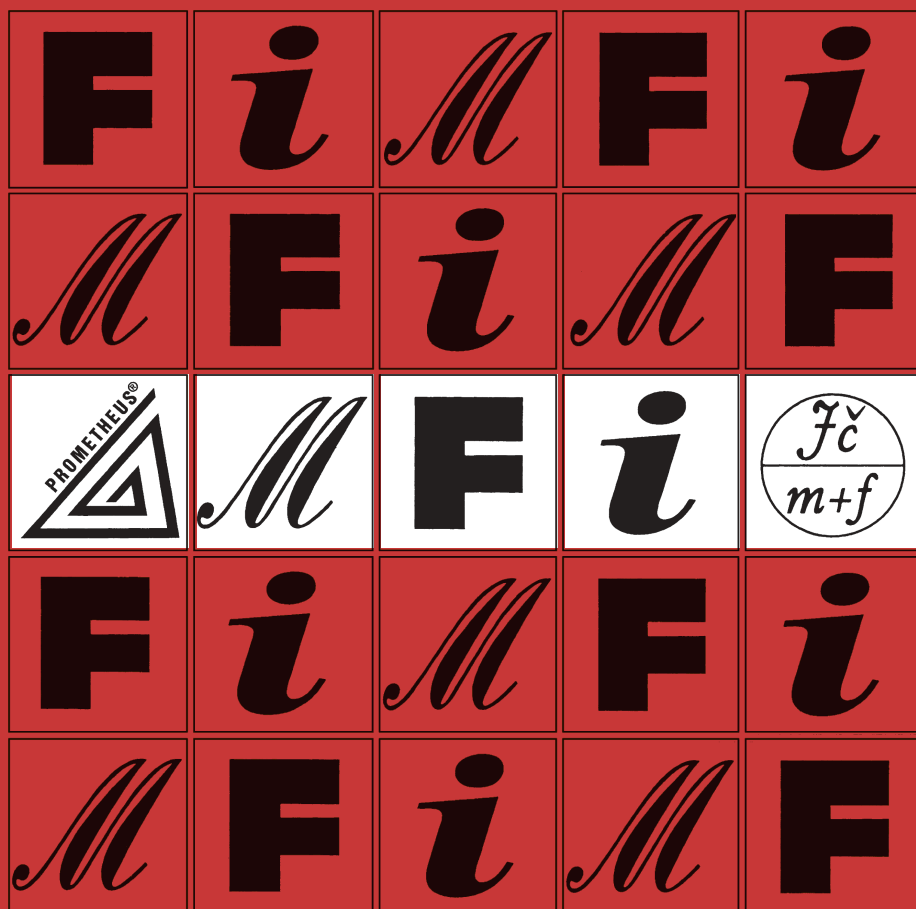


MATEMATIKA 4 FYZIKA INFORMATIKA

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXXIV (2025), číslo 4

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku
Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek
Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška,
Karel Kolář, Michaela Křížová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil, Dana Mandíková,
Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel
Töpfer, Jaroslav Zhouf

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>P. Leischner:</i> Trojboký jehlan nebo čtyřstěn?	241
<i>M. Stáňa:</i> Objavovanie na hodinách matematiky I	252
<i>J. Novák:</i> Slovní úlohy na využití absolutních hodnot	261
Zajímavé matematické úlohy	270

FYZIKA

<i>L. Pecinová, M. Křížová:</i> Didaktické hry ve výuce fyziky	275
<i>G. Kaufnerová:</i> Divergentní úlohy a jejich aplikace ve výuce termiky na ZŠ	283

INFORMATIKA

<i>L. Perk:</i> Vybrané matematické úlohy MO řešitelné pomocí žakovského programování (1. část)	299
--	-----

ZPRÁVY

<i>P. Töpfer:</i> Mezinárodní olympiády v informatice v roce 2025	312
<i>M. Mišinová:</i> 19. Středoevropská matematická olympiáda	317

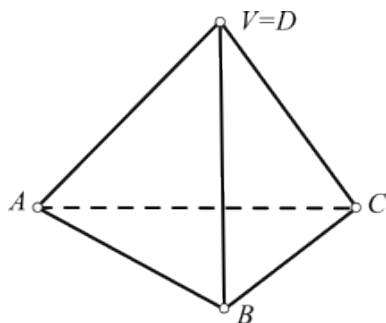
Trojboký jehlan nebo čtyřstěn?

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

Třebaže lze totéž těleso znázorněné na obr. 1 nazývat *trojboký jehlan* i *čtyřstěn*, je mezi oběma pojmy rozdíl.

U trojbokého jehlanu $ABCV$ rozlišujeme *podstavu* ABC , vrcholy podstavy, hlavní vrchol V , boční stěny ABV , BCV , CAV , boční hrany a podstavné hrany ([1], str. 58). Navíc má jehlan jedinou výšku, vzdálenost hlavního vrcholu od roviny podstavy. Standardně se zobrazuje s podstavou ve vodorovné rovině.



Obr. 1 Jehlan $ABCV$, těleso totožné se čtyřstěnem $ABCD$

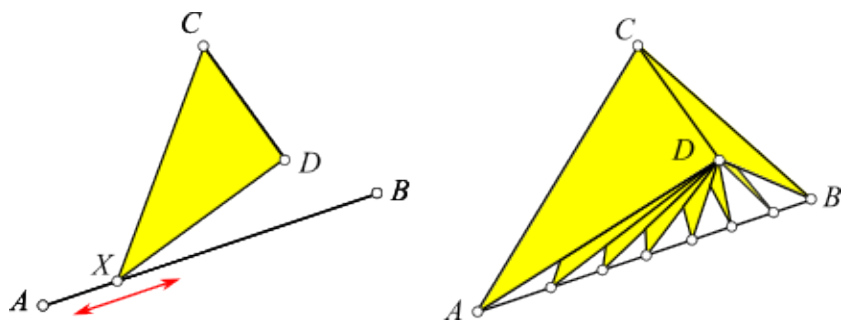
Čtyřstěn má čtyři výšky, z každého vrcholu jednu. Všechny jeho vrcholy, hrany i stěny jsou rovnoprávné, což představuje pohled na těleso jako na prostorovou analogii trojúhelníku a usnadňuje studium jeho vlastností. Termín čtyřstěn se uvádí až na střední škole a vzniká dojem, že je to pojem nadbytečný, neboť k podrobnějšímu studiu se nedostává čas. Původní představa tělesa jako trojbokého jehlanu zůstává, a tak si například málokdo dokáže představit čtyřstěn vepsaný do krychle...

V článku připomeneme některé základní vlastnosti čtyřstěňů a ukážeme užitečnost tohoto pojmu z hlediska rozvoje prostorové představivosti.

Začneme definicí. Obvykle se čtyřstěň $ABCD$ definuje pro nekomplanární body A, B, C, D jako průnik poloprostorů $ABCD, BCDA, CDAB$ a $DABC$. S cílem posílit prostorové myšlení a oprostit se od představy čtyřstěně jako standardně umístěného jehlanu, vyjdeme raději z obr. 2 a definice 1.

Definice 1

Jsou-li AB a CD mimoběžné úsečky, pak sjednocení všech trojúhelníků CDX , kde X je bod úsečky AB , se nazývá *čtyřstěň* $ABCD$.



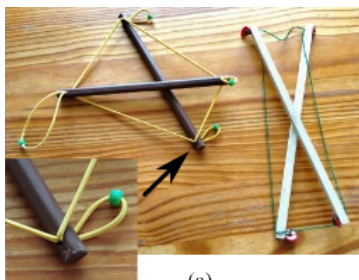
Obr. 2 Ilustrace k definici 1

Poznamenejme, že je odtud zřejmá nekomplanárnost bodů A, B, C, D , a tedy i mimoběžnost libovolných dvou protilehlých hran čtyřstěně.

K demonstraci těchto těles a jejich prostorových umístění poslouží dynamický model ze dvou dřevěných tyček, čtyř korálků nebo knoflíků a kloboukové gumy. Na obr. 3 (a) vidíme, jak jej lze vyrobit. Další snímky jsou ukázky využití: (b) čtyřstěň v poloze, kdy jsou dvě protilehlé hrany umístěné vodorovně; (c) čtyřstěň se zvrhne ve čtyřúhelník, leží-li protilehlé hrany v rovině; (d) trojboký jehlan ve standardní poloze.

Hranou AB čtyřstěně $ABCD$ lze vést právě jednu rovinu $\alpha \parallel CD$ a hranou CD právě jednu rovinu $\alpha' \parallel AB$. Obě roviny ohraničují vrstvu v níž čtyřstěň leží, obr. 4. Analogicky existují ke zbývajícím protilehlým hranám čtyřstěně další dvě dvojice rovnoběžných rovin, (β, β') a (γ, γ') .

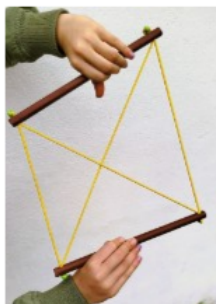
Všech šest rovin určuje rovnoběžnostěn $AEBFGDHC$ čtyřstěně opsaný, obr. 5. Hrany čtyřstěně se kryjí s šesti stěnovými úhlopříčkami rovnoběžnostěnu. Zbýlé úhlopříčky určují čtyřstěň $HGEF \simeq ABCD$. Platí věta 1.



(a)



(b)

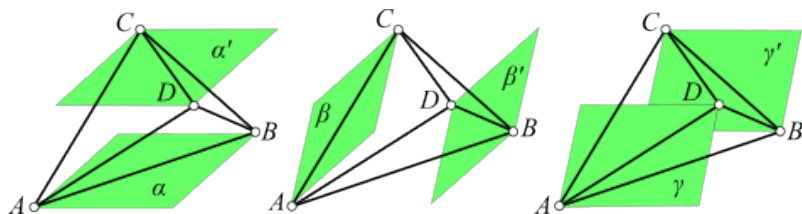


(c)



(d)

Obr. 3 Dynamický model čtyřstěnu



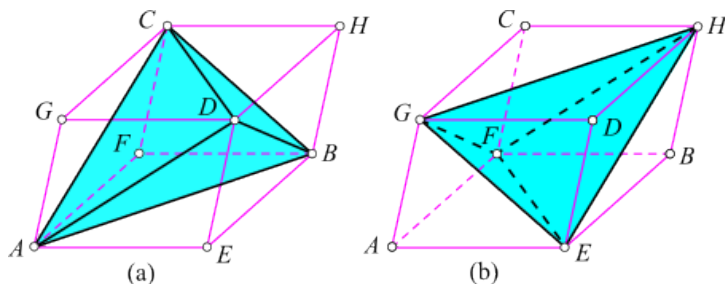
Obr. 4 Tři dvojice rovnoběžných rovin, které ohraničují čtyřstěn $ABCD$

Věta 1

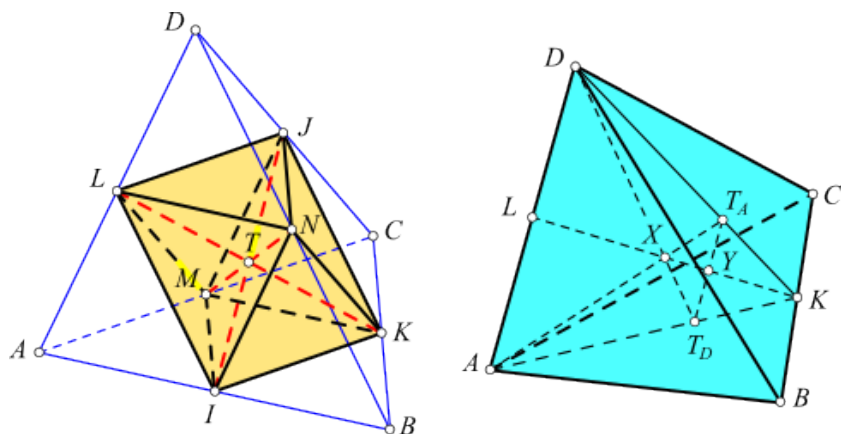
Každému čtyřstěnu lze opsat právě jeden rovnoběžnostěn a do každého rovnoběžnostěnu lze dvěma způsoby vepsat jediný čtyřstěn.

Definice 2

Střední příčka čtyřstěnu je úsečka s krajními body ve středech jeho protilehlých hran. Úsečka, jež spojuje vrchol čtyřstěnu s těžištěm protilehlé stěny, se nazývá *těžnice čtyřstěnu*.



Obr. 5 Jediná dvě umístění čtyřstěnu vepsaného do rovnoběžnostěnu



Obr. 6 K vlastnostem středních příček a těžnic čtyřstěnu

Čtyřstěn $ABCD$ na obr. 6 vlevo má střední příčky IJ , KL a MN . Po všimněme si, že úsečky IL a JK jsou též střední příčky trojúhelníků BDA a BDC . Platí $IL \parallel BD \parallel JK$ a $|IL| = \frac{1}{2}|BD| = |JK|$. Obrazec $KJLI$ je tedy rovnoběžník a jeho úhlopříčky IJ a KL mají společný střed T .

Z rovnoběžníku $INJM$ analogicky plyne, že bod T pólí i střední příčku MN . Osmistěn $IKJLMN$ je tzv. duální těleso k opsanému rovnoběžnostěnu (má vrcholy ve středech jeho stěn). Ukážeme, že bodem T procházejí i těžnice čtyřstěnu.

Označme po řadě T_D a T_A těžiště stěn BCA a BCD , obr. 6 vpravo. Z vlastností těžnic plyne, že úsečka AD je obrazem úsečky $T_A T_D$ ve stejnolehlosti se středem K a koeficientem 3. Je i obrazem úsečky $T_A T_D$ ve stejnolehlosti se středem X a koeficientem -3 , kde $X = AT_A \cap DT_D$.

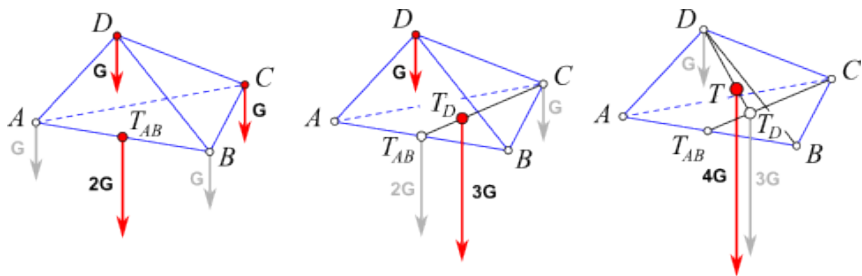
Obě stejnolehlosti zobrazují střed Y úsečky $T_A T_D$ na střed L hrany AD . Body K , Y , L a X jsou kolineární a platí

$$|LX| = \frac{3}{4}|LY| = \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3}|KL| \right) = \frac{1}{2}|KL| \quad \text{neboli} \quad X = T.$$

Poznátky shrneme do věty 2.

Věta 2

Střední příčky čtyřštěnu procházejí svým společným středem T , tzv. *těžištěm čtyřštěnu*. Bodem T prochází i všechny těžnice ZT_Z čtyřštěnu, $Z \in \{A, B, C, D\}$, a platí $|ZT| : |TT_Z| = 3 : 1$.



Obr. 7 Odvození polohy těžiště skládáním sil

Jednoduché odvození druhého tvrzení věty 2 (postavené na učivu fyziky ze 7. ročníku ZŠ) znázorňuje obr. 7. Vycházíme z představy, že A , B , C , D jsou hmotné body, každý o hmotnosti m . Postupným skládáním tíhových sil nalezneme výslednici a soustavu nahradíme hmotným bodem $(T, 4m)$.

Každý ze tří nákrešů na obr. 7 znázorňuje jednu fázi celého procesu. Červeně jsou vyznačeny síly, které na soustavu v dané situaci působí, šedě jsou pak znázorněny ty, které byly nahrazeny jejich výslednicí.

Působíště T výsledné síly je jednoznačně určeno a nezávisí na pořadí, v jakém síly skládáme. Podle zákona páky je T_{AB} středem úsečky AB (obr. 7 vlevo). V prostřední části obr. 7 platí

$$|T_D C| : |T_D T_{AB}| = 2G : G = 2 : 1,$$

a analogicky pro situaci napravo zjistíme, že $|TD| : |TT_D| = 3 : 1$.

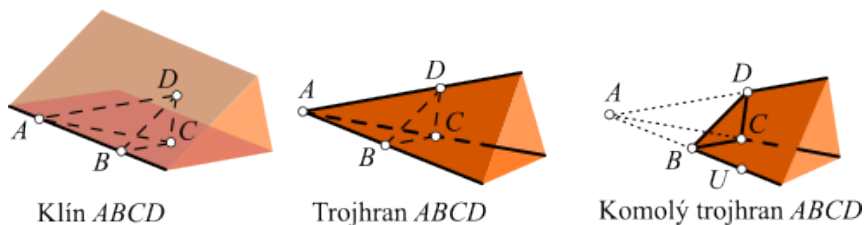
Změnou postupu skládání můžeme obdobně dokázat i první část věty 2.

Analogií poznatku, že trojúhelníku lze opsat kružnici, je věta 3, jejíž zdůvodnění ponecháme čtenáři.

Věta 3

Všechny tři roviny souměrnosti stran každé stěny čtyřstěnu se protínají v přímce, jež je na ni kolmá a prochází středem kružnice stěně opsané. Tyto čtyři kolmice ke stěnám mají společný bod (průnik šesti rovin souměrnosti hran), který je středem kulové plochy čtyřstěnu opsané.

Ke každému trojúhelníku existují čtyři kružnice, které se dotýkají všech jeho stran jako přímkou. U čtyřstěnu to jsou *kulové plochy* neboli *sféry*, které se dotýkají všech čtyř rovin, v nichž leží jeho stěny. Situaci vyšetříme s využitím pojmů klín a trojhran.



Obr. 8 Klín, trojhran a komolý trojhran

Definice 3

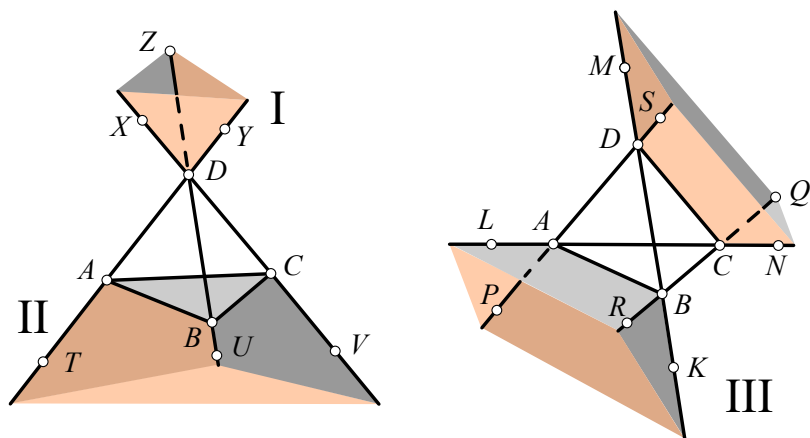
Nechť $ABCD$ je čtyřstěn. *Klínem* $ABCD$ (resp. $ABDC$) rozumíme průnik poloprostorů $ABCD$ a $ABDC$, přímku AB nazýváme *hrana klínu*, poloroviny ABC a ABD jsou *stěny klínu*. Je-li σ ta rovina souměrnosti klínu, jež obsahuje přímku AB , pak *symetrálou klínu* nazveme její průnik s klínem (tzn. polorovinu, jejíž hraniční přímkou je AB a vnitřním bodem průsečík roviny σ s úsečkou CD). Průnik klínů $ABCD$ a $ADBC$ se nazývá *trojhran* $ABCD$. *Komolý trojhran* $ABCD$ je průnik trojhranu $ABCD$ s klínem $BDCU$, kde U je vnitřní bod polopřímky opačné k polopřímce BA .

Roviny stěn čtyřstěnu rozdělují prostor na 15 částí. Z nich jediným konečným útvarem je čtyřstěn sám. Průnikem symetrál klínů $ABCD$, $BCDA$ a $CDAB$ je bod čtyřstěnu stejně vzdálený od jeho stěn, střed *sféry vepsané čtyřstěnu*.

Čtyři *části typu I* jsou trojhrany přilehlé vrcholům čtyřstěnu, např. trojhran $WXYZ$ při vrcholu D na obr. 9. Kulové plochy vepsané do těchto trojhranů se nemohou dotýkat rovin protilehlých stěn čtyřstěnu. Neexistují tedy sféry připsané čtyřstěnu při jeho vrcholech.

Další čtyři části jsou *útvary typu II*, *komolé trojhrany* přilehlé ke stěnám čtyřstěnu. Do každého z nich lze vepsat kulovou plochu, která je *sférou připsanou čtyřstěnu k příslušné stěně* (analogie kružnice připsané trojúhelníku). Středem sféry připsané ke stěně ABC je například průnik symetrál klínů $ABTC$, $BCUA$ a $CAVB$.

Zbývajících šest útvarů *typu III*, nazveme je *střechy*, jsou přilehlé hranám čtyřstěnu. Střecha $ABKL$ při hraně AB z obr. 9 je průnikem klínů $CDAB$ a $ABKL$. Protilehlá k ní je střecha $CDMN$. Existuje-li sféra vepsaná střeše $ABKL$, pak je to *kulová plocha připsaná čtyřstěnu $ABCD$ při hraně AB* .



Obr. 9 Roviny stěn čtyřstěnu dělí prostor na části typu I, II a III

Věta 4

Sféru je možné vepsat nejvýš jedné ze dvou protilehlých střeš čtyřstěnu.

Důkaz. Symetrály klínů $LABP$ a $NCDQ$ (obr. 9) leží v téže rovině, označme ji σ_1 . Analogicky leží symetrály klínů $APBL$, $DSMC$ v rovině σ_2 a symetrály klínů $RBKA$, $CQDN$ v rovině σ_3 . Přímký AP a RB jsou mimoběžky, a tak může být $\sigma_2 \parallel \sigma_3$ neboli $\sigma_3 \cap \sigma_2 = \emptyset$. Pak nelze ani jedné z obou střeš vepsat kulovou plochu. Je-li $\sigma_3 \nparallel \sigma_2$, protínají se všechny tři roviny v jediném bodě, který leží v právě jedné z obou doplňkových střeš. Je to střed sféry připsané čtyřstěnu při jedné z hran AB , CD .

Věta 5 (důsledek věty 4 a předchozích úvah)

Ke každému čtyřstěnu existuje celkem 5-8 kulových ploch, které se dotýkají všech čtyř rovin ohraničujících čtyřstěn. Z nich jedna je čtyřstěnu vepsaná, čtyři připsané ke stěnám a nejvýše tři připsané při hranách.

Příklad 1

Určete poloměry všech sfér, jež se dotýkají rovin stěn pravidelného čtyřstěnu $ABCD$ s hranou délky a .

Řešení. Čtyřstěn má výšku $v = a\sqrt{\frac{2}{3}}$ ([4], úloha 3.55) a jeho stěny jsou shodné rovnostranné trojúhelníky s obsahem $S = \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$. Hledané poloměry určíme snadno metodou dvojího vyjádření objemu V daného čtyřstěnu.

Označme $\mathcal{K}_1(O_1; r_1)$ sféru čtyřstěnu vepsanou. Její střed O_1 tedy leží uvnitř čtyřstěnu $ABCD$, který je sjednocením čtyřstěnů $ABCO_1$, $BCDO_1$, $CDAO_1$ a $DABO_1$. Platí

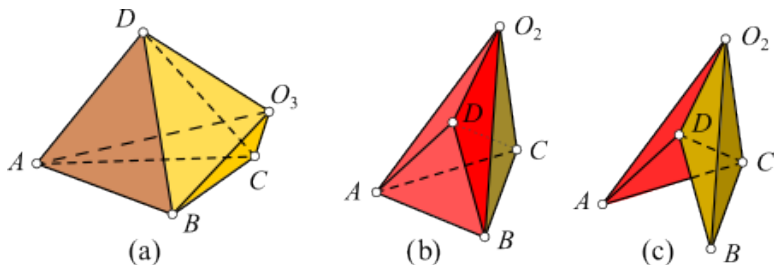
$$V_{ABCO_1} + V_{BCDO_1} + V_{CDAO_1} + V_{DABO_1} = V$$

neboli

$$\frac{4r_1 S}{3} = \frac{aS}{3} \sqrt{\frac{2}{3}},$$

a tak

$$r_1 = \frac{a}{12} \sqrt{6}. \quad (1)$$



Obr. 10 (a) $BCDAO_3$, (b) $ABO_2C \cup ABO_2D$, (c) $BCDO_2 \cup ACDO_2$

Čtyři sféry připsané ke stěnám čtyřstěnu mají stejný poloměr r_3 , jenž zjistíme analogicky. Například střed O_3 sféry připsané ke stěně BCD leží uvnitř komolého trojhranu $ABCD$. Ve shodě s obr. 10 (a) obdržíme

$$V_{CDAO_3} + V_{DABO_3} + V_{ABCO_3} - V_{BCDO_3} = V \Rightarrow r_3 = \frac{a}{6} \sqrt{6} = 2r_1. \quad (2)$$

Pravidelný čtyřstěn nemá kulové plochy připsané při hranách. Kdyby totiž například existovala sféra připsaná čtyřstěnu k nějaké hraně, musela by vzhledem k jeho symetrii existovat i při hraně protilehlé. To však není podle věty 4 možné.

Lze to ověřit i výpočtem. Existuje-li střed O_2 kulové plochy připsané čtyřstěnu při hraně CD , nachází se uvnitř přilehlé střechy. Čtyřstěn $ABCD$ se nachází v trojbokém dvojjehlanu ABO_2CD , protože vrcholy C a D leží v opačných poloprostorech s hraniční rovinou ABO_2 . Pomocí obr.10 (b) a (c) zjistíme, že platí $(V_{ABCO_2} + V_{ABDO_2}) - (V_{CDBO_2} + V_{CDAO_2}) = V$. Odtud po úpravě obdržíme rovnici $0 \cdot r_2 = V$ s neznámou r_2 , která nemá řešení, neboť $V \neq 0$.

Závěr. Pravidelný čtyřstěn má pouze jednu sféru vepsanou a čtyři kulové plochy připsané u stěn. Jejich poloměry jsou dány vztahy (1) a (2).

