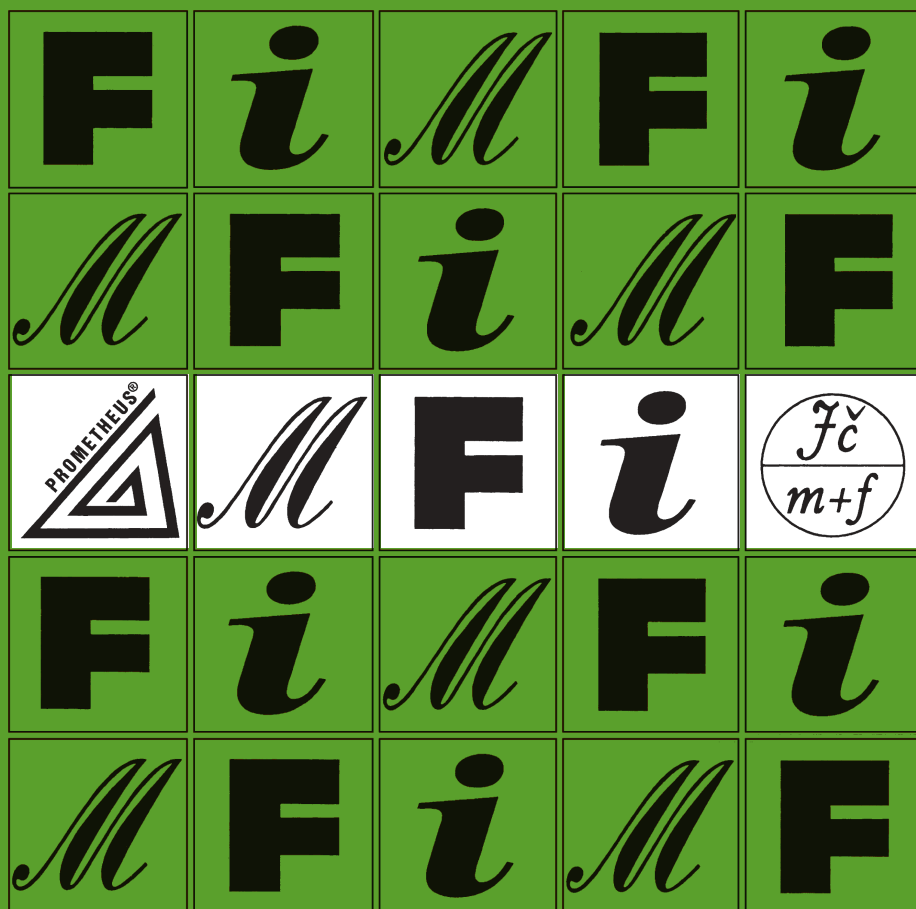


MATEMATIKA FYZIKA INFORMATIKA

1

ČASOPIS PRO VÝUKU NA ZÁKLADNÍCH A STŘEDNÍCH ŠKOLÁCH



MATEMATIKA – FYZIKA – INFORMATIKA

Časopis pro výuku na základních a středních školách
Ročník XXXV (2026), číslo 1

Vydává Prometheus, spol. s r. o. ve spolupráci s Jednotou českých matematiků a fyziků

Redakce:

Jaroslav Švrček – vedoucí redaktor a redaktor pro matematiku
Lukáš Richterek – redaktor pro fyziku a redaktor WWW stránek
Eduard Bartl – redaktor pro informatiku

Redakční rada:

Pavel Calábek, Zdeněk Drozd, Radomír Halaš, Renata Holubová, Čeněk Kodejška,
Karel Kolář, Michaela Křížová, Pavel Leischner, Oldřich Lepil, Dana Mandíková,
Tomáš Pitner, Jarmila Robová, Bohuslav Rothanzl, Jaromír Šimša, Pavel Tlustý, Pavel
Töpfer, Jaroslav Zhouf

Adresa redakce:

17. listopadu 12, 771 46 Olomouc E-mail: MFI@upol.cz

Adresa vydavatele:

Prometheus, spol. s r. o., Čestmírova 10, 140 00 Praha 4

OBSAH

MATEMATIKA

<i>P. Leischner</i> : Ortocentrický čtyřlíst	1
<i>J. Zhouf</i> : Heronovské trojúhelníky	11
<i>M. Stáňa</i> : Objavovanie na hodinách matematiky II	17
Zajímavé matematické úlohy	26

FYZIKA

<i>P. Kriek</i> : Metodická rôznorodosť a systematizácia výkladu tém o energii v školskej fyzike	32
---	----

INFORMATIKA

<i>L. Perk</i> : Vybrané matematické úlohy MO řešitelné pomocí žákovského programování (2. část)	51
<i>V. Vašina, M. Friák</i> : Praktické aspekty kvantového počítání	63

ZPRÁVY

<i>K. Kolář</i> : Novinky o WFPhC	79
<i>K. Kolář</i> : Desátá soutěžní přehlídka významných činů ve zpřístupňování fyziky veřejnosti	80

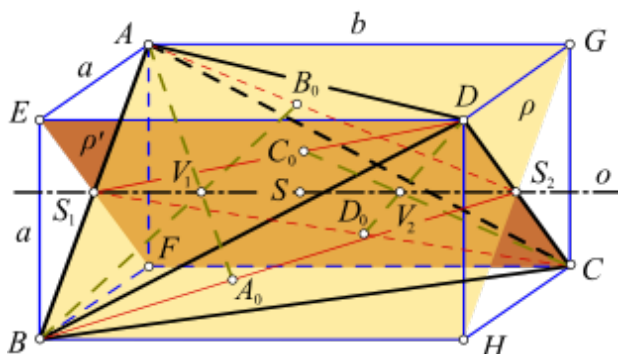
Ortocentrický čtyřstěn

PAVEL LEISCHNER

Pedagogická fakulta JU, České Budějovice

V každém trojúhelníku se výšky protínají v jediném bodě, tzv. ortocentu. U čtyřstěnu je to složitější. Například ve čtyřstěnu $ABCD$, který je vepsán do kváдру $AEBFGDHC$ s navzájem různými rozměry, se žádné dvě tělesové výšky neprotínají. (Lze se o tom přesvědčit výpočtem, viz úlohy 1 a 2 na konci článku.)

Pokud platí $|AE| = |AF| = a$ a $|AG| = b$, obr. 1, je čtyřstěn souměrný podle navzájem kolmých rovin $\varrho = ABH$, $\rho' = CDE$, a tedy i podle jejich průsečnice, osy o čtyřstěnu, na níž leží středy S_1 a S_2 čtvercových podstav $AEBF$ a $GDHC$ opsaného kváдру (úloha 3).



Obr. 1 Výšky čtyřstěnu vepsaného do kváдру se čtvercovou podstavou.

Tělesové výšky AA_0 a BB_0 jsou podle této osy souměrně sdružené. Protínají se tedy v ortocentu $V_1 \in o$ trojúhelníku ABS_2 . Analogicky se

výšky CC_0 a DD_0 protínají v ortocentru $V_2 \in o$ trojúhelníku CDS_1 . Platí

$$|S_2V_2| = |S_1V_1| = \frac{a^2}{2b} \quad (1)$$

(úloha 4), a tak se všechny výšky čtyřstěnu protnou v jediném bodě jen tehdy, když $a = b$ (pravidelný čtyřstěn vepsaný do krychle).

V příspěvku upřesníme podmínky existence průsečíků výšek čtyřstěnu a pak se zaměříme na základní vlastnosti ortocentrického čtyřstěnu.

Definice 1

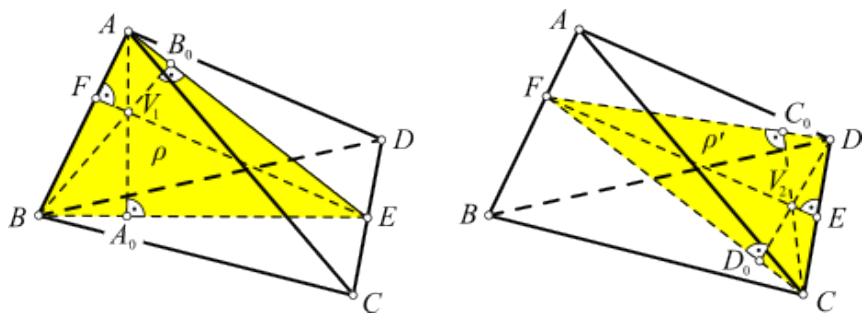
Ortocentrický čtyřstěn je čtyřstěn, v němž se všechny tělesové výšky protínají v jediném bodě, tzv. *ortocentru čtyřstěnu*. Čtyřstěn, jehož vrcholy lze označit A, B, C a D tak, aby se výšky AA_0 a BB_0 protínaly v bodě V_1 a výšky CC_0 a DD_0 v bodě $V_2 \neq V_1$, se nazývá *semiortocentrický čtyřstěn*. Má-li čtyřstěn všechny své výšky mimoběžné, nazveme jej *neortocentrický čtyřstěn*.

Věta 1

Tělesové výšky ze dvou vrcholů čtyřstěnu se protínají, právě když je hrana těmito vrcholy určená kolmá k protilehlé hraně čtyřstěnu.

Důkaz. Nechť se výšky AA_0 a BB_0 čtyřstěnu $ABCD$ protínají v bodě V_1 . Platí-li $V_1 \in \{A, B\}$, pak $AB \perp ACD$, nebo $AB \perp BCD$. Pro obě situace tedy platí $AB \perp CD$.

Je-li $V_1 \neq A$ a $V_1 \neq B$, leží výšky AA_0 a BB_0 v jednoznačně určené rovině $\rho = ABV_1$. Přímka AA_0 je kolmá ke každé přímce roviny BCD , a BB_0 ke každé přímce roviny ACD , viz obr. 2 vlevo. To však znamená, že $CD \perp AA_0$ a $CD \perp BB_0$ neboli $CD \perp \rho$. Odtud $AB \perp CD$.



Obr. 2 Průsečíky V_1 a V_2 výšek semiortocentrického čtyřstěnu.

Obráceně, platí-li $AB \perp CD$, pak existuje jediný bod $E \in CD$, pro nějž je rovina $\rho = ABE$ kolmá na přímkou CD . V trojúhelníku ABE se výšky AA_0 a BB_0 protínají v jeho ortocentru V_1 . Ze vztahů $AA_0 \perp BE$ a $AA_0 \perp CD$ plyne $AA_0 \perp BCD$. Analogicky platí $BB_0 \perp ACD$, a tak se přímky AA_0 a BB_0 protínají v bodě V_1 i jako tělesové výšky čtyřstěnu.

Poznámka. Také výšky z vrcholů C, D se zřejmě protínají v bodě V_2 roviny $\rho' = CDF$ kolmé na AB , obr. 2 vpravo. Úsečka $EF \in \rho \cap \rho'$ je nejkratší příčkou mimoběžek AB a CD . Za podmínky $AB \perp CD$ obsahuje oba průsečíky V_1 a V_2 . Je-li čtyřstěn $ABCD$ ortocentrický, tak na ní leží jeho ortocentrum.

V nedávném příspěvku [2] jsme si ukázali, že protilehlé hrany čtyřstěnu jsou totožné s mimoběžnými úhlopříčkami protilehlých stěn opsaného rovnoběžnostěnu. Jsou tedy na sebe kolmé, právě když tyto dvě stěny jsou buď kosočtverce, nebo čtverce.

Má-li čtyřstěn dvě dvojice kolmých protilehlých hran, pak jsou všechny hrany opsaného rovnoběžnostěnu stejně dlouhé, a proto jsou na sebe kolmé i protilehlé hrany třetí dvojice hran čtyřstěnu. Takový rovnoběžnostěn budeme nazývat *romboedron*.

Ve čtyřstěnu vepsaném do romboedronu se protínají každé dvě z jeho čtyř výšek a všechny tyto výšky mají jediný průsečík V . (Kdyby například platilo $AA_0 \cap BB_0 = V_1$ a $BB_0 \cap CC_0 = V_2 \neq V_1$, byly by přímky AA_0 a CC_0 mimoběžné, což je spor.) Poznatky shrneme do věty 2.

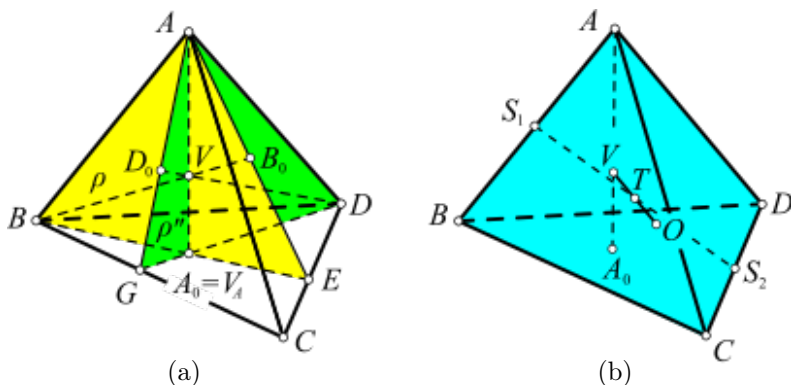
Věta 2

- Čtyřstěn je ortocentrický, právě když je vepsán do romboedronu (tzn. do krychle, nebo do zkosené krychle).
- Čtyřstěn je semiortocentrický, právě když jen dvě protilehlé stěny opsaného rovnoběžnostěnu jsou buď čtverce, nebo kosočtverce.
- Všechny výšky čtyřstěnu jsou mimoběžné, právě když je každá stěna opsaného rovnoběžnostěnu obdélníkem, nebo kosodélníkem.
- Jiné možnosti vzájemné polohy výšek čtyřstěnu neexistují.

Věta 3

Na každé hraně ortocentrického čtyřstěnu se paty výšek sousedních stěn stýkají a paty jeho tělesových výšek leží v ortocentrech stěn čtyřstěnu.

Důkaz. Necht' $ABCD$ je čtyřstěn s ortocentrem $V \notin \{A, B, C, D\}$, obr. 3 (a). Z faktů $AA_0 \perp BCD$, $BB_0 \perp ACD$ a $V = AA_0 \cap BB_0$ plyne $CD \perp ABV$. Bod $E = ABV \cap CD$ je proto společnou patou stěnových výšek AE a BE .



Obr. 3 (a) K důkazu věty 3. (b) Těžiště T půlí úsečku OV .

Navíc platí $A_0 \in BE$, neboť BE je průsečnice roviny $\rho = ABV$ s rovinou BCD . Analogickou úvahou pro rovinu $\rho'' = ADV$ zjistíme, že bod A_0 leží i na výšce DG stěny BCD , a tak se nachází v jejím ortocentru V_A .

Ověření věty pro $V \in \{A, B, C, D\}$ ponechme čtenáři.

V článku [1] jsme se seznámili s Eulerovou přímkou trojúhelníku, na níž leží jeho ortocentrum, těžiště a střed opsané kružnice. Prostorová analogie tohoto poznatku plyne ze symetrie opsaného rovnoběžnostěnu (úloha 6). Je též důsledkem věty 4, kterou dokážeme pomocí vektorové algebry.

Věta 4

Je-li T těžiště čtyřstěnu $ABCD$, V jeho ortocentrum a O střed kulové plochy $\mathcal{K}$ čtyřstěnu opsané, pak platí

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}), \quad (2)$$

$$\overrightarrow{VO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VB} + \overrightarrow{VC} + \overrightarrow{VD}), \quad (3)$$

$$\overrightarrow{OV} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}). \quad (4)$$

Důkaz. Jsou-li S_1, S_2 po řadě středy hran AB, CD , pak T je středem úsečky S_1S_2 ([2], věta 2). Užitím známého vztahu pro polohový vektor středu úsečky obdržíme

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OS_1} + \overrightarrow{OS_2}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})\right)$$

a odtud (2). Vztah (2) zřejmě platí i tehdy, když střed O opsané sféry nahradíme libovolným jiným počátečním bodem.

K důkazu rovnosti (3) položíme $\overrightarrow{VX} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{VA} + \overrightarrow{VB} + \overrightarrow{VC} + \overrightarrow{VD})$ a pomocí vhodných úprav ukážeme, že $X = O$. (Skalární součin $\overrightarrow{ZY} \cdot \overrightarrow{ZY}$ značíme $\overrightarrow{ZY}^2$.)

Platí

$$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{VX} - \overrightarrow{VA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{VB} + \overrightarrow{VC} + \overrightarrow{VD} - \overrightarrow{VA})$$

a odtud

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AX}^2 &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{VA}^2 + \overrightarrow{VB}^2 + \overrightarrow{VC}^2 + \overrightarrow{VD}^2 + 2\overrightarrow{VB}(\overrightarrow{VC} - \overrightarrow{VA}) + \\ &\quad + 2\overrightarrow{VC}(\overrightarrow{VD} - \overrightarrow{VA}) + 2\overrightarrow{VD}(\overrightarrow{VB} - \overrightarrow{VA})) = \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{VA}^2 + \overrightarrow{VB}^2 + \overrightarrow{VC}^2 + \overrightarrow{VD}^2). \end{aligned}$$

Ze vztahu $\overrightarrow{VB} \perp \overrightarrow{AC}$ totiž plyne

$$\overrightarrow{VB}(\overrightarrow{VC} - \overrightarrow{VA}) = \overrightarrow{VB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

Stejně tak

$$\overrightarrow{VC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \quad \text{a} \quad \overrightarrow{VD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0.$$

Vidíme, že pravá strana rovnosti

$$|AX|^2 = \frac{1}{4}(|AV|^2 + |BV|^2 + |CV|^2 + |DV|^2)$$

se zůstává při cyklické záměně bodů A, B, C a D stejná. To znamená, že $|AX| = |BX| = |CX| = |DX|$ neboli $X = O$.

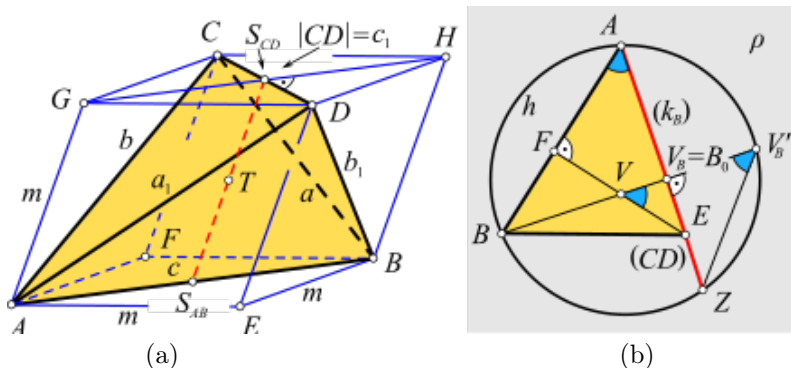
Vztah (4) plyne z (3) po přepsání do tvaru

$$-2\overrightarrow{OV} = (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OV}) + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OV}) + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OV}) + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OV}).$$

Ze vztahů (2) a (4) snadno zjistíme, že $\overrightarrow{OV} = 2\overrightarrow{OT}$. Platí tedy věta 5.

Věta 5 (Analogie Eulerovy přímky trojúhelníku)

Těžiště ortocentrického čtyřstěnu leží ve středu úsečky, jejímiž krajními body jsou ortocentrum čtyřstěnu a střed opsané kulové plochy.



Obr. 4 (a) Ortocentrický čtyřstěn. (b) K důkazu věty 7.

Obr. 4(a) znázorňuje čtyřstěn $ABCD$ vepsaný do romboedronu, s délkou hrany m . Položme $|BC| = a$, $|AD| = a_1$, $|CA| = b$, $|BD| = b_1$, $|AB| = c$ a $|CD| = c_1$.

Těžiště T čtyřstěnu půlí jeho střední příčky (shodné s hranami čtyřstěnu), a proto má od středů všech hran čtyřstěnu vzdálenost $\frac{m}{2}$. Důsledkem je následující věta.

Věta 6

Při označení podle obr. 4(a) obsahuje kulová plocha $\mathcal{K}_1(T, \frac{m}{2})$ středy stran kterékoliv stěny ortocentrického čtyřstěnu, a tak v její rovině vytíná kružnici devíti bodů nazývanou též *Feuerbachova kružnice*. Sféra $\mathcal{K}_1$ proto prochází šesti středy hran čtyřstěnu, všemi šesti patami jeho stěnových výšek a dvanácti body, které půlí úseky těchto výšek od ortocentra stěny k vrcholu. Nazývá se *první kulová plocha 12 bodů*¹⁾.

K odvození dalšího poznatku využijeme obr. 4 (b), jenž znázorňuje řez rovinou $\rho = ABE$ kolmou na hranu CD ortocentrického čtyřstěnu $ABCD$. Kolmý průmět hrany CD do roviny ρ splývá s bodem E . Výška EF trojúhelníku ABE je nejkratší příčkou mimoběžek AB a CD , a tak se (podle poznámky za důkazem věty 1) protíná s výškou BB_0 v ortocentru V čtyřstěnu.

Položme $Z = \mathcal{K} \cap AE$ a $V'_B = \mathcal{K} \cap BB_0$. Čtyřstěnu opsaná sféra $\mathcal{K}$ protíná rovinu ACD v kružnici k_B , jejíž průmět je na obrázku totožný s úsečkou AZ obsahující výšku AE stěny ACD .

¹⁾Těchto posledních 12 bodů se do názvu sféry $\mathcal{K}_1$ nezahrnuje.

Je známo, že $|V_B Z| = 2|V_B E|$ (viz např. [1], věta 1). Trojúhelníky $ZV'_B V_B$ a EVV_B jsou podobné, neboť mají úhel při vrcholu V_B pravý a kromě toho platí $|\sphericalangle V_B V'_B Z| = |\sphericalangle BV'_B Z| = |\sphericalangle BAZ| = |\sphericalangle V_B V E|$ (obvodové úhly a tětivový čtyřúhelník $AFV V_B$).

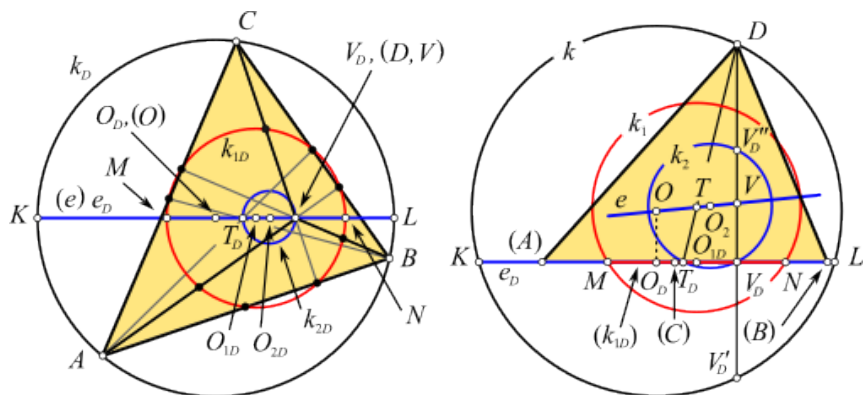
Z podobnosti trojúhelníků plyne

$$|V'_B V_B| : |V_B V| = |V_B Z| : |V_B E| = 2 : 1$$

a odtud věta 7.

Věta 7

Průsečík výšky ortocentrického čtyřstěnu s opsanou sférou (různý od vrcholu čtyřstěnu) má od paty této výšky dvakrát větší vzdálenost než ortocentrum čtyřstěnu.



Obr. 5 Kolmé průměty ort. čtyřstěnu $ABCD$ do rovin ABC a ODV .

V důsledku věty 7 prochází sféra $\mathcal{K}_2 = \mathcal{H}_{V, \frac{1}{3}}(\mathcal{K})$, kde $\mathcal{H}_{V, \frac{1}{3}}$ je stejnolehlost se středem v ortocentru V a koeficientem $\frac{1}{3}$, patami výšek čtyřstěnu. Navíc dělí úseky těchto výšek od ortocentra k vrcholu čtyřstěnu v poměru 1:2. Například pro úsek DV platí $|VV''_D| : |V''_D D| = 1 : 2$, obr. 5 vpravo.

Není těžké ověřit, že též $\mathcal{H}_{T, -\frac{1}{3}}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}_2$, a tak $\mathcal{K}_2$ obsahuje také těžiště stěn čtyřstěnu (důsledek věty 2 z článku [2]).

Věta 8

Ortocentra a těžiště stěn ortocentrického čtyřstěnu $ABCD$ leží na kulové ploše, jež je obrazem opsané sféry ve stejnolehlosti se středem v jeho

ortocentru V a koeficientem $\frac{1}{3}$. Tato tzv. *druhá kulová plocha 12 bodů* protíná úsečky VY ($Y \in \{A, B, C, D\}$) v bodech V_Y'' pro něž $|YV_Y''| : |V_Y''V| = 2 : 1$.

