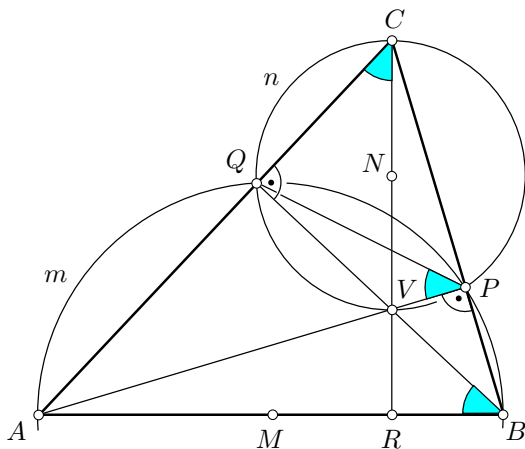
Do třetice uvedme ještě jeden důkaz existence ortocentra. Využívá větu o obvodových úhlech.

¹⁾Věta I.37 tvrdí, že trojúhelníky se společnou základnou a třetím vrcholem na rovnoběžce s ní mají stejné obsahy. S Chappleovým závěrem nesouvisí.



Obr. 4 Gaussův důkaz existence ortocentra

V trojúhelníku ABC označme V průsečík výšek AP a BQ , a R průsečík přímek AB , CV (obr. 5). Stačí dokázat, že je úhel ARC pravý.



Obr. 5 Důkaz věty o ortocentru metodou pomocných kružnic

Jsou-li m a n Thaletovy kružnice s průměry AB a CV , pak

$$|\sphericalangle ABQ| = |\sphericalangle APQ| = |\sphericalangle VPQ| = |\sphericalangle VCQ| = |\sphericalangle RCA|.$$

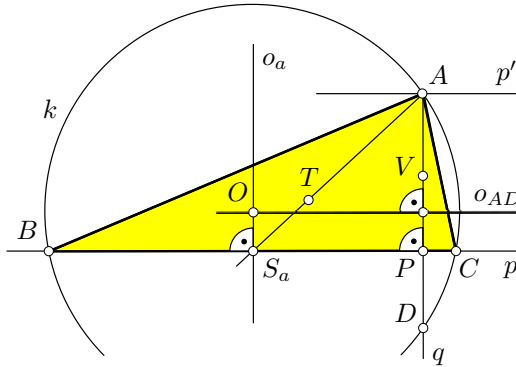
Trojúhelníky CAR a BAQ jsou podobné, neboť se shodují v úhlech při

vrcholech B, C a společném úhlu BAC . Odtud

$$|\sphericalangle ARC| = |\sphericalangle AQB| = 90^\circ.$$

Příklad 1

Jsou dány body T a V uvnitř poloroviny s hraniční přímkou p . Sestrojte trojúhelník, jehož dva vrcholy leží na přímce p , bod T je jeho těžištěm a bod V ortocentrem.



Obr. 6 Obrázek k příkladu 1

Řešení. Trojúhelník označme ABC tak, aby $B, C \in p$, obr. 6. Je-li AS_a těžnice trojúhelníku, pak

$$|TA| = 2|TS_a|.$$

Víme, že $S_a \in p$. Bod A tedy leží na obrazu p' přímky p ve stejnosti se středem T a koeficientem -2 . Zároveň leží i na kolmici q z bodu V k přímce p .

Bod D souměrně sdružený s ortocentrem podle přímky p leží na kružnici k trojúhelníku opsané (věta 1). Její střed O je průsečíkem osy o_{AD} úsečky AD a osy o_a strany BC . Osa o_a je dána přímkou p a průsečíkem S_a přímek AT a p .

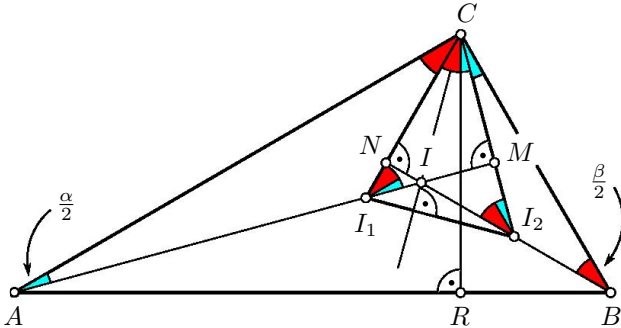
Konstrukce. Postupně sestrojíme přímky p', q , jejich průnik A , průsečík S_a přímky p s přímkou AT a obraz D bodu V v symetrii podle p . Dále osu o_{AD} a přímkou o_a (kolmici na přímce p v bodě S_a). Střed O kružnice k je průnikem přímek o_a a o_{AD} , $\{B, C\} = p \cap k(O; |OA|)$.

Úpravu konstrukce pro situaci $p \perp TV$ nebo $T = V$, ověření její správnosti i zdůvodnění faktu, že má úloha vždy právě jedno řešení, ponecháváme čtenáři.

Příklad 2

Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB . Označme R patu jeho výšky z vrcholu C a I_1, I_2 středy kružnic vepsaných trojúhelníkům ARC a BRC . Dokažte, že je přímka I_1I_2 kolmá k ose úhlu ACB .

Řešení. Je zřejmé z obr. 7, kde I je střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC , $M \in AI \cap CI_2$ a $N \in BI \cap CI_1$.



Obr. 7 Řešení příkladu 2

Trojúhelníky ABC , ACR a CBR jsou navzájem podobné. Odtud a z vlastností os úhlů dostáváme

$$|\sphericalangle I_2CB| = |\sphericalangle RCI_2| = |\sphericalangle CAI| = \frac{\alpha}{2}$$

a

$$|\sphericalangle I_1CR| = |\sphericalangle ACI_1| = |\sphericalangle CBI| = \frac{\beta}{2}.$$

Platí též

$$45^\circ = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = |\sphericalangle CI_1M| = |\sphericalangle CI_2N|$$

(vnější úhly trojúhelníků CAI_1 a CBI_2). Navíc je

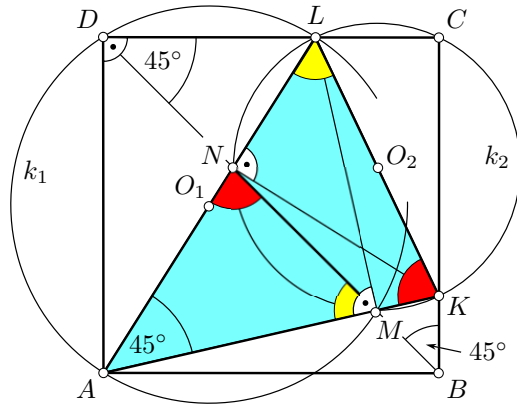
$$|\sphericalangle I_1CM| = |\sphericalangle I_2CN| = 45^\circ,$$

a tak jsou trojúhelníky CI_1M a CI_2N rovnoramenné a pravoúhlé. Průsečík I jejich odvěsen I_1M a I_2N je ortocentrem trojúhelníku CI_1I_2 . Je tedy $CI \perp I_1I_2$.

Metoda, kterou jsme použili v posledním důkazu věty o ortocentru, se nazývá *metoda pomocných kružnic*. Využijeme ji nyní při řešení příkladu 3.

Příklad 3

Na straně BC čtverce $ABCD$ je zvolen bod K a na straně CD bod L tak, že platí $|\sphericalangle KAL| = 45^\circ$. Úhlopříčka BD protíná úsečku AK v bodě M a úsečku AL v bodě N . Určete poměr obsahů trojúhelníků AKL a AMN .



Obr. 8 Obrázek k příkladu 3

Řešení. Opíšme trojúhelníku AML kružnici k_1 . Úhlopříčky čtverce půlí jeho úhly, a tak

$$|\sphericalangle MDL| = 45^\circ = |\sphericalangle MAL|.$$

To znamená, že $D \in k_1$ a a pro tětívový čtyřúhelník $AMLD$ platí

$$|\sphericalangle AML| = 180^\circ - |\sphericalangle ADL| = 90^\circ.$$

Analogicky pro kružnici opsanou trojúhelníku ANK zjistíme, že je pravý i úhel ANK . Úsečky LM a KN jsou tedy výšky trojúhelníku AKL a v tětívovém čtyřúhelníku $KLNM$ jsou vnější úhly shodné s protilehlými vnitřními. Odtud $|\sphericalangle ANM| = |\sphericalangle AKL|$ a $|\sphericalangle AMN| = |\sphericalangle ALK|$.

Trojúhelníky AMN a ALK jsou podobné, poměr jejich podobnosti je

$$\kappa = \frac{|AL|}{|AM|} = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \sqrt{2} \quad (\text{pravoúhlý trojúhelník } ALM).$$

Poměr obsahů určuje hodnota κ^2 , $S_{AKL} : S_{AMN} = 2 : 1$.

Na závěr uvádíme několik úloh na procvičení výše uvedených poznatků.

Úlohy

1. S využitím věty o ortocentru trojúhelníku sestrojte přímku p , jež prochází bodem M a nepřístupným průsečíkem přímk a, b .
2. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC , jsou-li dány obrazy D, E a F jeho ortocentra v osových souměrnostech podle stran trojúhelníku. Kolik má úloha řešení?
3. Je dán bod V uvnitř kruhu ohraničeného kružnicí k a bod $A \in k$. Sestrojte body $B, C \in k$ tak, aby byl bod V ortocentrem trojúhelníku ABC .
4. Sestrojte trojúhelník ABC s ortocentrem V a patou R jeho výšky z vrcholu C , je-li dána úsečka CV o délce 6 cm s vnitřním bodem R , přičemž $|RV| = 1,5$ cm, a poloměr kružnice trojúhelníku opsané je $r = 3,5$ cm.
5. V rovině je dána přímka p a mimo ni body P, Q . Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby vrcholy A a B ležely na přímce p a body P, Q byly po řadě paty jeho výšek z vrcholů A, B .
6. Upravte Chappleův postup tak, aby byl korektní. (Dokažte například, že se body C a C' nachází v témže průsečíku přímky RV s kružnicí opsanou trojúhelníku PQV .)
7. Dokažte, že pro trojúhelník ABC , který má $\gamma \neq 90^\circ$ platí: Jsou-li AP a BQ jeho výšky, pak jsou trojúhelníky PQC a ABC podobné s poměrem podobnosti $\frac{|PC|}{|AC|} = |\cos \gamma|$. (Rozlišete tři situace ostroúhlý, pravoúhlý a tupoúhlý trojúhelník ABC .)
8. Na půlkružnici s průměrem AB jsou dány body C a D , různé od A a B . Bod E zvolíme tak, aby $ACED$ byl rovnoběžník. Dokažte, že $DC \perp BE$.

Literatura

- [1] *Heath, T. L.*: The Works of Archimedes. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [2] *Ostermann, A., Vanner, G.*: Geometry by its history. Springer Verlag, Berlin, 2012.
- [3] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia – Planimetrie. Prometheus, Praha, 1994.
- [4] *Whiteside, T. D.*: The Mathematical Pappers of Isaac Newton: Volume 4. Cambridge University Press, Cambridge, 1971.

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 9. 2024 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi uveřejníme.

Úloha 293

- a) Kuchař rozřezal kilogramový bochník sýra na šest dílů vážících alespoň 50 g. Dokažte, že z nich může několik vybrat a rozdělit je na dva talíře tak, aby se hmotnosti sýra v obou talířích lišily méně než 15 g.
- b) Na kolik dílů vážících aspoň 1 g musí kuchař tento bochník rozdělit, aby z nich bylo možno několik rozdělit na dva talíře tak, že hmotnosti sýra v obou talířích se liší méně než 1 g? Najděte nejmenší takový počet.

Pavel Calábek

Úloha 294

V ostroúhlém trojúhelníku ABC označme D a E průsečíky os stran AC a AB po řadě s přímkami AB a AC . Dále označme F a G body souměrně sdružené podle bodu A po řadě s vrcholy B a C . Dokažte, že body D , E , F a G leží na téže kružnici.

Patrik Bak

Dále uvádíme řešení úloh 289 a 290, jejichž zadání jsme zveřejnili v posledním (čtvrtém) čísle loňského (32.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 289

Určete všechny trojice (p, q, r) prvočísel, pro něž platí

$$p + 2q^2 + 3r^3 = 2023.$$

Jaroslav Švrček

Řešení. Číslo $2q^2$ je sudé, proto $p + 3r^3$ je číslo liché, jedno z prvočísel p , r je tedy liché, druhé sudé. Protože existuje jediné sudé prvočíslo 2, uvažujeme dvě možnosti.

- a) $p = 2$. Potom $2q^2 + 3r^3 = 2021$. Protože $3 \cdot 9^3 = 2187 > 2021$, je $r < 9$, tedy r je jedno z lichých prvočísel 3, 5, 7. Pro tato prvočísla

dostáváme $2q^2$ po řadě (včetně prvočíselných rozkladů) $1940 = 2^2 \cdot 5 \cdot 97$, $1646 = 2 \cdot 823$ a $992 = 2^5 \cdot 31$. Ani v jednom z případů tak q není pročísllo, tedy v tomto případě neexistuje řádné řešení.

b) $r = 2$. Potom $p + 2q^2 = 1999$. Protože $2 \cdot 32^2 = 2048 > 1999$, je $q < 32$, tedy q je jedno z prvočísel 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 a 31. Pro tato prvočísla dostáváme p po řadě $1991 = 11 \cdot 181$, $1981 = 7 \cdot 283$, 1949 , 1901 , $1757 = 7 \cdot 251$, $1661 = 11 \cdot 151$, $1421 = 7^2 \cdot 29$, 1277 , 941 , 317 a $77 = 7 \cdot 11$. Jelikož 1949, 1901, 1277, 941 a 317 jsou vesměs prvočísla, má úloha v tomto případě pět řešení

$$(p, q, r) \in \{(1949, 5, 2), (1901, 7, 2), (1277, 19, 2), (941, 23, 2), (317, 29, 2)\}.$$

Úloze vyhovuje právě pět trojic uvedených v části b) předchozího odstavce.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Tomáš Hauser* z Kolína, *Anton Hnáth* z Moravan, *František Jáchim* z Volyně, *Markéta Dytrychová*, G U Balvanu, Jablonec nad Nisou, *Lucian Poljak* a *Štěpán Pospíšil*, oba GJŠ Přerov a *Piotr Szatan*, II LO v Tarnovských Horách (Polsko).

Úloha 290

Lenka si vybrala tři navzájem různá reálná čísla a , b , c a spočítala hodnoty tří výrazů

$$\left| \frac{a+b}{(a-c)(b-c)} \right|, \quad \left| \frac{b+c}{(b-a)(c-a)} \right| \quad \text{a} \quad \left| \frac{c+a}{(c-b)(a-b)} \right|.$$

Dokažte, že jedna z těchto tří hodnot je rovna součtu zbylých dvou.

Josef Tkadlec

Řešení. Nejprve ukážeme, že pro vyhovující čísla a , b , c je součet tří výše uvedených výrazů bez absolutních hodnot roven 0. Postupnými úpravami dostáváme

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{(a-c)(b-c)} + \frac{b+c}{(b-a)(c-a)} + \frac{c+a}{(c-b)(a-b)} = \\ &= \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} + \frac{(b+c)(b-c)}{(b-a)(b-c)(c-a)} + \frac{(c+a)(c-a)}{(c-b)(a-b)(c-a)} = \\ &= \frac{(a^2 - b^2) + (b^2 - c^2) + (c^2 - a^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 0. \end{aligned}$$

Pokud by se všechny tři výrazy rovnaly nule, platilo by

$$a + b = b + c = c + a = 0,$$

tedy

$$a = b = c = 0,$$

což je spor se zadáním, proto jsou alespoň dva různé od nuly. Jelikož je jejich součet nula, je aspoň jeden kladný a aspoň jeden záporný. Odtud již plyne že součet nezáporných výrazů má opačné znaménko než součet záporných výrazů (příčemž v jedné skupině jsou dvě čísla a ve druhé jedno), proto součet absolutních hodnot nezáporných výrazů je roven součtu absolutních hodnot záporných výrazů, což jsme měli dokázat.

Poznámka. Tvrzení o součtu výrazů také můžeme dokázat následujícím způsobem. Lineární funkce

$$f(x) = \frac{x - c}{(a - c)(b - c)} + \frac{x - a}{(b - a)(c - a)} + \frac{x - b}{(c - b)(a - b)}$$

nabývá v bodě a hodnotu

$$\frac{1}{b - c} + \frac{1}{c - b} = 0,$$

stejnou hodnotu nabývá také v bodech b a c , je tak nulová a nabývá hodnotu nula i v bodě $a + b + c$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Anton Hnáth* z Moravan a *Piotr Szatan*, II LO v Tarnovských Horách (Polsko).

Pavel Calábek

O jedné zajímavé aplikaci druhého termodynamického zákona

DALIBOR DVOŘÁK – IRENA FIKÁČKOVÁ

Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita – Gymnázium Komenského, Havířov

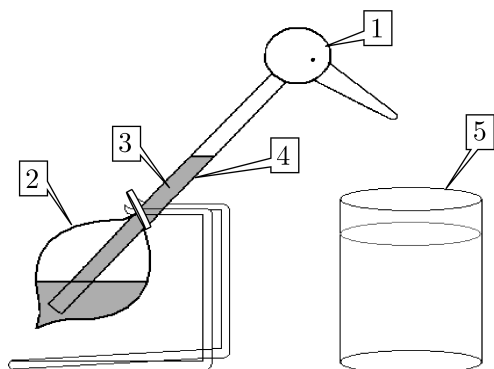
Úvod

Jedním z důsledků druhého zákona termodynamiky je omezená účinnost tepelných motorů. V učivu pro střední školy je tento důsledek demonstrován zpravidla na Carnotově cyklu. Ze zkušenosti víme, že už uvedení příkladu tepelného motoru činí studentům potíže. Je zajímavé, že ačkoliv se asi většina z nich v životě s parním strojem nesetkala, je tento uváděn nejčastěji jako příklad tepelného motoru. Většinou až po nápovědě uvedou spalovací motor nebo turbínu. Spojení principu tepelného motoru např. s meteorologickými jevy je pak pro většinu překvapením.