Příklad 2

Ve čtyřstěnu $ABCD$ platí $AD \perp BD$, $BD \perp CD$, $CD \perp AD$ a $|AD| = |BD| = |CD| = a$. Výpočtem i konstrukcí stanovte poloměry kulových ploch, jež se dotýkají hraničních rovin čtyřstěnu.

Řešení. Snadný výpočet poloměrů metodou dvojího vyjádření objemu čtyřstěnu již nebudeme opakovat. K řešení zvolíme trigonometrický postup, který zároveň poskytne návod k provedení konstrukce.

Nejprve určíme poloměr kulové plochy $\mathcal{K}_{CD}(O_{CD}; r_4)$ připsané při hraně CD . Vyjdeme z obr. 11, kde E, F jsou po řadě obrazy bodů A, B v symetrii se středem D . Doplňme-li čtyřstěn $DEFC$ na krychli $DEQFCXPY$, pak je polopřímka $p = DP$ množinou těch bodů pravoúhlého trojhranu $DEFC$, jež mají od jeho stěn stejnou vzdálenost. Navíc leží v rovině CSD , kde S je střed hrany AB .

Rovina CSD protíná sféru $\mathcal{K}_{CD}$ v hlavní kružnici $k_4(O_{CD}; r_4)$. Její průsečík se symetrálou σ klínu $ABCD$ je střed O_{CD} . Z podobnosti trojúhelníků $DO_{CD}T$ a DPQ zjistíme

$$|DT| = r_4\sqrt{2}.$$

Dále stanovíme odchylku ε symetrály σ od roviny ABD , abychom mohli vyjádřit r_4 pomocí dané délky a . Z trojúhelníku CSD plyne

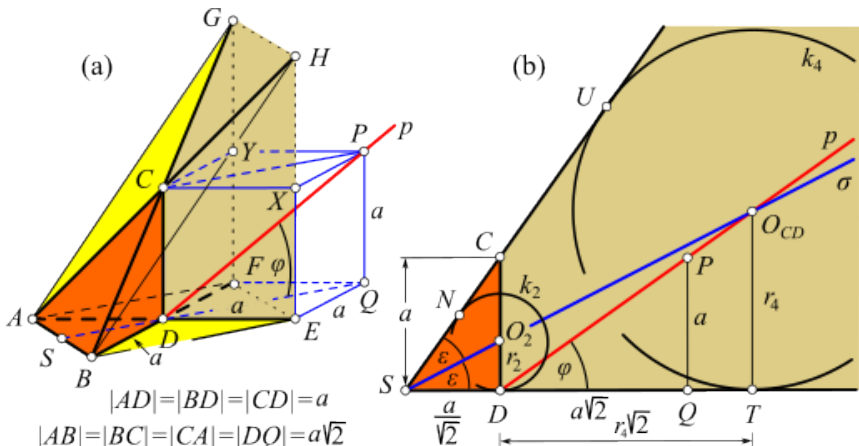
$$|CS| = \sqrt{|DS|^2 + |DC|^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}},$$

a tak

$$\cos 2\varepsilon = \frac{|DS|}{|CS|} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Výsledek dosadíme do standardního vztahu pro tangens, resp. kotangens polovičního úhlu a upravíme na tvar

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}, \quad \text{resp.} \quad \operatorname{cotg} \varepsilon = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}. \quad (3)$$



Obr. 11 K příkladu 2: (a) situace v prostoru, (b) řez rovinou CDS

Vraťme se nyní k trojúhelníku $O_{CD}ST$. Platí

$$|ST| = |O_{CD}T| \cotg \varepsilon$$

neboli

$$\frac{a}{\sqrt{2}} + r_4\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}r_4$$

a odtud

$$r_4 = \frac{\sqrt{3}+1}{2} a \doteq 1,366a. \quad (4)$$

Konstrukční řešení úlohy spočívá v narýsování obr. 11 (b) ve vhodném měřítku pro konkrétní hodnotu a . Postup snad není nutné uvádět.

Dosud jsme nezmínili kružnici $k_2(O_2; r_2)$, uvedenou na obr. 11. Kruh, který ohraničuje, je společným kolmým průmětem kulových ploch připsaných čtyřstěnu ke stěnám BCD a ACD . Středy těchto sfér totiž leží na průniku symetrály σ klínu $ABCD$ se symetrálami klínů $CDBE$ a $CDAF$, jež jsou kolmé k rovině CDS . Leží tedy na kolmici k rovině CDS procházející bodem $O_2 \in CD \cap \sigma$. A tak mají obě sféry poloměr

$$r_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sqrt{3}-1}{2} a = a - r_4 \doteq 0,366 a \quad (5)$$

Vzhledem k symetrii čtyřstěnu má poloměr r_2 i kulová plocha připsaná ke stěně ABD .

Střed sféry $\mathcal{K}(O_1; r_1)$ čtyřstěnu vepsané, i střed sféry $\mathcal{K}_{ABC}(O_3; r_3)$ připsané k jeho stěně ABC , leží rovněž v rovině CSD . Je tedy možné analogickým postupem doplnit obrázek obr. 11 (b) o hlavní kružnice těchto sfér a určit jejich poloměry konstrukcí i výpočtem.

Provedení ponecháme čtenáři a uvedeme jen, že

$$r_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6} a \doteq 0,211, \quad r_3 = \frac{3+\sqrt{3}}{6} a = a - r_1 \doteq 0,789 a. \quad (6)$$

Závěr. Daný čtyřstěn má jednu sféru vepsanou, čtyři kulové plochy připsané ke stěnám a tři připsané při hranách AD , BD a CD . Jejich poloměry jsou dány vztahy (6), (5) a (4).

Ze základních vlastností čtyřstěnu jako prostorové analogie trojúhelníku jsme dosud neuvedli průsečík výšek. Mají jej pouze tzv. *ortocentrické čtyřstěny*, s nimiž se seznámíme příště.

Literatura

- [1] *Česká terminologická komise pro matematiku*: Názvy a značky školské matematiky. SPN, Praha, 1988.
- [2] *Horák, S.*: Mnohostěny. ŠMM 27, Mladá Fronta, Praha, 1970. Dostupné na <https://dml.cz/handle/10338.dmlcz/403423>
- [3] *Ponarin, J., P.*: Elementarnaja geometrija 2. MCNMO, Moskva, 2006.
- [4] *Pomykalová, E.*: Matematika pro gymnázia, Stereometrie. Prometheus, Praha, 1995.

Objavovanie na hodinách matematiky I

MATÚŠ STÁŇA

Gymnázium M. M. Hodžu, Liptovský Mikuláš, SLOVENSKO

Matematické myslenie má v súčasnosti veľký význam. Na školách pripravujeme mladých ľudí, žiakov, aby vedeli fungovať v takom spoločenskom a pracovnom prostredí, o ktorom dnes veľa nevieme. Zažívame technologický progres s rýchlym nástupom umelej inteligencie. Je zrejmé, že to otrasie pracovným trhom. Mnohé povolania tak, ako ich poznáme dnes, nebudú existovať. A vzniknú tiež také, o ktorých dnes nemáme žiadnu predstavu. O to naliehavejšia je otázka, ktorá vzdelávací systém zamestnávala a zamestnáva vždy. Čo je potrebné mladého človeka naučiť? Čo potrebuje vedieť, aby vedel byť uplatniteľným?

Jednou z oblastí, ktoré môžeme skúmať, je obsah. V minulosti bola vedomosť, poznatok, zásadnou konkurenčnou výhodou. V globalizovanej dobe, keď sú informácie dostupné prakticky komukoľvek a kedykoľvek, sa však už takto získaná konkurenčná výhoda nezdá dôležitá. V žiadnom prípade nechceme relativizovať otázku obsahu vzdelávania, je nevyhnutné mať dobrý materiál pre to, aby sa človek mohol učiť. No dôraz by sme mali zamerať už nie na samotnú informáciu, ktorú sa človek naučí, ale na to, ako vzdelávací obsah podporuje proces učenia sa žiaka. Dostávame sa tak k druhej dôležitej oblasti, nad ktorou by sme sa mali zamýšľať. A tou je forma. Ako nastaviť vzdelávací proces tak, aby sa žiak efektívne učil? Aké metódy a formy použiť? Aké úlohy a problémy zadávať?

Uvedené otázky sú rozhodujúce aj pre vyučovanie matematiky na základných a stredných školách. Matematika nie je len veda opisujúca svet. Nie je to len zoskupenie niekoľkých definícií a vzťahov, ktoré sa žiak má naučiť a pomocou nich vyrieši určitú sadu pripravených úloh. Matematika je o myslení, je o prístupe k poznávaniu sveta. Ak prijmeme tento pohľad, znamená to, že aj na hodinách matematiky musíme ako učitelia chcieť, aby žiaci nielen reprodukovali naučené vzorce. Naša snaha je zameraná na to, aby sme žiakov naučili matematicky myslieť. Čo to však znamená v praxi?

Predkladaný text vychádza zo skúseností jeho autora, ktorý pracuje ako učiteľ matematiky na strednej škole – gymnáziu. Na vyššie položené

otázky neexistujú jednoduché odpovede. Každá trieda, každý žiak je iný. Čo funguje v jednej skupine, v druhej už fungovať nemusí. Čo sa ukáže ako efektívne dnes, zajtra už takým nebude. Príklady uvedené v článku majú slúžiť len ako inšpirácie. Veríme, že môžu obohatiť aktuálne diskusie v matematickej obci.

Učenie sa v matematike

Ľudský mozog dokáže realizovať rôzne procesy s odlišnou mierou náročnosti. Je to všeobecne známy poznatok, ktorý sa odzrkadľuje v teoretických modeloch známych ako taxonómie kognitívnych (alebo iných) funkcií. Existuje ich viacero. Bloomova taxonómia, jej revidovaná podoba (Krathwohl–Anderson), Niemierkova klasifikácia a pod. Nie je cieľom článku ich vzájomne porovnávať či popisovať. Je to ale jasná ilustrácia, že činnosti, ktoré náš mozog realizuje, sú rôzne. Schopnosť zapamätať si informáciu je síce východisková a základná schopnosť vyššej nervovej sústavy, no bolo by málo ostať len pri nej. Na ňu je potrebné nadväzovať ďalšími procesmi. Vzhľadom na nejasné výzvy v budúcnosti je tiež dôležité, aby mladý človek (žiak) vedel to, čo sa naučí, uplatniť aj v podmienkach, na ktoré sa nepripravil. Mnohí autori hovoria o tzv. metakognitívnych schopnostiach [1, 5]. Nestačí, ak žiak vie excelentne zadefinovať konjunkciu či disjunkciu a bez akýchkoľvek problémov vyplní tabuľku pravdivostných hodnôt pre danú výrokovú formu zapísanú pomocou premenných. Je to málo platné, ak si v dospelosti ako manažér prečíta nejakú legislatívu, ktorá sa týka jeho podnikania, ale použitú matematickú logiku v nej nevidí.

Ak chceme, aby žiak bol schopný používať svoje matematické schopnosti prirodzene aj pri riešení problémov, s ktorými sa ešte nestretol, je potrebné mu aj v škole na to vytvoriť príležitosť. Učenie sa žiaka musí byť už v škole aktívne, žiak potrebuje priestor pre experimentovanie, pre modelovanie. V našom prostredí je známy prístup didaktického konštruktivismu, ktorý formulovali M. Hejný a F. Kuřina [3]. Vníma matematiku ako proces, nie len výsledok. Dôraz je na vlastnej práci žiaka, jeho objavovaní, na interakcii aj so spolužiakmi v triede. Tento prístup je základným didaktickým východiskom, o ktoré sa autor tohto článku opiera. Sme si však vedomí, že reálne uplatňovanie tohto konceptu naráža na praktické obmedzenia. Vytvoriť žiakovi priestor objavovať je časovo náročné, kladie to špecifické požiadavky na prácu učiteľa a najmä, je potrebné vytvoriť prostredie, ktoré je objavovaniu naklonené. Tu myslíme najmä na problémy a úlohy, ktoré žiaci riešia.

V ďalšom texte sa zameriame na poslednú z vyššie uvedených prekážok. Aké problémy pred žiaka položiť, aby mal priestor objavovať? Len stručne uvedieme, že po organizačnej a formálnej stránke realizujeme nižšie uvedené aktivity na voliteľných predmetoch z oblasti matematiky, kde nás nelimitujú vzdelávacie štandardy či cieľové požiadavky.

Základnou otázkou teda je, aký problém žiakovi ponúknuť, aby mal možnosť objavovať. Na jednej strane nemôže ísť o problematiku veľmi jednoduchú, pre žiaka rutinnú. Musí mať priestor na objavovanie. Na druhej strane, ak zvolíme príliš náročné problémy, žiak môže rýchlo stratiť motiváciu, resp. objavovanie bude pre neho prakticky nemožné, lebo nemá na čom stavať. V našej praxi sa nám osvedčila oblasť teórie grafov. Tejto oblasti sa štandardne na stredných či základných školách nevenujeme (aspoň v slovenskom prostredí). Túto námietku si uvedomujeme. Teóriu grafov však pokladáme za vhodnú ilustráciu a ak bude mať učiteľ na jej začlenenie určitý priestor, odporúčame to. Či už na nejakom voliteľnom predmete z matematiky, školskom krúžku alebo ak učiteľovi ostane čas aj na bežnej hodine matematiky.

Teória grafov ako priestor pre objavovanie

Už malé deti sa stretnú s problémom kreslenia jedným ťahom. Kreslíme domčeky či iné objekty. Práve kreslenie jedným ťahom stálo aj pri zrode teórie grafov. Túto problematiku sme si ako predmet skúmania pre voliteľný predmet Seminár z matematiky vybrali z niekoľkých dôvodov.

Prvým je jednoduchosť a intuitívnosť riešenia problémov. Ako uvidíme na vzorových úlohách nižšie, k riešeniu mnohých problémov z teórie grafov možno pristúpiť veľmi intuitívne. Netreba poznať žiadne vstupné definície či fakty. Je možné si zaviesť spoločný pojmový aparát (graf, vrchol, hrana), no nie je to nevyhnutné. Zadané problémy rieši žiak experimentovaním. Skúša, skúma, premýšľa a hľadá algoritmy. Podľa veku a vyzretosti žiaka je možné očakávať rôznu úroveň abstrakcie a všeobecnosti pri formulácii algoritmov.

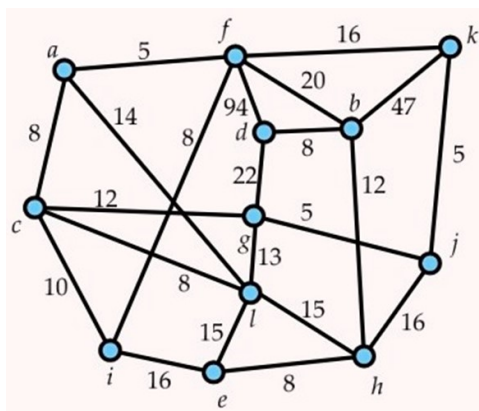
Druhým dôvodom je motivačný potenciál. Je to niečo iné, ako to, na čo sú žiaci na hodinách matematiky zvyknutí. Často sú tieto problémy pre žiakov zaujímavé. Navyše, k teórii grafov existuje veľké množstvo praktických aplikácií, ktoré aj žiak považuje za naozaj užitočné (dopravné siete, inžinierske siete, manažérske rozhodovanie a pod.).

Tretím dôvodom je dobrá práca s problematikou na hodine z pohľadu učiteľa. Učiteľ môže dávať doplňujúce otázky, upravovať zadania, reagovať na dianie v triede.

V neposlednom rade treba zdôrazniť, že riešenie problémov z tejto oblasti je vhodné či pre žiaka druhého stupňa základnej školy alebo pre stredoškolačka. Stačia minimálne zmeny vo formulácii úlohy. Skúsenosti autora s prácou v triede sú pozitívne. Aj žiaci, ktorí sú v klasickej školskej matematike slabší, sa tu vedia nájsť. Autor na týchto úlohách pracuje so žiakmi tretieho ročníka gymnázia (17–18roční žiaci). Používa ich na predmete Seminár z matematiky, čo je voliteľný predmet, no nevyberajú si ho len žiaci so záujmom o maturitu z matematiky. V skupine je približne 18 žiakov a vzhľadom na podmienky školy, kde autor pracuje, sú aktivity navrhnuté na cca 70 minút (seminár je organizovaný ako „dvojhodinovka“). Tieto informácie uvádzame len preto, aby bol zrejmý kontext, v akom žiaci pracujú. V ďalšom texte uvádzame tri ilustrácie. Tri príklady, ktoré sme na hodinách riešili. K nim pripájame aj komentáre a poznámky, ktorých cieľom je ilustrovať reakciu žiakov na hodine a ich následnú spätnú väzbu. Celkovo sme sa téme venovali v rámci ôsmich lekcí. Každú lekciu tvorila jedna vyučovacia jednotka (v tomto prípade dvojhodinovka).

Problém 1

Na obrázku 1 je plán dátového rozvodu v staršej budove. Kabeláž je potrebné vymeniť a sieť zjednodušiť, nakoľko jej neprehľadnosť predražuje údržbu. Čísla medzi uzlami vyjadrujú vzdialenosť uzlov (minimálnu dĺžku kábla medzi nimi).



Obr. 1 Graf je prevzatý z [6]

Navrhните nový spôsob prepojenia tak, aby ste prepojili všetky pôvodné uzly do jednej siete, ale minimalizovali dĺžku kábla, a tým aj zložitosť siete.

Poznámka. Postačuje, aby existovalo ľubovoľné prepojenie medzi uzlami, nie nutne priame. Napr. v pôvodnej sieti bol prepojený uzol „c“ a uzol „l“, čo však nie je nutné, ak ostanú prepojené cez uzly „i“ a „e“.

Z hľadiska teórie grafov ide v úlohe o nájdenie tzv. minimálnej kostry. Algoritmov, ktoré slúžia na nájdenie minimálnej kostry grafu, je viacero. Ako sme však už uviedli, žiaci predtým nepreberali všeobecné poznatky a algoritmy teórie grafov. Dostali len túto úlohu a začali skúšať. Je prirodzené, že najprv boli ich pokusy celkom intuitívne. Každý vytvoril nejaký upravený spojitý graf a spočítal zostávajúcu dĺžku kábla. Do určitej miery takto žiaci medzi sebou súperili o minimálnu dĺžku. Mohli pracovať aj v skupinách, diskutovať, premýšľať. Učiteľ postupne prechádzal jednotlivými skupinami a ak to bolo potrebné, formuloval podporné otázky. V prípade tejto úlohy platí, že pre žiakov predstavovala zvládnuiteľnú výzvu a potreba podporných otázok bola minimálna.

Žiaci potrebovali len čas. Po niekoľkých desiatkach minút svojím experimentovaním sami prišli na mnoho dôležitých skutočností. Napr. že im nesmú ostať žiadne cykly. Zaujímavým a dôležitým bol tiež alternatívny pohľad na úlohu. Nemusíme sa na ňu zamerať len tak, že postupne budeme odstraňovať spojenia, ale naopak, môžeme si odmyslieť všetky spojenia (hrany grafu) a jednotlivé uzly (vrcholy grafu) pripájať postupne. Tento postreh pokladáme za významný, nakoľko často je pri riešení problémov (v matematike aj mimo nej) potrebné pozrieť sa na situáciu inak. Prakticky všetci žiaci napokon vhodný algoritmus našli. Na záver sa celá skupina spoločne s učiteľom venovala presnejšej formulácii algoritmu. V skupine sme „objavili“ Kruskalov algoritmus minimálnej kostry. Celá práca trvala žiakom do 60 minút.

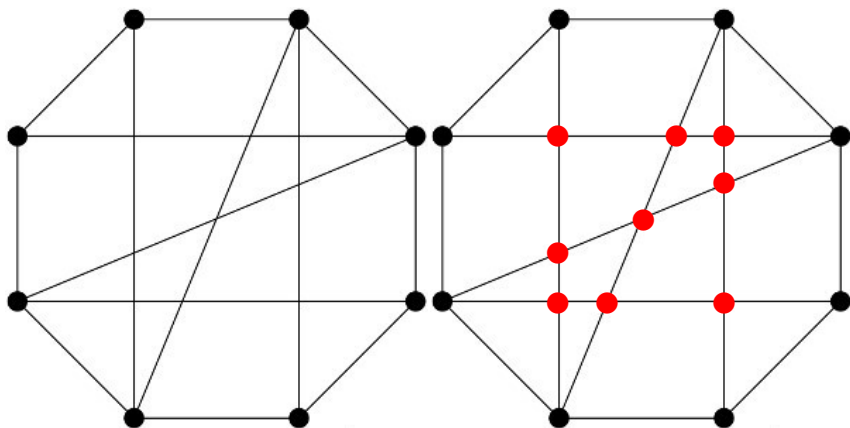
Problém 2

Na obrázku 2 je schéma dopravného vlakového spojenia medzi 8 mestami (označené čiernymi bodmi). Pri posielaní schémy projektantovi však tento schému zle pochopil a ako mestá uvažoval aj ďalšie priesečníky ciest (červené body na obrázku vpravo).

Je možné schému prekresliť tak, aby k podobnému nedorozumeniu nemohlo dôjsť?

V prípade tejto úlohy ide o problematiku rovinných (planárnych) grafov, t. j. takých, ktorých dve rôzne hrany nemajú iné spoločné body okrem vrcholov. Učiteľ využil túto úlohu ako úvodnú motiváciu. Práca žiakov trvala do desať minút a nakoniec všetci prekreslili graf v planárnej podobe. Uve-

domili si pri tom veľmi dôležitú myšlienku, že ak chceme zachytiť grafom nejakú situáciu, je dôležité najmä dodržať počet vrcholov a charakter spojení. Tzn. ak má byť vrchol A spojený s vrcholom B, tak ich je potrebné spojiť, no na tom, kadiaľ toto spojenie (hrana) bude viesť, často nezáleží. Predchádzajúce dve vety sme uviedli tak, ako ich formulovali žiaci. Možno im vytknúť určitú pojmovú voľnosť, no v podstate žiaci vnímajú význam izomorfizmu (v tomto prípade izomorfizmu grafov). Pojem samotný a jeho definíciu sa študenti naučia na vysokej škole, no je dôležité, že s touto myšlienkou pracujú. Je to určitý princíp matematického modelovania, „ohýbať“ realitu tak, aby sa problém zjednodušoval, no zároveň, aby sa nezmenil jeho charakter.



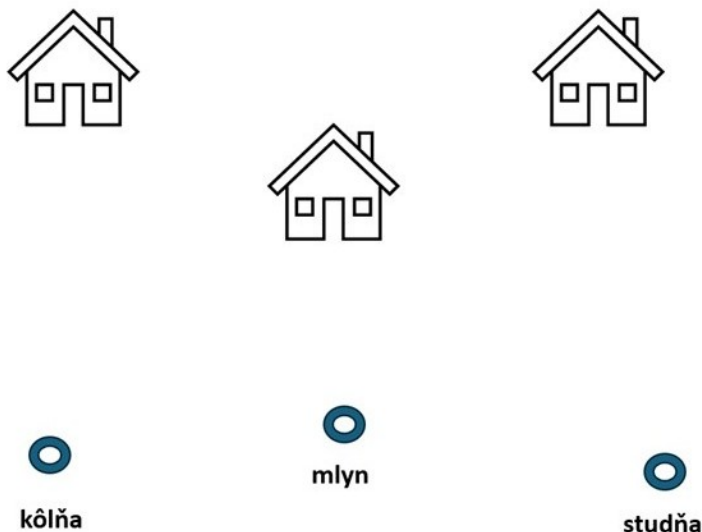
Obr. 2 <http://matematika.reseneulohy.cz>

Na túto úlohu sa na hodine nadviazalo ďalšími cvičeniami. Žiaci dostali rôzne grafy (na internete je dostupná ich široká škála, príp. ich učiteľ môže kresliť aj sám) a mali ich prekresliť ako rovinné. Študenti objavili, že to nie vždy ide. Príkladom je aj nasledujúca úloha.

Z každého domu majú viesť 3 samostatné cesty – jedna k studni, jedna k mlynu a jedna ku kôlni (obr. 3). Žiadna z ciest nesmie križovať inú. Ako cesty vybudovať?

Ide o problematiku grafu $K(3,3)$. Tento nie je možné zakresliť ako rovinný. Znovu však treba oceniť skúmanie žiakov. Veľmi ľahko prišli na to, že stačí využiť nejaké mosty či tunely. Z matematického pohľadu teda

zistili, že úloha síce nie je riešiteľná v rovine, ale na inom type plochy áno. Ako poznámku uvedieme ešte veľmi inšpiratívne hodnotenie jedného zo žiakov, ktorý si uvedomil, že ak by domčeky a hospodárske stavby nakreslil na hrniec, riešenie by našiel (využil by prítomnosť uší na hrnci).



Obr. 3

Aj pri tejto úlohe platí, že žiaci pracovali veľmi tvorivo, nebáli sa experimentovať a diskutovali o probléme.

Problém 3

Na obrázku 4 je mapa cestnej siete fiktívneho mesta. Všetky cesty možno prechádzať v oboch smeroch s výnimkou jednosmerných úsekov, ktoré sú označené šípkou: tá označuje smer, v ktorom možno úsek prejsť. Každý úsek je označený aj časovou značkou – číslom, ktoré udáva priemerný čas potrebný na prejdienie úseku. Úsekom vždy rozumieme časť cesty od križovatky po križovatku, pričom v meste sú križovatky tvaru X a T.

- 1) Za aký najkratší čas sa dostaneme zo skladiska do predajne? Kadiaľ najkratšia cesta bude viesť?
- 2) Vedeli by ste situáciu zachytiť vo forme vhodného grafu? Čo by predstavovalo vrcholy a čo hrany grafu?

- 3) Pokúste sa naformulovať algoritmus, ktorým by ste najkratšiu cestu našli aj v oveľa zložitejšom grafe.

livých vrcholoch (v prípade našej úlohy je vrcholom vždy križovatka). Pri tvorbe grafu, ktorý by prezentoval zadanú úlohu, nemali žiaci problém zakresľovať „jednosmerky“ (používať teda orientovaný graf). Táto úloha bola v našej praxi zaujímavá svojím poukázaním na skutočnosť, že niekedy je oveľa dôležitejšie objavovať ako objaviť. Aj napriek tomu, že žiaci sami nedospeli k výsledku (pri časti 3), ich objavovanie malo veľký zmysel.

