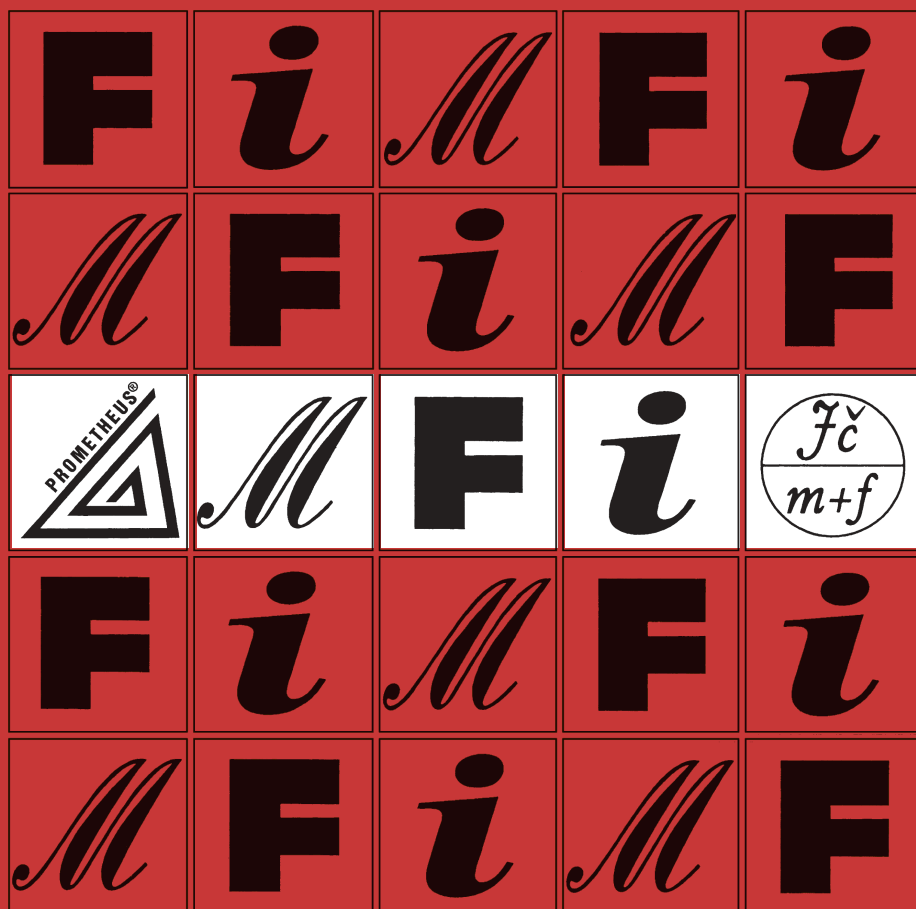


MATEMATIKA 1 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXXIV (2025), číslo 1

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku
Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek
Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška,
Karel Kolář, Michaela Křížová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil, Dana Mandíková,
Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel
Töpfer, Jaroslav Zhouf

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>J. Švrček, L. Juklová:</i> Motýlí křídla v lichoběžníku	1
<i>P. Tlustý, J. Gunčaga:</i> Ruinování hráče v hazardní hře	8
<i>D. Hrubý:</i> O vázaných extrémech funkcí	14
<i>F. Kuřina, J. Cachová:</i> Výpočty a obrázky	19
<i>M. Melicher, M. Janík:</i> O jednom problému z teorie čísel	25
Zajímavé matematické úlohy	29

FYZIKA

<i>A. Richterová, V. Erhartová, J. Erhart:</i> Měříme modul pružnosti ve smyku nitinolového drátu s tvarovou pamětí	34
<i>Č. Kodejška:</i> Reálný model obecného řešení frekvence kmitů elektrostatického kyvadla	47

INFORMATIKA

<i>P. Töpfer:</i> Minimální triangulace mnohoúhelníku (Úlohy z MO kategorie P, 50. část)	69
<i>E. Bartl:</i> Generativní umělá inteligence – Díl první: příliš velká očekávání	76

Motýlí křídla v lichoběžníku

JAROSLAV ŠVRČEK – LENKA JUKLOVÁ

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Mezi speciální čtyřúhelníky v rovině, s nimiž se žáci často setkávají při výuce planimetrie již od základní školy, patří *lichoběžníky*. Jsou to všechny konvexní čtyřúhelníky, které mají *právě jednu dvojici* protilehlých stran, jež jsou rovnoběžné (základny lichoběžníku).

V tomto článku se seznámíme s jednou důležitou vlastností lichoběžníků, která nachází široké uplatnění přímo ve školské praxi, ale také při řešení náročnějších úloh v různých matematických soutěžích na ZŠ i SŠ. Tato vlastnost však není v našich učebnicích geometrie pro ZŠ a SŠ speciálně zmiňována. Zde ji uvedeme ve formě dvou praktických tvrzení s následnými ukázkami jejich přímých aplikací.

Věta 1 (motýlí křídla)

V libovolném lichoběžníku $ABCD$ ($AB \parallel CD$), kde M značí průsečík jeho úhlopříček AC a BD , mají trojúhelníky BCM a DAM stejné obsahy.

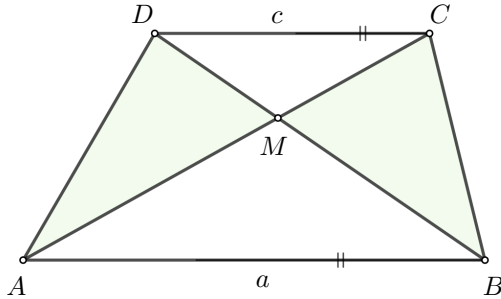
Důkaz. Obsah libovolného trojúhelníku XYZ (čtyřúhelníku $XYZU$) budeme v celém příspěvku značit S_{XYZ} (S_{XYZU}).

Vzhledem k tomu, že vrcholy C , D lichoběžníku $ABCD$ leží na rovnoběžce se stranou AB , mají trojúhelníky ABC a ABD stejné obsahy, tj. $S_{ABC} = S_{ABD}$. Z této rovnosti plyne (viz obr. 1)

$$S_{ABM} + S_{BCM} = S_{ABC} = S_{ABD} = S_{ABM} + S_{DAM}.$$

Odtud již bezprostředně dostáváme $S_{BCM} = S_{DAM}$, což bylo třeba dokázat.

Poznámka. Dvojice trojúhelníků BCM a DAM v lichoběžníku $ABCD$ připomíná *motýlí křídla* (viz obr. 1), odtud pracovní pojmenování uvedené věty.



Obr. 1

Platí však také následující věta:

Věta 2

Nechť $ABCD$ je konvexní čtyřúhelník, v němž M je průsečík jeho úhlopříček. Mají-li trojúhelníky BCM a DAM stejný obsah, je $ABCD$ buďto lichoběžník se základnami AB a CD , nebo rovnoběžník.

Důkaz lze vést formálním obrácením postupu v důkazu věty 1, a proto jej ponecháváme zájemcům z řad čtenářů.

V další části uvádíme pět řešených úloh, kde podstatným způsobem využijeme tvrzení věty 1, popř. myšlenky jejího důkazu.

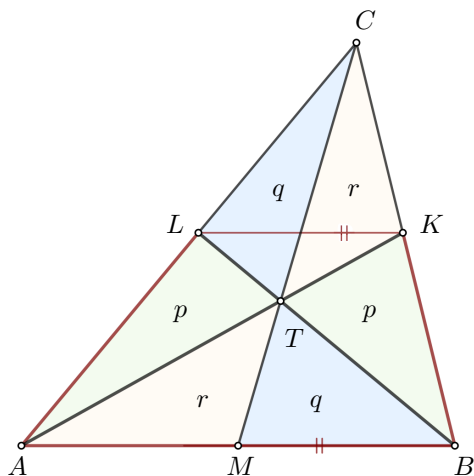
Příklad 1

Dokažte, že těžnice trojúhelníku dělí tento trojúhelník na šest menších trojúhelníků se stejným obsahem.

Řešení. Uvedeme zde postup, který nevyužívá známý poznatek, že těžiště trojúhelníku dělí každou těžnici v poměru 2 : 1. (To bude naopak bezprostředním důsledkem výsledku našeho příkladu.)

Označme T těžiště trojúhelníku ABC a K, L, M po řadě středy jeho stran BC, CA, AB (obr. 2). Úsečka KL je střední příčkou v tomto trojúhelníku, která je rovnoběžná se stranou AB , a proto $ABKL$ je lichoběžník, v němž podle věty 1 platí $S_{ALT} = S_{BKT}$.

Označme $p = S_{ALT} = S_{BKT}$. Analogicky také označme $q = S_{BMT} = S_{CLT}$ a $r = S_{CKT} = S_{AMT}$. Z rovnosti $|AM| = |BM|$ plyne $S_{AMT} = S_{BMT}$, neboli $r = q$; podobně z rovnosti $|BK| = |CK|$ plyne $p = r$. Dohromady tak platí $p = q = r$, což jsme chtěli dokázat.



Obr. 2

Příklad 2

V rovině je dán lichoběžník $ABCD$ se základnami AB a CD , kde je $|AB| = a$, $|CD| = c$, a v němž M značí průsečík jeho úhlopříček. Pomocí délek a a c vyjádřete hodnotu postupného poměru

$$S_{ABM} : S_{BCM} : S_{CDM} : S_{DAM}.$$

Řešení. Předně si uvědomme, že trojúhelníky ABM a CDM jsou podle věty uu podobné s poměrem podobnosti $a : c$, viz obr. 1. Pro poměr jejich obsahů pak platí

$$S_{ABM} : S_{CDM} = a^2 : c^2. \quad (1)$$

Navíc také platí

$$|AM| : |CM| = |BM| : |DM| = a : c.$$

Odtud pro poměr obsahů trojúhelníků ABM a BCM dostáváme

$$S_{ABM} : S_{BCM} = |AM| : |CM| = a : c = a^2 : ac. \quad (2)$$

Podobně rovněž platí

$$S_{BCM} : S_{CDM} = |BM| : |DM| = a : c = ac : c^2. \quad (3)$$

Podle věty 1 platí $S_{BCM} = S_{DAM}$, proto hledaný postupný poměr získáme snadno spojením vztahů (1)–(3).

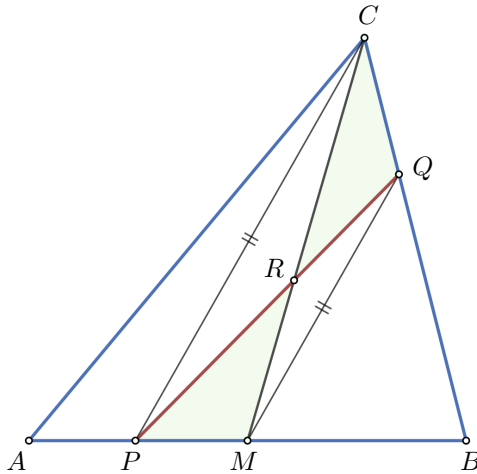
ZÁVĚR. Hledaný postupný poměr obsahů trojúhelníků je tedy

$$S_{ABM} : S_{BCM} : S_{CDM} : S_{DAM} = a^2 : ac : c^2 : ac.$$

Příklad 3

Je dán trojúhelník ABC a vnitřní bod P jeho strany AB . Sestrojte přímku, která prochází bodem P a současně dělí daný trojúhelník na dva útvary se stejným obsahem.

Řešení. Označme M střed strany AB . Je-li $P = M$, je zřejmě CP jedinou hledanou přímkou, která dělí daný trojúhelník na dva trojúhelníky (AMC a BMC) o stejném obsahu.



Obr. 3

Zabývejme se nyní případem, kdy $P \neq M$ a uvažujme polohu bodu P stejnou jako na obrázku, tj. P je vnitřním bodem úsečky AM (analogicky lze postupovat, je-li P vnitřním bodem úsečky BM). V tomto případě je evidentně druhý krajní bod Q hledané příčky PQ vnitřním bodem strany BC . Uvažujme rovnoběžku s PC procházející středem M strany AB . Její průsečík se stranou BC označme Q . Čtyřúhelník $PMQC$ je lichoběžník se základnami PC a MQ . Pro průsečík R jeho úhlopříček podle věty 1 platí $S_{PRM} = S_{CRQ}$. Ukážeme, že PQ je jediná příčka požadované vlastnosti.

Vzhledem k tomu, že $S_{AMC} = S_{BMC}$ a $S_{PMR} = S_{CQR}$, platí, viz obr. 3

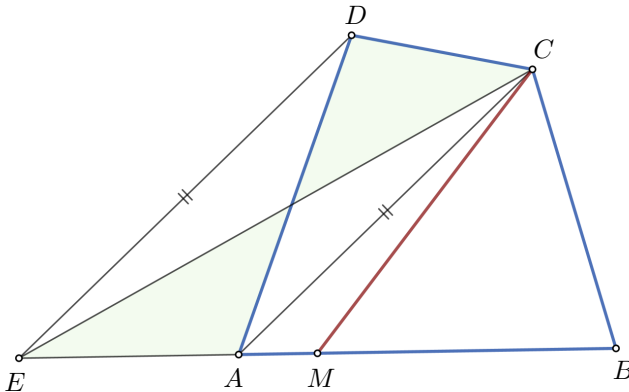
$$\begin{aligned} S_{APQC} &= S_{APRC} + S_{CQR} = S_{APRC} + S_{PMR} = S_{AMC} = \\ &= S_{BMC} = S_{BMRQ} + S_{CQR} = S_{BMRQ} + S_{PMR} = S_{BPQ}, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Příklad 4 (viz [2], popř. [3])

Sestrojte přímku procházející vrcholem C daného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$, která dělí tento čtyřúhelník na dvě části (dva útvary) se stejným obsahem.

Řešení. Hledaná přímka procházející vrcholem C , která vyhovuje podmínkám úlohy, protíná (v bodě M) buď stranu AB (platí-li $S_{ABC} \geq \frac{1}{2}S_{ABCD}$), nebo stranu AD (pokud $S_{ABC} \leq \frac{1}{2}S_{ABCD}$). Úlohu nyní vyřešíme za předpokladu, kdy nastane první případ, viz obr. 4.



Obr. 4

Na polopřímce BA za bodem A najdeme (sestrojíme) takový bod E , pro který je obsah trojúhelníku EBC roven obsahu daného čtyřúhelníku $ABCD$. Rovnoběžka s AC , která prochází vrcholem D , protíná polopřímku BA v hledaném bodě E . Čtyřúhelník $EACD$ je totiž lichoběžník se základnami AC a DE , v němž trojúhelníky ACD a ACE mají stejné obsahy (neboť mají shodné výšky ke společné straně AC). Platí tudíž

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABC} + S_{ACE} = S_{EBC},$$

což jsme chtěli ukázat.

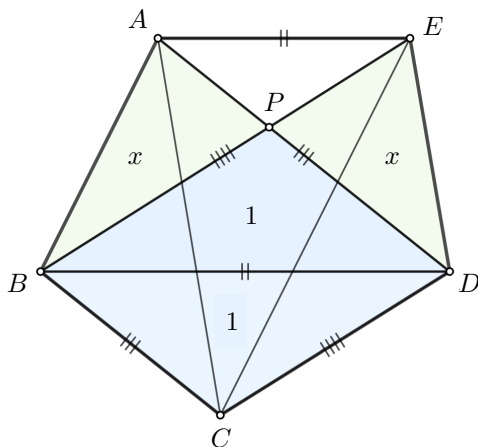
Druhým krajním bodem (M) hledané příčky CM konvexního čtyřúhelníku $ABCD$ je pak (díky rovnosti obsahů trojúhelníku EBC a čtyřúhelníku $ABCD$) střed strany EB získaného trojúhelníku EBC , viz obr. 4.

Poznámka. Snadno vidíme, že případ, kdy $S_{ABC} \geq \frac{1}{2}S_{ABCD}$, je ekvivalentní situaci, kdy M je bodem úsečky (strany) AB . Pokud $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$, je $M = A$. V případě, že stejný postup použijeme i ve druhém případě, tj. $S_{ABC} \leq \frac{1}{2}S_{ABCD}$, leží střed M úsečky EB vně strany AB . V takovém případě je nutno zkonstruovat bod E na polopřímce DA za bodem A a bod M hledat jako střed úsečky DE .

Příklad 5 (Kazašská MO, 2004/2005, viz [1])

Daný konvexní pětiúhelník je každou ze svých úhlopříček rozdělen na čtyřúhelník a trojúhelník, který má obsah 1. Určete obsah tohoto pětiúhelníku.

Řešení. Uvažujme konvexní pětiúhelník $ABCDE$, který vyhovuje podmínkám úlohy. Průsečík jeho úhlopříček AD a BE označme P , viz obr. 5.



Obr. 5

Podle zadání mají trojúhelníky ABE a AED stejné (jednotkové) obsahy. Vrcholy B a D uvažovaného pětiúhelníku leží proto na rovnoběžce s AE , tj. $BD \parallel AE$. Čtyřúhelník $ABDE$ je tedy lichoběžník se základnami AE a BD . Analogicky lze dokázat, že také $AD \parallel BC$ a $CD \parallel BE$. Odtud bezprostředně plyne, že čtyřúhelník $BCDP$ je rovnoběžník. Vzhledem k tomu, že $S_{BCD} = 1$, je $S_{DPB} = 1$, a tedy $S_{BCDP} = 2$.

Označme $x = S_{ABP} = S_{DEP}$, potom $S_{EAP} = 1 - x$. Pro obsahy trojúhelníků ABP , EAP , BDP a DEP pak platí

$$\frac{x}{1-x} = \frac{S_{ABP}}{S_{EAP}} = \frac{|BP|}{|EP|} = \frac{S_{BDP}}{S_{DEP}} = \frac{1}{x},$$

což po úpravě vede k řešení kvadratické rovnice

$$x^2 + x - 1 = 0$$

s jediným *kladným* reálným kořenem $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

ZÁVĚR. Pro obsah S pětiúhelníku $ABCDE$, který vyhovuje podmínkám úlohy, tak platí

$$\begin{aligned} S &= S_{BCDP} + S_{ABP} + S_{DEP} + S_{EAP} = 2 + x + x + (1 - x) = 3 + x = \\ &= 3 + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5}). \end{aligned}$$

Upozorňujeme čtenáře, že další přímé aplikace vět 1 a 2 lze nalézt mj. mezi úlohami naší MO (např. v ročence 53. ročníku MO, úloha C–I–2, autor *J. Švrček*) nebo úloha č. 295 z rubriky *Zajímavé matematické úlohy* našeho časopisu, jejímž autorem je *J. Kalinowski*. Řešení této úlohy najdete v tomto čísle MFI (ve stejnojmenné rubrice).

Zájemcům o uvedenou problematiku je určena také poslední (bonusová) úloha, při jejímž řešení lze využít výsledku příkladu 4.

Příklad 6

Nechť P je vnitřním bodem strany CD daného konvexního čtyřúhelníku $ABCD$. Sestrojte přímku, která prochází bodem P a současně dělí daný čtyřúhelník na dva útvary se stejným obsahem.

[*Návod.* Je třeba rozlišit 3 případy: a) pro druhý krajní bod Q hledané příčky PQ platí $Q \in \overline{DA}$, právě když $S_{APD} \geq \frac{1}{2}S_{ABCD}$, b) $Q \in \overline{BC}$, právě když $S_{BPC} \geq \frac{1}{2}S_{ABCD}$, c) $Q \in \overline{AB}$ ve všech ostatních případech.]

Literatura

- [1] *Kungožin, A. M., Kungožin, M. A.*: Rajonnaja olimpiada škol'nikov po matematike, 2000–2018 (rusky). Daryn, Astana, 2018.
- [2] *Maška, O.*: Řešené úlohy z matematiky – Planimetrie. SNTL, Praha 1959.
- [3] *Walker, A., Millar, J.*: A New Course in Geometry. Longmans, Green and Co. Ltd, London, 1954.

Ruinování hráče v hazardní hře

PAVEL TLUSTÝ – JÁN GUNČAGA

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice – Pedagogická fakulta UK, Bratislava

Pochopení základních principů hazardních her je jeden ze způsobů ochrany proti gamblerskému. Umožňuje hráči racionálně myslet a vrátit se zpět do reality.

V dnešní době existuje nepřehledné množství hazardních her – ruleta, keno, craps, chuck-a-luck, sportka, šťastných 10, různé kostkové hry, hrací automaty a mnohé další. Všechny tyto hazardní hry mají jedno společné – jejich matematický model je vytvořen tak, aby „střední hodnota“ výhry byla pro provozovatele hazardní hry (kasino) kladná. Provozovatel má (při mnoha opakováních hry) zaručen zisk s velmi vysokou pravděpodobností. To však v *žádném případě neznamená*, že musí být nutně všichni účastníci hry pokaždé ve ztrátě.

I když je každá hazardní hra pro hráče nevýhodná, přece jen mezi nimi existují významné rozdíly. Ty spočívají zejména v tom, jaká část z hráčem vložené částky případně „v průměru“ provozovateli hry. Následující tabulka ukazuje porovnání některých hazardních her právě z tohoto úhlu pohledu.

název hry	podíl z hráčova vkladu, který připadne v „průměru“ provozovateli
francouzská ruleta	2,7 %
americká ruleta	5,3 %
chuck-a-luck	7,9 %
hrací automaty	od 20 % (v závislosti na typu)
keno, šťastných 10	i 50 % (v závislosti na výplatní tabulce)

Tab. 1. Porovnání „výhodnosti“ hazardních her

Vidíme, že francouzská ruleta je pro hráče nejlepším možným výběrem, neboť v průměru prohrává jen 2,7 % z vsazené částky. To je přijatelná suma, na kterou lze nahlížet jako na poplatek za možnost si zahrát a pobavit se.

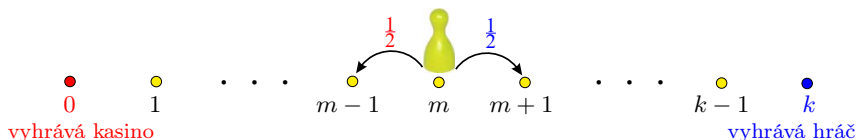
Podívejme se, jaké jsou šance hráče v kasinu vyhrát. Zajímá nás porovnání šancí na výhru kasina a hráče v sérii několika her, jak se během hry mění kapitál hráče, jak rychle hráči v kasinu prohrávají svůj kapitál, jak tato rychlost závisí na typu hazardní hry atd. Podobné otázky nejsou nové a v matematické literatuře se objevily již před více než 100 lety. Bývá zvykem souhrnně označovat tuto problematiku jako *ruinování hráče*. Začneme jednoduchým příkladem.

Příklad 1

Hráč hází mincí. Hodí-li „rub“, vyplatí mu kasino 1 Kč, padne-li mu „líc“, zaplatí 1 Kč kasinu. Na začátku má hráč m Kč, počáteční majetek kasina pro tuto hru je $(k - m)$ Kč.¹⁾ Hra skončí ve chvíli, kdy hráč nebo kasino prohraje všechny peníze (ruinování hráče). Jaké jsou šance hráče na vítězství ve hře?

Průběh hry si můžeme představit jako pohyb figurky po číselné ose. Dohromady se hraje o k Kč. Obr. 1 je vytvořen z pohledu hráče. Na začátku hry má hráč m Kč (figurka stojí v bodě m).

1. Pokud padne „r“, hráč dostane 1 Kč, tj. má celkem $(m + 1)$ Kč a figurka se přesune do bodu $m + 1$.
2. Padne-li „l“, hráč prohraje 1 Kč, figurka se přesune do bodu $m - 1$.
3. Hra končí ve chvíli, když se figurka dostane buď do bodu 0, nebo do bodu k .



Obr. 1 Pohyb figurky po číselné ose

Označme $p_m = P(\text{figurka stojící v bodě } m \text{ se dostane do bodu } k)$, $m = 0, 1, \dots, k$. Z obr. 1 vyplývá rovnost

$$p_m = \frac{1}{2}p_{m-1} + \frac{1}{2}p_{m+1} \quad (1)$$

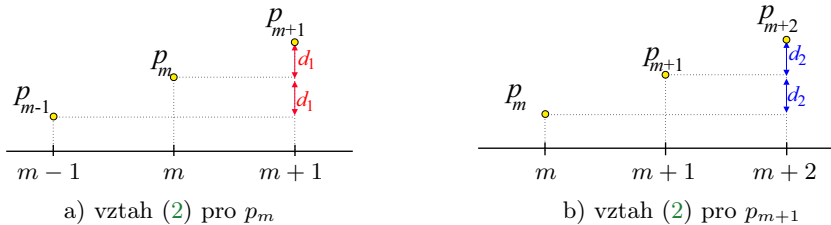
s počátečními podmínkami $p_0 = 0$ a $p_k = 1$. Vztah (1) se nazývá *lineární diferenciální rovnice 2. řádu*. Čtenář seznámený s teorií diferenciálních rovnic může nalézt řešení p_m právě tímto způsobem.

¹⁾Reálně je kapitál kasina téměř „neomezený“. Podmínku, že kasino má na danou hru jen $(k - m)$ Kč, lze realizovat tak, že hráč po dosažení k Kč hru dobrovolně ukončí.