V našem příspěvku uvádíme příklad experimentálního stanovení účinnosti zařízení, které je pro obvyklou představu tepelného motoru atypické – hračku, uváděnou nejčastěji pod označením „píjící pták“, při kterém byly využity moderní technologie.

Uvedenou hračku přinesla spoluautorka příspěvku na přednášku s tím, že jí není zcela jasný princip fungování. Hračka pijící pták byla patentována v USA v roce 1946 chemikem Milesem V. Sullivanem, ale její původ sahá do první poloviny 20. století [1].

Píjící pták je vyroben ze skla. Je tvořen dvěma přibližně kulovými nádobami, propojenými skleněnou trubicí, viz obr. 1.



Obr. 1 Schéma „píjícího ptáka“

Horní část (1) – hlava, má dutý výběžek (zobák), obalený savou pórovitou hmotou. Dolní část (2) – ocas, je větší a je v základní, svislé poloze ptáka přibližně do poloviny naplněna těkavou kapalinou (3) a to tak, že dolní ústí spojovací trubice (4) je pod hladinou kapaliny. Prostor uvnitř ptáka je tak rozdělen kapalinou jako pohyblivým pístem na dvě části. Obě tyto části jsou vyplněny parami použité kapaliny. Použitá kapalina není přesně specifikována, ale obvykle se jedná o směs alkoholu a vody s přídavkem barviva. Často se také používají jiné těkavé látky, jako je metylenchlorid nebo freon [1]. Kapalina by měla mít nízkou hustotu, nízkou viskozitu a vysokou těkavost, aby byla hračka efektivní. Komplet doplňuje kádinka s vodou (5).

Pracovní cyklus začíná namočením zobáku do kádinky s vodou. Po napřímení se zobák, a následně i hlava ochlazují odpařováním vody, která ulpěla na povrchu zobáku. Tím se snižuje tlak par v hlavě ptáka. Protože mimo první cyklus mají páry v ocasu po promíchání s chladnějšími parami v hlavě nižší teplotu, než je teplota okolního prostředí, dochází postupně k jejich ohřevu a k růstu tlaku v ocasu. Vzniklý tlakový rozdíl mezi ocasem a hlavou vytlačuje kapalinu trubicí vzhůru. Důsledkem je změna polohy těžiště, pták se začíná naklánět. Po dosažení dostatečného úhlu náklonu se zobák ptáka ponoří do kádinky s vodou a současně se dolní ústí spojovací trubice dostane nad hladinu kapaliny v ocasu. Ústí trubice se uvolní a tlaky par v ocasu a v hlavě se vyrovnají a kapalina začne z trubice působením gravitace vytékat zpět do ocasu. Těžiště ptáka se vrátí do původní polohy a pták se napřímí. Soustava se dostane do počátečního stavu a začíná nový cyklus.

Hračka funguje, pokud není teplota okolního vzduchu příliš nízká a jeho relativní vlhkosti příliš vysoká. A samozřejmě, pokud v kádince je dostatečné množství vody, aby došlo k navlhčení zobáku.

1. Fyzikální popis soustavy

Z popisu pracovního cyklu soustavy pijícího ptáka je zřejmé, že se jedná o tepelný motor, jehož pracovním médiem jsou páry, uzavřené uvnitř soustavy. Ohřívacem tohoto tepelného motoru, který ohřívá páry uzavřené v ocase ptáka, je okolní vzduch a chladičem je hlava se zobákem, kde dochází v důsledku odpařování vody k ochlazení par uzavřených v hlavě a v zobáku. V okamžiku „napití“ dochází vlivem vynoření konce spojovací trubice mezi ocasem a hlavou k propojení obou podsoustav a k smíchání objemů par s odlišnou teplotou. Teplota a tlak v celém objemu par se vyrovnají a začíná nový cyklus. Maximální teplota T_{\max} je dosažena v ocase a minimální T_{\min} v hlavě těsně před „napitím“.

Pijící pták představuje tepelný motor pracující na základě cyklického stlačování a expanze par uzavřených v hlavě a ocasu ptáka. Snižováním tlaku při snižování teploty par a expanzí při jejich vyšší teplotě probíhá transformace tepelné energie na mechanickou práci. Zdroj tepla, vnější prostředí, je oddělen od uzavřeného prostoru vyplněném parami použité kapaliny, jejichž množství tak zůstává stálé. Jde o tepelný motor s vnějším ohřevem, uzavřeným oběhem a se stálou náplní pracovního plynu, který si s okolím vyměňuje pouze tepelnou energii [2]. Výměna tepla s okolím probíhá přes tepelné výměníky, v našem případě v ocase a v hlavě ptáka.

Spoluautorka příspěvku se po dohodě rozhodla zvolit jako téma své diplomové práce *Rozbor činnosti fyzikální soustavy „pijícího ptáka“*. Cílem práce bylo, určit účinnost transformace tepelné energie na energii mechanickou a sestavit matematický model „pijícího ptáka“ [3].

2. Použitá experimentální metody

Při určení účinnosti transformace tepelné energie na energii mechanickou bylo od počátku zřejmé, že při stanovení potřebných fyzikálních veličin – teploty, tepla a mechanické energie, se budou jejich hodnoty pohybovat na samé mezi citlivosti a přesnosti dostupné měřicí techniky, a proto byla u každého měření proveden odhad přesnosti.

2.1. Teplota

Pro měření teploty byl použit bezdotykový teploměr Instatherm od firmy Barnes, viz obr. 2. Výrobce garantoval při splnění pokynů výrobce přesnost $\pm 1\%$ z měřené hodnoty.

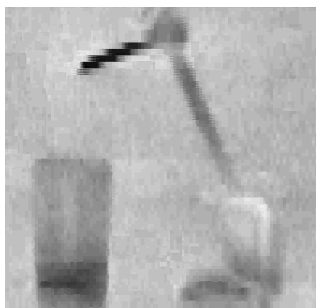


Obr. 2 Bezkontaktní teploměr Instatherm

Protože že se nám naskytla příležitost zhotovit snímek pijícího ptáka termovizní kamerou, využili jsme tuto možnost k ověření předpokládaného rozložení teploty během jednoho cyklu. Jak je patrné z obr. 3, snímek ilustruje velmi názorně rozložení teploty během cyklu.

2.2. Poloha a rozměry

Průběh experimentů byl snímán videokamerou. Potřebné geometrické parametry byly měřeny klasickým délkovým měřidlem s přesností na milimetr. Další údaje jako aktuální výška hladiny kapaliny nebo poloha, byly zjišťovány z videozáznamu experimentu pomocí rastru v pozadí s velikostí čtverce 1 cm, viz obr. 4.



Obr. 3 Snímek termovizní kamery Obr. 4 Snímek videokamery pro vyhodnocení polohy

Při odečtu polohy bylo políčko na videozáznamu zvětšeno tak, aby odečet byl proveden s přesností na 1 mm. Na snímku je zachycen pták těsně před „napitím“. Všechny uváděné hodnoty změny výšky sloupce kapaliny jsou korigované na svislou polohu ptáka během odečtu.

3. Výsledky měření

3.1. Určení maximální účinnosti η_C

Omezená účinnost transformace tepelné energie na energii mechanickou, která je důsledkem platnosti druhého zákona termodynamiky, je nejčastěji odvozována pro Carnotův cyklus ve tvaru

$$\eta_C = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (1)$$

kde T_1 je teplota ohříváče a T_2 teplota chladiče.

Bohužel, studenti si spojují většinou tuto účinnost s účinností jakéhokoliv cyklu. Fakt, že účinnost Carnotova cyklu je pro daný teplotní rozdíl principiálně nejvyšší možná a že reálná účinnost daného cyklu je většinou podstatně menší jim uniká.

Protože z předběžného rozboru bylo zřejmé, že registrované změny teploty budou v řádu 0,1 °C, tzn. že se budou pohybovat na samé hranici přesnosti nám dostupné a použité experimentální techniky, byl proveden velmi pečlivě odhad výsledné nejistoty získaných výsledků. Pro výsledné hodnoty maximální teploty T_1 v ocase a minimální T_2 v hlavě, změřené bezkontaktním teploměrem, byly získány hodnoty včetně odhadu nejistot

$$T_1 = 295,0(2) \text{ K}, \quad T_2 = 293,0(2) \text{ K}.$$

Dosažením uvedených hodnot do vztahu (1) získáme pro výslednou hodnotu

$$\eta_C = 0,0068(3) \doteq 0,7 \%. \quad (2)$$

4. Určení skutečné účinnosti η

Skutečná účinnost byla určena přímo z definice $\eta = W/Q$, kde W je práce vykonaná systémem a Q teplo systémem přijaté [4]. Vzhledem k tomu, že se dalo předpokládat, že hodnota realizované práce nebude příliš velká,

rozhodli jsme se ji určit dvěma různými metodami: za prvé ze změny polohy těžiště kapaliny, za druhé, trochu netradičně, z p - V diagramu [2]. Pomocí změny hodnoty polohy těžiště Δl_t , jsme hodnotu práce určili pomocí vztahu

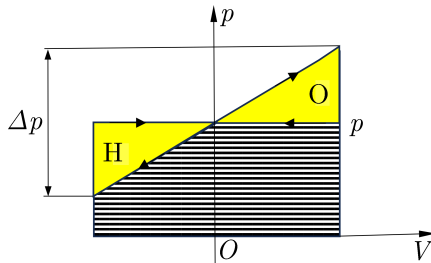
$$W = Mg\Delta l_t, \tag{3}$$

kde M je celková hmotnost použité kapaliny, g tíhové zrychlení a Δl_t změna polohy těžiště celkového tělesa kapaliny.

Hodnota $M = V\rho$ byla získána pomocí geometrických parametrů soustavy, objemu $V = 1,62(27) \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$ a hodnoty hustoty použité kapaliny, konkrétně metylenchloridu $\rho = 1,33(05) \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, hodnota byla získána z tabulek. Z naměřených hodnot změn výšky sloupce kapaliny, získaných z videozáznamů, byla pro změnu polohy těžiště získána hodnota $\Delta l_t = 3,3(10) \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Dosazením získaných hodnot do vztahu (3) získáme pro práci W hodnotu

$$W = 7,0(22) \cdot 10^{-4} \text{ J}. \tag{4}$$

Z pozorovaného průběhu zkoumaného cyklického procesu byl zkonstruován p - V diagram (viz obr. 5). Cyklus začíná ve středu diagramu odpovídajícímu okamžiku, kdy po „napití“ došlo k propojení objemů plynu v ocasu a hlavě a v systému se ustavil rovnovážný tlak p_0 . Posunem těžiště způsobeném výtokem kapaliny z hlavy, dojde k napřímení ptáka. To způsobí oddělení objemů plynu v hlavě H a ocase O. Následným odpařováním vody z povrchu navlhčeného obalu zobáku, dojde vlivem odběru potřebného skupenského tepla odpařování k poklesu jeho teploty a k následném přestupu tepla z okolního prostředí. V objemu hlavy ptáka H dochází ke snižování teploty, tlaku a vlivem výstupu kapaliny ve spojovací trubici i objemu par v hlavě ptáka.



Obr. 5 p - V diagram cyklu „píjícího ptáka“

Na diagramu je žlutě zobrazena oblast kladné práce vykonané systémem, oblast vyplněná vodorovnými čarami pak oblast záporné práce, zachycující práci okolí a teplo, odevzdané systémem do okolí. Oblast O (ocas), zachycuje i pokles těžiště, v našem případě představuje práci okolí, tj. práci tíhového pole. Na poklesu těžiště se tedy páry použité kapaliny nepodílejí! Kladná práce v prostoru hlavy H, je pak spojena s expanzí plynu při vyrovnávání tlaku po vynoření konce spojovací trubice.

V ocasu O, ve kterém se vlivem smísení s chladnějším plynem z hlavy z předešlého cyklu sníží teplota uzavřených par, dochází k přestupu tepla z okolního prostředí a k zvyšování teploty, tlaku a objemu. Zvyšování sloupce kapaliny ve spojovací trubici vede k posunu těžiště, což vyvolá zvětšování výchylky náklonu ptáka až do okamžiku, kdy je výchylka tak velká, že se zobák ponoří do sklenice s vodou, jeho pórovitý povrch nasaje vodu a zároveň dojde k vynoření spojovací trubice nad hladinu kapaliny uzavřené v ocase. Tím dojde k téměř okamžitému vyrovnání tlaku v hlavě a ocase a k následnému výtoku kapaliny, které vyvolá změnu polohy těžiště, pták se napřímí a začíná nový cyklus.

Počáteční průběh změny teploty, tlaku a objemu můžeme vzhledem k relativně malým hodnotám uvedených parametrů linearizovat. Po napití je následující změna tlaku téměř okamžitá a lze ji v p - V diagramu popsat jako izochorickou změnu tlaku a následující změnu objemu, vyvolanou výtokem kapaliny ze spojovací trubice, jako izobarickou změnu objemu. Celková práce systému je pak v p - V diagramu rovna celkové ploše vzniklých trojúhelníků [2]

$$W = \varrho g S (\Delta l)^2,$$

kde ϱ je hustota použité kapaliny, g tíhové zrychlení, $S = \pi r^2$ plocha průřezu trubice o poloměru $r = 4,0(5) \cdot 10^{-3}$ m a $\Delta l = 3,0(5) \cdot 10^{-2}$ m je rozdíl výšek hladiny kapaliny ve spojovací trubici těsně před a po „pití“. Tyto hodnoty byly zjišťovány z videozáznamů. Pro celkovou práci byla pak získána hodnota

$$W = 5,9(27) \cdot 10^{-4} \text{ J.} \quad (5)$$

I když jsou hodnoty (4) a (5) v řádové shodě a potvrzují fyzikální správnost našich úvah, použijeme pro další výpočet hodnotu (4), která je zatížena o něco menšími chybami.

Dále bylo nutné stanovit velikost přijatého tepla Q . Pro odhad této veličiny jsme vycházeli z následující úvahy: Ptáček pracuje cyklicky, a tedy

hodnota odebraného tepla musí být v následujícím cyklu vykompenzována. Hodnota dodaného tepla musí být tedy minimálně rovna této hodnotě. Hodnota odebraného tepla představuje tak spodní odhad hodnoty celkového dodaného tepla.

Pro odhad hodnoty tepla odebraného z hlavy ptáka byla použita hodnota tepla potřebného k odpaření vody z vodou smočeného zobáku. Při odparu vody sníží odebrané skupenské teplo teplotu vodou nasáklé povrchové vrstvy zobáku tak, že dojde k přestupu tepla z objemu zobáku a hlavy do nasáklé vrstvy zobáku. Hodnotu odebraného tepla tedy zjistíme z množství odpařené vody. Ta byla zjištěna dvojím vážením ptáka pomocí analytických vah – těsně před „napitím“ a těsně po „napití“. Tímto postupem byla získána hodnota hmotnosti odpařené vody $\Delta m = 3,1(2) \cdot 10^{-6}$ kg. Hodnota měrného skupenského tepla výparného při pokojové teplotě $l_v = 2,26(5) \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ byla získána z tabulek [2]. Pro spodní odhad přijatého tepla tak byla získána hodnota

$$Q_v = \Delta m l_v = 7,0(8) \text{ J}$$

a pro výslednou velikost účinnosti hodnota

$$\eta = 1,0(4) \cdot 10^{-5}. \quad (6)$$

Mezi hodnotou (2) získanou pro maximálně účinností η_C a hodnotou (6) skutečné účinnosti η je rozdíl dvou řádů! Skutečná hodnota účinnosti je v řádu jednotek procenta možné maximální hodnoty.

5. Něco navíc pro zájemce

Z mechanického hlediska (viz obr. 6), představuje soustava „píjícího ptáka“ fyzikální kyvadlo s časově proměnnou délkou závěsu $l(t)$, tj. časově proměnnou vzdáleností mezi bodem závěsu O a polohou těžiště T a s tím spojenou časovou změnou momentu setrvačnosti $J(t)$.

Jak lze usoudit z průběhu naměřených časových změn výšky sloupce kapaliny, lze při konstrukci pohybové rovnice předpokládat, že časovou závislost změny délky závěsu $l(t)$ závislou na výstupu sloupce kapaliny a s tím související časovou změnu momentu setrvačnosti $J(t)$, můžeme popsat v prvním přiblížení lineárními vztahy $l(t) = l_0(1 - bt)$ a $J(t) = J_0(1 - 2at)$.