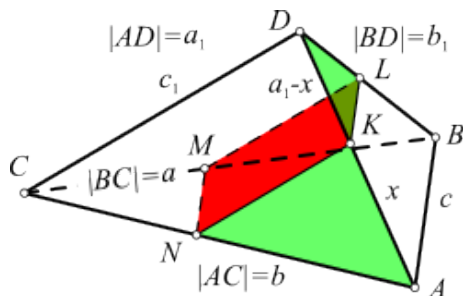
Poznátky z vět 4 až 8 názorně představuje obr. 5. Nalevo je kolmý průmět čtyřstěnu do roviny ABC . V závorkách jsou uvedeny prvky, které v průmětně neleží, ale promítají se do daného místa. Sféra $\mathcal{K}$ protíná rovinu ABC v kružnici $k_D(O_D; r_D)$, sféra $\mathcal{K}_1$ ji protíná ve Feuerbachově kružnici $k_{1D}(O_{1D}; r_{1D})$ a sféra $\mathcal{K}_2$ v kružnici $k_{2D}(O_{2D}; r_{2D})$. Středů obou kružnic, těžiště T_D a ortocentrum V_D trojúhelníku ABC leží na Eulerově přímce e_D , která je kolmým průmětem přímky $e = OV$ do roviny ABC .

Pravá část obr. 5 představuje kolmý průmět čtyřstěnu do roviny DOV , která (v daném pořadí) protíná sféry $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}_1$ a $\mathcal{K}_2$ v hlavních kružnicích k , k_1 a k_2 . Poznamenejme ještě, že sféru $\mathcal{K}_2$ lze zavést i pro čtyřstěny, jež nejsou ortocentrické, pokud nahradíme ortocentrum čtyřstěnu jeho *Mongeovým bodem* M , průsečíkem všech šesti *Mongeových rovin*, které procházejí středy hran čtyřstěnu vždy kolmo na hranu protilehlou. Je-li čtyřstěn ortocentrický, pak $M = V$. Podrobněji s těmito a dalšími poznátky seznamuje J. Šrubař v práci [4].

Příspěvek ukončíme vyřešeným příkladem a několika doplňujícími úlohami.

Příklad

Ukažte, že řez ortocentrického čtyřstěnu rovinou, která prochází jeho vnitřním bodem rovnoběžně se dvěma protilehlými hranami, je pravoúhelník. Dále určete, pro které z takových rovin je řezem čtverec a pro které je řezem obdélník, jehož jedna strana je k -krát delší než strana sousední.



Obr. 6 Řez čtyřstěnu rovinou rovnoběžnou s hranami AB a CD .

Řešení. Bez újmy na obecnosti uvažujme řez $KLMN$ rovinou rovnoběžnou s hranami AB a CD ortocentrického čtyřstěnu $ABCD$, obr. 6. Z faktů $KL \parallel AB \parallel MN$, $NK \parallel CD \parallel ML$ a $AB \perp CD$ plyne, že $KLMN$ je pravoúhelník.

Platí $\triangle AKN \sim \triangle ADC$ a $\triangle DKL \sim \triangle DAB$, a tak

$$\frac{|AK|}{|AD|} = \frac{|NK|}{|CD|} \quad \text{a} \quad \frac{|KD|}{|AD|} = \frac{|KL|}{|AB|}.$$

Odtud s využitím označení na obr. 6 vyjádříme rozměry řezu $KLMN$ jako funkce proměnné $x = |AK|$,

$$|KN| = \frac{c_1}{a_1}x \quad \text{a} \quad |KL| = c - \frac{c}{a_1}x \quad (5)$$

Z podmínky $|KN| = |KL|$ pak plyne, že

$$\text{pro } x = \frac{c}{c + c_1}a_1 \text{ je řezem čtverec o straně } \frac{cc_1}{c + c_1} \text{ cm.} \quad (6)$$

Analogicky obdržíme výsledky pro obdélníkové řezy.

Rovnost $|KL| = k \cdot |KN|$ platí, když

$$x = \frac{c}{c + kc_1}a_1, \quad |KN| = \frac{cc_1}{c + kc_1} \quad \text{a} \quad |KL| = \frac{kcc_1}{c + kc_1},$$

a rovnost $|KN| = k \cdot |KL|$ platí, když

$$x = \frac{kc}{c_1 + kc}a_1, \quad |KL| = \frac{cc_1}{c_1 + kc} \quad \text{a} \quad |KN| = \frac{kcc_1}{c_1 + kc}.$$

Doplňující úlohy

- Čtyřstěn $ABCD$ je vepsán do kváдру $AEBFGDHC$, v němž $|FB| = 2$, $|FA| = 3$ a $|FC| = 1$. Metodou souřadnic dokažte, že jeho výšky leží na navzájem mimoběžných přímkách.

(Zvolte např. kartézskou soustavu souřadnic s počátkem F tak, aby $A = [0, 0, 3]$, $B = [2, 0, 0]$, $C = [0, 1, 0]$. Potom určete parametrická vyjádření kolmic z vrcholů čtyřstěnu k protilehlým stěnám a vyšetřete jejich vzájemnou polohu.)

- Ve čtyřstěnu z úlohy 1 položte $|FB| = a$, $|FC| = b$ a $|FA| = c$. Pak metodou souřadnic vyšetřete vzájemnou polohu kolmic vedených z vrcholů čtyřstěnu na protilehlé stěny. Proveďte diskusi řešení vzhledem k možným hodnotám a , b , c .

3. Dokažte, že složením dvou souměrností podle navzájem kolmých rovin vznikne symetrie podle průsečnice obou rovin.
4. Pro situaci z obr. 1 dokažte, platnost vztahů $\triangle AV_1S_1 \sim \triangle S_2BS_1$ a $\triangle CV_2S_2 \sim \triangle S_1DS_2$. S jejich využitím odvoďte rovnosti (1).
5. Čtyřstěn je ortocentrický, právě když má stejně dlouhé střední příčky. Dokažte.
6. Dokažte, že trojboký jehlan má stejně dlouhé boční hrany, právě když leží pata jeho výšky ve středu kružnice opsané podstavě. Pak toto tvrzení využijte k důkazu věty 5.
(Využijte symetrii opsaného rovnoběžnostěnu.)
7. Dokažte, že délky hran ortocentrického čtyřstěnu splňují při označení podle obr. 4 vztahy

$$a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = c^2 + c_1^2 = 4m^2. \quad (7)$$

8. Do romboedronu $AEBFGDHC$ je vepsán čtyřstěn $ABCD$. Určete jeho výšky a délky hran, jestliže při označení podle obr. 4 platí $m = 5\sqrt{2}$ cm, $|\sphericalangle BED| = 60^\circ$ a $|\sphericalangle AEB| = |\sphericalangle AED| = 90^\circ$.
(Možno řešit konstrukcí nebo výpočtem. $a = a_1 = c = c_1 = 10$ cm, $b_1 = 5\sqrt{2} \doteq 7,07$ cm, $b = 5\sqrt{6} \doteq 12,25$ cm, $v_B = v_D = 2\sqrt{10} \doteq 6,32$ cm, $v_A = v_C = \frac{10}{7}\sqrt{42} \doteq 9,26$ cm.)
9. V ortocentrickém čtyřstěnu $ABCD$ je dáno $|AB| = |AC| = 20$ cm a $|BC| = |DD_0| = 24$ cm. Určete délky ostatních hran čtyřstěnu.
($|AD_0| = 7$ cm, $|AD| = 25$ cm, $|BD| = |CD| = 3\sqrt{89} \doteq 28,30$ cm.)

Literatura

- [1] Leischner, P.: O vlastnostech trojúhelníku spjatých s jeho ortocentrem, Matematika–fyzika–informatika, roč. 33 (2024), č. 4, s. 247–253.
- [2] Leischner, P.: Trojboký jehlan nebo čtyřstěn? Matematika–fyzika–informatika, roč. 34 (2025), č. 4, s. 241–251.
- [3] Ponarin, J., P.: Elementarnaja geometrija 2. MCNMO, Moskva 2006.
- [4] Šrubař, J.: Prostorová zobecnění vlastností trojúhelníku. Disertační práce, MFF UK, 2010. Dostupné na <https://dspace.cuni.cz/handle/20.500.11956/32894?locale-attribute=cs>.

Heronovské trojúhelníky

JAROSLAV ZHOUF

FIT ČVUT, Praha

Článek se věnuje řešení diofantovské rovnice, k níž vede úloha nalézt trojúhelníky s celočíselnými délkami stran, majícími celočíselný obsah i obvod – tyto trojúhelníky nazýváme *heronovskými*.

Heronovské trojúhelníky

Pojem *heronovský trojúhelník*, jenž budeme v tomto článku užívat, se příliš často nepoužívá, spíše se nezkráceně hovoří o trojúhelníku, který má celočíselné délky stran a, b, c a celočíselný obsah. Pro výpočet jeho obsahu S využíváme *Heronův vzorec*

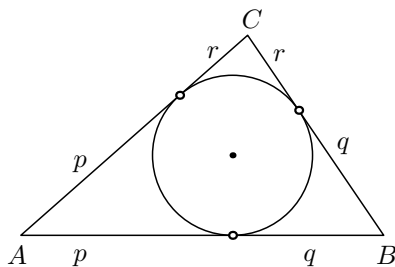
$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad \text{kde } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Výchozí úloha (viz [1, s. 15, 16])

Najděte všechny trojúhelníky, které mají celočíselné délky stran a číselný poměr jejich obsahu a obvodu je dané kladné racionální číslo.

Obecné řešení dané úlohy

Jak jsme již uvedli, označíme a, b, c celočíselné délky stran trojúhelníku ABC , s jeho polovina jeho obvodu, p, q, r jsou délky úseků stran podle obr. 1 a k kladný racionální poměr celočíselných hodnot obsahu a obvodu trojúhelníku.



Obr. 1 Heronovský trojúhelník

Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $p \geq q \geq r$. Z těchto nerovností plyne $2p \geq q + r$, což využijeme v dalších úvahách.

Z obr. 1 je vidět, že

$$s = p + q + r, \quad q + r = a, \quad p + r = b, \quad p + q = c, \quad (1)$$

a tedy $p = s - a$, $q = s - b$, $r = s - c$. Zadaná úloha pak přechází na řešení diofantovské rovnice s neznámými p , q , r a zadanou hodnotou k :

$$\begin{aligned} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} &= k \cdot (a+b+c), \\ s(s-a)(s-b)(s-c) &= k^2 \cdot 4s^2, \\ pqr &= k^2 \cdot 4(p+q+r) \end{aligned} \quad (2)$$

Abychom rovnici (2) vyřešili, převedeme ji na tvar

$$\begin{aligned} p(qr - 4k^2) &= 4k^2(q+r), \\ p &= \frac{4k^2(q+r)}{qr - 4k^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Případ $k = 1$

Případ $k = 1$ znamená, že číselně jsou obsah a obvod trojúhelníku stejné. Diofantovská rovnice (2) má v tomto případě tvar

$$pqr = 4(p+q+r).$$

Rovnost (3) převedeme s využitím odhadu $2p \geq q + r$ na nerovnost:

$$p = \frac{4 \cdot 1^2(q+r)}{qr - 4 \cdot 1^2} = \frac{4(q+r)}{qr - 4} \leq \frac{8p}{qr - 4}.$$

Díky tomu, že číslo p je kladné, odtud získáme soustavu dvou nerovnic

$$qr > 4 \quad \text{a} \quad 1 \leq \frac{8}{qr - 4}, \quad \text{tj.} \quad qr > 4 \quad \text{a} \quad qr \leq 12.$$

Platí tedy $4 < qr \leq 12$. Z těchto nerovností najdeme všechny přípustné dvojice r , q , kterých je třináct. K nim pak získáme příslušná čísla p a následně i trojice délek stran (a, b, c) trojúhelníku ABC .

Např. pro dvojici $r = 1$, $q = 5$ dostaneme po dosazení do (3)

$$p = \frac{4 \cdot (5+1)}{5 \cdot 1 - 4} = 24$$

a poté z (1) dopočteme hodnoty $a = 6$, $b = 25$, $c = 29$.

Analogickým způsobem dostaneme další čtyři skupiny hledaných čísel. Těch je dohromady pět a jsou uvedeny v tab. 1. Navíc třetí a pátý trojúhelník jsou pythagorejské.

r	p	q	a	b	c
1	5	24	6	25	29
1	6	14	7	15	20
2	3	10	5	12	13
1	8	9	9	10	17
2	4	6	6	8	10

Tab. 1

Dalších osm možných skupin čísel nevyhovuje, a to ze dvou důvodů. Jeden ukazuje např. dvojice $r = 1$, $q = 7$, kdy číslo

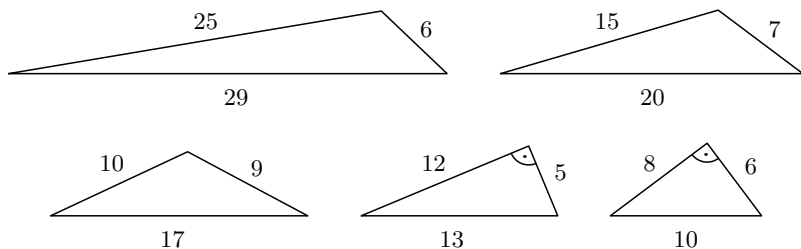
$$p = \frac{4 \cdot 8}{7 - 4} = \frac{32}{3}$$

není celé. Druhý např. dvojice $r = 1$, $q = 9$, kdy číslo

$$p = \frac{4 \cdot 10}{9 - 4} = 8$$

je menší než číslo $q = 9$.

Na obr. 2 je znázorněno všech pět heronovských trojúhelníků, které mají číselně stejné obsahy i obvody.



Obr. 2

Případ $k = 2$

Příslušné trojúhelníky, mající obsah číselně dvakrát větší než obvod, hledáme z rovnosti a nerovností

$$p = \frac{16(q+r)}{qr-16} \leq \frac{32p}{qr-16},$$
$$16 < qr \leq 48.$$

V tomto případě je nutno prověřit 81 skupin čísel r, q, p, a, b, c . Z nich vyhovuje osmnáct heronovských trojúhelníků s délkami stran

$$\begin{array}{lll} (18, 289, 305), & (19, 153, 170), & (21, 85, 104), \\ (25, 51, 74), & (33, 34, 65), & (11, 90, 97), \\ (12, 50, 58), & (14, 30, 40), & (15, 26, 37), \\ (18, 20, 34), & (9, 75, 78), & (10, 35, 39), \\ (11, 25, 30), & (15, 15, 24), & (13, 14, 15), \\ (9, 40, 41), & (10, 24, 26), & (12, 16, 20). \end{array}$$

Mezi uvedenými trojúhelníky je jeden rovnoramenný, tři poslední jsou pythagorejské – $(9, 40, 41)$, $(10, 24, 26)$ a $(12, 16, 20)$.

Případ $k = 3$

Tento případ, kdy obsah trojúhelníku je číselně třikrát větší než jeho obvod, je již numericky velmi pracný, je proto vhodné využít výpočetní techniku. Jako ukázkou uveďme jednu heronovskou trojici $(a, b, c) = (15, 36, 39)$. Tato trojice je navíc pythagorejská.

Případ $k = \frac{1}{2}$

V tomto případě je obsah trojúhelníku číselně dvakrát menší než jeho obvod. Platí

$$p = \frac{q+r}{qr-1} \leq \frac{2p}{qr-1},$$
$$1 < qr \leq 3.$$

Zde existuje jediná trojice $(a, b, c) = (3, 4, 5)$.

Případ $k = \frac{3}{2}$

V tomto případě, kdy je obsah trojúhelníku číselně jedenapůlkrát větší než jeho obvod, platí

$$p = \frac{9(q+r)}{qr-9} \leq \frac{18p}{qr-9},$$
$$9 < qr \leq 27.$$

Zde existuje mnoho vyhovujících trojic (a, b, c) a získat jejich úplný výčet je opět časově náročné. Na ukázkou uveďme heronovskou trojici $(9, 12, 15)$, která je zároveň trojicí pythagorejskou.

Případ $k = \frac{1}{3}$

V tomto případě, kdy obsah trojúhelníku je číselně třikrát menší než jeho obvod, platí

$$p = \frac{\frac{4}{9}(r+q)}{rq - \frac{4}{9}} \leq \frac{\frac{8}{9}p}{rq - \frac{4}{9}},$$
$$\frac{4}{9} < qr \leq \frac{4}{3}.$$

Vyhovuje jedině $qr = 1$, tudíž $r = q = 1$. Odtud $p = \frac{8}{5}$. To znamená, že žádný takový heronovský trojúhelník neexistuje.

Obecná podmínka pro číselný podíl k obsahu a obvodu trojúhelníku

Jak jsme již uvedli, pro libovolné k platí

$$p = \frac{4k^2(q+r)}{qr-4k^2} \leq \frac{8k^2p}{qr-4k^2},$$
$$4k^2 < qr \leq 12k^2.$$

Jelikož pro přirozená čísla p, q platí $1 \leq qr$, je $1 \leq 12k^2$, tj.

$$k \geq \frac{\sqrt{3}}{6} \doteq 0,28.$$

Viděli jsme, že tato nerovnost neznámá ekvivalenci s existencí heronovského trojúhelníku – jde pouze o implikaci.

Ukázka případu čísla k , které není racionální

V celém předchozím textu jsme předpokládali, že k je číslo racionální. Z předchozí kapitoly je ale zřejmé, že by analogické výpočty mohly být použity, i kdyby k bylo číslo iracionální. Na závěr si tedy jednu takovou situaci ukažme.

Jelikož se ve vzorci (3) pro výpočet čísel p , q , r vyskytuje druhá mocnina, budeme kvůli jednoduššímu výpočtu uvažovat např. $k = \sqrt{2}$. V tomto případě platí

$$p = \frac{8(q+r)}{qr-8} \leq \frac{16p}{qr-8},$$

a tedy

$$8 < qr \leq 24.$$

Úlohu řešíme stejně jako v předchozích kapitolách. Hledanými trojicemi (a, b, c) jsou $(10, 80, 89)$, $(11, 45, 54)$, $(12, 33, 43)$, $(13, 27, 38)$ i další.

Závěr

V předchozích kapitolách jsme uvedli metodu, umožňující vyhledávat heronovské trojúhelníky. Zdá se, že pokud se zvětšuje celočíselný podíl obsahu a obvodu trojúhelníku, zvětšuje se též počet heronovských trojúhelníků. Toto tvrzení však není dosud dokázáno. Stejně tak není nikde ukázáno, jak počet heronovských trojúhelníků závisí na číselné hodnotě poměru jejich obsahu a obvodu.

V článku se také mluví o pythagorejských trojúhelnících. Platí, že každý pythagorejský trojúhelník je heronovský [2, 3]. Důkaz tohoto tvrzení je snadný, proto je ponechán čtenáři. Platí však věta obrácená? Důkaz správné odpovědi je v podstatě proveden v tomto článku.

Literatura

- [1] *Bradley, Ch. J.*: Challenges in Geometry for Mathematical Olympiads past and present. Oxford, University Press, 2005.
- [2] *Zhouf, J.*: Písemné maturitní zkoušky do gymnaziálních tříd se zaměřením na matematiku. Pedagogická fakulta UK, Praha, 2007.
- [3] *Zhouf, J.*: Písemné maturitní zkoušky na gymnáziích se zaměřením na matematiku. GlobeEdit, Londýn, 2024.

Objavovanie na hodinách matematiky II

MATÚŠ STÁŇA

Gymnázium M. M. Hodžu, Liptovský Mikuláš, SLOVENSKO

Teória grafov vytvára veľmi vhodné prostredie pre rozvoj konštruktivistického prístupu vo vyučovaní. V článku *Objavovanie na hodinách matematiky I* [1], sme čitateľom ponúkli niektoré inšpirácie ako problematiku využiť. Zamerali sme sa na problém nájdania najkratšej (minimálnej) cesty v grafe, ďalej sme sa venovali hľadaniu minimálnej kostry grafu a v neposlednom rade sme prostredníctvom úlohy načrtli problém rovinného grafu. V nasledujúcom texte chceme na tieto úlohy nadviazať a pridať ďalšie.

Úlohy predstavené v predchádzajúcom článku sa môžu niektorým čitateľom zdať zložité. V tomto texte sa preto pozrieme na problematiku, s ktorou sme sa všetci stretli už pravdepodobne v predškolskom veku. Patrí tiež do okruhov riešených v rámci teórie grafov. Ide o kreslenie jedným ťahom. Tento problém preberieme z dvoch uhlov pohľadu: či už ako voľné kreslenie, alebo ako kreslenie predpísaným smerom. Budeme sa teda venovať neorientovaným i orientovaným grafom. Použité úlohy môžu slúžiť ako určitá propedeutika k tým, ktoré sme predstavili v predchádzajúcom článku. Okrem toho sme do tohto textu pridali aj doplnok: dôkaz Eulerovej vety o počte vrcholov, hrán a stien v rovinnom grafe. Ide možno o akademickejší problém, ktorý sa odlišuje od ostatných predstavených úloh. Ku všetkým je totiž možné nájsť určitý reálny obraz. Dôkaz matematickej vety sa z tohto rámca vymyká. Na druhej strane predstavuje vhodné prostredie pre pochopenie princípov dokazovania matematickou indukciou. Takéto použitie matematickej indukcie pokladáme pre žiakov za oveľa priateľnejšie, ako keď ju aplikujeme napr. v teórii čísel. Pritom je potrebné zdôrazniť, že nám nejde o dôkaz ako taký. Je to možnosť ďalšieho rozvoja myslenia žiaka. Len s malou pomocou učiteľa dokáže dôkaz uskutočniť aj žiak sám. A to aj bez vedomostí o tom, že práve urobil indukčný dôkaz.

Predtým, ako prejdeme k jednotlivým úlohám, zhrnieme naše základné teoretické východiská. Toto zhrnutie bude len stručné, nakoľko v predchádzajúcom článku sme sa mu venovali podrobnejšie. Veríme, že aj tento text bude pre učiteľov z prostredia základných i stredných škôl zaujíma-

vým podnetom. Okrem samotných úloh autor dopĺňa aj svoje postrehy a skúsenosti, ktoré nadobudol pri ich riešení so žiakmi.

Teória grafov a aplikovanie konštruktivismu v matematike

Vytvoriť pre žiakov priestor objavovať, v mysli konštruovať, nie je vôbec jednoduché. Jednou z hlavných úloh učiteľa je zvoliť vhodný materiál, s ktorým žiak bude pracovať. V matematike ide o výber problémov a úloh, ktoré žiak rieši. Teória grafov predstavuje v tomto smere správnu voľbu. Dôvodom je najmä to, že eliminuje dva základné riziká, s ktorými sa stretávame, ak chceme žiakom zadať úlohu vedúcu k premýšľaniu a používaniu vyšších poznávacích funkcií. A to nielen vo faktickej rovine, ale aj v rovine konceptov, procedúr či na metakognitívnej úrovni.

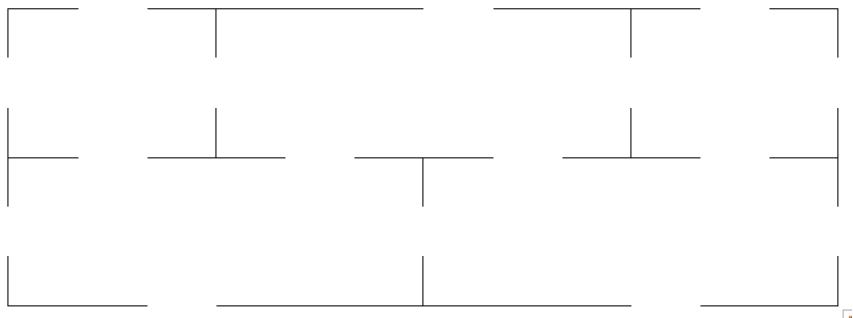
Prvým rizikom je často to, že úloha je v podstate príliš jednoduchá, pre žiaka rutinná. Pri jej riešení žiak nepotrebuje nič odhaliť, len aplikuje naučené postupy. Pre mozog je to jednoduchšia a časovo efektívnejšia cesta. Preto nevzniká motivácia objavovať. Na druhej strane, ľahko môže vzniknúť aj opačná situácia. Úloha je tak náročná, že žiak nevie nič objaviť, stratí motiváciu a riešenie ukončí. Teória grafov predstavuje problémy, kde žiak nepotrebuje žiadne zvláštne teoretické poznatky. Môže experimentovať, skúšať a hľadať riešenia. Vytvára sa priestor pre tímovú prácu, je prítomná určitá hravosť. S úlohou sa žiaci vysporiadajú spravidla rôzne podľa spôsobu ich myslenia. Ak to zjednodušíme, úloha sa ako keby prispôbovala potenciálu žiaka. Každý ju nejak uchopí a začne. Aj tu však môžu vzniknúť situácie, keď žiak potrebuje pomoc. Vtedy je dôležitá rola učiteľa a jeho mentorský prístup.