Ukážeme si jinou možnost, jak tuto diferenční rovnici vyřešit. Z (1) vyplývá, že posloupnost čísel $p_m, m = 0, 1, \dots, k$ splňuje vztah

$$p_m = \frac{1}{2}(p_{m-1} + p_{m+1}), \quad (2)$$

což znamená, že p_m je aritmetickým průměrem p_{m-1} a p_{m+1} . Podobně p_{m+1} je aritmetickým průměrem p_m a p_{m+2} .



Obr. 2

Z obr. 2a) vidíme, že platí rovnost $p_{m+1} = p_m + d_1$, z obr. 2b) dostaneme $p_{m+1} = p_m + d_2$. Odtud je zřejmé, že $d_1 = d_2$, tedy rozdíl dvou sousedních členů uvedené posloupnosti je konstantní. Posloupnost $(p_m)_{m=0}^k$ tedy je aritmetickou posloupností a platí:

$$p_m = p_0 + m \cdot d, \quad (3)$$

kde d je neznámá diference. Po dosazení okrajových podmínek $p_0 = 0$ a $p_k = 1$ do vztahu (3) vypočteme, že $d = \frac{1}{k}$, a dostaneme hledanou pravděpodobnost

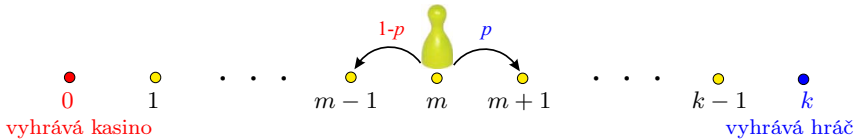
$$p_m = \frac{m}{k}, \quad m = 0, 1, \dots, k. \quad (4)$$

Hráč zruinuje kasino s pravděpodobností $\frac{m}{k}$, zatímco kasino zruinuje hráče s pravděpodobností $(1 - \frac{m}{k}) = \frac{k-m}{k}$.

Z příkladu 1 plyne, že ve *spravedlivé hře* (oba soupeři vyhrávají dílíč partie s pravděpodobností $p = \frac{1}{2}$) je pravděpodobnost zruinování hráče přímo úměrná velikosti jeho počátečního kapitálu. Z tohoto úhlu pohledu je šance běžného hráče „zruinovat“ kasino mimo realitu. Uvědomme si navíc, že kasina *žádnou spravedlivou hru* nenabízejí. Ve skutečnosti je v každé partii střední hodnota výhry kasina kladná. V následujícím příkladu si ukážeme, že i velmi malé „vychýlení“ od spravedlivé hry v podstatě nedává hráči reálnou šanci v dlouhodobějším horizontu uspět ve hře proti kasinu.

Příklad 2

Hráč hraje v kasinu posloupnost partií, jejichž výsledek záleží na náhodě, a výsledky jednotlivých partií jsou navzájem nezávislé. Pravděpodobnost, že v jednotlivé partii zvítězí, je $p < \frac{1}{2}$. Za každou výhru v partii dostane hráč od kasina 1 Kč. Za každou prohru naopak zaplatí 1 Kč kasinu. Počáteční majetek hráče je m Kč, počáteční majetek kasina pro tuto hru je $(k - m)$ Kč. Hra skončí ve chvíli, kdy jeden z účastníků prohraje všechny peníze. Jaké jsou šance hráče na vítězství ve hře?



Označme $p_m = P(\text{figurka stojící v bodě } m \text{ se dostane do bodu } k)$, $m = 0, 1, \dots, k$. Z obr. 3 vyplývá rovnost

$$p_m = (1 - p) \cdot p_{m-1} + p \cdot p_{m+1} \quad (5)$$

s okrajovými podmínkami $p_0 = 0$ a $p_k = 1$. Vztah (5) je *lineární diferenciální rovnice 2. řádu*.

Čtenář seznámený s teorií diferenciálních rovnic může nalézt řešení p_m právě tímto způsobem. Zde si ukážeme jinou možnost, jak rovnici (5) vyřešit. Postupnými úpravami odvodíme vztahy

$$\underbrace{\left((p + (1 - p)) \right)}_{=1} \cdot p_m = (1 - p) \cdot p_{m-1} + p \cdot p_{m+1},$$

$$\frac{p_{m+1} - p_m}{p_m - p_{m-1}} = \frac{1 - p}{p}.$$

Položme $b_m = p_m - p_{m-1}$, pak $\frac{b_{m+1}}{b_m} = \frac{1-p}{p}$, což znamená, že $(b_m)_{m=1}^k$ je geometrická posloupnost s kvocientem $q = \frac{1-p}{p}$. Tedy platí:

$$\begin{cases} b_1 = p_1 - p_0 \\ b_2 = p_2 - p_1 = b_1 \cdot q \\ \dots \\ b_m = p_m - p_{m-1} = b_1 \cdot q^{m-1} \\ \dots \\ b_k = p_k - p_{k-1} = b_1 \cdot q^{k-1} \end{cases} \quad (6)$$

Po sečtení všech řádků soustavy (6) dostaneme

$$p_k - p_0 = b_1 \cdot (1 + q + \dots + q^{k-1}),$$

což po dosazení

$$p_0 = 0, \quad p_k = 1, \quad 1 + q + \dots + q^{k-1} = \frac{1 - q^k}{1 - q}$$

a úpravě dává rovnost

$$b_1 = \frac{1 - q}{1 - q^m} = p_1.$$

Z druhého řádku soustavy (6) plyne

$$p_2 = b_2 + p_1 = b_1 \cdot q + p_1 = \frac{1 - q}{1 - q^k} \cdot q + \frac{1 - q}{1 - q^k} = \frac{1 - q^2}{1 - q^k}.$$

Stejným způsobem odvodíme obecný vztah

$$p_m = \frac{1 - q^m}{1 - q^k}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, k, \quad (7)$$

kde $q = \frac{1-p}{p}$.

Hodnoty p_m , $m = 0, 1, 2, \dots, k$ představují pravděpodobnosti, že ve hře zvítězí hráč, má-li právě m Kč. Lze dokázat, že hra skončí s pravděpodobností 1 po konečném počtu partií.

Pro lepší představu, jak se mění šance hráče na celkovou výhru, uvedeme dvě tabulky vypočítané pomocí vzorce (7) pro konkrétní m , k a p .

$k = 100$	$p = 0,474$	$p = 0,45$	$k = 10\,000$	$p = 0,474$	$p = 0,45$
$m = 75$	0,074	0,007	$m = 9\,950$	0,006	0,000
$m = 90$	0,353	0,134	$m = 9\,975$	0,074	0,007
$m = 95$	0,595	0,367	$m = 9\,990$	0,353	0,134
$m = 99$	0,901	0,818	$m = 9\,995$	0,595	0,367

a) Celkový kapitál $k = 100$ Kč

b) Celkový kapitál $k = 10\,000$ Kč

Tab. 2

Například z posledního políčka tab. 2a) vidíme, že hráč s pravděpodobností 0,818 vyhraje 1 Kč (hra skončí ve stavu $k = 100$) a s pravděpodobností 0,182 hra skončí ve stavu $k = 0$, tj. hráč prohraje 99 Kč. Podobně z posledního políčka tab. 2b) vidíme, že hráč s pravděpodobností 0,367 vyhraje 5 Kč, zatímco s pravděpodobností 0,633 prohraje 9,995 Kč. Vidíme tedy, že jen velmi „malé odchýlení“ od spravedlivé hry nedává hráči reálnou šanci na výhru. Uvědomíme-li si tyto skutečnosti, je pro nás hraní některých her (viz tab. 1) zcela nepřijatelné.

S problematikou „ruinování hráče“ se setkáváme i v běžném životě, aniž si to možná uvědomujeme. Počítání v některých sportech je rozděleno na „nezávislé“ díly – sety. Některé sportovní soutěže bývají zakončeny závěrečným play off hraném na 2, 3 nebo 4 vítězné zápasy. V obou případech je jedním z důvodů snaha eliminovat nahodilé výsledky. Přijmeme zjednodušující předpoklad,²⁾ že jeden ze soupeřů vyhrává každé utkání s pravděpodobností p a výsledky jednotlivých utkání jsou navzájem nezávislé. Nyní snadno odvodíme, že pravděpodobnost jeho vítězství v celé sérii je dána vztahem:

$$\begin{aligned}
 p^2 + 2p^2(1 - p) & \quad \text{na 2 vítězství} \\
 p^3 + 3p^3(1 - p) + 6p^3(1 - p)^2 & \quad \text{na 3 vítězství} \\
 p^4 + 4p^4(1 - p) + 10p^4(1 - p)^2 + 20p^4(1 - p)^3 & \quad \text{na 4 vítězství}
 \end{aligned}$$

Po dosazení konkrétních hodnot do uvedených vztahů dostaneme tabulku

hraje se na	$p = 0,45$	$p = 0,4$	$p = 0,35$	$p = 0,3$
2 vítězství	0,425	0,352	0,282	0,216
3 vítězství	0,407	0,317	0,235	0,163
4 vítězství	0,392	0,290	0,200	0,126

Tab. 3 Pravděpodobnost vítězství v sérii v závislosti na p a délce série

Z tab. 3 např. vidíme, že hraje-li se série na 4 vítězná utkání, má slabý tým ($p = 0,3$) pouze poloviční šanci, že v sérii zvítězí, oproti sérii hrané na 2 vítězná utkání.

²⁾Podobně lze vytvořit i realističtější modely připouštějící „závislost“ mezi sety, odlišující utkání hraná doma a venku atd.

O vázaných extrémech funkcí

DAG HRUBÝ

Jevíčko

S pojmem *vázaný extrém* je spjata úloha, v níž hledáme extrémy funkce (zpravidla více proměnných), a to při platnosti omezujících podmínek pro její proměnné. Mezi často používané prostředky při vyšetřování vázaných extrémů funkce patří metoda Lagrangeových multiplikátorů. Její použití však vyžaduje hlubší znalosti z vyšší matematiky.

Cílem tohoto příspěvku je ukázat, jak lze určit vázané extrémy některých výrazů (funkcí) elementárním způsobem, využitelným i na středních školách.

Úloha 1

Určete maximální hodnotu výrazu $x + y$, pokud platí $x^2 + y^2 = 1$, kde $x, y \in \mathbb{R}$.

Řešení. Předně si uvědomme, že pro všechna reálná čísla x, y platí

$$\frac{x + y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}, \quad (1)$$

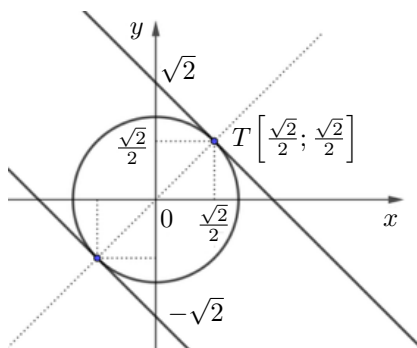
kde rovnost nastane pouze v případě, když $x = y$ a současně platí $x \geq 0$, $y \geq 0$. Po dosazení do (1) za $x^2 + y^2 = 1$ ihned dostaneme

$$\frac{x + y}{2} \leq \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

odkud plyne $x + y \leq \sqrt{2}$, přičemž rovnost nastane, právě když $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Maximální hodnota výrazu $x + y$ je tedy $\sqrt{2}$.

Druhé řešení (užitím analytické geometrie). Uvažujme systém rovnoběžek $x + y = k$, kde k je reálný parametr, a kružnici $x^2 + y^2 = 1$. Hledáme takový bod o souřadnicích (x, y) , který leží na kružnici $x^2 + y^2 = 1$ a současně na některé z přímk parametrického systému $y = -x + k$ tak, aby reálná hodnota k byla maximální. Těmto podmínkám vyhovuje přímka $y = -x + k$ s největším možným k , která je tečnou kružnice $x^2 + y^2 = 1$. Tato tečna a osy souřadnic x, y vymezují v I. kvadrantu rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník, ve kterém je bod dotyku tečny $T[x_0, y_0]$ středem jeho přepony. Odpovídající normála vedená bodem $T[x_0, y_0]$ má rovnici

$y = x$. To znamená, že pro souřadnice bodu T platí $x_0 = y_0$. Po dosazení do rovnice $x^2 + y^2 = 1$ snadno určíme, že je $x_0 = y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tj. $k = \sqrt{2}$. Grafické vyjádření této situace je na obr. 1.



Obr. 1

Vedle tečny $y = -x + \sqrt{2}$ je zde zobrazena také tečna $y = -x - \sqrt{2}$, která určuje minimální hodnotu výrazu $x + y$, kterou je $-\sqrt{2}$.

Třetí řešení (užitím diskriminantu kvadratické rovnice, viz [1] nebo [2]). Označíme-li $z = x + y$, pak $y^2 = (z - x)^2$. Do tohoto vztahu dosadíme za y^2 z rovnice $x^2 + y^2 = 1$ a dostaneme kvadratickou rovnici s neznámou x a reálným parametrem z : $2x^2 - 2xz + z^2 - 1 = 0$.

Protože x je reálné číslo, musí být diskriminant D této kvadratické rovnice nezáporný, tj. $D = 8 - 4z^2 \geq 0$. Odtud plyne $|z| \leq \sqrt{2}$, tedy $z \in \langle -\sqrt{2}; \sqrt{2} \rangle$. Pro minimální hodnotu z platí $z = x + y = -\sqrt{2}$, pro maximální pak $z = x + y = \sqrt{2}$.

V další části se budeme zabývat zobecněním předcházející úlohy a jejími variantami.

Úloha 2

Určete maximální a minimální hodnotu výrazu $ax + by$ v případě, že platí $x^2 + y^2 = 1$, kde $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

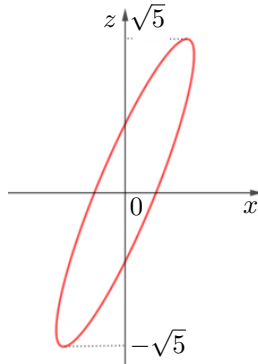
Řešení (užitím metody diskriminantu). Označíme-li $z = ax + by$, pak $y = (z - ax)/b$ a tedy $y^2 = (z - ax)^2/b^2$. Dosazením za y^2 z rovnice $x^2 + y^2 = 1$ pak dostaneme

$$(a^2 + b^2)x^2 - 2axz + z^2 - b^2 = 0. \quad (2)$$

Tato rovnice představuje kvadratickou rovnici s parametry a, b, z . Pro její diskriminant platí

$$D = 4a^2z^2 - 4(a^2 + b^2)z^2 + 4(a^2 + b^2)b^2 = 4(a^2 + b^2)b^2 - 4b^2z^2.$$

Z podmínky $D \geq 0$ dostáváme $z^2 \leq a^2 + b^2$. Odtud plyne $|z| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$. Minimální hodnota je tedy $z = -\sqrt{a^2 + b^2}$ a maximální pak $z = \sqrt{a^2 + b^2}$. Pokud bychom zvolili např. $a = 2, b = 1$, dostali bychom po dosazení do (2) rovnici $5x^2 - 4zx + z^2 - 1 = 0$, což je v soustavě souřadnic Oxz rovnice elipsy. Obr. 2 můžeme chápat jako grafické řešení dané úlohy. Vedle minimální hodnoty $-\sqrt{5}$ je zde také hodnota maximální $\sqrt{5}$. Úloha 1 je tak speciálním případem úlohy 2, kde $a = 1, b = 1$.



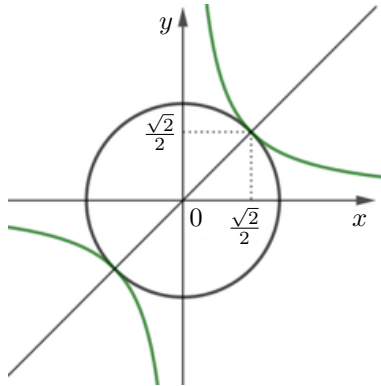
Obr. 2

Úloha 3

Pro $x, y \in \mathbb{R}$ určete maximální hodnotu výrazu xy v případě, že platí $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení (užitím analytické geometrie). Uvažujme systém hyperbol $xy = k$ a kružnici $x^2 + y^2 = 1$. Hledáme takový bod o souřadnicích (x, y) , který leží na kružnici $x^2 + y^2 = 1$ a současně na některé z hyperbol $xy = k$, tak aby hodnota k byla maximální. Těto podmínce vyhovuje hyperbola $xy = k$, která se dotýká kružnice $x^2 + y^2 = 1$, viz obr. 3. Tato hyperbola neprotíná osy souřadnic a tedy je $x \neq 0, y \neq 0$. Osy této rovnosé hyperboly jsou přímky $y = x$ a $y = -x$. To znamená, že pro souřadnice x_0, y_0 bodu dotyku platí $x_0 = y_0$. Z rovnice kružnice $x^2 + y^2 = 1$ snadno zjistíme, že platí $x_0 = y_0 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Pro maximální hodnotu k pak v obou případech platí $k = x_0y_0 = x_0^2 = \frac{1}{2}$.

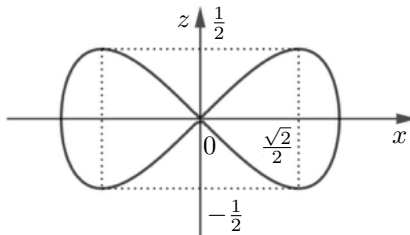
Podobně můžeme postupovat při stanovení minimální hodnoty výrazu $xy = k$. V tomto případě $y = -x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, a platí $k = -\frac{1}{2}$.



Obr. 3

Druhé řešení (užitím metody diskriminantu). Označíme-li $z = xy$, pak $y^2 = \frac{z^2}{x^2}$ ($x \neq 0$). Po dosazení do této rovnice za y^2 z rovnice $x^2 + y^2 = 1$, dostaneme $x^4 - x^2 + z^2 = 0$. Dostáváme bikvadratickou rovnici s neznámou x a reálným parametrem z , kterou po substituci $x^2 = t$ převedeme na kvadratickou rovnici $t^2 - t + z^2 = 0$. Protože t je reálné číslo, musí být diskriminant této kvadratické rovnice nezáporný, $D = 1 - 4z^2 \geq 0$, $|z| \leq \frac{1}{2}$. Největší hodnota zkoumaného výrazu $z = xy$ je tedy $z = \frac{1}{2}$ a jeho nejmenší hodnota je $z = -\frac{1}{2}$.

Podobně jako v předcházejících úlohách si ukážeme grafické řešení této úlohy. Rovnice $x^4 - x^2 + z^2 = 0$ je v soustavě souřadnic Oxz rovnicí *Geronovy lemniskáty*.¹⁾ Obr. 4 můžeme chápat také jako grafické řešení dané úlohy. Kromě minimální hodnoty $-\frac{1}{2}$ je z obr. 4 patrná také maximální hodnota z , a to $\frac{1}{2}$.



Obr. 4

¹⁾ Camille-Christophe Gerono (1799–1891), francouzský matematik.

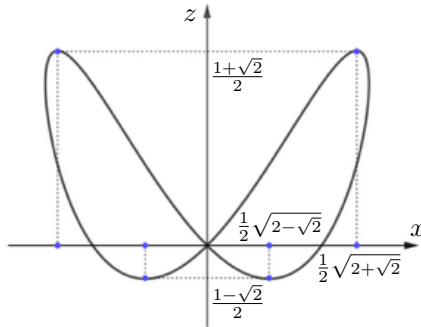
Úloha 4

Určete minimální a maximální hodnotu výrazu $x^2 + xy$ v případě, že platí $x^2 + y^2 = 1$, kde $x, y \in \mathbb{R}$.

Řešení (užitím metody diskriminantu). Označíme-li $z = x^2 + xy$, pak pro $x \neq 0$ dostaneme $y^2 = (z - x^2)^2/x^2$. Po dosazení do tohoto vztahu za y^2 ze vztahu $x^2 + y^2 = 1$ obdržíme rovnici

$$2x^4 - (2z + 1)x^2 + z^2 = 0. \quad (3)$$

Dostáváme bikvadratickou rovnici s neznámou x a reálným parametrem z , kterou substitucí $x^2 = t$ převedeme na rovnici $2t^2 - (2z + 1)t + z^2 = 0$. Protože t je reálné číslo, musí být diskriminant této kvadratické rovnice nezáporný, $D = -4z^2 + 4z + 1 \geq 0$, $|2z - 1| \leq \sqrt{2}$. To znamená, že je $z \in \langle \frac{1-\sqrt{2}}{2}; \frac{1+\sqrt{2}}{2} \rangle$. Minimální hodnota je tedy $z = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$. Rovnice (3) odpovídá v kartézské soustavě souřadnic Oxz křivce na obr. 5.



Obr. 5

Ve 28. ročníku mezinárodní soutěže *Matematický duel*, která se konala v listopadu 2024, byla v kategorii B, určené žákům 1. a 2. ročníku gymnázia, zadána následující úloha: *Nechť x, y jsou libovolná reálná čísla, pro která platí $2x - y = 5$. Určete všechny dvojice reálných čísel (x, y) , pro které nabývá výraz $x^2 + y^2$ nejmenší hodnotu. Pokuste se úlohu vyřešit.*

Literatura

- [1] Hrubý, D., Švrček, J.: Využití diskriminantu kvadratické rovnice. Matematika–fyzika–informatika, roč. 26 (2017), č. 5, s. 321–327.
- [2] Hrubý, D.: Metoda diskriminantu. Obzory matematiky, fyziky a informatiky, roč. 53 (2024), č. 1.

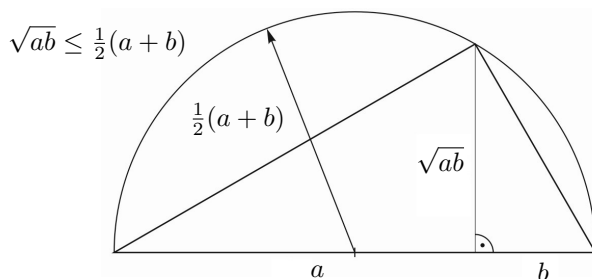
Výpočty a obrázky

FRANTIŠEK KUŘINA – JANA CACHOVÁ

Přírodovědecká fakulta Univerzity Hradec Králové

V libovolné učebnici matematiky můžeme pozorovat tři způsoby vyjadřování. Slovní text v běžném jazyku. Je obvykle formulován ve větách v souladu s obvyklými gramatickými pravidly. Dále je v učebnicích symbolický jazyk vzorců a obrázky.

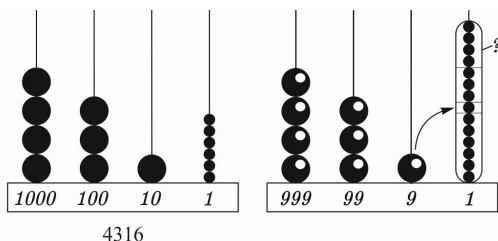
Uveďme příklad. Geometrický průměr je nejvýše tak velký jako průměr aritmetický (obr. 1).



Obr. 1

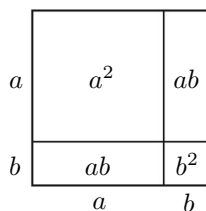
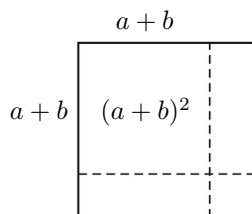
Obrázky jsou důležité jak při výkladu učiva, tak i při řešení úloh. Tak např. obr. 2 je ilustrací pravidla pro dělitelnost čísla čísly tři nebo devět.

Vymodelujeme-li číslo na řádovém počítadle, můžeme si představit, že od každé jednotky vyššího řádu odečteme číslo jedna (to je na obr. 2 znázorněno kolečkem s tečkou) a takto vzniklé jednotky přidáme na drát jednotek. Celkový jejich počet je roven cifernému součtu čísla, tj. počtu tisíců, set, desítek a jednotek. A tento součet rozhoduje o dělitelnosti čísla devíti.



Obr. 2

Obr. 3 ilustruje větu o druhé mocnině dvojčlenu, na obr. 4 vidíme násobení mnohočlenů.



Obr. 3

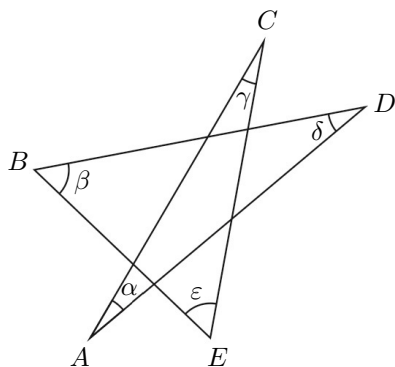
	d	e
a	ad	ae
b	bd	be
c	cd	ce

Obr. 4

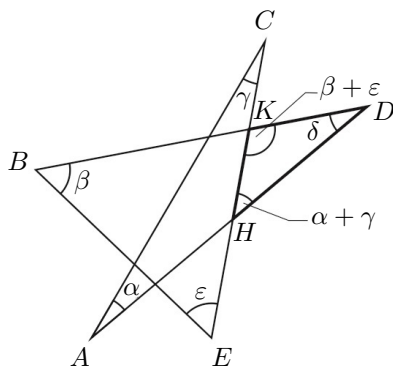
Obrázky při výpočtech

Příklad 1

Vypočítejte součet velikostí úhlů α , β , γ , δ , ε ve vrcholech pěticípé hvězdy na obr. 5.