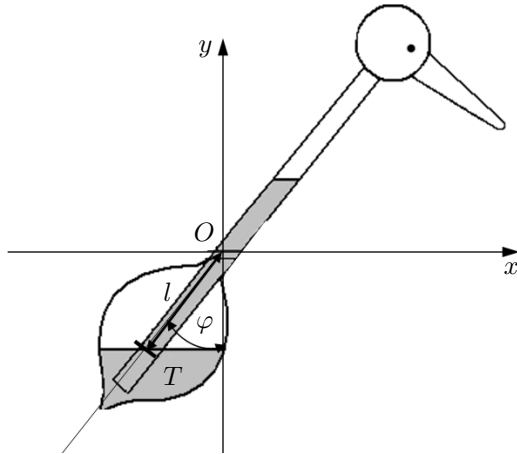
Pomocí postupů odvozených z teoretické mechaniky [3, 4, 5] a po jednoduchých úpravách dostaneme výslednou pohybovou rovnicí „ptáka“ ve tvaru

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{2a}{1-2at} \frac{d\varphi}{dt} + \omega^2\varphi = 0, \quad \omega^2 = \frac{mgl(t)}{J(t)},$$

kde byl použit pro malé změny úhlu φ přibližný vztah $\sin \varphi \approx \varphi$. Výsledné řešení uvedené diferenciální rovnice má pak tvar

$$\varphi(t) = C_1 J_0 \left(\omega t - \frac{\omega}{2a} \right) + C_2 N_0 \left(\omega t - \frac{\omega}{2a} \right), \quad (7)$$

kde $J_0(x)$ a $N_0(x)$ jsou Besselovy funkce 1. a 2. druhu nultého řádu a C_1, C_2 integrační konstanty, jejichž hodnota je určena počátečními podmínkami.

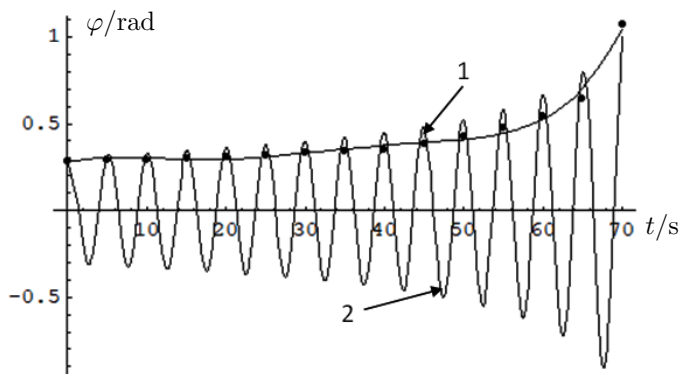


Obr. 6 Soustava souřadná pro popis systému „píjícího ptáka“

Soustava „píjícího ptáka“ koná tedy přibližně harmonický pohyb se zvětšující se amplitudou s úhlovou frekvencí

$$\omega = \sqrt{mgl_0/J_0}.$$

Na obr. 7 jsou zobrazeny naměřené časové hodnoty maximálních výchylek úhlu φ spolu s teoreticky vypočteným časovým průběhem úhlu φ dle vztahu (7) během jednoho cyklu. Metodou iterací byly pro parametry ω a a získány hodnoty $\omega = 1,26548 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ a $a = 6,6\cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Vzhledem k použitým zjednodušením je získaný matematický model v přijatelné shodě s výsledky experimentu.



Obr. 7 Časový průběh změn úhlu odklonu (1 – experiment, 2 – teorie)

Závěr

Cílem příspěvku bylo ukázat studentům, že pochopit a objasnit činnost i zařízení, na první pohled nikterak složitého, v souladu se zákony fyziky, není vždy jednoduché a vyžaduje i hlubší úvahu a zamyšlení. O trvajícím zájmu o fyzikální princip této hračky svědčí i řada časopiseckých publikací (např. [7]–[15]). V uvedeném případě bylo pak velmi zajímavé a podnětné, jak si spoluautorka, studentka učitelství, poradila, a nakonec vyřešila problémy spojené s nutností získat za daných podmínek a pomocí dostupné měřicí techniky všechny potřebné údaje.

Literatura

- [1] *OPENAI. Bing Chat Version. 2024-01-12.* Bing Chat: Píjící pták [cit. 2024-01-13]. Dostupné z: Skype, Bing.
- [2] *Kalčík, J.:* Technická termodynamika. ČSAV, Praha, 1963.
- [3] *Dardová I.:* Účinnost tepelných strojů, II. princip termodynamický. Diplomová práce, Přírodovědecká fakulta Ostravské univerzity, Ostrava, 2005.
- [4] *Kvasnica, J.:* Termodynamika. SNTL, Praha, 1965.
- [5] *Landau, L. D., Lifšic, E.M.:* Mechanika. Nauka, Moskva, 1965.
- [6] *Feymann, R., P., Leighton, R., B., Sands, M.:* Feymannove přednášky z fyziky, díl 2. Alfa, Bratislava, 1990.

- [7] *Frank, D. L.*: The drinking bird and the scientific method. *J. Chem. Edu.*, roč. 50 (1973), č. 3, s. 211. DOI [10.1021/ed050p211](https://doi.org/10.1021/ed050p211).
- [8] *Gaines, J. L.*: Dunking Duck. *Am. J. Phys.*, roč. 27 (1959), č. 3, s. 189–190. DOI [10.1119/1.1934801](https://doi.org/10.1119/1.1934801).
- [9] *Güémez, J. – Valiente, R. – Fiolhais, C. – Fiolhais, M.*: Experiments with the drinking bird. *Am. J. Phys.*, roč. 71 (2003), č. 12, s. 1257–1263. DOI [10.1119/1.1603272](https://doi.org/10.1119/1.1603272).
- [10] *Kolb, K. B.*: „Reciprocating“ engine. *The Physics Teacher*, roč. 4 (1966), č. 3, s. 121–122. DOI [10.1119/1.2350941](https://doi.org/10.1119/1.2350941).
- [11] *Lily, M. Ng. – Yvonne S. Ng.*: The thermodynamics of the drinking bird toy. *Phys. Educ.*, roč. 28 (1993), č. 5, s. 320. DOI [10.1088/0031-9120/28/5/014](https://doi.org/10.1088/0031-9120/28/5/014).
- [12] *Lorenz, R.*: Finite-time thermodynamics of an instrumented drinking bird toy. *American Journal of Physics*, roč. 74 (2006), č. 8, s. 677–682. DOI [10.1119/1.2190688](https://doi.org/10.1119/1.2190688).
- [13] *Mentzer R.*: The drinking bird – The little heat engine that could. *The Physics Teacher*, roč. 31 (1993), č. 2, s. 126–127. DOI [10.1119/1.2343682](https://doi.org/10.1119/1.2343682).
- [14] *Miller, J. S.*: Physics of the Dunking Duck, *Am. J. Phys.*, roč. 26 (1958), č. 1, s. 42–43. DOI [10.1119/1.1934601](https://doi.org/10.1119/1.1934601).
- [15] *Plumb, R., Wagner, R. E.*: Physical chemistry of the drinking duck. *J. Chem. Edu.*, roč. 50 (1973), č. 3, s. 213. DOI [10.1021/ed050p213.1](https://doi.org/10.1021/ed050p213.1).

Nepřímé měření výstupního napětí Van de Graaffova generátoru

ČENĚK KODEJŠKA

Gymnázium, SOŠ a VOŠ, Komenského 77, Nový Bydžov

Van de Graaffův generátor (VdGG) je znám mezi učiteli fyziky především jako demonstrační nástroj pro vytvoření viditelného jiskrového výboje mezi koulí VdGG a menší vybíjecí koulí s plastovým držadlem. Velmi

efektní je také experiment, kterým můžeme přibližně zobrazit siločáry elektrického pole okolo hlavy testované osoby prostřednictvím jejích vlasů. Připomeňme též méně známé experimenty s rotujícím elektrostatickým větrníkem (známým také jako Hamiltonův mlýnek) umístěným na vrcholu VdGG, sršení náboje z hrotu způsobující ohyb plamene svíčky (elektrický vítr), levitace polystyrénových kuliček v akrylovém válci s kovovým dnem spojeným s VdGG, elektrostatická zvonkohra, aj. viz [1].

Moderní doba přináší i pokusy o spojení klasického experimentu např. s rozšířenou realitou [2], a musíme také zmínit i původní článek Roberta Van de Graaffa o využití VdGG coby zdroje vysokého napětí pro lineární urychlovače částic [3].

V tomto článku se nicméně chceme zaměřit na klasické využití VdGG jako zdroje vysokého napětí o velikosti řádově 10^5 V.

Metod, jak určit napětí VdGG, není mnoho a většinou poskytují jen orientační hodnoty výstupního napětí generátoru. S Van de Graaffovým generátorem, a zejména s jeho zdokonalováním, je historicky spojen doc. Jan Žouželka, který navrhl pro měření výstupního napětí VdGG elektrostatický rotační voltmetr [4].¹⁾ Moderní způsob výroby elektrostatického voltmetru je pak uveden např. v [5].

Teoretické výpočty napětí VdGG metodou rezonanční frekvence nebo modelace elektromagnetického tlumeného pulzu lze najít v [6], přibližný výpočet napětí při použití tzv. „gap“ metody, kdy se měří vzdálenost mezery mezi kulovými sférami, je pak uveden v [7].

V souladu s posledně zmíněným zdrojem je třeba uvést, že výstupní napětí VdGG není vždy stejné, jeho hodnotu ovlivňuje např. teplota a tlak okolního vzduchu nebo vlhkost vzduchu. Hlavním parametrem ovlivňujícím velikost výstupního napětí generátoru je pak i průměr koule VdGG, rychlost pohybu a šířka přenosového pásu a permitivity všech pohyblivých částí generátoru.

Jen čistě pro úplný přehled zde zmíníme i metodu kapacitních nebo odporových děličů, které uvádí [8], ale i tyto metody poskytují pouze orientační hodnoty napětí VdGG.

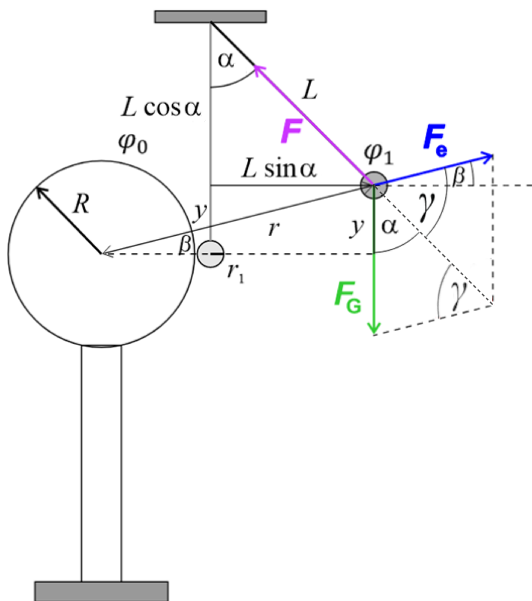
Cílem této práce bylo navrhnout takovou experimentální metodu, která by nejen poskytla přesnější hodnoty výstupního napětí VdGG, ale která by mohla být především využita na středních školách v rámci laboratorních cvičení.

¹⁾Bez zajímavosti není skutečnost, že tento článek věnoval jednomu ze zakladatelů olomoucké didaktiky fyziky prof. Josefu Fukovi k jeho 65. narozeninám.

A. Teoretické odvození elektrického potenciálu na povrchu koule VdGG

Výpočet elektrické síly z výchylky kyvadla je podrobně uveden v online sbírce řešených úloh z fyziky [9], která vzniká od roku 2006 na Katedře didaktiky fyziky MFF UK. Většina úloh prošla odbornou recenzí a svým zaměřením pokrývají oblast ZŠ, SŠ i VŠ.

Na obr. 1 je znázorněn VdGG s poloměrem koule R , kyvadlo o délce L a poloměrem kuličky r_1 , vzájemná vzdálenost středů obou koulí je r . Velikost elektrického potenciálu na povrchu koule VdGG je označena φ_0 , velikost potenciálu ve vzdálenosti r od středu koule VdGG je označena φ_1 .



Obr. 1 Elektrostatické kyvadlo s VdGG – působící síly

Uveďme nejprve některé matematické vztahy vyplývající ze situace na obr. 1. Pro výpočet úhlu β plyne v souladu s [9] následující vztah:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{R + r_1 + L \sin \alpha}, \quad (1)$$

kde $y = L - L \cos \alpha = L(1 - \cos \alpha)$.

Výpočet elektrické síly z rovnoběžníku sil

Pro výpočet elektrické síly F_e vyjdeme ze sinové věty mezi silami F_e , F_G a úhly α a γ , ze které plyne vztah

$$F_e = \frac{F_G \sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{mg \sin \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha + \beta)} = \frac{mg \sin \alpha}{\cos(\alpha - \beta)}, \quad (2)$$

přičemž platí $\gamma - \beta = 90^\circ - \alpha$ a obecně platný vztah $\sin(90^\circ - x) = \cos x$.

Výpočet síly z Coulombova zákona

Platí-li současně, že velikost elektrické síly mezi dvěma nabitými koulemi, jejichž středy jsou ve vzájemné vzdálenosti r , je dána vztahem

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad (3)$$

můžeme z rovnosti vztahů (2) a (3) vyjádřit velikost náboje Q_1 na kouli VdGG jako

$$Q_1 = \frac{mg \sin \alpha}{\cos(\alpha - \beta)} \frac{4\pi\epsilon r^2}{Q_2}. \quad (4)$$

Protože obecně platí $Q = C\varphi$, a kapacita malé koule kyvadla je dána vztahem $C = 4\pi\epsilon r_1$, můžeme do vztahu (4) dosadit za Q_2 výraz $4\pi\epsilon r_1 \varphi_0$. Potenciál φ_0 získá malá koule v okamžiku kontaktu s koulí VdGG. Rovnice (4) po dosazení a úpravě pak přejde na tvar

$$Q_1 = \frac{mg \sin \alpha}{\cos(\alpha - \beta)} \frac{r^2}{r_1 \varphi_0}. \quad (5)$$

Výpočet potenciálu φ_0 na povrchu koule VdGG

Pro výpočet potenciálu φ_0 na povrchu koule VdGG platí obecně známý vztah

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q_1}{R}, \quad (6)$$

ze kterého můžeme vyjádřit náboj Q_1 rovnicí

$$Q_1 = 4\pi\epsilon R \varphi_0. \quad (7)$$

Dosazením vztahu (5) do rovnice (7) získáme výsledný vztah pro potenciál φ_0 . Protože výstupní napětí VdGG je dáno rozdílem potenciálu φ_0 a nulového potenciálu země, můžeme výsledný vztah pro potenciál φ_0 současně považovat za vztah pro výstupní napětí VdGG, který je dán rovnicí

$$U_{\text{VdGG}} = \varphi_0 = \sqrt{\frac{mg \sin \alpha}{\cos(\alpha - \beta)} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{r^2}{r_1 R}}. \quad (8)$$

B. Experimentální určení výstupního napětí VdGG

Při realizaci experimentu byl použit Van de Graaffův generátor s elektrickým pohonem 230 V / 50 Hz. Průměr koule generátoru je 28 cm, maximální zkratový proud $I_{\text{max}} = 10 \mu\text{A}$, rychlost otáček pásu 1 500 ot/min, kapacita vnitřního kondenzátoru cca 15 pF. Průměrná vlhkost vzduchu při realizaci experimentu byla 45 %.

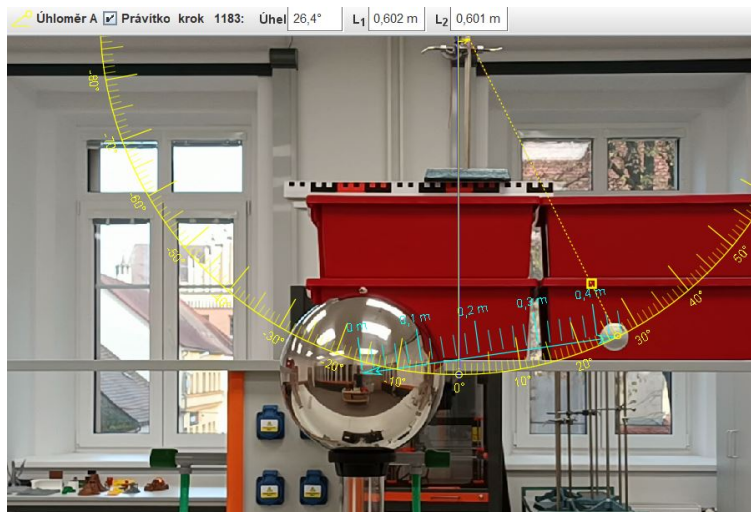
Před spuštěním VdGG byl míček kyvadla ve svislé poloze tak, aby se svým průměrem dotýkal koule generátoru v místě jejího průměru. Po zapnutí generátoru došlo nejprve k odchýlení kyvadla asi o 15° , pak se kyvadlo vrací díky gravitaci zpět do rovnovážné polohy. Ne vždy se ale dotkne koule VdGG. Teprve v okamžiku přímého kontaktu mezi oběma koulemi kyvadlo začne odskakovat do větších vzdáleností a výchylka závěsu kyvadla od svislého směru dosáhne své maximální hodnoty.

Při videoanalýze je pak třeba vzít v úvahu jen ty úhly, kdy kyvadlo kmitá ve svislé rovině, která je současně rovnoběžná s rovinou objektivu kamery. Pouze v tomto případě poskytuje kalibrační nástroj programu Tracker společně s nástrojem pro měření délky reálné hodnoty délek nekreslené perspektivou. Videozáznamy byly pořízeny mobilním telefonem, který byl fixován na stativu.