Záver

Cieľom článku bolo priniesť inšpirácie učiteľom matematiky základných a stredných škôl. Chceli sme poukázať na to, že ak vytvoríme priestor a použijeme vhodný obsah prijateľným spôsobom, môžeme aplikovať konštruktivistické objavovanie aj na hodinách matematiky. Zároveň sme chceli ilustrovať aj vhodnosť problematiky teórie grafov pre tento účel. Vybrali sme len trojicu problémov, ktorým sme sa venovali priamo na vyučovaní. Teória grafov ponúka viacero možností. Zaujímavé sú úvahy o kreslení jedným ťahom v neorientovaných i orientovaných grafoch, odvodenie a dôkaz Eulerovej vety o počte vrcholov, hrán a stien v rovinnom grafe (kde sa veľmi prirodzeným a zaujímavým spôsobom používa dôkaz matematickou indukciou) či problematika farbenia grafov. Veríme, že uvedené ciele sa nám podarilo naplniť.

Literatúra

- [1] *Anderson, L. W., Krathwohl, D. R.*: A taxonomy for learning, teaching, and assessing: a revision of Bloom's taxonomy of educational objectives. Longman, New York, 2001.
- [2] *Hejný, M. a kol.*: Teória vyučovania matematiky 2. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1987.
- [3] *Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N.*: Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Univerzita Karlova, Praha, 2004.
- [4] *Matoušek, J., Nešetřil, J.*: Kapitoly z diskrétní matematiky. Karolinum, Praha, 2002.
- [5] *Nelson, T., Narens, L.*: Metamemory: A theoretical framework and new findings. In: Psychology of Learning and Motivation. Vol. 26, 1999, p. 125–173 [online]. [cit. 2023-06-30] <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0079742108600535?via%3Dihub>.
- [6] <https://studyx.ai/questions/4m0q9gk/the-image-contains-a-graph-with-nodes-and-edges-labeled-with-numerical-values-the>

Slovní úlohy na využití absolutních hodnot

JAKUB NOVÁK

Přírodovědecká fakulta MU, Brno

Učitel matematiky může ve výuce zvýšit motivaci žáků vhodně zvolenou slovní úlohou. Ta ilustruje využití matematického aparátu mimo matematiku; především ale jejím řešením aktivně rozvíjí žáci své kompetence a schopnosti matematizace, tj. abstrakce, zjednodušení a převedení zadaného problému na matematickou úlohu. V učebnicích a ve výuce se tak můžeme setkat třeba se slovními úlohami vedoucími na řešení soustav lineárních rovnic, výpočet povrchu či objemu tělesa nebo aplikaci trigonometrických vět.

V dotazníkovém šetření, které autor článku provedl mezi učiteli na českých gymnáziích, mělo 127 respondentů u každého z 18 tematických okruhů středoškolské matematiky¹⁾ uvést počet obvykle zadávaných úloh v hodinách matematiky, jejichž zadání odkazuje na situaci nebo jevy mimo školskou matematiku. Největší podíl respondentů, kteří uvedli odpověď „0“, měl okruh *Funkce, rovnice a nerovnice s absolutní hodnotou*, a to přibližně 49 %. Tato skutečnost je v souladu s tím, že se v kapitolách o absolutní hodnotě v běžně užívaných učebnicích (jmenovitě učebnici [2] nakladatelství Prometheus nebo učebnici [3] a pracovním sešitu [4] řady Didaktis) takové úlohy nevyskytují vůbec. Nevyskytují se rovněž ani ve specializované sbírce aplikačních úloh [5].

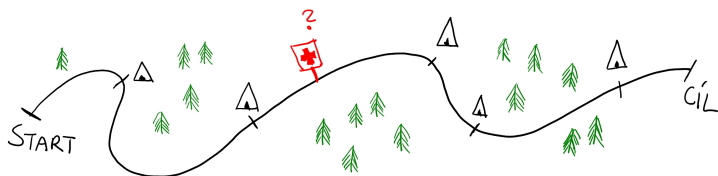
V tomto článku proto představíme dvě slovní úlohy, které vyřešíme užitím funkcí s absolutními hodnotami. Konkrétně budeme využívat geometrického významu absolutní hodnoty rozdílu $|a - b|$ jako vzdálenosti obrazů reálných čísel a a b na číselné ose.

Úloha 1 (Zdravotnické stanoviště na běžeckém závode)

Na běžecké trase dlouhé d km se nachází n různých kontrolních stanovišť, ne nutně rovnoměrně rozmístěných. Kromě nich je třeba na trať

¹⁾ Při sestavování okruhů autor vycházel z platného RVP pro gymnázia [1], např. byly vymezeny okruhy *Kvadratické funkce, rovnice a nerovnice*, *Stereometrie* nebo *Pravděpodobnost*.

umístit také jedno zdravotnické stanoviště. Z něho by zdravotníci měli být schopni se co možná nejrychleji dostat ke startu, cíli i všem kontrolním stanovištím. Kam máme zdravotnické stanoviště umístit, aby součet jeho vzdáleností od všech kontrolních stanovišť, od startu a od cíle byl co nejmenší? Předpokládejme, že závod končí jinde než začal a že neexistuje kratší cesta mezi stanovišti než po závodní trase.



Poznámka: Z ohledem na rozsah tohoto článku formulujeme úlohu rovnou obecně, žákům je však možné úlohu nejprve formulovat pro konkrétní údaje. Např.:

- délka trasy je 45 km, tři stanoviště jsou na 13., 26. a 37. kilometru;
- stejná délka trasy, ale stanoviště jsou čtyři, a to na 17., 30. a 35. a 40. kilometru.

Řešení obou variant bude patrné z obecného postupu, který nyní popíšeme.

Řešení. Nechť se zdravotnické stanoviště nachází na x -tém kilometru trasy dlouhé d km a kontrolní stanoviště se nachází postupně na x_1 -tém, x_2 -tém, $\dots$, x_n -tém kilometru trasy, kde $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < d$. Vzdálenost zdravotnického stanoviště od startu je pak rovna x , vzdálenost od cíle je rovna $(d - x)$ a vzdálenost od k -tého stanoviště je dle geometrického významu absolutní hodnoty rovna $|x - x_k|$.

Funkce f , jejíž minimum nyní budeme na intervalu $\langle 0; d \rangle$ hledat, má proto předpis tvaru

$$\begin{aligned} f(x) &= x + |x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_n| + (d - x) = \\ &= |x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_n| + d. \end{aligned}$$

Vyjádříme předpis funkce f v jednotlivých intervalech $\langle 0; x_1 \rangle$, $\langle x_1; x_2 \rangle$, $\dots$, $\langle x_{n-1}; x_n \rangle$, $\langle x_n; d \rangle$ tak, aby neobsahoval žádné absolutní hodnoty. To provedeme dobře známým odstraňováním znaků absolutních hodnot v závislosti na znaménku zastoupeného dvojčlenu. Postup je podrobněji popsán např. v řešeném příkladu 3 učebnice [2, str. 45].

Ve sloupcích tabulky 1 jsou pro každý interval vyjádřeny dvojčleny, kterými nahradíme výrazy s absolutními hodnotami v předpisu funkce f . V posledním řádku je pak uveden předpis lineární funkce, která je na daném intervalu identická s funkcí f ; $k_0, \dots, k_n$ jsou přitom jisté reálné konstanty.²⁾ Všechny tyto lineární funkce označme postupně $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ a f_n .

	$x \in \langle 0; x_1 \rangle$	$x \in \langle x_1; x_2 \rangle$	$x \in \langle x_2; x_3 \rangle$	$\dots$	$x \in \langle x_{n-1}; x_n \rangle$	$x \in \langle x_n; d \rangle$
$ x - x_1 $	$x_1 - x$	$x - x_1$	$x - x_1$	$\dots$	$x - x_1$	$x - x_1$
$ x - x_2 $	$x_2 - x$	$x_2 - x$	$x - x_2$	$\dots$	$x - x_2$	$x - x_2$
$ x - x_3 $	$x_3 - x$	$x_3 - x$	$x_3 - x$	$\dots$	$x - x_3$	$x - x_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$ x - x_{n-1} $	$x_{n-1} - x$	$x_{n-1} - x$	$x_{n-1} - x$	$\dots$	$x - x_{n-1}$	$x - x_{n-1}$
$ x - x_n $	$x_n - x$	$x_n - x$	$x_n - x$	$\dots$	$x_n - x$	$x - x_n$
$f(x)$	$-nx + k_0$	$-(n-2)x + k_1$	$-(n-4)x + k_2$	$\dots$	$(n-2)x + k_{n-1}$	$nx + k_n$

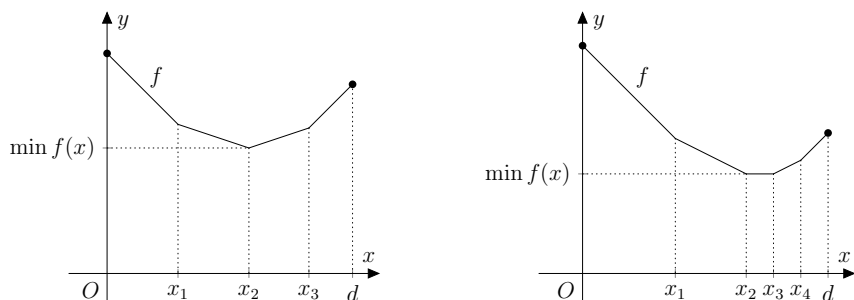
Tabulka 1: Výrazy v absolutních hodnotách a vyjádření funkce f v dílčích intervalech

Podívejme se nyní na směrnice grafů určených lineárními funkcemi; všimněme si přitom, že se v řadě zvětšují o 2. Pro lichá n to znamená, že žádná z těchto směrnic není nulová. Označíme-li tehdy $m = \frac{n+1}{2}$, mají grafy funkcí $f_0, \dots, f_{m-1}$ zápornou směrnici a grafy funkcí $f_m, \dots, f_n$ kladnou směrnici. To znamená, že pro lichá n je celá funkce f na intervalu $\langle 0; x_m \rangle$ klesající a na intervalu $\langle x_m; d \rangle$ zase rostoucí.³⁾ Odtud dostáváme, že v bodě x_m musí být minimum funkce f , a proto musí být pro lichá n zdravotnické stanoviště na $(\frac{n+1}{2})$ -tém stanovišti. Příklad grafu funkce f pro $n = 3$ je na obr. 1 vlevo.

Pro sudá n je jedna ze zkoumaných směrnic nulová, a to směrnice grafu lineární funkce f_p , kde $p = \frac{n}{2}$. Na intervalu $\langle 0; x_p \rangle$ je tak celá funkce f klesající, na intervalu $\langle x_p; x_{p+1} \rangle$ konstantní a na intervalu $\langle x_{p+1}; d \rangle$ rostoucí. Minimální hodnoty tak nabývá funkce f v libovolném bodu intervalu $\langle x_p; x_{p+1} \rangle$. Pro sudá n proto můžeme zdravotnické stanoviště postavit kdekoli mezi $\frac{n}{2}$ -tým a $(\frac{n+2}{2})$ -tým stanovištěm. Příklad grafu funkce f pro $n = 4$ je na obr. 1 vpravo.

²⁾Hodnoty všech konstant k_i se dají přesně vyjádřit součty nebo rozdíly parametrů $x_1, \dots, x_n$ a d , pro další řešení úlohy je však nepotřebujeme.

³⁾Správně bychom zde ještě měli poznamenat, že je funkce f vzhledem ke svému předpisu spojitá.



Obr. 1 Příklady grafů funkce f pro $n = 3$ a $n = 4$

Na závěr poznamenejme, že pokud bychom žákům zadali zjednodušené verze úlohy s pevně zvolenými parametry, jak jsme je navrhli v poznámce před řešením, muselo by být zdravotnické stanoviště na 26., resp. kdekoli mezi 30. a 35. kilometrem trati.

Úloha 2 (Modely výkonnosti IT oddělení)

Vedoucí IT úseku, který se zabývá řešením problémů jedné nejmenované korporátní firmy, chce mít k dispozici model výkonnosti svého oddělení. Žádaný model má v závislosti na počtu problémů předpovědět přibližnou dobu jejich vyřešení.⁴⁾ Vedoucí si pro sebe provedl čtyři měření: při prvním zvládl tým vyřešit 7 problémů za 9 minut, při druhém 10 problémů za 10 minut, při třetím 15 problémů za 19 minut a při čtvrtém 4 problémy za 5 minut.

- a) Který druh funkce z následujícího seznamu bude nejlépe modelovat popsanou závislost (x značí počet problémů, y potřebný čas v minutách)?

- i) konstantní funkce $f: y = b; b \in \mathbb{R}$;
- ii) přímá úměrnost $f: y = ax; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- iii) obecná lineární funkce $f: y = ax + b; a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- iv) nepřímá úměrnost $f: y = \frac{a}{x}; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- b) Najděte konkrétní předpis funkce, který byste předložili jako ideální model vedoucímu IT oddělení.

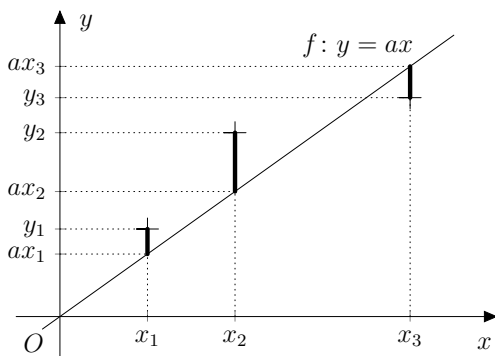
⁴⁾Předpokládáme přitom, že všechny problémy mají srovnatelnou obtížnost.

Řešení. S rostoucím počtem problémů roste také doba potřebná k jejich řešení, proto vhodným modelem nebude konstantní funkce ani nepřímá úměrnost. Protože navíc vyřešit 0 problémů zřejmě týmu nezabere žádný čas, vhodné modely budeme hledat pouze mezi funkcemi, které jsou přímými úměrnostmi. Žádná z nich však nebude jednoznačně „ideálním modelem“; body $[0; 0]$, $[7; 9]$, $[10; 10]$, $[15; 19]$ a $[4; 5]$ totiž neleží na přímce. Popíšeme několik modelů, které je možné žákům ukázat nebo na které mohou žáci sami přijít.

Patrně nejjednodušší model získáme následující úvahou: tým celkově vyřešil 36 problémů za 43 minut, tedy jeden problém vyřešil průměrně za $\frac{43}{36}$ min $\doteq 1,19$ minut. Hledaná přímá úměrnost proto bude mít předpis ve tvaru

$$f_1: y = \frac{43}{36}x.$$

Druhý model už bude využívat absolutních hodnot. Nazvěme jeho určení metodou nejkratších úseček a ilustrujme ji na příkladu se třemi zadanými body $[x_1; y_1]$, $[x_2; y_2]$ a $[x_3; y_3]$ (viz obr. 2).



Obr. 2 Metoda nejkratších úseček

Nášim úkolem je najít funkci $f: y = ax$ takovou, že tři zvýrazněné úsečky, které reprezentují rozdíly mezi „ideálními“ a „skutečnými“ body, budou v součtu co nejkratší. Matematicky proto minimalizujeme výraz s proměnnou a , který má vyjádření

$$\begin{aligned} &|f(x_1) - y_1| + |f(x_2) - y_2| + |f(x_3) - y_3| = \\ &= |ax_1 - y_1| + |ax_2 - y_2| + |ax_3 - y_3|. \end{aligned}$$

Nyní se vraťme ke konkrétním údajům ze zadání úlohy. Řešením bude taková funkce $f_2: y = ax$, pro kterou výraz

$$|f_2(7) - 9| + |f_2(10) - 10| + |f_2(15) - 19| + |f_2(4) - 5|$$

nabývá nejmenší možné hodnoty. Dosazením $f_2(x) = ax$ dostáváme výraz

$$|7a - 9| + |10a - 10| + |15a - 19| + |4a - 5|,$$

jehož hodnota je závislá pouze na parametru a . Budeme tedy hledat bod, ve kterém má minimum nově vytvořená funkce

$$g(a) = |7a - 9| + |10a - 10| + |15a - 19| + |4a - 5|.$$

Rozložíme $\mathbb{R}$ na sjednocení disjunktních intervalů oddělených nulovými body výrazů v jednotlivých absolutních hodnotách a vyjádříme funkci g v každém z těchto intervalů předpisem bez absolutní hodnoty. Množina všech takových nulových bodů je $\{1, \frac{5}{4}, \frac{19}{15}, \frac{9}{7}\}$. V tabulce 2 je v každém z pěti vzniklých intervalů vyjádřen každý ze sčítanců i předpis celé funkce g bez absolutních hodnot.

	$(-\infty; 1)$	$\langle 1; \frac{5}{4} \rangle$	$\langle \frac{5}{4}; \frac{19}{15} \rangle$	$\langle \frac{19}{15}; \frac{9}{7} \rangle$	$\langle \frac{9}{7}; \infty \rangle$
$ 10a - 10 $	$-10a + 10$	$10a - 10$	$10a - 10$	$10a - 10$	$10a - 10$
$ 4a - 5 $	$-4a + 5$	$-4a + 5$	$4a - 5$	$4a - 5$	$4a - 5$
$ 15a - 19 $	$-15a + 19$	$-15a + 19$	$-15a + 19$	$15a - 19$	$15a - 19$
$ 7a - 9 $	$-7a + 9$	$-7a + 9$	$-7a + 9$	$-7a + 9$	$7a - 9$
$g(a)$	$-36a + 43$	$-16a + 23$	$-8a + 13$	$22a - 25$	$36a - 43$

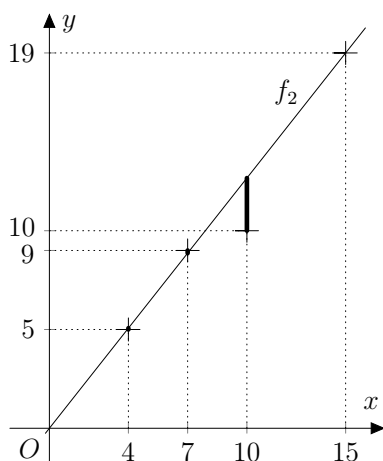
Tabulka 2: Výrazy s absolutními hodnotami a vyjádření funkce g v dílčích intervalech

Vidíme, že v intervalu $(-\infty; \frac{19}{15})$ je funkce g klesající, neboť v každém ze tří dílčích intervalů je směrnice grafu příslušné lineární funkce záporná.⁵⁾ V intervalu $\langle \frac{19}{15}; \infty \rangle$ je naopak funkce g z obdobných důvodů rostoucí. Proto je v bodě $a = \frac{19}{15}$ minimum funkce g a hledaná přímá úměrnost má předpis

$$f_2: y = \frac{19}{15}x.$$

⁵⁾ Jako v předchozí úloze bychom správně ještě měli vzít v úvahu spojitost funkce na řečeném intervalu.

Graf této funkce je znázorněn na obrázku 3; bodem $[15; 19]$ přímo prochází, u dvou ze tří zbylých bodů jsou úsečky tak krátké, že na obrázku téměř nejdou vidět.



Obr. 3 Výsledný model podle metody nejkratších úseček

Stručně poznamenejme, že je u této úlohy možné také představit žákům prakticky velmi využívanou metodu nejmenších čtverců, která je ve většině případů kvůli absenci potřebného matematického aparátu středoškolákům nepřístupná. Zde však díky tomu, že hledáme předpis přímé úměrnosti $f_3: y = ax$, minimalizujeme výraz

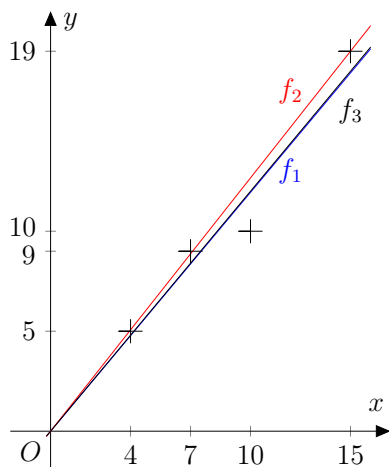
$$\begin{aligned} (f_3(7) - 9)^2 + (f_3(10) - 10)^2 + (f_3(15) - 19)^2 + (f_3(4) - 5)^2 = \\ = (7a - 9)^2 + (10a - 10)^2 + (15a - 19)^2 + (4a - 5)^2, \end{aligned}$$

tedy hledáme minimum kvadratické funkce proměnné a . Výpočet provádět nebudeme, čtenáři si však mohou ověřit výsledek

$$f_3: y = \frac{6}{5}x.$$

Tím je naše řešení části b) u konce. Na místě je však všechny tři modely validovat; jaké jsou jejich přednosti a slabiny? Vidíme, že i když se výsledné úměrnosti f_1 , f_2 a f_3 liší (zejména funkce f_2 oproti zbylým dvěma funkcím, viz obr. 4), může se vzhledem k malým rozdílům zdát hledání funkce f_3

nebo f_2 zbytečně komplikované.⁶⁾ Panu vedoucímu by pro reálný odhad času bohatě vystačila funkce f_1 , jejíž předpis jsme získali nejsnadněji. Uvědomme si však, že tento postup je možný jen v případě, že je hledaná funkce přímá úměrnost. Pokud bychom hledali například obecnou lineární funkci $f: y = ax + b$, průměr by k jednoznačnému určení parametrů a a b nestačil. Zdůrazněme však, že kvůli nejednoznačnému zadání úlohy nelze říct, který ze tří modelů je „správný“!



Obr. 4 Srovnání všech tří modelů

V praxi se u podobných úloh na aproximaci funkce podle několika zadaných funkčních hodnot používá zejména metoda nejmenších čtverců. Oproti metodě nejkratších úseček má tu výhodu, že při ní lze využít diferenciálního počtu. Ten se u funkcí, v jejichž předpisu vystupují absolutní hodnoty, dá použít jen s komplikacemi v podobě dělení definičního oboru. V našem konkrétním případě bychom navíc stejně skončili u porovnávání směrnic, jako jsme to udělali. Poznamenejme však, že již na hledání předpisu obecné lineární funkce $f: y = ax + b$ prostředky středoškolské matematiky nestačí, neboť bychom museli najít extrém funkce dvou nezávislých proměnných a a b .

Metoda nejmenších čtverců má však také nevýhodu; oproti metodě nejkratších úseček je snadno ovlivnitelná odlehlými hodnotami, neboť se velké

⁶⁾ Velmi podobný průběh funkcí f_1 a f_3 jde vidět i porovnáním směrnic jejich grafů: $\frac{43}{36}$ a $\frac{6}{5} = \frac{42}{35}$.

odchylky započítávají s umocněnou vahou. To jde vidět i na obr. 4, kde je přímka f_1 blíže odlehlému bodu $[10; 10]$.

Závěr

Matematizací obou uvedených slovních úloh jsme je převedli na obdobný matematický problém, a to na minimalizaci funkce s absolutními hodnotami. Obtížnost první úlohy lze snadno měnit počtem stanovišť a má proto potenciál být využita také jako gradovaná úloha s nejtěžší, zobecněnou variantou. Naopak nejjednodušší verze úlohy s jedním nebo dvěma stanovišti by nemusela dělat problémy ani šikovným žákům základní školy.

Druhá z úloh je zase zajímavá tím, že, i když to tak nemusí na první pohled vypadat, není jednoznačně zadaná. Žáci mohou být často přesvědčeni, že slovní úlohy v hodinách matematiky jsou formulovány jednoznačně a mají jediný „správný“ výsledek. Tato přesvědčení jim mohou později bránit v řešení otevřenějších, ale realitě bližších problémů, viz [6, str. 21]. Zařazováním podobných úloh tak může učitel tato mylná přesvědčení oslabovat.

Poděkování

Příspěvek vznikl s podporou projektu MUNI/A/1569/2024.

Literatura

- [1] Rámcový vzdělávací program pro gymnázia. VÚP, Praha, 2007.
- [2] *Odvárko, O.*: Matematika pro gymnázia – Funkce. 4. vydání. Prometheus, Praha, 1993.
- [3] *Cizlerová, M., Zahradníček, M., Zahradníčková, A.*: Matematika pro SŠ – 4. díl: Funkce I – učebnice. Didaktis, Brno, 2014.
- [4] *Králová, M., Navrátil, M.*: Matematika pro SŠ – 4. díl: Funkce I – pracovní sešit. Didaktis, Brno, 2014.
- [5] *Robová, J. et al.*: Sběrka aplikačních úloh ze středoškolské matematiky. Prometheus, Praha, 2014.
- [6] *Vondrová, N. et al.*: Matematická slovní úloha: mezi matematikou, jazykem a psychologií. Karolinum, Praha, 2019.

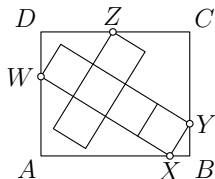
Zajímavé matematické úlohy

Pokračujeme v pravidelné rubrice Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 3. 2026 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc, nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi zveřejníme.

Naše rubrika za poslední dva roky zveřejnila zadání 16 úloh od 9 autorů, obdržela 215 správných nebo částečných řešení od 75 různých řešitelů. Nejvíce (14) řešení jsme obdrželi od *Karola Gajdoše* z Trnavy, dále 9 řešení od *Piotra Szatana* z II LO im. Stanisława Staszica v Tarnowskich Górach (Polsko), který patří do početné skupiny žáků této střední školy, která nám pravidelně posílá svá řešení úloh.

Úloha 305

Do obdélníku $ABCD$ se stranami délek $|AB| = 30$, $|BC| = 25$ jsme umístili síť krychle, která se dotýká jeho stran v bodech X, Y, Z a W podle obrázku. Vypočítejte délku strany krychle a rozhodněte, zda lze tuto síť umístit do obdélníku tak, aby její strany byly rovnoběžné se stranami obdélníku.



Tomáš Bárta

Úloha 306

U kulatého stolu sedí n ($n \geq 3$) svatebních hostů. Číšník přinesl kulatý táč, na němž je n různých zákusků rozmístěných do kruhu. Ukázalo se, že každý host je alergický právě na jeden zákusek, každý na jiný. Najděte všechna n s následující vlastností:

Jsou-li zákusky na tácu rozmístěny do kruhu jakkoliv, číšník může položit táč doprostřed stolu tak, aby před každým hostem byl na tácu zákusek, na nějž není alergický.