Obr. 5

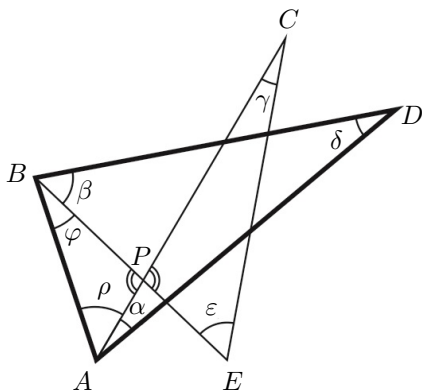


Obr. 6

Z řady různých možností řešení uvedeme dvě.

Nejjednodušší je patrně postup podle obr. 6. Úhel HKD je vnější úhel trojúhelníku KBE , má tedy velikost $\beta + \varepsilon$. Podobně úhel KHD je vnějším úhlem trojúhelníku CHA a má tedy velikost $\alpha + \gamma$. Součet $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon$ je 180° .

Jiné řešení úlohy vychází z trojúhelníku BAD (obr. 7).



Obr. 7

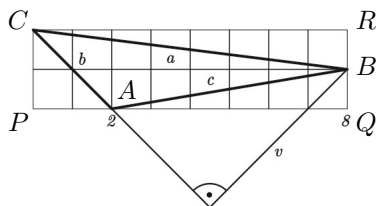
Protože $\varphi + \rho = \gamma + \varepsilon$, je $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 180^\circ$.

Příklad 2

Máme vypočítat obsah S trojúhelníku ABC ($A[2; 0]$, $B[8; 1]$, $C[0; 2]$).

Umístíme trojúhelník ABC do čtvercové sítě (obr. 8). Z tohoto obrázku můžeme poznat několik řešení úlohy.

Pomocí Pythagorovy věty je možné určit délky a , b , c daného trojúhelníku a obsah S pak vypočítáme pomocí Heronova vzorce.



Obr. 8

Metodami analytické geometrie můžeme vypočítat délku strany b a vzdálenost vrcholu B od přímky CA . S pak vypočítáme podle vzorce

$$S = \frac{1}{2}bv.$$

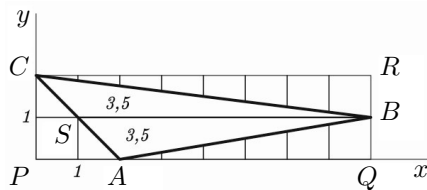
Vypočítáme-li velikost úhlu γ , dostáváme výsledek ve tvaru

$$S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma.$$

Obsah S můžeme určit i pomocí vektorového součinu známého z učebnice analytické geometrie [2].

Naši ukázkou můžeme řešit na úrovni základní školy. Podle obr. 9 vidíme, že platí

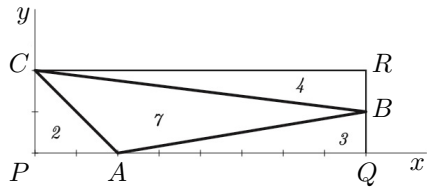
$$S = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 1 = 7.$$



Obr. 9

„Opíšeme-li“ trojúhelníku ABC obdélník $PQRC$, vidíme, že platí (obr. 10)

$$S = 2 \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1 = 7.$$



Obr. 10

V učebnici [2] je odvozen vzorec pro obsah trojúhelníku s vrcholy $A[a_1, a_2]$, $B[b_1, b_2]$, $C[c_1, c_2]$:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 1 \\ b_1 & b_2 & 1 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{vmatrix}$$

Užitím tohoto vzorce můžeme obsah vypočítat, aniž bychom kreslili obrázek. Ten za nás nakreslili autoři v uvedené učebnici.

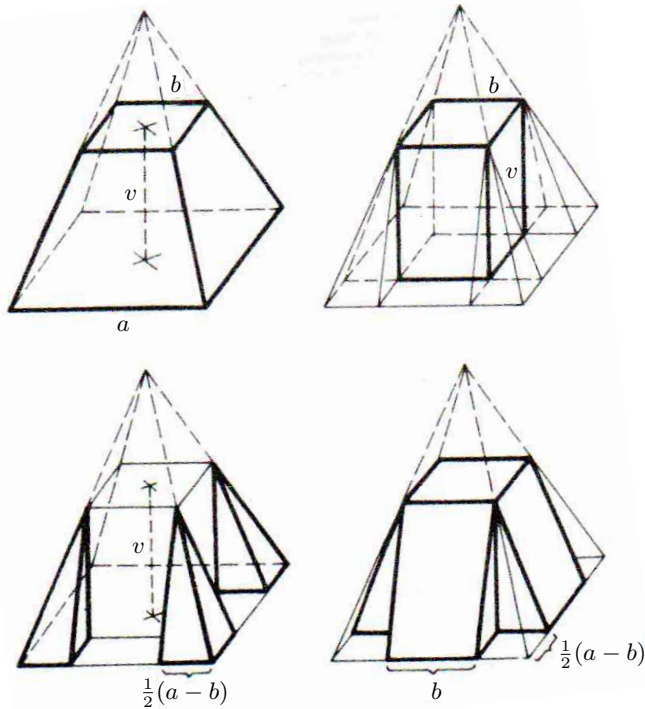
Příklad 3

Máme vypočítat objem komolého jehlanu se čtvercovými podstavami o stranách a , b a výšce v . Nemáme přitom použít větu o objemu komolého jehlanu, kterou odvozuje Pomykalová v publikaci [1].

Studuje-li žák toto odvození, patrně se zarazí na „samozřejmé“ rovnosti

$$S_1 + S_2 = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right) \left(\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}\right).$$

Tím spíše nemohli uvažované odvození provést stavitelé pyramid. Ti si ovšem pomohli důmyslným způsobem. Rozdělili komolý jehlan na 9 těles, jejichž objemy uměli vypočítat (obr. 11). Tento výpočet nebudeme provádět.

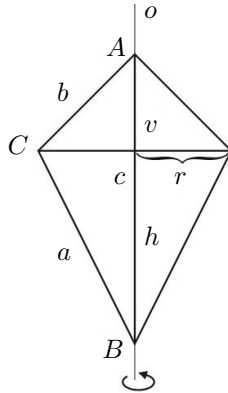


Obr. 11

Příklad 4

Máme vypočítat objem tělesa, které vznikne rotací pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami a , b kolem přepony c .

Z obr. 12 vidíme, že se jedná o dva kužele se společnou kruhovou podstavou o poloměru r a výškami h a v .



Obr. 12

Pro objem V tedy platí

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v + \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 (v + h).$$

Protože $ab = rc$ (obsah trojúhelníku ABC) je

$$r = \frac{ab}{c}$$

a podle obrázku je $v + h = c$, máme pro objem V výsledek

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{ab}{c}\right)^2 \cdot c = \frac{1}{3}\pi \frac{(ab)^2}{c}.$$

Podle našeho názoru jsou obrázky důležitou složkou řešení úloh. Bez nich bychom sotva nějakou úlohu vyřešili.

Literatura

- [1] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia. Stereometrie. Prometheus, Praha, 1995.
- [2] *Stehlíková, N., Hejný, M., Jirotková, D.*: Úvod do analytické geometrie. Pedagogická fakulta Univerzity Karlovy, Praha, 2005.

O jednom probléme z teórie čísel

MARTIN MELICHER – MICHAL JANÍK

posluchači Matematicko-fyzikální fakulty UK, Praha

V júnovom čísle časopisu MFI z roku 2022 bol v rubrike *Zajímavé matematické úlohy* uvedený problém, ktorý navrhol Jaromír Šimša z PřF MU v Brne (viď MFI roč. 31/2, str. 115, úloha č. 277). Tento problém zostal pre čitateľov dva roky otvorený. Zadanie tejto úlohy tu zapíšeme takto:

Nech D a n sú prirodzené čísla, pre ktoré platí $D \leq \frac{n(n+1)}{2}$. Rozhodnite, či potom z každej n -prukovej množiny po sebe idúcich celých čísel možno vybrať takú neprázdnu podmnožinu, aby súčet jej prukov bol deliteľný číslom D .

V tomto článku túto úlohu vyriešime s výsledkom, že *odpoveď je kladná* pre všetky popísané dvojice čísel D a n . Aby bol náš postup prehľadnejší, uvedieme najprv jedno zaujímavé a užitočné tvrdenie z teórie čísel. Pri jeho dôkaze aj my využijeme pôvodný autorov užitočný obrat, ktorý je práve vďaka tomu dobre známy pod názvom *Dirichletov princíp*. (Jeho ďalšie početné uplatnenia v teórii čísel, geometrii a kombinatorike možno nájsť v rovnomennom [zväzku č. 25](#) z edície Škola mladých matematiků).

Dirichletova aproximačná veta

Pre ľubovoľné reálne číslo x a ľubovoľné prirodzené číslo N existujú také celé čísla r a s , kde $1 \leq s \leq N$, že platí

$$|sx - r| \leq \frac{1}{N+1}, \quad \text{resp.} \quad \left| x - \frac{r}{s} \right| \leq \frac{1}{s(N+1)}.$$

Dôkaz. Uvažujme N čísel $kx - [kx]$ pre $k \in \{1, 2, \dots, N\}$, ktoré všetky ležia v intervale $(0, 1)$. Rozlíšime 3 prípady:

- ▷ Pre nejaké $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ platí $kx - [kx] \in \langle 0, \frac{1}{N+1} \rangle$. Potom pre $r = [kx]$, $s = k$ máme $0 \leq sx - r \leq \frac{1}{N+1}$.

▷ Pre nejaké $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ platí $kx - [kx] \in \langle \frac{N}{N+1}, 1 \rangle$. Potom pre $r = 1 + [kx]$, $s = k$ máme $-\frac{1}{N+1} \leq sx - r \leq 0$.

▷ Pre každé $k \in \{1, 2, \dots, N\}$ platí $kx - [kx] \in \langle \frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1} \rangle$. V tomto prípade rozdelíme interval $\langle \frac{1}{N+1}, \frac{N}{N+1} \rangle$ na $N - 1$ intervalov

$$\left\langle \frac{1}{N+1}, \frac{2}{N+1} \right\rangle, \left\langle \frac{2}{N+1}, \frac{3}{N+1} \right\rangle, \dots, \left\langle \frac{N-1}{N+1}, \frac{N}{N+1} \right\rangle.$$

Keďže našich čísel je N a intervalov iba $N - 1$, podľa Dirichletovho princípu musia niektoré dve z týchto čísel ležať v rovnakom intervale. Nájdeme teda čísla $k_1, k_2 \in \{1, 2, \dots, N\}$, $k_1 > k_2$, také, že čísla $a_1 = k_1x - [k_1x]$ a $a_2 = k_2x - [k_2x]$ ležia v rovnakom intervale dĺžky $\frac{1}{N+1}$. Potom

$$|a_1 - a_2| \leq \frac{1}{N+1},$$

a teda môžeme položiť $r = [k_1x] - [k_2x]$, $s = k_1 - k_2$.

Riešenie Šimšovho problému

Nech teda n, D sú prirodzené čísla a platí $D \leq \frac{n(n+1)}{2}$. Dokážeme, že z každej n -prvkovej množiny za sebou idúcich celých čísel možno vybrať neprázdnu podmnožinu so súčtom prvkov deliteľným D . V priebehu dôkazu budeme uvádzať rôzne obmedzenia na veľkosť čísla n ; vrátíme sa k nim v úplnom závere.

Majme $a \in \mathbb{Z}$ a uvažujme množinu $M = \{a, a + 1, \dots, a + n - 1\}$. Nech $r \in \mathbb{Z}$ a $s \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pozrime sa, kedy je možné vyjadriť rD ako súčet s rôznych prvkov M . Najmenší možný súčet prvkov s -prvkovej podmnožiny M je

$$A = a + (a + 1) + \dots + (a + s - 1) = \frac{(2a + s - 1)s}{2},$$

najväčší zas

$$B = (a + n - s) + \dots + (a + n - 1) = \frac{(2a + 2n - s - 1)s}{2}.$$

Navyše, ak N je s -prvková podmnožina M so súčtom prvkov $S < B$, tak vždy nájdeme $k \in M \setminus \{a + n - 1\}$ také, že $k \in N$ a $k + 1 \notin N$, potom $N \setminus \{k\} \cup \{k + 1\}$ je s -prvková podmnožina M so súčtom prvkov $S + 1$.

Z toho vyplýva, že súčty prvkov s -prvkových podmnožín M sú práve všetky celé čísla od A do B . Číslo rD sa teda dá takýmto súčtom vyjadriť práve vtedy, keď

$$\frac{(2a + s - 1)s}{2} \leq rD \leq \frac{(2a + 2n - s - 1)s}{2}.$$

Ekvivalentnými úpravami môžeme túto podmienku previesť na

$$\frac{s - n}{2D} \leq \frac{r}{s} - \frac{2a + n - 1}{2D} \leq \frac{n - s}{2D},$$

čo sa dá prepísať ako

$$\left| \frac{2a + n - 1}{2D} - \frac{r}{s} \right| \leq \frac{n - s}{2D}. \quad (1)$$

Máme dokázať, že pre každé $a \in \mathbb{Z}$ existujú $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \{1, 2, \dots, n\}$ také, že (1) platí.

Začneme zopár jednoduchými pozorovaniami:

1. Ak (r, s) spĺňa (1) pre a , tak pre každé $k \in \mathbb{Z}$ platí, že $(r + ks, s)$ spĺňa (1) pre $a + kD$. Stačí nám teda uvažovať $a \in \{1, \dots, D\}$.
2. Ak $D - n + 1 \leq a \leq D$, tak $(r, s) = (1, 1)$ spĺňa (1). Pre ďalší rozbor teda ostáva $a \in \{1, \dots, D - n\}$.
3. Ak (r, s) spĺňa (1) pre a , tak $(s - r, s)$ spĺňa (1) pre $D - n + 1 - a$. Ďalej teda stačí uvažovať $a \in \langle 1, \frac{D-n+1}{2} \rangle \cap \mathbb{N}$, kedy $\frac{2a+n-1}{2} \leq \frac{1}{2}$.
4. Pre $a = 1$, $D = \frac{n(n+1)}{2}$ máme $\frac{2a+n-1}{2D} = \frac{1}{n}$, môžeme teda položiť $r = 1$, $s = n$.

Pre $a = 1$, $D = \frac{n(n+1)}{2} - 1$ máme $\frac{2a+n-1}{2D} = \frac{n+1}{n^2+n-2} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{2D}$, môžeme teda položiť $r = 1$, $s = n - 1$.

Vo všetkých ostatných prípadoch máme $\frac{2a+n-1}{2D} \geq \frac{n+1}{n^2+n-4}$, pretože platí:

▷ Ak $a = 1$, tak $D \leq \frac{n(n+1)}{2} - 2$, čiže $\frac{2a+n-1}{2D} = \frac{n+1}{2D} \geq \frac{n+1}{n^2+n-4}$.

▷ Ak $a \geq 2$, tak $\frac{2a+n-1}{2D} \geq \frac{n+3}{2D} \geq \frac{n+3}{n(n+1)} \geq \frac{n+1}{n^2+n-4}$.

(Posledná nerovnosť platí pre $n \geq 3$.)

Stačí teda uvažovať také $a \in \mathbb{Z}$, pre ktoré $\frac{2a+n-1}{2D} \in \left\langle \frac{n+1}{n^2+n-4}, \frac{1}{2} \right\rangle$.

(Taký interval má zmysel, ak $n \geq 3$.)

Po predchádzajúcich pozorovaniach vidíme, že nám pre všetky celé čísla $n \geq 3$ stačí dokázať nasledujúce tvrdenie:

Pre každé reálne $x \in \left\langle \frac{n+1}{n^2+n-4}, \frac{1}{2} \right\rangle$ existujú $r \in \mathbb{N}$, $s \in \{1, \dots, n\}$ také, že

$$\left| x - \frac{r}{s} \right| \leq \frac{n-s}{n(n+1)}.$$

K dôkazu si povšimnime, že číslo $x = \frac{1}{n-1}$ v danom intervale leží (ak $n \geq 3$). Ak $\frac{n+1}{n^2+n-4} \leq x \leq \frac{1}{n-1}$, zvolíme $r = 1$, $s = n-1$. Potom

$$\begin{aligned} \left| x - \frac{r}{s} \right| &\leq \frac{1}{n-1} - \frac{n+1}{n^2+n-4} = \frac{(n^2+n-4) - (n+1)(n-1)}{(n-1)(n^2+n-4)} = \\ &= \frac{n-3}{n^3-5n+4} \leq \frac{1}{n(n+1)} \quad (\text{pre každé } n). \end{aligned}$$

Ďalej nech $x \in \left(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{2} \right)$. Podľa Dirichletovej aproximačnej vety pre $N = n-2$ nájdeme $r \in \mathbb{Z}$, $s \in \{1, \dots, n-2\}$ také, že $\left| x - \frac{r}{s} \right| \leq \frac{1}{s(n-1)}$. Z obmedzenia pre x vyplýva, že $s \neq 1$, a teda $2 \leq s \leq n$. Potom pre také s stačí overiť $\frac{1}{s(n-1)} \leq \frac{n-s}{n(n+1)}$, čo sa ekvivalentnými úpravami prevedie na

$$(n-1)s^2 + (n-n^2)s + (n^2+n) \leq 0.$$

Ak výraz na ľavej strane nerovnosti označíme $P(s)$, tak P je kvadratická funkcia s kladným koeficientom pri s^2 , stačí teda overiť len dve nerovnosti, $P(2) \leq 0$ a $P(n-2) \leq 0$:

- ▷ $P(2) = 4(n-1) + 2(n-n^2) + (n^2+n) = n(7-n) - 4 \leq 0$ pre $n \geq 7$.
- ▷ $P(n-2) = (n-1)(n-2)^2 + (n-n^2)(n-2) + (n^2+n) = n(7-n) - 4 \leq 0$ pre $n \geq 7$.

Aj keď sa nám tvrdenie s aproximáciou čísla x podarilo dokázať iba pre celé čísla $n \geq 7$, tvrdenie z pôvodného problému platí aj pre $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, čo možno overiť manuálne. Dodajme ešte, že tvrdenie s aproximáciou čísla x platí aj pre $n \in \{3, 5, 6\}$, neplatí však pre $n = 4$ – to možno overiť manuálne spočítaním zjednotenia všetkých intervalov $\left\langle \frac{r}{s} - \frac{n-s}{n(n+1)}, \frac{r}{s} + \frac{n-s}{n(n+1)} \right\rangle$ pre $r, s \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Zajímavé matematické úlohy

V novém ročníku našeho časopisu pokračujeme v pravidelné rubrice Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 6. 2025 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi zveřejníme.

Úloha 299

Je dán trojúhelník ABC a bod D ležící na přímce AB , $D \neq A$, $D \neq B$. Označme $k_A(S_A; r_A)$, $k_B(S_B; r_B)$ po řadě kružnice opsané trojúhelníkům ADC , BDC .

- Určete polohu bodu D tak, aby obsah trojúhelníku $S_A S_B C$ byl co nejmenší.
- Určete polohu bodu D tak, aby trojúhelníky $S_A S_B C$ a ABC byly shodné.

Jaroslav Zhouf

Úloha 300

Nechť a , b , c jsou délky stran v libovolném trojúhelníku a t_a , t_b , t_c délky odpovídajících těžnic (v obvyklém značení). Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^2}{t_a^2} + \frac{b^2}{t_b^2} + \frac{c^2}{t_c^2}.$$

Jaroslav Švrček

V následující části uvádíme řešení úloh 295 a 296, jejichž zadání jsme zveřejnili ve třetím čísle loňského (33.) ročníku našeho časopisu.

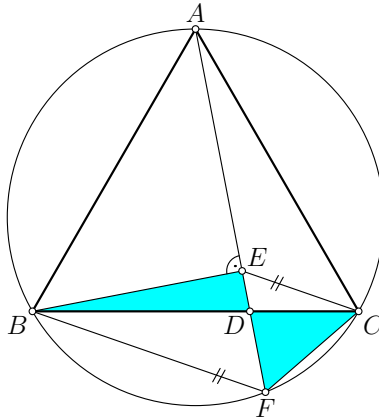
Úloha 295

Nechť D je bod strany BC rovnostranného trojúhelníku ABC , kde $|BD| = 2|CD|$. Označme E patu kolmice z vrcholu B k přímce AD a F ($F \neq A$) průsečík přímky AD s kružnicí opsanou uvažovanému trojúhelníku. Dokažte, že trojúhelníky BDE a CDF mají stejné obsahy.

Józef Kalinowski (Polsko)

Řešení. Ukážeme, že čtyřúhelník $BFCE$ je lichoběžník se základnami BF a EC , tj. $BF \parallel CE$.

Jelikož A je středem oblouku BC kružnice opsané trojúhelníku ABC a F leží na doplňkovém oblouku, jsou úhly BFA a AFC shodné, oba mají podle věty o obvodovém úhlu velikost 60° jako úhly BCA a ABC , přímka FA je tak osou vnitřního úhlu trojúhelníku BCF . Podle věty o ose vnitřního úhlu v trojúhelníku BFC dále s ohledem na zadání dostáváme $|BF| : |CF| = |BD| : |CD| = 2$, tedy $|CF| = \frac{1}{2}|BF|$.



Obr. 1

V pravouhlém trojúhelníku BEF je velikost vnitřního úhlu u vrcholu F rovna 60° , proto pro velikost přilehlé odvěsny platí $|EF| = \frac{1}{2}|BF|$, tedy podle úvah výše je trojúhelník EFC rovnoramenný s hlavním úhlem u vrcholu F o velikosti 60° . Tento trojúhelník je proto rovnostranný, a tedy úhly FEC a EFB jsou shodné. Odtud již plyne rovnoběžnost BF a EC , tedy shodnost obsahů trojúhelníků BFE a BFC , tedy i shodnost obsahů trojúhelníků BDE a CDF .¹⁾

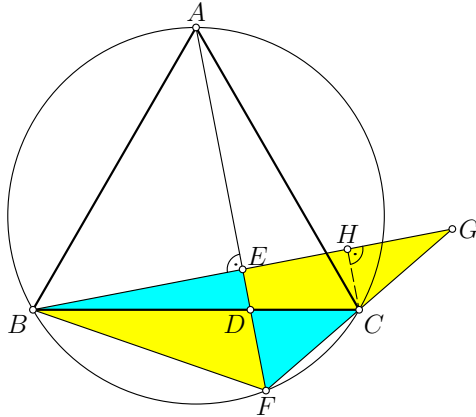
Jiné řešení. Označme G průsečík přímek BE a FC (obr. 2). Podle věty o obvodovém úhlu jsou oba úhly BFA a AFC shodné po řadě s úhly BCA a ABC , a mají tak shodnou velikost 60° . Přímka FE je tak osou vnitřního úhlu u vrcholu F trojúhelníku BFG , jelikož je i kolmá na stranu BG , je jeho výškou a tedy i jeho těžnicí. Bod E je tak středem úsečky BG .

Označme H kolmý průmět bodu C na úsečku BG . Z podobnosti pravouhlých trojúhelníků BED a BHC , resp. GEF a GHC plyne

$$2 = |BD| : |CD| = |BE| : |HE| = |GE| : |HE| = |GF| : |GC|.$$

¹⁾Tzv. *motýlí křídla*, viz úvodní článek tohoto čísla.

Bod H je tak středem úsečky EG a bod C středem úsečky FG . Tedy bod D je jako průsečík těžnic trojúhelníku BFG jeho těžištěm. Trojúhelníky BDE a CDF mají vrchol v těžišti trojúhelníku BFG a jsou hraničeny jeho stranami a těžnicemi, mají tak shodné obsahy rovné šestině obsahu trojúhelníku BFG , což jsme měli dokázat.



Obr. 2

Poznámka. Rovnoběžnost úseček BF a CE dokázaná v předchozím řešení pak plyne z faktu, že CE je střední příčkou trojúhelníku BFG .