Jak plyne ze vztahu (8), metoda nepřímého měření výstupního napětí VdGG spočívá v určení hodnoty hmotnosti m kyvadla, maximální odchylky závěsu kyvadla od svislé polohy o úhel α , změření poloměrů obou koulí a především změřením maximální vzdálenosti r , o kterou se kyvadlo vzdálí od středu VdGG. Protože jde o poměrně rychlý a dynamický proces, různá čidla jako např. Motion Detector od Vernieru, která jsou založená na ultrazvukové detekci, by se v praxi pro měření vzdálenosti r uplatnila jen velmi obtížně. Podobné je to s přesným změřením úhlu α .

Proto jsme se rozhodli použít, jako už v některých jiných experimentech, kde je třeba analyzovat rychlý pohyb tělesa (viz např. [10]), videoanalýzu pomocí programu Tracker. Na obr. 2 je ukázka měřících nástrojů

v programu Tracker, konkrétně úhloměru (žlutá barva) a délkového měřidla (světlemodrá barva). Protože program umožňuje relativně přesnou kalibraci vzdáleností pomocí známých rozměrů, jako je např. délka kyvadla v rovnovážné poloze, je měření touto metodou poměrně velmi přesné. Vzdálenosti lze měřit s přesností na cm s absolutní nejistotou 0,5 cm, úhly s přesností na stupně s absolutní nejistotou 0,5°.



Obr. 2 Videoanalýza v programu Tracker

Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 1. Měření bylo provedeno pro různé délky L kyvadel v intervalu hodnot 0,6 m až 1 m. Pingpongový míček potřený grafitem měl hmotnost $m = 2,9$ g a poloměr $r_1 = 2,0$ cm. Jako druhé kyvadlo byl použit plastový dutý míček s nástřikem Zn-Al barvy o hmotnosti $m = 6,3$ g a poloměru $r_1 = 2,4$ cm. Poloměr koule Van de Graaffova generátoru byl změřen v souladu s údaji výrobce jako $R = 14$ cm.

Průměrná hodnota výstupního napětí z hodnot uvedených v tabulce 1 byla určena jako

$$U_{\text{VdGG}} = (150 \pm 5) \text{ kV}.$$

Hodnota udávaná výrobcem je v intervalu 150 kV až 200 kV, takže získaný výsledek je v dobrém souladu s tímto rozmezím.

Tabulka 1. Hodnoty napětí U_{VdGG} v závislosti na parametrech podle rovnice (8).

Pingpongový míček $m = 2,9 \text{ g}, r_1 = 2,0 \text{ cm}$				Plastový míček $m = 6,3 \text{ g}, r_1 = 2,4 \text{ cm}$			
L/m	r/cm	α/β	U/kV	L/m	r/cm	α/β	U/kV
1.0	70	$30^\circ/12^\circ$	154	1.0	61	$24^\circ/9^\circ$	163
0.8	66	$35^\circ/13^\circ$	157	0.8	53	$25^\circ/8^\circ$	143
0.6	59	$41^\circ/15^\circ$	155	0.6	46	$26^\circ/8^\circ$	129

Závěr

Zabývali jsme se nepřímou metodou měření výstupního napětí Van de Graaffova generátoru a teoretickým odvozením vztahu pro potenciál na povrchu koule generátoru.

Průměrná hodnota výstupního napětí $U = 150 \text{ kV}$ získaná pomocí měřících nástrojů v programu Tracker, ve kterém jsme prováděli videoanalýzu pohybu kyvadla, byla v souladu nejen s údaji výrobce, ale i s přibližnou „gap“ metodou, při které byla změřena průměrná vzdálenost mezi hlavní koulí VdGG a vybíjecí koulí při přeskoku jiskry cca 5–7 cm. To ve spojení s kritickou hodnotou intenzity $E = 3 \text{ MV/m}$, při které dojde k průrazu vzduchového dielektrika, vede k hodnotě výstupního napětí v rozmezí 150 kV až 210 kV.

Výhodou této metody je nejen poměrně přesné a snadné určení napětí Van de Graaffova generátoru pomocí videoanalýzy pohybu kyvadla, ale současně lze tento netradiční experiment realizovat v rámci laboratorních prací na střední škole, čímž lze obohatit nejen gymnaziální kurikulum o atraktivní badatelskou aktivitu, ale zejména o zkušenost, kterou si žák ve škole při práci s Van de Graaffovým generátorem osvojí.

Literatura

- [1] Van de Graaff generator. https://www.science2education.co.uk/handlers/libraryFiles.ashx?filename=Manuals_P_PY5500_A.pdf
- [2] Wildan, A. et al.: Augmented Reality Experiment with a Van de Graaff Generator. Phys. Teach., roč. 60 (2022), s. 475–477.

- [3] *Van de Graaff, R., Compton, K. T., Van Atta, L. C.*: The electrostatic production of high voltage for nuclear investigations. *Phys. Rev.*, roč. 43 (1933), s. 149–157.
- [4] *Žouželka, J., Trčka, Z.*: Nové přístroje pro pokusy z elektrostatiky. *Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, Fac. Rer. Nat.. Mathematica–Physica–Chemica*, roč. 12 (1972), č. 1, s. 293–303.
- [5] *Tant, P., Bolsens, B., Sels, T., Dommelen, D., Driesen, J., Belmans, R.*: Design and application of a field mill as a high-voltage DC meter. In: *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, roč. 56 (2007), č. 4, s. 1459–1464. <http://dx.doi.org/10.1109/TIM.2007.900157>
- [6] *Kress, R. J.*: Analysis of a Van De Graaff Generator for EMP Direct Current Survivability Testing. *Theses and Dissertations*, 935, (2013). [online]. <https://scholar.afit.edu/etd/935>
- [7] *Jaitu, A., Lohar, A., Patil, S., Mokal, V., Kasar, N.*: Design and implementation of Van de Graaff generator. *International Journal of Innovative Science and Research Technology*, roč. 5 (2020). <http://dx.doi.org/10.38124/IJISRT20SEP274>
- [8] *Hnyk, M.*: Elektrostatické generátory. *Bakalářská práce, KDF MFF UK Praha*, 2012. [online]. https://dspace.cuni.cz/bitstream/handle/20.500.11956/40387/BPTX_2011_1__0_283653_0_115133.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- [9] Elektrické kyvadélko v poli nabité koule (velká výchylka). [online]. [https://reseneulohy.cz/153/elektricke-kyvadelko-v-poli-nabite-koule-\(velka-vychylka\)](https://reseneulohy.cz/153/elektricke-kyvadelko-v-poli-nabite-koule-(velka-vychylka))
- [10] *Kodejška, Č., Richterek, L., Říha, J.*: Buquoy’s problem in an introductory physics course. *J. Phys.: Conf. Ser.* 1512 012003 (2020). <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1512/1/012003>



Zdroj: Elektrostatické pole. <http://old.spsemoh.cz/vyuka/zae/el5.htm>

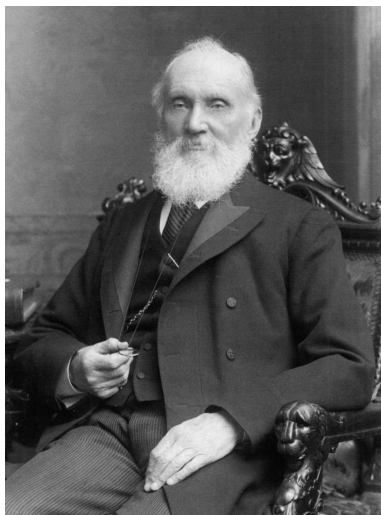
Sir William Thomson

(ke dvoustému výročí narození)

JITKA HOŠKOVÁ PROKŠOVÁ

Fakulta pedagogická ZČU, Plzeň

V 19. století patřil William Thomson (více známý svým šlechtickým jménem jako lord Kelvin, baron z Largsu) k nejvýznamnějším evropským matematikům a přírodovědcům. Jeho nadání a záliba v matematice, fyzice a filozofii byly od útlého věku tak silné, že už v deseti letech začal studovat na Glasgowské univerzitě. Za svého života napsal 661 publikací a přihlásil na sedmdesát patentů. Radost z objevování ho přivedla k vynálezům, které posunuly hranice lidského poznání ve fyzice nízkých teplot, v termodynamice, v atmosférické elektřině nebo v přenosu elektrické energie (podmořským kabelem).



Portrét Williama Thomsona, Barona Kelvina (1824–1907) na fotografii studia Russell & Sons, London (zdroj: [Wikipedie](#))

William se narodil 26. června 1824 v irském Belfastu, kde jeho otec James Thomson působil jako profesor matematiky a inženýrství na Královském akademickém institutu. Matka zemřela Williamovi v jeho šesti letech. V roce 1833 se s otcem a pěti sourozenci přestěhoval do Glasgow, kde Jamesi Thomsonovi nabídli místo profesora matematiky na místní univerzitě. Glasgowská univerzita tehdy umožňovala studium i nadaným žákům základních škol. Svým silným zaujetím pro přírodní vědy a filozofii k nim William rozhodně patřil, a tak začal univerzitní studia ve svých deseti letech¹⁾. Během následujících let získal za své matematické nadání a kreativitu několik cen [1].

V roce 1841 se věnoval problematice šíření tepla v pevných látkách a sepsal první tři odborné články [2], ve kterých porovnal matematické teorie vedení tepla s jevy elektrostatiky – tyto analogie později vyzdvihl jeho o sedm let mladší krajan James Clerk Maxwell (1831–1879) jako jedny z nejcennějších úvah moderní vědy. Ve stejném roce byl také William přijat k dalšímu studiu na Peterhouse College v Cambridge, kde kromě rozvíjení vědomostí našel velkou zálibu ve veslování, v hudbě a v literatuře, nicméně prioritou pro něj stále zůstávaly přírodní vědy. Po čtyřech letech pak získal bakalářský titul a také Smithovu cenu²⁾ [1].

Pozornost mladého Williama vzbudily Faradayovy experimenty, a tak se zabýval úvahami o elektrické indukci a navrhl matematickou metodu zobrazování nábojů pro hledání siločar v elektrostatice. Možná i v reakci na Thomsonovo povzbuzení se pak Michael Faraday (1791–1867) pustil do výzkumu, který vedl k objevu magnetooptického jevu (později po něm pojmenovaném), kdy ve vhodném prostředí za působení podélného magnetického pole dochází ke stáčení roviny lineárně polarizovaného světla.³⁾

Po studiích obohatila Williama pětíměsíční stáž zaměřená na kalorimetrii – absolvoval ji v Paříži u fyzikálního chemika Henriho Victora Regnaulta (1810–1878). Během ní se seznámil s řadou francouzských vědců a získal tak cenné podněty pro další výzkum. Jeho pobyt ve francouzské metropoli však v roce 1846 přerušilo jmenování profesorem přírodní filozofie na Glasgowské univerzitě, a tak začal William Thomson ve svých 22 letech vést vysokoškolské kurzy. V té době si již vybudoval v Británii pověst nadaného

¹⁾ Spolu s ním byl přijat ke studiu i jeho o rok starší bratr James.

²⁾ Cena za originální výzkum v matematice a fyzice.

³⁾ Příčinou stáčení roviny lineární polarizace je především různá rychlost složek polarizovaného světla při šíření materiálem umístěným v magnetickém poli. Faradayův jev se využívá například v astrofyzice, magnetooptice, spintronice, optických telekomunikacích nebo laserové fyzice.

nezávislého vědce, proto nebylo divu, že se s chutí pustil do problematiky, která tehdy vyvolávala vášnivé rozpory. Šlo v nich o podstatu tepla, o převoditelnost tepla na mechanickou práci, popř. o jeho mechanickou ekvivalenci. Začal se tedy zabývat dynamickou teorií tepla a v roce 1848 představil návrh absolutní termodynamické stupnice. Ponořil se do termodynamiky natolik, že se podílel i na formulaci termodynamických zákonů⁴⁾ a přidal se ke kritice prací Sadi Carnota (1796–1832). Carnotovy závěry se lišily od Jouleových poznatků především „absolutně ztraceným teplem“, o němž Thomson tvrdil, že se „nenávratně ztratilo člověku, nikoli však v materiálním světě“. Tím rozšířil své úvahy o druhém termodynamickém zákonu na celý vesmír a vynořila se otázka tepelné smrti vesmíru [3, 4, 5].⁵⁾

Thomsonova spolupráce s Jamesem Prescottem Joulem (1818–1889) vyústila v objev jevu, který jako první potvrdil existenci mezimolekulárního působení v reálném plynu (Joulův–Thomsonův efekt) a kterého se v kryogenice využívá k předchlazení systémů. Jejich výzkum také položil základy kinetické teorie tepla.

Na podzim roku 1852 se Thomson oženil s Margaret Crumovou. Manželčino podlomené zdraví ho však další léta odvádělo od dřívějšího intenzivního pracovního nasazení. Přesto se začal znovu zabývat elektřinou a magnetismem, mezi jiným i rezonančními jevy v oscilačních elektrických obvodech. Odvodil vztah pro závislost rezonanční frekvence ω_0 na indukčnosti L a kapacitě C (dnes známý jako Thomsonův vzorec)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

O rok později ho George Gabriel Stokes (1819–1903), Williamův dlouholetý přítel ze studií na Cambridge, požádal o názor na Faradayovy pokusy, které se týkaly návrhu konstrukce transatlantického podmořského telegrafního kabelu z Evropy do Ameriky. Problematika průchodnosti kabelu Thomsona zaujala, a tak se vrhl do propočítání přenosové rychlosti – došel k závěru, že rychlost přenosu dat v kabelu je nepřímo úměrná druhé mocnině jeho délky. V analýze z roku 1855 se také věnoval vlivu

⁴⁾Více v Thomsonově článku *On the Dynamical Theory of Heat* [3].

⁵⁾Tento pojem označuje vývoj vesmíru do stavu, kdy je zvyšování entropie podle druhého termodynamického zákona příčinou vyčerpání veškeré využitelné energie do odpadního tepla. V takovém případě by pak nemohl existovat život. Stav tepelné smrti vesmíru by však platil jen tehdy, pokud by byl vesmír izolovaným termodynamickým systémem. I v současnosti se stále vedou diskuze, zda je vůbec možné aplikovat termodynamický pojem entropie na celý vesmír.

konstrukce kabelu na jeho rentabilitu. V roce 1856 se stal vědeckým poradcem a zároveň členem správní rady Atlantické telegrafní společnosti Wildman Whitehouse. V dalších letech představil Thomson návrhy velmi citlivých měřicích přístrojů, z nichž zřejmě nejvíce zaujal svým zrcátkovým galvanometrem, který si nechal patentovat.

V letech 1857 až 1865 se účastnil několika plaveb při pokládání podmořského kabelu. Za neúspěšné pokusy většinou mohly technické nebo povětrnostní potíže. Až v roce 1866 byl během další plavby položen kabel, který se nepřetrhl, a dokonce se tehdy podařilo nalézt i ztracený kabel z pokusu minulého roku. Thomsonovo úsilí i víra v konečný úspěch byly odměněny zaslouženým obdivem veřejnosti a v listopadu roku 1866 mu byl spolu s dalšími osobnostmi tohoto projektu udělen královnou Viktorií šlechtický titul sir. Některé z přístrojů, které tehdy vyvinul pro kabelovou telegrafii, se v šedesátých letech 19. století staly významným přínosem i pro bádání v oblasti atmosférické elektřiny [1].⁶⁾

V roce 1867 završil William Thomson svou dlouholetou spolupráci s kolegou a přítelem Peterem Guthriem Taitem (1831–1901) vydáním učebnice *Pojednání o přírodní filozofii* (Treatise on Natural Philosophy) [6], která se brzy stala stěžejní publikací pro výuku matematické fyziky. V tomto roce také přednesl na jednání Royal Society of Edinburgh zajímavý koncept povahy atomů, které považoval za vírové útvary v (tehdy tolik populárním) éteru. Vycházel přitom ze závěrů práce Hermanna von Helmholtze (1821–1894) z roku 1858⁷⁾, že vírová vlákna se v neohraničené, nestlačitelné a neviskózní tekutině (éteru) uzavírají ve stabilní prstence. V průběhu dalších desetiletí se Thomson snažil svůj původní návrh, opírající se o jednotný mechanický mikroskopický pohled na přírodní jevy, dále rozvíjet, proto teoreticky vyšetřoval tvarovou různost a pohyby zmíněných prstenců. Jeho práce našla kladnou odezvu například u Alberta Abrahama Michelsona (1852–1931) nebo Jamese Clerka Maxwella, se kterým Thomson udržoval pravidelnou korespondenci a přátelské vztahy [4, 5].

V červnu 1870 došlo ke smutné události v Thomsonově soukromí – po dlouhé vysilující nemoci zemřela jeho manželka Margaret. Na podzim stejného roku se Thomson rozhodl koupit námořní plachetnici, kterou pojal jako plovoucí laboratoř k testování námořních kompasů a jiných navigač-

⁶⁾Na observatoři Kakioka v Japonsku se používal Kelvinův kapátkový elektrometr pro měření atmosférického elektrického pole až do roku 2021.

⁷⁾Na Helmholtzův článek upozornil Thomsona výše zmíněný Peter Guthrie Tait a předvedl mu i pokusy s kouřovými prstenci ve vzduchu, na kterých demonstroval vlastnosti těchto útvarů.

ních přístrojů a kterou se obvykle plavil v doprovodu svých kolegů. Při těchto plavbách se během zastávky na Madeiře poznal s Francis Annou Blandyovou a v červnu roku 1874 se s ní oženil. Sňatek byl zřejmě i příčinou, že začal budovat své venkovské sídlo Netherhall, usedlost ve skotském Largsu. I druhé manželství však zůstalo bezdětné.