Okruhy teórie grafov minimálne v slovenskom prostredí nie sú súčasťou vzdelávacích štandardov pre základné či stredné školy. Na štandardných vyučovacích hodinách má učiteľ aj obmedzené možnosti aplikovať metódy konštruktivistického prístupu k vyučovaniu matematiky. Je tlačný časom a rozsahom učiva, ktoré musí so žiakmi prejsť. Predsa však školy majú možnosť vytvoriť prostredie, ktoré bude pre začlenenie aj týchto prístupov priaznivejšie. Možno taký priestor vznikne na štandardných hodinách na začiatku či konci školského roka alebo vie škola otvoriť pre žiakov rôzne nepovinné či voliteľné predmety. Pripomenieme, že autor úlohy zaraďuje počas voliteľného predmetu *Seminár z matematiky*. Seminár je organizovaný ako dvojhodinový blok, preto sú úlohy dizajnované na cca 70 minút. Spätné väzby k riešeniu úloh, ktoré v článku používame, sú z hodín, kde ich riešili žiaci tretieho ročníka gymnázia, resp. siedmeho ročníka osemročného gymnázia. Teda žiaci vo veku 17, resp. 18 rokov. Žiaci si voliteľný

predmet *Seminár z matematiky* na škole, kde autor vyučuje, vyberajú z rôznych dôvodov. Nejde nevyhnutne o žiakov, ktorí by chceli z matematiky maturovať. Na prípravu na maturitu slúžia v portfóliu školského vzdelávacieho programu iné predmety.

Problém 1

Novákovci si kúpili nový byt. Ide o veľký podkrovný byt, ktorý je celý obohnáný balkónom. Schéma bytu spolu s východmi na balkón je znázornená na obr. 1. Pani Nováková má niekedy problémy so spánkom, preto sa zvykne často po byte prechádzať. Pri svojich potulkách v zákutiach bytu jej prišla na um otázka, či je možné prejsť bytom na jednej prechádzke tak, aby človek prešiel každými dverami v byte práve raz. Je to možné? A ak áno, ako by cesta mala vyzeráť?



Obr. 1

Z pohľadu teórie grafov žiaci hľadajú eulerovský ťah, pričom úloha nešpecifikuje, či má byť otvorený alebo uzavretý, t. j. riešiteľ môže, ale aj nemusí skončiť na mieste, kde začínal. Aby sme však úlohu vnímali ako časť teórie grafov, je potrebné si jej reprezentanta v podobe grafu vytvoriť. Čo bude predstavovať vrcholy a hrany tohto grafu?

Tieto otázky však učiteľ žiakom nedával a nechal ich voľne pracovať. Postup, ktorý žiaci zvolili, bol očakávaný. A pokladáme ho aj za správny a najlepší možný, ak nám ide o ich samostatnú tvorivú prácu. Začali skúšať. Chytili ceruzky, prípadne tablety a perá a začali izbami prechádzať. Možno by sme ako učitelia čakali nejakú abstraktnejšiu analýzu úlohy, a to najmä v prípade starších žiakov, s ktorými autor túto úlohu riešil. No to sa nestalo. Všetci začali skúšať. Ako sme už ale uviedli, tento postup od žiakov považujeme za správny. Experimentovaním a modelovaním sa dá

všeličo objaviť. Týmto spôsobom sa učíme a je len pozitívne, ak sa žiaci neboja začať riešiť problém, i keď nevedia ako. Aj v tomto smere sa ukazuje potenciál problémov z oblasti teórie grafov. Sú „nízkoprahové“. Nepredstavujú prekážku pri pokusoch o ich riešenie. Netreba nič ťažké vymýšľať. Jednoducho sa začne experimentovať.

Žiaci experimentovali a skúšali tak 10–15 minút bez zásahu učiteľa. Tento časový interval je potrebné prispôsobiť veku žiakov a aktuálnej situácii na hodine. Po tomto čase sa učiteľ začal pýtať, na čo žiaci prišli. Niektorí veľmi proaktívne svoje objavy komunikovali, medzi mnohými sa prekrývali. Cestu cez všetky dvere zatiaľ nenašli, no zistili že obrázok je do určitej miery symetrický, že nemusia skúmať osobitne situácie, keď začínajú v ľavej hornej izbe a pravej hornej izbe. Je to prakticky to isté. Podobných symetrií je v úlohe viacero. Dokonca vznikla prirodzená spolupráca medzi žiakmi. Jeden mal preveriť začiatok vedúci tými dverami a niekto ďalší inými dverami. Jeden zo žiakov prišiel so zaujímavou myšlienkou, že ak existuje nejaká cesta, ktorá spôsobí, že každými dverami prejdeme práve jedenkrát, je jedno, v ktorej miestnosti začneme. V tomto bode zasiahol aj učiteľ, ktorý sa ostatných žiakov opýtal, či s touto myšlienkou súhlasia. Učiteľ chcel, aby sa nad ňou zamysleli a neprebrali ju nekriticky. Nakoniec sa žiaci dohodli, že toto platí len vtedy, ak je začiatok a koniec cesty v tej istej izbe (prípadne na balkóne), čiže ak bude ťah uzatvorený. Nebolo náročné riadiť úlohu tak, aby žiaci sami spoznali paralelu úlohy o prechádzkach v novom byte s úlohami, ktoré riešili už ako deti a ktoré sa týkali kreslenia jedným ťahom. V triede si spomenuli najmä na kreslenia domčeka. Táto analógia bola pre učiteľa tiež zaujímavá, nakoľko mu umožnila viesť žiakov k tomu, aby si úlohu o prechádzke v byte zakreslili ako graf (kreslenie domčeka je priamo kreslenie grafu). Nebolo celkom triviálne pomenovať, čo je v našom prípade vrcholom a čo hranou grafu (pojmy vrchol a hrana si učiteľ zaviedol práve pri kreslení domčeka). Navyše, keď už žiaci identifikovali, že vrcholom grafu sú izby a hranami sú v podstate dvere, často urobili chybu, keď balkón do množiny vrcholov nepridali. Aj keď pri experimentovaní ním prechádzali. Na túto chybu poukázal učiteľ ľahko. Nakreslil jeden ťah v grafe, ktorý prechádzal opakovane balkónom, a potom povedal žiakom, aby tento ťah znázornili v grafe, ktorý bol pre nich modelom úlohy.

Kľúčovú myšlienku k riešeniu však nenašli žiaci v matematickom modeli (keď bola úloha zaznamenaná ako graf), ale v reálnom kontexte izieb a dverí. Tá myšlienka spočívala v tom, že ak vojdem do izby, musím z nej

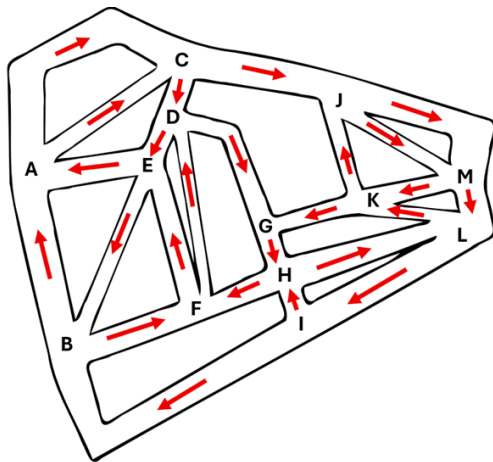
aj vyjsť. Čiže ak má byť úloha riešiteľná, potrebujem párnny počet dverí v izbách. Učiteľ sa snažil túto myšlienku spochybniť, keď nakreslil domček s dvojicou vrcholov s nepárnym počtom hrán. Jeho úmysel žiaci odhalili prakticky okamžite, keď svoj výrok upravili. Párny počet dverí z každej izby by bol potrebný, ak by sme mali začať a skončiť v tej istej izbe. Ak táto podmienka chýba, môžu existovať práve dve izby s nepárnym počtom dverí. Potom jedna z nich bude štartovacia a druhá cieľová. Úloha bola vyriešená, pretože bolo ľahké dokázať, že v našom prípade sú až štyri zo šiestich izieb (vrátane balkóna) také, že majú nepárny počet dverí. Žiaci tak celkom správne a formálne presne pomenovali, kedy možno v grafe nájsť uzavretý (resp. otvorený) eulerovský ťah. Z hľadiska teórie grafov je dôležitou aj ďalšia podmienka pre kreslenie jedným ťahom, a tou je, že graf je súvislý. Toto sme na hodinách nezdôrazňovali, nakoľko aj žiaci vnímali súvislosť grafu ako automaticky splnený predpoklad.

Niektorí žiaci boli šikovnejší a skončili riešenie skôr. Učiteľ im preto mohol dávať rôzne doplňujúce úlohy. Minimálne koľko dverí by sme museli zamurovať, aby bola úloha riešiteľná? Alebo naopak, pomohlo by riešeniu úlohy, ak by sme nejaké nové dvere vybúrali?

Celému problému sme sa venovali približne 60 až 70 minút.

Problém 2

Na obr. 2 je schéma centra historického mestečka. Cestičky v ňom sú len úzke a ešte užšie, preto je každá z ciest len jednosmernou ulicou.



Obr. 2

1. V križovatke A sa nachádza auto kuriérskej služby. Je možné, aby cez deň prešlo celým mestom (každou uličkou) tak, aby každou uličkou prešlo práve raz?
2. Koľko z križovatiek označených písmenami A až M by mohlo byť potenciálne štartovacích, aby kuriér vedel mesto prejsť podľa podmienky v úlohe 1?
3. Pomohlo by zmeniť niektoré smery v niektorých uliciach tak, aby mohol kuriér vyjsť z ľubovoľnej križovatky a prejsť mestom podľa podmienok v úlohe 1? Ak áno, ktoré?
4. Pomohlo by teoreticky zavrieť nejaké cesty medzi križovatkami tak, aby mohol kuriér vyjsť z ľubovoľnej križovatky a prejsť mestom podľa podmienok v úlohe 1? Ak áno, koľko ich treba minimálne zavrieť?
5. Mohli by sme zavrieť niektorú križovчатку a k nej prislúchajúce cesty tak, aby bola trasa kuriéra podľa podmienok v úlohe 1 uskutočniteľná aspoň z jednej zo zostávajúcich križovatiek? (Ak napríklad zavrieme križovчатку A, tak aj cesty BA, EA, AC1, AC2 – tie už nepotrebujeme prechádzať).

Úloha je podobná problému č. 1. Opäť hľadáme eulerovský ťah (kreslíme jedným ťahom). Rozdiel je v tom, že nemôžeme ulicami (hranami grafu) prechádzať voľne, ale musíme použiť predpísaný smer. Ide tak o orientovaný graf. Hlavná úloha je formulovaná v prvom z piatich zadaní. Ostatné sú doplnené v snahe umožniť učiteľovi reagovať na individuálne potreby žiakov. Vzhľadom na to, že na hodinách sme úlohu zadali hneď na najbližšom stretnutí po tom, ako sme sa venovali bytu Novákovcov, niektorí žiaci podobnosti odhalili a riešenie našli rýchlejšie. Dopĺňajúce zadania dva až päť tak umožnili učiteľovi nechať priestor na hľadanie riešenia aj pomalším žiakom, pričom rýchlejší sa nenudili, ale venovali sa ďalším úlohám. Proces riešenia bol veľmi podobný tomu, ktorý sme predstavili pri prvom probléme. Žiaci najprv skúšali, cestovali v grafe. Na úvod opäť zdôrazníme jeden predpoklad, s ktorým sme pracovali, i keď sme ho nezdôrazňovali. Skúmaný graf je súvislý.

Úloha bola v porovnaní s predchádzajúcou jednoduchšia v tom, že žiakom sa ľahko identifikovalo, čo je vrcholom a čo hranou grafu (križovatky ako vrcholy a cesty ako hrany). Nebolo problémom nakresliť vhodnú schému. Pomerne rýchlo žiaci našli podobnosť s úlohou o byte Novákovcov, preto aj podmienku pre riešenie formulovali podobne: z každého vrcholu

musí ísť párný počet ciest, resp. môžu existovať práve dve križovatky (dva vrcholy) také, že z nich ide nepárny počet ciest. V prípade orientovaného grafu toto tvrdenie nie je presné a pre učiteľa nebolo náročné ho spochybniť, t. j. nájsť taký graf, kde uvedená myšlienka neplatí. Aj tu sa ukázalo, že žiaci mali dobrú myšlienku, ktorú ale nepresne formulovali. Učiteľovi hneď vytkli, že ním nakreslený príklad má aj vrcholy, kde počet vstupných a výstupných ciest nie je rovnaký (a tieto vrcholy nie sú práve dva). Vznikla tak diskusia, kde sa učiteľ obhajoval, že podmienku o párnom počte ciest splnil, no žiaci argumentovali, že oni predsa mysleli na to, že párný znamená, že počet vstupných a výstupných ciest je rovnaký. Žiaci postupne riešili aj ďalšie úlohy. V prípade, že si nakreslili správnu schému (t. j. že nimi nakreslený graf naozaj opisoval situáciu v zadaní problému) a dobre aplikovali charakteristiku, ktorá je pre eulerovský ťah v orientovanom grafe dôležitá (že pre každý vrchol platí, že počet vstupných a výstupných ciest je rovnaký, resp. neplatí to práve pre dva vrcholy, kde pri jednom je o jednu výstupnú cestu viac a pri druhom je o jednu vstupnú cestu viac), riešenia nachádzali relatívne hladko.

Pri tejto úlohe žiaci strávili približne 50 minút času.

Tretia úloha je už akademickjšia. Žiakom sme predstavili pojem rovinného grafu, využijúc úlohu popísanú v predchádzajúcom článku. K pojmom vrchol a hrana sme doplnili aj pojem stena rovinného grafu.

Problém 3

Aký je súvis medzi počtom vrcholov, hrán a stien v rovinnom grafe? Vieš túto súvislosť dokázať?

Nájsť vzťah $v + s = h + 2$, pozri napr. [5], nie je po chvíľke skúšania ničím náročným. Všetci žiaci postupujú pravdepodobne rovnako. Niekoľko rovinných grafov si nakreslia, spočítajú vrcholy (v), hrany (h) a steny (s) a vzťah hľadajú. Učiteľ si všíma, aké grafy kreslia a aké súčty nachádzajú. Je možné, že sa žiak pri sčítovaní pomýli (napr. že zabudne na „vonkajšiu“ stenu).

Niektorí žiaci súvislosť objavili. Ich predpoklad bol postavený na konkrétnych grafoch, ktoré nakreslili. Učiteľ ich však vyzval, aby vzťah dokázali. Na konkrétnej hodine učiteľ využil aj to, že niektorým žiakom sa jednoduchosť vzťahu zdala podozrivá a nesúhlasili s tým, že platí všeobecne. Učiteľ ich preto vyzval, aby nakreslili hocikaký rovinný graf, v ktorom vzťah neplatí. Žiaci mali aj viaceré pokusy, pri ktorých boli presvedčení, že kontrapríklad našli. Vždy sa však dostupili buď nejakej chyby pri spočítaní

taní vrcholov, hrán alebo stien, alebo nakreslili nerovinný graf (t. j. hrany mali nejaké spoločné body aj mimo vrcholov).

Diskusia o dôkaze tvrdenia však bola dlhšia. Učiteľ argumentoval, že to, že sme nenašli rovinný graf, ktorý uvedenú rovnosť nespĺňa, ešte neznamená, že taký graf neexistuje. Niektorí žiaci v triede však prišli na zaujímavú súvislosť. Ak v rovinnom grafe pridám hranu, musí to znamenať, že pridám buď nový vrchol (a keďže nemôžem prekrižiť inú hranu, počet stien ostane rovnaký), alebo vytvorím novú stenu, ak spojím dva už existujúce vrcholy. Učiteľ ich vyzval, aby to prišli ukázať na tabuľu. Vybraní žiaci nakreslili nejaký graf, na ktorom svoju myšlienku demonštrovali. Učiteľ ich postup ocenil a opýtal sa ostatných, že čo týmto dokázali. Žiaci spoločne deklarovali, že dokázali tvrdenie pre všetky rovinné grafy. Učiteľ ich záver upravil, že to ukázali predsa len pre ten graf, ktorý nakreslili (tam ľahko dokázali, že vzťah platí, lebo vrcholy, steny a hrany spočítali) a pre každý ďalší, ktorý z neho vznikne pridaním jednej alebo viacerých hrán (čiže pre akýkoľvek „zložitejší“). Otázka teda je či tvrdenie platí aj pre všetky rovinné grafy, ktoré majú menej hrán ako žiakmi nakreslený graf. Časť žiakov sa snažila ukázať, že aj odobraním hrany sa zníži buď počet stien alebo počet vrcholov. Postup by mohol byť matematicky korektný. Našla sa však skupina žiakov, ktorí tvrdili, že sa to dá urobiť aj jednoduchšie. Povedali, že si stačí zvoliť tak jednoduchý graf, aby všetky ďalšie z neho vznikli pridaním hrán. Posledným krokom tak bolo nakresliť najjednoduchší rovinný graf. To sa nakoniec podarilo, keď žiaci pripustili aj nulový počet hrán, čiže nakreslili jednu bodku (graf mal teda jeden vrchol a jednu stenu). Teraz už bol dôkaz ukončený.

Prirodzeným spôsobom žiaci použili princíp dôkazu matematickou indukciou. Jej prvý krok je dokázať tvrdenie pre minimálny prípustný objekt (v našom prípade najjednoduchší možný rovinný graf). Druhým je potom indukčný krok, zovšeobecnenie. Tento vzťah sa nezmení, ak pridáme jednu hranu. Matematická indukcia podľa počtu hrán. Viacerí učitelia sa svojim žiakom pokúšajú vysvetliť princíp dôkazu matematickou indukciou. Ak nie na štandardných hodinách matematiky, tak v rámci voliteľných predmetov a krúžkov. Často je však tento dôkaz pre žiakov príliš abstraktný a neprirodzený. Skúsenosť autora článku hovorí, že napr. pri dôkaze Eulrovej vety o počte vrcholov, hrán a stien v rovinnom grafe je tento dôkaz vnímaný veľmi prirodzene a jeho myšlienku sú žiaci schopní nájsť relatívne samostatne.

Záver

Cieľom textu bolo priniesť ďalšie inšpirácie učiteľom matematiky základných a stredných škôl. Spolu s problémami uvedenými v predchádzajúcom článku autora získava učiteľ matematiky najmä na strednej škole zaujímavú možnosť, ako vybrané problémy teórie grafov ucelene implementovať do hodín. Pripomíname, že prezentované úlohy dávajú akýsi obsahový základ pre naplnenie hodín. Rovnako dôležitá je aj forma práce. Ak chceme, aby žiak objavoval, musí na to mať vhodný materiál (úloha), ale aj dostatok času, vhodný priestor. Je potrebné pripustiť, že pri snahe o konštruktivistický prístup vo vyučovaní sa učiteľ dostáva do situácií, ktoré si nevie natréňovať. Často musí veľmi dobre žiakov počúvať a vnímať, pružne reagovať a improvizovať. Je to náročné, no sme presvedčení, že to má v procese učenia sa veľký význam.

Literatúra

- [1] *Stáňa, M.*: Objavovanie na hodinách matematiky I. Matematika–fyzika–informatika, roč. 34, č. 4 (2025), s. 252–260.
- [2] *Anderson, L. W., Krathwohl, D. R.*: A taxonomy for learning, teaching, and assessing: a revision of Bloom's taxonomy of educational objectives. Longman, New York, 2001.
- [3] *Hejný, M. a kol.*: Teória vyučovania matematiky 2. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1987.
- [4] *Hejný, M., Novotná, J., Stehlíková, N.*: Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky. Univerzita Karlova, Praha, 2004.
- [5] *Horák, S.*: Mnohostěny. ŠMM, ÚV MO, Mladá fronta, Praha, 1970.
- [6] *Matoušek, J., Nešetřil, J.*: Kapitoly z diskrétní matematiky. Karolinum, Praha, 2002.
- [7] *Nelson, T., Narens, L.*: Metamemory: A theoretical framework and new findings. In: Psychology of Learning and Motivation. Vol. 26, 1999, p. 125–173 [online]. [cit. 2023-06-30] <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0079742108600535?via%3Dihub>.

Zajímavé matematické úlohy

V novém ročníku našeho časopisu pokračujeme v pravidelné rubrice Zajímavé matematické úlohy, v níž mj. uvádíme zadání další dvojice nových úloh. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 6. 2026 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu *mfi@upol.cz*. Zajímavá a originální řešení úloh rádi zveřejníme.

Úloha 307

Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ má protější dvojice stran rovnoběžné. Dokažte, že trojúhelníky ACE a BDF mají shodné obsahy.

Jiří Blažek

Úloha 308

Kolika způsoby je možné uspořádat posloupnost všech přirozených čísel $1, 2, \dots, n$ do kruhu tak, aby každé číslo bylo dělitelem součtu dvou sousedních čísel. Takové způsoby, které lze získat jeden z druhého otočením nebo osovou souměrností, považujeme za jeden způsob. Úlohu řešte pro a) $n = 2025$, b) $n = 2026$.

Jaroslav Zhouf

V následující části uvádíme řešení úloh 295 a 296, jejichž zadání jsme zveřejnili ve třetím čísle loňského (34.) ročníku našeho časopisu.

Úloha 303 Dokažte, že pro velikosti α, β, γ vnitřních úhlů libovolného trojúhelníku platí nerovnost

$$\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{9}{8}.$$

Kdy nastane rovnost?

Jaroslav Švrček

Řešení. Užitím součtového vzorce pro funkci sinus platí

$$\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma = \sin(\beta + \gamma).$$

Jelikož $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$ dostáváme z vlastností funkce sinus

$$\sin(\beta + \gamma) = \sin \alpha,$$

a proto

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma &= \\ &= \sin \alpha (\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma) = \sin^2 \alpha. \quad (1)\end{aligned}$$

Obdobně podle součtových vzorců pro kosinus platí s využitím jeho vlastností

$$\begin{aligned}\sin \beta \sin \gamma &= \frac{1}{2} (\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)) = \\ &= \frac{1}{2} (\cos(\beta - \gamma) - \cos(180^\circ - \alpha)) = \frac{1}{2} (\cos(\beta - \gamma) + \cos \alpha).\end{aligned}$$

Proto platí

$$\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{1}{2} \cos(\beta - \gamma) \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha. \quad (2)$$

Součtem předcházejících rovností (1) a (2) tak dostaneme po několika úpravách s využitím goniometrické jedničky a omezenosti funkce kosinus požadovanou nerovnost

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma &= \\ &= \sin^2 \alpha + \frac{1}{2} \cos(\beta - \gamma) \cos \alpha + \frac{1}{2} \cos^2 \alpha = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cos(\beta - \gamma) \cos \alpha - \frac{1}{2} \cos^2 \alpha = \\ &= 1 + \frac{1}{8} \cos^2(\beta - \gamma) - \frac{1}{2} \left(\cos \alpha - \frac{1}{2} \cos(\beta - \gamma) \right)^2 \leq 1 + \frac{1}{8} - 0 = \frac{9}{8},\end{aligned}$$

přičemž rovnost nastává, když $\cos(\beta - \gamma) = 1$ a $\cos \alpha - \frac{1}{2} \cos(\beta - \gamma) = 0$, tedy když $\beta = \gamma$ a $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. Odkud již jednoduchým dopočtem zjistíme, že rovnost nastává pro $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, tedy v případě rovnostranných trojúhelníků.

Jiné řešení. Podle vzorce pro kosinus součtu platí

$$\sin \beta \sin \gamma = \cos \beta \cos \gamma - \cos(\beta + \gamma),$$

jelikož $\beta + \gamma = 180^\circ - \alpha$, platí $\cos(\beta + \gamma) = -\cos \alpha$. Tedy

$$\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos^2 \alpha.$$

Přičtením k rovnosti (1) tak dostaneme

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma = \\ = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma. \end{aligned}$$

Abychom dokázali požadovaný vztah, stačí dokázat nerovnost

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \frac{1}{8}. \quad (3)$$

Tuto nerovnost můžeme považovat za známou¹⁾ nebo ji dokázat pomocí Jensenovy nerovnosti následujícím způsobem. Pokud se jedná o trojúhelník pravoúhlý či tupouhlý, je kosinus jednoho z vnitřních úhlů nekladný a druhé dva kladné, proto levá strana nerovnosti (3) je nekladná a daná nerovnost tak platí. V případě ostroúhlého trojúhelníku jsou všechny kosiny kladné, podle nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem platí

$$\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \left(\frac{1}{3} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \right)^3.$$

Jelikož funkce kosinus je na intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ konkávní, platí podle Jensenovy nerovnosti dále

$$\frac{1}{3} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) \leq \cos \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},$$

což dokazuje nerovnost (3). Rovnost v obou nerovnostech nastane v případě $\alpha = \beta = \gamma$, tedy v případě rovnostranných trojúhelníků.