Josef Tkadlec

V následující části uvádíme řešení úloh 301 a 302, jejichž zadání jsme zveřejnili ve druhém čísle letošního (34.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 301

Určete všechny možné hodnoty zlomku

$$\frac{x + 33y}{33x + y}$$

pro nezáporná reálná čísla x, y , která nejsou současně rovna nule?

Ján Mazák

Řešení. Vzhledem k tomu, že x a y jsou nezáporná reálná čísla, platí

$$\frac{x + 33y}{33x + y} = \frac{x + 33(33x + y) - 33^2x}{33x + y} = 33 - \frac{(33^2 - 1)x}{33x + y} \leq 33.$$

Díky symetrii vzhledem k proměnným x a y také platí

$$\frac{y + 33x}{33y + x} \leq 33, \quad \text{tedy ekvivalentně} \quad \frac{1}{33} \leq \frac{x + 33y}{33x + y}.$$

Hodnoty zlomku jsou tak z intervalu $\langle 1/33; 33 \rangle$. Hodnotu 33 tento zlomek nabývá pro $x = 0$. Pro libovolné reálné číslo a z intervalu $\langle 1/33; 33 \rangle$ a libovolné kladné reálné číslo x je číslo

$$y = x \frac{33a - 1}{33 - a}$$

zřejmě nezáporné, dosazením do výše uvedeného zlomku dostaneme, že jeho hodnota je rovna

$$\frac{x + 33 \frac{33a - 1}{33 - a} x}{33x + \frac{33a - 1}{33 - a} x} = \frac{33 - a + 33^2 a - 33}{33^2 - 33a + 33a - 1} = a.$$

Uvedený zlomek tak nabývá všech hodnot z intervalu $\langle 1/33; 33 \rangle$

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *František Jáchim* z Volyně, *Miriám Barešová*, *G Dobruška*, *Martin Bryja* a *Alexander Košťál*, oba G Brno, *tř. Kpt. Jaroše*, *Bartosz Depta*, *Paweł Chwiedoruk*, *Dawid Rotman* a *Bartosz Wieczorek*, všichni II LO Tarnowskie Góry (Polsko), *Lukáš Chalupník*, SPŠE a G Praha 10, *V Úžlabíně*, *Erik Ježek*, SSPŠ a G Praha 5, *Petr Karlík*, G Praha 10, *Voděradská*, *Lukáš Komín*, G Praha 4, *Opatov*, *Veronika Menšíková*, AG Praha 2, *Korunní*, *Helena Muchová*, GJK Praha 6, *Ondřej Nevěřil*, G Zábřeh, *Lucian Poljak*, GJŠ Přerov, *Michal Roček*, SPŠ a VOŠ Liberec, *Štěpán Sikora*, G Praha 7, *Nad Štolou*, *Petr Starý*, G České Budějovice, *Jírovcova* a *Eva Martikánová*, MG Opava,

Úloha 302

Na počátku stálo zboží ve dvou prodejnách stejnou částku A . Několikrát si tyto dvě prodejny konkurovaly následujícím způsobem. Pokud jedna prodejna změnila cenu zboží o p procent, $p \in \mathbb{Z}$, $0 < |p| < 100$, druhá prodejna vzápětí cenu změnila o stejný počet procent opačným směrem (např. pokud jedna prodejna cenu zvýšila o 3 %, druhá ji o 3 % snížila a naopak). Po k takových změnách se ukázalo, že zboží v obou prodejnách stojí opět stejně. Určete nejvyšší možnou výslednou cenu toho zboží. Úlohu řešte pro a) $k = 4$, b) $k = 3$.

Jaroslav Zhouf, Pavel Calábek

Řešení.

a) Označme p_i pro $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ jednotlivé procentní změny cen zboží v prvním obchodě. Po těchto změnách má zboží cenu

$$N = A \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \left(1 + \frac{p_3}{100}\right) \left(1 + \frac{p_4}{100}\right).$$

Zboží ve druhém obchodě stojí stejnou částku, která je nyní rovna

$$N = A \left(1 - \frac{p_1}{100}\right) \left(1 - \frac{p_2}{100}\right) \left(1 - \frac{p_3}{100}\right) \left(1 - \frac{p_4}{100}\right).$$

Vynásobením předchozích rovnic dostaneme

$$N^2 = A^2 \left(1 - \frac{p_1^2}{100^2}\right) \left(1 - \frac{p_2^2}{100^2}\right) \left(1 - \frac{p_3^2}{100^2}\right) \left(1 - \frac{p_4^2}{100^2}\right).$$

Jelikož $p_i^2 < 100^2$, vidíme, že cena zboží se jistě zmenší, jeho největší možná hodnota nastane pro $p_i^2 = 1$ a bude

$$N \leq A \sqrt{\left(1 - \frac{1}{100^2}\right)^4} = A \left(\frac{100^2 - 1^2}{100^2}\right)^2 = A \left(\frac{99 \cdot 101}{100^2}\right)^2 \doteq 0,9998A.$$

Tato hodnota je dosažitelná, stačí aby v každém obchodě dvakrát zvýšili cenu o 1 % a dvakrát ji o toto 1 % snížili, tj. např. pro $p_1 = p_2 = 1$, $p_3 = p_4 = -1$.

Nejvyšší možná cena zboží po čtyřech změnách je uvedena výše a je přibližně o 0,02 % menší než cena původní.

b) Podobnými úvahami jako v předchozím řešení zjistíme, že cena zboží se opět sníží. Ovšem nyní již neexistuje žádné pořadí změn ceny o 1 %

takové, aby po třech opačných změnách byla v obou obchodech stejná cena. Hledáme tedy taková celá čísla p_1, p_2, p_3 , pro která podle zadání platí $0 < |p_i| < 100$ a současně je konečná cena v obou obchodech stejná, tj. platí

$$\left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) \left(1 + \frac{p_3}{100}\right) = \left(1 - \frac{p_1}{100}\right) \left(1 - \frac{p_2}{100}\right) \left(1 - \frac{p_3}{100}\right),$$

neboli $(100 + p_1)(100 + p_2)(100 + p_3) = (100 - p_1)(100 - p_2)(100 - p_3)$.
Úpravou této rovnice dostaneme

$$100^2(p_1 + p_2 + p_3) + p_1p_2p_3 = 0. \quad (1)$$

Jelikož 5^4 dělí první sčítanec, musí dělit i druhý, tedy součin $p_1p_2p_3$. Podle zadání platí $|p_i| < 100$, tedy každé z čísel p_i je dělitelné nejvýše druhou mocninou prvočísla 5.

Nejprve nechť dvě z čísel p_i jsou dělitelná 25, bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $p_1 = 25k_1$ a $p_2 = 25k_2$, kde $k_i \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$. Dosazením do rovnice (1) dostaneme po úpravě

$$p_3 = -\frac{400(k_1 + k_2)}{k_1k_2 + 16}.$$

Podle zadání je $p_3 \neq 0$, tedy $k_1 \neq -k_2$. Součet $k_1 + k_2$ je celé číslo mezi -6 a 6 , jmenovatel $k_1k_2 + 16$ uvedeného zlomku může nabývat hodnot $\{10, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 22, 25\}$ – vyloučili jsme hodnoty $16 - 9 = 5$, $16 - 4 = 12$ a $16 - 1 = 15$, které nastanou jen v případě $k_1 = -k_2$. Vidíme, že jmenovatelé 13, 14, 17, 19, 22 jsou dělitelné velkými prvočísly, která jsou nesoudělná s čitatelem, číslo p_3 tak jistě nebude celé. Zbývající hodnoty jmenovatelů rozebereme jednotlivě.

- Pokud je jmenovatel 10, potom $\{k_1, k_2\} \in \{\{-2; 3\}, \{2; -3\}\}$. V tomto případě je $p_3 = \pm 40$. Rovnice (1) tak má řešení

$$(-50; 75; -40), \quad (75; -50; 40), \quad (50; -75; 40), \quad (-75; 50; 40).$$

Vidíme, že první a třetí řešení jsou vzájemné reakce prvního a druhého obchodu, podobně druhé a čtvrté řešení. První a druhé resp. třetí a čtvrté řešení se liší jen pořadím změn. Ve všech případech tak bude výsledná cena zboží

$$N = A \left(1 - \frac{50}{100}\right) \left(1 + \frac{75}{100}\right) \left(1 - \frac{40}{100}\right) = A \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{21}{40}A.$$

- Jmenovatele 18 dostaneme v případě $\{k_1, k_2\} \in \{\{2; 1\}, \{-2; -1\}\}$, potom ovšem $p_3 = \pm 200/3$ není celé číslo.
- Jmenovatele 20 dostaneme v případě $\{k_1, k_2\} \in \{\{2; 2\}, \{-2; -2\}\}$. V tomto případě je $p_3 = \pm 80$ a rovnice (1) má řešení

$$(50; 50; -80), \quad (-50; -50; 80),$$

která jsou vzájemnou reakcí obchodů na sebe. V tomto případě je výsledná cena zboží

$$N = A \left(1 + \frac{50}{100}\right) \left(1 + \frac{50}{100}\right) \left(1 - \frac{80}{100}\right) = A \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{9}{20}A.$$

- Konečně, když jmenovatel je 25, platí $\{k_1, k_2\} \in \{\{3; 3\}, \{-3; -3\}\}$. Potom $p_3 = \pm 96$ a rovnice (1) má řešení

$$(75; 75; -96), \quad (-75; -75; 96),$$

která jsou vzájemnou reakcí obchodů na sebe. V tomto případě je výsledná cena zboží

$$N = A \left(1 + \frac{75}{100}\right) \left(1 + \frac{75}{100}\right) \left(1 - \frac{96}{100}\right) = A \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{25} = \frac{49}{400}A.$$

Získali jsme tři možná řešení, z nichž největší možné je $N = \frac{21}{40}A$.

Nyní rozebereme případ, kdy jedno z čísel p_i je dělitelné 5^2 a zbývající dvě jsou dělitelná 5. Bez újmy na obecnosti $p_1 = 25k_1$, $p_2 = 5k_2$, $p_3 = 5k_3$, kde $k_1 \in \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$, $k_2, k_3 \in \{-24, -23, \dots, 24\}$. Dosazením do rovnice (1) dostaneme

$$100^2(25k_1 + 5k_2 + 5k_3) + 5^4k_1k_2k_3 = 0,$$

což po úpravě dává

$$5 \cdot 16(5k_1 + k_2 + k_3) + k_1k_2k_3 = 0,$$

odkud vidíme, že jedno z čísel k_2, k_3 musí být dělitelné 5. Tuto situaci jsme však již řešili výše.

Nejvyšší možná dosažitelná cena tak v případě $k = 3$ je $N = \frac{21}{40}A$. Ta nastane, pokud jeden z obchodů bude ceny měnit v nějakém pořadí o 75, -50 a 40 procent, resp. o čísla k nim opačná.

Neúplná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Veronika Menšíková*, AG Praha 2, *Korunní* a *Bartosz Wieczorek*, II LO Tarnowskie Góry (Polsko)

Pavel Calábek

Didaktické hry ve výuce fyziky

LUCIE PECINOVÁ – MICHAELA KŘÍŽOVÁ

Přírodovědecká fakulta, Univerzita Hradec Králové

Úvod a motivace

Fyzika nepatří mezi oblíbené školní předměty. Pro řadu žáků je těžké pochopit fyzikální zákonitosti, pohrát si s matematikou ukrytou ve fyzice a celkově pohlížet na svět očima fyzika. Jednou z možností, jak zvýšit zájem dětí o fyziku, jsou didaktické hry.

Didaktická hra je pojem z pedagogiky a psychologie. Stejně jako jiné pojmy z této oblasti, ani didaktická hra nemá jednotnou definici. I přes to lze nalézt aspekty, které se v definicích opakují. Správná hra by měla být dobrovolná činnost, které se děti věnují kvůli činnosti jako takové. Měla by mít jasně stanovená pravidla a pokud bude dítě či žák chtít, může ji hrát opakovaně. Vše dříve uvedené by samozřejmě platilo i pro hru jako takovou. Didaktická hra musí mít navíc předem jasně stanovený didaktický cíl a obsah.

Didaktické hry aktivně zapojují žáky do učebního procesu a nabízejí jim zábavný způsob, jak si osvojit nové poznatky či upevnit již nabyté vědomosti. Hry mohou u žáků rozvíjet i řadu kompetencí – sociální a personální, komunikativní, digitální, kompetence k řešení problémů, k učení a další. Mohou sloužit k seznámení s novým kolektivem, ke sblížení se spolužáky. Proto jejich bohaté zapojení nacházíme na různých seznamovacích či adaptačních kurzech. Hry učí žáky práci s pravidly. Pravidla nás mohou omezovat, ale mohou nám i ukazovat dostatečně velký prostor pro svobodné rozhodování. Při hraní her dochází k rozvoji tzv. měkkých dovedností. Pomáhají žákům se zpracováním vlastních pocitů, se sebeovládáním. Prostřednictvím didaktických her si žáci rozvíjejí své organizační schopnosti, schopnosti práce v kolektivu, argumentace i přistupování na

kompromisy. Zároveň platí, že pokud si žáci nějakou svoji novou dovednost či znalost procvičí prostřednictvím didaktické hry, lépe si ji zapamatují. Tento fakt dokazuje i studie provedená na Univerzitě Illinois v Urbana Champaign [1].

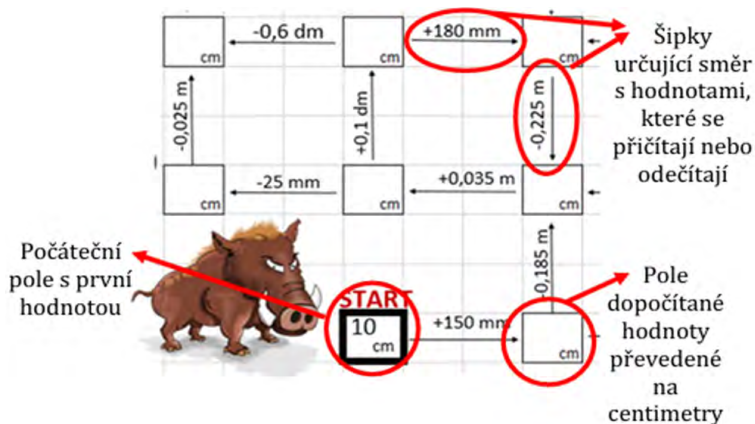
Na Univerzitě Mikoláše Koperníka v Polsku a Kazašské národní univerzitě v al-Farabi [2] taktéž zkoumali přínosy zapojení didaktických her do výuky. Zde už proběhl rozsáhlejší výzkum. V rámci studie vytvořili několik interaktivních aktivit, které poté zapojili do výuky. Získané výsledky potvrdily hned několik domněnek. Jakékoli hry ve škole rozšiřují pohled žáků na svět, pomáhají s rozvojem jejich inteligence a zvyšují zájem žáků o výuku i míru jejich zapojení do učebního procesu. Žáci, kteří si mohli upevnit své znalosti prostřednictvím didaktické hry, získali ve výsledném testu lepší výsledky. Na konci šetření položili aktéři výzkumu žákům otázku, zda věří v pozitivní přínos didaktických her. V kontrolní třídě, kde nebyla využita žádná aktivizující metoda, odpověděla více než polovina žáků negativně. Naopak třída, která měla možnost využít didaktické hry k upevnění látky, odpověděla z více jak 90 % pozitivně. Oba výše zmíněné výzkumy dokládají pozitivní dopady didaktických her při jejich zapojení do výuky.

Na podněcování žáků k experimentům pomocí různých stimulů se zaměřili odborníci z UK v Bratislavě [3]. Sestavili soubor čtyř různých stimulů a následně zkoumali názory pedagogů, kteří je aplikovali do výuky. Mezi vytvořenými stimuly byly pojmové komiksy, hraní rolí, únikové místnosti a fyzikální hra. Pojmové komiksy označili dotazovaní učitelé za nenáročné na přípravu oproti ostatním aktivitám. Únikové místnosti jsou náročné na přípravu, ale u žáků měly značný ohlas. Fyzikální hra je taktéž náročná na přípravu i na organizaci. Zde by mohly pomoci námi vytvořené práce.

V následujících částech je uveden popis tří didaktických her publikovaných v rámci bakalářské práce *Fyzikální hra jako motivační prvek ve výuce na základní škole* [4] nebo v rámci diplomové práce *Hry ve výuce fyziky na SŠ* [5]. Všechny podklady pro hraní níže uvedených her a šablony pro tvorbu her analogických jsou uvedeny v přílohách bakalářské, případně diplomové práce.

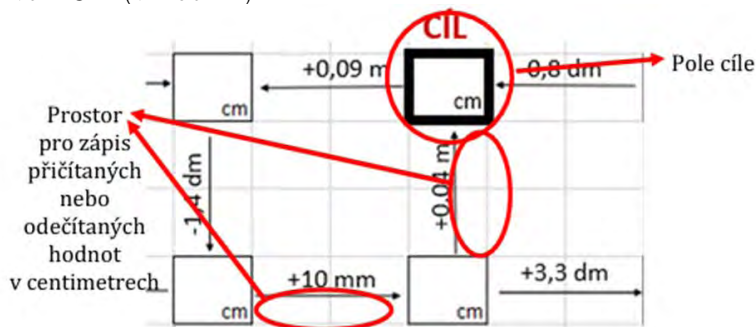
Divočákovo bludiště

Didaktická hra s názvem Divočákovo bludiště [4] je primárně určena pro žáky šestých ročníků základních škol. Jejím prostřednictvím si žáci procvičí převody jednotek délky, jejich sčítání i odčítání. Pro hru je potřebné tištěné zadání a psací potřeby. Hra zabere přibližně deset minut.



Obr. 1 Start bludiště

Vyučující si předem připraví potřebný počet natištěných tabulek se zadáním. Žáci hledají pomocí šipek cestu od startu do cíle. Během hledání cesty převádějí jednotky délky a přičítají je nebo odečítají od předchozí hodnoty. Počáteční pole (viz obr. 1) obsahuje hodnotu 10 cm. Od něj vede pouze jedna šipka, nad kterou je napsáno +150 mm. Žák si převede 150 mm na potřebné jednotky, tuto hodnotu si může zapsat pod šipku, a následně ji přičte. Získané číslo zapíše do dalšího rámečku. Analogicky postupuje u ostatních šipek. Pokud je před číselnou hodnotou znaménko mínus, tato hodnota se odečítá. Hra končí ve chvíli, kdy žák dopočítá hodnotu v poli s názvem CÍL (viz obr. 2).



Obr. 2 Cíl bludiště

Získaná výsledná hodnota udává přibližnou rychlost v km/h, kterou je schopno běžet prase divoké. Během hry žáci nevyplní všechna pole. Stačí

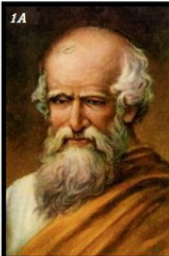
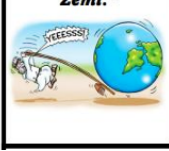
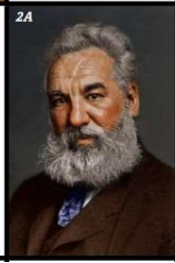
jen nejprve nalézt správnou cestu k poli CÍL a poté dopočítat hodnoty. Pro rychlejší jedince může mít pedagog připravené i další zadání, případně jim může zadat úkol, aby vytvořili obdobnou verzi bludiště. Tím si vyučující rozšíří svůj repertoár her.

Divočákovo bludiště vyzkoušeli žáci osmiletého gymnázia v Hradci Králové a následně i studenti učitelství Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové. Didaktická hra je zaujala, všichni se poctivě snažili dojít ke správné hodnotě. Na základě zpětné vazby od žáků jsme ještě zvýraznili pole START a CÍL.

V přílohách v rámci bakalářské práce [4] jsou uvedeny i šablony pro tvorbu analogických her. Divočákovo bludiště se dá různě modifikovat. Lze do něj dosadit jakékoli jednotky. Bakalářská práce dále obsahuje i o trochu složitější verzi pro převody jednotek, která již neobsahuje šipky, ale pouze čtverečky a žáci sami musí zkusit najít cestu a dopočítat se k výsledné hodnotě.

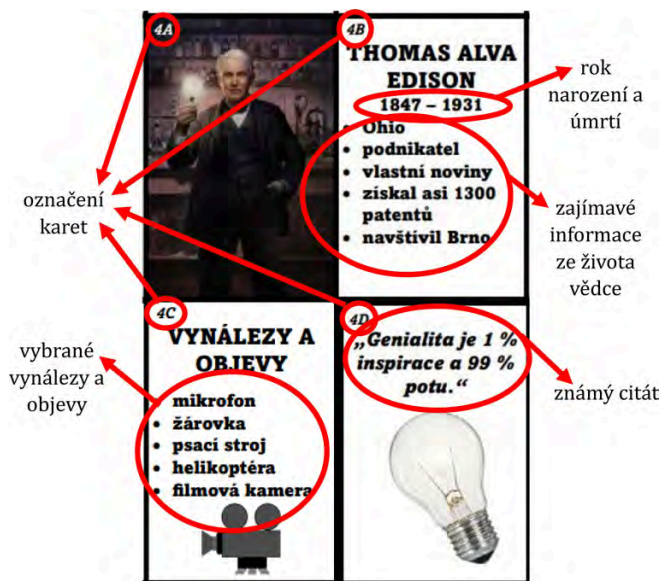
Kvarteto fyzici

V diplomové práci [5] uvádíme didaktickou hru Kvarteto fyzici. Tato hra není primárně určena jen pro některý z ročníků základních nebo středních škol. Naopak je zcela univerzální. Slouží k seznámení žáků s vybranými významnými fyziky – jejich životem, vynálezy, objevy i vybranými citáty.

1A 	1B ARCHIMÉDES Asi 287 př.n.l. - 212 př.n.l. • ze Syrakus (Sicílie) • praktické využití teoretických poznatků • příběh o koruně	1C VYNÁLEZY A OBJEVY • Archimédův zákon • válečné stroje • vysvětlení principu páky • přibližná hodnota čísla π 
1D <i>„Dejte mi pevný bod a pohnu Zemi.“</i> 	2A 	2B ALEXANDER GRAHAM BELL 1847 - 1922 • Edinburg (Skotsko) • studium hlasu • telefon vynalezen omylem

Obr. 3 Ukázka vzhledu kvarteta

Pedagog si předem vytiskne, zalaminuje a nastříhá kartičky. Jedna sada se skládá z celkem čtrnácti čtveřic (viz obr. 3 a 4). Každá karta má v levém horním rohu uvedené číslo od jedné do čtrnácti v kombinaci s písmenem A, B, C nebo D. Čtveřice karet s jedním číslem vždy náleží jedné z vybraných osobností fyziky. Písmeno A značí kartu s portrétem osobnosti. Karty s písmenem B obsahují jméno, rok narození i úmrtí a zajímavé informace ze života těchto osobností. Písmeno C označuje karty s výčtem vynálezů a objevů. Na posledních kartách je uveden jeden z citátů dané osobnosti.



Obr. 4 Popis částí karet kvarteta

Vyučující rozdělí žáky do skupinek po třech nebo čtyřech. Každá skupinka dostane jednu sadu karet, kterou řádně zamíchají. Předem se domluví, kdo začne (ten nejmenší, nejmladší, nejvyšší, ...). Všechny rozmíchané karty si žáci mezi sebe rozdají. Cílem je nasbírat co nejvíce čtveřic. První na tahu se jmenovitě ptá svého spolužáka či spolužačky, zda má kartu s určitým číslem a písmenem. Pokud tázaný hráč kartu má, předá ji začínajícímu hráči a ten se může ptát dál. Pokud tázaný kartu nemá, přebírá funkci tázajícího a ptá se. Na začátku hry je vhodné domluvit se, zda se žáci mohou ptát i na čtveřice, ze kterých nemají žádnou kartu. Hráč, který nasbírá všechny čtyři karty od jednoho čísla, položí čtveřici karet

stranou a ptá se dále. Pokud některý z hráčů v rámci své poslední otázky získá kartu do čtveřice, kterou odloží stranou, a v rukách mu žádná další karta nezbývá, přebírá funkci tázajícího poslední dotazovaný spoluhráč. Hra končí v momentě, kdy se všechny karty rozdělily na čtveřice. Vyhrává hráč s největším počtem čtveřic.

Po rozdělení všech karet do čtveřic si je žáci před sebe rozloží a začnou je pročitat. Vyučující si předem připraví dvě sady po deseti otázkách. První sada může obsahovat složitější dotazy, druhá by se měla skládat z opravdových perliček. Po chvíli začne pedagog pokládat otázky z prvního seznamu a žáci mohou odpovědi vyhledávat v kartách. Po zodpovězení všech deseti otázek, srovnají žáci kartičky na kupičku a vyučující je vybere. Žáci si následně na kousek papíru napíší čísla od jedné do deseti a vyučující pokládá otázky z druhé sady. Zde je potřeba volit jednodušší otázky, protože žáci už nemají přístup ke kartičkám.

Vytvořené kartičky mohou být využity různě. Vyučující je může použít k rozdělení žáků do skupin, může je dokonce zařadit i do výuky dějepisu. Kartičky taktéž mohou sloužit jako takový odrazový můstek pro tvorbu krátkého referátu na daného fyzika. Případně by bylo možné použít kartičku pro hru stylu „Hádej, kdo jsem“. Jeden z žáků by si vylosoval čtveřici karet týkající se jednoho z fyziků. Následně by se ho pokusil stručně představit ostatním, kteří by hádali jeho jméno.

Didaktickou hru Kvarteto fyzici vyzkoušeli celkem čtyři skupiny žáků. První dvě skupiny se skládaly z žáků devátých tříd gymnázia v Hradci Králové, třetí skupina z žáků třetích ročníků Gymnázia v Chrudimi a poslední skupinu tvořili studenti učitelství fyziky Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové. Hra žáky zaujala, což dokazují i některý výrok získané zpětnou vazbou. „Děkuji, aktivitu jsem si užil.“ nebo „Hra mě bavila, byla zajímavá.“ Naopak někteří z žáků měli i tipy na zlepšení. „Na kartičky bych nepsala čísla (museli bychom uhodnout/vědět, co k čemu patří.“ nebo „Možná trochu více fyziky než zajímavostí ze života.“ Úpravy didaktické hry by provedlo přibližně 20 % dotazovaných. Většina potřebných úprav upozorňovala na lepší zapojení informací z kartiček.