Během osmdesátých let 19. století rozšířil Thomsonovu teorii vírů jeho jmenovec Joseph John Thomson (1856–1940). Za to, že následující desetiletí přineslo zmar této teorie, mohly především nové experimentální poznatky. Jednalo se o Michelsonovy–Morleyho pokusy, které odhalily nevěrohodnost existence etéru, a objev elektronu⁸⁾. Přesto je třeba upozornit, že Thomsonovy úvahy měly vliv na vznik jedné z oblastí topologie – na teorii uzlů.⁹⁾

Během svého života dostával Thomson řadu prestižních nabídek ke změně působení, ale zůstal věrný Glasgowské univerzitě po neuvěřitelných 53 let. Jako vysokoškolský pedagog se při přednáškách údajně nechával unést a odchyloval se od tématu natolik, že šanci sledovat tok jeho uvažování měli jen ti nejlepší studenti. Ti ale jistě dokázali ocenit Thomsonovy podněty a touhu stále vynalézat nové pomůcky a přístroje [1].

Za celý život se William Thomson stal držitelem mnoha domácích i zahraničních ocenění. V roce 1883 například získal Copleyho medaili Královské společnosti a o devět let později byl za své úspěchy v termodynamice povýšen (jako první britský vědec) do Sněmovny lordů. Zároveň mu byl udělený titul lord Kelvin, baron z Largsu.¹⁰⁾

Skoro do konce svého života se Thomson věnoval průmyslovému výzkumu, což dokládá i obrovské množství – více než 70 – vynálezů, které přihlásil k patentování. Ještě v roce 1904, tedy ve svých osmdesáti letech, se stal kancléřem Glasgowské univerzity [1].

O tři roky později, 17. prosince 1907 zemřel na následky nachlazení ve své usedlosti v Largsu. Je pohřbený ve Westminsterském opatství v Londýně poblíž ostatků dalších velikánů, jako byli Isaac Newton, John Herschel a Charles Darwin. V muzeu Univerzity v Glasgow jsou vystavené ve stálé expozici jeho originální písemnosti, významné dokumenty a jiné artefakty.

⁸⁾Elektron jako částice byl objeven roku 1897 již zmíněným J. J. Thomsonem při studiu podstaty katodového záření.

⁹⁾Teorie uzlů se zabývá matematickými uzly, jejichž konce (na rozdíl od uzlů z běžného života) jsou spojeny. Do dnešní doby je takových matematických útvarů evidováno víc než 6 miliard.

¹⁰⁾Thomson si vybral jméno Kelvin podle říčky, která protékala v univerzitním areálu kolem jeho laboratoře. Město Largs leží v severním Skotsku poblíž sídla Netherhall.

Lord Kelvin patřil mezi nejvlivnější vědce 19. století a díky jeho teoretickým poznatkům vznikla (zejména v oblasti kryogeniky) i po jeho smrti řada vynálezů.



Památník Williama Thomsona, lorda Kelvina, poblíž Glasgowské univerzity (zdroj: [Wikipedie](#))

Literatura

- [1] William Thomson, Baron Kelvin, Biography & Facts, Britannica [online, 2. 1. 2024] Dostupné z: <https://www.britannica.com/biography/William-Thomson-Baron-Kelvin>.
- [2] Mathematical and physical papers by Kelvin [online, 3. 1. 2024]. Dostupné z: <https://archive.org/details/mathematicalphys06kelvuoft>.
- [3] Thomson W.: On the Dynamical Theory of Heat. Transactions of the Royal Society of Edinburgh, March, 1851, and Philosophical Magazine IV. 1852 [online, 3. 1. 2024]. Dostupné z: https://zapatopi.net/kelvin/papers/on_the_dynamical_theory_of_heat.html.
- [4] Lacina A.: Stavba atomu – od prvních spekulací k Bohrovu modelu [online, 3. 1. 2024]. Dostupné z: https://www.physics.muni.cz/kof/clanky/stavba_atomu.pdf.
- [5] Thomson W.: Elasticity and Heat. A. and Ch. Black. Edinburgh, 1880 [online, 3. 1. 2024] Dostupné z ETH-Bibliothek: <https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/3369210?query=William%20Thomson>.
- [6] Thomson W., Tait P. G.: Treatise on natural philosophy. Clarendon Press, 1867 [online, 3. 1. 2024]. Dostupné z: <https://babel.hathitrust.org/cgi/pt?id=hvd.32044014664221&view=1up&seq=17>.

Dělení kostky na vlastní oči

ŠÁRKA GERGELITSOVÁ – TOMÁŠ HOLAN

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

V [1] jsme před časem popsali úlohu, kolika způsoby lze rozdělit kostku, složenou z $2 \times 2 \times 2$ kostiček, na dvě souvislé části. Někteří z čtenářů úlohu vyřešili sami, jiní možná uvěřili našemu řešení [2], ale nebylo by lepší, kdybychom se o tom mohli přesvědčit na vlastní oči?

Obrázek často vydá za mnoho slov, říká se. A to se říká o dvourozměrných obrázcích, ale do třírozměrného prostoru se toho vejde víc než na dvourozměrný papír. Mohli bychom zobrazit všechny možnosti rozdělení krychle na části v trojrozměrném prostoru tak, aby si je každý mohl prohlédnout? Netrpělivi čtenáři se mohou podívat sem: <https://projektor.geometry.cz/?co=show&did=335>, ti trpělivi nechtě čtou dále.

Možnosti trojrozměrného zobrazení

Když jsme (my, autoři tohoto článku) chodili do školy, mívali jsme v kabinetech zeměpisu, přírodopisu, ale i fyziky nebo chemie, řadu trojrozměrných modelů vyrobených ze dřeva a lepenky. Dnes je snazší si takový model vyrobit a zobrazit v počítači, ať už se na něj budeme dívat pomocí brýlí pro virtuální realitu nebo jen jako na obrázek, kterým můžeme různě pohybovat a otáčet.

Pokud chceme vytvořit trojrozměrný model, můžeme použít některý z řady modelovacích programů (Blender, 3DSMax, ...), ale pokud nechceme nic instalovat a pokud se nechceme učit ovládat nový program, stačí nám nástroje a jazyky, které dokážou trojrozměrné objekty popsat textem a následně zobrazit ve webovém prohlížeči. Takovým jazykem je VRML [4], dnes nahrazované svým následníkem X3D [5] a X3DOM [6]. Trojrozměrné objekty se tam popisují pomocí zvláštní syntaxe a není těžké

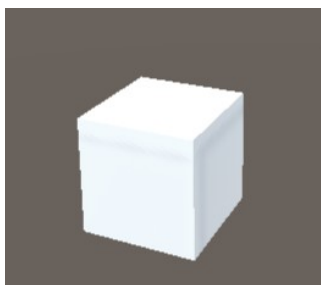
pomocí několika řádků definovat trojrozměrnou scénu, kterou potom prohlížeč dokáže zobrazit.

Nová syntaxe

Protože jsme se ale nechtěli zatěžovat syntaxí VRML ani X3D, vymysleli jsme si ještě jednodušší jazyk a vytvořili jsme k němu prohlížeč, to všechno v jedné webové stránce [7]. Scéna se v něm popisuje jako text, každý řádek odpovídá jednomu objektu a když napíšeme třeba

C

dostaneme krychli:

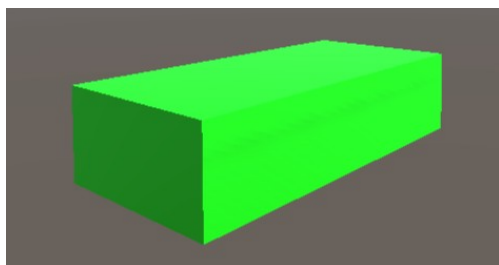


Podobně příkaz S vytvoří kouli nebo Y válec.

Když nejsme spokojeni s velikostí, můžeme do stejného řádku přidat parametry ovlivňující velikost (S), ale také rotaci (R), barvu (C) nebo polohu (P), takže třeba příkaz

```
C S 2 0.5 1 C 0 1 0 P 0 1 0
```

vytvoří zelenou cihlu posunutou o 1 vzhůru (krychle škálovaná v ose x na dvojnásobek, v ose y na polovinu, jejíž barva je vyjádřena pomocí RGB složek $(0, 1, 0)$ a která je posunutá z počátku o vektor $(0, 1, 0)$).



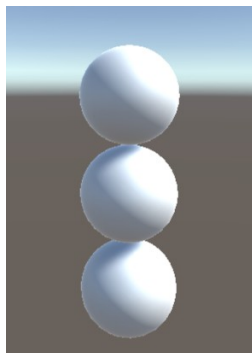
Příkazy

S

S P 0 1 0

S P 0 2 0

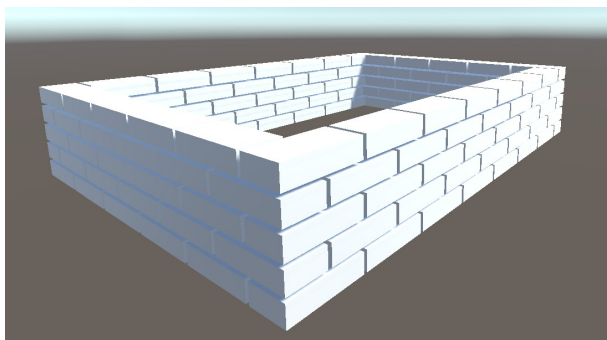
vyrobí sněhuláka:



Program, který píše program

Nepíšeme tenhle článek proto, abychom ukazovali další z mnoha možností, jak popisovat trojrozměrné konstrukce, ani nezapomínáme na to, čím jsme začali, tedy dělením kostky, už se k tomu blížíme.

Takže máme jazyk, kterým můžeme popsat trojrozměrnou scénu, a máme program, který tuto scénu potom dokáže zobrazit. Další krok, který chceme představit, je, že ten popis scény nemusíme psát vlastnoručně, ale můžeme si napsat program, který ho napíše za nás. Anebo se na to můžeme podívat z druhé strany a představit si, že až budeme příště v hodinách informatiky učit cyklus, tak místo úlohy *napište program, který vypíše čísla od 1 do 10* můžeme řešit úlohu *napište program, který postaví zeď*. Zeď přitom může pro různé pokročilé žáky znamenat různé věci, od řady kostek umístěných ve vodorovné i svislé ose až po opravdovou zeď se správně propojenými cihlami:



Jak je to s dělením kostky?

Napišeme si program, který projde všechny možnosti, jak lze osm kostiček, ze kterých se skládá krychle $2 \times 2 \times 2$, rozdělit do dvou množin. Protože je kostek osm a každá bude patřit do první nebo do druhé množiny, bude takových dělení existovat 2^8 , tedy 256 možností. Tyto možnosti můžeme očíslovat čísly 0..255 a když si představíme takové číslo zapsané ve dvojkové soustavě, potom číslice 0, resp. 1, na i -té pozici bude znamenat, že i -tá kostička patří do první, resp. druhé množiny.

Pro každou z těchto možností program spočte, na kolik kusů se takto rozdělená kostka rozpadne, a pokud ty kusy budou právě dva, tak je to platné rozdělení a obarví jednu část modře a druhou zeleně; pokud bude počet kusů jiný, tak obě části rozdělené kostky obarví jinými dvěma barvami.

Pro zjištění počtu kusů použijeme následující algoritmus: Na začátku jednotlivým kostičkám přiřadíme čísla 0, 1, 2, ..., 7 určující, do které *komponenty souvislosti* ta která kostička patří. Potom se budeme dívat na dvojice kostiček, které spolu v původní krychli $2 \times 2 \times 2$ *sousedily*, a pokud obě kostičky patří do stejné množiny (mají v binárním zápisu na své pozici obě nulu nebo obě jedničku), spojíme tyto komponenty souvislosti tak, že všem kostičkám, které mají číslo komponenty shodné s číslem komponenty druhé kostičky, nastavíme číslo komponenty, které má první kostička.

Zdrojový kód vypadá takto:

```
N = 2
KOSTEK = N**3
DELENI = 2**KOSTEK
ROZMER = 2**(KOSTEK/2)
K = 1      # rozměr kostičky
Km = 1.1   # rozestupy kostiček
S = N*Km   # rozměr jednoho dělení
MEZERA = 3
Sm = (1+MEZERA)*S # rozestupy dělení

def PocetKomponent( deleni ):
    # binární zápis dělení určuje,
    # do které části kostička patří
    # správné dělení by mělo mít dvě souvislé komponenty
    bd = ""
    for _ in range(KOSTEK):
```

```

    bd = bd+"01"[deleni % 2]
    deleni = deleni//2
HRANY2x2x2 = [ (0,1), (0,2), (1,3), (2,3),
# které kostičky spolu sousedí
                (4,5), (4,6), (5,7), (6,7),
                (0,4), (1,5), (2,6), (3,7) ]
komp = [i for i in range(KOSTEK)]
for h in HRANY2x2x2:
    if bd[ h[0] ]==bd[ h[1] ]:
        #jsou ve stejné části kostky
        if komp[h[1]]!=komp[h[0]]:
            # jsou zatím v různé komponentě...
            zceho, naco =komp[h[1]], komp[h[0]]
            for i in range(KOSTEK):
                if komp[i]==zceho:
                    komp[i]=naco
            # ...převédeme do stejné komponenty
return len(set(komp))

for d in range(DELENI):
    dx = d % ROZMER
    dz = d // ROZMER

# jedno dělení:
pocet = PocetKomponent( d )
dd = d # pro převod do dvojkové soustavy
for i in range(KOSTEK):
    x = i % N
    y = (i // N) % N
    z = i // (N*N)
    if dd%2==0:
        barva = "0 0 1"
        Y = 0
    else:
        barva = "0 1 0"
        Y = 1 * S
    if pocet!=2:
        barva = "1"+barva[1:]

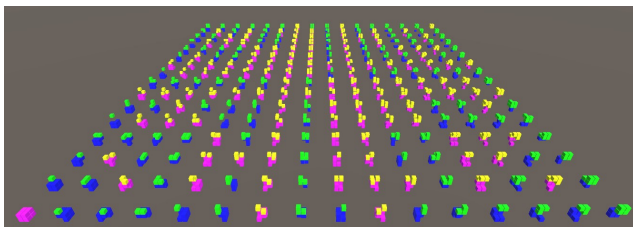
```

```

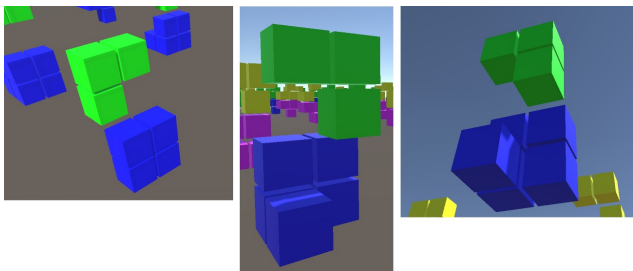
dd = dd // 2
print( f"C S {K} {K} {K} P {Sm*dx+x*Km} {0+y*Km +Y}
↪ {Sm*dz+z*Km} C {barva}\n" )

```

Výsledný text, který může být obtížné číst, protože těch kostek je hodně, potom nakopírujeme do vstupního pole výše zmíněného prohlížeče a můžeme prohlížet možnosti dělení kostky. Všechny najednou. . .



. . . i každou zblízka a z různých stran:



Další podobné úlohy?

Podobně můžeme postupovat i v případě jiných úloh. Například u otázky: *Kolik různých souvislých útvarů lze slepit z jedné, dvou, tří, čtyř, pěti, . . . kostek?*

Nějaký vzoreček nebo návod, který by to řešil obecně, neznáme. Ale není těžké napsat program, který bude *prohledávat* všechny možnosti. Můžeme si pamatovat *seznam obsazených* polí a k tomu také *seznam sousedních* polí, abychom je nemuseli pokaždé hledat. Také se nám bude hodit pamatovat si, jaké možnosti/tvary už jsme našli, abychom je nezapočítávali víckrát.