Jiné řešení. Uveďme ještě výpočetní řešení. Označme J střed strany BC (je i patou výšky) a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že délka strany rovnostranného trojúhelníku ABC je 6. Dle zadání platí $|AB| = |AC| = 6$, $|BJ| = 3$, $|BD| = 4$, $|JD| = 1$, $|CD| = 2$. Známe pak výšku rovnostranného trojúhelníku a podle Pythagorovy věty v trojúhelníku AJD platí

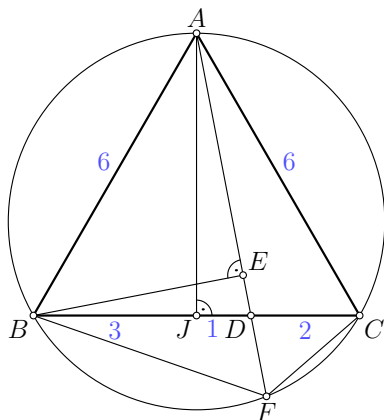
$$|AJ| = 3\sqrt{3}, \quad |AD| = \sqrt{|AJ|^2 + |JD|^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1} = 2\sqrt{7}.$$

Obsah pravoúhlého trojúhelníku ADJ pak je

$$S_{ADJ} = \frac{1}{2}|AJ| \cdot |JD| = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

Pravoúhlé trojúhelníky BDE a ADJ se shodují ve vnitřním úhlu při vrcholu D a v pravých úhlech u vrcholů E a J , jsou tak podobné, pro obsah trojúhelníku BDE pak platí

$$S_{BDE} = S_{ADJ} \left(\frac{|BD|}{|AD|} \right)^2 = \frac{3}{2}\sqrt{3} \left(\frac{4}{2\sqrt{7}} \right)^2 = \frac{6}{7}\sqrt{3}.$$



Obr. 3

Obsah trojúhelníku ADB je

$$S_{ADB} = \frac{1}{2}|BD| \cdot |AJ| = 6\sqrt{3}.$$

Podle věty o obvodovém úhlu jsou úhly ABC a AFC shodné (mají velikost 60°), trojúhelníky ADB a CDF se shodují ve vnitřních úhlech u vrcholů B , F a ve vnitřním úhlu u vrcholu D (vrcholové úhly), jsou tak podobné. Pro obsah trojúhelníku CFD pak platí

$$S_{CDF} = S_{ADB} \left(\frac{|CD|}{|AD|} \right)^2 = 6\sqrt{3} \left(\frac{2}{2\sqrt{7}} \right)^2 = \frac{6}{7}\sqrt{3}.$$

Tím jsme dokázali požadované tvrzení, že obsahy trojúhelníků BDE a CDF jsou stejné.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, *František Jáchim* z Volyně, *Radim Aulický*, G Praha 6, Nad Alejí, *Albert Bakoč*, GChD Praha 5, *Jakub Cyl*, *Michał Fronczek*, *Paweł Chwiedoruk*, *Dawid Rotman*, *Piotr Szatan* a *Bartosz Wieczorek*, všichni II LO Tarnowskie Góry (Polsko), *Alexis Théodore Dachary*, LSG Letohrad, *Adam Dedek* a *Richard Dobíšek*, oba MG Praha 6, *Barbora Herynková*, *Helena Muchová* a *Jakub Trčka*, všichni GJK Praha 6, *Eliška Jaworská*, G Praha 8, Ústavní, *Erik Ježek*, SSPŠ a G Praha 5, *Veronika Menšíková*, AG Praha 2, Korunní, *Tomáš Pazourek*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Lucian Poljak* a *Štěpán Pospíšil*, oba GJŠ Přerov, *Jiří Preč*, GJAK Uherský Brod a *Patrik Štencel*, MG Opava.

Neúplné řešení zaslal *Mykhailo Dektyar*, GJN Praha 1.

Úloha 296

Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$V = \max\{3a + b, 8a^2\} + \max\{3b + a, 8b^2\},$$

kde a, b jsou reálná čísla, jejichž součet je roven 1.

Jaroslav Švrček

Řešení. Zřejmě $\max\{3a + b, 8a^2\} \geq 3a + b$ a $\max\{3b + a, 8b^2\} \geq 3b + a$. Proto

$$V \geq (3a + b) + (3b + a) = 4(a + b) = 4.$$

Rovnost nastane, budou-li existovat taková reálná čísla a, b ($a + b = 1$), že

$$3a + b \geq 8a^2 \quad \text{a} \quad 3b + a \geq 8b^2. \quad (1)$$

Součtem těchto nerovností získáme

$$4 = 4(a + b) \geq 8(a^2 + b^2) = 8(a^2 + (1 - a)^2) = 16a^2 - 16a + 8.$$

Tato nerovnost je ekvivalentní s nerovností

$$0 \geq 16a^2 - 16a + 4 = 4(2a - 1)^2,$$

která je splněna pouze pro $a = \frac{1}{2}$, a tedy $b = \frac{1}{2}$. V tomto případě jsou na obou stranách obou nerovností (1) hodnoty 2, tj. tyto nerovnosti platí.

Nejmenší možná hodnota výrazu V je tedy 4, přičemž je této hodnoty dosaženo, právě když $a = b = \frac{1}{2}$.

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Radim Aulický*, G Praha 6, *Nad Alejí*, *Jakub Cyl*, *Bartosz Depta*, *Michał Fronczek*, *Paweł Chwiedoruk*, *Anna Malcher*, *Dawid Rotman*, *Piotr Szatan*, *Bartosz Wieczorek* a *Filip Zdebik*, všichni II LO Tarnowskie Góry (Polsko), *Alexis Théodore Dachary*, LSG Letohrad, *Adam Dedek* a *Richard Dobíšek*, oba MG Praha 6, *Mykhailo Dektyar*, GJN Praha 1. *Eliška Jaworská*, G Praha 8, *Ústavní*, *Barbora Herynková* a *Jakub Trčka*, oba GJK Praha 6, *Miroslav Holeček*, MG Plzeň, *Erik Ježek*, SSPŠ a G Praha 5, *Lukáš Komín*, G Praha 4, *Opatov*, *Veronika Menšíková*, AG Praha 2, *Korunní*, *Tomáš Pazourek*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Jiří Preč*, GJAK Uherský Brod, *Lucian Poljak* a *Štěpán Pospíšil*, oba GJŠ Přerov a *Marek Valkovič*, G Zlín, Lesní čtvrť.

Až po uzávěrce minulého čísla se ještě objevilo správné řešení úlohy 294 od *Heleny Muchové*, GJK Praha 6.

Pavel Calábek

Měříme modul pružnosti ve smyku nitinolového drátu s tvarovou pamětí

ADÉLA RICHTEROVÁ¹ – VLADIMÍRA ERHARTOVÁ¹ – JIŘÍ ERHART²

¹Doctrina – Podještědské gymnázium, s.r.o., Liberec – ²Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická, Technická univerzita v Liberci

Úvod

Materiály s tvarovou pamětí jsou speciální polymorfní materiály, které vlivem změny teploty nebo mechanického napětí dokáží obnovit svůj původní tvar a samovolně se do něj vrátit. Vyskytuje se u nich tzv. kolektivní paměť atomů, díky které i po zdeformování dokáží obnovit svůj původní makroskopický tvar. Tento jev se nazývá paměťový a jeho příčinou je transformace struktury v pevném stavu, tj. vratná přeměna mezi dvěma fázemi s rozdílnými krystalickými mřížkami [1]. Tato strukturální fázová transformace se vyznačuje například výraznou změnou elastických modulů při přechodu mezi nízkoteplotní a vysokoteplotní strukturou krystalové mřížky. Nejznámější slitinou s tvarovou pamětí je nitinol, který dostal své jméno podle atomů slitiny (Ni a Ti) a laboratoře, kde byl vyvinut (Naval Ordnance Laboratory). Slitinu nitinol dneska můžeme běžně zakoupit ve formě drátů a využít pro své projekty a experimentování.

Jev tvarové paměti byl objeven již roku 1932. Byl pozorován na slitině AuCd pomocí metalografických metod [2] za současné změny elektrického odporu. Zájem mimo akademickou půdu vyvolal až objev velké tvarové paměti slitiny nitinol, u které roku 1959 W. J. Buehler pozoroval podobné chování. Při deformaci za pokojové teploty se materiál choval plasticky, po

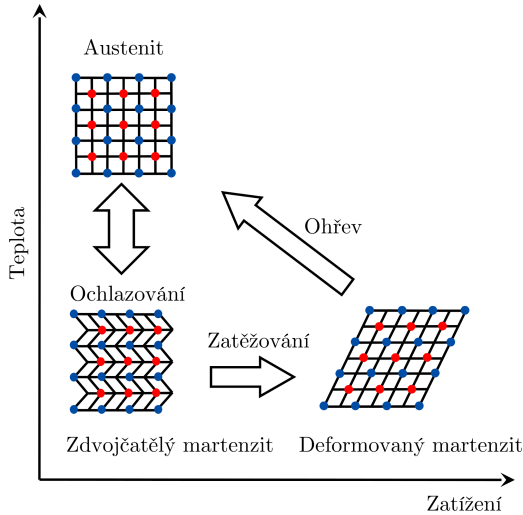
zahřátí na vyšší teplotu se ale vrátil do původního stavu. Paměťový jev byl poté objeven i u mnoha dalších materiálů. Nejvyužívanější jsou slitiny na bázi Ni-Ti (Ni-Ti-Cu, Ni-Ti-Cu-Zr, Ni-Ti-Fe) a na bázi Cu (Cu-Zn-Al, Cu-Al-Ni, Cu-Al-Ag), dále pak například Ag-Cd, Au-Cd, In-Tl, In-Gd, nebo Mn-Cu [3, 4].

Martenzitická transformace je strukturní, fázová a reverzibilní transformace bezdifuzního typu, která spočívá ve změně typu mřížky posunem atomů při změně vnějších podmínek (např. teploty) z vysoce symetrické (např. kubické) na méně symetrickou (např. monoklinickou) krystalovou mřížku. Struktura slitiny se symetrickou mřížkou se nazývá austenit a je stabilní při vyšších teplotách. Modifikace s nižší symetrií se nazývá martenzit, který se vyskytuje za teploty nižší, než je teplota transformace. Díky martenzitické transformaci mají tyto materiály jedinečné vlastnosti, zejména tvarovou paměť a superelasticitu [4, 5].

Martenzitická transformace je reorganizace atomů pohybem vnitřních rozhraní v materiálu. Je způsobena snahou materiálu dosáhnout energeticky nejvýhodnějšího stavu, kdy kvůli rychlé změně okolní teploty, zatížení, či jiných podmínek již původní fáze není energeticky výhodná a materiál se přeorientuje do nové krystalické struktury. Během této transformace nevznikají v materiálu defekty krystalové struktury, protože dojde jen k posuvům atomů, které jsou ve srovnání s meziatomovými vzdálenostmi v mřížce relativně malé [1]. Změna objemu je jen nepatrná, martenzit dokáže převzít přesný vnější makroskopický tvar austenitu [6, s. 401]. Atomy martenzitu mohou díky nižší symetrii zaujmout více ekvivalentních poloh a z jednoho austenitu tedy může vzniknout mnoho různých variant martenzitu s různě orientovanými mřížkami. To je způsobeno tím, že se vrstvy atomových rovin martenzitu deformují pohybem rovin atomů. Tomu se říká dvojčatění. Při pohybu atomů z jejich rovnovážných poloh v materiálu dochází k plošné poruše krystalové mřížky. Vznikne rovina souměrnosti (rovina dvojčatění, viz schématicky obr. 1), podél níž jsou atomy krystalové mřížky v jednom dvojčeti zrcadlově souměrné s atomy mřížky v druhém dvojčeti.

Pásek nitinolu, který je v austenitické fázi plochý, zdeformujeme v martenzitickém stavu do jiného tvaru. Pokud působíme dostatečnou silou a překročíme hranici kritického napětí, deformace zůstane i po uvolnění. Poté materiál zahřejeme nad teplotu strukturní transformace. Jeho struktura se přemění do austenitické fáze a obnoví svůj původní tvar. Při ochlazování se vrací do fáze zdvojčatělého martenzitu, což nezpůsobí žádnou

makroskopicky viditelnou změnu tvaru (viz obr. 1).



Obr. 1 Tvarově paměťová transformace

Teplota, kterou musíme překročit, aby došlo k transformaci, se nazývá transformační (nebo také aktivační) teplota. Při mechanickém zatížení vzrůstá a mění se hlavně v závislosti na přesném složení slitiny. Nitinol se vyrábí s mnoha různými aktivačními teplotami (od $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ do $+100\text{ }^{\circ}\text{C}$). Standardní je slitina s obsahem asi 50 at. % Ni (obsah niklu v nitinolu se může pohybovat mezi 48–52 at. %), změna o 0,1 % může ale změnit transformační teplotu až o $10\text{ }^{\circ}\text{C}$. Proto se při výrobě slitiny musí dodržet její přesné složení [3].

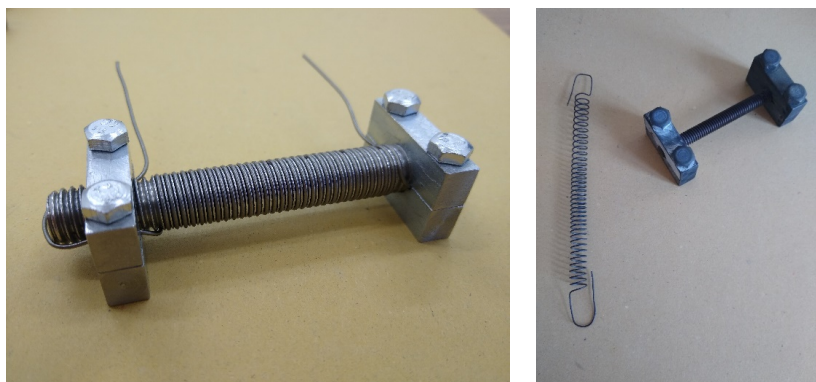
V předkládaném článku se zaměřujeme na experimentování s vlastními vytvořenými pružinami z drátu ze slitiny nitinol s různými aktivačními teplotami, průměry drátů a spirál pružin jednoduchými měřidly s využitím školního systému Vernier. Pružina umožňuje změření smykového modulu pružnosti při jeho změně během strukturální transformace mřížky. Pro další experimenty s nitinolem viz např. [7].

1. Praktická část

Praktická část práce se věnuje fyzikálním vlastnostem nitinolového drátu za různých teplot a mechanického namáhání. Měříme křivku deformace a z ní určíme hodnoty modulů pružnosti ve smyku pro martenzickou a

austenitickou fází materiálu. Ukážeme, že se mechanické vlastnosti v jednotlivých fázích výrazně liší.

Jsou realizována měření s nitinolovými dráty o různých průměrech (0,5 mm a 1 mm) a aktivačních teplotách 45 °C a 70 °C. Nejprve jsou z těchto drátů vyrobeny pružiny o různých průměrech. Nitinolový drát byl namotán na šablonu vytvořenou ze závitové tyče vhodného průměru (4 mm, 5 mm, 6 mm, 8 mm, 10 mm, 12 mm a 16 mm) a na koncích zafixován pomocí přípravku (viz obr. 2). V laboratorní peci byl poté žhán na teplotu 550 °C po dobu půl hodiny a ponechán samovolně vychladnout. Vzhledem k této vysoké teplotě žhání musí být celý přípravek vyroben z nekorodující nerezové oceli. Výsledkem byla nitinolová pružina definovaného tvaru, která se po protažení za pokojové teploty a následného ohřátí nad aktivační teplotu paměťové transformace do tohoto tvaru zase vracela.



Obr. 2 Nitinolový drát zafixovaný na šabloně a vytvořená pružina

V prvním měření jsou poté pružiny deformovány za pokojové teploty (v martenzitické fázi) a je změřena křivka deformace. V křivce deformace je vybrána počáteční oblast s lineárním průběhem (pro malé deformace). Z této oblasti je následně odečtena tuhost pružiny a dopočítán modul pružnosti ve smyku. Druhé měření je realizováno za zvýšené teploty, kdy jsou pružiny v austenitické fázi. Pružiny jsou ohřáty průchodem elektrického proudu, znovu deformovány, je měřena působící síla a prodloužení pružiny a jsou vytvořeny křivky deformace. Poté je v každém grafu vybrána oblast s lineárním průběhem v oblasti malých deformací a stejně jako v martenzitické fázi určena tuhost pružiny a vypočten modul pružnosti ve smyku. Vzhledem k tomu, že modul pružnosti je materiálovou konstantou, tak

by ho neměly ovlivnit rozdílné průřezy zkoumaných vzorků pro stejnou aktivační teplotu (tj. stejné složení slitiny). Při přechodu transformační teploty materiálu dochází k výrazné přeměně krystalické mřížky. Nitinol ve formě austenitu má mřížku více symetrickou, zatímco ve formě martenzitu má mřížku s nižší symetrií. Velikosti elastických modulů pružnosti pružin v austenitické fázi by měly být asi 2 až 3krát vyšší [8, 9].

Chování materiálu při jeho deformaci znázorňuje křivka deformace, tedy graf závislosti mechanického napětí na relativním prodloužení. V našem případě však pracujeme s protažením pružiny (materiál závitů se deformuje ve smyku), kde však nemáme možnost přímo určit smykovou deformaci drátu. Zjišťujeme tedy tuhost pružiny, což však není materiálová konstanta, ale veličina závislá na modulu pružnosti drátu, na jeho průměru, na počtu a poloměru závitů spirály pružiny. Tuhost k je fyzikální veličina udávající sílu F , kterou protáhneme pružinu o jednotku její délky Δl [10].

$$k = \frac{F}{\Delta l}. \quad (1)$$

Při natahování pružiny je pružina namáhána tahem, samotný drát je ale namáhán ve smyku. Pro tuhost pružiny platí vztah

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3N}, \quad (2)$$

kde D je průměr spirály pružiny (měřeno od středu průměru drátu), N počet závitů spirály pružiny, G modul pružnosti ve smyku a d průměr drátu, ze kterého je pružina vyrobena [11].

Z tohoto vztahu lze odvodit vztah pro výpočet modulu pružnosti ve smyku

$$G = \frac{8kD^3N}{d^4}. \quad (3)$$

U nitinolu by se měla hodnota modulu pružnosti ve smyku pohybovat pro martenzit v rozmezí 10–15,5 GPa, pro austenit kolem 31 GPa [8].

Pro vytvořené pružiny byly na 5 místech změřeny průměry drátů a vnější průměry pružin D_V . Pro určení průměru D spirály pružiny (měřené ke středu drátu) odečteme od této hodnoty průměrnou hodnotu průměru drátu d , tedy $D = D_V - d$. Průměry spirál pružiny nemusí být také nutně rovny průměru závitové tyče použité na šablonu pro vytvoření spirály pružiny, závisí na průměru použitého drátu, na rozměrech závitů závitové tyče a těsnosti namotání drátu na závitovou tyč.

Aktivační teplota 70 °C							
Drát \varnothing 0,5 mm, pružina \varnothing 4 mm						Průměr	Chyba
d /mm	0,52	0,51	0,52	0,50	0,52	0,51	0,01
D_V /mm	4,47	4,43	4,47	4,56	4,52	4,49	0,05
Drát \varnothing 0,5 mm, pružina \varnothing 5 mm						Průměr	Chyba
d /mm	0,52	0,52	0,51	0,51	0,51	0,514	0,005
D_V /mm	5,30	5,23	5,22	5,22	5,23	5,24	0,03
Drát \varnothing 0,5 mm, pružina \varnothing 6 mm						Průměr	Chyba
d /mm	0,52	0,52	0,51	0,50	0,50	0,51	0,01
D_V /mm	5,85	5,95	6,00	5,97	5,99	5,95	0,05
Drát \varnothing 0,5 mm, pružina \varnothing 8 mm						Průměr	Chyba
d /mm	0,52	0,51	0,50	0,53	0,51	0,51	0,01
D_V /mm	7,24	7,35	7,39	7,37	7,36	7,34	0,05
Drát \varnothing 1 mm, pružina \varnothing 10 mm						Průměr	Chyba
d /mm	0,96	0,98	0,95	0,95	0,99	0,97	0,02
D_V /mm	10,74	10,79	10,76	10,83	10,83	10,79	0,04
Drát \varnothing 1 mm, pružina \varnothing 12 mm						Průměr	Chyba
d /mm	0,96	0,98	0,96	0,94	0,97	0,96	0,01
D_V /mm	12,63	12,52	12,49	12,74	12,53	12,58	0,09
Drát \varnothing 1 mm, pružina \varnothing 16 mm						Průměr	Chyba
d /mm	0,96	0,97	0,95	0,97	0,95	0,96	0,01
D_V /mm	15,61	15,52	15,73	15,56	15,68	15,62	0,08

Tabulka 1 Rozměry pružin s aktivační teplotou 70 °C

Relativní chyby měření modulu pružnosti ve smyku G určíme pomocí chyb určení průměru spirály pružiny D , průměru drátu d a tuhosti pružiny k

$$\vartheta_r(G) \approx \vartheta_r(k) + 3\vartheta_r(D) + 4\vartheta_r(d), \quad (4)$$

kde jednotlivé relativní chyby veličin jsou určeny absolutní chybou a hodnotou veličiny samotné

$$\vartheta_r(k) = \frac{\vartheta(k)}{k}, \quad \vartheta_r(D) = \frac{\vartheta(D)}{D}, \quad \vartheta_r(d) = \frac{\vartheta(d)}{d}. \quad (5)$$

Hodnoty chyb průměrů nitinolových drátů a spirál pružin určíme jako chyby aritmetických průměrů z opakovaných měření – měřeno vždy na několika místech drátů a spirál pružiny (viz tab. 1–2). Hodnoty tuhosti pružin najdeme lineární regresí v naměřených závislostech (příklad měření viz. obr. 4–5) pomocí Excelové funkce LINREGRESE. Výsledky měření modulu pružnosti ve smyku jsou uvedeny v tab. 3–4.

Aktivační teplota 45 °C							
Drát \varnothing 0,5 mm, pružina \varnothing 4 mm						Průměr	Chyba
d/mm	0,49	0,47	0,47	0,48	0,48	0,48	0,01
D_V/mm	4,66	4,67	4,66	4,68	4,71	4,68	0,02
Drát \varnothing 0,5 mm, pružina \varnothing 5 mm						Průměr	Chyba
d/mm	0,48	0,48	0,46	0,46	0,49	0,47	0,01
D_V/mm	5,10	5,13	5,11	5,20	5,16	5,14	0,04
Drát \varnothing 0,5 mm, pružina \varnothing 6 mm						Průměr	Chyba
d/mm	0,49	0,48	0,46	0,47	0,49	0,48	0,01
D_V/mm	5,82	5,82	5,82	5,83	5,92	5,84	0,04
Drát \varnothing 0,5 mm, pružina \varnothing 8 mm						Průměr	Chyba
d/mm	0,48	0,47	0,47	0,47	0,47	0,472	0,004
D_V/mm	7,27	7,26	7,26	7,18	7,25	7,24	0,03
Drát \varnothing 1 mm, pružina \varnothing 10 mm						Průměr	Chyba
d/mm	0,98	1,00	0,97	1,00	1,00	0,99	0,01
D_V/mm	10,64	10,62	10,63	10,63	10,59	10,62	0,02
Drát \varnothing 1 mm, pružina \varnothing 12 mm						Průměr	Chyba
d/mm	0,98	0,99	0,98	0,98	0,98	0,982	0,004
D_V/mm	12,34	12,39	12,44	12,44	12,41	12,40	0,04
Drát \varnothing 1 mm, pružina \varnothing 16 mm						Průměr	Chyba
d/mm	0,99	1,01	0,98	0,98	0,98	0,99	0,01
D_V/mm	15,71	15,74	15,76	15,72	15,75	15,74	0,02

Tabulka 2 Rozměry pružin s aktivační teplotou 45 °C

2. Měření křivek deformace pružin

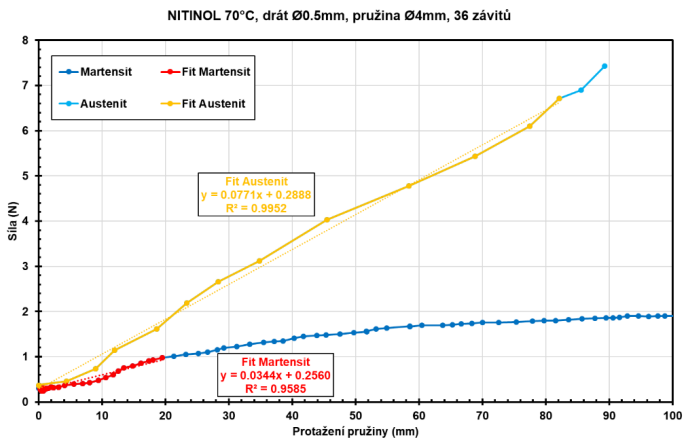
K měření křivky deformace byly použity školní pomůcky systému Vernier: čidlo polohy a pohybu Go!Motion Sonar, siloměr Dual-Range Force Sensor pro měření síly v tlaku i v tahu se dvěma rozsahy (-10 N až $+10\text{ N}$ s citlivostí $0,01\text{ N}$ a -50 N až $+50\text{ N}$ s citlivostí $0,05\text{ N}$), kruh z plastové podložky na psaní o tloušťce 1 mm a průměru 15 cm a pro určení teploty pružiny v austenitické fázi také termokamera FLIR E5. Čidlo polohy používá k měření vzdálenosti ultrazvuk, který se odráží od sledovaného předmětu, a čidlo registruje ultrazvuk z kužele pokrývajícího prostor asi $15\text{--}20^\circ$ od osy čidla. Siloměr Dual-Range Force Sensor byl připevněn asi do výšky 50 cm nad podložku na laboratorní stojan. Na háček siloměru byla zavěšena pružina, na jejíž druhý konec byl připevněn plastový kruh odrážející ultrazvuk z čidla polohy. Pod něj na podložku bylo umístěno čidlo polohy, registrující vzdálenost plastové desky (tj. konce pružiny) od čidla (viz obr. 3). Chyba měření síly siloměrem byla $\vartheta(F) \approx 0,01\text{ N}$.