Detektivka

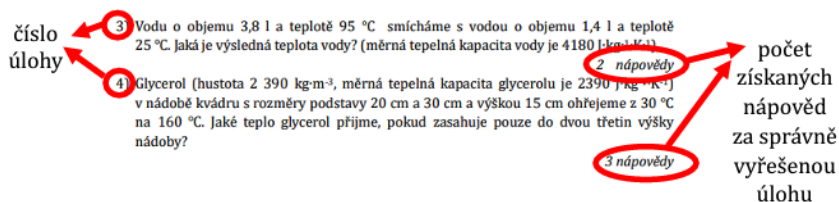
Didaktická hra Detektivka je uvedena v diplomové práci [5]. Opět se jedná o poměrně univerzální hru, která by se dala zapojit i do výuky jiných předmětů. Záleží jen na pedagogovi, za jaké úkoly bude rozdávát nápovědy. Časová dotace didaktické hry se odvíjí od počtu a složitosti jednotlivých úkolů.

Vyučující si předem natiskne, zalaminuje a rozstříhá indicie potřebné pro řešení vraždy (viz obr. 5). Jedna sada indicíí obsahuje 30 kartiček.

Paní Blahovská, bohatá stará dáma, měla tři syny, Jana, Dana a Josefa.	Do vily vstoupil zloděj ozbrojený nožem.	Slečna Sýkorová našla paní Blahovskou ve 10:00 v knihovně s řeznou ranou v paži.
--	--	---

Obr. 5 Ukázka indicíí pro řešení vraždy paní Blahovské

V diplomové práci jsou uvedeny dvě sady indicíí pro řešení dvou vražd. Indicie pro řešení vraždy paní Blahovské jsou volně k dispozici na internetových stránkách [6]. Druhá sada se nalézá v knize Efektivní výukové nástroje pro učitele [7]. Je vhodné umístit jednu sadu indicíí do jedné obálky. Kromě indicíí si ještě vyučující připraví soubor úloh (viz obr. 6), za jejichž řešení může skupinka žáků sbírat indicie. Ke každé úloze přiřadí vyučující určitý počet indicíí podle její náročnosti. Vyučující může vytvořit soubor úloh, jejímž řešením získají žáci více jak 30 indicíí (31 a více). V tomto případě si mohou žáci vybrat, které úlohy vyřeší. Naopak lze vytvořit i soubor, za který žáci získají právě 30 indicíí. Pro jejich získání musí vyřešit všechny úlohy. Některým jedincům může stačit k vyřešení vraždy jen část indicíí.



Obr. 6 Ukázka možných úloh

Pedagog rozdělí žáky do skupin po třech či čtyřech. K rozdělení může využít předchozí kvarteto. Každá skupinka dostane soubor úloh, u kterých je uveden i počet indicíí. Žáci řeší zadané úlohy. Se správnými výsledky poté chodí k vyučujícímu, který je zkontroluje. Pokud je řešení správné, vylosuje si žák příslušný počet indicíí z přiřazené obálky. Obálky mohou být rozlišeny barevně, číselně nebo si jednotlivé skupinky vytvoří názvy týmů a ty se zapíše na obálky. Následně se žák s indicii vrátí ke své

skupině, kde si indicie rozloží a pročtou. Cílem je vyřešit vraždu. Pročítáním kartiček, pospojováním informací a logickým uvažováním hledají skupinky odpovědi na otázky – Kdo byl zavražděn? Kdo ho/ji zavraždil? Čím byla oběť zavražděna? Kdy se to přibližně stalo? Kde se to stalo? Jaký byl motiv vraždy? Řešením úloh získávají žáci další a další indicie. Pokud skupinka žáků získala odpovědi na všechny předložené otázky, zkusí svoji hypotézu předložit učiteli. Učitel zkontroluje odpovědi a sdělí žákům počet chybně vyvozených závěrů. Následně mají žáci možnost opravy. Správné řešení by mělo zůstat tajné, dokud vraždu nevyřeší všechny týmy nebo dokud vyučující neukončí aktivitu.

Detektivku vyzkoušelo hned několik různých skupin žáků i studentů. Na Gymnáziu Josefa Ressela v Chrudimi vyzkoušeli didaktickou hru žáci osmého ročníku a dvou prvních ročníků. Z Biskupského gymnázia v Hradci Králové si detektivku zahráli žáci devátých ročníků. V rámci přípravy budoucích učitelů fyziky vyzkoušeli danou hru i studenti Přírodovědecké fakulty Univerzity Hradec Králové. Ze získané zpětné vazby plyne značný zájem žáků i budoucích učitelů o řešení vraždy. Sami žáci kladně ohodnotili i nutnost řešení úloh. Téměř všichni zapojení počítali aktivně a se zájmem. Uvedeme zde několik výroků samotných žáků. „Hra byla velmi dobře vymyšlená, moc jsem si ji užila.“ nebo „Nic bych nezměnila, možná jen některé úlohy byly trochu složitější.“ či „Hra mě bavila a myslím, že by jsme to měli dělat častěji. Vyhovovalo mi to.“

Shrnutí

Didaktické hry jsou zajímavou možností, jak obohatit výuku a jak se pokusit žáky více zaujmout. Mohou ovlivnit i žákův postoj k vyučovanému předmětu, což dokazují i výroky získané zpětnou vazbou. Didaktické hry aktivizují žáky. Jejich prostřednictvím se do výuky více zapojí. Podle našich zkušeností z pedagogické praxe pomáhají didaktické hry i s dlouhodobějším udržením pozornosti.

Didaktickým hrám z fyziky se věnujeme již od roku 2020 a rozhodně máme v plánu v této tematice pokračovat i nadále. Věříme, že některé vytvořené hry mohou usnadnit pedagogům přípravu na výuku, případně je inspirovat k tvorbě vlastních zajímavých aktivit.

Literatura

- [1] Vörös, A. I. V., Sárközi, Z.: Physics escape room as an educational tool [online]. [cit. 2025-01-26]. AIP Conference Proceedings, roč. 1916 (2017), č. 1, s. 050002-1 – 050002-6. Dostupné z: <https://doi.org/10.1063/1.5017455>.

- [2] *Akimkhanova, Z., Turekhanova, K., Karwasz, P. G.*: Interactive Games and Plays in Teaching Physics and Astronomy [online]. [cit. 2025-01-26]. Education sciences, roč. 13 (2023), č. 4, 393. Dostupné z: <https://doi.org/10.3390/educsci13040393>.
- [3] *Sukeľová, T., Velmovská, K.*: Stimulácia žiakov k experimentálnej činnosti prostredníctvom učebných aktivít. Matematika–Fyzika–Informatika, roč. 33 (2024), č. 3, s. 190–197. Dostupné z: <https://www.mfi.upol.cz/index.php/mfi/article/view/842>.
- [4] *Habiňáková, L.*: Fyzikální hra jako motivační prvek ve výuce na základní škole. Bakalářská práce. Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta, Hradec Králové, 2022. Dostupné z: <https://theses.cz/id/9soucs/STAG98934.pdf>.
- [5] *Habiňáková, L.*: Hry ve výuce fyziky na SŠ. Diplomová práce. Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta, Hradec Králové, 2024. Dostupné z: <https://theses.cz/id/s8168n/>.
- [6] *Yumpu.com*: Zahrajte si na detektivy – shromážděte všechny indicie a vyřešte... [online]. [cit. 2025-01-26]. Dostupné z: <https://www.yumpu.com/xx/document/view/19961036/zahrajte-si-na-detektivy-shromazdete-vsechny-indicie-a-vyreste->.
- [7] *Ginnis, P.*: Efektivní výukové nástroje pro učitele: strategie pro zvýšení úspěšnosti každého žáka. EDUkační LABoratoř a publishED, Praha, 2021.

Divergentní úlohy a jejich aplikace ve výuce termiky na ZŠ

GABRIELA KAUFNEROVÁ

Předagogická fakulta ZČU, Plzeň

Úvod: divergentní úlohy

Ve škole se žáci setkávají s kladením důrazu na paměť a konvergentní úlohy spíše než na úlohy divergentní, jež přitom lze považovat za efektivní nástroj, pomáhající žákům rozvíjet srovnávací schopnosti, tvořivé myšlení, nápaditost a zlepšit jejich vztah k předmětu fyzika [1]. Důvodem, proč

se žáci setkávají při vzdělávání s divergentními úlohami jen v malé míře, může být i to, že v současné době jsou tyto úlohy méně popsány v odborné literatuře.

Divergentní úlohy lze zařadit do vysoce otevřených úloh, protože se vyznačují velkým počtem řešení a při jejich řešení je zapotřebí být nápaditý, důvtipný či vynalézavý – jinými slovy tvořivý (neotřelý, nekonvenční a divergentně myslící) [2]. V angličtině se uvedené vlastnosti označují termínem „thinking outside the box“.

Jelikož z informací, které jsou obsažené v zadáních divergentních úloh, nelze vyčíst konečný výsledek, jsou žáci přinuceni hledat, objevovat a vytvářet alternativní řešení. U těchto úloh je kladen velký důraz na to, jak jsou žáci originální a jaká je různorodost či rozmanitost jejich řešení [3]. Pro docílení maximální tvořivé činnosti u žáků při řešení divergentních úloh je zapotřebí rozvíjet jejich divergentní myšlení. V příspěvku shrnujeme zkušenosti autorky s divergentními úlohami v kontextu výuky termiky na ZŠ.

Ve fyzice lze tyto úlohy využívat především při upevňování znalostí učiva, ale také i při probírání nového učivo či zjišťování žákovských znalostí. Divergentní úlohy autorka příspěvku během své výuky uplatnila v různých fázích výuky: při expozici, aplikaci i fixaci učiva, při diagnóze a v domácí přípravě v podobě domácích úloh. Jejich konkrétní použití závisí na obsahu probíraného tématu, na jeho časovém harmonogramu a na úrovni získaných znalostí jednotlivých žáků.

1. Expozice nového učiva

Při osvojování nového učiva lze používat divergentní úlohy zadávané obrázkem spolu s demonstračním či žákovským pokusem. Mezi takovéto úlohy mohou patřit i úlohy typu „black box“ (tzv. černá skříňka). Jedná se o úlohy, ve kterých je část zadání prázdná. Pro její vyřešení je zapotřebí vymyslet zařízení, které zapadá do prázdného místa tak, že je vše správně.

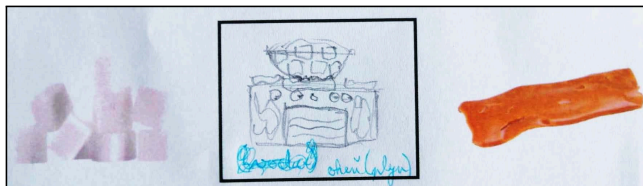
Příklad: přeměna cukru na karamel

Zadání: Jakým způsobem bys přeměnil(a) cukr na karamel?

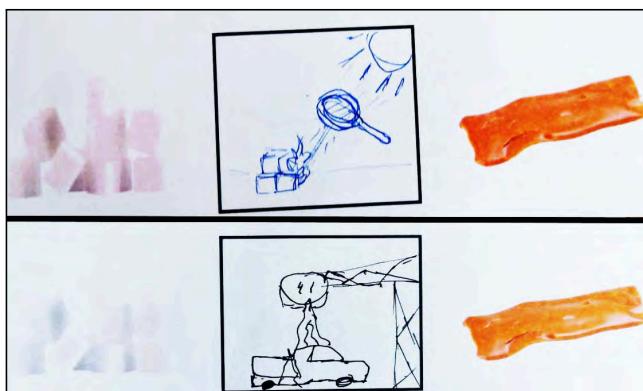
Tato úloha byla zadána žákům v hodině na začátku expozice tématu tání a tuhnutí. V komentáři při zadávání úlohy bylo požadováno, aby vymysleli originální způsob, pomocí kterého by přeměnili cukr na karamel. Jelikož většina žáků si dokáže situaci představit, k zadané úloze nebyl proveden ani demonstrační, ani žákovský pokus.

I když byli žáci při zadávání této úlohy instruováni, aby vymysleli originální způsob, jak přeměnit cukr na karamel, tak většinou kreslili pánvičku

na sporáku či ohni podobně jako na obr. 1. Několik jedinců vymyslelo originální řešení; na obr. 2 chtěl jeden žák přeměnit cukr na karamel pomocí lupy a slunečních paprsků a druhý k tomu použil hořící auto na vrakovišti a jeřáb, který má na konci ramene desku, na níž je položený cukr. První řešení s lupou lze považovat za originální, ale druhé řešení představuje analogii sporáku s pánvičkou.



Obr. 1 Ukázka řešení úlohy na tání a tuhnutí (expozice tématu)



Obr. 2 Ukázka kresby žáků na téma tání a tuhnutí (expozice tématu)

V rámci expozice lze také zadávat žákům divergentní úlohy, ve kterých mají za úkol nakreslit obrázek na dané téma či problematiku probíraného učiva.

Příklad: jednotky při tepelné výměně

Zadání: Nakresli do jednoho obrázku situace, kdy budou tělesa vydávat teplo v hodnotách MJ, kJ, J a mJ.

Na hodině věnované jednotkám tepla byla zadána tato úloha. Cílem bylo zjistit, zda mají žáci správnou představu o velikosti jednotek tepla. Úloha

se zdá na první pohled lehká, ale pro její vyřešení je zapotřebí se zamyslet a uvědomit si i řádové velikosti jednotek tepla v různých případech.

Při řešení úlohy bylo patrné, že si žáci věděli rady, co nakreslit pro jednotky J a kJ. Většinou kreslili pro jednotku joule hrnek s čajem, kávou či teplou vodou a pro jednotku kJ oheň v různých podobách. Žáci při malování obrázků pro jednotky MJ a mJ dosti váhali, často gumovali a překreslovali jej. Ukázkou zdařilé práce žáka vidíme na obr. 3.



Obr. 3 Kresba na téma jednotky při tepelné výměně (expoziční)

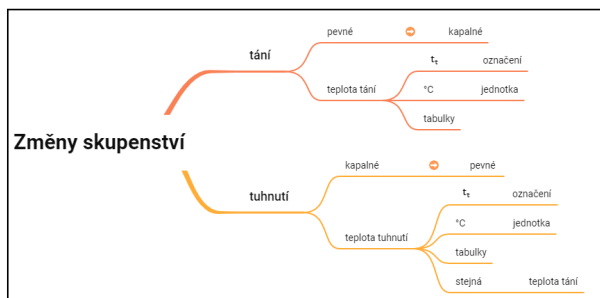
Divergentní úlohy, v nichž se kreslí obrázky, lze při probírání nového učiva používat také současně s myšlenkovými mapami, jež nemusí obsahovat pouze slova a větve, ale mohou se v nich nacházet obrázky a symboly. Jejich vzájemné propojení příjemně oživuje probírání nového učiva.

Příklad: myšlenková mapa na téma tání a tuhnutí

Zadání: Nakresli obrázky na tání a tuhnutí, se kterými se setkáváš ve svém životě, do myšlenkové mapy.

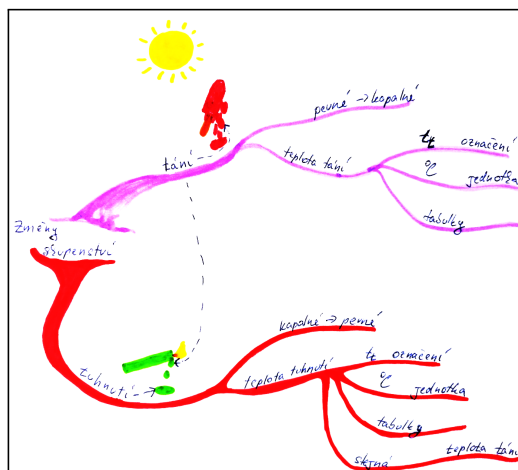
Nejprve byly s žáky probírány změny skupenství tání a tuhnutí a poznámky na tabuli zapsány formou myšlenkové mapy (obr. 4), kterou si žáci současně přepisovali do sešitu. Poté byl zadán úkol, aby do již vytvořené mapy nakreslili obrázky příkladů tání a tuhnutí, s nimiž se setkávají ve svém životě. Poznámky zapsané v sešitě tímto způsobem pomáhají se v mapě snadněji orientovat, vnímat mapu jako celek, zvýraznit důležité pojmy, snadněji propojovat související pojmy a zapamatovat si je. Může to mít dobrý vliv na žákovo zapamatování nového učiva, rychlejší propo-

jování nového učiva se stávajícími vědomostmi a lepší schopnosti aplikace při dalším použití.



Obr. 4 Myšlenková mapa na téma tání a tuhnutí k zadání úlohy (expoziice)

Žáci nejčastěji kreslili hořící svíčku, tající nanuk, sněhuláka a kostku ledu. V ukázce na obr. 5 vidíme práci žáka, který nakreslil tající nanuk (tání) a nakloněnou hořící svíčku s kapajícím voskem (tuhnutí). Je patrné, že žákovi po nakreslení obrázků došlo, že tání lze pozorovat i u nakloněné hořící svíčky, proto do myšlenkové mapy doplnil šipky pro vysvětlení, kde se v obrázcích příslušné změny skupenství nachází.



Obr. 5 Příklad myšlenkové mapy na téma tání a tuhnutí vytvořené žákem (expoziice)

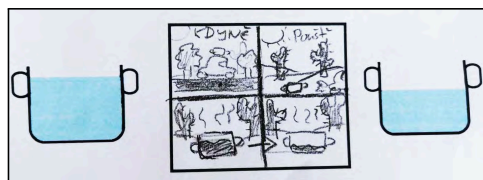
2. Aplikace a fixace učiva

Úlohy typu „black box“ (tzv. černá skříňka) lze také používat při procvičování a upevňování učiva.

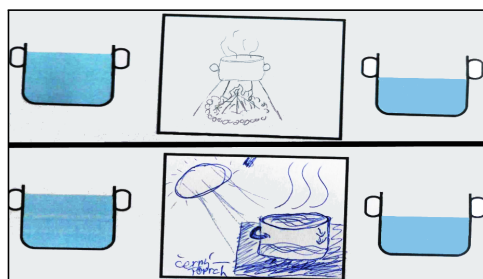
Příklad: vypařování vody

Zadání: Jak efektivně bys odebral(a) vodu z hrnce, pokud by ses nemohl(a) vody ničím dotknout.

Úloha byla zadána při opakování učiva na téma: na čem závisí rychlost vypařování kapalin. Ve většině případů žáci malovali samotný hrnec či hrnec se sluncem. Na otázku v diskusi „Proč namalovali pouze samotný hrnec?“ odpověděli, že se přece voda vypařuje pořád a stačí jenom počkat, až se jí vypaří potřebné množství. Na obr. 6 se nachází práce žáka, který se rozhodl hrnec převézt na poušť, protože je tam velké teplo a dané množství vody se vypaří rychleji. Na obr. 7 vidíme další dvě zajímavé práce, v nichž se žáci snažili docílit rychlejšího způsobu vypaření potřebné vody; obzvláště zajímavé řešení představuje nápad postavit hrnec na černou plochu. Na otázku, co ho vedlo k tomu, že postavil hrnec na černou plochu, žák odpověděl, že černá barva absorbuje nejvíc tepla ze slunečních paprsků a že díky tomu dojde k rychlejšímu ohřevu vody a k jejímu vypařování.



Obr. 6 Ukázka kresby žáka na téma vypařování (aplikace a fixace)

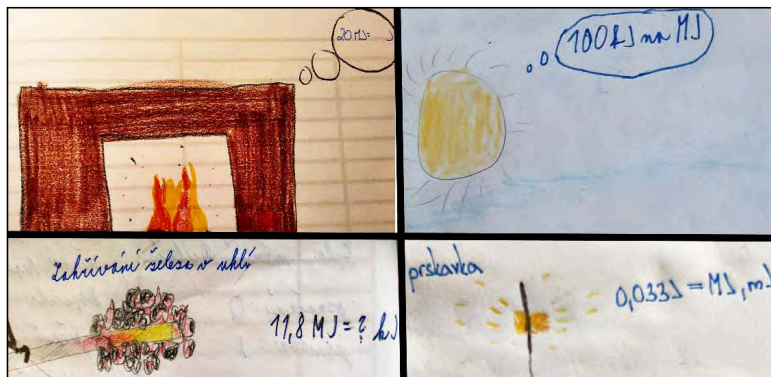


Obr. 7 Ukázka kresby žáka na téma vypařování (aplikace a fixace)

Příklad: převody jednotek

Zadání: Nakresli obrázek na převody jednotek MJ, kJ, J a mJ.

Úloha byla žákům na hodině zadána pouze jednou, aby pochopili způsob její tvorby. Na dalších hodinách jim obdobné úlohy byly zadávány už jen za domácí úkol, který odevzdávali v elektronické podobě přes Microsoft Teams. Takto vytvořené úlohy byly využity v dalších hodinách při opakování učiva.



Obr. 8 Ukázka kreseb žáků na téma jednotky tepla (domácí úloha)

V hodinách žáky bavilo řešit úlohy na převody zadávané pomocí obrázku. Odpovídala tomu i míra odevzdaných domácích úloh. Postupem času vymýšleli propracovanější a přesnější úlohy, kdy i uvedené hodnoty odpovídaly přibližně nakreslenému obrázku (obr. 8).

Ve fázi aplikace a fixace učiva se ve fyzice lze nejčastěji setkat s procvičovacími úlohami kvantitativního charakteru, které žáci nemají příliš v oblibě. Tyto úlohy jsou řešeny jedním způsobem, u kterého žáci pouze aplikují stejný postup řešení s různými čísly. Procvičovací úlohy lze uchopit a předělat tak, aby během jejich řešení žáci tvořivě mysleli. Procvičovací úlohy lze zadávat [4]:

- symboly a čísly s vytvořením zadání příkladu;
- výsledkem s vytvořením zadání příkladu;
- vytvoření zadání příkladu na dané téma.

Při fixaci učiva je vhodné použít ze začátku procvičovací úlohy, které jsou zadávány pomocí symbolů a čísel. Od žáků se při řešení těchto úloh

žádá, aby je vypočítali a vymysleli k nim vhodné zadání ve slovní či obrázkové podobě. V počáteční fázi je vhodné, aby první takovou úlohu vyřešil učitel společně s žáky, aby získali správnou představu o způsobu řešení. Tyto úlohy se dají velice snadno začlenit do vyučovací hodiny a do jisté míry i jí oživit.

Příklad: vytvoření zadání k hodnotám 1

Zadání: Vypočítej zadanou úlohu a vytvoř k ní slovní či obrázkové zadání.
 $m = 8 \text{ kg}$, $l_t = 289 \text{ kJ/kg}$, $L_t = ? \text{ J}$

Úloha byla žákům zadána po probrání tématu skupenského tepla tání a vypočítání několika klasických procvičovacích úloh kvantitativního charakteru. Zadaná úloha patří do kategorie procvičovacích úloh zadávaných pomocí symbolů a čísel. Při řešení si žáci museli nejprve uvědomit, jakou fyzikální veličinu mají vypočítat, jaký vztah potřebují pro její výpočet a zda mají v zadání všechny potřebné informace k jejímu výpočtu. V zadání měli uvedenou hodnotu hmotnosti a měrného skupenského tepla tání pro železo a otázku na hodnotu skupenského tepla tání. Pro správné řešení bylo zapotřebí nejprve převést jednotky měrného skupenského tepla tání na základní jednotky a uvědomit si, jaké mají jednotlivé veličiny vlastnosti potřebné k výpočtu. Po vypočtení úlohy se mohli žáci věnovat tvorbě zadání. Kreativnější z nich tak museli najít v tabulkách látku, které by odpovídala hodnota měrného skupenského tání v zadání.

Ukázky zadání navržených žáky:

- Vypočítej skupenské teplo tání pro 8 kg a 28 kJ/kg.
- 8 kg železa. Jaké je jeho skupenské teplo tání?¹⁾
- 8 kg železné tyče. Jaké je jeho skupenské teplo tání?
- 8 kg železný robot spadne do sopky. Jak velké skupenské teplo se uvolní?
- Pepa se rozhodl roztavit svojí železnou sochu. Jak velké skupenské teplo se při tom uvolní?

Při plnění této úlohy žáci nejčastěji uváděli první tři slovní zadání, protože se s ním již setkali při řešení předchozích procvičovacích úloh kvantitativního charakteru. Mezi zajímavější zadání patří poslední dvě slovní zadání nebo zadání pomocí obrázku.

¹⁾Z formálního hlediska by zadání úlohy a věta obecně neměla začínat číslicí. Zde však zachováváme podobu uvedenou žáky bez dalších úprav.

Příklad: vytvoření zadání hodnotám 2

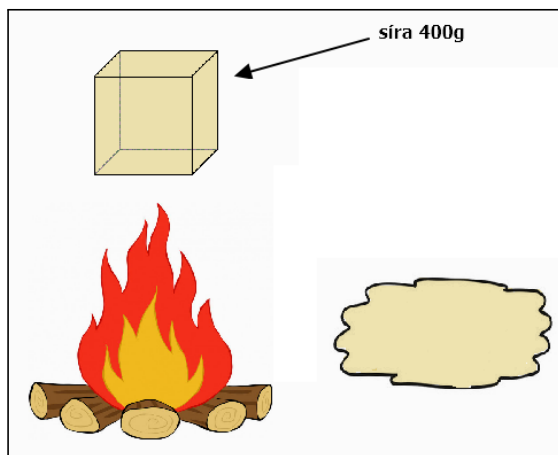
Zadání: Vypočítej zadanou úlohu a vytvoř k ní slovní či obrázkové zadání.
Síra: $m = 400\text{ g}$, $L_t = ?\text{ J}$.

Tato úloha patří k procvičovacím úlohám, které se zadávají pomocí symbolů a čísel jako předchozí úloha, ale je trochu těžší, protože žáci musejí pro výpočet skupenského tepla tání použít tabulky a vyhledat v nich hodnotu měrného skupenského tepla tání síry. Zadána byla ke konci hodiny, a pokud ji žáci nestihli vyřešit, měli ji dokončit za domácí úkol.

Zadání úlohy lze upravit tak, že se v něm ponechá pouze hmotnost a otázka na hodnotu skupenského tepla tání. Vytvoří se tím větší prostor pro tvořivou činnost žáků, kdy si mohou sami určit, pro jakou látku provedou výpočet a vytvoří slovní či obrázkové zadání.