Program by potom mohl vypadat třeba takto:

```

# kolik různých souvislých tvarů jde poskládat ze (7)
↳ kostiček?

# tvar = (počet,obsazené,sousední),
# obsazené i sousední jsou množiny (x,y,z)
# základní tvar:
# - ze všech možných pootočení si nechat jenom jedno,
# - zároveň posouvat k počátku ve všech osách
# - vybírat to, které má nejmenší (textově) popis

# BFS:
fronta = [ (0,set()),{(0,0,0)} ]
zname = set() # známé "obsazené"

def sousedi( x,y,z ):
    return { (x-1,y,z), (x+1,y,z), (x,y-1,z), (x,y+1,z),
            ↳ (x,y,z-1), (x,y,z+1) }

vysledny_seznam = []
KOSTKY = 7
kolik = 0
last_pocet = 0
while len(fronta) > 0:
    tvar = fronta.pop(0)
    pocet, obsazene, sousedni = tvar
    if pocet > last_pocet:
        print( f"{last_pocet}: {kolik}" )
        kolik = 0
        last_pocet = pocet
    kolik += 1

    if pocet==KOSTKY:
        vysledny_seznam.append(zakladniTvar(obsazene)[1])
        # [1] = rotace a posunutá k počátku
    elif pocet > KOSTKY:
        break

    for (x,y,z) in sousedni:

```

```

new_obsazene = obsazene.union( set({(x,y,z)}) )
zakl = zakladniTvar( new_obsazene )[0]
# [0] = popis obsazených
if zakl in zname: # tenhle tvar už mám
    continue
zname.add( zakl ) # aby se příště neopakoval
# je to NOVÝ tvar => doplnit jeho další atributy
new_sousedni = sousedni.union( susedi(x, y, z) )
new_sousedni = new_sousedni.difference(new_obsazene)
fronta.append( (pocet+1, new_obsazene, new_sousedni)
↳ )

# vypsat výsledný seznam:
K = 1
Km = 1.1
BLOK = 10
RADKA = int(len(vysledny_seznam)**(1/2))
pocet = 0

f = open("slepenec.txt", 'w')
for obsazene in vysledny_seznam:
    x0 = BLOK*(pocet % RADKA)
    z0 = BLOK*(pocet // RADKA)
    pocet += 1
    for (x,y,z) in obsazene:
        f.write( f"C P {Km*(x0+x)} {Km*y} {Km*(z0+z)} C 0
↳ 1 0\n" )
f.close()

```

Asi nejobtížnější na tomto programu je (vynechaná) funkce `zakladniTvar(new_obsazene)`, která množinu obsazených pozic převede vždycky na stejný tvar bez ohledu na rotaci nebo posunutí, abychom mohli provnávat, jestli jsme tuhle kombinaci kostek už někdy viděli.

Počty možností pro rostoucí počty kostek jsou:

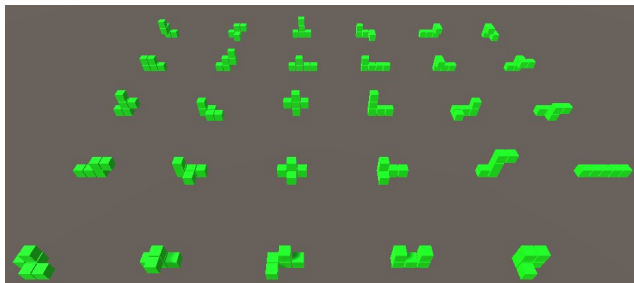
```

0: 1
1: 1
2: 1
3: 2

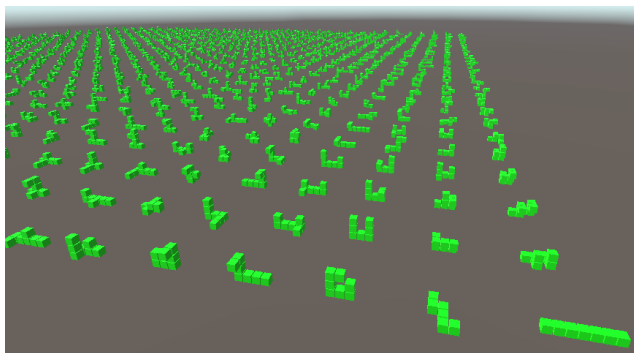
```


4: 8
5: 29
6: 166
7: 1023
...

a výsledné obrázky mohou vypadat třeba takhle pro pět kostek [7]:



a takhle pro sedm kostek [8]:



Závěr

Obrázek nám pomůže vidět něco, co bychom si jinak mohli jenom představit. Prostorový obrázek může být ještě o něco názornější než dvou-rozměrný obrázek. A vytvořit prostorový obrázek může být docela snadné, pokud máme jednoduchý jazyk pro jeho popis, a ještě snazší, pokud pro vytváření použijeme program. Zkuste to také!

Literatura

- [1] Zajímavé matematické úlohy, Úloha 260. Matematika–fyzika–informatika, roč. 29 (2020), č. 1, s. 21.
- [2] Zajímavé matematické úlohy, Úloha 260. Matematika–fyzika–informatika, roč. 29 (2020), č. 3, s. 198–200.
- [3] VRML Virtual Reality Modeling Language. [online] 1995 cit. [2023-11-01]. Dostupné z: <https://www.w3.org/MarkUp/VRML/>
- [4] The Web3D Consortium. [online] 2023 cit. [2023-11-01]. Dostupné z: <https://www.web3d.org/>
- [5] Official x3dom documentation. [online] 1995 cit. [2023-11-01]. Dostupné z: <https://doc.x3dom.org/>
- [6] Projektor. [online] 2023 cit. [2023-11-01]. Dostupné z: <https://projektor.geometry.cz/>
- [7] Slepenc 5. [online] 2023 cit. [2023-11-01]. Dostupné z: <https://projektor.geometry.cz/?co=show&did=358>
- [8] Slepenc 7. [online] 2023 cit. [2023-11-01]. Dostupné z: <https://projektor.geometry.cz/?co=show&did=359>

Počítačová grafika, 4. díl

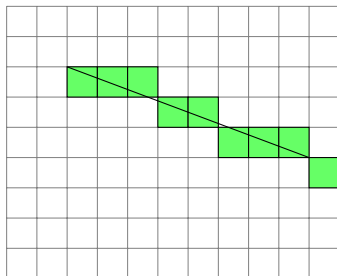
EDUARD BARTL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Článek volně navazuje na předchozí tři díly, zabývá se rasterizací základních geometrických objektů. Podrobně se věnuje rasterizaci úsečky pomocí algoritmu DDA. Může sloužit jako pomůcka pro středoškolské učitele informatiky a výpočetní techniky.

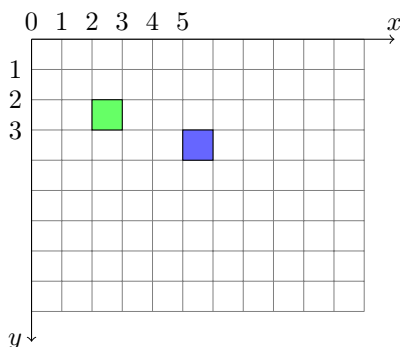
Rasterizací objektů rozumíme kreslení těchto objektů do rastru zobrazovacího zařízení, v našem případě se jedná o displej. Budeme mít k dispozici matematický popis nějakého základního geometrického objektu, například úsečky. Tento objekt je tvořen nekonečným množstvím bezrozměrných geometrických bodů (viz také první díl tohoto seriálu [1]) a naším úkolem je

ho co nejlépe zobrazit v rastru, který je však tvořen pouze konečným množstvím fyzických pixelů. Situace je znázorněna na obr. 1. Rasterizační algoritmy by měly navíc pracovat co nejefektivněji, to znamená, co nejrychleji s využitím malého množství paměti.



Obr. 1 Rasterizace úsečky

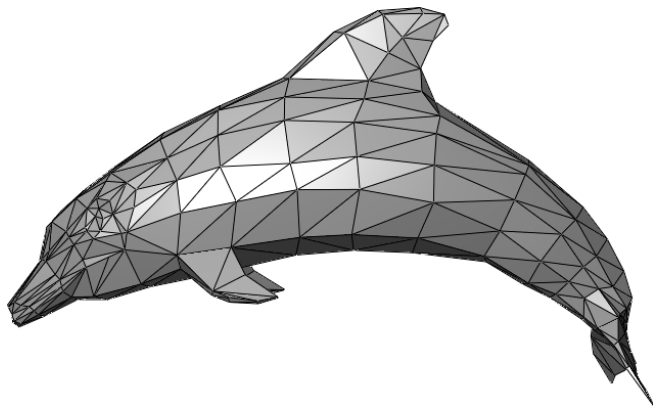
Pobavme se nejprve o souřadnicovém systému, se kterým budeme v dalším výkladu pracovat. Počátek souřadnicového systému umístíme do levého horního rohu zobrazovacího zařízení.¹⁾ Kladná polovina osy x tedy směřuje zleva doprava, kladná polovina osy y shora dolů. Předpokládáme dále, že pixely mají jednotkovou velikost. Logický pixel (viz [1]) umístíme do levého horního vrcholu pixelu – souřadnice daného fyzického pixelu jsou proto dány souřadnicemi jeho levého horního vrcholu, jak ukazuje obr. 2.



Obr. 2 Zelený pixel má souřadnice $\langle 2, 2 \rangle$, modrý pixel má souřadnice $\langle 5, 3 \rangle$

¹⁾Toto nastavení je v počítačové grafice běžné.

Zabývat se budeme zejména *rasterizací úsečky*, složitější objekty totiž můžeme aproximovat lomenými čarami složenými z úseček. Stejně se tak děje dokonce i v trojrozměrné grafice. Trojrozměrné objekty se totiž reprezentují pomocí trojúhelníkové sítě, která je taktéž vykreslována pomocí úseček, příklad můžeme vidět na obr. 3.



Obr. 3 Model delfína reprezentovaný pomocí trojúhelníkové sítě (zdroj Wikipedia)

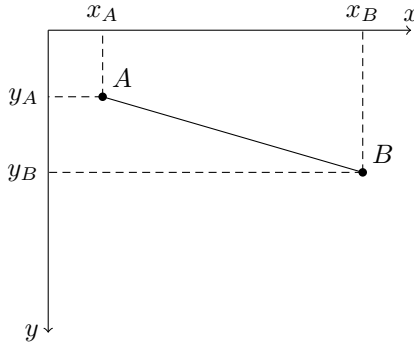
Výklad začneme základním algoritmem pro rasterizaci úsečky, v dalších dílech si pak ukážeme složitější algoritmy. Předpokládejme nejprve, že je úsečka, kterou chceme rasterizovat, určena koncovými body $A = \langle x_A, y_A \rangle$ a $B = \langle x_B, y_B \rangle$. Tyto souřadnice jsou celočíselné, přímo tedy udávají souřadnice prvního a posledního pixelu. Pro jednoduchost dále předpokládejme, že bod B bude ležet napravo a níže od bodu A , tedy $x_A < x_B$ a $y_A < y_B$, jak můžeme vidět na obr. 4.

Nejprve budeme muset najít matematickou funkci, která popisuje závislost y -ové souřadnice libovolného bodu této úsečky na jeho x -ové souřadnici. Rasterizaci začneme například v bodě A ; po určitých krocích budeme měnit jednu souřadnici a s pomocí zmíněné funkce dopočítávat souřadnici druhou, dokud se nedostaneme do bodu B . Vypočtené hodnoty však budeme muset zaokrouhlit, abychom obdrželi celočíselné souřadnice pixelů.

Rozebereme si nyní tento postup podrobněji. Úsečku popíšeme pomocí *směrnicové rovnice přímky*, na které tato úsečka leží:

$$y = kx + q, \tag{1}$$

kde k je *směrnice* určující sklon přímky a q určuje průsečík přímky s osou y .



Obr. 4 Úsečka určená koncovými body A a B .

Směrnice přímky k je rovna tangente úhlu, kterou tato přímka svírá s kladnou polovinou osy x , platí tedy:

$$k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Rozdíl $y_B - y_A$ budeme v dalším textu značit Δy , rozdíl $x_B - x_A$ jako Δx .

Jak jsme již řekli, rasterizaci začneme v bodě A . První bod úsečky, který budeme zpracovávat proto bude mít souřadnice

$$x_1 = x_A, \quad y_1 = y_A.$$

Souřadnice prvního pixelu, který touto rasterizací získáme, bude mít právě tyto souřadnice. V druhém kroku zvýšíme hodnotu x_1 o jedničku:²⁾

$$x_2 = x_1 + 1.$$

Ze vztahu (1) potom vypočteme příslušnou y -ovou souřadnici:

$$y_2 = kx_2 + q = k(x_1 + 1) + q = kx_1 + q + k = y_1 + k.$$

Souřadnice druhého pixelu pak získáme zaokrouhlením y -ové souřadnice:³⁾

$$\langle x_2, \text{round}(y_2) \rangle.$$

²⁾Vzhledem k tomu, že fyzický pixel je čtverec jednotkové velikosti, přičtením jedničky se tak jistě ocitneme v pixelu, který leží napravo od daného pixelu.

³⁾ x -ovou souřadnici zaokrouhlovat nemusíme, ta je totiž po celou dobu výpočtu celočíselná.

Zcela stejným způsobem pak pokračujeme v dalších krocích. Obecně tedy můžeme psát, že v i -tém kroku vypočítáme souřadnice bodu $\langle x_i, y_i \rangle$ pomocí souřadnic bodu z předchozího kroku $\langle x_{i-1}, y_{i-1} \rangle$:

$$\begin{aligned}x_i &= x_{i-1} + 1, \\y_i &= y_{i-1} + k.\end{aligned}$$

Souřadnice příslušného pixelu pak získáme zaokrouhlením y -ové souřadnice:

$$\langle x_i, \text{round}(y_i) \rangle.$$

Výpočet skončíme v okamžiku, kdy bude x -ová souřadnice větší než x_B . Tímto způsobem vypočteme souřadnice všech zelených pixelů, které jsou ukázány na obr. 1.

Právě odvozený postup se nazývá algoritmus DDA.⁴⁾ Jedná se o nejjednodušší algoritmus rasterizující úsečku, pseudokód tohoto algoritmu je následující:

Algoritmus 1 Algoritmus DDA pro řídicí osu x

Vstup: Body $A = \langle x_A, y_A \rangle$ a $B = \langle x_B, y_B \rangle$; všechny souřadnice jsou celočíselné.

Výstup: Souřadnice pixelů, které rasterizují úsečku danou koncovými body A a B .

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\langle x, y \rangle = \langle x_A, y_A \rangle$$

while $x \leq x_B$ **do**

obarvi pixel o souřadnicích $\langle x, \text{round}(y) \rangle$

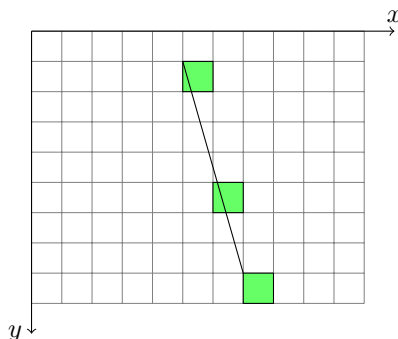
$$x = x + 1$$

$$y = y + k$$

end while

Tento algoritmus má však jeden závažný háček. Uvažujme situaci zobrazenou na obr. 5. Rozdíl oproti předchozímu příkladu je zjevně v tom, že rasterizovaná úsečka má výrazně větší sklon. Popsaný postup tuto úsečku rasterizuje velmi špatným způsobem; podívejme se na zeleně vybarvené pixely na obr. 5, které tuto rasterizaci znázorňují. Z obrázku je patrné, že rasterizované pixely na sebe nenavazují, výsledek je proto velmi neuspokojivý.

⁴⁾DDA je zkratkou z anglického názvu *Digital Differencial Analyzer*.



Obr. 5 Rasterizace úsečky s velkým sklonem.

Je evidentní, že tento problém způsobuje právě velký sklon dané úsečky. Algoritmus 1 totiž využívá skutečnosti, že má úsečka malý sklon,⁵⁾ což se do výpočtu promítlo neustálým zvyšováním x -ové souřadnice o jedničku. V případech, kdy je sklon úsečky malý, říkáme, že je osa x *řídící osou*.

Neustálé zvyšování x -ové souřadnice je však pro úsečky s větším sklonem nevhodné, způsobí totiž „roztržení“ pixelů, které jsme zaznamenali na obr. 5. V případech, kdy je řídící osou osa y (úsečka má velký sklon a přímky se proto k ose y), bude vhodnější, když budeme zvyšovat o jedničku y -ovou souřadnici a dopočítávat ze vztahu (1) x -ovou souřadnici. Tento postup popisuje algoritmus 2.

Algoritmus 2 Algoritmus DDA pro řídící osu y

Vstup: Body $A = \langle x_A, y_A \rangle$ a $B = \langle x_B, y_B \rangle$; všechny souřadnice jsou celočíselné.

Výstup: Souřadnice pixelů, které rasterizují úsečku danou koncovými body A a B .

$$k = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$$\langle x, y \rangle = \langle x_A, y_A \rangle$$

while $y \leq y_B$ **do**

obarvi pixel o souřadnicích $\langle \text{round}(x), y \rangle$

$$x = x + k$$

$$y = y + 1$$

end while

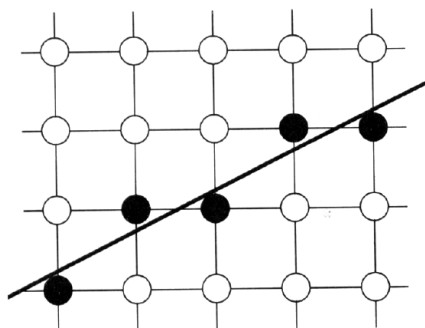
⁵⁾ Úsečka se *přímky* k ose x .

Před samotným výpočtem tedy musíme nejprve určit, která z os bude řídící. Učiníme tak jednoduše z hodnoty směrnice. Pokud bude totiž $k < 1$, pak se úsečka přimyká k ose x a tato osa je tedy řídící. Pokud však bude $k > 1$, úsečka se přimyká k ose y , řídící osou je tedy osa y . Pro mezní případ, $k = 1$, může být volba libovolná. Vytvoření obecného algoritmu DDA (pro libovolnou řídící osu) je pak přímočaré.

Příští díl seriálu bude opět věnovaný rasterizaci. Ukážeme si Bresenhamův rasterizační algoritmus a vysvětlíme si jeho výhody oproti algoritmu DDA. Dále si vysvětlíme, jakým způsobem se rasterizují jiné geometrické objekty (například kružnice nebo elipsa).