Poznámka. Sečtením rovností (1) pro tři permutace úhlů α, β, γ dostaneme

$$\begin{aligned} 2(\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) = \\ = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma. \end{aligned}$$

Nerovnost

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq \frac{9}{4},$$

¹⁾Najdete ji jako úlohu B–S–2 17. ročníku Matematické olympiády na str. 71, kde je uveden důkaz pomocí součtových vzorců, jako příklad 10 v *S. Horák Nerovnosti v trojúhelníku* z edice Škola mladých matematiků nebo v *R. Smýkalová Goniometrické funkce* na str. 171.

kteřá dokazuje požadované tvrzení, bychom opět mohli považovat za známou²⁾ nebo ji znovu můžeme dokázat užitím Jensenovy nerovnosti. Tuto nerovnost nelze ovšem použít přímo, protože funkce $\sin^2 x$ je konvexní pouze na intervalu $\langle \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi \rangle$, což si neuvědomil značný počet řešitelů. Dá se ovšem postupovat následujícím způsobem. Necht' alespoň dva úhly v trojúhelníku, bez újmy na obecnosti β , γ , jsou v intervalu $\langle \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi \rangle$, potom podle Jensenovy nerovnosti platí

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma) &\leq \sin^2 \frac{\beta + \gamma}{2} = \\ &= \sin^2 \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha) \end{aligned}$$

s rovností v případě $\beta = \gamma$. Platí tak

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma &\leq 1 - \cos^2 \alpha + 1 + \cos \alpha = \\ &= \frac{9}{4} - \left(\cos \alpha - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Rovnost v této nerovnosti nastane v případě $\alpha = \beta$ a $\cos \gamma = \frac{1}{2}$, tedy v případě $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$. Pokud však nejvýše jeden úhel v trojúhelníku, řekněme γ , je z intervalu $\langle \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi \rangle$, potom zřejmě platí

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 < \frac{9}{4}.$$

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Bartosz Depta*, *Michał Fronczek* a *Filip Zdebik*, všichni II LO Tarnowskie Góry (Polsko), *Jakub Hříbal*, GJB Beroun, *Petr Karlík*, G Praha 10, Voděradská, *Lukáš Komín*, G Praha 4, Opatov, *Eva Martikánová*, MG Opava a *Veronika Menšíková*, AG Praha 2, Korunní.

Neúplná řešení zaslali: *Marin Bryja* a *Erik Ježek*, SSPŠ a G Praha 5, *Helena Muchová*, GJK Praha 6, *Ondřej Nevěřil*, G Zábřeh, *Lucian Poljak*, GJŠ Přerov, *Michal Roček*, SPŠ a VOŠ Liberec, *Štěpán Sikora*, G Praha 7, Nad Štolou, *Petr Starý*, G České Budějovice, Jírovce a *Bartosz Wieczorek*, II LO Tarnowskie Góry (Polsko).

²⁾ Jedná se o důsledek poznámky 1 k příkladu 24 a sinové věty v *S. Horák Nerovnosti v trojúhelníku* z edice Škola mladých matematiků nebo přímo o nerovnost v *R. Smýkalová Goniometrické funkce* na str. 171.

Úloha 304

Třída na začátku hodiny tělocviku nastupuje do řady s pravidelnými rozestupy, každý žák na svoji pevně přiřazenou značku. Horáček ale jednou přesvědčil své spolužáky, aby místo toho všichni nastoupili na značky tak, že součet vzdáleností všech žáků od aktuálně obsazené k předem přiřazené značce byl nejvyšší možný. Určete počet takových pořadí pro $2n$ žáků.

David Hruška

Řešení. Necht' je v řadě žáků na zemi nakreslena čára mezi značkami n a $n + 1$. Sporem dokážeme, že každý z žáků musí po výměně navržené Horáčkem překročit tuto čáru, tedy přejít na druhou polovinu. Pokud by totiž existoval takový žák, řekněme A, který zůstane ve své polovině a přejde z pole a na pole a' , potom ve druhé polovině existuje žák B, který také neopustí svou polovinu a přejde z pole b na pole b' . Ovšem pokud by žák A přešel z pole a na pole b' a žák B přešel z pole b na pole a' (a všichni ostatní přešli na stejná pole), potom by byl součet vzdáleností žáků od svých značek větší. To dokážeme rozбором jednotlivých případů:

- Necht' pozice a' a b' leží mezi pozicemi a a b . Pokud by žák A šel z a na a' a žák B z b na b' , tak by se nikde neminuli, ušli by tedy dohromady menší vzdálenost než z a na b . Když půjdou z a na b' a z b na a' , tak se minou a musí dohromady ujít větší vzdálenost než z a na b .
- Necht' jedna z pozic, řekněme a' , leží z pohledu druhého žáka za pozicí a a druhá, b' , leží mezi a a b . Potom žák B při své cestě z b do a' mine značku b' , dojde k a a ujde vzdálenost od a do a' , ujde tak větší vzdálenost, než kdyby šel A z a do a' a B z b do b' .
- Necht' obě pozice a' , b' neleží mezi a a b . Pokud žáci půjdou z a na b' a z b na a' , pak každý ujde vzdálenost mezi a a b a ještě vzdálenost, kterou by ušel druhý žák při původní cestě.

Tedy každý z žáků musí při výměně navržené Horáčkem být v opačné polovině než je jeho původní místo. Uvědomíme si, že pak je součet vzdáleností všech žáků od původní pozice stejný nezávisle na tom, na kterou značku se ve druhé polovině postaví. To platí, jelikož pro žáky z první poloviny můžeme mezi každými dvěma pozicemi jednoho žáka uvažovat vzdálenost od jeho původní značky k čáře a od čáry k nové značce a tyto dvě vzdálenosti bijektivně odpovídají vzdálenostem (obecně jiných) žáků ze druhé poloviny.

Tedy n žáků z první poloviny se může na druhou polovinu postavit $n!$ způsoby a žáků druhé poloviny se na první polovinu může postavit také $n!$ způsoby, celkem tedy žáci mohou zaujmout $(n!)^2$ pořadí navržených Horáčkem.

Jiné řešení. Necht' vzdálenost mezi značkami je 1. Označme $\{1, 2, \dots, 2n\}$ pořadí žáků, v jakém běžně stojí při hodině tělocviku a a_i pořadí žáka i po výměně. Pak součet vzdáleností jednotlivých žáků od svých značek je

$$S = |a_1 - 1| + |a_2 - 2| + \dots + |a_{2n} - 2n|.$$

Vzhledem k tomu, že absolutní hodnota čísla x je $\pm x$, bude po odstranění absolutních hodnot ve výsledném součtu mít polovina z čísel $1, 2, \dots, 2n$, $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ znaménko plus a polovina znaménko minus. Jelikož hodnoty a_i jsou navzájem různé, je a_i bijekce množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$ na sebe. Součet S tak bude největší, pokud budou mít všechna čísla menší nebo rovna než n znaménko mínus a zbývající znaménko plus, tedy

$$\begin{aligned} S &\leq 2(2n + (2n - 1) + \dots + (n + 1)) - 2(n + (n - 1) + \dots + 1) = \\ &= n(3n + 1) - n(n + 1) = 2n^2. \end{aligned}$$

Rovnost zde nastane, pokud v každém rozdílu $|a_i - i|$ bude v případě $i \leq n$ platit $a_i \geq n + 1$ a naopak, pokud $i \geq n + 1$, potom $a_i \leq n$. Takových pořadí a_i je $(n!)^2$, stejně jako v předchozím řešení.

Správná řešení zaslali: *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Martin Bryja*, G Brno, tř. Kpt. Jaroše, *Michał Fronczek* a *Filip Zdebik*, oba II LO Tarnowskie Góry (Polsko). *Veronika Menšíková*, AG Praha 2, Korunní, *Helena Muchová*, GJK Praha 6 a *Andrea Plecháčková*, G Jablonec nad Nisou.

V minulém čísle jsme ještě zapomněli uvést *Michała Fronczeka*, II LO Tarnowskie Góry (Polsko), který správně vyřešil obě úlohy 301 i 302. Tímto se mu omlouváme.

Pavel Calábek

Metodická rôznorodosť a systematizácia výkladu tém o energii v školskej fyzike

PATRIK KRIEK

Gymnázium Jozefa Gregora Tajovského, Banská Bystrica, SLOVENSKO

Pojem energia má v školskej fyzike a celkovo prírodovednom vzdelávaní svoje nezastupiteľné miesto, o čom svedčí aj zaradenie tohto pojmu do jednej z desiatich hlavných nosných myšlienok (tzv. *Big ideas*) prírodovedného vzdelávania v pripravovanej kurikulárnej reforme základného školstva v Slovenskej republike. Je preto namieste sa podrobnejšie zaoberať pojmom energia a špecifickejšie jej formami – kinetickou a potenciálnou energiou. Aj keď ide o tradičnú tému vyskytujúcu sa spravidla v každej učebnici fyziky pre základnú či strednú školu, pri jej výklade sa objavuje veľa rôznorodých metodických postupov, najmä pri odvodzovaní vzťahov pre potenciálnu energiu tiažovú a gravitačnú. Táto rôznorodosť spočíva najmä v samotnej definícii potenciálnej energie a jej zmeny, a tým aj v opise myšlienkového experimentu (teleso v tiažovom/gravitačnom poli buď dvíhame alebo necháme padat). Aj keď pojem potenciálna energia gravitačná sa v kurikulárnych dokumentoch ISCED 3 [1] explicitne nevyskytuje, býva v rámci maturitných seminárov problém s odvodením vzťahu pre túto energiu, ktoré vyžaduje znalosť integrálneho a diferenciálneho počtu. Poznanie tohto vzťahu však umožňuje odvodiť napr. vzťah pre veľkosť parabolickej (únikovej) rýchlosti telesa. Ďalší problém potom vystáva vo voľbe nulovej hladiny potenciálnej energie gravitačnej, ktorá sa v učebniciach v tomto prípade volí väčšinou v nekonečne, s čím súvisia jej záporné hodnoty. Znamienko mínus v tomto vzťahu, ako sa ukazuje, je často ťažko

uchopiteľné aj pre študentov fyziky na vysokej škole. V neposlednom rade je otázne, či je v učebniciach výklad potenciálnej energie v gravitačnom a tiažovom poli dostatočne previazaný s výkladom potenciálnej energie v ďalšom type konzervatívneho silového poľa – elektrostatickom poli homogénnom a radiálnom.

Ako už bolo spomenuté, vzhľadom k dôležitosti tohto pojmu v školskej fyzike, vznikol tento článok, ktorého cieľom je:

- podať prehľad o metodických postupoch používaných v učebniciach pri odvodení vzťahov pre potenciálnu energiu, previazanosti tém potenciálna energia v tiažovom, gravitačnom a elektrostatickom poli a diskutovať ich adekvátnosť;
- navrhnúť postupnosť a spôsob výkladu tejto témy tak, aby rešpektoval vyššie uvedené požiadavky.

Článok môže poslúžiť predovšetkým učiteľom fyziky, ktorí v rámci maturitných seminárov venujú pozornosť aj potenciálnej energii gravitačnej, môže však poslúžiť všetkým učiteľom a študentom učiteľstva fyziky, ktorí chcú preniknúť hlbšie do tematiky potenciálnej energie, či už v základnej alebo strednej škole.

Metodológia

Metódou zberu dát bola analýza slovenských a českých učebníc fyziky pre základné a stredné školy, prehľadov fyziky pre stredné a vysoké školy a iných (aj elektronických) zdrojov. Tieto materiály však neboli vybrané náhodne, ale so zreteľom na to, že ich pravdepodobne využívajú žiaci a ich učitelia pri príprave na vyučovaciu hodinu. Keďže s pojmom potenciálna energia sa slovenskí aj českí žiac stretnú v 8. ročníku, vybrali sme aktuálnu učebnicu pre 8. ročník [2] a učebnicu zo staršej série [3] spolu s jej českou novo-prepracovanou verziou [4]. Ďalej boli vybraté z českých učebníc napr. často využívaná učebnica Fyzika 8 [5]. Do analýzy bola zahrnutá aj niekdajšia učebnica fyziky pre 9. ročník základnej školy [6], v ktorej je taktiež spracovaná tematika energie. Z učebníc pre stredné školy ide hlavne o súčasnú slovenskú učebnicu pre 1. ročník gymnázia [7], stále na Slovensku používanú staršiu učebnicu taktiež pre 1. ročník strednej školy [8], schválenú učebnicu dynamiky [9], českú gymnaziálnu učebnicu mechaniky [10] a českú učebnicu mechaniky pre stredné školy [11]. Pozreli sme sa aj na Přehled středoškolské fyziky [12] a příručku Zmaturuj z fyziky [13], ktoré sú vhodné najmä pri rýchlom opakovaní. Z vysokoškolskej literatúry sme vybrali populárnu učebnicu od autorov Halliday, Resnick

a Walker [14], ktorú radi používajú učitelia aj študenti na stredných školách, staršiu učebnicu pre pedagogické fakulty [15] a, podľa nášho názoru, zaujímavo napísanú učebnicu mechaniky [16]. Ďalej sú to vysokoškolské skriptá mechaniky [17, 18] a učebnica didaktiky fyziky [19]. Na analýzu partii ohľadom elektrického poľa boli použité ďalšie materiály uvedené v zozname použitej literatúry. Máme za to, že predchádzajúci výpis zdrojov tvorí široký okruh používaných materiálov pre základné a stredné školy a ide tak o reprezentatívnu vzorku.

Text je členený tak, že na začiatku uvádzame vymedzenie pojmov a všeobecný prehľad k téme energia. Nasleduje samotná analýza, ktorá sa zameriavala hlavne na metodický postup odvodenia vzťahov pre potenciálnu energiu (tiažovú, gravitačnú, pružnosti) a ich diskusii. Postup pri tvorbe nami navrhovaného výkladu je uvedený v predposlednej časti tohto článku.

Vymedzenie pojmov

Podľa [19] je energia integrujúcou veličinou s vysokou informačnou hodnotou v tom zmysle, že v sebe zahŕňa kinematické a dynamické veličiny, ktorými prešla sústava materiálnych objektov pred daným časovým okamihom. Jej hodnota ako fyzikálnej veličiny je vždy určená relatívne, je nutné definovať stav s nulovou energiou. Uvažujme hmotný bod v nejakom silovom poli iných materiálnych objektov. Na hmotný bod pôsobí vonkajšia sila $\vec{F}_v$, pričom na počiatku je v stave charakterizovanom energiou E_1 , v koncovom stave po zmene jeho polohy a rýchlosti je v stave s energiou E_2 . Fyzikálne jednoznačne je určená zmena energie hmotného bodu ako

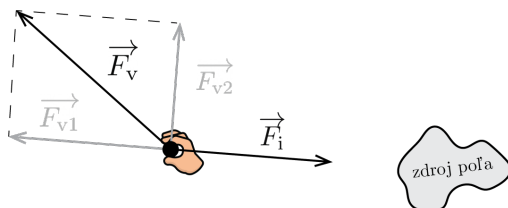
$$\Delta E = E_2 - E_1 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_v \cdot d\vec{r}. \quad (1)$$

Tento výraz možno považovať za definíciu energie, resp. jej zmeny [19]. Energiu hmotného bodu je výhodné rozdeliť na dve zložky rôznej podstaty: zložku súvisiacu s prácou časti vonkajšej sily $\vec{F}_{v1}$, ktorá prekonáva vnútornú silu (silu poľa) $\vec{F}_i = -\vec{F}_{v1}$, a zložku súvisiacu s prácou časti vonkajšej sily $\vec{F}_{v2}$, ktorá spôsobuje zmenu rýchlosti hmotného bodu, teda je príčinou jeho zrýchlenia (obr. 1).

Prvá časť energie je spojená so zmenou polohy častice – nazývame ju potenciálna energia a druhá časť je spojená so zmenou rýchlosti častice – nazývame ju kinetická energia.

Potom môžeme písať

$$\begin{aligned}\Delta E = \Delta E_p + \Delta E_k &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_v \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{v1} \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{v2} \cdot d\vec{r} = \\ &= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (-\vec{F}_i) \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{v2} \cdot d\vec{r}. \quad (2)\end{aligned}$$



Obr. 1 Vonkajšia sila, jej zložky a sila poľa (vnútorná sila), smer zložky $\vec{F}_{v2}$ môže byť ľubovoľný, závisí na smere a veľkosti $\vec{F}_v$

Zdroj [16] zdôrazňuje, že energia je taká stavová veličina, ktorá má nasledovné vlastnosti:

- V prípade izolovanej sústavy (sústavy, v ktorej nepôsobia žiadne vonkajšie sily) sa celková energia sústavy nemení, je konštantná $E = \text{konšt.}$
- V prípade neizolovanej sústavy je zmena energie sústavy rovná práci vonkajších síl konanej na sústave, teda $\Delta E = W$.

Kinetická energia hmotného bodu a jej zmena

V materiáloch pre základnú školu je výklad kinetickej energie viac-menej jednotný, používa sa však termín pohybová energia a je rozoberaný len kvalitatívne. Je zdôraznené, že pohybová energia prislúcha telesám, ktoré sa pohybujú, pričom relativita pohybu a fakt, že pohybovú energiu možno prisúdiť len telesu, ktoré sa pohybuje vzhľadom na istú vzťažnú sústavu, je zdôraznený len v niektorých učebniciach [4]. Učebnice a materiály pre vyššie stupne škôl už operujú s termínom kinetická energia a venujú sa mu aj po kvantitatívnej stránke. Prakticky vo všetkých sa vyskytuje odvodenie vzťahu pre kinetickú energiu s pomocou výpočtu práce stálej sily urýchľujúcej hmotný bod z nulovej počiatočnej rýchlosti na rýchlosť veľkosti v

$$W = Fs = ma \cdot \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}m(at)^2 = \frac{1}{2}mv^2.$$

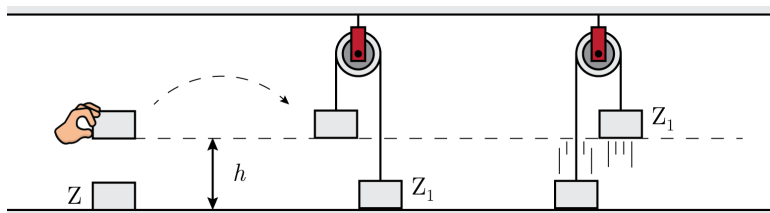
Takýto metodický postup uvádza napr. [9], pričom ďalej autori ozrejmujú, že vzhľadom na počiatočný pokoj telesa je vykonaná práca rovná priamo kinetickej energii $W = E_k$. Všeobecnejšie tvrdenie a výpočet pre rozdiel kinetických energií uvádzajú napr. učebnice [10, 11], kde počítajú prácu konštantnej sily pri zrýchľovaní telesa z rýchlosti v_1 na rýchlosť v_2

$$W = Fs = ma \cdot \frac{1}{2}a(t_2^2 - t_1^2) = \frac{1}{2}m(at_2)^2 - \frac{1}{2}m(at_1)^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \Delta E_k.$$

Tento krok, nevyskytujúci sa vo všetkých učebniciach, považujeme za potrebný, aby sa nestratila informácia, že práca vykonaná vonkajšou silou rozhoduje o zmene kinetickej energie telesa $W = \Delta E_k$. Pritom pod pojmom vonkajšia sila rozumieme vo všeobecnosti časť vonkajšej sily v zmysle rovnice (2), ktorá spôsobuje zmenu rýchlosti hmotného bodu.

Potenciálna energia tiažová

Výklad potenciálnej energie tiažovej v učebniciach a materiáloch pre základné školy je opäť viac-menej jednotný, používa sa však čisto termín polohová energia, často s dodatkom „v gravitačnom poli Zeme“. V základnej škole preto hovoríme o potenciálnej energii gravitačnej a gravitačnej sile, pri prechode na vyšší stupeň žiaci používajú správnejší termín tiažová sila a s tým spojená potenciálna energia tiažová. Väčšina učebníc napr. [2] alebo [5] uvádzajú odvodenie vzťahu pre potenciálnu energiu ako výpočet práce vonkajšej sily pri zdvíhaní telesa s hmotnosťou m rovnomerným pohybom do výšky h , dostaneme sa tak ku vzťahu $W = F_G h = mgh = E_p$. Podrobnejší prístup je uvedený v učebniciach [3] alebo [6]. Na rovnomerné zdvihnutie závažia do výšky h je potrebná práca $W = mgh$, následne je závažie Z zavesené na jeden koniec nite vedenej cez kladku (obr. 2). Na druhom konci nite je zavesené závažie Z_1 s rovnakou hmotnosťou.



Obr. 2 Dvíhanie závažia v gravitačnom poli Zeme, myšlienkový experiment s kladkou

Po nepatrnom náraze do závažia Z začne toto závažie klesať a zdvihne závažie Z_1 do výšky h , čím chceli autori zdôrazniť, že závažie zdvihnuté v gravitačnom poli do výšky h nad podložku môže následne konať mechanickú prácu s veľkosťou mgh – čo je aj práca, ktorá bola potrebná na pôvodné zdvihnutie telesa do tejto výšky.

Zdroj [4] uvádza v poznámke pod čiarou aj skutočnosť, že práca vykonaná vonkajšou silou pri zdvíhaní telesá do istej výšky je rovnaká pri rovnomernom aj *nerovnomernom* pohybe a nezávisí od trajektórie, je však nutné poznamenať, že len v tom prípade, ak sú počiatočná a koncová rýchlosť rovnako veľké – nedochádza ku konaniu ďalšej práce potrebnej na urýchlenie či spomalenie telesa. V základnej škole sa tak stretávame s odvodením vzťahu pre polohovú energiu v gravitačnom poli pomocou práce vonkajšej sily, konkrétnejšie zložky vonkajšej sily F_{v1} v zmysle rovnice (2), ktorá prekonáva vnútornú silu (v tomto prípade silu gravitačnú) pri rovnomernom dvíhaní telesa. V učebniciach pre vyššie stupne škôl sa stretávame okrem vyššie uvedeného metodického postupu aj s prípadom, kedy hmotný bod/teleso (teraz už v tiažovom poli) necháme padať z istej počiatočnej výšky. Takto postupuje napr. učebnica [10]. Hmotný bod s hmotnosťou m padá voľným pádom v tiažovom poli Zeme z výšky h_1 do výšky h_2 , pričom tiažová sila vykoná prácu

$$W_G = F_G s = mg(h_1 - h_2) = E_{p1} - E_{p2}.$$

Takto autori zadefinujú výraz $E_p = mgh$ ako tiažovú energiu hmotného bodu. Ďalej rozšíria definíciu aj na tiažovú energiu telesa, kedy teleso nahradíme hmotným bodom v jeho ťažisku. Zdroj [8] uvádza, že práca vykonaná tiažovou silou sa rovná úbytku tiažovej energie telesa $W_G = -\Delta E_p$. V učebnici [11] sú podrobne rozobraté obidva prípady. Najprv je teleso dvíhané rovnomerne za pomoci sily do výšky h nad podložku. Je pritom zdôraznená skutočnosť, že v prípade rovnomerného dvíhania je $v = \text{konšt.}$ a zmena kinetickej energie je pri tomto dvíhaní nulová. Mechanická práca vykonaná vonkajšou silou sa prejaví prírastkom tiažovej potenciálnej energie hmotného bodu. Práca tiažovej sily pri tomto dvíhaní je záporná $W_G = -mgh$. Následne je rozobratý aj prípad, kedy teleso padá z výšky h voľným pádom ($\vec{a} = \vec{g} = \text{konšt.}$). Opäť dospejú k záveru, že pri padaní telesa koná teraz kladnú prácu tiažová sila, vedie avšak k zníženiu potenciálnej energie tiažovej telesa. Vidíme, že v učebniciach pre vyššie stupeň sa k odvodeniu vzťahu pre potenciálnu energiu tiažovú využíva aj myšlienkový experiment padania telesa v tiažovom poli a počítanie práce

tiažovej sily, čo je v súlade s rovnicou (2), kde platí $\vec{F}_i = -\vec{F}_{v1}$. Ide o dva možné korektné postupy, ktorý je však vhodnejší sa pokúsime načrtnúť rozborom ďalších foriem potenciálnej energie v školskej fyzike.