Ukázky zadání navržených žáky:

- Vypočítej skupenské teplo tání pro 400 g síry.
- Kolik tepla se spotřebuje při roztátí 400 g kostky síry?
- Lord Voldemort chystá smrtící lektvar ve své komnatě. Na jeho přípravu potřebuje 400 g síry. Pro vytvoření dobrého lektvaru je zapotřebí síru zahřát na teplotu tání, aby roztála. Urči, kolik tepla se při tom spotřebuje.



Obr. 9 Ukázka zadání úlohy na skupenské teplo tání vytvořené v rámci domácího úkolu

V tvorbě žáků lze nalézt i velmi pěkné práce jako jsou slovní úloha s Voldemortem a úloha zadaná obrázkem (obr. 9), které žáci vytvořili doma. Následující vyučovací hodinu našly tyto úlohy využití při opakování učiva, když žáci přestávali být pozorní; ve třídě pak byla zaznamenána zvýšená aktivní činnost žáků.

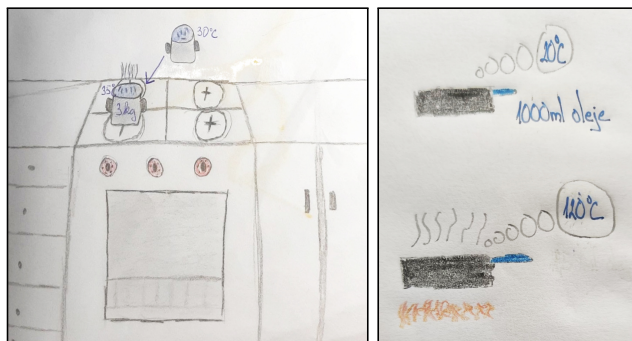
Úlohy lze zadávat také zcela otevřené či omezené konkrétním výsledkem. Otevřené úlohy jsou v podstatě procvičovací úlohy ve stylu: „Vytvoř slovní či obrázkové zadání na výpočet...“. Jsou velmi volné a dávají žákům prostor k tvořivé činnosti, ale při jejich tvorbě je zapotřebí věnovat pozornost pracovnímu nasazení žáků v případě, když by si chtěli práci usnadňovat. Úlohy omezené konkrétním výsledkem spadají do procvičovacích úloh, např.: „Vytvoř slovní či obrázkové zadání na výpočet, aby výsledek byl...“. Tyto úlohy umožňují žákům rozvíjet jejich představu o jednotlivých fyzikálních veličinách a jejich velikostech.

Otevřené a omezené úlohy autorka žákům vždy zadávala pouze jednou pro konkrétní výpočet a následně je žáci dostávali za domácí úkol, aby si je mohli na následujících hodinách počítat.

Příklad: vytvoření zadání na výpočet přijatého tepla

Zadání: Vytvoř slovní či obrázkové zadání na výpočet přijatého tepla.

Úloha byla zadána po vypočítání několika klasických procvičovacích úloh v hodině jako domácí úloha, protože se v praxi osvědčilo, že takovéto úlohy žáci vypracovávají lépe během domácí přípravy.



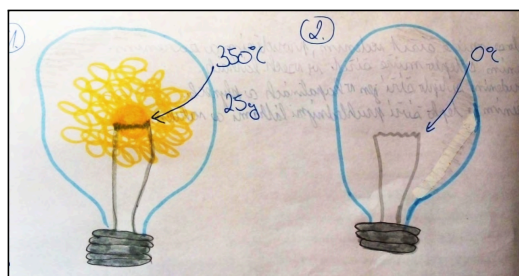
Obr. 10 Ukázky zadání vytvořených žáky na téma přijaté teplo v rámci domácího cvičení

Na obr. 10 vidíme dva příklady žákovských prací na výpočet přijatého tepla. Kresba vpravo byla vyžita učitelem v hodině při závěrečném opako-

vání výpočtů přijatého a odevzdaného tepla. Protože se jedná o složitější úlohu, řešil ji společně s žáky. Na začátku si žáci zvolili zapisovatele, který šel k tabuli zaznamenávat potřebné informace k řešení. Vypsali si všechny informace, které byly zadány obrázkem, dále si dohledali měrnou tepelnou kapacitu oleje v tabulkách. Napsali si vztah pro výpočet přijatého tepla a začali diskutovat, jak vypočítat hmotnost oleje. Pár žáků si vzpomnělo na souvislost mezi hmotností, objemem a hustotou a uvědomili si, že při známém objemu a hustotě dané látky lze hmotnost vypočítat; vztah i hodnotu hustoty oleje mohou dohledat v tabulkách. Učitel v průběhu řešení pouze usměrňoval postup a nápady žáků. Organizaci a způsob řešení takové obrázkové úlohy je vždy vhodné přizpůsobit konkrétní třídě a aktuální atmosféře v hodině.

Příklad: vytvoření zadání na výpočet odevzdaného tepla

Zadání: Vytvoř slovní či obrázkové zadání na výpočet odevzdaného tepla.



Obr. 11 Ukázka zadání úlohy na výpočet odevzdaného tepla vytvořeného v rámci domácí úlohy

Ukázky zadání navržených žáky:

- Ráno si Zdeňka ke snídani zalije čaj horkou vodou z konvice do 250 ml hrníčku. Po čase jí čaj zchladne na 25°C . Kolik tepla odevzdá voda v hrníčku svému okolí?
- Jana si napustila večer do vany 80 l horké vody, která měla teplotu 50°C . V průběhu koupání teplota vody klesla na 42°C . Kolik tepla odevzdala voda svému okolí?

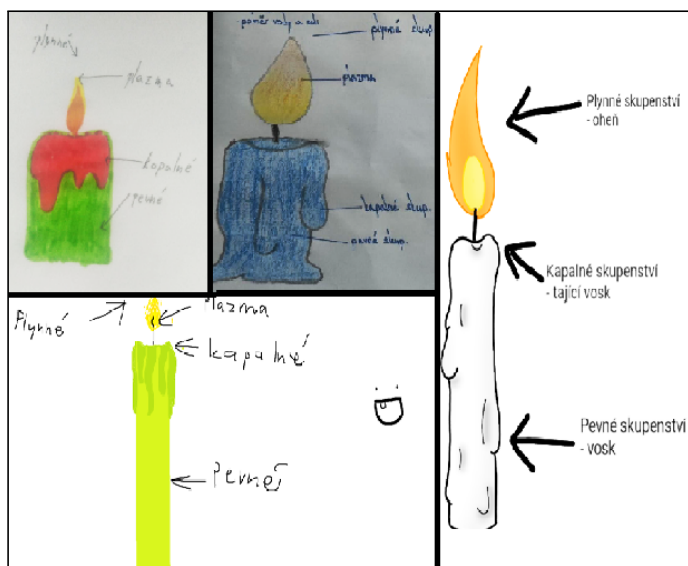
Slovní zadání s čajem nebo horkou vodou bylo velice časté, objevovalo se i v obrázkové podobě. Obrázkové zadání s žárovkou (11) je zajímavé,

protože žáci se musí zamyslet nad tím, z čeho je vlákno žárovky vyrobeno, než začnou počítat. Úloha byla zadána při opakování výpočtů odevzdaného tepla na následující hodině, když žáci pracovali ve skupinách. Po prostudování zadání byli žáci zaražení a začali diskutovat o tom, z čeho je vlákno žárovky; bylo potěšující, že třetina z nich věděla, že je z wolframu. Při diskusi se přirozeně objevil i dotaz, zda si mohou dohledat informaci na internetu. Při procvičování úloh kvantitativního charakteru žáky nejvíce bavilo řešit obrázkové úlohy, které si sami vytvořili; čím více s nimi pracovali, tím propracovanější je i vytvářeli.

Ve fázích aplikace a fixace učiva se mohou také používat procvičovací úlohy kvalitativního charakteru. Tyto úlohy jsou v podstatě divergentní úlohy, které slouží k upevňování a prohlubování teoretických znalostí probíraného učiva.

Příklad: vyznačení různých skupenství látek

Zadání: Nakresli svíčku a vyznač na ní všechna skupenství, které znáš.



Obr. 12 Ukázka úlohy na opakování skupenství látek (aplikace a fixace)

Úloha byla zadána žákům ve fázi fixace na hodině věnované opakování tématu skupenství látek. Z obr. 12 je patrné, že se žáci při plnění úlohy

snažili. U zelené svíčky tvořené na počítači je dokonce namalovaný smajlík, který vyjadřuje v rámci zavedeného formativního hodnocení maximální nadšení a spokojenost žáka se svou prací na úloze.

Příklad: změna skupenství látek

Zadání: Nakresli změnu skupenství, se kterou se setkáváš ve svém životě.

Úlohu byla zadána ve fázi aplikace na závěr hodiny a následně ji žáci dostali i za domácí úlohu. Na obr. 13 vidíme dvě práce žáků. Úloha na změny skupenství zřejmě bavila, protože ji na další vyučovací hodině odevzdali téměř všichni.



Obr. 13 Ukázka úlohy na změny skupenství látek (aplikace a fixace)

Ve fázi aplikace a fixace učiva se mohou aplikovat různé divergentní úlohy. Ve většině z nich se kreslí obrázek na dané téma, což může kladně motivovat i žáky, kteří jsou spíše zaměřeni na humanitní či umělecké předměty, protože mohou při práci ve fyzice dosáhnout vnitřního uspokojení a uplatnit svou tvořivost.

3. Diagnóza

Divergentní úlohy lze používat při ověřování žákovských znalostí ve fázi diagnózy, ale jejich použití i hodnocení je poměrně obtížné. Před použitím divergentní úlohy v této fázi bylo nutné vybrat vhodnou úlohu pro ověření žákovských znalostí a stanovit si u ní relevantní způsob hodnocení, protože hodnocení známkou je schopné pouze popsat, do jaké míry žáci splnili zadanou úlohu, a protože by hodnocení známkou odvádělo žáky od tvořivé činnosti při řešení divergentní úlohy. Vybráno bylo bodové hodnocení spolu s individuálním slovním hodnocením a formativním hodnocením jako nejvhodnější způsob. Umožnil nejenom bodově ohodnotit, do jaké míry je

správně splněná zadaná úloha, ale také popsat její originalitu a propracovanost. Po probrání daného tematického celku byly pomocí stanoveného klíče nasbírané body přepočteny žáků na známku, která byla zahrnuta do klasifikace. Individuální slovní hodnocení a formativní hodnocení dávalo žákům zpětnou vazbu, jak moc byla vyučující spokojená s jejich odvedenou prací.

S kritérii bodového hodnocení, individuálního slovního hodnocení a formativního hodnocení stanovenými na začátku výzkumu, byli žáci seznámeni na první vyučovací hodině v 8. třídě. Tato stanovená kritéria pomáhala k rozvoji tvořivé činnosti.

Příklad: obrázek k zadání na výpočet odevzdaného tepla

Zadání: Vytvoř obrázkové zadání na výpočet odevzdaného tepla a vypočítej je.

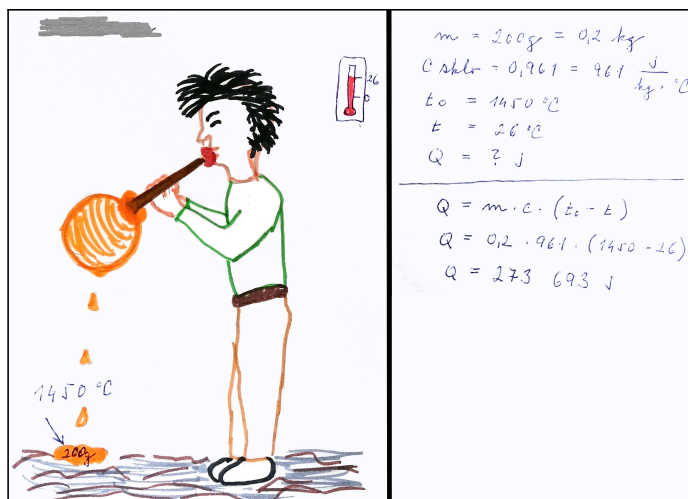
Úloha byla součástí hodiny na téma přenos tepla prouděním a zářením při ověřování znalostí o teple. Úkolem bylo namalovat obrázek a potom vypočítat úlohu s obrázkem spojenou. Úloha byla bodově ohodnocena podle následujících kritérií:

- splněno (max. 1 bod) – obrázek odpovídal zadané úloze;
- originalita (max. 2 body) – v jaké míře se obrázek vyskytoval u ostatních žáků a setkali se s podobným obrázkem v předchozích hodinách;
- propracovanost (max. 2 body) – jak detailně byl obrázek namalovaný a do jaké míry obsahoval potřebné údaje pro výpočet odevzdaného tepla;
- správnost (max. 4 body) – zda byla úloha zadaná obrázkem správně vypočtena (1 bod za zápis, 1 bod za dohledání potřebných informací v tabulkách, 1 bod za správný vztah a 1 bod za výpočet).

Za úlohu tak mohli žáci získat maximálně 9 bodů.

Ukázka žákem vytvořené a vyřešené úlohy na obr. 14 splňuje zadání, její bodové hodnocení shrnuje tabulka 1. Nápad je velice originální, ale návrh má nedomyšlené detaily, protože tavenina skla ve skutečnosti nekape znázorněným způsobem na zem a ani její zakreslené množství neodpovídá realitě. Z těchto důvodů žák získal pouze 1 bod za propracovanost obrázku. Následně úlohu správně vyřešil s jednou drobou chybičkou; při přepisování hodnoty měrné tepelné kapacity skla z tabulek si zapomněl opsat i její jednotku, kterou si následně správně převedl na základní jednotku.

Za opomenutí jednotky bylo žákovi strženo 0,5 bodu v kritériu hodnotícím správnost výpočtu. Za vyřešenou úlohu tak získal celkem 7,5 bodů a slovní zpětnou vazbu: „super, originální zadání a pozor na propracovanost a jednotky“.



Obr. 14 Ukázka úlohy výpočet odevzdaného tepla (diagnóza)

Kritéria	Body
splněno	1
originalita	2
propracovanost	1
správnost	3,5
Celkem	7,5

Tabulka 1 Bodové hodnocení úlohy vytvořené a vypočítané žákem (diagnóza)

Na další vyučovací hodině při diskuzi o vypracovaných úlohách došlo na otázku, co ho vedlo k vytvoření takového obrázkového zadání a proč uvedl u taveniny teplotu 1450 °C a hmotnost 200 g. Odpověděl, že se nedávno díval na pořad v televizi, kde se zabývali sklářstvím, a že původně chtěl

napsat teplotu tání, která byla uvedená v tabulkách, ale rozmyslel si to, a uvedl teplotu nižší, protože sklo už chvilku leželo na zemi. Následně byl pochválen za originální přístup a částečnou propracovanost a zároveň mu bylo vysvětleno, na co by si měl při dalším řešení obdobných úloh dávat pozor.

V odevzdaných žákovských úkolech se nacházely i práce, ve kterých byl pouze namalovaný obrázek, z něhož nešlo vyčíst žádné informace potřebné pro výpočet odevzdaného tepla. Pokud obrázek alespoň odpovídal zadání, tak daný žák dostal za splnění 1 bod.

Individuální slovní hodnocení, bodové a formativní hodnocení u divergentních úloh je přínosné v tom, že se pomocí nich dá detailněji popsat posun žáků ve vědomostech i tvořivé činnosti, a že žákům vytváří větší prostor k uplatnění jejich kreativity. U bodového hodnocení je zapotřebí si dát pozor, aby ho žáci nezačali vnímat jako hodnocení známkou, protože by mohli při řešení zadaných úloh raději „sázet na jistotu“ a volit již známé postupy na úkor originality a většímu prostoru pro vlastní tvořivost.

Literatura

- [1] *Zelina, M.*: Stratégie a metódy rozvoja osobnosti dieťaťa: (Metódy výchovy). Iris, Bratislava, 1994.
- [2] *Jurčová, M.*: Didaktika fyziky – rozvíjanie tvorivosti žiakov a študentov. Univerzita Komenského, Bratislava, 2001.
- [3] *Bednařík, M., Lepil, O.*: Netradiční typy fyzikálních úloh. Praxe učitele matematiky, fyziky, informatiky. Prometheus, Praha, 1995.
- [4] *Meškan, V.*: Didaktické aspekty rozvoje kreativity ve výuce fyziky na základní škole. Disertační práce. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická, Plzeň, 2013. Online. Dostupné z: <https://dspace.zcu.cz/items/b2ea6613-3013-4a11-9e80-fb8039c4f084>.

Vybrané matematické úlohy MO řešitelné pomocí žakovského programování (1. část)

LADISLAV PERK

Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem

Úvod

Tento článek je volným pokračováním článku, který seznamoval čtenáře s využitím programování při řešení vybraných matematických úloh MO v jazyce Python [1]. Na celkem sedmi úlohách byly ukázány jednodušší algoritmické konstrukce vybraných úloh MO, se kterými se čtenáři a zájemci při řešení těchto úloh mohou setkat. Jistou slabinou prvního článku bylo, že prezentoval relativně malý počet řešení a nevyužíval pokročilejší algoritmické konstrukce jazyka Python: cílem článku bylo seznámit čtenáře s danou problematikou a nezatěžovat jej pokročilejšími možnostmi jazyka Python.

Cílem tohoto článku je tento nedostatek vykompenzovat. Z tohoto důvodu je prezentován relativně větší počet úloh MO, jsou uplatněny další algoritmické konstrukce, které mohou čtenáři při řešení analogicky podobných úloh MO využít a také jsou použity pokročilé algoritmické konstrukce jazyka Python. S ohledem na rozsah prezentovaných řešení je proto článek rozdělen na dvě části. Tento článek je první částí dvoudílného článku.

V následující úloze 1 se pracuje se šesticifernými přirozenými čísly, přičemž se hledají jejich tři cifry tak, aby šesticiferné číslo bylo dělitelné 7, 8 a 9. V úloze se využívá dekadického zápisu víceciferných čísel a formulace podmínky dělitelnosti.

Úloha 1 ([2])

Nahrad'te hvězdičky v čísle 683*** vhodnými číslicemi tak, aby výsledné šestimístné číslo bylo dělitelné 7, 8 a 9.

Autorské řešení: V úloze se hledají tři jednociferná kladná celá čísla, která po dosazení za hvězdičky vytvoří šesticiferné číslo, které má být dělitelné čísly 7, 8 a 9. Hvězdičky nahradíme třemi vhodně pojmenovanými proměnnými, např. a , b a c . Číslo $\overline{683abc}$ má být dělitelné čísly 7, 8 a 9.

Pro účely vyčíslení proměnných a , b a c zavedeme tři vzájemně vnořené cykly s pevným počtem opakování s vhodně pojmenovanými proměnnými, např. a , b a c , s vyčíslením od 0 do 9 (ř. 1–3). Pro účely zvýšení přehlednosti zdrojového kódu je vhodné pro hledané šesticiferné číslo zavést pomocnou proměnnou, např. `cislo` s příslušným dekadickým vyjádřením (ř. 4). Nyní lze provést posouzení dělitelnosti beze zbytku hledaného šesticiferného čísla a čísel 7, 8 a 9. To lze zrealizovat pomocí podmíněného příkazu `if` s posouzením jednotlivých dělitelností v konjunktivním tvaru pomocí operátoru `and` a operátoru modulo `%` (ř. 6). V případě kladného vyhodnocení této podmínky lze přistoupit k výpisu číselné hodnoty hledaného šesticiferného čísla (ř. 7).

```
1 for a in range(0, 10):
2     for b in range(0, 10):
3         for c in range(0, 10):
4             cislo = 683 * 1000 + a * 100 + b * 10 + c
5
6             if cislo % 7 == 0 and cislo % 8 == 0 and cislo % 9 == 0:
7                 print(cislo)
```

Program vypíše jako řešení dvě šesticiferná čísla, a to 683 424 a 683 928. Jednoduchou početní kontrolou lze ověřit správnost těchto dvou vypsanych výsledků. Zároveň je možné se přesvědčit o správnosti těchto výsledků nahlédnutím do řešení MO.

Proměnné a , b a c je možné také vyčíslovat s využitím pokročilých syntaktických konstrukcí. Pro účely vyčíslení proměnných a , b a c lze místo tří vzájemně vnořených `for` cyklů (ř. 1–3) uplatnit metodu `product` (ř. 3) z knihovny `itertools` (ř. 1), která realizuje vyčíslování proměnných a , b , c ekvivalentně prostřednictvím proměnné x (ř. 4–6).

```
1 from itertools import product
2
3 for x in product(range(1, 10), repeat = 3):
4     a = x[0]
5     b = x[1]
6     c = x[2]
7     cislo = 683 * 1000 + a * 100 + b * 10 + c
8
```

```

9   if cislo % 7 == 0 and cislo % 8 == 0 and cislo % 9 == 0:
10      print(cislo)

```

Vypisované výsledky tohoto programu jsou shodné s vypisovanými výsledky předchozího programu. Oba programy jsou proto z hlediska vypisovaných výsledků identické.

V následující úloze 2 se hledá deset po sobě jdoucích přirozených čísel, u kterých každé z těchto čísel musí být dělitelné jedním jednociferným číslem. Úloha je ukázkou použití cyklu *while*. Hledání po sobě jdoucích právě deseti přirozených čísel se ukončí v situaci, kdy všech těchto deset přirozených čísel, je dělitelno každým z definovaných čísel.

Úloha 2 ([3])

Existuje deset po sobě jdoucích přirozených čísel, která jsou po řadě dělitelná čísly 9, 7, 5, 3, 1, 1, 3, 5, 7, 9?

Autorské řešení: V úloze se hledá deset po sobě jdoucích přirozených čísel, které musí být postupně dělitelné čísly 9, 7, 5, 3, 1, 1, 3, 5, 7 a 9.

V rámci uvažování nad strategií řešení úlohy je vhodné si uvědomit, že stačí nalézt první z deseti přirozených čísel, zbylých devět po sobě jdoucích přirozených čísel je nalezeno postupným přičítáním $+1, +2, \dots, +9$ od prvního přirozeného čísla. Pokud tedy číselnou hodnotu prvního nalezeného přirozeného čísla označíme A , pak druhé číslo lze vyjádřit jako $A + 1$, třetí $A + 2$. Poslední desáté číslo lze vyjádřit jako $A + 9$. Ze zadání týkající se dělitelnosti pak plyne, že $9|A$, $7|(A + 1)$, $5|(A + 2)$, $\dots$, $9|(A + 9)$.

Při hledání prvního z deseti po sobě jdoucích přirozených čísel je pak vhodné uplatnit cyklus s podmínkou na začátku – *while* cyklus¹⁾ s řídicí proměnnou např. **splneno** (ř. 4), kterou je vhodné před prohledáváním stavového prostoru nastavit na hodnotu **False** (ř. 2). Zároveň je nutné zavést řídicí proměnnou, např. **i**, která se s každým dalším pořadím prohledávání inkrementuje (ř. 5). Tuto proměnnou je nutné před prohledáváním stavového prostoru vynulovat (ř. 1).

Stavový prostor, který není shora nijak ohraničený, se bude systematicky prohledávat do situace, kdy se nalezne první číselná hodnota **i** taková, která odpovídá podmínkám zadání úlohy. Touto podmínkou je vyjádření bezzbytkové dělitelnosti **i** pomocí operátoru modulo **%** s porovnáním

¹⁾Bylo by také možné pro účely vyčíslení řídicí proměnné uplatnit cyklus s pevným počtem opakování – *for* cyklus, avšak s přihlédnutím k faktu, že není znám ani ciferný řád hledaného prvního přirozeného čísla, je tento typ cyklu – vzhledem k nutnosti stanovení horní číselné hodnoty prohledávání – nevhodný.

s hodnotou 0 (zapsáno jako `== 0`) v podmíněném příkazu `if` v konjunktivním tvaru pomocí operátorů `and` (ř. 7). V případě splnění takto formulované podmínky se vypíše číselná hodnota nalezeného `i` (ř. 8) a proměnná `splneno` se nastaví na hodnotu `True` (ř. 7), čímž se ukončí činnost `while` cyklu (ř. 7).

```
1 i = 0
2 while splneno == False:
3     i = i + 1
4
5     if i % 9 == 0 and (i + 1) % 7 == 0 and (i + 2) % 5 == 0
        and (i + 3) % 3 == 0 and (i + 4) % 1 == 0 and (i + 5)
        % 1 == 0 and (i + 6) % 3 == 0 and (i + 7) % 5 == 0
        and (i + 8) % 7 == 0 and (i + 9) % 9 == 0:
6         print(i)
7         splneno = True
```

Program vypíše jako řešení číslo 153. Jednoduchou početní kontrolou lze ověřit správnost tohoto vypsání výsledku. Zároveň je možné se přesvědčit o správnosti tohoto výsledku nahlédnutím do řešení MO.

V následující úloze 3 se vybírá jedno přirozené číslo z celkem osmi čísel, které není dělitelem určitého přirozeného čísla, resp. všech kladných celých čísel menších než 1 000.

Úloha 3 ([4])

Pro kolik kladných čísel menších než 1000 platí, že mezi čísla 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 a 9 je právě jedno, které není jeho dělitelem?

Autorské řešení: V úloze se hledá počet všech kladných celých čísel menších než 1000, kdy právě jedno z čísel od 2 do 9 není jeho dělitelem. Hledaná čísla mají být menší než 1000 a zároveň dělitelná právě sedmi přirozenými čísly (byť některé z nich soudělné), proto budou posuzována všechna přirozená čísla od 10 do 999.

Je vhodné si uvědomit, že pro účely nalezení všech hledaných čísel není zapotřebí znát konkrétní číslo, které není dělitelem hledaných čísel. Celkový počet dělitelů 2 až 9 je 8 a pokud právě jedno z těchto čísel nemá být dělitelem hledaných čísel, pak takový počet dělitelů je 7. Tedy pokud počet dělitelů od 2 do 9 hledaného čísla je právě 7, pak hledané číslo splňuje podmínky zadání úlohy.

Pro účely hledání daného čísla uplatníme jeden cyklus s pevným počtem opakování s vhodným pojmenováním řídicí proměnné, např. `cislo`, který nabývá číselných hodnot od 10 do 999 (ř. 3).