Literatura

- [1] *Bartl, E.*: Počítačová grafika I. Matematika-fyzika-informatika, roč. 29 (2020), č. 1, s. 138–148.
- [2] *Felkel, P., Sochor, J., Žára, J., Beneš, B.*: Moderní počítačová grafika. 2. vydání. Computer Press, 2005.
- [3] *Gonzalez, R. C., Woods, R. E.*: Digital Image Processing. 4. vydání. Pearson Prentice Hall, 2018.
- [4] *Huges, J. F. a kol.*: Computer Graphics. Principles and Practice. 3. vydání. Addison-Wesley, 2014.
- [5] *Martíšek, D.*: Matematické principy grafických systémů. Littera, 2002.



Rasterizace úsečky se sklonem $\leq 45^\circ$, řídící osa x ; zdroj: P. Strachota, Některé rastrové algoritmy pro vykreslování 2D objektů, FJFI ČVUT, 2012, [online] www.google.com/search?client=firefox-b-d&q=04.rastrove_algoritmy.pdf.

ZPRÁVY

Ústřední kolo 73. ročníku MO kategorie A



Ústřední kolo 73. ročníku Matematické olympiády kategorie A uspořádalo ve dnech 17.–20. března 2023 Gymnázium, České Budějovice, Jírovцова 8. Záštitu nad ním převzali *doc. Dr. Ing. Dagmar Škodová Parmová*, primátorka statutárního města České Budějovice a *Mgr. Pavel Klíma*, náměstek hejtmana Jihočeského kraje a poslanec Parlamentu ČR. Na uspořádání ústředního kola se dále podílela Ústřední komise matematické olympiády, Jednota českých matematiků a fyziků a Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy ČR.

Všichni soutěžící, členové Ústřední komise komise MO a pozvaní hosté byli ubytováni v grandhotelu Zvon, slavnostní zahájení soutěže a její vyhlášení proběhlo v obřadní síni historické českobudějovické radnice a vlastní soutěž pak na gymnáziu Jírovцова. Na slavnostním zahájení přivítal soutěžící hlavní organizátor *Mgr. Radek Trča*, *Mgr. Pavel Kavřík*, ředitel gymnázia, nositelé záštity a nechyběla ani tradiční motivační přednáška *doc RNDr. Jaromíra Šimší, CSC*.

Na základě jednotné koordinace úloh krajského kola kategorie A pozvala Ústřední komise MO k účasti

v ústředním kole 51 nejlepších účastníků, mezi nimiž bylo 6 dívek. Na řešení obou trojic soutěžních úloh měli soutěžící po oba dny, 18. a 19. března, vždy 4,5 hodiny čistého času. Za každou úlohu mohli soutěžící získat nejvýše 7 bodů (s celočíselnými bodovými zisky).

Organizátoři závěrečného kola MO připravili pro soutěžící a pro členy ústřední komise pestrý doprovodný program. Odpoledne po prvním soutěžním dnu absolvovali prohlídku města. Druhý den to pak byla návštěva místní hvězdárny a planetária a projekce oskarového filmu „Oppenheimer“.

Vyhlášení výsledků soutěže a předání cen nejlepším řešitelům IV. kola kategorie A se uskutečnilo ve středu 20. března dopoledne. Slavnostního aktu se zúčastnili také zástupci skupiny ČEZ, kteří speciálně ocenili tři nejlepší řešitele ústředního kola soutěže. Předseda ÚK MO *doc. RNDr. Tomáš Bárta, Ph.D.* v závěrečném projevu poděkoval celému týmu organizátorů za kvalitní přípravu a mimořádně zdařilý průběh celého ústředního kola.

Dle organizačního řádu Matematické olympiády bylo vyhlášeno jedenáct vítězů ústředního kola, absolutním vítězem se pak stal *David Hromádka* z G Nad Alejí v Praze 6 se ziskem 40 bodů. Dále bylo oceněno třináct úspěšných řešitelů. Podrobnější výsledky najdete na stránkách [73. ročníku MO](#). Zde najdete také [vzorová řešení](#) soutěžních úloh, jejichž zadání uvádíme níže.

1. soutěžní den (18. března)

1. Necht a, b, c jsou přirozená čísla, pro něž se jedna z hodnot

$$D(a, b) \cdot n(b, c),$$

$$D(b, c) \cdot n(c, a),$$

$$D(c, a) \cdot n(a, b)$$

rovná součinu zbylých dvou. Dokažte, že některé z čísel a, b, c je násobkem jiného z nich.

(Symbol $D(x, y)$, resp. $n(x, y)$, značí největší společný dělitel, resp. nejmenší společný násobek, přirozených čísel x, y .)

(Jaroslav Švrček, Josef Tkadlec)

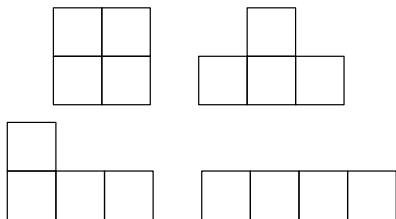
2. Vnitřní bod P konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ splňuje rovnosti

$$\begin{aligned} |\sphericalangle PAD| &= |\sphericalangle ADP| = \\ &= |\sphericalangle CBP| = |\sphericalangle PCB| = |\sphericalangle CPD|. \end{aligned}$$

Necht O je střed kružnice opsané trojúhelníku CPD . Dokažte, že platí $|OA| = |OB|$.

(Patrik Bak)

3. Určete největší přirozené číslo n s vlastností: Libovolnou sadu n tetramin, z nichž každé je jednoho ze čtyř tvarů na obrázku, lze bez překrývání umístit do tabulky 20×20 tak, že každé tetramino pokrývá právě čtyři pole tabulky. (Jednotlivá tetramina můžeme libovolně otáčet a překlápat.)



(Josef Tkadlec)

2. soutěžní den (19. března)

4. Na párty se sešlo 10 chlapců a 10 dívek. Každému chlapci se líbí jiný kladný počet dívek. Každé dívce se líbí jiný kladný počet chlapců. Určete největší celé číslo n s následující vlastností: Vždy lze utvořit aspoň n disjunktních párů, v nichž se oběma líbí ten druhý.

(Josef Tkadlec)

5. Posloupnost reálných čísel $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ splňuje pro každý index $k \geq 1$ rovnost

$$a_{k+1} = 3a_k - [2a_k] - [a_k].$$

Určete všechna přirozená čísla n , pro která je taková posloupnost s prvním členem $a_1 = 1/n$ od jistého členu konstantní.

(Zápisem $[x]$ rozumíme největší celé číslo, které nepřevyšuje dané reálné číslo x .)

(Jaromír Šimša)

6. Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, do nichž lze vepsat dvě shodné kružnice s prvočíselným poloměrem, které mají vnější dotyk, obě se dotýkají přepony a každá z nich se dotýká jiné odvěsny.

(Jaromír Šimša)

Všichni vítězové a nejlepší úspěšní řešitelé z nematuritních ročníků byli pozváni na výběrové soustředění, kde budou bojovat o místa v reprezentačních družstvech na Mezinárodní matematickou olympiádu ve Velké Británii a Středoevropskou matematickou olympiádu v Maďarsku. Nejlepší řešitelé z nematuritních ročníků pak budou v pozvání na tradiční zářijové soustředění nejlepších řešitelů kategorie A do Janských Lázní.

Pavel Calábek

Český úspěch na 13. evropské dívčí matematické olympiádě



Třináctá Evropské dívčí matematická olympiáda (dále EGMO) se konala ve dnech 11.–17. dubna 2024 v gruzínském Cchaltubo (anglická transkripce Tskaltubo, gruzínsky წყალტუბო) nedaleko druhého největšího gruzínského města Kutaisi. Do Gruzie se soutěž „vrátila“ po třech letech, desátý ročník 2021 se kvůli epidemii covidu19 konal pouze online. Aktuálního třináctého ročníku se zúčastnilo 212 dívek (147 z Evropy) reprezentujících 54 států (37 evropských).

Český reprezentační výběr byl sestaven na základě výsledků krajského kola kategorie A 73. ročníku Matematické olympiády a následného výběrového soustředění. Místo v reprezentaci si vybojovaly: *Anastasia Bredichina*, Gymnázium J. Keplera, Praha 6, *Tereza Černá* (8/8), Gymnázium Litoměřická, Praha 9, *Veronika Menšíková* (6/8), Arcibiskupské gymnázium Korunní, Praha 2 a *Lenka Poljaková* (8/8), Gymnázium J. Škody, Přerov. Vedoucím české delegace byl *RNDr. Pavel Calábek, Ph.D.*, z PřF UP v Olomouci a pedagogickým vedoucím *Mgr. Pavel Šalom*.

V pátek 12. dubna proběhlo slavnostní zahájení, kdy všechny účastníky přivítali organizátoři, zástupci města a kraje a sponzoři. Ještě před ním zasedala Jury složená z vedoucích jednotlivých družstev. Z návrhů, které v prosinci poslaly jednotlivé účastnické

státy, vybrala úlohová komise sadu 6 úloh. Tyto Jury po diskusí schválila a následně přeložila do národních jazyků. Mezitím dívky měly na programu seznámení s městem i ostatními účastnicemi a v centrálním lázeňském parku a jeho okolí hledaly poklady.

Samotné soutěži pak byly věnovány dva dny, sobota 13. a neděle 14. dubna, ve kterých soutěžící řešily v časovém limitu 4,5 hodiny po třech úlohách, za každou z nich mohly získat až sedm bodů. Následující dva dny se soutěžící seznamovaly s Gruzií, v pondělí navštívily přírodní rezervaci a jeskyni Sataplia, největší atrakce, park se zachovalými stopami dinosaurů, však v té době procházel rekonstrukcí. V úterý pak soutěžící společně s vedoucími družstev navštívily Prometheovu jeskyni. Mezitím si účastnice mohly vybrat z řady volno-časových aktivit od různých sportovních turnajů po seznámení s místním folklórem a výuky tanců. Vedoucí národních týmů spolu s mezinárodními koordinátory mezitím studovali a hodnotili řešení účastnic.

Na úterním slavnostním zakončení byly vyhlášeny konečné výsledky. Jako nejjednodušší se ukázaly první dvě úlohy prvního dne s průměrným bodovým ziskem 4,2 a 4,1 bodu, dále první a druhá úloha druhého dne s průměry 3,0 a 2,5 bodu, a tradičně nejtěžší byly třetí úlohy každého dne s průměry 1,7 a 0,3 bodu; přitom za každou úlohu mohly soutěžící získat až 7 bodů. Češky si s těmito úlohami poradily velmi dobře a každá z nich si odvezla (podruhé v historii) některou z medailí. *Tereza Černá* se ziskem 28 bodů získala stříbrnou medaili obsadila přitom 34. místo (19. mezi evropankami), zbývající účastnice si odvezly medaile

bronzové. *Lenka Poljaková* se ziskem 18 bodů obsadila 76. (47.) místo, *Veronika Menšíková*, se 17 body obsadila 84. (50.) místo a *Anastasia Bredichina* se 16 body obsadila 92. (54.) pozici.

Nejlepší účastníci byla *Hannah Foxová* ze Spojených států, která ze 42 možných bodů získala 41, jediný bod ztratila na šesté úloze. Přitom byla jedinou řešitelkou, která tuto úlohu skoro vyřešila, ostatní účastnice na ní získaly nejvýše 3 body. Nejlepší evropankou pak byla *Aino Aulanková* z Finska, která získala 38 bodů a celkově obsadila 2. pozici. Nejlepším družstvem se staly Spojené státy se ziskem 151 bodů, nejlepším evropským družstvem pak byla celkově čtvrtá Ukrajina. Češky se celkově umístily se 79 body na 21. místě, což byla 14. pozice mezi evropskými státy, zopakovaly tak své loňské velmi dobré umístění. S úplnými výsledky se může seznámit na stránkách [soutěže](#).

Na závěrečném zasedání Jury byly schváleny drobné změny organizačního řádu a po odstoupení dlouholeté prezidentky soutěže, Švýcarky *Viviane Kehl*, byla prezidentkou zvolena *Pärsla Esmeralda Sietiņa* z Finska. Dále byl výbor soutěže rozšířen o jednoho reprezentanta neevropských zemí, kterého volí neevropské účastníci, zbývající čtyři (včetně prezidenta) jsou voleni evropskými zeměmi. Soutěž se celkově vydařila; účastnice měly možnost seznámit se zemí, kandidující na vstup do Evropské unie, za což patří díky předsedkyni organizačního výboru *Marekhi Nikoladze*.

Dále uvádíme zadání všech šesti soutěžních úloh (v závorce je uvedena navrhuující země). Jejich řešení hledejte opět na stránkách [EGMO](#).

První soutěžní den

(13. 4. 2024)

Úloha 1

Na tabuli jsou napsána dvě různá celá čísla u a v . Postupně vykonáme několik kroků. V každém vykonáme jednu z následujících dvou operací:

- (i) Jestliže a a b jsou různá čísla napsaná na tabuli a číslo $a + b$ tam ještě napsané není, potom jej tam zapíšeme.
- (ii) Jestliže a , b , c jsou tři různá čísla napsaná na tabuli a celé číslo x , které na tabuli ještě napsané není, splňuje rovnost

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

potom na tabuli zapíšeme x .

Určete všechny počáteční dvojice (u, v) celých čísel takové, že pro libovolné celé číslo existuje konečná posloupnost kroků, po kterých bude toto číslo napsáno na tabuli.

(*Slovensko*)

Úloha 2

Nechť ABC je trojúhelník splňující $|AC| > |AB|$, označme Ω kružnicí jemu opsanou a I střed jeho kružnice vepsané. Kružnice vepsaná se dotýká stran BC , CA , AB po řadě v bodech D , E , F . Nechť X a Y jsou po řadě dva body kratších oblouků \widehat{DF} a \widehat{DE} kružnice vepsané takové, že $|\sphericalangle BXD| = |\sphericalangle DYC|$. Přímka XY protíná přímku BC v bodě K . Dále nechť T je takový bod kružnice Ω , že přímka KT je tečnou Ω a bod T leží v téže polorovině vyřazené přímkou BC jako bod A . Dokažte, že přímky TD a AI se protínají na kružnici Ω .

(*Spojené království*)

Úloha 3

Kladné celé číslo n nazveme *své-
rázné*, jestliže pro jeho libovolný
kladný dělitel d je číslo $n(n+1)$ děli-
telné $d(d+1)$. Dokažte, že pro libovolná
čtyři různá svérázná kladná celá čísla
 A, B, C a D platí $D(A, B, C, D) = 1$.
*Symbol $D(A, B, C, D)$ značí největší
celé číslo, které dělí každé z čísel $A, B,$
 C a D .*

(Nizozemsko)

Druhý soutěžní den

(14. 4. 2024)

Úloha 4

Pro posloupnost $a_1 < a_2 < \dots < a_n$
celých čísel nazveme dvojici (a_i, a_j) ,
kde $1 \leq i < j \leq n$, *zajímavou*, jestliže
existuje taková dvojice (a_k, a_ℓ) celých
čísel, kde $1 \leq k < \ell \leq n$, že

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Pro každé $n \geq 3$ určete největší možný
počet zajímavých dvojic v posloup-
nosti délky n .

(Ukrajina)

Úloha 5

Označme \mathbb{N} množinu všech klad-
ných celých čísel. Určete všechny
funkce $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takové, že pro li-
bovolnou dvojici (x, y) kladných celých
čísel platí

- (i) x a $f(x)$ mají stejný počet klad-
ných dělitelů.
- (ii) Jestliže x není dělitelem y a y
není dělitelem x , pak

$$D(f(x), f(y)) > f(D(x, y)).$$

*Symbol $D(m, n)$ značí největší celé
číslo, které dělí každé z čísel m a n .*

(Chorvatsko)

Úloha 6

Určete všechna kladná celá čísla d ,
pro která existuje polynom P stupně d
s reálnými koeficienty takový, že mezi
 $P(0), P(1), P(2), \dots, P(d^2 - d)$ je nej-
výše d různých hodnot.

(Lucembursko & Belgie)

Evropská dívčí matematická olym-
piáda se v roce 2025 bude konat v ko-
sovské Prištině, následující pak ve fran-
couzském Bordeaux.

Pavel Calábek

Celostátní kolo 65. ročníku FO 2024

Celostátní kolo 65. ročníku Fyzikál-
ní olympiády kategorie A ve škol-
ním roce 2023/2024 hostil ve dnech
12.–15. března 2024 Královéhradec-
ký kraj a především *Přírodovědec-
ká fakulta Univerzity Hradec Králové*
([uhk.cz/cs/prirodovedecka-fakulta/
prf](http://uhk.cz/cs/prirodovedecka-fakulta/prf)). Soutěž proběhla za podpory
JČMF, MŠMT, města Hradec Krá-
lové, Královéhradeckého kraje, časo-
pisu Vesmír, stavebního holdingu En-
teria a skupiny ČEZ. Na základě vý-
sledků krajských kol soutěže, jež pro-
běhla 17. 1. 2024, přijelo změřit své síly
celkem 42 soutěžících (z toho 5 dívek).