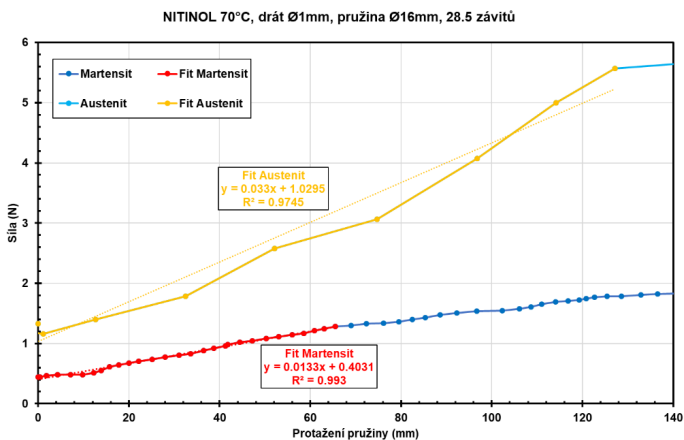
Obr. 3 Měření deformace pružiny při jejím natahování a měřicí senzory Vernier (síla, vzdálenost), uprostřed pružina s připojenými vodiči sloužícími k ohřátí pružiny průchodem proudu pro měření v austenitické fázi

Prodloužení pružiny Δl je počítáno jako rozdíl mezi následujícími načtenými polohami konce pružiny od ultrazvukového čidla polohy Go!Motion Sonar. Po spuštění měření (o frekvenci 20 záznamů za sekundu) byla pružina za plastový kruh rukou pomalu napínána. Siloměrem byla měřena působící síla a ultrazvukovým čidlem polohy konce pružiny, z nich je pak vy-

počtena deformace pružiny Δl . Chyba měření prodloužení pružiny je dvojnásobná než je rozlišení senzoru Go!Motion Sonar, tedy $\vartheta(\Delta l) \approx 2$ mm. Chyby jednotlivých naměřených bodů křivky deformace se tedy budou nejvýrazněji projevovat na jejím počátku, tj. pro malé deformace a malé působící síly. Chybové úsečky pro jednotlivé naměřené body nejsou vynešeny v grafech křivek deformací pružin, neboť jsou příliš malé.



Obr. 4 Příklad měření křivky deformace pro pružinu z nitinolového drátu o průměru 0,5 mm a aktivační teplotě 70 °C



Obr. 5 Příklad měření křivky deformace pro pružinu z nitinolového drátu o průměru 1 mm a aktivační teplotě 70 °C

Získané údaje byly zaneseny do grafu závislosti působící síly na deformaci, tj. křivky deformace. Byly vybrány lineární oblasti pro malé deformace a grafem byla proložena spojnice trendu, z jejíž rovnice byla odečtena tuhost pružiny, která je rovna podílu působící síly a deformace (1). Podle vztahu (3) byl poté pomocí zjištěné tuhosti dopočítán modul pružnosti ve smyku u martenzitu, zjištěné hodnoty jsou shrnuty v tab. 3.

Aktivační teplota 70 °C							
$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{D}{\text{mm}}$	N	$\frac{k}{\text{N/m}}$	$\frac{\vartheta(k)}{\text{N/m}}$	R^2	$\frac{G}{\text{GPa}}$	$\frac{\vartheta(G)}{\text{GPa}}$
1	10	29	43,7	2,0	0,97	11,0	1,4
	12	28,5	27,9	0,5	0,99	11,6	1,1
	16	28,5	13,3	0,2	0,99	11,3	0,8
0,5	4	36	34,4	1,1	0,96	8,9	1,1
	5	36	21,9	0,4	0,99	9,6	0,7
	6	35,5	12,4	0,4	0,98	8,4	1,1
	8	36	6,7	0,3	0,96	8,7	1,2
Aktivační teplota 45 °C							
$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{D}{\text{mm}}$	N	$\frac{k}{\text{N/m}}$	$\frac{\vartheta(k)}{\text{N/m}}$	R^2	$\frac{G}{\text{GPa}}$	$\frac{\vartheta(G)}{\text{GPa}}$
1	10	29	33,2	0,8	0,98	7,2	0,6
	12	30	17,3	0,4	0,99	6,7	0,3
	16	28,5	8,9	0,3	0,98	6,8	0,6
0,5	4	37	26,4	1,2	0,93	11,1	1,3
	5	36	23,0	1,3	0,95	13,3	2,4
	6	36,5	14,9	0,6	0,97	12,9	2,0
	8	35,5	7,1	0,3	0,95	12,6	1,2

Tabulka 3 Výsledky měření v martenzitické fázi (za teploty nižší než aktivační teplota)

Pro měření v austenitické fázi byly konce nitinolového drátu pružiny vodivě propojeny spojkami s vodiči, připojenými ke zdroji napětí. Po zapojení elektrického obvodu byl drát zahříván průchodem elektrického proudu

(jeho teplota byla sledována termokamerou FLIR E5) asi na teplotu 80 °C, pro pružiny s aktivační teplotou 45 °C, a na teplotu 100 °C pro pružiny s aktivační teplotou 70 °C. Poté bylo spuštěno měření (o frekvenci 2 záznamy za sekundu) a pružina byla za plastový kruh rukou napínána, podobně jako pro měření za pokojové teploty. Byla měřena působící síla a deformace pružiny. Měření trvala krátkou dobu (do 10 s) a během celé této doby byly tedy pružiny ve vysokoteplotní (austenitické) fázi. Stejně jako v martenzitické fázi, byly i zde určeny moduly pružnosti ve smyku z oblasti malých deformací na křivce deformace. Získané hodnoty jsou shrnuty v tab. 4.

Aktivační teplota 70 °C							
$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{D}{\text{mm}}$	N	$\frac{k}{\text{N/m}}$	$\frac{\vartheta(k)}{\text{N/m}}$	R^2	$\frac{G}{\text{GPa}}$	$\frac{\vartheta(G)}{\text{GPa}}$
1	10	29	67,7	2,1	0,99	17,1	1,8
	12	28,5	60,2	3,7	0,97	25,2	3,5
	16	28,5	33,0	1,9	0,97	27,9	3,0
0,5	4	36	77,1	1,5	1,00	20,0	2,2
	5	36	39,8	1,4	0,99	17,3	1,6
	6	35,5	33,2	3,1	0,96	22,4	4,3
	8	36	15,7	1,6	0,95	20,6	4,2
Aktivační teplota 45 °C							
$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{D}{\text{mm}}$	N	$\frac{k}{\text{N/m}}$	$\frac{\vartheta(k)}{\text{N/m}}$	R^2	$\frac{G}{\text{GPa}}$	$\frac{\vartheta(G)}{\text{GPa}}$
1	10	29	93,6	0,8	1,00	20,2	1,3
	12	30	57,2	0,8	0,99	22,0	0,9
	16	28,5	28,4	0,2	1,00	21,8	1,3
0,5	4	37	39,4	0,7	0,97	16,5	1,5
	5	36	32,7	2,7	0,96	19,0	3,9
	6	36,5	25,5	1,4	0,97	22,1	3,8
	8	35,5	14,0	0,7	0,98	24,8	2,4

Tabulka 4 Výsledky měření v austenitické fázi (při teplotě vyšší než transformační teplota)

3. Výsledky měření a diskuze

Výsledný modul pružnosti ve smyku (viz tab. 5) u martenzitické fáze nitinolu má hodnoty, které u většiny vzorků pružin leží v intervalu 6,9–12,5 GPa s 10–20% chybou, což se překrývá s očekávanými hodnotami [8]. Modul pružnosti ve smyku u austenitické fáze nitinolu má hodnoty, které leží v intervalu 20,1–23,4 GPa s 10% chybou, což také koreponduje velmi dobře s dříve publikovanou hodnotou 31 GPa [8]. Všechny dráty mají poměry modulů pružnosti ve smyku pro austenitickou a martenzitickou fázi v rozsahu 1,6–3,1. Chyby měření jsou vždy vypočteny jako součet chyb modulů pružnosti daných rozptylem hodnot od průměru (pro drát stejné tloušťky a stejnou aktivační teplotu) a chyb způsobených nepřesnostmi měření tuhosti pružiny a jejich rozměrů.

	Aktivační teplota 70 °C			Aktivační teplota 45 °C		
	$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{G}{\text{GPa}}$	$\frac{\vartheta(G)}{\text{GPa}}$	$\frac{d}{\text{mm}}$	$\frac{G}{\text{GPa}}$	$\frac{\vartheta(G)}{\text{GPa}}$
Martenzit Austenit	1	11,3 23,4	1,6 8,1	1	6,9 21,3	0,8 2,1
Martenzit Austenit	0,5	8,9 20,1	1,7 6,1	0,5	12,5 20,6	3,2 7,0

Tabulka 5 Výsledky měření modulů pružnosti ve smyku

Na naměřených hodnotách pozorujeme zřetelně větší nelinearitu u křivky deformace pro austenitickou fázi nitinolu než je vidět u martenzitické fáze. Z hlediska našeho jednoduchého měření je problémem nestejnoměrná rychlost protahování pružiny při jejím natahování, což si přesně kontrolují komerční měřicí zařízení na mechanické zkoušky.

Hodnoty modulů pružnosti se obecně liší pro dráty s různými aktivačními teplotami a také pro dráty různých průměrů. Různá aktivační teplota znamená různé chemické složení slitiny, a tedy také obecně jiné vlastnosti v obou fázích. Naše měření neukazuje na průkazně jiné elastické moduly pro studované dráty různé aktivační teploty, což signalizuje, že tato vlastnost není příliš citlivá na chemické složení (na rozdíl např. od elektrických vlastností). Také závislost na různém průměru drátu pro stejnou aktivační teplotu není nijak extrémní, přestože rozdíly jsou vidět zvláště pro drát s aktivační teplotou 45 °C. V austenitické fázi pak mají všechny vzorky prakticky stejné hodnoty s velmi malým rozptylem.

Závěrem můžeme na předloženém měření demonstrovat rozdílné elastické vlastnosti v různých strukturách nitinolové slitiny jednoduchou školní měřicí metodou s využitím počítačem řízeného systému Vernier. Metoda je použitelná i pro měření libovolných jiných pružin (i bez jevu tvarové paměti). S vytvořenými pružinami z nitinolu mohou být dále realizovány efektní experimenty a demonstrace na tvarovou paměť, např. „smotání“ drátu zpět do spirály pružiny po jejím rozvinutí a vložení do horké vody (teplejší, než je aktivační teplota drátu). Tvar spirály má dále nespornou výhodu, že při jeho vytvoření máme konstantní velikost deformace podél celé délky drátu a nevnašíme do struktury další defekty vedoucí k nevratné deformaci při paměťové transformaci.

Literatura

- [1] Čech, J.: Pozorování hranic dvojčatění ve slitině Ni-Mn-Ga. Bakalářská práce, Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Brno, 2017. Dostupné z: <http://hdl.handle.net/11012/66054>.
- [2] Petráš, R., Klusák, J.: Materiály s tvarovou pamětí. Ústav fyziky materiálů AV ČR [online], Brno. Dostupné z: <https://docplayer.cz/16971067-Materialy-s-tvarovou-pameti.html>.
- [3] Kurša, M., Pacholek, P.: Metalurgické charakteristiky tvarově paměťových materiálů na bázi Ni-Ti-Me. METAL, 2002, Ostrava.
- [4] Losertová, M.: Úvod do nauky o materiálu. VŠB-TU Ostrava [online], 2016. Dostupné z: <https://adoc.pub/uvod-do-nauky-o-materialu.html>.
- [5] Machek, V., Tatíček, F.: Kovové materiály s tvarovou pamětí. Povrcháři (2015), č. 5, s. 11–14.
- [6] Liu, P., Fullerton, E., Gutfleisch, O., Sellmyer, D.: Nanoscale Magnetic Materials and Applications, Springer, New York, 2009.
- [7] Lisotti, A. a kol.: Educational pathways through nanoscience: nitinol as a paradigmatic smart material. Physics Education, roč. 48 (2013), č. 3, s. 298–311.
- [8] Schwartz, M.: Encyclopedia of smart materials. J. Wiley, New York, 2002.
- [9] Santhanam, R., Krishna, Y., Sivakumar, M.S.: Behaviour of NiTi SMA helical springs under different temperatures and deflections. Internat. Scholarly Research Notices [online], 2013. Dostupné z: <https://www.hindawi.com/journals/isrn/2013/320370/#experimental-results-and-discussions>.
- [10] Zeman, R.: Pružiny. Onlineschool [online], 2022. Dostupné z: <https://onlineschool.cz/fyzika/pruziny/>.
- [11] Vybíral, B.: Mechanika pružného tělesa, Fyzikální olympiáda, [online]. Dostupné z: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/pruznost.pdf>.

Reálný model obecného řešení frekvence kmitů elektrostatičkého kyvadla

ČENĚK KODEJŠKA

Gymnázium, SOŠ a VOŠ, Komenského 77, Nový Bydžov

Věnováno doc. Oldřichu Lepilovi k jeho 90. narozeninám.

Elektrostatičké kyvadlo podobně jako Van de Graaffův generátor (VdGG) je pro učitele fyziky základním demonstračním nástrojem při výkladu elektrostatičkých jevů. Většinou je použito pro demonstraci práce, kterou vykoná elektrické pole deskového kondenzátoru při přenosu nabitěho míčku na stolní tenis. Jednoduchou změnou vzdálenosti desek kondenzátoru můžeme také ukázat změnu frekvence kmitů, která s rostoucí vzdáleností klesá. Disponuje-li experimentátor zdrojem vysokého napětí o různých hodnotách, může prokázat i zvyšování frekvence kmitů s rostoucími napětími mezi deskami kondenzátoru.

V úvodu práce stručně zmíníme různé teorie dynamiky elektrostatičkého kyvadla zahrnující buď pouze vliv elektrického pole, nebo i tíhové síly, případně další vlivy [1–7]. Detailní přehled vztahů pro výpočet frekvence kmitů jednotlivých teorií je uveden v Apendixu A.

Teorie pohybu elektrostatičkého kyvadla není pouhým zajímavým středoškolským rozšířením učiva, ale v určitých speciálních případech má přesah i do oblastí termodynamiky [5], nanotechnologií [8], nebo problematiky jevu ESD (electrostatic discharge) [9].

Obdobou elektrostatičkého kyvadla jsou tzv. Franklinovy zvony, které patří mezi školní pomůcky zpestřující svojí hudbou tradiční experimenty. Protože při tomto experimentu dochází také k přenosu náboje mezi kládkem a zvonky, lze teorii vysvětlující procesy probíhající při tomto experimentu přiměřeně aplikovat i na klasické elektrostatičké kyvadlo. Někteří autoři dokonce tento experiment využívají v rámci pregraduálního studia jako zajímavé laboratorní cvičení [10], další vzali v úvahu i termodynamické aspekty statistické fyziky při řešení pohybové rovnice kyvadla rozeznávajícího zvonky [11]. Zmíňme také teorii pohybu nabitě částice v oscilujícím nehomogenním elektrickém poli, kde je mimo jiné diskutován

i pohyb částice v homogenním poli, ovlivněný oscilační perturbací [12], což je v makroskopickém měřítku případ elektrostatičké kyvadla.

Pohybem fyzické kyvadla v odporujícím prostředí s lineární závislostí odporové síly na rychlosti se zabývají např. práce [13, 14], které ale neuvažují vliv elektrické pole. Pohybové rovnice lze nicméně rozšířit i o vliv elektrické pole a řešit tyto rovnice analyticky.

V článku nejprve jednotlivé modely vzájemně porovnáme s reálnými výsledky experimentálního měření frekvence kmitů a následně navrheme reálný model kmitů fyzické kyvadla, který přináší obecné řešení zahrnující elektrické i tíhové síly působící na kyvadlo, koeficient restituice i odpor vzduchu. Zdůvodníme, že rychlosti pohybu kyvadla jsou na hranici mezi laminárním a turbulentním prouděním, přičemž lze sestavit pohybovou rovnici fyzické kyvadla v odporujícím prostředí podle Stokesovy rovnice s explicitním řešením a nikoliv podle Newtonova vzorce, kdy pohybovou rovnici nelze řešit analyticky. V druhé části práce se pokusíme vysvětlit hodnotu koeficientu η , který představuje poměrnou část náboje přeneseného při kontaktu kyvadla s deskou kondenzátoru, srovnáním časové konstanty vybíjení VdGG s náhradním RC obvodem. Srovnání reálného zapojení VdGG s paralelním RC obvodem bylo prezentováno např. v [15].

Vzájemné elektrostatičké působení mezi dvěma nabitými koulemi, resp. mezi nabitou koulí a nabitou rovinou jsou diskutovány v [16, 17]. Dílčí závěry těchto prací jsou využity i v této práci v závěrečné diskuzi.

Nakonec zmíníme i další vlivy, které působí na pohyb kyvadla a tím i na velikost jeho frekvence v homogenním elektrickém poli deskového kondenzátoru. Jedním z nich je chaotické chování kyvadla v blízkosti nabitě desky, jehož popis byl publikován v [18].

Při vysvětlení teorie popisující pohyb reálného fyzické kyvadla provedeme současně diferenciaci vztahů pro frekvenci kyvadla na jednotlivých úrovních od středoškolské až po vysokoškolský kurz.

Ukážeme také, jak mohou být výsledky této práce aplikovány na středních školách v rámci laboratorních cvičení při měření napětí VdGG jako zdroje vysokého napětí v experimentu s elektrostatičkým kyvadlem. Závěry nicméně platí obecně pro libovolný použitý zdroj vysokého napětí.

1. Teoretické odvození vztahu pro frekvenci kmitů kyvadla

Při odvození rovnice pro frekvenci kmitů kyvadla můžeme vyjít z různých fyzikálních principů, které lze nalézt např. v [1–7] nebo [11–14]. Přehled různých typů kyvadel, která jsou umístěna do homogenního elektric-

kého pole, je přehledně uveden v tabulce A1 Apendixu A. Modely M2 a M9, které jsme navrhli v první fázi zkoumání, jsou okomentovány podrobněji v Apendixu B. U ostatních modelů, jejichž odvození najdeme v příslušných publikacích, uvádíme jen výsledný vztah pro frekvenci kmitů. Modely M1–M5 pracují pouze s elektrickým polem, modely M6–M9 zahrnují i vliv tíhové síly, a jsou uvedeny v tabulce A2 Apendixu A.

V obecné rovině lze konstatovat, že modely, které svým principem vychází z frekvence kmitů matematického kyvadla, lze poměrně snadno vysvětlit na úrovni znalostí gymnaziálního učiva. Ostatní modely, které jsou založeny na teorii fyzického kyvadla, nebo které případně pracují s jiným principem dynamiky kyvadla, patří svou podstatou do vysokoškolského vzdělávání.

Pro odvození obecného řešení frekvence kmitů kyvadla jsme ve svých úvahách vyšli ze dvou modelů, které k řešení pohybové rovnice kyvadla přistupují exaktním způsobem. Konkrétně se jedná o modely M4 a M5, které stručně představíme níže.

Model M4, zahrnující koeficient restituce, je detailně popsán v [4, kap. 3.2]. Koeficient restituce významně ovlivňuje pohyb kyvadla při nepružných srážkách s deskami kondenzátoru a na základě experimentálně ověřených výsledků měření lze konstatovat, že model, který v sobě nezahrnuje tento koeficient, nemůže poskytnout hodnoty frekvence, které korespondují s experimentálními daty na hladině statistické významnosti 5% nejistoty. Model M4 lze využít při výkladu pro studenty magisterského programu.

Stejnou úroveň výkladu poskytuje i model M5 [5]. Lépe srozumitelným způsobem než [4] provádí zavedení koeficientu restituce, a dospívá ke vztahu pro frekvenci, který je uveden v pátém řádku Tabulky A1. Jako první model z výše zmíněných zavádí i bezrozměrný koeficient η , který udává, jaká část náboje je přenesena z desky kondenzátoru na kyvadlo při jejich kontaktu, nicméně dále nijak nerozvádí ani velikost tohoto parametru, ani jeho výpočet. Tento parametr jsme nazvali *koeficient přenosu náboje* a jeho výpočtem jsme se zabývali v Apendixu D.

Významným parametrem ovlivňujícím velikost výsledné hodnoty teoretické frekvence kyvadla je vzdálenost desek kondenzátoru d , resp. redukováná vzdálenost $d' = d - 2r$, která představuje reálnou vzdálenost, kterou může urazit koule kyvadla o poloměru r ve vodorovném směru. Většina modelů kromě modelu M4 nezohledňuje zkrácení vodorovné délky pro pohyb kyvadla, což vede k větším rozdílům mezi teoretickými hodnotami frekvencí pro různé hodnoty d a experimentálně naměřenými údaji. Situ-

aci ilustruje graf na obr. 3, který zobrazuje hodnoty frekvencí vypočítaných na základě vztahů uvedených v Tabulce A1 a v Tabulce A2, v porovnání s experimentálně naměřenými hodnotami. Grafy na obr. 3 a obr. 4 ukazují porovnání stejných experimentálních dat s teoretickou předpovědí hodnot frekvencí námi navrženého modelu M10, který dává obecné řešení zahrnující všechny významné vlivy a poskytuje nejlepší shodu s experimentálně naměřenými hodnotami ze všech modelů M1–M10.

Pohybová rovnice nabitého fyzického kyvadla v homogenním elektrickém a tíhovém poli, jejichž vektory intenzit jsou vzájemně kolmé

Reálné kyvadlo složené z koule o poloměru r a závěsu o délce L lze považovat za fyzické kyvadlo, pro které můžeme vyjádřit výsledný moment působících sil pomocí rovnice

$$M = \frac{d(J\omega)}{dt} = J \frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon = J \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

kde M je výsledný moment sil vzhledem k ose otáčení procházející ve vzdálenosti L od těžiště tělesa, J je moment setrvačnosti kyvadla vůči ose otáčení, ω , resp. ε je úhlová rychlost, resp. úhlové zrychlení a φ je úhlová výchylka kyvadla z rovnovážné polohy.

Asano ve svém odvození v [22] vyšel z pohybové rovnice, ve které elektrickou sílu qE a tíhovou sílu mg v daném bodě promítnul do směru tečny k trajektorii, kterou je část oblouku kružnice. Pohybovou rovnicí formuloval ve tvaru

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgl \sin \varphi - qEl \cos \varphi,$$

jejíž řešení pro malé výchylky kyvadla, např. $\varphi \leq 10^\circ$ (tj. pro $\sin \varphi \approx \varphi$), lze vyjádřit vztahem (viz [22]):

$$\varphi = \varphi_0 \cos(\omega t) - \left(\frac{qE}{mg} \right) [1 - \cos(\omega t)] - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right) \sin(\omega t), \quad (1)$$

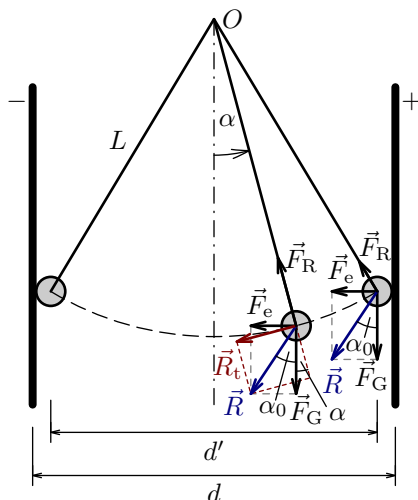
kde ω je úhlová rychlost kyvadla daná rovnicí

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}} = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (2)$$

Vztah pro periodu kmitů vyjádřil Asano jako $T = 2t_0$, kde t_0 je doba, za kterou kyvadlo urazí dráhu d mezi elektrodami. Vztah pro t_0 lze vyjádřit

z rovnice (1) dosazením hodnoty φ_0 za φ . Protože se jedná o relativně složitý matematický výraz, odkazujeme pouze na jeho vyjádření v [22, rovnice (9)].

My jsme přistoupili při řešení pohybové rovnice z pohledu výslednice \vec{R} elektrostatické síly $\vec{F}_e = Q\vec{E}$ a tíhové síly $\vec{F}_G = m\vec{g}$ zobrazené na obr. 1, kterou jsme promítli do směru pohybu kyvadla. Moment síly \vec{F}_R , kterou působí vlákno na kyvadlo, je vzhledem k bodu otáčení nulový a nemá tedy vliv na řešení pohybové rovnice.



Obr. 1 Schématické znázornění sil působících na kyvadlo

Lze-li velikost výslednice sil formulovat pomocí Pythagorovy věty jako

$$R = \sqrt{F_G^2 + F_e^2} = \sqrt{(mg)^2 + (QE)^2},$$

pak průmět této síly do směru tečny k trajektorii v daném bodě, jak plyne z obr. 1, je dán vztahem

$$R_t = R \sin(\alpha + \alpha_0) = \sqrt{(mg)^2 + (QE)^2} \sin(\alpha + \alpha_0). \quad (3)$$

Pohybovou rovnici lze pak jednoduše formulovat ve tvaru $J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -R_t L$, který můžeme dále zjednodušit zavedením substituce

$$\varphi = \alpha + \alpha_0, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

a přiblížením $\sin \varphi \approx \varphi$ na tvar

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{L}{J} \sqrt{(mg)^2 + (QE)^2} \varphi = 0. \quad (4)$$

Rovnice (4) je homogenní diferenciální rovnice kmitů harmonického oscilátoru, ve které výraz

$$\omega_0^2 = \frac{L}{J} \sqrt{(mg)^2 + (QE)^2} = \frac{mL}{J} \sqrt{\left[g^2 + \left(\frac{QE}{m} \right)^2 \right]} \quad (5)$$

představuje druhou mocninu úhlové frekvence. Je-li fyzické kyvadlo zkonstruováno z plné koule o poloměru r a tyče o délce L , lze pro moment setrvačnosti J této soustavy vzhledem k vodorovné ose procházející bodem O s pomocí Steinerovy věty odvodit vztah

$$J = \frac{2}{5}mr^2 + mL^2.$$

V případě duté koule, kterou je např. i míček na stolní tenis (PP míček), je vlastní moment setrvačnosti J_0 dán rovnicí (viz [19])

$$J_0 = \frac{2}{5}m \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3}, \quad (6)$$

kteřou pro velmi malou tloušťku můžeme v limitním případě pro $r_1 - r_2 = \Delta r \rightarrow 0$ vyjádřit výrazem $J_0 = \frac{2}{3}mr^2$. Pro dutou kouli ve spojení s tyčí dostaneme potom výsledný vztah pro moment setrvačnosti vzhledem k vodorovné ose procházející bodem O

$$J = \frac{2}{3}mr^2 + mL^2. \quad (7)$$

Umístíme-li těžiště soustavy koule-tyč při zanedbatelné hmotnosti tyče do středu koule, je rameno výsledné síly rovné délce kyvadla L , a pohybová rovnice má tvar rovnice (4).