Pro určení právě sedmi dělitelů z možných právě osmi dělitelů 2 až 9 zavedeme pomocnou proměnnou reprezentující počet dělitelů čísla v pro-

měnné **cislo**, označme ji **pocet**, a kterou je nutné vynulovat (ř. 4). Následně lze přistoupit k postupnému posuzování dělitelnosti čísla v **cislo** s každým přirozeným číslem od 2 do 9: pomocí operátoru modulo **%** se posoudí dělitelnost beze zbytku čísla v proměnné **cislo** s každým přirozeným číslem od 2 do 9, v případě kladného vyhodnocení se inkrementuje proměnná **pocet** v rámci každého posuzovaného z čísel od 2 do 9 (ř. 6 až 28). V případě, že hodnota proměnné **pocet** bude rovna 7 (ř. 30), pak lze vypsát číselnou hodnotu proměnné **cislo** (ř. 31). Tato hodnota odpovídá situaci, kdy mezi osmi přirozenými čísly od 2 do 9 se nachází právě jedno, které není dělitelem posuzovaného čísla.

```
1 print("Nalezena cisla: ")
2
3 for cislo in range(10,1000):
4     pocet=0
5
6     if cislo%2==0:
7         pocet=pocet+1
8
9     if cislo%3==0:
10        pocet=pocet+1
11
12    if cislo%4==0:
13        pocet=pocet+1
14
15    if cislo%5==0:
16        pocet=pocet+1
17
18    if cislo%6==0:
19        pocet=pocet+1
20
21    if cislo%7==0:
22        pocet=pocet+1
23
24    if cislo%8==0:
25        pocet=pocet+1
26
27    if cislo%9==0:
28        pocet=pocet+1
29
30    if pocet == 7:
31        print(cislo)
```

Program vypíše jako řešení čtyři trojčíselná čísla, a to 360, 504, 720 a 840. Jednoduchou početní kontrolou lze ověřit správnost těchto vypsání výsledků. Zároveň je možné se přesvědčit o správnosti těchto výsledků nahlédnutím do řešení MO.

Protože posuzování dělitelů z předchozího řešení jsou všechna přirozená čísla od 2 do 9, lze je vyjádřit pomocí jednoho cyklu s pevným počtem opakování. Pokud použijeme označení řídicí proměnné například **i**, pak

takový zápis nabude do podoby `for i in range(2, 10):` (ř. 6). Nyní mírně upravíme předchozí zdrojový kód a vytvoříme tak nový. Posouzení dělitelnosti čísla v proměnné `cislo` s čísly od 2 do 9, nyní v proměnné `i`, lze vyjádřit jako `if cislo % i == 0:` (ř. 7). V případě kladného posouzení se inkrementuje proměnná `pocet` (ř. 8). Číselnou hodnotu proměnné `cislo` (ř. 11) je možné vypsat v případě, že číselná hodnota v proměnné `pocet` je rovna číslu 7 (ř. 10), stejně jako v předchozím zdrojovém kódu. Oba zdrojové kódy pracují analogicky, proto jsou i jejich výstupy shodné. Proto lze předchozí zdrojový kód přepsat do podoby:

```

1 print("Nalezena cisla:")
2
3 for cislo in range(10, 1000):
4     pocet = 0
5
6     for i in range(2, 10):
7         if cislo % i == 0:
8             pocet = pocet + 1
9
10    if pocet == 7:
11        print(cislo)

```

Program také vypíše jako řešení čtyři trojčiferná čísla, a to 360, 504, 720 a 840. Jedná se o shodné vypisované výsledky jako v případě výpisu předchozího programu.

V následující úloze 4 se pracuje s dělitelností přirozených čísel, resp. posuzováním sudosti a lichosti přirozených čísel.

Úloha 4 ([5])

Trojčiferné přirozené číslo budeme nazývat sudomilé, jestliže obsahuje dvě sudé číslice a číslici 1. Trojčiferné přirozené číslo budeme nazývat lichomilé, jestliže obsahuje dvě liché číslice a číslici 2. Zjistěte, kolik je všech sudomilých a kolik lichomilých čísel.

Autorské řešení: V úloze se hledají dva typy trojčiferných čísel: prvním typem je trojčiferné číslo obsahující číslici 1 a právě dvě sudé číslice, druhým typem je trojčiferné číslo obsahující číslici 2 a právě dvě liché číslice.

Zároveň je úloha specifická tím, že není zapotřebí formulovat hledaná trojčiferná čísla; v úloze se pracuje pouze s dílčími ciframi těchto trojčiferných čísel. Trojčiferná čísla označíme $\overline{abc}$. Sudomilá čísla lze tedy označit jako $\overline{1bc}$, $\overline{a1c}$ a $\overline{ab1}$ s tím, že cifry a , b a c jsou sudé, lichomilá čísla pak $\overline{2bc}$, $\overline{a2c}$ a $\overline{ab2}$ s tím, že cifry a , b a c jsou liché.

Podmínku pro identifikaci sudomilých čísel lze vyjádřit jako

$$\underbrace{(a = 1 \wedge 2|b \wedge 2|c)}_{1bc} \vee \underbrace{(2|a \wedge b = 1 \wedge 2|c)}_{a1c} \vee \underbrace{(2|a \wedge 2|b \wedge c = 1)}_{ab1}.$$

V programu bude tato podmínka vyjádřena pomocí operátoru modulo % s posouzením bezezbytkové dělitelnosti pomocí == 0 (tj. sudosti cifer) v podmíněném příkazu if v disjunktčním tvaru pomocí operátoru or (ř. 7). V případě kladného vyhodnocení této podmínky se bude inkrementovat proměnnou registrující počet sudomilých čísel (ř. 8), kterou je však nutné před prohledáváním stavového prostoru vynulovat (ř. 1).

Analogicky podobně lze přistoupit k určování počtu lichomilých čísel. Podmínku pro identifikaci lichomilých čísel lze vyjádřit jako

$$\underbrace{(a = 2 \wedge 2 \nmid b \wedge 2 \nmid c)}_{2bc} \vee \underbrace{(2 \nmid a \wedge b = 2 \wedge 2 \nmid c)}_{a2c} \vee \underbrace{(2 \nmid a \wedge 2 \nmid b \wedge c = 2)}_{ab2}.$$

V programu bude tato podmínka vyjádřena pomocí operátoru modulo % s posouzením bezezbytkové nedělitelnosti pomocí == 1 (tj. lichosti cifer) v podmíněném příkazu if v disjunktčním tvaru pomocí operátoru or (ř. 10). V případě kladného vyhodnocení této podmínky je možné inkrementovat proměnnou registrující počet lichomilých čísel (ř. 11), kterou je však nutné před prohledáváním stavového prostoru vynulovat (ř. 2).

```

1 sudomile = 0
2 lichomile = 0
3
4 for a in range(1, 10):
5     for b in range(0, 10):
6         for c in range(0, 10):
7             if (a == 1 and b % 2 == 0 and c % 2 == 0) or (a %
8                 2 == 0 and b == 1 and c % 2 == 0) or (a % 2
9                 == 0 and b % 2 == 0 and c == 1):
10                 sudomile = sudomile + 1
11
12             if (a == 2 and b % 2 == 1 and c % 2 == 1) or (a %
13                 2 == 1 and b == 2 and c % 2 == 1) or (a % 2
14                 == 1 and b % 2 == 1 and c == 2):
15                 lichomile = lichomile + 1
16
17 print("Pocet sudomilych: ", sudomile)
18 print("Pocet lichomilych: ", lichomile)
```

Program vypíše jako řešení počet sudomilých čísel 65 a počet lichomilých čísel 75. Nahlédnutím do řešení MO je možné se přesvědčit o správnosti těchto nalezených výsledků.

Úlohu je také možné řešit s využitím pokročilých syntaktických konstrukcí. Místo uplatnění tří vzájemně vnořených *for* cyklů lze uplatnit metodu `product` se třemi proměnnými (ř. 6–9).

```

1 from itertools import product
2
3 sudomile = 0
4 lichomile = 0
5
6 for x in product(range(1, 10), repeat = 3):
7     a = x[0]
8     b = x[1]
9     c = x[2]
10
11     if a != 0:
12         ...

```

Vypisované výsledky tohoto programu jsou shodné s vypisovanými výsledky předchozího programu. Oba programy jsou proto z hlediska vypisovaných výsledků identické.

V následující úloze, úloze 5, se pracuje s racionálním lomeným výrazem, kdy se po dosazení kladného celého čísla do čitatele i jmenovatele má rozhodnout, zda hodnota výrazu je či není celým číslem. Úloha je ukázkou posuzování bezzbytkové dělitelnosti jak pomocí operátoru modulo, tak také pomocí pythonovské metody `.is_integer()`.

Úloha 5 ([6])

Pro která celá čísla x je podíl $\frac{x+11}{x+7}$ celým číslem? Najděte všechna řešení.

Autorské řešení: V úloze se hledají všechna celá čísla x , pro které je číslo $\frac{x+11}{x+7}$ celým číslem. Pokud číslo $\frac{x+11}{x+7}$ je celým číslem, pak číslo $x+7$ beze zbytku dělí číslo $x+11$, resp. číslo $x+11$ je celočíselným násobkem čísla $x+7$. Je zapotřebí si také uvědomit, že číslo $x+7$ nesmí být nulové, tzn. $x \neq -7$.

Jedním z možných řešení je definování podílu $\frac{x+11}{x+7}$ jako výrazu, kdy pro výraz v čitateli podílu $x+11$ zavedeme pomocnou proměnnou, např. `citatel` (ř. 1), stejně tak pro výraz ve jmenovateli podílu $x+7$ zavedeme pomocnou proměnnou, např. `jmenovatel` (ř. 3). Podíl výrazů je možné zformulovat jako podíl se zavedením pomocné proměnné, např. `zlomek` (ř. 6). Protože ale číselná hodnota jmenovatele nesmí být nulová, proto je nutné před zformulováním podílu posoudit nenulovost jmenovatele pomocí podmíněného příkazu `if` (ř. 5).

Pro účely posouzení celočíselnosti číselné hodnoty v proměnné `zlomek` je vhodné uplatnit metodu `.is_integer()`, která vrací hodnotu `True`

v případě, že v proměnné `zlomek` je celé číslo (tj. podíl je celočíselný), v opačném případě hodnotu `False`. Tuto metodu lze zavolat v podmíněném příkazu `if` jako `zlomek.is_integer()` (ř. 8). V případě kladného vyhodnocení této podmínky lze vypsát číselnou hodnotu proměnné `x` jako řešení úlohy (ř. 9).

```

1 for x in range(-1000, 1001):
2     citatel = x + 11
3     jmenovatel = x + 7
4
5     if jmenovatel != 0:
6         zlomek = citatel / jmenovatel
7
8         if zlomek.is_integer():
9             print(x)

```

Program vypíše jako řešení 6 záporných čísel: $-11, -9, -8, -6, -5, -3$. Postupnou kontrolou šesti vypsání výsledků lze ověřit správnost těchto vypsání výsledků. Zároveň lze správnost těchto výsledků ověřit nahlédnutím do výsledků MO [6].

```

1 import math
2
3 for x in range(-1000, 10001):
4     citatel = x + 11
5     jmenovatel = x + 7
6
7     if jmenovatel != 0:
8         if citatel % jmenovatel == 0:
9             print(x)

```

Program také vypíše jako řešení 6 záporných čísel: $-11, -9, -8, -6, -5, -3$. Jednoduchou početní kontrolou lze ověřit správnost těchto vypsání výsledků. Zároveň je možné se přesvědčit o správnosti těchto výsledků nahlédnutím do řešení MO.

V následující úloze, úloze 6, se doplňují do čtyř, resp. šesti čtyřciferných přirozených čísel právě dvě cifry tak, aby výsledek dvou příkladů odpovídal určité podmínce. Úloha je tak ukázkou řešení takových matematických úloh, ve kterých se doplňují cifry a mají vzniklá čísla splňovat dané podmínky plynoucí z pravidel součtů a rozdílů čtyřciferných čísel.

Úloha 6 ([7])

Doplňte místo hvězdiček číslice tak, aby součet výsledků následujících dvou příkladů byl 5 842:

$$\begin{array}{r}
 \star 2 \star 7 \\
 3 \star 4 \star \\
 \hline
 4 \star 0 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2 \star 9 \star \\
 - \star 2 \star 4 \\
 \hline
 \star 5 4 \star
 \end{array}$$

Autorské řešení: V úloze se hledá několik jednociferných číslic, které se doplňují za hvězdičky jako chybějící cifry do čtyř čtyřciferných čísel tak, aby oba příklady byly vyřešeny správně. Je vhodné si uvědomit, že hvězdičky ve výsledcích obou příkladů není nutné vyjadřovat a vyčíslovat pomocí proměnných, jejich hodnoty vzejdou z příslušného součtu a rozdílu čtyřciferných čísel v obou příkladech.

Hvězdičky – pouze u čísel nad podtržítkem – nahradíme proměnnými a až h následovně:

$$\begin{array}{r}
 a \ 2 \ b \ 7 \\
 3 \ c \ 4 \ d \\
 \hline
 4 \ \star \ 0 \ 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2 \ e \ 9 \ f \\
 - \ g \ 2 \ h \ 4 \\
 \hline
 \star \ 5 \ 4 \ \star
 \end{array}$$

Na cifry nejsou ze zadání explicitně kladena žádná číselná omezení. Proto cifry a až h mohou nabývat celočíselných hodnot od 0 do 9. Čísla v prvním příkladu proto budou $a2b7$ a $3c4d$, čísla ve druhém příkladu pak budou $2e9f$ a $g1h4$. Výsledky obou příkladů mohou být zapsány ve tvaru $4 \star 00$ a $\star 54 \star$.

Pro účely vyčíslení proměnných a až h uplatníme osm vzájemně vnořených cyklů s pevným počtem opakování s vyčíslováním od 0 do 9 s vhodným pojmenováním řídicích proměnných, např. $\mathbf{a}$ až $\mathbf{g}$ (ř. 1–8).

Pro účely zvýšení přehlednosti zdrojového kódu je vhodné dekadicky vyjádřit a pojmenovat pomocí proměnných obě čísla nad podtržítkem prvního příkladu (ř. 9 a 10), stejně tak druhého příkladu (ř. 22 a 23). Vyčíslení výsledků příkladu je vhodné vyjádřit jako součet obou čísel nad podtržítkem (ř. 11), resp. rozdíl prvního a druhého čísla čísel nad podtržítkem (ř. 24). Tím jsme dostali oba výsledky příkladů jako čtyřciferná čísla.

Protože však potřebujeme zjistit, zda ve výsledku prvního příkladu je na místě tisíců cifra 4, desítek 0 a jednotek 0, stejně tak ve výsledku druhého příkladu je na místě stovek cifra 5 a na místě desítek cifra 4, pak je nutné provést číselný rozklad obou výsledků příkladů.

Uvedený postup vysvětlíme na následujícím modelovém příkladu: předpokládejme, že máme čtyřciferné přirozené číslo ve tvaru $t\overline{sd}j$:²⁾ trojciferné

²⁾ Označení proměnných znamenají: t – tisíce, s – stovky, d – desítky, j – jednotky.

číslo $\overline{sdj}$ získáme jako $\overline{tsdj}$ mod 1 000, dvojciferné číslo $\overline{dj}$ získáme jako $\overline{sdj}$ mod 100 a jednotky j získáme jako $\overline{dj}$ mod 10. V rámci tohoto rozkladu je třeba si postupně ukládat jednotlivé cifry do příslušných proměnných t , s , d a j pomocí celočíselného dělení division.

Pro realizaci číselného rozkladu pro výsledek prvního příkladu je vhodné zavést pomocnou proměnnou (ř. 13), např. **soucet**. Tuto pomocnou proměnnou budeme číselně rozkládat pomocí operace modulo % (ř. 15, 17, 19), mezitím však pomocí operace celočíselného dělení // postupně zaznamenávat jednotlivé nejvyšší cifry daných čísel, které se zaznamenávají do proměnných t , s , d , j (ř. 14, 16, 18, 20). Analogicky stejně bude proveden číselný rozklad výsledku druhého příkladu (ř. 26–33). Tím jsou v proměnných $t1$, $s1$, $d1$, $j1$ uvedeny všechny cifry výsledku prvního příkladu, v proměnných $t2$, $s2$, $d2$, $j2$ pak všechny cifry výsledku druhého příkladu.

V této situaci je možné posoudit, zda příslušné proměnné obsahují příslušné cifry ze zadání úlohy:

$$t_1 = 4 \wedge t_1 = 4 \wedge d_1 = 0 \wedge j_1 = 0 \wedge s_2 = 5 \wedge d_2 = 4.$$

To lze zrealizovat pomocí podmíněného příkazu **if** v konjunktivním tvaru pomocí operátoru **and** (ř. 35). V případě kladného vyhodnocení této podmínky lze vypsát číselné hodnoty všech šesti čísel v podobě zadaných dvou příkladů (ř. 36–46).

```

1 for a in range(0, 10):
2     for b in range(0, 10):
3         for c in range(0, 10):
4             for d in range(0, 10):
5                 for e in range(0, 10):
6                     for f in range(0, 10):
7                         for g in range(0, 10):
8                             for h in range(0, 10):
9                                 cislo1 = a * 1000 + 2 * 100 + b * 10 + 7
10                                cislo2 = 3 * 1000 + c * 100 + 4 * 10 + d
11                                vysledek1 = cislo1 + cislo2
12
13                                soucet = vysledek1
14                                t1 = soucet // 1000
15                                soucet = soucet % 1000
16                                s1 = soucet // 100
17                                soucet = soucet % 100
18                                d1 = soucet // 10
19                                soucet = soucet % 10
20                                j1 = soucet
21
22                                cislo3 = 2 * 1000 + e * 100 + 9 * 1 + f
23                                cislo4 = g * 1000 + 2 * 100 + h * 10 + 4
24                                vysledek2 = cislo3 - cislo4
25

```

```

26         rozdil = vysledek2
27         t2 = rozdil // 1000
28         rozdil = rozdil % 1000
29         s2 = rozdil // 100
30         rozdil = rozdil % 100
31         d2 = rozdil // 10
32         rozdil = rozdil % 10
33         j2 = rozdil
34
35         if t1 == 4 and d1 == 0 and j1 == 0 and s2 == 5
36             and vysledek1 + vysledek2 == 5842:
37             print(cislo1)
38             print(cislo2)
39             print("_____")
40             print(vysledek1)
41             print()
42             print(cislo3)
43             print(-cislo4)
44             print("_____")
45             print(vysledek2)
46             print()

```

Program vypíše jedno řešení, které lze zapsat ve tvaru:

$$\begin{array}{r}
 1\ 2\ 5\ 7 \\
 3\ 0\ 4\ 3 \\
 \hline
 4\ 3\ 0\ 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 2\ 7\ 9\ 6 \\
 -\ 1\ 2\ 5\ 4 \\
 \hline
 1\ 5\ 4\ 2
 \end{array}$$

Jednoduchou početní kontrolou lze ověřit správnost tohoto vypsaného výsledku. Zároveň je možné se přesvědčit o správnosti tohoto výsledku nahlédnutím do řešení MO.

Úlohu se jaké možné také řešit s využitím pokročilých syntaktických konstrukcí. Místo uplatnění osmi vzájemně vnořených *for* cyklů lze uplatnit metodu *product* s osmi proměnnými (ř. 3–11).

```

1 from itertools import product
2
3 for x in product(range(1, 10), repeat = 8):
4     a = x[0]
5     b = x[1]
6     c = x[2]
7     d = x[3]
8     e = x[4]
9     f = x[5]
10    g = x[6]
11    h = x[7]
12
13    cislo1 = a * 1000 + 2 * 100 + b * 10 + 7
14    ...

```

Vypisované výsledky tohoto programu jsou shodné s vypisovanými výsledky předchozího programu. Oba programy jsou proto z hlediska vypisovaných výsledků identické.

Poznámka. Úlohu je možné také řešit tak, že všechny hvězdičky v obou příkladech budou nahrazeny řídicími proměnnými a až k se systematickým vyčíslením každé z nich. Pak oba příklady lze přepsat do tvaru:

$$\begin{array}{r} a \ 2 \ b \ 7 \\ 3 \ c \ 4 \ d \\ \hline 4 \ e \ 0 \ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \ f \ 9 \ g \\ - \ h \ 2 \ i \ 4 \\ \hline j \ 5 \ 4 \ k \end{array}$$

Celkem tedy bylo použito 11 proměnných. Je třeba zdůraznit, že celková doba hledání řešení na počítači je již neúměrně vysoká, proto tento způsob řešení není vhodný.

Shrnutí

V předloženém příspěvku jsme prezentovali celkem 6 vybraných matematických úloh MO, které jsme řešili pomocí programování v jazyce Python. U některých úloh – tam kde to bylo vhodné –, bylo představeno také řešení s využitím pokročilých syntaktických konstrukcí.

Literatura

- [1] *Perk, L.*: K možnosti využití programování při žákovském řešení vybraných matematických úloh MO. Matematika–Fyzika–Informatika, roč. 34 (2025), č. 2, s. 121–133.
- [2] MO ČR. 52. ročník, domácí kolo, kategorie Z9, úloha 1.
- [3] MO ČR. 73. ročník, domácí kolo, kategorie C, úloha 1.
- [4] MO ČR. 68. ročník, II. kolo, kategorie Z8, úloha 2.
- [5] MO ČR. 61. ročník, II. kolo, kategorie Z7, úloha 3.
- [6] MO ČR. 69. ročník, I. kolo, kategorie Z9, úloha 3.
- [7] MO ČR. 59. ročník, I. kolo, kategorie Z6, úloha 6.

Mezinárodní olympiády v informatice IOI 2025

Také v letošním roce probíhaly všechny tradiční mezinárodní olympiády v informatice, kterých se pravidelně účastní soutěžní družstva z České republiky. Na začátku července se konal 32. ročník regionální Středoevropské olympiády v informatice CEOI 2025 (Central European Olympiad in Informatics) v rumunském městě Cluj-Napoca, ve druhé polovině července následoval v německém Bonnu 5. ročník Evropské dívčí olympiády v informatice EGOI 2025 (European Girls' Olympiad in Informatics). Vyvrcholením celého soutěžního ročníku potom byla 37. celosvětová Mezinárodní olympiáda v informatice IOI 2025 (International Olympiad in Informatics), která se uskutečnila na přelomu července a srpna v Bolívii v hlavním městě Sucre.

Výběr našich reprezentantů pro všechny tyto soutěže je založen na výsledcích ústředního kola aktuálního ročníku Matematické olympiády kategorie P. Úspěšní řešitelé ústředního kola jsou zváni na tradiční výběrové soustředění a při sestavování reprezentačních družstev se pak sčítají výsledky z ústředního kola MO-P a výsledky dosažené na tomto výběrovém soustředění. Čtyři soutěžící s nejlepším celkovým hodnocením získají možnost reprezentovat Českou republiku

na Mezinárodní olympiádě v informatice IOI, zatímco další čtyři mladší řešitelé z nematuritních ročníků zveme na Středoevropskou olympiádu v informatice CEOI. Nezávisle na tom na EGOI jedou soutěžit čtyři nejlepší dívky.

Všechny tři mezinárodní olympiády se řídí podobnými pravidly, mají stejný charakter soutěžních úloh a stejný způsob hodnocení. Vlastní soutěž je vždy tvořena dvěma soutěžními dny, v každém z nich studenti řeší tři nebo čtyři náročné algoritmické úlohy, na jejichž vyřešení dostanou pět hodin času. Vždy večer před soutěžním dnem vedoucí všech národních delegací společně schválí úlohy navržené pořadatelskou zemí, podle potřeby upraví jejich formulace a přeloží je do mateřského jazyka svých studentů. Čeští studenti tedy dostávají jak původní anglickou, tak i českou verzi zadání úloh. Každý soutěžící pracuje na přiděleném osobním počítači s nainstalovaným soutěžním prostředím, které umožňuje vyvíjet a testovat programy a odesílat je k vyhodnocení. Správnost vypracovaných programů se automaticky testuje v průběhu soutěže pomocí předem připravené sady testovacích vstupních dat, každý test je navíc omezen časovým limitem. Tím je zajištěna nejen kontrola správnosti výsledků, ale pomocí časových limitů se také odliší kvalita použitého algoritmu. Při testování každé úlohy se používají sady testovacích dat různé velikosti, takže teoreticky správné řešení založené na méně

efektivním algoritmu zvládne dokončit výpočet v časovém limitu pouze pro některé testy – pro ty menší a jednodušší. Takové řešení je potom ohodnoceno částečným počtem bodů. Částečné body lze získat také za vyřešení některých speciálních případů, zatímco plný počet bodů přinese až řešení fungující v plné obecnosti. Krátce po odevzdání vypracovaného programu do vyhodnocovacího systému se soutěžící dozví hodnocení svého řešení a má pak ještě možnost řešení opravit a odevzdat ho znovu. Podobný systém používáme v posledních letech i u nás v Matematické olympiádě kategorie P pro hodnocení praktických úloh domácího a ústředního kola.

V krátkosti si představíme průběh a výsledky jednotlivých letošních mezinárodních olympiád v informatice.

* * * * *



Středoevropská soutěž CEOI 2025 se konala ve dnech 7.–13. 7. 2025 v Rumunsku. Byla to již pátá středoevropská olympiáda pořádaná na území Rumunska, z toho potřetí ve městě Cluj-Napoca. Letošní CEOI byla historicky největší, zúčastnilo se jí celkem 63 soutěžících z 15 zemí. Ve-

dle osmi tradičních účastnických středoevropských států (Česká republika, Chorvatsko, Maďarsko, Německo, Polsko, Rumunsko, Slovensko, Slovinsko), které se pravidelně střídají v pořádání olympiády, přijeli jako hosté soutěžící z dalších sedmi zemí (Bulharsko, Gruzie, Moldavsko, Rakousko, Srbsko, Švýcarsko a Ukrajina). Ukrajina se navíc od příštího roku zařadí mezi pořadatelské státy CEOI a pravidelně účastníky. Jako obvykle soutěžilo ještě také druhé družstvo pořadatelské země.

České reprezentační družstvo mělo následující složení:

Hugo Herynek, 6/8, gymnázium Jana Keplera, Praha 6.

Adam Houdek, 9. roč. ZŠ, SOŠ a ZŠ Březová,

Petr Starý, 7/8, gymnázium Jírovčova, České Budějovice,

Jan Václavěk, 7/8, gymnázium, tř. Kpt. Jaroše, Brno.