Řešení teoretických úloh v prostorách
PřF UHK

Ve středu 13. 3. dopoledne čekaly soutěžící v prostorách Přírodovědecké fakulty UHK čtyři teoretické úlohy, s nimiž se museli vypořádat během pěti hodin. Autorem prvních tří byl *RNDr. Jan Thomas* (První české gymnázium Karlovy Vary), autorem čtvrté *doc. RNDr. Jan Šlégr, Ph.D.* (PřF UHK). První mechanická úloha s názvem *Odpružený dopad* pracovala s pneumatickým odpružením – o kolik se „propadne“ bloček, ležící na vzduchovém polštáři, když na něj dopadne závaží; řešitelé za ni získali v průměru 4,19 bodu z deseti možných a nejlépe si s ní poradil *Radovan Lev* (G Františka Palackého, Valašské Meziříčí). Druhá termodynamická úloha s názvem *Kruhový děj* řešila kruhový děj s lineární závislostí p - V a průměrný zisk byl 4,19 bodu, na plných 10 bodů se ji nepodařilo vyřešit žádnému ze soutěžících. Ve třetí, nejtěžší úloze *Kulové plochy* z elektrostatiky bylo nutno vypočítat potenciály a intenzity elektrických polí na nabitých koulích s dielektrikem; soutěžící dosáhli v průměru 2,82 bodu a nejlepší řešení odevzdal *Štěpán Plass* (G Jihlava). Čtvrtá optická úloha s názvem *Transfokátor (zoom)* navazovala na studijní text [1] a počítaly se vlastnosti transfokátoru. Soutěžící získali v průměru 3,14 bodu a nejlepším řešitelem byl opět *Štěpán Plass* (G Jihlava). Závěrečnou redakci zadání i autorského řešení úloh provedl *doc. RNDr. Jan Šlégr, Ph.D.* (Přírodovědecká fakulta UHK), který byl také autorem experimentální úlohy.

Ve čtvrtek 14. 3. soutěžící ve dvou skupinách řešili praktickou úlohu věnovanou měření povrchového napětí neznámé kapaliny využitím odtrhá-

vací a kapkové metody. Soutěžící ji zvládli velmi dobře a získali v průměru 16,44 bodu, nejlepším řešitelem porota vyhlásila *Martina Kudrnu* (G Jana Keplera, Praha).

K celostátnímu kolu tradičně patří i bohatý navazující program, jenž zahrnoval komentovanou prohlídku centra Hradec Králové i zajímavé přednášky v prostorách PřF UHK.

Poslední den, v pátek 15. 3. dopoledne, proběhlo aule Univerzity Hradec Králové slavnostní vyhlášení výsledků. Uveďme základní statistické údaje: deset účastníků se stalo vítězi, dvacet pět úspěšnými řešiteli a sedm účastníky soutěže. Pomyslnou zlatou medaili vybojoval *Štěpán Plass* (G Jihlava), stříbrnou *Radovan Lev* (G Františka Palackého, Valašské Meziříčí) a bronzovou *Martin Kudrna* (G Jana Keplera, Praha). Držme palce pěti našim soutěžícím na 54. Mezinárodní fyzikální olympiádě, která má proběhnout od 21. do 29. července 2024 v iránském Isfahanu (viz ipho2024.ir).

Je třeba poděkovat obětavým organizátorům z pořadající Přírodovědecké fakulty UHK – *doc. RNDr. Filipu Studničkoví, Ph.D.*, a *RNDr. Michaele Křížové, Ph.D.*, kteří se rozhodující měrou zasloužili o hladký průběh soutěže, pohostinnost a příjemnou pracovní atmosféru.

V příštím 66. ročníku bude hostitelem celostátního kola kraj Vysočina a Gymnázium Jihlava, kam účastníky pozval tamní předseda krajské komise FO *Mgr. Ladislav Karel*. Zájemci a příznivci soutěže najdou všechny potřebné aktuální informace včetně zadání i řešení úloh na čtenářům MFI jistě dobře známých internetových stránkách **ÚKFO**.

Literatura

- [1] *Trnka, J.*: Zobrazení čočkami. Knihovnička FO č. 70. MAFY, Hradec Králové, 2009. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/cocky.pdf>.

Výsledková listina celostátního kola

Vítězové

1. Štěpán Plass (G Jihlava, 52 b),



Zlatý Štěpán Plass, nejlepší řešitel 3. a 4. úlohy

2. Radovan Lev (G Františka Palackého, Valašské Meziříčí, 44,5 b),



Stříbrný Radovan Lev, nejlepší řešitel 1. úlohy

3. Martin Kudrna (G Jana Keplera, Praha, 44 b), 4. Lukáš Tabery (Cyriometodějské G a ZŠ Prostějov, 43 b), 5. Matouš Mišta (G Olomouc, Hejčín,

- 42 b), 6. Jakub Kubica (G Ostrava-Hrabůvka, 40 b), 7. Šimon Genčur (Biskupské G Brno a MŠ, 40 b), 8. Eduard Toloch (Slovanské G Olomouc, 38,5 b), 9. Lukáš Linhart (G Petra Bezruče, Frýdek-Místek, 38 b), 10. David Němec (Masarykovo G Plzeň, 37 b).



Bronzový Martin Kudrna (G Jana Keplera, Praha), nejlepší řešitel experimentální úlohy

Úspěšní řešitelé

11. Michal Stroff (G Praha 4, Budějovická, 36 b), 12. Vít Izdný (G Jana Keplera, Praha, 35,5 b), 13. Daniel Theiss (G Cheb, 34,5 b), 14. Jan Klír (G Bohumila Hrabala v Nymburce, 34,5 b), 15. Daniel Čtvrtečka (G Christiana Dopplera, Praha, 34 b), 16. Michal Bernat (G Christiana Dopplera, Praha, 33,5 b), 17. Petra Navrátilová (GPOA Znojmo, 33 b), 18. Radim Novák (G Christiana Dopplera, Praha, 32,5 b), 19. Matěj Pěnička (G Praha 6, Nad Alejí, 30 b), 20. Filip Cihlár (G J.Š. Baara, Domažlice, 30 b), 21. Petr Němec (Wichterlovo G Ostrava, 29,5 b), 22. Tomáš Chlup (G Brno-Řečkovice, 29,5 b), 23. Jiří Šýkora (G Trhové Sviny, 27,5 b), 24. Vojtěch Kubrycht (G Praha 4, Budějovická, 27,5 b), 25. Jakub Savula (G České Budějovice, Jírovцова, 27,5 b), 26. Marco Kormaník (Wichter-

lovo G Ostrava, 27 b), 27. Matěj Marek (G Dr. Antona Randy, Jablonec nad Nisou, 26,5 b), 28. Adéla Vyhliďalová (G J. Seiferta, Praha, 26 b), 29. Veronika Bartáková (Slovanské G Olomouc, 26 b), 30. Monika Drexlerová (G Rožnov pod Radhoštěm, 25,5 b), 31. Jáchym Předota (G České Budějovice, Jírovcova, 25,5 b), 32. Richard Materna (G Brno, třída Kapitána Jaroše, 25 b), 33. Jakub Turner (G Jaroslava Vrchlického, Klatovy, 25 b), 34. Jan Koušek (G Chomutov, 24 b), 35. Prokop Bernard (G Žamberk, 23,5 b).

Účastníci

36. Jan Vacek (G Havlíčkův Brod, 22,5 b), 37. Nikolas Pippal (G Olomouc–Hejčín, Tomkova, 22 b), 38. Jaromír Čudek (Wichterlovo G Ostrava, 21 b), 39. Linda Tománková (G Boskovice, 20 b), 40. Jan Herzig (G J. Š. Baara, Domažlice, 20 b), 41. Ivan Žemlička (G Praha 8, Ústavní, 20 b), 42. Zbyněk Makovský (G Pardubice, Dašická, 19,5 b).

Lukáš Richterek

Ústřední kolo 73. ročníku MO kategorie P

Letošní ústřední kolo MO-P se konalo v Českých Budějovicích ve dnech 20.–22. 3. 2024. Jako obvykle přímo navazovalo na ústřední kolo Matematické olympiády kategorie A. Studenti, kteří postoupili do ústředního kola v obou nejvyšších kategoriích MO, tak mohli absolvovat obě soutěže na jednom místě a v průběhu jednoho týdne. Tentokrát bylo takových studentů 14, co je mimořádně vysoký počet, skoro polovina soutěžících v kategorii P.

Celé ústřední kolo Matematické olympiády organizačně výborně připravili pracovníci Krajské komise MO v Českých Budějovicích a místního Gymnázia Jírovcova. V prostorách gymnázia také celá soutěž probíhala. O přípravu a zajištění odborné části ústředního kola MO kategorie P se postarali pracovníci Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, kteří připravili soutěžní úlohy, zajistili opravování a vyhodnocení odevzdaných řešení a přípravu soutěžního prostředí pro praktickou část soutěže.

V letošním ústředním kole Matematické olympiády kategorie P soutěžilo 30 nejlepších úspěšných řešitelů krajských kol. Největší zastoupení měla Praha se 14 účastníky, dalších 9 soutěžících bylo z Jihomoravského kraje. Sedm krajů nemělo v letošním ústředním kole žádného řešitele – v pěti z nich nikdo nepostoupil z krajského kola, ve dvou se krajské kolo vůbec nekonalo. Zajímavostí letošního ročníku je také skutečnost, že 18 ze 30 účastníků ústředního kola bylo z nematuritních ročníků, pouze 12 soutěžících bylo maturantů.

Soutěž začala ve středu večer slavnostním zahájením. Ve čtvrtek dopoledne proběhla teoretická část soutěže, v níž studenti řešili úlohy zaměřené na návrh efektivního algoritmu. V této části se nepracuje na počítačích, soutěžící odevzdávají svoje řešení zpracovaná v písemné podobě. Na vyřešení tří zadaných úloh mají vymezen čas 4,5 hodiny. Jedna z teoretických úloh každoročně využívá nějaký netriviální výpočetní model, který připraví autoři úloh vždy pro všechna soutěžní kola příslušného ročníku Matematické olympiády. Zatímco organizátoři hned

po obědě začali s opravováním a hodnocením odevzdaných řešení, studenti měli možnost navštívit odpoledne proozy firmy Bosch, která byla jedním z partnerů ústředního kola MO. Po večeri pak ještě následovala příprava soutěžících na páteční praktickou část – všichni si mohli prakticky vyzkoušet práci na počítačích se soutěžním a vyhodnocovacím prostředím CMS. Soutěžící k němu přistupují pomocí webového rozhraní, jehož prostřednictvím mohou nejen odevzdávat k vyhodnocení svá vypracovaná řešení soutěžních úloh, ale mohou také klást dotazy k úlohám a dozvídají se, jak byla odevzdaná řešení ohodnocena. Jedná se o stejné prostředí, jaké se používá i na mezinárodních olympiádách v informatice.

Druhý soutěžní den probíhal v pátek v počítačových učebnách gymnázia za obdobných podmínek a podle stejných pravidel, jako jsou organizovány i mezinárodní středoškolské olympiády v informatice. Každý soutěžící pracuje na přiděleném osobním počítači se soutěžním prostředím a v průběhu 4,5 hodiny má za úkol vyřešit tři úlohy. Řešení praktických úloh je třeba dovést do podoby odladěných, plně funkčních programů. Odevzdané programy jsou již v průběhu soutěže okamžitě testovány pomocí předem připravené sady testovacích vstupních dat. Hodnotí se nejen správnost, ale pomocí nastavených časových limitů také rychlost výpočtu. V bodovém hodnocení lze díky tomu odlišit kvalitu různých řešení z hlediska časové složitosti použitého algoritmu. Řešitelé se průběžně dozvídají ohodnocení svých řešení, mají možnost řešení opravit a odevzdat ho opakovaně vícekrát.

Ústřední kolo 73. ročníku Matematické olympiády bylo zakončeno v pátek odpoledne slavnostním vyhlášením výsledků kategorie P. Každá soutěžní úloha byla hodnocena nejvýše 10 body, celkem tedy mohli soutěžící získat maximálně 60 bodů. Tohoto výsledku ovšem letos nikdo nedosáhl, absolutní vítěz obdržel 53 bodů. Nikdo ze soutěžících nezískal plný počet bodů ani v teoretické, ani v praktické části. Jako nejobtížnější se ukázala být poslední praktická úloha, kterou žádný soutěžící nevyřešil na plný počet bodů. Naopak za první praktickou úlohu dostalo hned 15 studentů plný počet 10 bodů. Podle součtu dosažených bodů z obou soutěžních dnů dohromady se stanoví výsledné pořadí. Úspěšnými řešiteli letošního ústředního kola MO kategorie P se stali soutěžící na 1. až 15. místě v celkovém pořadí, tedy všichni, kteří získali alespoň 35 bodů. Šest nejlepších z nich bylo vyhlášeno vítězi ústředního kola.

Výsledky ústředního kola 73. ročníku MO kategorie P

Vítězové

1. Antonín Maloň, 8/8, Gymnázium tř. Kpt. Jaroše, Brno, 53 bodů
2. Erik Ježek, 2/4, Smíchovská SPŠ a gymnázium, Praha 5, 51 bodů
- 3.–4. Jan Slíva, 7/8, Mensa gymnázium, Praha 6, 49 bodů
- 3.–4. Patrik Číhal, 4/4, individuální vzdělávání, 49 bodů
- 5.–6. Adam Hrnčárek, 8/8, Gymnázium tř. Kpt. Jaroše, Brno, 47 bodů
- 5.–6. David Hromádka, 7/8, Gymnázium Nad Alejí, Praha 6, 47 bodů

Úspěšní řešitelé

- 7.–8. Adam Houdek, 8 ZŠ, SOŠ a ZŠ Březová, 46 bodů

- 7.–8. Svatava Šimečková, 6/8, Gymnázium tř. Kpt. Jaroše, Brno, 46 bodů
9. Viktor Číhal, 4/4, Smíchovská SPŠ a gymnázium, Praha 5, 45 bodů
10. Jan Václavek, 6/8, Gymnázium tř. Kpt. Jaroše, Brno, 44 bodů
11. Ondřej Pupík, 4/4, Gymnázium Rožnov pod Radhoštěm, 43 bodů
12. Filip Majer, 7/8, Gymnázium Jana Keplera, Praha 6, 40 bodů
13. Richard Dobíšek, 7/8, Mensa gymnázium, Praha 6, 39 bodů
14. Albert Bakoč, 7/8, Gymnázium Christiana Dopplera, Praha 5, 36 bodů
15. Lucie Roskovská, 7/8, Gymnázium Elišky Krásnohorské, Praha 4, 35 bodů

Ostatní účastníci

Ondřej Sedláček, 5/6, Gymnázium Oty Pavla, Praha 5, 34 b., Filip Hornák, 8/8, Klvaňovo gymnázium, Kyjov, 33 b., Jiří Schreiber, 7/8, Katolické gymnázium Třebíč, 33 b., Eduard Dlabola, 8/8, Gymnázium tř. Kpt. Jaroše, Brno, 32 b., Michael Jarvis, 6/8, Gymnázium Špitálská, Praha 9, 28 b., Lucian Poljak, 6/8, Gymnázium Jakuba Škody, Přerov, 24 b., Jáchym Kouba, 8/8, Gymnázium Jakuba Škody, Přerov, 23 b., Šimon Genčur, 8/8, Biskupské gymnázium, Brno, 22 b., Jakub Vojtek, 7/8, Gymnázium Brno-Řečkovice, 21 b., Matěj Bittner, 4/4, Gymnázium Arabská, Praha 6, 19 b., Petr Šišlák, 7/8, Gymnázium Christiana Dopplera, Praha 5, 18 b., Tereza Černá, 8/8, Gymnázium Litoměřická, Praha 9, 16 b., Patrik Štencel, 3/4, Mendelovo gymnázium Opava, 13 b., Kryštof Maxera, 7/8, Gymnázium Jírovčova, České Budějovice, 12 b., Vojtěch Franc, 4/4, Gymnázium Arabská, Praha 6, 4 b.

Na základě výsledků dosažených v ústředním kole 73. ročníku Mate-

matické olympiády kategorie P byli všichni úspěšní řešitelé pozváni na krátké výběrové soustředění, které se uskutečnilo na Fakultě informatiky Masarykovy univerzity v Brně ve dnech 18.–21. 4. 2024. Cílem tohoto soustředění bylo vybrat české reprezentanty pro mezinárodní olympiády v informatice. Při výběru reprezentantů sčítáme body získané v ústředním kole MO kategorie P a výsledky dosažené na výběrovém soustředění. Čtyři nejlepší řešitelé budou reprezentovat Českou republiku na 36. mezinárodní olympiádě v informatice IOI 2024. Ta se bude konat ve dnech 1.–8. 9. 2024 v Alexandrii v Egyptě. Další čtyři mladší úspěšní řešitelé, kteří letos ještě nebudou maturovat, se zúčastní 31. střeoevropské olympiády v informatice CEOI 2024. Střeoevropskou olympiádu budeme letos hostit u nás v České republice, uskuteční se ve dnech 23.–29. 6. 2024 na Fakultě informatiky Masarykovy univerzity v Brně. Nejlepší čtveřice našich dívek se zúčastní 4. evropské dívčí olympiády v informatice EGOI 2024, která se bude konat 21.–27. 7. 2024 v nizozemském městě Veldhoven nedaleko Eindhovenu. O průběhu a výsledcích všech tří mezinárodních informatických olympiád vás budeme informovat v našem časopise.

Podrobné informace o celém 73. ročníku MO kategorie P, kompletní výsledková listina, texty soutěžních úloh a jejich vzorová řešení jsou k dispozici na adrese <https://mo.mff.cuni.cz/>. Na stejném místě se můžete seznámit i se staršími ročníky této soutěže a také se všemi aktuálními informacemi týkajícími se kategorie P Matematické olympiády.

Pavel Töpfer