

Využitie dynamickej geometrie vo výučbe obsahov rovinných útvarov

PATRIK ŠTEIN – STANISLAV LUKÁČ

Prírodovedecká fakulta UPJŠ, Košice, SLOVENSKO

Využitie digitálnych technológií v rôznych oblastiach je v dnešnom svete už snáď samozrejmosťou. Účinky digitálnych technológií na zvýšenie efektívnosti vyučovania môžu byť rozmanité, počnúc od zvýšenia záujmu žiakov o učenie sa až po zlepšenie učebných výsledkov žiakov. Systémy dynamickej geometrie ponúkajú experimentovanie s geometrickými objektmi a poskytujú žiakom príležitosť preskúmať rôzne konkrétne útvary a rôzne geometrické situácie. Možnostiam využitia systémov dynamickej geometrie vo vyučovaní matematiky sa venovali viacerí autori [2, 5, 6]. V článku je stručne opísaný obsah interaktívnej knihy vytvorenej v prostredí programu GeoGebra na podporu výučby obsahov geometrických útvarov na základnej škole a načrtnutý spôsob jej využitia vo výučbe. Pri tvorbe knihy boli aplety na odvodenie vzorcov na výpočet obsahu útvarov doplnené o ďalšie úlohy a testové otázky s cieľom zlepšiť porozumenie odvodzovaných vzorcov. V poslednej časti článku sú opísané skúsenosti z využitia pripravených učebných materiálov vo vyučovaní matematiky, ktorej súčasťou je aj hodnotiaci pohľad na učenie sa žiakov a dosiahnuté učebné výsledky.

Vypracovanie a využívanie interaktívnych učebných materiálov

Pokročilé nástroje programov dynamickej geometrie umožňujú ušetriť čas pri riešení problémov, ktorý by sa nemal využiť na zvýšenie počtu riešených problémov, ale na dôkladnejšiu analýzu procesu ich riešenia, zovšeobecňovanie objavených vzťahov a organizovanie diskusie medzi žiakmi podnecujúcej zamyslieť sa nad osvojovanými pojmami a vzťahmi [4]. Pri výbere digitálneho prostredia na tvorbu interaktívnych učebných aktivít sme sa zamerali na program GeoGebra, ktorý je najrozšírenejším voľne dostupným softvérom pre podporu vyučovania matematiky a je medzi učiteľmi značne obľúbený. Na zvýšenie motivácie učiteľov pre začlenenie systémov dynamickej geometrie do výučby matematiky môže mať priaz-

nivý vplyv aj skutočnosť, že na portáli programu GeoGebra je dostupných množstvo rozmanitých učebných materiálov od jednoduchších apletov až po rozsiahle knihy obsahujúce viacero kapitol. V súlade s podmienkami a technickým vybavením učební môžu byť digitálne učebné materiály využité pre samostatné žiacke skúmanie alebo pre interaktívne demonštrácie vedené učiteľom využiteľné vo všetkých fázach vyučovacieho procesu.

Opisovaná kniha na výučbu obsahu rovinných útvarov obsahuje kapitoly venované obsahom jednotlivých typov rovinných útvarov a záverečnú časť zameranú na aplikovanie osvojených poznatkov pri riešení úloh.

Rozvíjanie predstavy o obsahu geometrických útvarov

S obsahmi geometrických útvarov sa žiaci stretávajú už v treťom ročníku základnej školy, kedy nazerajú na obsah ako na isté „vnútro“ útvaru, ktoré má nejakú veľkosť, ale v tomto ročníku sa ešte neoperuje s číselnými hodnotami. Neskôr sa s obsahom štvorca a obdĺžnika žiaci stretnú pri riešení úloh vo štvrtom ročníku, kedy sú útvary umiestnené vo štvorčekovej sieti a žiaci majú porovnávať veľkosti útvarov. Väčšia pozornosť je venovaná výpočtu obvodu štvorcov a obdĺžnikov. Prvé predstavy o obsahu útvarov vytvárajú propedeutiku pre neskoršie budovanie pojmu obsah útvaru.