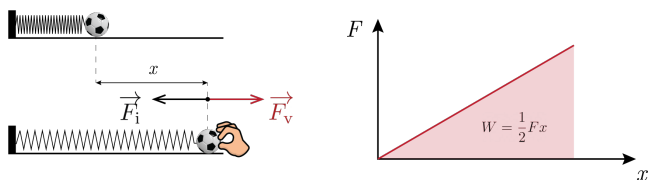
Potenciálna energia pružnosti

Tematika potenciálnej energie pružnosti býva v učebniciach pre základné školy spracovaná okrajovo, používa sa pre ňu termín polohová energia pružnosti/polohová energia pružiny. Napr. [4] uvádza, že polohovú energiu pružnosti má stlačená alebo natiahnutá pružina. Uvádza, že k natiahnutiu resp. stlačeniu pružiny musíme (musí vonkajšia sila) vykonať istú prácu, rovnako veľkú prácu môže konať aj pružina po uvoľnení. Vzťah pre silu pružnosti a potenciálnu energiu pružnosti v základnej škole nebýva odvodzovaný, žiaci nedisponujú vzťahom pre veľkosť sily pružnosti $F = kx$, aj keď vedia, že pružina sa predĺži tým viac, čím väčšia sila na ňu pôsobí.

V materiáloch pre vyššie stupne škôl je tematika energie pružnosti spracovaná viac-menej jednotne, pričom sa používajú termíny potenciálna energia pružnosti resp. elastická energia. Je prvým prípadom energie, ktorú neodvodzujeme z práce konštantnej sily, ale sily, ktorá sa mení s predĺžením. Na výpočet tejto práce je použitá grafická metóda výpočtu plochy pod grafom funkcie $F = F(x)$ (obr. 3). Takto postupujú napr. [7, 10], a aj učebnice pre základný vysokoškolský kurz za pomoci integrácie [18]. Práca vonkajšej sily pri natiahnutí pružiny je rovná obsahu pravouhlého trojuholníka pod grafom spomínanej funkcie, z čoho dostaneme

$$W = \frac{1}{2}Fx = \frac{1}{2}kx \cdot x = \frac{1}{2}kx^2 = E_p.$$

Práca vykonaná vonkajšou silou v zmysle rovnice (2) sa stotožní s potenciálnou energiou pružiny.



Obr. 3 Práca vonkajšej sily pri ťažovaní pružiny a grafická interpretácia

Niektoré ďalšie učebnice, napr. [9] alebo [11] využívajú pri odvodzovaní vzťahu pre potenciálnu energiu pružnosti ešte ďalší dôležitý krok, a síce,

že prácu premennej sily na istom intervale možno vypočítať tak, že do vzťahu $W = Fx$ dosadíme jej priemernú hodnotu $\overline{F}$ na danom intervale. Keďže v prípade pružiny závisí veľkosť sily priamo úmerne od predĺženia pružiny, javí sa na intervale ako opodstatnené použiť aritmetický priemer, priemerná veľkosť vonkajšej sily je tak

$$\overline{F} = \frac{F(0) + F(x)}{2} = \frac{0 + kx}{2} = \frac{1}{2}kx.$$

Po dosadení do $W = \overline{F}x$ dostávame opäť vzťah pre potenciálnu energiu pružnosti. Vo svojej podstate ide o grafickú interpretáciu výpočtu obsahu pravouhlého trojuholníka zmieneného vyššie, ako sa však uvidí, táto úvaha o práci priemernej sily sa javí ako užitočný konštrukt. Z analýzy vyplýva, že všetky skúmané materiály využívajú pri odvodení vzťahu pre potenciálnu energiu pružnosti prácu vonkajšej sily v zmysle rovnice (2) a nepočítajú prácu konanú silou pružiny.

Potenciálna energia gravitačná

Aj keď sa pojem potenciálnej energie gravitačnej a práce v (radiálnom) gravitačnom poli explicitne nevyskytuje v kurikulárnych dokumentoch [1], venujú sa mu niektoré učebnice pre stredné školy a viaceré materiály pre úvodný vysokoškolský kurz mechaniky. Vzhľadom na analógiu práce v tiažovom poli Zeme a homogénnom gravitačnom poli Zeme sa budeme ďalej venovať prípadu potenciálnej energie v radiálnom gravitačnom poli Zeme. Pokúsme sa premiestniť hmotný bod s hmotnosťou m v gravitačnom poli Zeme z miesta vo vzdialenosti r_1 od stredu Zeme do vzdialenosti r_2 ($r_2 > r_1$). Aby sme zrealizovali popísaný presun, musíme na teleso pôsobiť *silou*, ktorej veľkosť bude minimálne rovná veľkosti *gravitačnej sily* pôsobiacej v danej vzdialenosti medzi týmito telesom a centrálnym telesom, ktoré je zdrojom gravitačného poľa (Zemou). Táto práca je rovná

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_v \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{GmM_Z}{r^2} dr = GmM_Z \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \Delta E_p.$$

V prípade voľby nulovej hladiny potenciálnej energie v nekonečne, teda pre $r_1 \rightarrow \infty$, dostávame pre gravitačnú potenciálnu energiu hmotného bodu v mieste $r_2 = r$ gravitačného poľa Zeme vzťah

$$E_p = -G \frac{mM_Z}{r}. \quad (3)$$

Tento vzťah odpovedá vlastnostiam, ktoré by sme od potenciálnej energie očakávali. S rastúcou vzdialenosťou od Zeme rastie (k nule), keďže konáme stále väčšiu prácu. Takýto postup s pomocou práce vonkajšej sily premiestňujúceho teleso a voľbou nulovej hladiny v nekonečne volí napr. [20]. V učebniciach pre vysokoškolské kurzy sa vyskytujú rôzne spôsoby výpočtu, ktoré však nakoniec vedú k tomuto výsledku. V zdroji [14] počítajú prácu gravitačnej sily pri presune hmotného bodu zo vzdialenosti r od Zeme do nekonečna. V [15] počítajú prácu gravitačnej sily pri presune hmotného bodu zo vzdialenosti r_1 do r_2 od Zeme ($r_2 > r_1$). V [18] počítajú prácu gravitačnej sily pri páde hmotného bodu zo vzdialenosti r_2 do vzdialenosti r_1 od Zeme, pričom opäť $r_2 > r_1$. Na základe rôznorodosti týchto možností v učebniciach sme vytvorili typológiu zvolených postupov (obr. 4). V prípade postupov typu 1 bola na dopátranie sa ku gravitačnej potenciálnej energii použitá práca vonkajšej sily, šípkou je znázornený presun hmotného bodu (medze integrácie). V prípade postupov typu 2 bola na dopátranie sa ku vzťahu potenciálnej energie použitá práca gravitačnej sily.

	a	b	c	d
typ 1 (vonkajšia sila)			X	X
typ 2 (gravitačná sila)				

Obr. 4 Typológia postupov v učebniciach pri odvodzovaní vzťahu pre potenciálnu gravitačnú energiu

Aj z vyššie uvedenej typológie zostrojenej na základe učebníc a materiálov pre vysokoškolské kurzy je jasné, že častejšie sa pri odvodzovaní vzťahu pre potenciálnu energiu gravitačnú využíva výpočet práce gravitačnej sily – vnútornej sily v sústave hmotný bod–Zem. Z analýzy ďalej vyplynulo, že všetky materiály kladú nulovú hladinu potenciálnej energie do nekonečnej vzdialenosti od Zeme.

Ako už bolo spomenuté, túto problematiku spracovali aj niektoré učebnice a materiály pre stredné školy. Najväčším problémom pri odvodzovaní

vzťahu pre gravitačnú potenciálnu energiu je nedostatočný matematický aparát žiakov, keďže ide o výpočet práce premennej sily, ktorá od vzdialenosti nezávisí lineárne (nemožno tak priamo použiť grafickú metódu ako pri telese na pružine). Aj napriek tomu sa s týmto učivom niektorí autori podrobnejšie zaoberali. V [9] popri veličine intenzita gravitačného poľa zavádzajú priamo veličinu potenciál gravitačného poľa ako pomer

$$\varphi_g = \frac{E_p}{m}.$$

V tomto vzťahu je E_g práve potenciálna gravitačná energia hmotného bodu v danom mieste gravitačného poľa. Ďalej je uvedené, že zmena polohy hmotného bodu v gravitačnom poli má za následok zmenu jeho potenciálnej energie $\Delta E_p = |E_{p1} - E_{p2}|$. Výklad vedie ďalej na pojem ekvipotenčné plochy, čo autori definujú ako body poľa, v ktorých má gravitačné pole rovnaký potenciál. Bližšie k potenciálnej gravitačnej energii sa autori vyjadrujú v časti rozširujúceho učiva na konci kapitoly [9]: „Presný výpočet ukazuje, že keď sa vzdialenosť bodu P od zdroja poľa zmení z hodnoty r_1 na r_2 , jeho gravitačná potenciálna energia sa zmení o hodnotu vykonanej práce danej nasledovný vzťahom

$$\Delta E_p = W = \kappa m m_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Autori používajú na označenie gravitačnej konštanty písmeno κ namiesto G , čo je v starších materiáloch zvykom. Väčšina učebníc obchádza spomínaný nedostatočný matematický aparát len konštatovaním a uvádza výsledný vzťah, aj to len v rámci rozširujúceho učiva. Práci a potenciálnej energii v radiálnom gravitačnom poli sa okrajovo venuje aj učebnica [8]. Gravitačnú potenciálnu energiu v istom mieste gravitačného poľa definujú pomocou práce, ktorú vykoná gravitačná sila pri premiestnení telesa z tohto miesta poľa na povrch Zeme. V snahe zjednotiť výklad s tiažovou potenciálnou energiou tak netypicky nevolia nulovú hladinu potenciálnej energie v nekonečne ale na povrchu Zeme. V úlohe 3 tej istej strany uvádzajú aj vzťah pre potenciálnu gravitačnú energiu

$$E_p = \kappa m M_Z \left(\frac{1}{R_Z} - \frac{1}{r} \right).$$

Hodnoty potenciálnej energie gravitačnej tak vychádzajú kladné a rastú s rastúcou vzdialenosťou od Zeme. Ako však správne uvádza napr. [16],

nerastú k nekonečnu, ale vďaka závislosti gravitačnej sily od vzdialenosti $\sim 1/r^2$ rastú ku konečnej hodnote. Väčšina učebníc a materiálov, ako sme videli, volia nulovú hladinu v nekonečne. Za cenu konzistentnosti s voľbou nulovej hladiny na povrchu Zeme, ako je to pri tiažovej energii, sa vo vzťahu ponecháva dodatočná konštanta, označme C

$$E_p = -G \frac{mM_Z}{r} + G \frac{mM_Z}{R_Z} = -G \frac{mM_Z}{r} + C.$$

V konečnom dôsledku to však nevadí, pri zisťovaní práce, teda rozdielu potenciálnych energií ΔE_p sa táto hodnota odčíta. Zaujímavý prístup k odvodeniu vzťahu pre gravitačnú potenciálnu energiu, vyskytujúci sa aj v niektorých zahraničných zdrojoch, volia napr. v [21]. Konštatujú, že pri výpočte práce vonkajšej sily pri prenášaní hmotného bodu s hmotnosťou m zo vzdialenosti r_1 do vzdialenosti r_2 od Zeme ($r_2 > r_1$) nastáva problém kvôli nekonštantnej sile. Využívajú však podobný postup ako pri telese na pružine, snažia sa na danom intervale nájsť veľkosť priemernej sily. Vykonaná práca by bola potom $W = \bar{F}(r_2 - r_1)$. Pre veľkosti vonkajších síl vo vzdialenostiach r_1 a r_2 platí

$$F_1 = G \frac{mM_Z}{r_1^2}, \quad F_2 = G \frac{mM_Z}{r_2^2}.$$

Vzhľadom na závislosť veľkosti sily od vzdialenosti r , ktoré sa vyskytuje v druhej mocnine, konštatujú, že aritmetický priemer nebude asi dobrým odhadom. Ak sa r_2 líši od r_1 líši len málo, zdá sa ako správny odhad priemernej sily použiť geometrický priemer

$$\bar{F} = \sqrt{F_1 F_2} = \sqrt{G \frac{mM_Z}{r_1^2} \cdot G \frac{mM_Z}{r_2^2}} = G \frac{mM_Z}{r_1 r_2}.$$

Vykonaná práca vonkajšou silou (rovná zmene potenciálnej energie) je potom

$$\begin{aligned} W = \Delta E_p = \bar{F}(r_2 - r_1) &= G \frac{mM_Z}{r_1 r_2} (r_2 - r_1) = \\ &= GmM_Z \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = G \frac{mM_Z}{r_1} - G \frac{mM_Z}{r_2}. \end{aligned}$$

Odtiaľ vidieť, že ak $\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}$, potom pre gravitačnú potenciálnu energiu dostávame buď uvedený vzťah, alebo sa od neho líši len nejakou

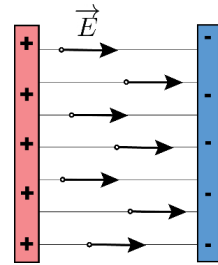
konštantou (podobne ako pri zvolení nulovej hladiny na povrchu Zeme). Dôjdeme tak každopádne bez integrálneho počtu ku vzťahu (3).

Nakoniec ešte poznámka k voľbe nulovej hladiny potenciálnej energie gravitačnej. Za voľbu nulovej hladiny na povrchu Zeme hovorí konzistentnosť pri voľbe nulovej hladiny tiažovej energie a následné kladné hodnoty tejto energie. Naopak, v prípade voľby nulovej hladiny v nekonečne, sa zbavíme prebytočnej konštanty pri potenciálnej energii, dostávame však záporné hodnoty energie, ktoré s rastúcou výškou rastú k nule. To ale vo fyzike nie je nič nezvyčajné, podobne v kvantovej mechanike volíme záporné hodnoty energie pre viazané stavy systémov, ktoré rastú k nule. Kladné hodnoty energie potom zodpovedajú voľným stavom systému.

Homogénne a radiálne elektrické pole

Zaujímavé je sa pozrieť v učebniciach a učebných materiáloch na ďalší typ konzervatívneho silového poľa – pole elektrostátické. Keďže v základnej škole sa potenciálnej energii (a potenciálu) v elektrickom poli nevenuje pozornosť, pozrieme sa na materiály pre vyššie stupne škôl, pričom všetky sú uvedené v zozname použitej literatúry. Homogénne elektrické pole býva opisované ako pole medzi dvoma rovnako veľkými rovnobežnými doskami, ktoré nesú rovnako veľké náboje opačného znamienka.

Za spomenutie stojí skutočnosť, že takýto doskový kondenzátor je vo všetkých analyzovaných učebniciach kreslený spôsobom zobrazeným na obr. 5, dosky takéhoto kondenzátora sú kreslené vo vertikálnej polohe. Aj keď pojem elektrostátická potenciálna energia sa v kurikulárnych dokumentoch priamo nevyskytuje, nachádza sa tam pojem elektrický potenciál, preto s potenciálnou energiou operujú aj viaceré učebnice. V učebnici [22] uvádzajú autori, že potenciálna energia bodového náboja závisí od jeho polohy v elektrickom poli. „Pri pohybe v smere pôsobenia elektrickej sily sa potenciálna energia znižuje, pri pohybe proti elektrickej sile sa zvyšuje. Za miesto s nulovou potenciálnou energiou volíme zem a telesá vodivo spojené so zemou (uzemnené).“ Na dopracovanie sa k potenciálu využívajú prácu elektrickej sily pri premiestnení bodového náboja z bodu



Obr. 5 Zobrazenie homogénneho elektrického poľa medzi dvoma rovnobežnými doskami bežné vo všetkých analyzovaných materiáloch

A do bodu B elektrického poľa. Vzhľadom na voľbu nulovej hladiny potenciálnej energie na zemi ďalej konštatujú, že potenciál možno vypočítať ako podiel práce, ktorú vykoná elektrická sila pri premiestnení náboja z daného miesta na zem, a tohto náboja. Pre doskový kondenzátor už len uvádzajú výsledný vzťah $\varphi = Ed$. Doskovému kondenzátoru sa venuje aj kniha [12], kde autori zavádzajú spolu s potenciálom aj pojem napätie ako rozdiel potenciálov v daných dvoch bodoch poľa. Ďalej počítajú prácu opäť elektrickej sily pri premiestnení kladného bodového náboja z kladnej dosky na uzemnenú dosku. Dostanú tak

$$\varphi = \frac{W}{Q_0} = \frac{F_e d}{Q_0} = \frac{Q_0 E d}{Q_0} = Ed.$$

Ďalej ukážu, že v prípade uzemnenej dosky s $\varphi_0 = 0$ ide vlastne o napätie medzi doskami $U = Ed$. Podobne sa postupuje napr. v [13]. V stredoškolských učebniciach a materiáloch pre tento stupeň školy je teda využívaná práca vnútornej sily v zmysle rovnice (2). Autori teda nechávajú na teleso pôsobiť silu poľa, ako to bolo v niektorých prípadoch v tiažovom poli, nechávajú teleso „padať“. Zaujímavá je ďalej skutočnosť, že pri tomto odvodzovaní ani v jednom materiáli nebola použitá analógia s tiažovým poľom Zeme, autori by sa tak mohli odvolať na poznatky, ktoré si žiaci už osvojili. V učebniciach býva tematizované aj radiálne elektrické pole od bodových nábojov. V učebnici [22] uvádzajú autori, že ak sa priblíži k pevnému bodovému náboju Q vo vákuu do vzdialenosti r bodový náboj q rovnakého znamienka, získa sústava potenciálnu elektrickú energiu

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r}.$$

V poznámke pod čiarou uvádzajú, že na odvodenie tohto vzťahu je nutné použiť integrálny počet. Podobne ako v [12] kladú nulovú hodnotu potenciálu (tým aj potenciálnej energie) na zem a uzemnené telesá. Uvádzajú aj, že potenciál vo veľkej vzdialenosti od osamoteného bodového náboja je nulový.

Aj napriek nespornej analógii s tiažovým (gravitačným) a elektrostatickým poľom vystáva rozdiel na mieste, kedy necháme na elektrický náboj pôsobiť výhradne len silu elektrického poľa (teleso v tiažovom/gravitačnom poli necháme padať). Tento problém podrobnejšie berú do úvahy autori vysokoškolských učebníc. V [23] autori zdôrazňujú, že ak by sme nechali na nejaký náboj q pôsobiť iba sily od elektrického poľa, bude sa

náboj pohybovať zrýchlene, začne vyžarovať a časť energie, ktorú získal, vyžiari do okolitého priestoru. Preto sa vysokoškolské učebné texty opierajú hlavne o zavedenie potenciálu a potenciálnej energie cez prácu vonkajšej sily, ktorá prekonáva silu elektrickú. Náboj v elektrickom poli je tak posúvaný pomaly po infinitezimálnych kúskoch, s čím sa tieto texty snažia eliminovať problém s pohybom náboja. Obdobným postupom zavádza potenciál vo svojej známej učebnici aj A. Tirpák [24]. Na záver tak možno zhrnúť, že z analyzovaných učebníc a materiálov pre stredné školy nevyplývalo dostatočné previazanie tiažového a elektrostatického poľa ako dvoch typov konzervatívneho silového poľa. Javy v elektrostatickom poli sú zložitejšie v tom zmysle, že naproti tiažovému (gravitačnému) poľu sa okrem príťažlivých interakcií vyskytujú aj odpudivé v závislosti od znamienok nábojov. Národné porovnanie týchto polí by však mohlo byť dobrou pomocou ako prekonať značnú abstraktnosť v prípade elektrostatiky u žiakov a študentov.

Návrh výkladu tém o energii

Vzhľadom na diskusiu vyššie uvedených tém spracovaných v učebniciach a materiáloch pre rôzne stupne škôl a načrtnutí niektorých slabých miest a otázok považujeme za konštruktívne uviesť návrh výkladu tém o energii tak, aby spĺňoval spomenuté požiadavky. Vzhľadom na rozsiahlosť témy nebudeme uvádzať celý výkladový text, skôr sme sa zamerali na kľúčové body výkladu, to znamená jednak postupnosť tém, riešenie problematických miest s ich odôvodnením a naznačením smeru, kam by sa mal výklad uberať. Pre celý výklad navrhujeme pri odvodzovaní vzťahov pre akýkoľvek typ potenciálnej energie používať práce vonkajších síl, ktoré prekonávajú silu poľa.

Potenciálna energia tiažová. V prípade tiažového poľa navrhujeme používať myšlienkový experiment s rovnomerným dvíhaním hmotného bodu (telesa) z výšky h_1 do výšky h_2 nad podložkou. Vonkajšia sila ($\vec{F}_v = -\vec{F}_G$) pôsobí v smere posunutia hmotného bodu, koná tak kladnú prácu ($W > 0$). Práca vykonaná vonkajšou silou sa prejaví ako nárast potenciálnej energie sústavy hmotný bod–Zem

$$W = F_v s = mg \cdot (h_2 - h_1) = mgh_2 - mgh_1 = E_{p2} - E_{p1} = \Delta E_p > 0.$$

Nulovú hladinu potenciálnej energie možno voliť ľubovoľne, napr. na povrchu zeme. Za pomoci experimentu s kladkou uvedeného na obr. 2 je vhodné ukázať, že v prípade práce tiažovej sily pri padaní telesa z výšky

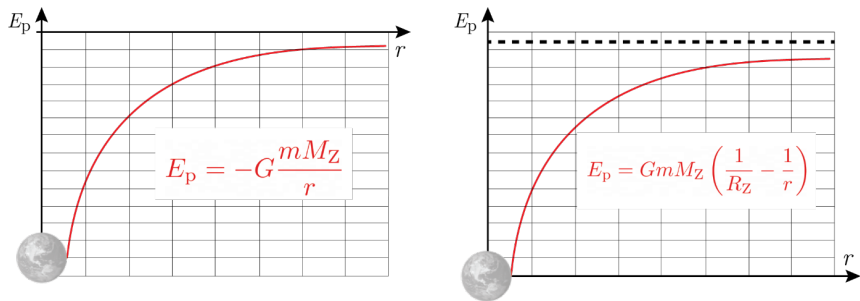
h_2 do výšky h_1 dochádza k úbytku potenciálnej energie sústavy hmotný bod–Zem, a síce $W = E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p$. Práca vonkajšej aj tiažovej sily závisí len na počiatočnej a koncovej výške, nie na trajektórii hmotného bodu. Tento výklad môžeme ďalej naviazať na prípad, kedy teleso padá vo vákuu a pôsobí naň len tiažová sila – sústava hmotný bod–Zem je izolovaná, mechanická energia v nej sa zachováva $E = \text{konšt.}$

Potenciálna energia pružnosti. Vo výklade potenciálnej energie pružnosti odporúčame postupovať ako väčšina učebných textov, to znamená zdôrazniť skutočnosť, že sila pružnosti nie je konštantná ale je lineárnou funkciou predĺženia pružiny, pre jej veľkosť teda platí $F = kx$. V myšlienkovom experimente pružinu natiahujeme vonkajšou silou, ktorá vyrovnáva silu pružnosti pružiny, ktorá sa ju snaží vrátiť do pôvodnej polohy ($\vec{F}_v = -\vec{F}_p$). Odporúčame začať najprv postupom, kedy prácu premennej sily určíme pomocou jej priemeru, v tomto prípade aritmetického, a dostaneme tak $W = \bar{F}x$. Tento postup sa ukázal lepší aj pri odvodení vzťahu pre potenciálnu energiu gravitačnú, kde grafická metóda v strednej škole zlyháva. Následne ukázať súvislosť s grafom na obr. 3.

Potenciálna energia gravitačná. Pri výklade a odvodzovaní vzťahu pre potenciálnu energiu gravitačnú odporúčame využiť práce vonkajšej sily, ktorá premiestňuje hmotný bod v gravitačnom poli Zeme zo vzdialenosti r_1 do vzdialenosti r_2 , pričom $r_2 > r_1$. Opäť môžeme zdôrazniť, že nezáleží na trajektórii presunu hmotného bodu, gravitačné pole je konzervatívne. Ako pri pružine môžeme použiť spomenuté odvodenie vzťahu za pomoci priemernej sily, pričom tentokrát vzhľadom na závislosť pôsobiacej sily od vzdialenosti použijeme geometrický priemer. Odvodíme tak všeobecný vzťah

$$W = GmM_Z \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \Delta E_p > 0.$$

Práca vonkajšej sily tak vedie k nárastu potenciálnej energie sústavy hmotný bod–Zem. Voľba nulovej hladiny je opäť ľubovoľná, už skôr sme uviedli výhody a nevýhody voľby nulovej hladiny v nekonečne a na povrchu Zeme. V prípade voľby nulovej hladiny v nekonečne je treba upozorniť na záporné hodnoty potenciálnej energie, ktorá však rastie (k nule). Zmena potenciálnej energie tak vždy vychádza ako kladná $\Delta E_p > 0$. V prípade, že sa rozhodneme voľiť nulovú hladinu konzistentne na povrchu Zeme, opäť treba ukázať, že hodnoty potenciálnej energie sú kladné a rastú, nie však do nekonečna, ale ku konečnej hodnote. Navrhujeme v takomto prípade žiakom či študentom predstaviť obe možnosti a diskutovať ich adekvátnosť. Ako názorná pomôcka môže poslúžiť obr. 6.