Pro vyjádření zrychlení a_e , které míčku udělí elektrická síla, vyjdeme ze vztahu (viz [5])

$$a_e = \left(\frac{U}{d} \right)^2 \cdot \frac{\varepsilon S \eta}{m}, \quad (8)$$

kde U je napětí mezi deskami kondenzátoru o vzájemné vzdálenosti d a aktivní ploše S , ε je permitivita prostředí, η je koeficient přenosu náboje a m hmotnost koule kyvadla.

Pro frekvenci kmitů byl pak v [5] se započítáním koeficientu restituce k_r odvozen vztah (viz Tabulka A1, model M5), který můžeme přepsat ve tvaru

$$f_{M5} = \sqrt{\frac{\varepsilon S \eta}{8m} \cdot \frac{1 + k_r}{1 - k_r} \cdot \frac{U^2}{d^3}}. \quad (9)$$

Pokud do vztahu (5) implementujeme rovnice (7–9), a vezmeme v úvahu, že pohyb koule ve vodorovném směru se děje po redukované dráze $d' = d - 2r$, jak je správně uvedeno v [4], můžeme rovnici (5) upravit na výsledný vztah pro frekvenci kmitů fyzického kyvadla:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L}{k_1 r^2 + L^2} \sqrt{g^2 + \left[\frac{L \varepsilon S \eta}{8md} \left(\frac{1 + k_r}{1 - k_r} \right) \cdot \left(\frac{U}{d'} \right)^2 \right]^2}}. \quad (10)$$

Rovnice (10), reprezentující model M10 popisuje obecné řešení frekvence kmitů reálného fyzického kyvadla v homogenním tíhovém a elektrickém poli, kde platí $\vec{F}_e \perp \vec{F}_g$. Model M10 současně zahrnuje vliv nepružných srážek mezi kyvadlem a deskami kondenzátoru skrze koeficient restituce k_r , koeficient přenosu náboje η vyjadřující poměrnou část náboje přeneseného z desky kondenzátoru na kyvadlo, působení tíhové síly (charakterizované tíhovým zrychlením g) a parametry ovlivňující vlastní frekvenci kyvadla jako je jeho délka L a moment setrvačnosti $J = k_1 m r^2 + mL^2$, kde $k_1 = \frac{2}{3}$, resp. $k_1 = \frac{2}{3}$, pro plnou, resp. dutou kouli.

Učiníme na tomto místě ještě malou vysvětlující poznámku k odvození rovnice (10). Vyjdeme-li ze vztahu pro frekvenci matematického kyvadla $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$, můžeme za předpokladu kolmých sil $\vec{F}_e \perp \vec{F}_g$ uvažovat výsledné zrychlení ve tvaru $a = \sqrt{g^2 + a_e^2}$, kde a_e je zrychlení odpovídající elektrické síle. Vztah pro frekvenci lze potom vyjádřit jako

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{L} \sqrt{g^2 + a_e^2}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{L} \sqrt{g^2 + (L f_e^2)^2}},$$

kde f_e je frekvence kmitů daná rovnicí (9). Jestliže nakonec výraz $1/L$ pro matematické kyvadlo nahradíme výrazem $L/(k_1 r^2 + L^2)$ pro fyzické kyvadlo, je pak výsledná frekvence kmitů dána vztahem (10).

Pokud bychom uvažovali i odporové síly prostředí vyjádřené Stokesovým vztahem $F_o = 6\pi\mu rv$, kde μ je dynamická viskozita, r poloměr a v rychlost koule, můžeme vztah (10) rozšířit i o vliv odporových sil prostředí. Jejich velikost je nicméně v případě míčku na stolní tenis, jehož maximální rychlost dosahuje v průměru velikosti cca 1 m/s tak malá, že vliv tohoto členu, který má řádově velikost 10^{-3} m/s^2 , na celkovou velikost frekvence je zcela zanedbatelný a ve školních podmínkách navíc neměřitelný.

Vztah (10) přechází pro $U = 0 \text{ V}$ na vztah pro frekvenci fyzického kyvadla daný rovnicí (2). Pokud zanedbáme i rozměry koule ($r = 0 \text{ m}$), vzorec nabude dobře známého tvaru pro frekvenci matematického kyvadla $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$. V případě zanedbání vlivu tíhového pole pro $g \ll a_e$, tj. v limitě $g \rightarrow 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, rovnice (10) přechází na rovnici (9) uvedenou v [5].

Exaktním řešením rovnice (4), společně s počáteční podmínkou $(\frac{d\varphi}{dt})_0 = 0$, je funkce daná následujícím vztahem

$$\varphi(t) = \varphi_0 \cos(\omega t), \quad (11)$$

což je vyjádření pro okamžitou výchylku harmonického oscilátoru. Srovnání teoretického vyjádření (11) s experimentálně naměřeným průběhem kmitů je provedeno v závěru následující části.

2. Výsledky experimentálního měření frekvence kyvadla v porovnání s teoretickými hodnotami modelů M1–M10

Realizace experimentu je znázorněna na obr. 2. Při realizaci byly použity různé druhy kyvadel o délce v rozmezí 0,4 m až 1 m. První kyvadlo bylo vyrobeno z míčku na stolní tenis o hmotnosti $m = 2,9 \text{ g}$ a poloměru $r = 2 \text{ cm}$, který byl pokryt tenkou vrstvou grafitu. Jako závěs bylo zvoleno nylonové vlákno. Ve druhé variantě se jednalo o PVC míček o hmotnosti $m = 9,6 \text{ g}$ a průměru 64 mm s nástřikem vrstvy Zn-Al, který byl zavěšen na bavlněné niti. Vzdálenost mezi čtvercovými deskami kondenzátoru o délce strany 20 cm byla postupně nastavena na $d = 8 \text{ cm}$, 10 cm, 12 cm, 14 cm, 16 cm, 20 cm a 24 cm.

Protože je pohyb kyvadla relativně rychlý, rozhodli jsme se použít pro měření rychlostí a zrychlení kyvadla video analýzu v programu Tracker, podobným způsobem jakým jsme ji aplikovali na pohyb balónku s řetízkem v [20]. Napětí mezi deskami kondenzátoru bylo generováno pomocí Van de Graaffova generátoru, jehož výstupní hodnota byla experimentálně určena s využitím video analýzy v programu Tracker jako $U = 150(5) \text{ kV}$ (viz [21]). Frekvence kmitů byla měřena bezdrátovým mikrofonom Vernier GO Direct Sound pomocí programu Graphical Analysis.

Koeficient restituce k_r byl u míčku na stolní tenis zvolen v souladu s [4], kde autoři použili stejný míček, jako $k_r = 0,8$. V případě PVC míčku byl metodou dle [4] změřen koeficient restituce o velikosti $k_r = 0,74(2)$.

Hodnota koeficientu η , který udává, jaká část náboje je při kontaktu míčku s deskou kondenzátoru přenesena na míček, byla určena nejprve experimentálně a následně teoreticky odvozena z analogie vybíjení RC obvodu, jak je ukázáno v Apendixu D. V obou případech jsme dospěli k hodnotě $\eta = 0,32(1)$, resp. $\eta = 0,36(4)$, pro míček na stolní tenis, resp. PVC míček.



Obr. 2 Experimentální design měření frekvence elektrostatického kyvadla

3. Výsledky měření pro míček na stolní tenis a PVC míček

Experimentálně naměřené hodnoty pro míček na stolní tenis, resp. PVC míček, jsou uvedeny v tabulce 1. Plocha desek kondenzátoru činila v prvním, resp. druhém případě $S = 0,04 \text{ m}^2$, resp. $S = 0,02 \text{ m}^2$. V případě PVC míčku kvůli jeho průměru již nebyla možná realizace se vzdáleností desek kondenzátoru $d = 8 \text{ cm}$. V závěrečné diskuzi se pak zabýváme i vlivem průměru míčku na volbu minimální vzdálenosti desek.

Tabulka 1 Experimentálně naměřené hodnoty frekvence kmitů fyzického kyvadla

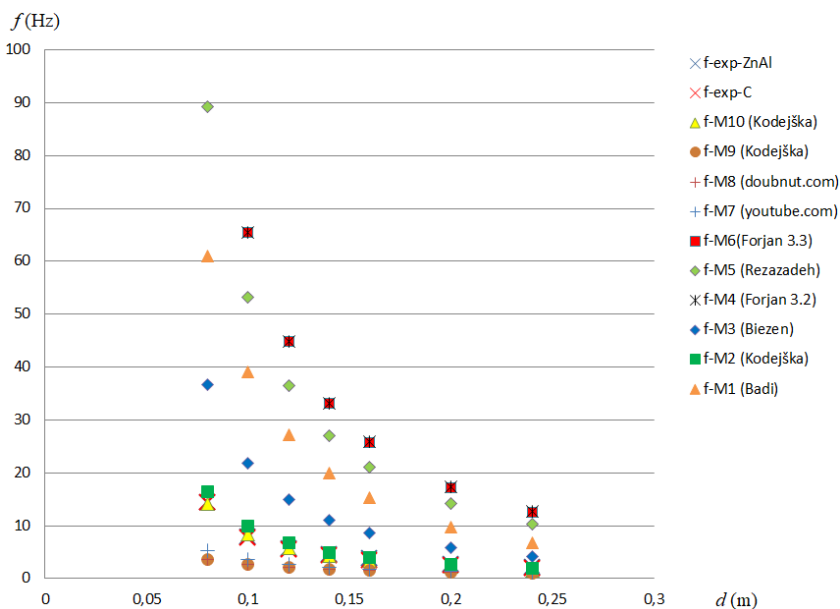
	Míček na stolní tenis $m = 2,9 \text{ g}$, $r = 2,0 \text{ cm}$							PVC míček $m = 9,6 \text{ g}$, $r = 3,2 \text{ cm}$						
d/cm	8	10	12	14	16	20	24	8	10	12	14	16	20	24
L/cm	f/Hz							f/Hz						
100	14,29	8,55	5,71	4,17	3,11	2,35	1,79	x ¹⁾	5,56	4,13	2,97	2,37	1,70	1,31
80	14,29	7,75	5,41	4,27	3,39	2,53	1,91	x ¹⁾	5,03	3,51	2,50	1,76	1,50	1,35
60	13,33	8,20	5,62	4,15	3,22	2,20	1,60	x ¹⁾	5,62	3,77	2,99	2,33	1,62	1,36
40	12,66	7,81	5,65	4,15	3,22	2,25	1,68	x ¹⁾	4,70	3,33	2,54	2,02	1,72	1,50

¹⁾Neměřeno

Hodnoty predikované modelem M10, tj. vztahem (10), uvádí tabulka 2. Ve výpočtu frekvence pomocí rovnice (10) byly použity následující hodnoty veličin, které zůstaly v průběhu experimentu konstantní: $U = 150 \cdot 10^3$ V, $\varepsilon = 8,85 \cdot 10^{-12}$ F/m. Protože oba míčky byly duté, byla do vztahu (10) dosazena hodnota koeficientu $k_1 = \frac{2}{3}$.

Na obr. 3 jsou znázorněny teoretické hodnoty frekvencí, které predikují modely M1–M10 pro různé vzdálenosti desek d kondenzátoru při délce kyvadla $L = 80$ cm. Současně jsou zde zobrazeny experimentálně naměřené hodnoty z tabulky 2 pro míček na stolní tenis potřený grafitem (f-exp-C), resp. nástříkem míčku Zn-Al barvou (f-exp-ZnAl).

Teoretické frekvence modelů M1–M10 v porovnání s experimentálními hodnotami

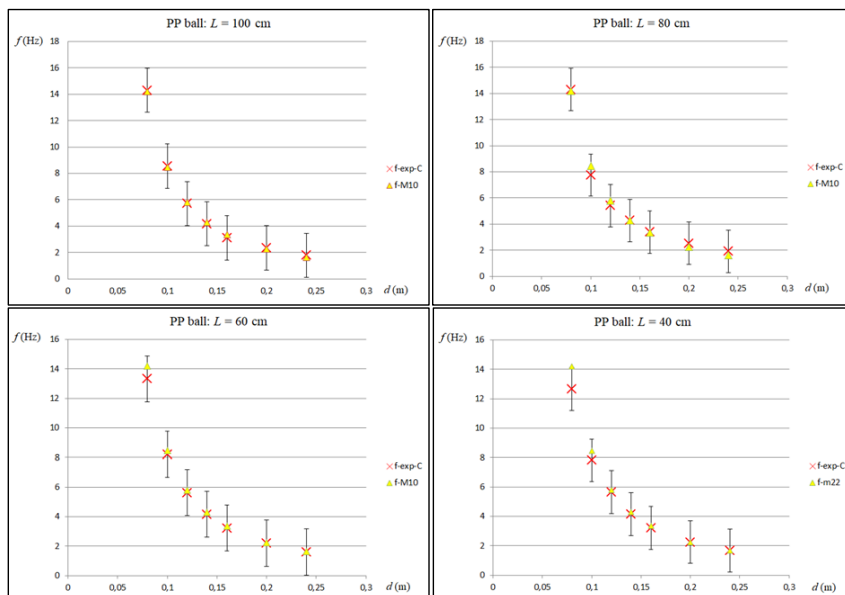


Obr. 3 Závislost frekvence kyvadla na vzdálenosti desek kondenzátoru

Graf na obr. 4, resp. obr. 5, ilustruje experimentální hodnoty z tabulky 1, resp. tabulky 2, které porovnává s teoretickými hodnotami námi navrženého modelu M10 (žlutý trojúhelník). Experimentální hodnoty jsou vyznačeny červeným (PP míček), resp. modrým (PVC míček) křížkem se standardní chybovou úsečkou.

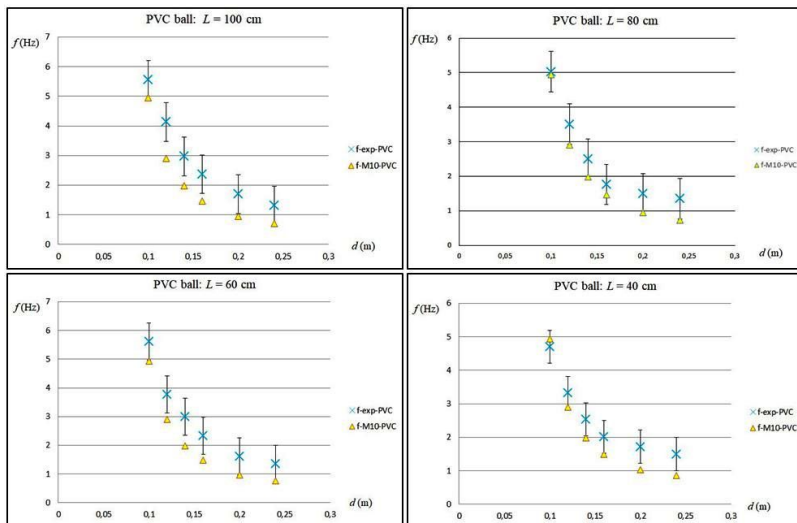
Tabulka 2 Teoretické hodnoty frekvence kmitů v závislosti na parametrech podle rovnice (7) modelu M10

	Míček na stolní tenis $m = 2,9 \text{ g}$, $r = 2,0 \text{ cm}$ plocha desek kondenzátoru: $S = 0,04 \text{ m}^2$ $k_r = 0,80$, $\eta = 0,32$						PVC míček $m = 9,6 \text{ g}$, $r = 3,2 \text{ m}^2$ plocha desek kondenzátoru: $S = 0,02 \text{ m}^2$ $k_r = 0,74$, $\eta = 0,36$							
d/cm	8	10	12	14	16	20	24	8	10	12	14	16	20	24
L/cm	f/Hz						f/Hz							
100	14,2	8,47	5,80	4,3	3,3	2,2	1,6	12	4,9	2,9	1,9	1,4	0,9	0,7
80	13,9	8,34	5,71	4,23	3,3	2,2	1,6	12	4,9	2,9	1,9	1,4	0,9	0,7
60	13,9	8,34	5,71	4,23	3,3	2,2	1,6	12	4,9	2,9	1,9	1,4	0,9	0,7
40	13,9	8,34	5,71	4,23	3,3	2,2	1,6	12	4,9	2,9	1,9	1,4	1,0	0,8

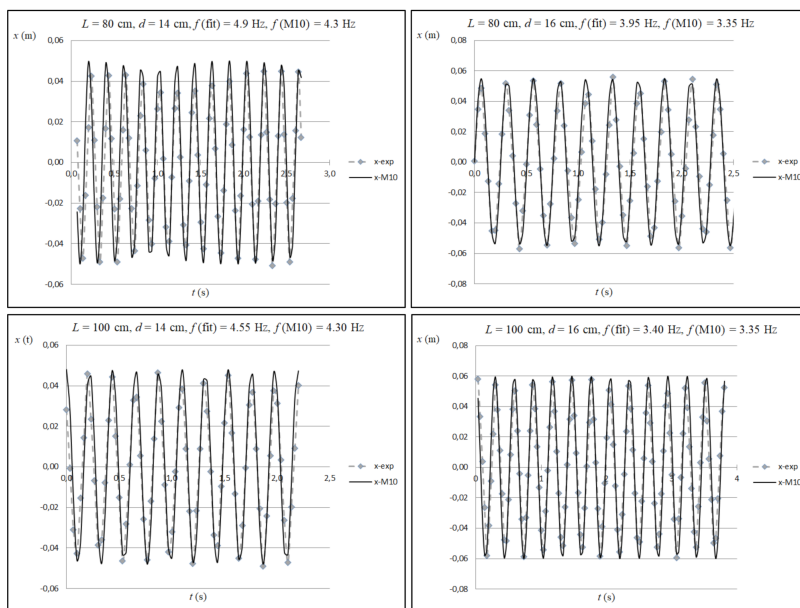


Obr. 4 Srovnání frekvencí modelu M10 s experimentálními daty u PP míčku

Porovnání teoretických hodnot pro výchylku kmitů daných rovnicí (11) s experimentálními hodnotami získanými pomocí video analýzy v programu Tracker je prezentováno na obr. 6.



Obr. 5 Srovnání frekvencí modelu M10 s experimentálními daty u PVC míčku



Obr. 6 Průběh kmitů reálného kyvadla (x-exp) a fitovací funkce (x-M10)

Z průběhu experimentálně naměřených dat (čárkovaná šedivá čára s body) a fitovací funkce (plná černá čára) založené na modelu M10 plyne, že přibližně po 1 s od začátku pohybu se kmity kyvadla ustálí a kyvadlo již kmitá s frekvencí, která v případě kyvadla o délce $L = 100$ cm, resp. $L = 80$ cm, odpovídá teoretické hodnotě dané modelem M10 s nejistotou 5 %, resp. 9 %. Podobné výsledky jsme získali i v případě vzdálenosti elektrod $d = 12$ cm a $d = 20$ cm. V případě vzdálenosti desek kondenzátoru $d = 10$ cm se nepodařilo provést fitování na experimentálně naměřená data, která vykazovala charakter rázů. Důvodem mohou být elektrostatické jevy zmiňované v [18], resp. nesplnění podmínky $d_{\min} \geq 4r$ zmíněné v pátém odstavci následující části.

4. Diskuze

Cílem této práce bylo navrhnout reálný model fyzického kyvadla, který by poskytoval dostatečně přesné hodnoty frekvence fyzického kyvadla kmitajícího v homogenním elektrickém poli, které je současně kolmé na tíhové pole. Model M10, který je popsán rovnicí (10), dává teoretické hodnoty, které se od experimentálně naměřených liší s přesností do 4 % v případě PP míčku, resp. do 15 % u PVC míčku.

Jak už bylo konstatováno Forjanem [4], Asanem [22] i jinými, značný vliv na výslednou frekvenci má hodnota restitučního koeficientu k_r a také velikost nejistoty měření koeficientu restituční [23]. V případě míčku na stolní tenis jsme ověřili platnost hodnoty $k_r = 0,80(2)$ uvedené v [4], která výrazným způsobem zpřesňuje výsledky teoretické předpovědi vzhledem k naměřeným datům. V zásadě lze konstatovat, že modely neuvažující restituční koeficient, nemohou poskytnout dostatečně přesné hodnoty odpovídající experimentu.

Dalším důležitým faktorem, který ovlivňuje výslednou frekvenci je hodnota parametru η , který udává, jaká část náboje je při kontaktu kyvadla s deskou kondenzátoru přenesena na kouli kyvadla. V obou případech, které byly zmíněny v tabulce 2, byly hodnoty koeficientu η použité ve výpočtu frekvencí modelu M10 v souladu s hodnotami predikovanými teorií náhradního RC obvodu, který uvádíme v Appendixu D. V případě míčku na stolní tenis, resp. PVC míčku jsme pomocí video analýzy v programu Tracker dospěli pomocí měření zrychlení a rychlosti odraženého míčku k hodnotě $\eta = 0,33(1)$, resp. $\eta = 0,36(4)$. Pohyb PVC míčku je výrazně pomalejší, jak konečkonců plyne i z dat tabulky 2, a kontakt PVC míčku s deskou kondenzátoru trvá tedy delší dobu než u míčku na stolní tenis. Svou roli hraje v tomto případě i cca 3,3krát větší hmotnost PVC míčku,

kteřá přispívá k celkově přibližně polovičnímu zrychlení PVC míčku oproti míčku na stolní tenis.

Z tabulky 2 celkem zřetelně také plyne nezávislost naměřených hodnot frekvencí kmitů na délce kyvadla L . Délka kyvadla se začne projevovat teprve v okamžiku vypnutí VdGG, kdy kyvadlo začne konat tlumené kmity.

Posledním faktorem, který významně ovlivňuje naměřené hodnoty, je volba vzdálenosti d desek kondenzátoru. Jak můžeme pozorovat na obr. 5, ve všech případech je teoretická hodnota modelu M10 pro $d = 10$ cm v případě PVC míčku mimo interval standardní nejistoty experimentálně změřené hodnoty, zatímco v případě míčku na stolní tenis nic takového na obr. 4 nepozorujeme. Domníváme se, že tuto skutečnost lze vysvětlit tím, že zatímco u míčku na stolní tenis byla minimální vzdálenost $d = 8$ cm, což odpovídá dvojnásobku průměru míčku, v případě PVC míčku o průměru 6,4 cm byla minimální vzdálenost $d = 10$ cm menší než $4r$. Minimální vzdálenost mezi deskami kondenzátoru by tak měla být volena jako $d_{\min} \geq 4r$, optimálně se jeví volit tuto hodnotu jako trojnásobek průměru míčku, aby mělo kyvadlo dostatek prostoru a času zrychlit a dosáhnout tak rychlosti, kterou predikuje teoretický model. V případě maximální vzdálenosti desek nepozorujeme v případě lehčího míčku na stolní tenis žádný nesoulad mezi teorií a experimentem, v případě těžšího PVC míčku lze vysledovat na obr. 5 u vzdáleností desek kondenzátoru nad 20 cm narůstající odchylku teoretických hodnot od experimentálních. Elektrická síla ztrácí dominanci a začíná převládat působení tíhové síly.

Z pedagogického hlediska je důležitý rozbor působících sil. Na úrovni gymnázia lze odvodit vztah pro frekvenci kyvadla ze vztahu pro matematické kyvadlo, kde místo tíhové síly použijeme výslednou sílu, která je vektorovým součtem síly elektrické a tíhové. Na úrovni bakalářského studia lze již odvodit pohybovou rovnici fyzického kyvadla a následně diskutovat možná řešení.

Ačkoliv Forjan v [4] předpokládá v nejobecnějším modelu vliv odporových sil prostředí daných Newtonovým vztahem, který počítá s druhou mocninou rychlosti, díky čemuž nemůže být pohybová rovnice řešena analyticky, ale pouze numerickým modelováním, domníváme se, že tento předpoklad neplatí, a odporové síly lze zahrnout pomocí Stokesova vzorce, ve kterém je závislost odporové síly na rychlosti lineární.