Vedoucími české výpravy na CEOI 2025 byli *Jiří Kalvoda* a *Benjamin Swart*, oba z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Všichni účastníci CEOI byli ubytováni v hotelu Victoria, vlastní soutěž probíhala v prostorách místní Technické univerzity. Během pondělí 7. 7. 2025 se všechna reprezentační družstva postupně sjížděla na místo konání. Hned v úterý proběhlo slavnostní zahájení a poté následovalo „zkušební kolo“, které slouží k seznámení soutěžících s počítači a s vývojovým prostředím, v němž budou při soutěži pracovat. Tentýž den stihli studenti také prohlídku města a vedoucí delegací první společné jednání a přípravu úloh pro první soutěžní den.

Ve středu 9. 7. se konala první část soutěže. Čtvrtek byl volným dnem mezi oběma soutěžními částmi. Pořadatelé pro účastníky olympiády připravili celodenní výlet do okolí nedalekého města Turdy, který zahrnoval návštěvu solných dolů a výhled na přírodní rezervaci s krasovou soutěskou. V pátek 11. 7. se soutěžilo podruhé a po skončení soutěže účastníci ještě navštívili věž s výhledem na město a místní botanickou zahradu. V sobotu byla celá akce zakončena prohlídkou města Cluj a slavnostním vyhlášením výsledků. V neděli se družstva rozjela do svých domovů.

V soutěži bylo možné získat celkem 600 bodů za šest úloh hodnocených maximálně po 100 bodech. To se ale nikomu ze soutěžících nepodařilo, letošní úlohy byly značně obtížné a tři z nich dokonce nikdo ze soutěžících nevyřešil na plný počet bodů. Celkový vítěz Maksym Shvedchenko z Německa vyřešil na plný počet bodů dvě úlohy a získal celkem 353 bodů. Úspěšnější polovina soutěžících dostává na CEOI medaili, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se rozdělují v přibližném poměru 1 : 2 : 3. Celkově bylo na CEOI 2024 uděleno 31 medailí, z toho 6 zlatých, 10 stříbrných a 15 bronzových. Nejúspěšnějšími zeměmi se stalo Bulharsko se třemi zlatými a jednou bronzovou medailí, a domácí Rumunsko s jednou zlatou, pěti stříbrnými a dvěma bronzovými medaillemi (v součtu pro obě rumunská družstva). Středoevropská olympiáda v informatice je ovšem soutěží jednotlivců a žádné oficiální pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlášováno.

Naším studentům se příliš nedařilo, všichni se umístili ve druhé polovině celkového pořadí a zůstali tedy bez medaile. Stejně dopadlo také slovenské družstvo. Uvedený výsledek odpovídá skutečnosti, že na rozdíl od mnoha jiných zemí posíláme na CEOI soutěžit mladší studenty, kteří se v příslušném roce ještě nedostali na IOI. Tento postup se nám ovšem dlouhodobě osvědčil, naši mladší soutěžící takto získají na CEOI svoje první mezinárodní zkušenosti a často se pak stává, že v následujícím školním roce velmi dobře uspějí na celosvětové IOI.

Veškeré informace o soutěži, texty soutěžních úloh i podrobné výsledky všech soutěžících můžete nalézt na Internetu na adrese <https://ceoi2025.utcluj.ro/>. Příští ročník CEOI v roce 2026 uspořádá Slovensko.

* * * * *

Pátý ročník Evropské dívčí olympiády v informatice EGOI 2025 (European Girls' Olympiad in Informatics) se konal ve dnech 14.–20. 7. 2025 v německém Bonnu.



Na letošní EGOI soutěžily dívky z rekordních 60 zemí, a to nejen z Evropy, jak napovídá název akce, ale jako hosté i z mnoha dalších zemí celého světa. Soutěžící z 53 zemí se sjely do

Bonnu, zbývajících 7 družstev ze vzdálenějších zemí soutěžilo online. Počet zúčastněných zemí se tak oproti předchozímu ročníku zvýšil o čtyři. Z některých zemí přijelo neúplné družstvo, takže celkem se na letošní EGOI sešlo 227 soutěžících, z toho 138 z Evropy.

Letos potřetí se Evropské dívčí olympiády v informatice zúčastnilo i české čtyřčlenné družstvo. Na EGOI nás reprezentovaly:

Lucie Roskovská, 8/8, gymnázium Elišky Krásnohorské, Praha 4,

Svatava Šimečková, 7/8, gymnázium, tř. Kpt. Jaroše, Brno,

Pavla Šimová, 8/8, gymnázium Šumperk,

Anh Linh Tran, 8/8, gymnázium, tř. Kpt. Jaroše, Brno.

Tři z nich (s výjimkou Pavly Šimové) se zúčastnily již loňského a předloňského ročníku soutěže. Vedoucími české delegace byli *Štěpán Mikéska* z Fakulty informatiky Masarykovy univerzity v Brně a *David Kolář* z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Soutěž proběhla podle pravidel převzatých z celosvětové informatické olympiády IOI, jediným rozdílem bylo zadání čtyř úloh v každém soutěžním dnu namísto tří, jak je obvyklé na IOI. Každá úloha byla hodnocena 100 body, takže celkem bylo možné v soutěži získat až 800 bodů. Mezi nejlepší řešitelky soutěže bylo rozděleno 20 zlatých, 30 stříbrných a 65 bronzových medailí. Celkovou vítězkou EGOI 2024 se stala Paulina Zeleznik z Polska se 669 body. Nejúspěšnější zemí letošního ročníku byly USA se třemi zlatými a jednou bronzovou medailí. České studentky

byly velmi úspěšné, získaly jednu zlatou a tři bronzové medaile, zatímco slovenské jednu stříbrnou a dvě bronzové. Výsledky našich soutěžících:

12. *Svatava Šimečková*, 548 bodů, zlatá medaile,

104. *Lucie Roskovská*, 268 bodů, bronzová medaile,

106. *Pavla Šimová*, 267 bodů, bronzová medaile,

115. *Anh Linh Tran*, 252 bodů, bronzová medaile.

Na webu <https://www.egoi2025.de/> se můžete seznámit s dalšími informacemi o soutěži, s kompletními výsledky i s texty všech zadáných soutěžních úloh. Webová stránka <https://egoi.org/> obsahuje souhrnné informace o všech dosavadních ročních soutěže. Další ročník soutěže EGOI se bude konat již v polovině května 2026 v italském městě Cesenatico na pobřeží Jaderského moře.



Letošní 37. ročník Mezinárodní olympiády v informatice IOI 2025 se konal v hlavním městě Bolívie Sucre ve dnech 27. 7.–3. 8. 2025 (původně plánovaným místem konání bylo město La Paz). Olympiády se zúčast-

nílo 330 soutěžících z 84 zemí celého světa, mimo soutěž navíc řešilo úlohy ještě druhé družstvo pořádací země. Oproti rekordnímu loňskému roku se tak počet soutěžících i počet zúčastněných zemí o něco snížil, a to zejména z důvodu komplikací v dopravě a obstarání vstupních víz.

Vedením české delegace na IOI 2025 byli pověřeni *Antonín Maloň* z Breda University of Applied Sciences v Nizozemsku a *Daniel Skýpala* z Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy. Naše soutěžní družstvo mělo následující složení:

David Hromádka, 8/8, gymnázium Nad Alejí, Praha 6,

Erik Ježek 3/4, Smíchovská SPŠ a gymnázium, Praha 5,

Jan Slíva, 8/8, Mensa gymnázium, Praha 6,

Svatava Šimečková, 7/8, gymnázium Brno, tř. Kpt. Jaroše.

Všichni soutěžící byli ubytováni ve studentské ubytovně Villa Bolivariana nedaleko od místa konání soutěže, zatímco vedoucí národních delegací byli rozmístěni do několika hotelů v centru města. V okolí náměstí Plaza 25 de Mayo přitom probíhaly oslavy 200 let bolivijské nezávislosti. Soutěž se konala ve sportovní hale multifunkčního sportovního komplexu Polideportivo de Garcilazo. Vlastní soutěž proběhla ve dvou soutěžních dnech, a to ve středu 30. 7. a v pátek 1. 8. 2025. Ve zbývajících dnech pobytu se podobně jako na CEOI konalo nejprve cvičné soutěžní kolo určené pro seznámení soutěžících s počítači a vývojem prostředním, dále slavnostní zahájení, několik výletů a nakonec samo-

zřejmě také slavnostní zakončení olympiády spojené s vyhlášením výsledků. V rámci výletů navštívili všichni účastníci IOI zámek La Glorietta ležící nedaleko hlavního města Sucre. Čekala je také prohlídka města a v Muzeu domorodého umění ASUR se seznámili s historií tradičního tkaní. Závěrečný ceremoniál s předáváním medailí proběhl za doprovodu tanců a hudby v Mezinárodním kongresovém a kulturním centru na okraji Sucre.

Každá ze šesti soutěžních úloh byla hodnocena maximálně 100 body, takže celkem bylo možné získat až 600 bodů. Absolutním vítězem soutěže se stal čínský student Hengxi Liu s 591 body. Na základě přesně stanovených pravidel se na IOI podle dosažených bodů rozdělují medaile. Některou z medailí obdrží nejvýše polovina účastníků soutěže, přičemž zlaté, stříbrné a bronzové medaile se rozdělují v poměru 1 : 2 : 3 s ohledem na to, aby soutěžící se stejným bodovým ziskem získali stejnou medaili. Způsob rozdělení medailí je na IOI stanoven striktními pravidly, na rozdíl od CEOI nebo EGOI ho nemohou členové mezinárodního výboru ani vedoucí národních delegací nijak ovlivnit. Na letošní IOI bylo uděleno celkem 165 medailí, z toho 28 zlatých, 55 stříbrných a 82 bronzových. Navíc bylo uděleno 36 čestných uznání (HM – honourable mentions). Ocenění HM dostává na IOI takový soutěžící, který nezískal žádnou medaili, ale v jednom ze dvou soutěžních dnů se umístil v první polovině výsledkové listiny. Získal by tedy medaili, pokud by se podle platných pravidel udělovaly medaile zvlášť za každý soutěžní den.

Výsledky našich soutěživých:

138. *David Hromádka*, 278,79 bodu, bronzová medaile,

155. *Erik Ježek*, 255,78 b., bronzová medaile,

196. *Svatava Šimečková*, 223,18 b., čestné uznání HM,

243. *Jan Slíva*, 167,80 bodu.

Zisk dvou bronzových medailí a jednoho čestného uznání představuje pro Českou republiku lehce podprůměrný výsledek ve srovnání s našimi výsledky z předchozích let. Slovenské družstvo dopadlo podobně jako naše, získalo dvě bronzové medaile a dvě čestná uznání. Mezinárodní olympiáda v informatice je výhradně soutěží jednotlivců a oficiální pořadí zúčastněných zemí v ní není vyhlašováno. Nemá tedy ani stanoven, zda by se mělo určovat podle počtu medailí, podle celkového počtu bodů získaných soutěžícími nebo třeba podle součtu jejich dosažených umístění. Nejúspěšnějšími zeměmi se čtyřmi zlatými medailemi staly Čína, Korea a Rumunsko. Studenti z Číny obsadili dokonce první, třetí, páté a osmé místo v celkovém pořadí. Všechny podrobnosti o soutěži najdete na adrese <https://ioi2025.bo/>, jsou zde zveřejněny také soutěžní úlohy i testovací data. Kompletní výsledková listina je k dispozici na webové stránce se statistikami <http://stats.ioinformatics.org/results/2025>.

Příští ročník Mezinárodní olympiády v informatice bude hostit v roce 2026 Uzbekistán, další IOI se pak budou konat v Německu, následně v Japonsku a v Bulharsku.

Pavel Töpfer

19. Středoevropská matematická olympiáda



Saská Kamenice neboli Chemnitz hostila 25. až 31. srpna v pořadí 19. ročník Středoevropské matematické olympiády. Kromě deseti stálých účastníků, tedy šestičlenných týmů z Česka, Chorvatska, Litvy, Maďarska, Německa, Polska, Rakouska, Slovenska, Slovinska a Švýcarska, se letošní soutěže zúčastnilo také družstvo z Ukrajiny jakožto hostující země.

Český tým tvořili Martin Bryja (G Brno, třída Kapitána Jaroše, 6/8), Alexis Théodore Dachary (Letohradské soukromé G, 7/8), Lukáš Komín (G Opatov, Praha 4, 6/8), Helena Muchová (G Jana Keplera, Praha 6, 7/8), Svatava Šimečková (G Brno, třída Kapitána Jaroše, 7/8) a Petr Vokřínek (G Brno, třída Kapitána Jaroše, 5/8), vedoucími výpravy byli Matěj Doležal a Magdaléna Mišinová.

V individuální soutěži řešilo 66 soutěžících během pěti hodin čtyři úlohy. Za každou úlohu bylo možné získat až osm bodů. Na stříbrnou medaili dosáhli Martin Bryja a Alexis Théodore Dachary, na bronzovou pak Petr Vokřínek a Svatava Šimečková. Mimo to

Helena Muchová získala čestné uznání (HM), jež se uděluje za úplné vyřešení alespoň jedné z úloh. Na dokonalé skóre 32 bodů letos dosáhlo sedm soutěžících: po dvou z Německa a Ukrajiny a tři z Polska. Bodové hranice pro získ jednotlivých medailí byly letos nastaveny poměrně vysoko: 31 na zlatou medaili, 24 na stříbrnou a 18 na bronzovou.

Výsledky českého týmu (v závorce body za jednotlivé úlohy): 14.–18. Martin Bryja (7, 8, 2, 7) a Alexis Théodore Dachary (6, 8, 2, 8), 24 bodů, oba stříbrná medaile, 25.–30. Petr Vokřínek (3, 8, 0, 8), 19 b., bronzová medaile, 31.–36. Svatava Šimečková (8, 8, 0, 2), 18 b., bronzová medaile, 37.–38. Lukáš Komín (7, 5, 2, 3), 17 b., 47.–51. Helena Muchová (2, 8, 2, 1), 13 b., HM.



Český tým

V soutěži družstev nasbíral český tým z osmi zadaných úloh celkem 42 bodů, čímž se umístil na sdíleném 3. až 4. místě spolu s Polskem. V takové situaci pravidla soutěže upřednostňují tým s vyšším počtem úplně vyřešených úloh, díky čemuž získalo bronzové medaile právě české družstvo. Poznamenejme, že letošní týmová soutěž byla

obzvláště úspěšná i pro slovenský tým, který získal zlatou medaili a se ziskem 46 bodů zaostal pouze za hostující Ukrajinou s 54 body.

Mezi soutěžními úlohami se letos objevily i dvě české, a to první a třetí v týmové soutěži od Josefa Minaříka a od Michala Janíka a Josefa Tkadlece.

Dále přikládáme zadání soutěžních úloh. Poznamenejme ještě, že úlohy jsou řazeny podle témat (algebra, kombinatorika, geometrie a teorie čísel), nikoli podle obtížnosti. V týmové soutěži jsou dvě úlohy od každého tématu, přičemž první je vždy lehčí.

Individuální soutěž

Úloha 1 Necht $\mathbb{R}^+$ značí množinu kladných reálných čísel. Uvažujme funkci $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ takovou, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$yf^{2025}(x) \geq xf(y).$$

Dokažte, že existuje kladné celé číslo n_0 takové, že pro všechna kladná celá čísla $n \geq n_0$ a pro všechna $x \in \mathbb{R}^+$ platí $f^n(x) \geq x$.

Poznámka. Výraz f^n zde značí funkci f aplikovanou n -krát, tedy

$$f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)\dots))}_{n\text{-krát}}.$$

Úloha 2 Předpokládejme, že máme nekonečnou čtvercovou tabulku, v níž jsou některá políčka obarvena červeně. Potom je *rubínová věž* figurka, která se v jednom tahu může pohnout o libovolný počet políček v jednom ze směrů rovnoběžných se stranami políček tabulky (buď svisle, nebo vodorovně),

přičemž musí po celý tah zůstat na červených políčkách.

Andulka začíná s neobarvenou nekonečnou čtvercovou tabulkou. Poté provede následující: Nejprve obarví nanejvýš 2025 políček červeně. Potom umístí několik rubínových věží na po dvou různá červená políčka tak, aby byla splněna následující dvě pravidla:

- Žádná rubínová věž se nemůže dostat jedním tahem na políčko, kde stojí jiná rubínová věž.
- Každá rubínová věž se může dvěma tahy dostat na libovolné políčko, kde stojí jiná rubínová věž.

Najděte největší možný počet rubínových věží, který může Andulka tímto způsobem umístit.

Úloha 3 Buď ABC trojúhelník. Jeho kružnice vepsaná ω se dotýká stran BC , CA a AB postupně v bodech D , E a F . Necht' P a Q jsou body na příince BC různé od D takové, že $|PB| = |BD|$ a $|QC| = |CD|$. Dokažte, že kružnice opsané trojúhelníkům PCE a QBF a kružnice ω prochází společným bodem.

Úloha 4 Necht' $\mathbb{Z}$ značí množinu celých čísel. Množinu $S \subseteq \mathbb{Z}$ nazveme *saskou*, je-li $ab + c$ pro libovolná tři po dvou různá $a, b, c \in S$ čtvercem celého čísla. Dokažte, že každá saská množina je konečná. Dále určete největší možný počet prvků saské množiny.

Týmová soutěž

Úloha 1 Budulínek má n mincí s celočíselnými hodnotami $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n > 0$. Stojí před automatem, který

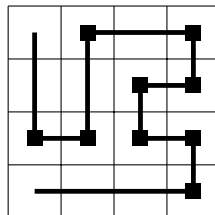
nabízí n tyčinek s kladnými celočíselnými cenami $b_1, b_2, \dots, b_n$. Budulínek si všiml, že pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ je $b_1 + b_2 + \dots + b_i \geq c_1 + c_2 + \dots + c_i$. Dále platí, že celková hodnota Budulínekových mincí je stejná jako součet cen všech tyčinek. Tyčinky lze kupovat v libovolném pořadí. Aby si Budulínek koupil i -tou tyčinku, musí do automatu naházet mince o celkové hodnotě alespoň b_i . Pokud však zaplatí více, automat mu žádné peníze nevrátí. Dokažte, že Budulínek si může koupit alespoň polovinu tyčinek.

Úloha 2 Necht' $\mathbb{R}^+$ značí množinu kladných reálných čísel. Určete všechny funkce $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ takové, že pro libovolná $x, y \in \mathbb{R}^+$ platí

$$f(xy) + f(x) = f(y)f(xf(y)) + f(x)f(y)$$

a že existuje nanejvýš jedno číslo $a \in \mathbb{R}^+$, pro něž $f(a) = 1$.

Úloha 3 Had v tabulce $n \times n$ je cesta, která se sestává z úseček mezi středy sousedních políček, prochází středy všech políček a navštíví každé políčko právě jednou. Dvě políčka jsou zde považována za sousední, pokud sdílí hranu. Všimněme si, že všechny úsečky tvořící hada jsou rovnoběžné s některou ze stran políček v tabulce. Na obrázku je příklad hada v tabulce 4×4 .



Tento had má devět pravoúhlých zatáček, které jsou vyznačené malými černými čtverečky.

Uvažme hada skrze 2025 políček tabulky 45×45 . Kolik nejvíce pravoúhlých zatáček může takový had mít?

Úloha 4 Necht' n je kladné celé číslo. V provincii Tramtárie leží $100n$ měst, každá dvě jsou spojena přímkou cestou a každá z těchto cest má mýtnou bránu vybírající nějaké kladné mýto. Mýto z každé brány se rozděluje rovnoměrně mezi města na konci příslušné cesty (to znamená, že každé z oněch dvou měst dostane polovinu příjmu). Celkový mýtní příjem každého města je součet příjmů, které dostává ze $100n - 1$ mýtných bran na svých cestách.

Nový zákon nařizuje, aby mýto z některých bran vybírala spolková vláda namísto měst na koncích příslušné cesty. Guvernér Tramtárie rozhoduje o tom, které brány to budou. Starostové měst vyžadují, aby součet příjmů ze zbývajících bran každému městu dával alespoň 99 % jeho původního příjmu.

V závislosti na n najděte největší kladné celé číslo k takové, že guvernér může vždy vybrat k mýtných bran, z nichž bude příjmy dostávat spolková vláda, a zároveň vyhovět požadavku starostů.

Úloha 5 Je dán trojúhelník ABC takový, že $|AB| < |AC|$. Označme jako D patu výšky z A na BC . Necht' E je bod takový, že $ABEC$ je rovnoběžník. Ať M je bod uvnitř trojúhelníku ABC splňující $|MB| = |MC|$. Necht'

F je obraz bodu D v osové souměrnosti podle tečny kružnice opsané trojúhelníku ADM v bodě M . Dokaže, že $|AF| = |DE|$.

Úloha 6 Necht' ABC je ostroúhlý trojúhelník s vnitřním bodem D splňujícím $|\sphericalangle BDC| = 180^\circ - |\sphericalangle BAC|$. Přímky BD a AC se protínají v bodě E , obdobně se přímky CD a AB protínají v bodě F . Body $P \neq E$ a $Q \neq F$ leží na přímce EF tak, že platí $|BP| = |BE|$ a $|CQ| = |CF|$. Předpokládejme, že úsečky AP a AQ protínají kružnici ω opsanou trojúhelníku ABC postupně v bodech $R \neq A$ a $S \neq A$. Dokaže, že přímký RF a SE se protínají na kružnici ω .

Úloha 7 Buď n kladné celé číslo takové, že *součet* kladných dělitelů $n^2 + n + 1$ je dělitelný třemi. Dokaže, že lze rozdělit kladné dělitele $n^2 + n + 1$ do tří množin takových, že *součin* všech prvků v každé množině je stejný.

Úloha 8 Rozhodněte, zda následující tvrzení platí pro libovolný polynom P stupně alespoň 2 s nezápornými celočíselnými koeficienty: Existuje kladné celé číslo m takové, že pro nekonečně mnoho kladných celých čísel n má číslo $P^n(m)$ více než n různých kladných dělitelů.

Poznámka. Výraz P^n značí P aplikované n -krát,

$$P^n(x) = \underbrace{P(P(\dots P(x)\dots))}_{n\text{-krát}}.$$

Magdaléna Mišinová

MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách

Ročník XXXIV (2025)

MATEMATIKA

D. Hrubý: O vázaných extrémeh funkcí (s. 14) – *F. Kuřina, J. Cachová*: Výpočty a obrázky (s. 19) – *P. Leischner*: Spřízněné trojúhelníky (s. 81) – *P. Leischner*: Trojboký jehlan nebo čtyřstěn? (s. 241) – *M. Melicher, M. Janík*: O jednom problému z teorie čísel (s. 25) – *J. Novák*: Slovní úlohy na využití absolutních hodnot (s. 261) – *K. Pastor*: Pásové uzavřené procházky jezdce po šachovnici (s. 184) – *J. Polák*: Stereometrická analogie úlohy o čtyřech tečných kružnicích v trojúhelníku (s. 161) – *M. Stáňa*: Objavovanie na hodinách matematiky I (s. 252) – *P. Štein, S. Lukáč*: Využitie dynamickej geometrie vo výučbe obsahov rovinných útvarov (s. 175) – *J. Švrček, M. Chodorová*: Osy úhlů v trojúhelníku (s. 167) – *J. Švrček, L. Juklová*: Motýlí křídla v lichoběžníku (s. 1) – *P. Tlustý, J. Gunčaga*: Ruinování hráče v hazardní hře (s. 8) – *M. Závodný*: Numerické charakteristiky výrokových spojek (s. 89) – *J. Zhouf*: Tři speciální body ležící na jedné přímce VI (s. 100) – Zajímavé matematické úlohy (s. 29, 108, 193, 270)

FYZIKA

L. Habíňáková, M. Křížová: Didaktické hry ve výuce fyziky (s. 275) – *G. Kaufnerová*: Divergentní úlohy a jejich aplikace ve výuce termiky na ZŠ (s. 283) – *Č. Kodejška*: Reálný model obecného řešení frekvence kmitů elektrostatického kyvadla (s. 47) – *O. Lepil*: Je tepelné záření totéž co infračervené záření? (s. 196) – *P. Leischner*: O zobrazování rovinným zrcadlem (s. 203) – *M. Mysíková, V. Erhartová, J. Erhart*: Měříme přídržnou sílu magnetických fólií (s. 111) – *A. Richterová, V. Erhartová, J. Erhart*: Měříme modul pružnosti ve smyku niti-nolového drátu s tvarovou pamětí (s. 34) – *S. Sojka, M. Mašláň*: Studium mionů pomocí mionového teleskopu (s. 210)

INFORMATIKA

E. Bartl: Generativní umělá inteligence. Díl první: příliš velká očekávání (s. 76) – *E. Bartl*: Generativní umělá inteligence. Díl druhý: umělý neuron Warrena McCullocha a Waltera Pittse (s. 225) – *L. Perk*: K možnosti využití programování při žákovském řešení vybraných matematických úloh MO (s. 121) – *L. Perk*: Vybrané matematické úlohy MO řešitelné pomocí žákovského programování (1. část) (s. 299) – *P. Töpfer*: Minimální triangulace mnohoúhelníku

(Úlohy z MO kategorie P, 50. část) (s. 69) – *P. Töpfer*: Zjištění počtu možností (s. 219) – *O. Vencálek*: Vizualizace pomocí hvězdiček a úskalí nelineárních vztahů (s. 134)

LITERATURA

P. Emanovský: Nová učebnice Matematika pro SŠ – Stereometrie (s. 157) – *Z. Půlpán*: Recenze dvou dalších překladů významných knih (s. 158)

ZPRÁVY

P. Calábek: 13. ročník CPSJ (s. 235) – *P. Calábek*: Ústřední kolo 74. ročníku MO kategorie A (s. 149) – *K. Kolář, H. Němec*: Turnaj mladých fyziků 2025 (s. 237) – *M. Mišinová*: 19. Středoevropská matematická olympiáda (s. 317) – *Redakce MFI*: K nedožitému životnímu jubileu doc. Stanislava Trávníčka (s. 148) – *L. Richterek*: Celostátní kolo 66. ročníku FO (s. 153) – *J. Tkadlec*: 66. mezinárodní matematická olympiáda (s. 232) – *P. Töpfer*: Mezinárodní olympiády v informatice v roce 2025 (s. 312) *P. Töpfer*: Ústřední kolo 74. ročníku MO kategorie P (s. 150)