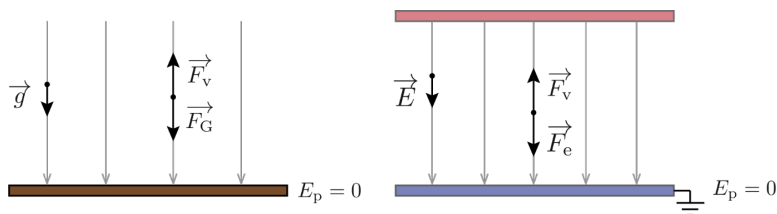
Obr. 6 Graf závislosti potenciálnej energie gravitačnej od vzdialenosti od centrálného telesa (Zeme) pre voľbu nulovej hladiny v nekonečne (vľavo) a voľbu nulovej hladiny na povrchu Zeme (vpravo)

Ako už bolo spomenuté v úvode tohto príspevku, znalosť vzťahu pre túto energiu nám umožní aj odvodiť, nie len oznámiť, vzťah pre parabolickú (únikovú) rýchlosť, ukážeme aj postup s potenciálnou energiou, kedy nulovú hladinu volíme na povrchu Zeme. Ak raketa štartuje z povrchu Zeme, je jej potenciálna energia nulová, rýchlosť rakety nech je v_p . Po úniku z gravitačného poľa Zeme, teda pre $r \rightarrow \infty$, dosiahne kinetická energia rakety nulovej hodnoty a potenciálna energia je $E_p = GmM_Z/R_Z$. Energetická bilancia tak dá

$$\frac{1}{2}mv_p^2 + 0 = 0 + \frac{GmM_Z}{R_Z}; \Leftrightarrow v_p = \sqrt{\frac{2GM_Z}{R_Z}}.$$

Potenciálna energia elektrostatického poľa. V prípade odvodenia vzťahu pre potenciálnu energiu elektrostatického poľa odporúčame začať poľom homogénnym, medzi dvoma nesúhlasne nabitými rovnobežnými platňami. Konzistentne by bolo vhodné využiť pri prenášaní náboja v elektrickom poli prácu vonkajšej sily, ktorá prekonáva silu elektrickú ($\vec{F}_v = -\vec{F}_e$), čím sa vyhneme aj spomínanému problému zrýchleného pohybu elektrických nábojov. Čo v učebniciach a materiáloch pre všetky typy škôl nebolo zvykom, bolo by vhodné čo najviac vyťažiť z analógie medzi ťažovým a homogénnym elektrickým poľom. Táto situácia sa priam ponúka, keď len netypicky v nákresoch pootočime platne kondenzátora (obr. 7).

Tu už priamo vidíme, že podobne ako v ťažovom poli, aj v homogénnom elektrickom poli vedie presun častice v smere vonkajšej sily k nárastu potenciálnej energie, pohyb v smere elektrickej sily (náboj necháme „padať“ podobne ako v ťažovom poli) vedie k zníženiu potenciálnej energie sústavy.



Obr. 7 Využitie analógie tiažového poľa a homogénneho elektrického poľa

Ďalej vidíme aj zhodnú voľbu nulovej hladiny potenciálnej energie na zemi, resp. na telesách so zemou vodivo spojených. Práca vonkajšej sily pri prenášaní kladného bodového náboja zo vzdialenosti d_1 do vzdialenosti d_2 v smere od zápornej dosky ku kladnej je

$$W = F_v (d_2 - d_1) = QEd_2 - QEd_1 = E_{p2} - E_{p1} = \Delta E_p > 0.$$

Práca vonkajšej sily tak vedie k nárastu potenciálnej energie sústavy. Ak označíme vzdialenosť dosiek d a nulovú hladinu potenciálnej energie zvolíme na uzemnenej doske, je potenciálna energia bodového náboja pri kladnej doske $E_p = QEd$. Odtiaľ už je len krok k zavedeniu veličiny potenciál. V prípade potenciálnej energie v radiálnom gravitačnom poli od nábojov možno taktiež vyjsť z analógie s radiálnym gravitačným poľom. V prípade elektrostatického poľa je však situácia zložitejšia, keďže podľa znamienok nábojov môže dôjsť aj k odpudivej interakcii, na rozdiel od gravitačného poľa, ktoré sa prejavuje čisto príťažlivými interakciami. Obdobným postupom pomocou geometrického priemeru môžeme dôjsť aj v strednej škole ku vzťahu

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r}.$$

V prípade príťažlivej interakcie, kedy sú znamienka nábojov nesúhlasné, môžeme voliť napr. $Q_1 = +Q$ a $Q_2 = -q$, čím dostaneme záporné hodnoty potenciálnej energie ako pri potenciálnej energii gravitačnej s voľbou nulovej hladiny v nekonečne (potenciálna energia sústavy dvoch nábojov je nulová, keď sú náboje od seba veľmi ďaleko). V prípade odpudivej interakcie (znamienka nábojov sú súhlasné) dostávame kladné hodnoty elektrostatickej potenciálnej energie sústavy dvoch nábojov.

Záver

V tomto príspevku sme sa snažili podať prehľad o metodických postupoch používaných v učebniciach pri odvodení vzťahov pre potenciálnu

energiu, previazanosti tém potenciálna energia v tiažovom, gravitačnom a elektrostatickom poli. Na základe analýzy učebníc a materiálov pre základné, stredné, ale aj vysoké školy sme dospeli k záveru, že pri výklade a odvodzovaní vzťahov pre rôzne druhy potenciálnej energie sú používané rôznorodé metodické postupy a skoro každý autor sa s touto témou vysporiadal inak. Naším cieľom bolo na základe tejto analýzy načrtnúť aspoň možný výklad týchto tém tak, aby rešpektoval zistené skutočnosti a pri odvodzovaní vzťahov pre potenciálnu energiu bol konzistentný. Dôvodom pre takéto konanie môže byť už len jedna zo základných zásad vyučovacieho procesu – zásada systematickosti, ktorá vyjadruje požiadavku logicky usporiadaného didaktického systému učiva. Netvrdíme, že nami navrhnutá postupnosť a poznámky k výkladu sú jediným správnym postupom, sme však presvedčení, že pri kladení dôrazu na väčšiu previazanosť tém potenciálna energia v gravitačnom/tiažovom a elektrostatickom poli môže byť u žiakov a študentov učivo o elektrostatike ľahšie uchopiteľné. Niektoré časti z uvedeného výkladu autor článku už dlhšie využíva vo svojej praxi a osvedčili sa tak aj priamo vo vyučovaní fyziky.

Literatúra

- [1] *Inovovaný Štátny vzdelávací program, Prílohy ISCED 3.* [online]. [cit. 2025-05-01]. Dostupné z: <https://www.statpedu.sk/sk/svp/inovovany-statny-vzdelavaci-program/inovovany-svp-gymnazia-so-stvorrocnym-patrocnym-vzdelavacim-programom/>.
- [2] *Lapítková, V. a kol.:* Fyzika pre 8. ročník základnej školy a 3. ročník gymnázia s osemročným štúdiom. Vydavateľstvo Matice slovenskej, Martin, 2012.
- [3] *Kolářová, R. a kol.:* Fyzika pre 8. ročník základných škôl. 2. vydanie. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 2001.
- [4] *Kolářová, R., Bohuněk, J.:* Fyzika pro 8. ročník základní školy. 1. vydanie. Nakladatelství Prometheus, Praha, 1999.
- [5] *Randa, M. a kol.:* Fyzika 8 – učebnice pro základní školu a víceletá gymnázia. 1. vydanie. Nakladatelství Fraus, Plzeň, 2018.
- [6] *Janovič, J. a kol.:* Fyzika pre 9. ročník základných škôl. 1. vydanie. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 2000.
- [7] *Koubek, V. a kol.:* Fyzika pre 1. ročník gymnázia a 5. ročník gymnázia s osemročným štúdiom. 3. vydanie. Združenie EDUCO, Nitra, 2019.
- [8] *Vachek, J. a kol.:* Fyzika pre 1. ročník gymnázií. 3. vydanie. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 1993.

- [9] *Scholtz, E., Kireš, M.*: Fyzika dynamika pre osemročné gymnáziá. 2. vydanie. Slovenské pedagogické nakladateľstvo, Bratislava, 2019.
- [10] *Švoboda, E. a kol.*: Fyzika pro gymnáziá – mechanika. 5. vydanie. Nakladatelství Prometheus, Praha, 2016.
- [11] *Sklenák, L., Dvořák, D.*: Fyzika pro střední školy – mechanika. 1. vydanie. Fortuna, Praha, 1997.
- [12] *Švoboda, E. a kol.*: Přehled středoškolské fyziky. 6. vydanie. Nakladatelství Prometheus, Praha, 2019.
- [13] *Tarábek, P. a kol.*: Zmaturuj z fyziky. 1. vydanie. Didaktis, Bratislava, 2006.
- [14] *Halliday, D. a kol.*: Fyzika 1. 2. vydanie. VUTIUM, Brno, 2013.
- [15] *Hlavička, A. a kol.*: Fyzika pro pedagogické fakulty 1. 2. vydanie. Státní pedagogické nakladatelství, Praha, 1971.
- [16] *Banič, I. a kol.*: Fyzika netradične – mechanika. 1. vydanie. Alfa, Bratislava, 1989.
- [17] *Zelenický, Ľ. a kol.*: Mechanika a molekulová fyzika. Štatistické a evidenčné vydavateľstvo tlačív, Bratislava, 2008.
- [18] *Sklenák, L.*: Mechanika – učebný text. Katedra fyziky, Ostrava, 2008.
- [19] *Kľuvanec, D. a kol.*: Kreatívne poznávanie vo fyzike. 1. vydanie. Fakulta prírodných vied Univerzity Konštantína Filozofa v Nitre, Nitra, 2005.
- [20] *Veselský, J., Lukovičová, J.*: Fyzika – Mechanika, pružnosť a pevnosť, hydromechanika. STU, Bratislava, 2007.
- [21] *Jarešová, M., Volf, I.*: Tři náročnější úlohy z fyziky, při jejichž řešení se můžeme setkat s elipsou. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 81 (2006), č. 3, s. 8–20.
- [22] *Lepil, O., Šedivý, P.*: Fyzika pro gymnáziá. Elektřina a magnetismus. Nakladatelství Prometheus, Praha, 2008.
- [23] *Dillinger, J., Halúsková, S.*: Základný bakalársky kurz pre technické univerzity. [online]. STU, 2003 [cit. 2025-05-01]. Dostupné z: http://kf-lin.elf.stuba.sk/~ballo/STU_online/Fyzika%20II/8%20kapitola/elstatPole1-10.htm.
- [24] *Ťirpák, A.*: Elektromagnetizmus. 4. vydanie. Iris, Bratislava, 2014.

Vybrané matematické úlohy MO řešitelné pomocí žakovského programování (2. část)

LADISLAV PERK

Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem

Úvod

Tento článek je přímým pokračováním článku, který byl publikován v předchozím čísle časopisu Matematika–Fyzika–Informatika [1]. V něm bylo představeno šest matematických úloh MO, ve kterých byla hledána řešení pomocí funkčních programů v jazyce Python. Cílem článku bylo popsat zdrojové kódy těchto programů. Zároveň byly představeny zdrojové kódy s využitím pokročilých syntaktických konstrukcí jazyka Python.

V podobném duchu je v tomto článku prezentováno dalších pět úloh. Stejně tak jako jsou u každé z těchto úloh také představeny zdrojové kódy s využitím pokročilých syntaktických konstrukcí jazyka Python.

V následující úloze 1 se pracuje s celočíselnými podíly, resp. podíly přirozených čísel, u kterých se posuzuje, zda je či není jejich podíl celočíselný.

Úloha 1 ([2])

Tři kamarádky veverky spolu vyrazily na sběr lískových oříšků. Zrzečka jich našla dvakrát víc než Pizizubka a Ouška dokonce třikrát víc než Pizizubka. Cestou domů si povídaly a přitom louskaly a jedly své oříšky. Pizizubka snědla polovinu všech oříšků, které nasbírala, Zrzečka třetinu všech svých oříšků a Ouška čtvrtinu těch svých. Doma veverky zjistily, že jim dohromady zbylo 196 oříšků. Kolik oříšků našla každá z veverek?

Autorské řešení: Označme Z jako počet oříšků Zrzečky, P jako počet oříšků Pizizubky a O jako počet oříšků Oušky. V úloze se hledají všechny trojice přirozených čísel (Z, P, O) , které splňují všechny podmínky zadání úlohy.

V rámci rozboru zadání úlohy je nutné si uvědomit, že číselná hodnota Z závisí na číselné hodnotě P , stejně tak číselná hodnota O závisí na číselné hodnotě P ; matematicky lze tuto situaci zapsat jako $Z = f(P)$ a $O = g(P)$. Proto není zapotřebí vyčíslovat Z a O , postačí vyčíslit P . Proto zavedeme jeden cyklus s pevným počtem opakování s vhodně pojmenovanou proměnnou.

Jak již bylo řečeno výše, proměnné Z a O číselně závisí na číselné hodnotě P , proto je třeba je číselně vyjádřit: (ř. 4 a 5). Po příchodu veverek domů budou pak počty oříšků následující:

$$P^* = \frac{P}{2}, \quad Z^* = \frac{2}{3}Z, \quad O^* = \frac{3}{4}O.$$

Protože pro vyčíslení počtů po příchodu veverek domů je uplatněno číselné dělení a zároveň víme, že výsledky těchto dělení musí být přirozená čísla (tj. celočíselné počty oříšků), pak je nutné při tvorbě zdrojového kódu uplatnit metodu, která posoudí celočíselnost těchto dělení. K tomu je vhodné uplatnit metodu `.is_integer()`, která nabývá hodnoty `True` v situaci, kdy číslo A (při volání metody `A.is_integer()`) je celým číslem; v opačném případě nabývá hodnoty `False`.

```

1 import math
2
3 for P in range(1, 1001):
4     Z= 2 * P
5     O= 3 * P
6
7     P2 = P / 2
8     Z3 = 2 * Z / 3
9     O4 = 3 * O / 4
10
11     if P2.is_integer() and Z3.is_integer() and O4.is_integer():
12         if P2 + Z3 + O4 == 196:
13             print("P = ", P)
14             print("Z = ", Z)
15             print("O = ", O)
16             print()

```

Program vypíše jednu trojici přirozených čísel (P, Z, O) : (48, 96, 144). Jednoduchou početní kontrolou lze ověřit správnost tohoto vypsání výsledku. Zároveň je možné se přesvědčit o správnosti tohoto výsledku nahlednutím do řešení MO. [2]

```

1 import math
2
3 P = 0
4 splneno = False
5
6 while splneno == False:
7     P = P + 1
8     Z = 2 * P
9     O = 3 * P
10
11     P2 = P / 2
12     Z3 = 2 * Z / 3
13     O4 = 3 * O / 4
14
15     if P2.is_integer() and Z3.is_integer() and O4.is_integer():
16         if P2 + Z3 + O4 == 196:
17             print("P = ", P)
18             print("Z = ", Z)
19             print("O = ", O)
20             splneno = True

```

Vypisované výsledky tohoto programu jsou shodné s vypisovanými výsledky předchozího programu. Oba programy jsou proto z hlediska vypisovaných výsledků identické.

V následující úloze 2 se pracuje s nejmenším společným násobkem a největším společným dělitelem dvou přirozených čísel. Úloha je náročnější jak z hlediska volby strategie řešení, tak také v náročnosti tvorby zdrojového kódu pro vyčíslení největšího společného dělitele, resp. nejmenšího společného násobku.

Úloha 2 ([3])

Určete všechny dvojice přirozených čísel a a b , pro něž platí

$$2 \cdot \text{NSN}(a, b) + 3 \cdot \text{NSD}(a, b) = ab, \quad (*)$$

kde $\text{NSN}(a, b)$ značí nejmenší společný násobek a $\text{NSD}(a, b)$ největší společný dělitel přirozených čísel a a b .

Autorské řešení: V úloze se hledají všechny dvojice přirozených čísel (a, b) , které splňují rovnici $(*)$, kde $\text{NSN}(a, b)$, resp. $\text{NSD}(a, b)$, je nejmenší společný násobek čísel a a b , resp. největší společný dělitel čísel a a b .

Pracuje se tedy s nejmenším společným násobkem $\text{NSN}(a, b)$ a největším společným dělitelem $\text{NSD}(a, b)$ čísel a a b , pro které platí vztah

$$a \cdot b = \text{NSN}(a, b) \cdot \text{NSD}(a, b). \quad (1)$$

Vyčíslení $\text{NSN}(a, b)$ a $\text{NSD}(a, b)$ je možné pomocí jedné z uvedených možností:

- (a) samostatné vyčíslení pomocí algoritmu $\text{NSN}(a, b)$ a $\text{NSD}(a, b)$;
- (b) vyčíslení $\text{NSN}(a, b)$ pomocí algoritmu a výpočet $\text{NSD}(a, b)$ ze vzorce

$$\text{NSD}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\text{NSN}(a, b)};$$

- (c) vyčíslení $\text{NSD}(a, b)$ pomocí algoritmu a výpočet $\text{NSN}(a, b)$ ze vzorce

$$\text{NSN}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\text{NSD}(a, b)}.$$

Možnost (a) je nevýhodná tím, že nevyužije vzorce (1). V prezentovaném řešení využijeme možnost (c). Budeme tedy vyčíslovat $\text{NSD}(a, b)$ pomocí algoritmu a výpočet $\text{NSN}(a, b)$ ze vzorce $\text{NSN}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\text{NSD}(a, b)}$.

V rámci vyčíslování $\text{NSD}(a, b)$ pomocí algoritmu je nutné si uvědomit, že největší společný dělitel čísel a a b je takové největší přirozené číslo, které beze zbytku dělí jak číslo a a zároveň číslo b . Zároveň platí, že největší společný dělitel čísel a a b nemůže být větší než menší z čísel a a b , tj. $\text{NSD}(a, b) \leq \{a, b, \min(a, b)\}$. Z důvodu snížení výpočetní náročnosti bude hledán největší společný dělitel čísel a a b od 1 do $\min(a, b)$.

Pro účely vyčíslování největších společných dělitelů vytvoříme metodu $\text{NSD}(x, y)$ s parametry x a y (ř. 8). Protože budeme hledat menší z čísel x a y , zavedeme proměnnou `mensi`, která nejprve bude nastavena na hodnotu v proměnné x (ř. 2) a v případě, že hodnota čísla v y je menší než hodnota x (ř. 3), pak bude přepsána hodnota v `mensi` na hodnotu y (ř. 4). Tím se zajistí, že v proměnné `mensi` bude uloženo z menších čísel x a y . Posléze v intervalu přirozených čísel od 1 do hodnoty v proměnné `mensi` pomocí cyklus s pevným počtem opakování s řídicí proměnnou i (ř. 6) posuzujeme, zda přirozené číslo v i beze zbytku dělí číslo v x a zároveň y pomocí operátoru modulo `%` v konjunktivním tvaru pomocí spojky `and` v podmíněném příkazu `if` (ř. 7). V případě, že nastane tato situace, pak se uloží do pomocné proměnné NSD číselná hodnota i (ř. 8). Tím, že dochází k zvestupnému posuzování čísel v i , pak po ukončení cyklu s pevným počtem opakování se nachází hodnota největšího společného dělitele čísel v x a y . Tato číselná hodnota NSD bude návratová hodnota metody $\text{NSD}(x, y)$ (ř. 9).

Pro účely vyčíslení nejmenších společných násobků vytvoříme metodu $\text{NSN}(x, y)$ s parametry x a y (ř. 12). Využijeme vztahu $\text{NSN}(x, y) = \frac{x \cdot y}{\text{NSD}(x, y)}$ a tento vztah vyčíslíme s uložením do proměnné NSN (ř. 13). Tato číselná hodnota bude návratovou hodnotou metody $\text{NSN}(x, y)$ (ř. 14).

```

1 def NSD(x, y):
2     mensi = a
3     if b < mensi:
4         mensi = b
5
6     for i in range(1, mensi + 1):
7         if x % i == 0 and y % i == 0:
8             NSD = i
9     return NSD
10
11
12 def NSN(x, y):
13     NSN = x * y / NSD(x, y)
14     return NSN
15
16
17 for a in range(1, 1001):
18     for b in range(1, 1001):
19         if 2 * NSN(a, b) + 3 * NSD(a, b) == a * b:
20             print ('a = ', a)
21             print ('b = ', b)
22             print ()

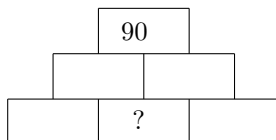
```

Program vypíše (a, b) : (3, 9), (5, 5) a (9, 3). Jednoduchou početní kontrolou lze ověřit správnost tohoto vypsaného výsledku. Zároveň je možné se přesvědčit o správnosti tohoto výsledku nahlédnutím do řešení MO.

V následující úloze 3 se do součinnové pyramidy doplňují kladná celá čísla tak, aby číslo v nejvýše postaveném poli bylo 90. V rámci řešení hledáme všechny číselné hodnoty pouze pole nacházejícího se v nejnižší vrstvě uprostřed. Úloha je ukázkou práce s úlohami vyjadřujícími číselné vztahy pomocí grafického vyjádření.

Úloha 3 ([4])

V součinnové pyramidě je v každém poli jedno kladné celé číslo, které je součinem čísel ze dvou sousedících polí z nižší vrstvy. Ve vrcholu trojvrstvé součinnové pyramidy je číslo 90.

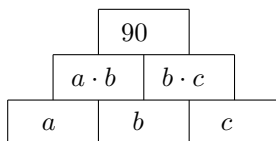


Jaké číslo může být ve vyznačeném poli? Určete všechny možnosti.

Autorské řešení: V úloze se hledají kladná celá čísla, která se mají doplnit do jednotlivých polí pyramidy s tím, že čísla ve vyšší vrstvě polí jsou součiny dotykových polí z nižší vrstvy.

Čísla v každém poli ve vyšší vrstvě jsou součiny čísel ze dvou sousedních polí nižší vrstvy, proto je nutné systematicky vyčíslovat pouze pole v nejnižší vrstvě; čísla v polích ve vyšší vrstvě pak vyjádřit jako příslušné součiny čísel polí z nižší vrstvy.

Pro účely vyjádření vztahů mezi jednotlivými poli pak zavedeme tři proměnné, např. a , b a c , pro tři pole v nejnižší vrstvě, zbylá pole pak budou vyčíslena dle následujícího obrázku:



Protože čísla v proměnných a , b a c mají být kladná celá čísla menší než 90, proto bez hlubšího matematického zamyšlení je možné každou z proměnných a , b a c vyčíslit od 1 do 89. Číslo 90 má vzniknout jako součin čísel $a \cdot b$ a $b \cdot c$, tedy $a \cdot b^2 \cdot c$. To znamená, že musí platit, že

$$a \cdot b^2 \cdot c = 90.$$

Pro účely zajištění vyčíslení proměnných a , b a c zavedeme tři vzájemně vnořené cykly s pevným počtem opakování se zavedením vhodně pojmenovaných proměnných a , b a c s vyčíslením od 1 do 88 (ř. 1–3). Podmínku pro posouzení rovnosti $a \cdot b^2 \cdot c = 90$ zrealizujeme pomocí podmíněného příkazu `if` (ř. 4). V případě kladného vyhodnocení této podmínky jsou vypísána čísla ze všech prázdných cihlíček (ř. 5–12).

```

1 for a in range(1, 89):
2     for b in range(1, 89):
3         for c in range(1, 89):
4             if a * b * b * c == 90:
5                 print ('a = ', a)
6                 print ('b = ', b)
7                 print ('c = ', c)
8                 print ('a.b = ', a * b)
9                 print ('b.c = ', b * c)
10                print ('a.b.b.c = ', a * b * b * c)
11                print ('? = ', b)
12                print ()

```

Program vypíše celkem 16 řešení s číselnými hodnotami ve všech buňkách pyramidy. Ve výpisech se v poli s otazníkem vyskytuje pouze číslo 1 a 3. Nahlédnutím do řešení MO je možné se přesvědčit o správnosti těchto nalezených výsledků.