Video analýzou byly změřeny maximální rychlosti pohybu míčku na stolní tenis s průměrnou hodnotou $v_{\max} = 1,0(2) \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, což je podle [13] sice hodnota odpovídající přechodové oblasti mezi laminárním a turbu-

lentním prouděním, ale velikost Reynoldsova koeficientu $R_e = 2\,302$ pro míček na stolní tenis o rychlosti $v = 0,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ je blíže hranici laminárního proudění, pro které je hodnota $R_e = 2\,300$. I hodnota $R_e = 2\,530$ pro rychlost $v = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ je dle našeho názoru spíše příkladem laminárního proudění, pokud vezmeme v úvahu, že přechodná oblast je definována intervalem $2\,300 < R_e < 4\,000$, a teprve hodnoty větší než $4\,000$, odpovídající rychlosti míčku $v \geq 1,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, lze považovat za oblast turbulentního proudění. Je-li tedy při pohybu kyvadla závislost odporových sil na rychlosti jeho pohybu lineární, lze pohybovou rovnici řešit explicitně. Tento přístup lze zvolit v magisterském studijním programu, kde lze řešit příslušnou diferenciální rovnici.

Vzájemný kontakt nabitě koule kyvadla s nehybnou nabitou deskou kondenzátoru je zcela jistě ovlivněn i dalšími elektrostatickými jevy, které jsou diskutovány např. v [16–18]. Nicméně z pohledu klasického laboratorního cvičení na středoškolské nebo vysokoškolské úrovni nepřináší do vyhodnocení výsledků měření žádné podstatné změny.

Posledním aspektem z pedagogického pohledu je možnost využít vztah pro frekvenci kyvadla pro nepřímé určení výstupního napětí Van de Graffova generátoru nebo jiného zdroje vysokého napětí, kterým nabíjíme elektrody kondenzátoru. Měření frekvence kmitů pomocí klasického mikrofónu nebo bezdrátového čidla Vernier Go Direct Sound je jednoduché, stejně tak jako vyhodnocení periody v programech Vernier Logger Pro nebo Graphical Analysis. Měření frekvence kmitů kyvadla lze tak využít v rámci laboratorních cvičení jak na střední, tak na vysoké škole.

Závěr

Ukázali jsme, že jednoduchý model fyzického kyvadla zahrnující působení obou sil, tj. elektrické i tíhové, poskytuje dobrou shodu teoretických hodnot frekvencí kmitů s experimentálně naměřenými daty u různých druhů kyvadel. Kyvadla se lišila nejen délkou, ale i hmotností nebo průměrem koule. Nezanedbatelný vliv pak má i materiál, ze kterého je kyvadlo vyrobeno, protože jeho pružnost a pevnost ovlivňuje hodnotu koeficientu restituace.

Použití video analýzy v různých částech procesu zkoumání pohybu fyzického kyvadla pak dává vyučujícímu možnost atraktivním způsobem zpestit běžné měření periody kmitů kyvadla nebo pružinového oscilátoru o využití netradičních metod zkoumání dynamiky kyvadla na všech úrovních pedagogického vzdělávání při badatelsky orientované výuce.

Apendix A. Přehled teoretických vztahů pro frekvenci kyvadla v modelech M1–M9

Výpočet frekvence kmitů elektrostatického kyvadla v různém provedení udává Tabulka A1. Obecně ve všech uvedených vzorcích platí, že U je napětí mezi deskami kondenzátoru, d je vzdálenost mezi deskami kondenzátoru, d' je maximální vodorovná dráha kyvadla, ε je permitivita prostředí, S je plocha jedné desky kondenzátoru, m je hmotnost tělesa kyvadla, L je délka kyvadla a $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. Ostatní veličiny jsou vysvětleny v posledním sloupci Tabulky A1. Ve vzorcích je zachováno původní značení veličin, které autoři ve vzorcích použili.

Tabulka A1 Přehled vztahů pro frekvenci kyvadla modelů neuvažujících tíhové pole

Model	Autor	Reference	Vztah pro frekvenci	Pozn.
M1	Baddi	[1]	$f = \frac{U}{8d} \sqrt{\frac{C}{d\rho A}}$	C – kapacita kond., A – plocha desky kondenzátoru, ρ – hustota prostředí
M2	Kodejška	Apendix B	$f = \frac{U}{d'} \sqrt{\frac{\varepsilon S}{8md}}$	
M3	Biezen	[3]	$f = \frac{U}{2\pi d} \sqrt{\frac{\varepsilon S}{2mL}}$	
M4	Forjan	[4]	$f = \frac{U}{d'} \sqrt{\frac{\varepsilon S}{8md} \cdot \frac{1+k_e}{1-k_e}}$	$k_e = 0,80(2)$ koeficient restituce
M5	Rezaeizadeh	[5]	$f = U \sqrt{\frac{A\varepsilon\eta}{8m} \cdot \frac{1+\epsilon}{1-\epsilon} \cdot \frac{1}{x^3}}$	A – plocha kond., η – koef. přenosu náboje Q , ϵ – koef. restituce, x – vzdálenost desek kond.

Prvním přístupem při výpočtu frekvence kmitů může být postup, který byl použit v [1], kde je pohyb kyvadla ve zjednodušeném pohledu považován za rovnoměrný přímočarý pohyb, při kterém pohybová síla překonává odporovou sílu vzduchu v souladu s Newtonovým vztahem pro odporovou sílu prostředí. Výsledný vztah pro frekvenci, který závisí nejen na napětí mezi deskami kondenzátoru, ale i na hustotě prostředí, ploše čelního řezu kyvadla udává první řádek v tabulce A1. Model je označen jako M1.

Druhý model M2 vychází z principu rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu kyvadla mezi deskami kondenzátoru a je až na koeficient restituce shodný s modelem M4. Odvození vztahu pro frekvenci kmitů je uvedeno v Apendixu B.

Poslední možností je využití vzorce pro matematické kyvadlo, ve kterém je tíhové zrychlení g nahrazeno elektrostatickým zrychlením $a_e = \frac{QE}{m}$. Tento výklad je uveden např. v [3], a je vhodným zjednodušením pro pregraduální studenty bakalářského programu. Model je v tabulce A1 označen jako M3. Modely M4 a M5 byly podrobně diskutovány výše.

Tabulka A2 Přehled vztahů pro frekvenci kyvadla modelů zahrnujících tíhové pole

Model	Autor	Vztah pro frekvenci
M6	Forjan [4]	$f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \left[\arccos \left(\frac{A-B(k_e+1)}{A k_e - B(k_e+1)} \right) \right]^{-1}$ A, B definovány v [4], část 3.3
M7	Gotpagar [6]	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g + \frac{QE}{m}}{L}}$ E – intenzita el. pole, $\frac{QE}{m} = \frac{\varepsilon S U^2}{2md^2}$, $\vec{F}_e \parallel \vec{F}_G$
M8	[7]	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\sqrt{g^2 + \left(\frac{QE}{m}\right)^2}}{L}}$ E – intenzita el. pole, $\frac{QE}{m} = \frac{\varepsilon S U^2}{2md^2}$, $\vec{F}_e \perp \vec{F}_G$
M9	Kodejška Apendix B	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L}{k_1 r^2 + L^2} \sqrt{g^2 + \left(\frac{\varepsilon S U^2}{2md^2}\right)^2}}$ Fyzické kyvadlo, $\vec{F}_e \perp \vec{F}_G$, $k_1 = \frac{2}{5}$ pro plnou kouli, $k_1 = \frac{2}{3}$ pro dutou kouli
M10	Kodejška část 1.1	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{L}{k_1 r^2 + L^2} \sqrt{g^2 + \left[\frac{L \varepsilon S \eta}{8md} \cdot \left(\frac{1+k_r}{1-k_r} \right) \cdot \left(\frac{U}{d'} \right)^2 \right]^2}}$ k_1 – viz M9, η – koeficient přenosu Q , k_r – koeficient restituce

Modely M6–M10 počítají kromě elektrické síly i s působením tíhového pole. V modelu M7 je elektrická síla rovnoběžná s tíhovou silou, což ale neodpovídá reálné situaci. Model M8 už zohledňuje skutečnost, že směr elektrické síly F_e je kolmý na tíhovou sílu F_G , nicméně vychází z jednoduššího modelu matematického kyvadla a neuvažuje vliv restitučního koeficientu, který naopak už zahrnují modely M4–M6.

Model M9, resp. M10 vychází z pohybové rovnice fyzického kyvadla, jak je ukázáno v části 1, protože každé reálné kyvadlo je příkladem fyzického kyvadla a použití zjednodušeného modelu matematického kyvadla vede k větší odchylce teoretických hodnot od experimentálně naměřených, jak ukazuje graf na obr. 3. Přehled modelů zahrnujících tíhovou sílu je uveden v tabulce A2.

Apendix B. Odvození frekvence kmitů modelu M2 a M9 bez pohybové rovnice

V modelu M2 je pohybová síla dle 2. Newtonova zákona $F = ma$ rovna konstantní elektrické síle uvnitř homogenního elektrického pole:

$$F_e = \frac{W_e}{d'} = \frac{QU}{d'} = \frac{CU^2}{d'} = \frac{\varepsilon SU^2}{dd'} = ma.$$

Zrychlení kyvadla vyjádříme ze vztahu pro dráhu zrychleného pohybu uraženou za polovinu periody T . Tato dráha je současně přibližně rovna redukované vodorovné vzdálenosti d' mezi deskami kondenzátoru. Platí-li, že $d' = \frac{1}{2}a \left(\frac{T}{2}\right)^2$, platí pro velikost zrychlení $a = 8d'/T^2 = 8d'f^2$. Dosazením do výše zmíněného vztahu pro elektrickou sílu získáme po příslušných matematických úpravách vztah pro frekvenci kyvadla uvedeného v druhém řádku tabulky A1. Současně je tento vztah pro frekvenci až na člen s koeficientem restituice stejný, jaký odvodil Forjan v modelu M4.

Model M9 je rozšířením modelu M8, který vychází z modelu matematického kyvadla, do tvaru platného pro fyzické kyvadlo. Současně jsme zohlednili skutečnou dráhu kyvadla ve vodorovném směru d' , která se liší od vzdálenosti d desek kondenzátoru.

Apendix C. Odvození momentu setrvačnosti tenké duté koule

Zlomek

$$\frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3} = \frac{A^5 - B^5}{A^3 - B^3}$$

nejprve rozložíme na součtin podle příslušných vzorců a po příslušných úpravách získáme výraz daný vztahem

$$\frac{A^5 - B^5}{A^3 - B^3} = \frac{A^4 + A^3B + A^2B^2 + AB^3 + B^4}{A^2 + AB + B^2}. \quad (C1)$$

Jestliže je slupka koule tenká, můžeme vnitřní poloměr B vyjádřit jako $B = A - \Delta r$, kde Δr je tloušťka slupky koule. Dosadíme-li předchozí

výraz do vztahu (C1) a vypočítáme-li limitu tohoto výrazu pro $\Delta r \rightarrow 0$, dostaneme řešení vyjádřené výrazem

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{A^4 + A^3(A - \Delta r) + A^2(A - \Delta r)^2 + A(A - \Delta r)^3 + (A - \Delta r)^4}{A^2 + A(A - \Delta r) + (A - \Delta r)^2} &= \\ &= \frac{5}{3}A^2 = \frac{5}{3}r_1^2. \end{aligned}$$

Přepíšeme-li výsledek zpět do rovnice (6), získáme výsledný vztah pro moment setrvačnosti ve tvaru

$$J_0 = \frac{2}{5}m \frac{r_1^5 - r_2^5}{r_1^3 - r_2^3} = \frac{2}{5}m \frac{5}{3}r^2 = \frac{2}{3}mr^2.$$

Appendix D. Odvození vztahu pro výpočet koeficientu přenosu náboje η

Proces nabíjení i vybíjení je dán dobře známým exponenciálním zákonem, viz [8], který popisuje vztah

$$Q(t) = CU_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right), \quad (D1)$$

kde člen RC udává tzv. časovou konstantu obvodu.

Reálný Van de Graaffův generátor je možné dle [15] reprezentovat paralelním RC obvodem. Hodnotu odporu R generátoru lze vypočítat z výstupního napětí VdGG a hodnoty maximálního zkratového proudu:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{150 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-6}} \Omega = 15 \text{ G}\Omega.$$

Nabíjecí kondenzátor má dle údajů výrobce kapacitu $C = 15 \text{ pF}$. Časová konstanta generátoru je tedy $RC = 225 \text{ ms}$.

Při kontaktu kyvadla s deskou kondenzátoru dochází k přenosu pouze zlomku náboje z desky na míček, který odpovídá hodnotě koeficientu η . Tento koeficient musí nutně záviset na velikosti času, po který je kyvadlo v kontaktu s deskou kondenzátoru. Současně musí být daný výraz pro koeficient přenosu náboje bezrozměrný a pro přiměřeně dlouhý čas se musí jeho hodnota limitně rovnat 1 (úplné nabití). Těmto podmínkám zcela vyhovuje výraz v závorce rovnice (D1). Můžeme tedy *koeficient přenosu náboje* η zavést následujícím vztahem

$$\eta = 1 - e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (D2)$$

kde RC je časová konstanta zdroje napětí (v našem případě VdGG) a t je čas, po který je při kmitání kyvadla koule míčku v kontaktu s deskou kondenzátoru.

Tento čas můžeme experimentálně určit pomocí video analýzy v programu Tracker, který umožňuje změřit rychlost i zrychlení míčku při odrazu od desky kondenzátoru. Vyjádříme-li z obecného vztahu pro zrychlení $a = \Delta v / \Delta t$ změnu času Δt po kterou došlo ke změně rychlosti míčku při odrazu od desky, můžeme vypočítat přibližnou hodnotu tohoto času jako $\Delta t = \frac{\Delta v}{a} = \frac{1 - (-1)}{21} s = \frac{2}{21} s \doteq 0,095 s$ pro rychlost dopadu $v = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ a zrychlení $a = 21 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Pro *koefficient přenosu náboje* η tedy můžeme rovnici (D2) formulovat ve tvaru rovnice

$$\eta = 1 - e^{-\frac{1}{RC} \frac{\Delta v}{a}}. \quad (\text{D3})$$

Hodnoty rychlostí a zrychlení míčku na stolní tenis i PVC míčku včetněň vypočítaného koeficientu η podle vztahu (D3) udává tabulka A3 (na konci článku za literaturou).

Výsledné experimentálně určené hodnoty koeficientu $\eta = 0,33(1)$, resp. $\eta = 0,36(4)$, pro míček na stolní tenis, resp. PVC míček, byly použity pro výpočet frekvence kmitů modelu M10 a jsou ve výborné shodě s teoretickými hodnotami, které byly použity při fitování modelu M10 na experimentálně naměřená data frekvencí kyvadla.

Literatura

- [1] *Baddi, R.*: High voltage electrostatic pendulum [online] (2012). Dostupné z: <https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1201/1201.3092.pdf>.
- [2] *Ardan, W. a kol.*: Augmented Reality Experiment with a Van de Graaff Generator. Phys. Teach, roč. 60 (2022), č. 6, s 475–477. Dostupné z: <https://doi.org/10.1119/5.0037354>.
- [3] *Biezen, M. van.*: Physics 37.1 Gauss's Law Understood (29 of 29) Pendulum in an Electric Field [online], 2018. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?app=desktop&v=v5u3IPImm0>.
- [4] *Forjan, M. a kol.*: Mathematical modelling of the electrostatic pendulum in school and undergraduate education. Eur. J. Phys., roč. 35 (2014), 015022. Dostupné z: <https://doi.org/10.1088/0143-0807/35/1/015022>.
- [5] *Rezaeizadeh, A. – Mameghani, P.*: Thermodynamic model for bouncing charged particles inside a capacitor. Am. J. Phys., roč. 81 (2013), s. 632–635. Dostupné z: <https://doi.org/10.1119/1.4812322>.
- [6] *Gotpagar, A.*: Charge in circular Motion and pendulum [online], 2021. Dostupné z: <https://www.youtube.com/watch?v=IOs4tv-rPS0>.

- [7] Time Period of Oscillation of a Charged Body [online]. Dostupné z: <https://www.studyadda.com/notes/jee-main-advanced/physics/electrostatics-capacitance/time-period-of-oscillation-of-a-charged-body/8088>.
- [8] *Armitage, J. L. a kol.*: An investigation into the influence of tribological parameters on the operation of sliding triboelectric nanogenerators. *Tribology International*, roč. 155 (2021), 106778. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.triboint.2020.106778>.
- [9] *Fotis, G., Vita, V., Maris, T. I.*: Rise Time and Peak Current Measurement of ESD Current from Air Discharges with Uncertainty Calculation. *Electronics* roč. 11 (2022), č. 16, 2507. Dostupné z: <https://doi.org/10.3390/electronics11162507>.
- [10] *Krotkov, R. V., Tuominen, M. T., Breuer, M. L.*: ‘Franklin’s Bells’ and charge transport as an undergraduate lab. *Am. J. Phys.*, roč. 69 (2001), č. 1, s. 50–55. Dostupné z: <https://doi.org/10.1119/1.1313519>.
- [11] *Alicki, R., Gelbwaser-Klimovsky, D., Jenkins, A.*: The Problem of Engines in Statistical Physics. *Entropy*, roč. 23 (2021), č. 8, 1095. Dostupné z: <https://doi.org/10.3390/e23081095>.
- [12] *Dem’yantseva, N. G. a kol.*: On the motion of charged particles in an alternating nonuniform electric field. *Tech. Phys.* roč. 57 (2012), s. 1465–1474. Dostupné z: <https://doi.org/10.1134/S1063784212110096>.
- [13] *Mohazzabi, P., Shankar, S. P.*: Damping of a Simple Pendulum Due to Drag on Its String. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, roč. 5 (2017), s. 122–130. Dostupné z: <http://dx.doi.org/10.4236/jamp.2017.51013>.
- [14] *Quiroga, G. D., Ospina-Henao, P. A.*: Dynamics of damped oscillations: physical pendulum. *Eur. J. Phys.*, roč. 38 (2017), č. 6, 065005. Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6404/aa8961>.
- [15] *Mende, F. F.*: Operating Principle of Van De Graaff Generator, Collectorless Generators and the Multipliers of Constant Stress. *Global Journal of Science Frontier Research*, roč. 17 (2017), č. A5, 65–70. Dostupné z: <https://journalofscience.org/index.php/GJSFR/article/view/2107>.
- [16] *Lekner, J.*: Electrostatics of two charged conducting spheres. *Proc. R. Soc. A*, roč. 468 (2012), s. 2829–2848. Dostupné z: <http://doi.org/10.1098/rspa.2012.0133>.
- [17] *Khachatourian, A. a kol.*: Electrostatic force between a charged sphere and a planar surface: A general solution for dielectric materials. *J. Chem. Phys.*, roč. 140 (2014), 074107. Dostupné z: <https://doi.org/10.1063/1.4862897>.
- [18] *Saranin, V. A.*: About behavior of electrostatic pendulum near conducting or dielectric plate. *Journal of Electrostatics*, roč. 72 (2014), č. 4, s. 235–241. Dostupné z: <https://doi.org/10.1016/j.elstat.2014.04.001>.

- [19] *ČVUT*: Fyzikální webové stránky – webFyzika. Řešené úlohy z mechaniky tuhého tělesa [online]. Dostupné z: http://webfyzika.fsv.cvut.cz/PDF/priklady/Mechanika_resene_3.pdf.
- [20] *Kodejška, Č., Richterek, L., Říha, J.*: Buquoy's problem in an introductory physics course. *J. Phys.: Conf. Ser.*, roč. 1512 (2020), 012003. Dostupné z: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1512/1/012003>.
- [21] *Kodejška, Č.*: Nepřímé měření výstupního napětí Van de Graaffova generátoru. *Matematika–Fyzika–Informatika*, roč. 33 (2024), č. 2, s. 121–128. Dostupné z: <https://mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/818>.
- [22] *Asano, K.*: On the theory of an electrostatic pendulum. *Am. J. Phys.*, roč. 43 (1975), 423–427. Dostupné z: <https://doi.org/10.1119/1.9805>.
- [23] *Heckel, M. a kol.*: Can we obtain the coefficient of restitution from the sound of a bouncing ball? *Phys. Rev. E*, roč. 93 (2016), 032901. Dostupné z: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.93.032901>.

Tabulka A3 Experimentálně vypočítané hodnoty koeficientu přenosu náboje η podle (D3)

Míček na stolní tenis $m = 2,9 \text{ g}$, $r = 2,0 \text{ cm}$	d/cm	L/cm	η	$a/(\text{m/s}^2)$	$v/(\text{m/s})$
	10	100	0,31	21,0	0,86
	12	100	0,33	21,1	0,95
	14	100	0,34	21,1	0,97
	16	100	0,34	21,1	0,98
	20	100	0,34	21,4	0,99
	10	80	0,30	20,8	0,84
	12	80	0,32	22,3	0,97
	14	80	0,32	25,4	1,09
	16	80	0,34	23,8	1,11
	20	80	0,33	22,5	1,02
	10	60	0,30	21,7	0,88
	12	60	0,33	26,4	1,17
	14	60	0,32	24,4	1,07
	16	60	0,33	22,8	1,03
20	60	0,33	22,8	1,04	
PVC míček $m = 9,6 \text{ g}$, $r = 3,2 \text{ cm}$	d/cm	L/cm	η	$a/(\text{m/s}^2)$	$v/(\text{m/s})$
	10	80	0,32	9,1	0,40
	14	80	0,35	9,6	0,47
	20	80	0,39	9,5	0,53

INFORMATIKA

Minimální triangulace mnohoúhelníku (Úlohy z MO kategorie P, 50. část)

PAVEL TÖPFER

Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha

Dnešním jubilejním 50. dílem uzavíráme dlouhodobý seriál článků, ve kterém jsme vás postupně seznámili s vybranými soutěžními úlohami z Matematické olympiády kategorie P (programování). Zmíněných 50 článků vycházelo na stránkách našeho časopisu od roku 2000 až do současnosti, tedy po dobu plných 25 let.

Tentokrát si ukážeme jednu klasickou kombinatorickou úlohu, která byla zadána v celostátním kole 39. ročníku MO kategorie P ve školním roce 1989/90. Zabývá se tzv. triangulací mnohoúhelníku, což znamená rozdělení jeho plochy na samé trojúhelníky pomocí úhlopříček, které se vzájemně nikde nekříží. Jak uvidíme, efektivní řešení této úlohy bude založeno na myšlence dynamického programování, což je metoda velmi často využívaná nejen v různých soutěžních úlohách, ale i v programování obecně. V našem seriálu článků o úlohách z MO kategorie P jsme se s dynamickým programováním setkali již vícekrát, takže technika dynamického programování nyní celý seriál také symbolicky zakončí.

Jako obvykle se nejprve seznámíme s přesným zadáním úlohy. Původní soutěžní úlohu jen mírně formulačně upravíme, aniž bychom ovšem jakkoliv změnili její smysl.

* * * * *

Konvexní n -úhelník $A_1A_2 \dots A_n$ je zadán kartézskými souřadnicemi jeho vrcholů v rovině. Navrhněte algoritmus, který určí minimální velikost jeho triangulace. Zdůvodněte správnost navrženého algoritmu.

Řekneme, že n -úhelník $A_1A_2 \dots A_n$, $n \geq 3$, je konvexní, jestliže všechny jeho vnitřní úhly jsou menší než 180° . Úhlopříčkou konvexního n -úhelníku budeme rozumět každou úsečku spojující dva různé vrcholy n -úhelníku, které spolu nesousedí na hranici (tj. nejsou spojeny hranou n -úhelníku). Z každého vrcholu n -úhelníku tedy vychází celkem $n - 3$ úhlopříček. *Triangulaci* konvexního n -úhelníku nazveme každý takový soubor navzájem se neprotínajících úhlopříček, které rozdělují plochu n -úhelníku na samé trojúhelníky. O součtu délek všech úhlopříček, které tvoří triangulaci konvexního n -úhelníku, budeme hovořit jako o *velikosti triangulace*.

* * * * *

Pro vysvětlení úlohy můžeme doplnit, že každý konvexní n -úhelník s více než třemi vrcholy má více různých triangulací. Jejich počet nám v závislosti na hodnotě n určují Catalanova čísla, ale tím se zde zabývat nebudeme. Každá triangulace konvexního n -úhelníku je tvořena přesně $n - 3$ úhlopříčkami, které rozdělují plochu n -úhelníku na $n - 2$ trojúhelníků. Různé triangulace téhož n -úhelníku mohou mít různou velikost a my máme za úkol nalézt mezi nimi tu, jejíž velikost je nejmenší. Tuto hodnotu budeme nazývat *minimální triangulace*.

Naše rozborů úloh zpravidla začínáme primitivním řešením „hrubou silou“, tedy metodou zkoušení všech možností. Uděláme to také nyní. Minimální velikost triangulace daného mnohoúhelníku jistě můžeme určit tak, že postupně vygenerujeme všechny možné triangulace, spočítáme velikost každé z nich a z takto získaných hodnot vezmeme minimum. Vypadá to jednoduše, ale algoritmus na systematické procházení všech triangulací daného mnohoúhelníku není až tak úplně jednoduchý. Řešení nejsnáze zapíšeme ve tvaru rekurzivní funkce, která dostane ve svém vstupním parametru zkoumaný mnohoúhelník, v němž má zjistit minimální velikost triangulace. Pokud je to trojúhelník, funkce vrátí nulu, neboť triangulace trojúhelníku žádnou úhlopříčku neobsahuje. V opačném případě funkce umístí postupně všemi způsoby do mnohoúhelníku jednu úhlopříčku. Každou takovou volbou úhlopříčky se plocha mnohoúhelníku rozdělí na dva menší mnohoúhelníky, jejichž minimální triangulaci zjistíme rekurzivní aplikací téže funkce. Minimální velikost triangulace se zvolenou první úhlopříčkou je pak rovna součtu délky této úhlopříčky a minimálních triangulací obou vzniklých menších mnohoúhelníků. Výslednou funkční hodnotu získáme jako minimum z velikostí triangulací získaných pro všechny možné volby první úhlopříčky.

Popsaný postup je jistě správný, neboť vybírá minimum ze všech možností, jak lze mnohoúhelník triangulovat. Časově je ovšem velmi neefektivní, protože pro mnoho menších mnohoúhelníků se mnohokrát opakovaně počítá jejich minimální triangulace. Tatáž práce se tak provádí zbytečně vícekrát. Zkusíme tedy popsany algoritmus trochu urychlit. Všimněte si, že každá triangulace mnohoúhelníku musí obsahovat nějaký *okrajový trojúhelník*, tedy takový trojúhelník, jehož dvě strany jsou zároveň sousedními stranami mnohoúhelníku. Již jsme si ukázali, že triangulace n -úhelníku je vždy tvořena $n - 3$ úhlopříčkami a ty dělí plochu daného n -úhelníku na $n - 2$ trojúhelníků. Celý n -úhelník má ovšem n stran, takže alespoň dva z těchto trojúhelníků musí obsahovat dvě strany původního n -úhelníku.

Odtud plyne, že také hledaná minimální triangulace musí obsahovat nějaký okrajový trojúhelník. Budeme tedy postupně uvažovat taková umístění první úhlopříčky, která z plochy n -úhelníku oddělí nějaký okrajový trojúhelník. Takových možností je pouze n . Pro každou z nich nyní stačí provést vždy jen jedno rekurzivní volání funkce na vzniklý mnohoúhelník s $n - 1$ vrcholy.

Než si ukážeme funkci realizující popsany algoritmus, musíme ještě vyřešit několik technických implementačních záležitostí. V zadání úlohy se vrcholy n -úhelníku označují čísla od 1 do n . Pro snadnější výpočty se nám ale bude hodit očíslovat si je v programu od 0 do $n - 1$. Nebude to ničemu vadit, je to jen interní značení, na výstupu programu s čísla vrcholů vůbec nepracujeme. Budeme totiž často potřebovat určit k vrcholu A_i číslo toho vrcholu, který je vzdálen o d vrcholů po hranici mnohoúhelníku. Takový vrchol má často číslo $i + d$, ale musíme počítat také s tím, že za posledním vrcholem následuje opět první vrchol atd., uspořádání vrcholů je cyklické. Při očíslování vrcholů n -úhelníku od nuly získáme číslo vrcholu, který následuje jako v pořadí d -tý za vrcholem i , jednoduchým výpočtem s operací modulo $(i + d) \% n$.

Kartézské souřadnice vrcholů zadaného n -úhelníku si uložíme jednoduše do seznamu a délky n , v němž na indexu i budou uloženy souřadnice vrcholu A_i ve tvaru dvojice reálných čísel (tedy dvě proměnné typu float). Dále potřebujeme počítat délky jednotlivých úhlopříček. K tomu použijeme pomocnou funkci *delka*(a, i, j), která určí vzdálenost vrcholů A_i, A_j . Spočítá ji jednoduše z kartézských souřadnic obou vrcholů jako vzdálenost dvou bodů v rovině pomocí Pythagorovy věty.

```
import math
```

```

with open('triangul.txt', "r") as f:
    n = int(f.readline())
    a = []
    for _ in range(n):
        a.append([float(_) for _ in f.readline().split()])

def delka(a, i, j):
    return math.sqrt((a[i][0] - a[j][0]) ** 2 + \
                     (a[i][1] - a[j][1]) ** 2)

def triangul1(n, a):
    if n == 3:
        return 0
    minim = math.inf
    for i in range(n):
        x = delka(a, (i-1)%n, (i+1)%n) + \
            triangul1(n-1, a[:i]+a[i+1:])
        if x < minim:
            minim = x
    return minim

print(triangul1(n, a))

```

Takto upravené řešení je sice podstatně jednodušší z hlediska programové realizace i rychlosti výpočtu, než naše původní varianta, jeho časová složitost je ovšem stále ještě obrovská. V původním n -úhelníku zkusíme n možností umístění první úhlopříčky, pro každou z nich získáme $(n-1)$ -úhelník s $n-1$ možnostmi, pro každou z nich $(n-2)$ -úhelník s $n-2$ možnostmi atd., takže celkově projdeme téměř $n!$ způsobů, jak rozmístit úhlopříčky (ne úplně, protože u trojúhelníků již končíme). Z nich ovšem mnohé získané triangulace budou navzájem shodné a budou se lišit jenom tím, v jakém pořadí jsme jejich úhlopříčky umísťovali. Stále tedy provádíme mnoho shodných výpočtů opakovaně.

Se stejným problémem neefektivně navržené rekurzivní funkce jsme se v našich článcích již dříve vícekrát setkali a už jsme si také ukázali vhodné postupy, jak lze tento problém řešit. Připomeňme si tedy, že se nabízejí dvě základní cesty:

- 1) buď rekurzivní funkci doplníme o vhodnou globální datovou strukturu, v níž si budeme ukládat minimální velikost triangulace všech již spočítaných menších mnohoúhelníků; tyto hodnoty budeme následně používat namísto zbytečného provádění dalších rekurzivních volání funkce,

2) nebo rekurzi nahradíme cyklem postupujícím zdola nahoru, tzn. ve vhodném pořadí od menších mnohoúhelníků k větším, až dojdeme k celému původně zadanému mnohoúhelníku.

Ukážeme si oba tyto postupy. Začneme první uvedenou cestou. Rekurzivní funkce zůstane v téměř nezměněné podobě, pouze ji doplníme o evidenci minimálních velikostí triangulace již spočítaných mnohoúhelníků. Po stránce technické může mít tato evidence různou podobu. Mohl by to být obyčejný seznam dvojic údajů (mnohoúhelník, velikost jeho minimální triangulace), v němž bychom ale pak museli každý zkoumaný mnohoúhelník sekvenčně vyhledávat. Mohli bychom použít binární vyhledávací strom, v němž by se kód mnohoúhelníku používal jako klíč. My využijeme možností programovacího jazyka Python a evidenci si uložíme ve tvaru slovníku, kde klíčem bude mnohoúhelník a uloženou hodnotou jeho minimální triangulace. Ve všech případech budeme ovšem potřebovat nějaké jednoznačné zakódování mnohoúhelníku. V naší programové ukázce jsme zvolili seznam čísel jeho vrcholů v rostoucím pořadí. Z toho důvodu funkce dostala třetí parametr c .

```
mintr = {} # slovník s hodnotami minimální triangulace
```

```
def triangul2(n, a, c):
    if n == 3:
        return 0
    if tuple(c) in mintr:
        return mintr[tuple(c)]
    minim = math.inf
    for i in range(n):
        x = delka(a, (i-1)%n, (i+1)%n) + \
            triangul2(n-1, a[:i]+a[i+1:],
                       c[:i]+c[i+1:])
        if x < minim:
            minim = x
    mintr[tuple(c)] = minim
    return minim

print(triangul2(n, a, list(range(n))))
```

Tento program počítá naprosto shodně jako předchozí řešení a liší se pouze v jedné velmi důležité maličkosti: nepočítá opakovaně to, co už jednou spočítal. Kdykoliv jsme v původním řešení prováděli rekurzivní volání funkce, zde nejprve zkontrolujeme ve slovníku, zda požadovanou hodnotu

neznáme z dřívějšího výpočtu. Pokud jsme ji již někdy dříve spočítali a uložili do slovníku, nebudeme provádět znovu pracné rekurzivní volání funkce, ale potřebnou hodnotu si jednoduše vyzvedneme ze slovníku. Naopak, jestliže hodnotu ještě neznáme a spočítáme ji rekurzivním voláním funkce, kromě přímého použití ve výpočtu tuto hodnotu navíc uložíme do slovníku pro případ, že by v budoucnu byla ještě zapotřebí. Ukládáme si preventivně všechny spočítané hodnoty, některé možná i zbytečně, ale my dopředu nevíme, které z nich budeme ještě potřebovat.

Uvedená úprava značným způsobem sníží časovou náročnost výpočtu, rekurzivní funkci na určení velikosti minimální triangulace budeme volat pro každý mnohoúhelník nejvýše jednou. Můžete se o tom ostatně sami snadno přesvědčit. Porovnáte-li rychlost výpočtu obou uvedených funkcí na běžném osobním počítači pro data velikosti $n \leq 10$, rozdíl v dobách výpočtu bude celkem zanedbatelný. Pro jakákoliv větší vstupní data je již ovšem rozdíl velmi citelný.

Závěrečné řešení založené na metodě dynamického programování přistupuje k problému z druhé strany. Místo rekurzivního vkládání úhlopříček do zadaného mnohoúhelníku a postupného dělení jeho plochy na menší mnohoúhelníky budeme postupovat iteračně v cyklu od nejmenších mnohoúhelníků k větším, ještě větším atd., až se dostaneme k celému původně zadanému mnohoúhelníku. Pro každý zkoumaný mnohoúhelník budeme určovat velikost jeho minimální triangulace. Tyto údaje si budeme ukládat do tabulky a budeme je využívat pro řešení větších mnohoúhelníků. Jak uvidíme později, můžeme se omezit pouze na ty mnohoúhelníky, jejichž všechny strany až na jednu jsou tvořeny stranami původního zadaného n -úhelníku a pouze jedna jejich strana je úhlopříčkou původního n -úhelníku.

Naši nejdůležitější datovou strukturou bude dvourozměrná tabulka t velikosti $(n + 1) \times n$. Index řádku k bude určovat počet vrcholů uvažovaného mnohoúhelníku, index sloupce i udává číslo vrcholu, od kterého je tento k -úhelník umístěn v původním zadaném n -úhelníku. Hodnoty uložené v tabulce budou představovat minimální velikost triangulace. Číslo $t[k][i]$ tedy udává velikost minimální triangulace k -úhelníku $A_i A_{(i+1)\%n} \dots A_{(i+k-1)\%n}$. Řádky s indexy 0, 1, 2 a 3 budou zjevně celé nulové, protože žádný jednoúhelník ani dvojúhelník neexistuje a všechny trojúhelníky mají triangulaci rovnou 0. Dále budeme tabulku t vyplňovat postupně po řádcích, počínaje řádkem číslo 4. Při výpočtu $t[k][i]$ již budeme znát všechny hodnoty na řádcích s číslem menším než k .

Každá triangulace uvažovaného k -úhelníku $A_i A_{(i+1)\%n} \dots A_{(i+k-1)\%n}$ obsahuje jistě nějaký trojúhelník se stranou $A_i A_{(i+k-1)\%n}$. Třetím vrcho-

lem tohoto trojúhelníku je některý z vrcholů $A_{(i+1)\%n} \dots A_{(i+k-2)\%n}$. Můžeme tedy vyzkoušet všechny takové volby vrcholu j pro j od $(i+1)\%n$ do $(i+k-2)\%n$ včetně, pro každou z nich spočítat velikost minimální triangulace, z těchto hodnot vybrat tu nejmenší a vložit ji do $t[k][i]$. Minimální velikost triangulace pro zvolené j je rovna součtu délek úhlopříček $A_i A_j$, $A_{(i+k-1)\%n} A_j$ a hodnot minimální triangulace obou menších mnohoúhelníků, které vzniknou vložením těchto dvou úhlopříček. Oba tyto mnohoúhelníky mají menší počet vrcholů než k a jejich minimální triangulaci proto už známe, je uložena v tabulce t na některém z předchozích řádků.

Poznamenejme ještě, že pro volbu $j = (i+1)\%n$ nebo $j = (i+k-2)\%n$ vzniká trochu odlišná situace a musíme ji správně ošetřit (máme jen jednu úhlopříčku, která oddělí jeden menší mnohoúhelník – viz program). Po zaplnění tabulky t až do řádku číslo n budou všechny hodnoty v řádku n shodné a budou udávat hledaný výsledek.

```
def triangul3(n, a):
    t = [[0]*n for _ in range(n+1)]
    for k in range(4, n+1):
        for i in range(n):
            t[k][i] = min(delka(a, i, (i+k-2)%n) + t[k-1][i],
                          delka(a, (i+1)%n, (i+k-1)%n) + \
                          t[k-1][(i+1)%n])
            j = (i+2)%n
            while j != (i+k-2)%n:
                x = delka(a, i, j) + delka(a, (i+k-1)%n, j) + \
                    t[(j-i+1)%n][i] + t[(i+k-j)%n][j]
                if x < t[k][i]:
                    t[k][i] = x
                j = (j+1)%n
    return t[n][0]

print(triangul3(n, a))
```

Asymptotická časová složitost závěrečného řešení úlohy dynamickým programováním je pouze $O(n^3)$. Postupně počítáme $O(n^2)$ hodnot tabulky t a každou z nich zjistíme v čase $O(n)$. Opět se můžete sami snadno přesvědčit, že výpočet této funkce je dostatečně rychlý i pro velmi rozsáhlá vstupní data.

Generativní umělá inteligence – Díl první: příliš velká očekávání

EDUARD BARTL

Přírodovědecká fakulta UP, Olomouc

Umělá inteligence není v současné době námětem diskuzí pouze v odborné komunitě, jisté povědomí má o ní prakticky každý, kdo má přístup ke sdělovacím prostředkům, zejména k internetu. Vliv umělé inteligence na většinu oblastí lidského konání je skutečně nebývalý. Většina veřejnosti má velká očekávání. Někteří lidé vidí v umělé inteligenci lék na spoustu problémů tohoto světa, jiní se jí bojí a byli by nejraději, kdyby bylo její použití zakázáno. Série článků začínající tímto dílem se bude zabývat jednou z nejvíce diskutovaných podoblastí umělé inteligence, které se dnes říká generativní umělá inteligence a do které spadají zejména velké jazykové modely, jakým je například ChatGPT.

1. Cíl série a další informace na úvod

Hlavním cílem těchto článků je nahodit přílišný optimismus a současně rozehnat přílišný pesimismus, jenž panuje kolem generativní umělé inteligence. Myšlenka postupující celým seriálem je celkem prostá. Pokusíme se ponořit do historie vzniku generativní umělé inteligence a především do principů, na kterých je založena. Pochopení těchto principů by totiž mělo vést ke střízlivějšímu pohledu na věc a tedy k rozptýlení neopodstatněného očekávání.

Učitelům na základních a středních školách (zejména pak učitelům výpočetní techniky a informatiky) snad tato série článků napoví, jaké místo by mohla generativní umělá inteligence zaujmout ve vzdělávání. Jsem si vědom, že se jedná o cíl dosti ambiciózní, ale ze svojí pozice již delší dobu cítím, že bych se o něj měl alespoň pokusit.

Čtenáře musím na samotném začátku upozornit, že některé názory, které v průběhu série vyslovím, jsou založeny na neúplných informacích (vždy na to upozorním) a mohou tedy být nepřesné. Neúplnost informací je důsledkem toho, že OpenAI, Google a jiní velcí hráči na poli generativní umělé inteligence zdaleka nezveřejňují vše; OpenAI tím tak poněkud popírá svůj název. Navíc vývoj v oblasti generativní umělé inteligence chvátá

obrovským tempem kupředu, spousta věcí se teprve usazuje a dokonce i největší odborníci na problematiku nemají ve všem jasno a jejich pohled na věc se může významně lišit.¹⁾

Při psaní vycházím z nejrůznějších zdrojů. Počínaje svými zápisky z přednášek ze svých studentských let, přes odborné články vědců, kteří se zasloužili o současný rozmach umělé inteligence až po Wikipedii a jiné zdroje na internetu. Nezpochybnitelnou inspirací jsou pro mě také rozhovory a přednášky dvou významných českých odborníků na umělou inteligenci (a mimochodem velmi charismatických řečníků), dr. Jana Romportla a dr. Tomáše Mikolova. Některé z jejich rozhovorů nebo přednášek je možné najít na YouTube.

2. Kdy to vše začalo

Generativní umělá inteligence je schopna generovat smysluplný text, obrázky nebo data jiného typu (třeba video nebo audio) a je úzce spjata s takzvanými velkými jazykovými modely. Co přesně znamená *velký jazykový model* a jakým způsobem souvisí s pojmem generativní umělá inteligence se budeme postupně dozvídat později.

Generativní umělá inteligence vstoupila do povědomí široké veřejnosti náhle a nečekaně, a to v listopadu roku 2022. Tedy v okamžiku, kdy společnost OpenAI poskytla k volnému používání program ChatGPT, který byl založený na velkém jazykovém modelu GPT-3.5. Podle mého pozorování si spousta lidí spojuje podzim roku 2022 s okamžikem vzniku velkých jazykových modelů a za jejich tvůrce považuje právě společnost OpenAI. Skutečnost je ale taková, že se první jazykové modely objevily již roku 2018 a podle mého názoru větší přínos na vzniku velkých jazykových modelů v podobě, jak je známe dnes, měla firma Google; k tomu se dostaneme, až se začneme bavit o takzvaném self-attention mechanismu a transformerové architektuře.

Následující seznam uvádí názvy některých velkých jazykových modelů a jejich tvůrce. Seznam není zdaleka úplný, velkých jazykových modelů je výrazně více a přibývají takřka jako houby po dešti:

- říjen 2018 – BERT od Googlu,

¹⁾Jako příklad uveďme nositele Turingovy ceny Yanna LeCuna a Geoffreyho E. Hinton. První jmenovaný poukazuje na velmi omezené schopnosti umělé inteligence, druhý jmenovaný vidí věci opačně a předpovídá nástup takzvané *obecné umělé inteligence* (tedy inteligence, která – stručně řečeno – dosahuje kvalit inteligence lidské) již v následujících dvaceti letech.

- červen 2020 – GPT-3 od OpenAI,
- květen 2022 – LaMDA 2 od Googlu,
- březen 2022 – Chinchilla od DeepMind,
- listopad 2022 – GPT-3.5 od OpenAI,
- únor 2023 – LLaMA od Meta,
- prosinec 2023 – Gemini od Google,
- květen 2024 – GPT-4o,
- září 2024 – Gemini 1.5 Pro od Google.

Uvedený seznam napovídá, že podzim 2022, kdy byl zveřejněn Chat-GPT založený na modelu GPT 3.5, nepředstavoval žádný technologický zlom na poli velkých jazykových modelů. Šlo spíše o výborným způsobem zrealizovaný marketingový tah společnosti OpenAI. Za významný je možné spíše považovat rok 2018. Tomuto roku však předcházela dlouhý vývoj v oblasti umělé inteligence, který je možné vystopovat až do 40. let 20. století. Stručně lze tedy říci, že navzdory všeobecnému názoru nejsou velké jazykové modely novou technologií; staví na vědeckém bádání mnoha vědců (zejména matematiků a informatiků, ale také jazykovědců, neurovědců a filozofů) dokonce i z období předpočítačové éry. Historickému vývoji se budeme v následujících dílech také věnovat.

3. Jazykové modely

Začneme pozvolna; vysvětlíme si nejprve, co je to jazykový model.²⁾ *Jazykový model* je statistický model přirozeného jazyka, jakým je čeština, němčina nebo angličtina. Hodí se však také pro modelování umělých jazyků, jakými jsou například programovací jazyky.

Jazykové modely zjednodušeně řečeno fungují tak, že pro předem zadanou posloupnost slov (tedy pro určitý *kontext*³⁾) $w_0w_1 \cdots w_{t-1}$ umí stanovit podmíněnou pravděpodobnost

$$P(w_t | w_0w_1 \cdots w_{t-1}),$$

tedy pravděpodobnost, že bezprostředně po kontextu $w_0w_1 \cdots w_{t-1}$ následuje slovo w_t . Tuto pravděpodobnost umí stanovit pro libovolné slovo w_t daného přirozeného jazyka.

²⁾Pozorný čtenář si jistě všiml, že místo „velký jazykový model“ nyní píšou pouze „jazykový model“. Tento rozdíl bude objasněn vzápětí.

³⁾Kontext je posloupností slov

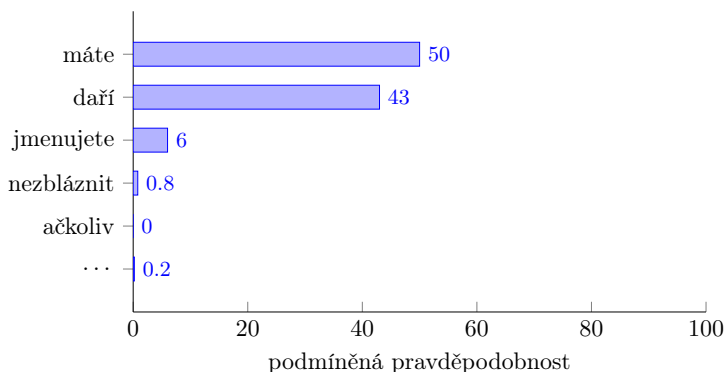
Uveďme si jednoduchý příklad. Bude-li kontextem posloupnost slov „Dobrý den, jak se“, každému z nás začnou automaticky naskakovat v hlavě různá slova, která by mohla být vhodným pokračováním této posloupnosti. Patrně to budou slova „máte“, „daří“ a podobně. I v naší hlavě totiž funguje jazykový model, který jsme si vytvořili každodenním kontaktem s česky psaným a mluveným textem. Jazykový model tedy vezme všechna česká slova a jistým způsobem jim přiřadí pravděpodobnost, že se tato slova vyskytnou po kontextu „Dobrý den, jak se“. Tyto pravděpodobnosti pak mohou vypadat třeba tak, jak je uvedeno na obr. 1 na konci článku.

Další činnost jazykového modelu pak vypadá tak, že jako pokračování kontextu je náhodně zvoleno jedno ze slov daného jazyka. Při tomto náhodném výběru jsou však zohledněny podmíněné pravděpodobnosti, o kterých byla řeč v předchozích odstavcích. Vrátime-li se k příkladu kontextu „Dobrý den, jak se“, tak můžeme říci, že s největší pravděpodobností bude jako pokračování vybráno slovo „máte“. Nikoliv však nutně! Zvoleno může být i slovo „nezbáznit“, pravděpodobnost, že se tak stane je ovšem dosti malá. S jistotou může říct pouze to, že nebude vybráno slovo „ačkoliv“ nebo jiné slovo, pro které vyšla podmíněná pravděpodobnost nulová. Z toho také plyne, při opakování tohoto procesu mohou být vybrána různá slova, jednou tedy dostaneme pokračování „Dobrý den, jak se máte“, jindy zas „Dobrý den, jak se daří“.

Velké jazykové modely, jako je třeba GPT, fungují na velmi podobném principu.⁴⁾ Tento princip je, jak jsme mohli vidět, velmi jednoduchý. Výrazně složitější je ovšem způsob, jakým velké jazykové modely stanovují podmíněné pravděpodobnosti. Slovo je v přirozeném jazyce velké množství a různých kontextů je ještě výrazně více. Velké jazykové modely tedy musí jistým způsobem vypočítat a poté uložit obrovské množství podmíněných pravděpodobností. Generování textu na základě těchto pravděpodobností je pak poměrně jednoduchou záležitostí.

O tom, jak velké jazykové modely počítají a ukládají podmíněné pravděpodobnosti se budeme bavit v následujících pokračováních série. Na závěr tohoto dílu pouze poznamenejme, že to nějakým způsobem souvisí s dalšími často diskutovanými termíny dnešní doby, konkrétně s *umělými neuronovými sítěmi* a *hlubokým učením*.

⁴⁾Pro úplnost dodejme, že jednou z významných odlišností oproti našemu výkladu je skutečnost, že velké jazykové modely nepracují se slovy, ale s *tokeny*, které si pro jednoduchost můžeme představit jako slabiky nebo interpunkční symboly. Abychom další výklad příliš nekomplikovali, budeme vždy pracovat na úrovni celých slov.



Obr. 1 Podmíněné pravděpodobnosti slov po kontextu „Dobry den, jak se“. Tři tečky na konci jsou uvedeny pro zjednodušení a nahrazují všechna ostatní slova; 0,2 je tedy součet pravděpodobností všech zbývajících slov, která nejsou v grafu uvedena.

* * * * *

POZVÁNKA

Komise pro vzdělávání učitelů matematiky a fyziky JČMF,
 Pobočný spolek JČMF Olomouc
 a Gymnázium Jevíčko

vás srdečně zvou na IV. ročník semináře

MATEMATIKA A FYZIKA VE ŠKOLE

Seminář se bude konat ve dnech 20.–22. srpna 2025 v prostorách Gymnázia v Jevíčku. Obsahem semináře jsou přednášky z pedagogiky, matematiky a fyziky. Vedle odborných přednášek bude věnován prostor na diskusi k otázkám současného vzdělávání v ČR. Seminář je určen učitelům matematiky středních a vysokých škol. Na seminář je možné se přihlásit na webových stránkách gymnázia: <https://www.gymjev.cz>.

Za organizační výbor Dag Hrubý