Úlohu se také možné také řešit s využitím pokročilých syntaktických konstrukcí. Místo uplatnění tří vzájemně vnořených *for* cyklů lze uplatnit metodu *product* se třemi proměnnými (ř. 3–6).

```

1 from itertools import product
2
3 for x in product(range(1, 10), repeat = 3):
4     a = x[0]
5     b = x[1]
6     c = x[2]
7     if a * b * b * c == 90:
8         ...

```

Vypisované výsledky tohoto programu jsou shodné s vypisovanými výsledky předchozího programu. Oba programy jsou proto z hlediska vypisovaných výsledků identické.

V následující úloze 4 pracujeme s kvadratickou rovnicí a jejími kořeny. Úloha je zajímavá tím, že v rámci tvorby zdrojového kódu musíme bezpodmínečně vyjádřit nejen kořeny kvadratické rovnice, ale také její diskriminant, podle kterého se rozhodne, zda úloha má ryze reálné kořeny.

Úloha 4 ([5])

Najděte všechny dvojice celých čísel a , b takových, že součet $a + b$ je kořenem rovnice

$$x^2 + ax + b = 0.$$

Autorské řešení: V úloze se hledají všechny takové dvojice celých čísel a a b , kdy alespoň jeden kořen kvadratické rovnice $x^2 + ax + b = 0$ je roven celému číslu $a + b$. V rámci řešení tedy hledáme vyčíslení kořenů rovnice $x^2 + ax + b = 0$ a porovnáváme alespoň jedno toto vyčíslení s hodnotou $a + b$.

Diskriminant rovnice $x^2 + ax + b = 0$ je $D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot b = a^2 - 4b$, druhá odmocnina diskriminantu pak $\sqrt{D} = \sqrt{a^2 - 4b}$. Kořeny kvadratické rovnice jsou

$$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{D}}{2},$$

tzn. první kořen $x_1 = \frac{-a + \sqrt{D}}{2}$ a druhý kořen $x_2 = \frac{-a - \sqrt{D}}{2}$. Ze zadání plyne, že alespoň jeden kořen rovnice má být součtem $a + b$; protože ale rovnice může mít také dvojnásobný kořen (při $D = 0$), pak musí platit

$$(x_1 = a + b) \vee (x_2 = a + b) \vee (x_{1,2} = a + b).$$

Postačí ale pouze podmínka

$$(x_1 = a + b) \vee (x_2 = a + b).$$

```
1 import math
2
3 for a in range(-1000, 1001):
4     for b in range(-1000, 1001):
5         D = a * a - 4 * b
6
7         if D >= 0:
8             odmD = math.sqrt(D)
9
10            x1 = (-a + odmD) / 2
11            x2 = (-a - odmD) / 2
12            koren = a + b
13
14            if x1 == koren or x2 == koren:
15                print("a = ", a)
16                print("b = ", b)
17                print()
```

Program vypíše čtyři uspořádané dvojice (a, b) : $(-6, 8)$, $(-6, 9)$, $(0, -1)$ a $(0, 0)$.

Úlohu se také možné také řešit s využitím pokročilých syntaktických konstrukcí. Místo uplatnění dvou vzájemně vnořených *for* cyklů lze uplatnit metodu *product* se dvěma proměnnými (ř. 4–6).

```
1 from itertools import product
2 import math
3
4 for x in product(range(1, 10), repeat = 2):
5     a = x[0]
6     b = x[1]
7     D = a * a - 4 * b
8     ...
```

Vypisované výsledky tohoto programu jsou shodné s vypisovanými výsledky předchozího programu. Oba programy jsou proto z hlediska vypisovaných výsledků identické.

V následující úloze 5 se pracuje s jedním algebrogramem s pěti písmeny.

Úloha 5 ([6])

Určete, kolik různých řešení má následující algebrogram. Každé písmeno odpovídá jedné číslici od 0 do 5, různá písmena odpovídají různým číslicím, stejná stejným.

$$\begin{array}{cccc} K & O & S & A \\ S & A & K & O \\ \hline B & A & B & A \end{array}$$

Autorské řešení: V úloze se hledá počet všech pětic kladných celých čísel (A, B, K, O, S) , které splňují rovnost

$$\overline{KOSA} + \overline{SAKO} = \overline{BABA}.$$

Proměnné (A, B, K, O, S) mohou nabývat celočíselných hodnot od 0 do 5.

Protože jsou číselné hodnoty proměnných A, B, K, O, S určeny jednoznačně, je vhodné pro účely jejich vyčíslení uplatnit pět vzájemně vnořených cyklů s pevným počtem opakování s vhodným pojmenováním řídicích proměnných (ř. 1–5).

Protože ale musí být splněno, že číselné hodnoty v proměnných A, B, K, O, S musí být vzájemně různé, je nutné před další prací s těmito proměnnými posoudit vzájemnou číselnou různost. Protože obecně platí, že pokud platí nerovnost $X \neq Y$, pak není zapotřebí posuzovat nerovnost $Y \neq X$. Z toho plyne, že vzájemnou různost proměnných A, B, K, O, S lze vyjádřit jako

$$(A \neq B) \wedge (A \neq K) \wedge (A \neq O) \wedge (A \neq S) \wedge (B \neq K) \wedge \\ \wedge (B \neq O) \wedge (B \neq S) \wedge (K \neq O) \wedge (K \neq S) \wedge (O \neq S). \quad (2)$$

Je nutné provést dekadické vyjádření:

$\overline{KOSA}$ jako $1000 \cdot K + 100 \cdot O + 10 \cdot S + A$,

$\overline{SAKO}$ jako $1000 \cdot S + 100 \cdot A + 10 \cdot K + O$ a

$\overline{BABA}$ jako $1010 \cdot B + 101 \cdot A$ (ř. 11–13).

Pro účely vyhodnocení splnění rovnosti

$$\overline{KOSA} + \overline{SAKO} = \overline{BABA}$$

je nutné uplatnit podřízený příkaz (ř. 15). V případě kladného vyhodnocení této podmínky je možné přistoupit k inkrementaci proměnné registrující počet nalezených petic (ř. 23), kterou je nutné před prohledáváním stavového prostoru vynulovat (ř. 1). Po ukončení prohledávání stavového prostoru je vhodné vypsát číselnou hodnotu proměnné registrující počet hledaných petic (ř. 2). Tím došlo k vypsání hledaného počtu řešení.

```
1 pocet = 0
2
3 for A in range(0, 6):
4     for B in range(0, 6):
5         for K in range(0, 6):
6             for O in range(0, 6):
```

```

7         for S in range(0, 6):
8
9             if A!=B and A!=K and A!=O and A!=S and B!=K and
               B!=O and B!=S and K!=O and K!=S and O!=S:
10
11                 KOSA = K * 1000 + O * 100 + S * 10 + A
12                 SAKO = S * 1000 + A * 100 + K * 10 + O
13                 BABA = B * 1000 + A * 100 + B * 10 + A
14
15                 if KOSA+SAKO == BABA:
16
17                     print("A = ", A)
18                     print("B = ", B)
19                     print("K = ", K)
20                     print("O = ", O)
21                     print("S = ", S)
22
23                     pocet=pocet+1
24                     print()
25
26 print("Pocet algebrogramu: ", pocet)

```

Program vypíše 16 algebrogramů ve tvaru (A, B, K, O, S) :

(1, 5, 2, 0, 3), (1, 5, 3, 0, 2), (2, 4, 1, 0, 3), (2, 4, 3, 0, 1),
 (2, 5, 1, 0, 4), (2, 5, 4, 0, 1), (3, 5, 1, 0, 4), (3, 5, 4, 0, 1),
 (4, 3, 1, 0, 2), (4, 3, 2, 0, 1), (4, 5, 2, 0, 3), (4, 5, 3, 0, 2),
 (5, 3, 1, 0, 2), (5, 3, 2, 0, 1), (5, 4, 1, 0, 3), (5, 4, 3, 0, 1).

Stejně tak program vypíše informaci o vypsáném počtu algebrogramů. Jednoduchou početní kontrolou lze ověřit správnost těchto vypsáných výsledků. Zároveň je možné se přesvědčit o správnosti těchto výsledků nahlédnutím do řešení MO.

Úlohu lze také řešit s využitím pokročilých syntaktických konstrukcí. Místo uplatnění pěti vzájemně vnořených *for* cyklů lze uplatnit metodu *product* s pěti proměnnými (ř. 6–11).

Posouzení vzájemné číselné různosti proměnných A, B, K, O a S je možné také realizovat s využitím pokročilých syntaktických konstrukcí. Pro účely posouzení vzájemné číselné různosti proměnných A, B, K, O a S lze místo pěti vzájemně vnořených *for* cyklů (ř. 1–3) uplatnit metodu *combinations* (ř. 3) z knihovny *itertools* (ř. 2). Na toto posuzování různosti lze totiž z hlediska kombinatoriky nahlížet jako na kombinace bez opakování. Z předchozího vyčíslení platí, že proměnná A je v proměnné *x*[0], proměnná B je v proměnné *x*[1], proměnná K je v proměnné *x*[2], proměnná O je v proměnné *x*[3] a proměnná S je v proměnné *x*[4]. Indexy proměnné *x* nabývají celočíselných hodnot od 0 do 4. Vlastní posouzení vzájemné různosti číselných hodnot v proměnných A, B, K, O a S lze zrealizovat pomocí

metody `combinations` (číselný rozsah od 0 do 4 – indexace proměnných `A`, `B`, `K`, `O`, `S` a pro dvě proměnné `n[0]` a `n[1]`) v rámci `for` cyklu s řídicí proměnnou `n` (ř. 14). V proměnných `n[0]` a `n[1]` jsou indexy 0 až 4 zapsané jako kombinace dvojic bez opakování; posouzení v rámci podmínky `x[n[0]]==x[n[1]]` je pak identické s posouzením podle vztahu (2).

Pro účely posuzování číselné různosti hodnot v proměnných `A`, `B`, `K`, `O` a `S` je algoritmicky nutné najít alespoň jednu číselnou dvojici, která je číselně shodná a tím zajistit, že není splněna podmínka vzájemné různosti číselných dvojic. Proto zavedeme pomocnou proměnnou, např. `ruznost`, kterou nastavíme na hodnotu `True` (ř. 13) a v případě nalezení alespoň jedné shodné číselné dvojice ji přepsat na hodnotu `False` (ř. 16). Program pak může dále pokračovat, pokud nedošlo k tomuto přepisu, tedy v proměnné `ruznost` je stále hodnota `True` (ř. 18).

```

1 from itertools import product
2 from itertools import combinations
3
4 pocet = 0
5
6 for x in product(range(0, 6), repeat = 5):
7     A = x[0]
8     B = x[1]
9     K = x[2]
10    O = x[3]
11    S = x[4]
12
13    ruznost=True
14    for n in combinations(range(0, 5), 2):
15        if x[n[0]] == x[n[1]]:
16            ruznost=False
17
18    if ruznost == True:
19        KOSA = K * 1000 + O * 100 + S * 10 + A
20    ...

```

Vypisované výsledky tohoto programu jsou shodné s vypisovanými výsledky předchozího programu. Oba programy jsou proto z hlediska vypisovaných výsledků identické.

Další možností je využití funkce v Pythonu `len()`, která vrací počet prvků v argumentu po odstranění duplicit. To znamená, že pokud uplatníme zápis `len({A, B, K, O, S})`, funkce `len()` vrátí počet proměnných obsahujících vzájemně různá čísla – tedy celá čísla od 1 do 5. Pokud mají být čísla v proměnných `A`, `B`, `K`, `O`, `S` vzájemně různá, pak počet `len({A, B, K, O, S})` bude roven číslu 5. Posouzení vzájemné číselné různosti proměnných `A`, `B`, `K`, `O`, `S` lze tedy zrealizovat pomocí podmínky `len({A, B, K, O, S}) == 5`.

Uvedený zápis demonstrujeme na následujícím zdrojovém kódu (ř. 12).

```
1 from itertools import product
2
3 pocet = 0
4
5 for x in product(range(0, 6), repeat = 5):
6     A = x[0]
7     B = x[1]
8     K = x[2]
9     O = x[3]
10    S = x[4]
11
12    if len({A, B, K, O, S}) == 5:
13        KOSA = K * 1000 + O * 100 + S * 10 + A
14    ...
```

Shrnutí

V předloženém příspěvku jsme prezentovali pět vybraných matematických úloh MO, které jsme řešili pomocí programování v jazyce Python. U všech úloh bylo představeno také řešení s využitím pokročilých syntaktických konstrukcí.

Literatura

- [1] *Perk, L.*: Vybrané matematické úlohy MO řešitelné pomocí žákovského programování (1. část). Matematika–Fyzika–Informatika, roč. 34 (2025), č. 4, s. 299–311.
- [2] MO ČR. 66. ročník, I. kolo, kategorie Z8, úloha 1.
- [3] MO ČR. 69. ročník, domácí kolo, kategorie C, úloha 3.
- [4] MO ČR. 70. ročník, II. kolo, kategorie Z6, úloha 2.
- [5] MO ČR. 55. ročník, krajské kolo, kategorie A, úloha 1.
- [6] MO ČR. 64. ročník, I. kolo, kategorie Z6, úloha 5.

Praktické aspekty kvantového počítání

VOJTĚCH VAŠINA, MARTIN FRIÁK

Ústav fyziky materiálů, v. v. i., Akademie věd České republiky, Brno

1. Úvod

Klasické počítače jsou v současnosti neodmyslitelnou součástí vědy, průmyslu i našeho běžného života. Výpočetní náročnost některých úloh ale neroste lineárně a k jejich řešení v „rozumném“ čase nepostačují ani ty největší a nejvýkonnější superpočítače. Příkladem úloh, jejichž náročnost roste až exponenciálně, jsou např. složité optimalizační problémy, modelování fyzikálních systémů, nebo rozklad velkých čísel na součin prvočísel. Efektivní řešení těchto úloh by přispělo k rychlejšímu rozvoji vědy a techniky, ale naše výpočetní kapacity na ně nestačí a to ani dnes, ani v blízké budoucnosti příštích desetiletí.

Nadějí je nastupující technologie kvantových počítačů, které nabízejí až exponenciální zrychlení některých výpočtů. Několik společností (např. IBM, Google, Microsoft, ...) vyvíjí nejen kvantové počítače, tedy hardware, ale i vhodný software. Společnost IBM nabízí momentálně veřejnosti možnost připojit se k jejich kvantovým počítačům a spustit na nich výpočty o souhrnné délce 10 minut každý měsíc. Tento článek obsahuje krátký návod, jak se přihlásit na platformu IBM a připojit se ke kvantovým počítačům, naprogramovat na nich jednoduchý kvantový obvod, a jak na nich spustit krátký výpočet. Je třeba upozornit, že kvantové počítání je oborem na pomezí kvantové fyziky, matematiky a informatiky a tento text nemá ambici být ani úvodem do celé složité problematiky.

2. Od bitů klasických ke kvantovým

Základní jednotkou informace je u klasických počítačů tzv. bit, který může nabývat právě jedné ze dvou navzájem se vylučujících hodnot, které typicky označujeme 0 a 1. Kvantové počítače pracují s tzv. kvantovými bity, zkráceně qubity (čteno „kjúbity“). Qubity jsou uzavřené kvantové systémy, které se řídí zákony kvantové mechaniky a kvůli tomu nám může

jejich chování připadat značně neintuitivní. Stav jednoho qubitu lze popsat pomocí abstraktního vektorového prostoru, jehož báze vektory se označují jako $|0\rangle$ a $|1\rangle$ a jedná se o zkrácený zápis (tzv. Diracovu notaci) sloupcových vektorů:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

které jsou z matematického hlediska ortogonální (jejich skalární součin je roven nule). Qubity se mohou nacházet v těchto dvou stavech, ale také ve stavu tzv. superpozice [2]. Jedná se o kvantový stav, který je lineární kombinací báze vektorů:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

kde α a β jsou komplexní čísla, kterým se říká amplitudy. V jazyce klasických počítačů bychom mohli (nepřesně) říci, že báze vektory $|0\rangle$, $|1\rangle$ z (1) jsou vzájemně „opačné“ podobně jako jsou hodnoty 0 a 1 opačné v binární soustavě u klasických bitů. V kvantových systémech se u qubitů ale tyto dva stavy nevylučují a qubit v superpozici znamená, že kvantový bit nabývá hodnoty 0 i 1 zároveň, což u klasických bitů není možné.

Zásadní odlišností kvantových počítačů od klasických je to, že qubit je v superpozici pouze dokud se vyvíjí v čase nerušený okolím – dokud nedojde ke změření jeho stavu. Při změření stavu dojde k tzv. kolapsu vlnové funkce, viz např. kniha [3], a qubit ze stavu superpozice „zkolabuje“ do jednoho z báze vektorů s pravděpodobností, kterou udávají druhé mocniny absolutních hodnot amplitud – komplexních čísel α a β , tedy

- $|\alpha|^2$ udává pravděpodobnost, s jakou je $|\psi\rangle$ nalezen/naměřen ve stavu $|0\rangle$
- $|\beta|^2$ udává pravděpodobnost, s jakou je $|\psi\rangle$ nalezen/naměřen ve stavu $|1\rangle$.

Zjednodušeně bychom mohli říct, že se změřením stane z kvantového qubitu efektivně klasický bit. Toto chování je jedním z postulátů kvantové mechaniky, jak uvádí např. Zettili [3]. Výsledek měření stavu qubitu je pravděpodobnostní (nevíme, jakou hodnotu ze dvou možností naměříme, víme pouze s jakou pravděpodobností bude nějaká hodnota naměřena). Součet pravděpodobností obou možných hodnot je roven jedné:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Protože jsou amplitudy α a β komplexní čísla a platí výše uvedené o součtu kvadrátů jejich velikostí, lze různé stavy qubitů zviditelnit jako body na povrchu jednotkové koule, která se říká Blochova sféra.

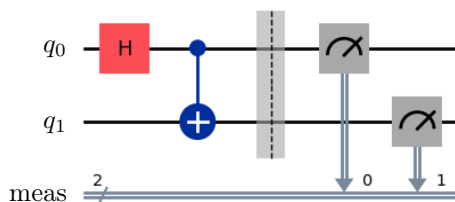
Výše uvedené je pouze velmi zjednodušený a základní popis qubitů. Pro hlubší pochopení problematiky doporučujeme např. následující zdroje:

- knihu (v angličtině) autorů Nielsena and Chuanga [2],
- stránky (v angličtině) [IBM Quantum Learning](#), které obsahují kompletní kurzy a další výukové návody pro práci s kvantovými počítači,
- česky na youtube např. přednášku z [Mezinárodního dne kvantové fyziky 2025](#) na Hvězdárně a planetáriu v Brně. Dvě přednášky o tom, jak kvantové počítače fungují, a co se s nimi dá počítat.

3. Jednoduchý kvantový obvod

Podobně jako klasické obvody sestávají z hradel působících na klasické bity v obvodu klasického počítače, kvantové obvody se skládají z kvantových hradel či bran (tento výraz je přímým překladem anglického termínu „gate“), které působí na jeden či více qubitů. Působení klasických i kvantových hradel/bran na bity či qubity lze matematicky popsat pomocí lineární algebry, což si u kvantových obvodů nyní ukážeme.

Pro ilustraci kvantového počítání vybereme jednoduchý kvantový obvod, obr. 1, který se skládá ze dvou qubitů, které jsou označeny q_0 a q_1 . Kvantový obvod obsahuje informaci o časovém vývoji stavu qubitů s tím, že časový vývoj probíhá z levé strany obr. 1 do prava. Často jsou všechny qubity na začátku výpočtu ve stavu 0, což bude i náš případ.



Obr. 1 Jednoduchý kvantový obvod dvou qubitů q_0 a q_1 , které jsou oba na počátku (na levé straně obrázku) ve stavu 0. Na první z qubitů q_0 je následně aplikována tzv. Hadamardova brána, která jej převede do superpozice stavů $|0\rangle$ a $|1\rangle$. Qubity jsou pak provázány pomocí brány CNOT a následně změřeny a hodnoty jsou odečteny (označeno zkráceně „meas“ z anglického *measurements*).

Na qubit q_0 je aplikována tzv. Hadamardova brána, která převede tento qubit z počátečního stavu $|0\rangle$ do superpozice. Pokud by byl změřen, bude nalezen ve stavu $|0\rangle$ s pravděpodobností 50 % a ve stavu $|1\rangle$ rovněž s pravděpodobností 50 %. Následně je na oba qubity aplikována CNOT brána, která stav obou qubitů tzv. prováže. CNOT brána překlápí stav qubitů q_1 z $|0\rangle$ na $|1\rangle$ pokud je qubit q_0 ve stavu $|1\rangle$. Pokud je qubit q_0 ve stavu $|0\rangle$, stav qubitů q_1 zůstane nezměněný (v tomto případě $|0\rangle$). Nakonec jsou aplikována měření na oba dva qubity a změřený stav je přenesen na nosič klasické informace s názvem *meas* z anglického slova *measurements*.

Výsledný stav obvodu na obr. 1 je možné dopočítat analyticky. Pro výpočet je třeba znát několik informací. Předně stav více (zde dvou) qubitů je na počátku dán tenzorovým součinem [5] stavů $|0\rangle$ jednotlivých qubitů:

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Působení Hadamardovy brány na qubit popsaný 2-složkovým vektorem lze matematicky popsat pomocí následující 2×2 matice [4]:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Působení CNOT brány, která působí na dva qubity popsané 4-složkovým vektorem (např. v rovnici (2) výše), lze zapsat pomocí matice 4×4 :

$$\text{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Analyticky lze vyřešit stav kvantového obvodu na obr. 1 tak, že popíšeme jednotlivé prvky obvodu z levé strany směrem doprava, což je směr časového vývoje: Na qubit q_0 aplikujeme Hadamardovu bránu, s qubitem

q_1 se v tento okamžik nic neděje, a proto na něj aplikujeme matici identity I , aby došlo k zachování jeho stavu. Společnou akci Hadamardovy brány spolu s maticí identity, kterou označíme jako operátor U , vyjádříme pomocí jejich tenzorového součinu:

$$\begin{aligned} U = H \otimes I &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (3) \end{aligned}$$

Stav obvodu po společné akci Hadamardovi brány na qubit q_0 a identity na qubit q_1 lze získat vynásobením stavu $|00\rangle$ maticí U z rovnice (3):

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle = U|00\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |10\rangle) \end{aligned}$$

Konečný stav kvantového registru $|\psi_2\rangle$ získáme aplikací CNOT brány na stav obvodu $|\psi_1\rangle$ takto:

$$\begin{aligned}
|\psi_2\rangle &= \text{CNOT}|\psi_1\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (4)
\end{aligned}$$

Ze stavu obvodu $|\psi_2\rangle$ ve vztahu (4) je zřejmé, že oba stavy $|00\rangle$ i $|11\rangle$ jsou stejně pravděpodobné. Pravděpodobnost obou stavů lze vypočítat: $(\frac{1}{\sqrt{2}})^2$, a je tedy rovna $\frac{1}{2}$. Nyní naprogramujeme a spustíme stejný obvod nejprve na simulátoru ideálního kvantového počítače a poté na reálném kvantovém počítači, u kterého už předpokládáme vliv šumu a tedy výsledky zatížené chybou. Z měření stavu jednoho qubitu můžeme dostat výsledek pouze $|0\rangle$ nebo $|1\rangle$, spustíme tedy obvod několikrát a budeme sledovat pravděpodobnosti a to, zda získané výsledky odpovídají analytickému řešení.

4. Softwarový základ pro programování

Pro programování kvantových počítačů je nejprve nutné zvolit si a stáhnout vhodný editor kódu. Při programování kvantových počítačů budeme využívat programovací jazyk Python a knihovnu funkcí Qiskit. Je tedy nutné zvolit takový editor kódu, který umožňuje pracovat s programovacím jazykem Python. Autor článku využíval [Visual Studio Code](#), kvůli vestavěné podpoře jazyka Python, široké uživatelské komunitě a obsáhlé dokumentaci. Dále je nutné nainstalovat si programovací jazyk [Python](#). Pro správu stažených knihoven funkcí autor doporučuje dodatečně stáhnout software [Anaconda](#), který v našem případě poslouží pro instalaci a následnou správu potřebných knihoven.

Nyní uživatel provede vytvoření prostředí a instalaci potřebných knihoven. Nejprve otevřete *Anaconda Prompt* a zadejte příkaz `conda create env --name` a za tento příkaz zadejte jméno vašeho prostředí. Pro další příkazy je vhodné [conda cheat sheet](#). Po vytvoření prostředí zadejte příkaz `conda activate` a opět zadejte jméno vašeho prostředí. Nyní jste v prostředí,

které budete využívat pro výpočty na kvantových počítačích, a můžete začít instalovat potřebné knihovny funkcí. Tyto knihovny budete instalovat pomocí příkazů:

- `conda install ipykernel`
- `conda install pip`
- `pip install qiskit`
- `pip install qiskit_ibm_runtime`
- `pip install matplotlib`
- `pip install qiskit_aer`
- `pip install pylatexenc`

5. Příklad spuštění výpočtu na simulátoru ideálního kvantového počítače

Nejprve je nutné vytvořit samotný program v softwaru Visual Studio, pro výukové účely je vhodné zvolit Jupyter Notebook. To uživatel provede tak, že pojmenuje soubor s koncovkou *.ipynb*.

Na začátku je nutné nainportovat jednotlivé knihovny funkcí:

```
from qiskit import QuantumCircuit
from qiskit.primitives import StatevectorSampler
from qiskit.visualization import plot_histogram
```

Nyní vytvoříme obvod se dvěma qubity, aplikujeme Hadamardovu bránu na qubit q_0 a CNOT brány na qubity q_0 a q_1 . Na závěr aplikujeme měření na všechny qubity v obvodu:

```
qc = QuantumCircuit(2)
qc.h(0)
qc.cx(0,1)
qc.measure_all()
```

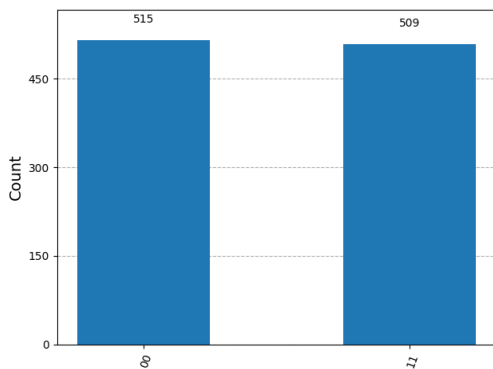
Obvod si může uživatel i jednoduše vykreslit, výsledek bude obr. 1.

```
qc.draw("mpl")
```

Nyní spustíme kód, který obvod vždy spustí a nakonec změří stav obou qubitů a následně vykreslí histogram četnosti. Počet těchto cyklů lze nastavit změnou parametru *shots*=.

```
sampler = StatevectorSampler()
job = sampler.run([qc],shots=1024)
pub_result = job.result()[0]
counts = pub_result.data.meas.get_counts()
plot_histogram(counts)
```

Z výsledků zobrazených na obr. 2 je patrná statistická povaha výsledků z kvantových počítačů. Při měření byly změřeny stavy $|00\rangle$ a $|11\rangle$ ale do výsledků byla zanesena určitá statistická chyba, a tak nejsou změřené stavy přesně v poměru 50/50.



Obr. 2 Výsledky ze simulátoru běhu ideálního kvantového počítače.

Nyní spustíme výpočet na kvantovém hardwaru firmy IBM. Zřízení přístupu a další potřebné formální kroky jsou v dodatku na konci tohoto článku.

6. Příklad spuštění výpočtu na reálném kvantovém počítači

Pro spuštění na reálném kvantovém počítači je nejprve nutné identifikovat se svým unikátním API klíčem a názvem instance, viz dodatek na konci tohoto článku, kde je vysvětlen postup zřízení účtu na serveru IBM Quantum Platform a následně i tzv. Instancí a API klíče. Místo názvu instance lze vložit CRN, které uživatel najde v sekci Instances na IBM Quantum Platform podle obr. 3.

Instances Need help? [View docs](#) →

An instance is a deployment of Qiskit Runtime, needed to access quantum computers. Account owners and administrators define the instance configuration, including plan, allocated time, and QPU access.

Open (1)

3s
Total used

9m 57s
Remaining to use

10m
Total available to plan

Aug 7, 2025 - Sep 4, 2025
Current cycle (UTC)

Create instance +

Instance ↓	CRN	Resource group	Region	QPUs	Cycle usage	Usage remaining	Tags
open_plan		Default	us-east	2	3s	9m 57s	!

Obr. 3 Ilustrace možnosti, kdy je místo názvu instance vloženo CRN, které uživatel najde v sekci Instances na IBM Quantum Platform.

Opět začneme nainportováním nezbytných funkcí.

```
from qiskit import QuantumCircuit
from qiskit_ibm_runtime import QiskitRuntimeService
from qiskit_ibm_runtime import SamplerV2
from qiskit.primitives import StatevectorSampler
from qiskit.visualization import plot_histogram
from qiskit.transpiler.preset_passmanagers import \
    generate_preset_pass_manager
```

Nyní je nutné vložit API klíč a CRN do následujícího kódu, následně se jimi identifikovat a zvolit konkrétní kvantový počítač. Kvantové počítače, které jsou dostupné uživateli v rámci jeho *open* plánu, se zobrazí na stránce [Compute Resources](#). Pro účel publikace byl vybrán kvantový počítač *ibm_brisbane* s procesorem *Eagle r3* se 127 qubity.

```
token = 'API_key'
instance = 'CRN'
service = \
    QiskitRuntimeService(channel='ibm_cloud',instance=instance, \
        token=token)
backend = service.backend('ibm_brisbane')
```

Tímto vytvoříme stejný kvantový obvod, který byl použit v sekci 5.

```
qc = QuantumCircuit(2)
qc.h(0)
qc.cx(0,1)
qc.measure_all()
```

Vytvořený kvantový obvod je nutné „přeložit“ tak, aby byl spustitelný na konkrétním kvantovém počítači. Např. kvantový počítač *ibm_brisbane* je schopen manipulovat qubity pouze s bránami *ecr*, *id*, *rz*, *sx*, *x* [1] nikoliv s Hadamardovou bránou, která je součástí obvodu, s nímž pracujeme, obr. 1. Proto použijeme funkci, která rozloží brány v našem obvodu na brány, které jsou fyzicky realizovatelné na konkrétním kvantovém počítači. Detailní informace, jako jsou např. počty qubitů, aktuální úrovně šumu i kvantové brány, které mají přímou hardwarovou realizaci, jsou uvedené v záložce [Compute Resources](#) na platformě IBM.

```
pm = \
    generate_preset_pass_manager(backend=backend,optimization_level=1)
isa_circuit = pm.run(qc)
```

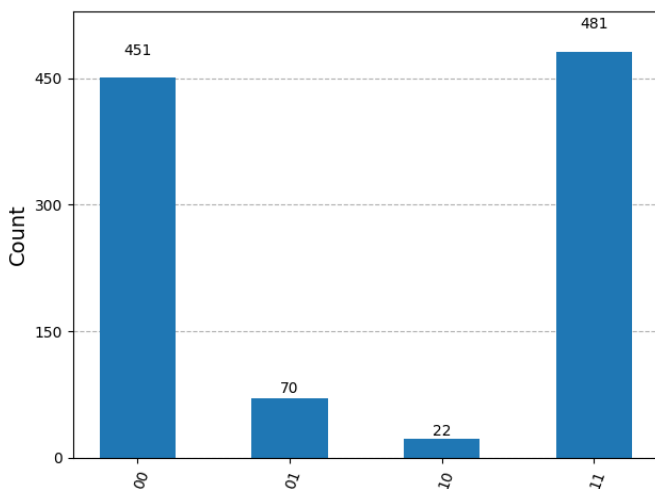
Dalším krokem je volba počtu spuštění obvodu a samotné spuštění programu.

```
sampler = SamplerV2(mode=backend)
job = sampler.run([isa_circuit],shots=1024)
```

Posledním krokem je získání a vykreslení výsledků.

```
pub_result = job.result()[0]
counts = pub_result.data.meas.get_counts()
plot_histogram(counts)
```

Výsledky z reálného kvantového počítače, obr. 4, jsou negativně ovlivněny šumem, který je v současnosti jedním z největších problémů při práci s kvantovými počítači. Nejen, že stavy $|00\rangle$ a $|11\rangle$ nejsou stejně pravděpodobné, ale dokonce šum způsobil i výskyt stavů $|01\rangle$ nebo $|10\rangle$.



Obr. 4 Výsledky z reálného kvantového počítače.

Další příklady lze najít v bakalářské práci [6] autora tohoto článku, nebo v našich dalších článcích, konkrétně pro molekulu vodíku [9, 10], nebo krystalické materiály [7, 8].

Poděkování

Tento článek vznikl díky finanční podpoře poskytované Akademií věd České republiky, konkrétně prostřednictvím ceny *Præmium Academiae* a iniciativě Strategie AV21, zejména programu „AI: Umělá inteligence pro vědu a společnost“, a dále také finanční podpoře poskytované Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky, konkrétně pro-

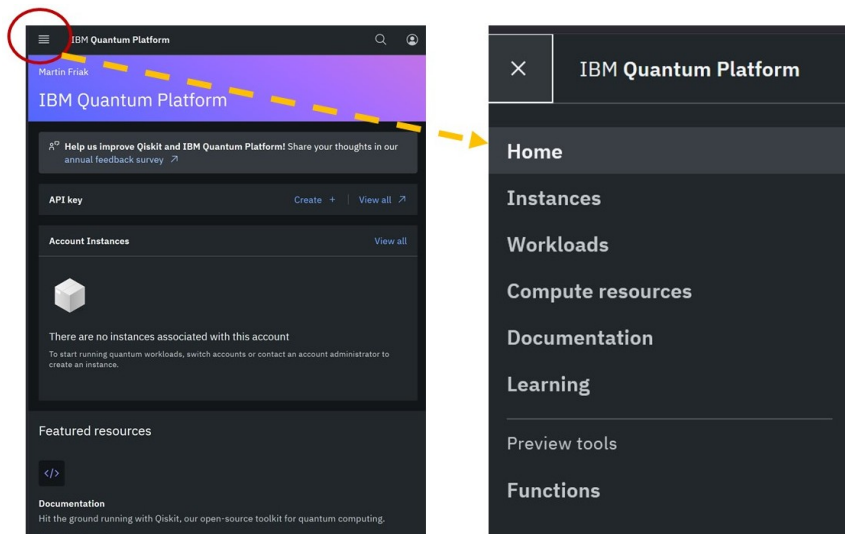
jektu No. LUC25028 v rámci programu INTER-EXCELLENCE II, pod-programu INTER-COST – LUC25. Výpočetní zdroje byly částečně poskytnuty Ministerstvem školství, mládeže a tělovýchovy České republiky v rámci projektů e-INFRA CZ (ID:90254) v Národním superpočítačovém centru IT4Innovations v Ostravě a e-Infrastruktura CZ (e-INFRA, ID:90254) v rámci MetaCentra a vědeckého cloudu CERIT v Brně a částečně také společností IBM prostřednictvím infrastruktury IBM Quantum Platform a Kvantového inovačního centra (QIC-Czech).

Literatura

- [1] *IBM: Compute Resources*. IBM Quantum Platform, 2025, online, [cit. 2025-05-09], https://quantum.ibm.com/services/resources?system=ibm_brisbane.
- [2] *M. A. Nielsen, I. L. Chuang: Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [3] *N. Zettili: Quantum Mechanics: Concepts and Applications*. 3 vyd, Wiley, 2022.
- [4] *D. McMahon: Quantum Computing Explained*. Wiley, 2008.
- [5] *Kasirajan Venkateswaran: Fundamentals of Quantum Computing*. Springer, 2021.
- [6] *V. Vašina: Aplikace kvantových počítačů ve výpočetních materiálových vědách*. 2025, online, [cit. 2025-09-29], https://www.vut.cz/studenti/zav-prace/detail/165902?zp_id=165902.
- [7] *I. Miháliková, M. Krejčí, M. Friák: The impact of quantum circuit architecture and hyperparameters on variational quantum algorithms exemplified in the electronic structure of the GaAs crystal*. Scientific Reports, roč. 15 (2025), s. 15746, doi: 10.1038/s41598-025-00151-x.
- [8] *M. Ďuriška, I. Miháliková, M. Friák: Quantum computing of the electronic structure of crystals by the Variational Quantum Deflation algorithm*. Physica Scripta, roč. 100 (2025), s. 045105, doi: 10.1088/1402-4896/adbb29.
- [9] *I. Miháliková, M. Friák, M. Pivoluska, M. Plesch, M. Saip, M. Šob: Best-Practice Aspects of Quantum-Computer Calculations: A Case Study of the Hydrogen Molecule*. Molecules, roč. 27 (2022), s. 597, doi: 10.3390/molecules27030597.
- [10] *I. Miháliková, M. Pivoluska, M. Plesch, M. Friák, D. Nagaj, M. Sob: The Cost of Improving the Precision of the Variational Quantum Eigensolver for Quantum Chemistry*. Nanomaterials, roč. 12 (2022), s. 243, doi: 10.3390/nano12020243.

Dodatek – zřízení účtu na platformě IBM cloud

Před připojením ke kvantovému počítači je nejprve nutné si vytvořit účet na platformě **IBM Cloud**. Při registraci do platformy bude nutné zadat údaje z platební karty které poslouží pouze pro ověření identity a nebudou z ní odečítány peníze. Po zřízení účtu bude možné se přihlásit to platformy určené pro kvantové počítání **IBM Quantum Platform**. Po přihlášení se uživateli zobrazí domovská obrazovka se základní nabídkou.



Obr. 5 Webová stránka IBM Quantum Platform.

Na domovské stránce jsou tyto základní možnosti.

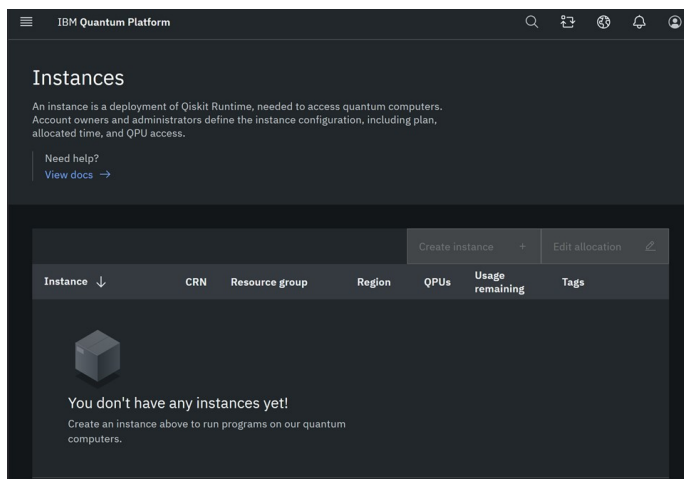
1. Menu s dalšími možnostmi.
2. Vytvořené instance.
3. Možnost vytvoření API klíče pro přístup ke kvantovým počítačům.

Přímo po zřízení účtu je oddíl s vytvořenými instancemi prázdný a je nejprve nutné si instanci vytvořit přes menu s dalšími možnostmi pod číslem 1. na obr. 5.

Z dalších možností na obr. 5 jsou důležité zejména možnosti *Documentation* kde se jedná o kompletní dokumentaci ke knihovně funkcí Qiskit,

která se používá pro programování kvantových počítačů a dále možnost *Learning*, která může začínajícím i pokročilým uživatelům posloužit jako výuková platforma pro další vzdělávání v oblasti kvantových výpočtů.

Nyní je nutné, aby si uživatel zřídil novou instanci kliknutím na *Create new instance* podle obr. 6.



Obr. 6 Obrazovka uživatelského webového rozhraní týkající se tzv. „Instance“.

Při zřizování nové instance je při volbě plánů důležité zvolit možnost *Open*, viz obr. 7, která je zdarma, ale výpočetní čas je omezen na 10 minut měsíčně.

Další možnost je volba výpočetních zdrojů, viz obr. 8, kterou je nejlepší ponechat v základním nastavení. Uživatel tak bude mít přístup ke všem výpočetním zdrojům, které IBM nabízí pro neplacený *Open* plán.

Poslední možností při zřizování instance je možnost vytvoření jedné instance pro více uživatelů, viz obr. 9. Této možnosti doporučuje autor pro výuku nevyužívat, všichni uživatelé by pak sdíleli společný výpočetní čas (omezený na 10 minut měsíčně).

Další nezbytný krok je vytvoření API klíče, který poslouží k identifikaci uživatele. API klíč uživatel vytvoří kliknutím na ikonu *Create API key* v domovském menu dle obr. 10.

Nyní si uživatel pojmenuje a následně vytvoří svůj unikátní API klíč. Pozor, po vytvoření se API klíč zobrazí pouze jednou, v tento moment je důležité si ho uložit na bezpečné místo!

Create a new instance

1. Details

2. Compute resources

3. Access group

Instance name

open_plan

Allowed characters: letters, numbers, spaces, dots (.), underscores (_), colons (:), and hyphens (-). Max 256 characters.

Resource group

Default

Region

Washington DC (us-east)

Tags (Optional)

Example: env:dev, version:1

Select pricing plan

Open
Free

10 minutes free time per month on select IBM OPUs. After that limit is met, workloads will be blocked and no additional charges will occur.

Pay-as-you-go
\$1.60 / second

Pay-as-you-go for time used on select IBM OPUs. Maximum cost limits can be set per pay period.

View full details

☒ I have read and agree to the following license agreements: [Terms](#)

Obr. 7 Obrazovka uživatelského webového rozhraní týkající se vytvoření tzv. „Instance“.

Create a new instance

1. Details

2. Compute resources

3. Access group

Plan inheritance

This instance automatically inherits all current or future compute resources assigned to the selected plan, unless you choose to customize below.

☐

Customize allocated QPUs

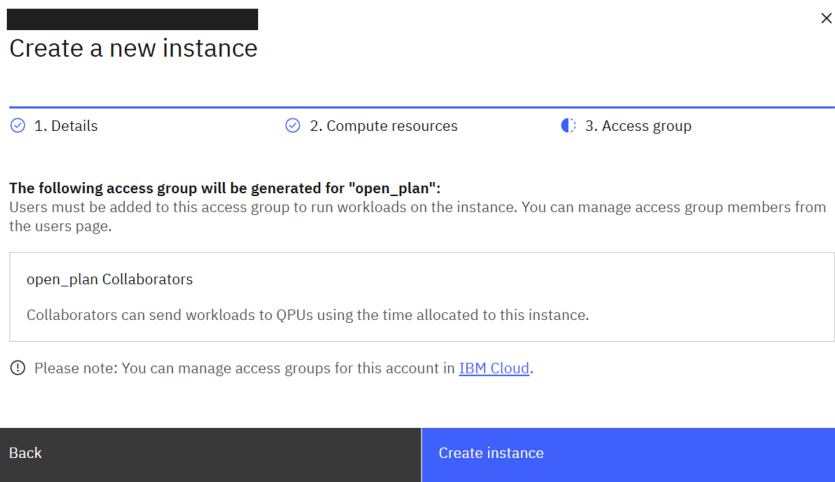
When enabled, this instance will not inherit any account-level resource changes.

Allocated QPUs

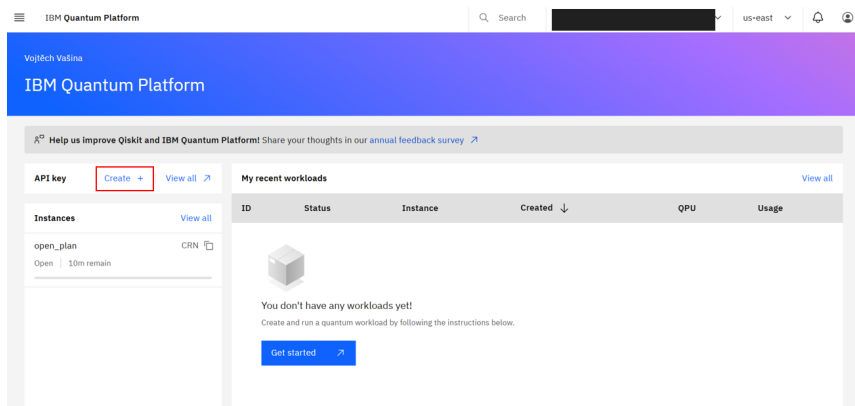
ibm_brisbane

ibm_torino

Obr. 8 Obrazovka uživatelského webového rozhraní týkající se volby výpočetních zdrojů při vytvoření tzv. „Instance“. Zde je nejlépe ponechat nastavení v tom původním.



Obr. 9 Obrazovka uživatelského webového rozhraní týkající se vytvoření tzv. „Instance“ pro více uživatelů.



Obr. 10 Obrazovka uživatelského webového rozhraní týkající se vytvořeného API klíče.

ZPRÁVY

Novinky o WFPhC

WFPhC je zkratkou *World Federation of Physics Competitions*, mezinárodní organizace sdružující fyzikální soutěže z celého světa. Jejím posláním je umožnit výměnu zkušeností mezi pořadateli a posílit kvalitu fyzikálního vzdělání prostřednictvím soutěží. V čísle MFI 32 (1) 2023 již byla o organizaci zpráva, zmíníme tedy zejména novinky, které se mohou hodit žákům zaměřeným na fyzikální soutěže a jejich učitelům či organizátorům soutěží.

Web

Od minulé zprávy byl původní web nahrazen zcela novým. Je zpřístupněn na adrese <https://wfphc.eu> a nově na něm najdete postupně se rozšiřující seznam fyzikálních soutěží i kalendáře, které si můžete přidat mezi svoje Google kalendáře, a další informace.



Web WFPhC

Kongres 2026

Blíží se termín mezinárodní konference WFPhC, která je určená pro organizátory soutěží, kteří mezi sebou chtějí svoje know-how. Tentokrát

se kongres koná 19. až 23. dubna 2026 v Novém Dillí v Indii. V přibližně stejné době bude probíhat i ICYS 2026 – *International Conference of Young Scientists*, což je mezinárodní soutěžní konference mladých vědců.

Všechny podrobnosti k akci by se měly objevovat na <https://wfphc.eu/upcoming-congress/>.

Newsletter

Byla obnovena tradice zasílání newsletteru s informacemi o termínech mezinárodních soutěží, pozvánkami a články o jejich průběhu. Pokud máte zájem o tento, zatím nepravidelný, newsletter, stačí se přihlásit prostřednictvím formuláře na webu <https://wfphc.eu/newsletter/>. Na webu najdete i archiv newsletterů a článků o soutěžích z minulosti.

World Federation of Physics Competitions – Newsletter
Vol. 2025/3 – Article 1 – Reports from Competitions

The Events of FYKOS 2024/25
K. Horská, J. Dřevop

The Events of FYKOS 2024/25

Katarína Horská^{1,2}, Jakub Dřevop^{1,2}

¹FYKOS, z. s.

²Faculty of Nuclear Sciences and Physical Engineering, Czech Technical University in Prague

³Faculty of Mathematics and Physics, Charles University, Prague, Czech Republic

Abstract

This year, as well as many others, FYKOS organized a great number of exciting events for high school students. From long-term competitions to large physics contests, the FYKOS team had quite a lot of work to undertake. Let us take a look at the most significant of these events.

FYKOS

FYKOS¹ is a correspondence competition with physical topics. The competition primarily targets high school students and has four categories according to the four common high school years. Students of lower grades can also compete; however, they are included in the first-grade category.

FYKOS comprises six series, each of which



Náhled článku z Newsletteru 2025/3

Karel Kolář

Desátá soutěžní přehlídka významných činů ve zpřístupňování fyziky veřejnosti

28. listopadu 2025 se konala, již tradiční, přehlídka popularizace fyziky pořádaná Českou fyzikální společností Jednoty českých matematiků a fyziků. Jako obvykle, šlo o jednodenní prezentační akci organizovanou doc. Jiřím Dolejším z ČFS JČMF a ÚČJF MFF UK. Přehlídka si klade za cíl představit a podpořit popularizační aktivity v oblasti fyziky. Umožňuje účastníkům pochlubit se svou aktivitou, získat představu o ostatních a navázat kontakty. Akce je pořádána od roku 2007 pravidelně každé dva roky.

Představilo se zde široké spektrum aktivit

- věnující se publiku od mateřských škol po dospělé,
- od jednoduchých experimentů přes přednášky, publikace až po náročné soutěže,



Príspevek doc. Jiřího Dolejšiho

- organizovaných studenty, univerzitami i fungujícími již na „komerční“ bázi.

Všechny zúčastněné aktivity byly velmi kvalitní a byla jim udělena ocenění za (trvající) významnou činnost v popularizaci fyziky. Časopis MFI získal ocenění také, a to prostřednictvím souborného příspěvku o činnosti nakladatelství Prometheus.



Ocenění nakladatelství Prometheus

Celý seznam odkazů na stránky jednotlivých organizátorů, kde naleznete informace, jak je možné se zúčastnit či jak se inspiroval, můžete nalézt na webu přehlídky:

https://ipnp-web.troja.mff.cuni.cz/~dolejsi/outreach/Prehliodka/Prehliodka_2025.htm

Celá řada popularizátorů se vrací opakovaně, ale každý ročník se objevují nové aktivity – i proto doporučujeme podívat se i na stránky předcházejících ročníků přehlídky.

Karel Kolář