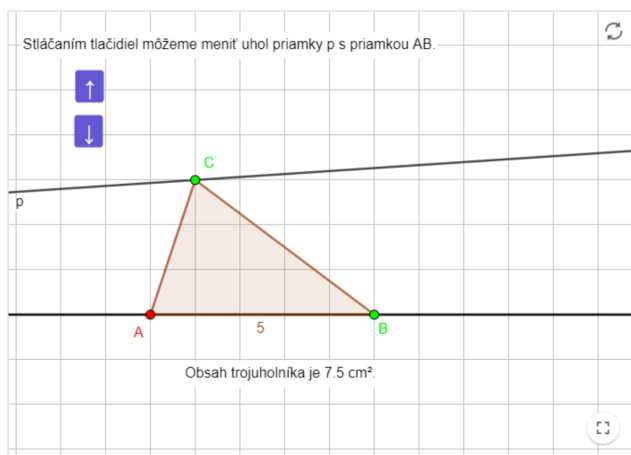
Výpočet obsahov základných typov rovinných útvarov je podľa inovovaného ŠVP pre 2. stupeň ZŠ (ekvivalent RVP v ČR) rozdelený do viacerých ročníkov. V piatom a šiestom ročníku sa realizuje postupný prechod od obsahov štvorcov a obdĺžnikov s celočíselnými rozmermi zakreslených v štvorčekovej sieti k výpočtu obsahov týchto útvarov s rozmermi vyjadrenými desatinnými číslami. Žiak sa naučí využiť výpočet obsahu štvorcov a obdĺžnikov pri výpočte obsahu obrazcov v štvorčekovej sieti zložených zo štvorcov a obdĺžnikov sčítaním ich obsahov. Rozvíja sa predstava o plošnej miere, ako počtu štvorcov s danými rozmermi obsiahnutých v útware, ktorá slúži ako príprava pre prácu s rôznymi jednotkami obsahu. V ôsmom ročníku sa majú žiaci naučiť vypočítať obsah rovnobežníka, trojuholníka a lichobežníka. Podľa obsahového štandardu by mali byť žiaci privedení k objaveniu postupu výpočtu obsahov týchto útvarov pomocou skôr osvojených vzťahov na výpočet obsahov jednoduchších útvarov.

Výučba obsahu trojuholníka

V článku je stručne predstavené spracovanie interaktívneho učebného materiálu pre výučbu obsahu trojuholníka a naznačené jeho využitie vo vyučovacom procese. Odpovedajúca časť knihy je dostupná prostredníctvom URL (<https://www.geogebra.org/m/dsugq7bu#material/zmgv4hxt>). Pri

plánovaní postupu výučby sme sa snažili skombinovať rôzne učebné aktivity za účelom dosiahnutia porozumenia vzorca na výpočet obsahu trojuholníka a rozvíjania schopností žiakov aplikovať ho pri riešení úloh. Overenie interaktívneho učebného materiálu bolo realizované na základnej škole v Košiciach v ôsmom ročníku v triede so 16 žiakmi. Prvé dve hodiny boli venované práci s interaktívnym učebným materiálom v počítačovej učebni. Po troch týždňoch, z ktorých tvorili väčšinu vianočné prázdniny, bola zaradená tretia hodina zameraná na prácu s pracovným listom.

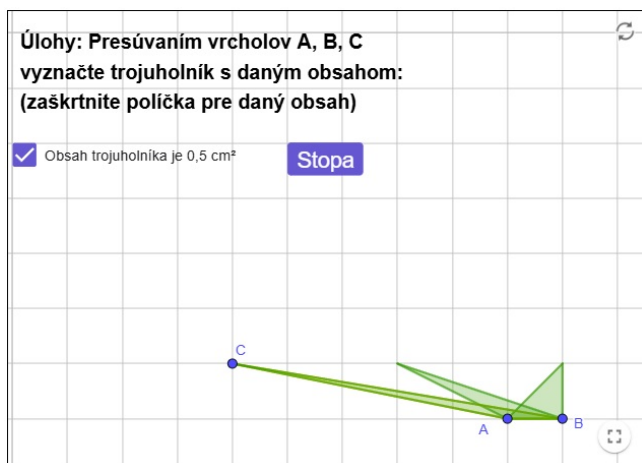
Na úvod výučby odporúčame zaradiť interaktívnu aktivitu z vytvorenej knihy na skúmanie obsahu všeobecného trojuholníka. V aplete je zostrojený trojuholník ABC a žiaci majú posúvaním vrcholov B , C skúmať, od čoho závisí obsah trojuholníka ABC . Pri posúvaní vrcholu B je pozorovateľná zmena obsahu trojuholníka. Vrchol C by žiaci najprv posúvali po priamke rôznobežnej s priamkou AB . Po zatlačení tlačidla so šípku môžu žiaci meniť odchýlku priamky p od priamky AB . Pri experimentovaní s apletom by žiaci mali pozorovať, že pri zmenšovaní odchýlky priamky p od priamky AB sa posúvaním bodu C po priamke p mení obsah trojuholníka ABC postupne o stále menšie hodnoty. V hraničnom prípade, keď priamka p bude rovnobežná s priamkou AB , ostáva obsah trojuholníka ABC konštantný.



Obr. 1 Skúmanie obsahu rôznych trojuholníkov

V nasledujúcej aktivite by mali žiaci nadviazať na svoje skúsenosti získané pri práci s opisovaným apletom. V štvorčkovej sieti by mali žiaci

zakresliť vo vyčlenenej oblasti čo najviac rôznych trojuholníkov s daným obsahom (7 cm^2 a $0,5 \text{ cm}^2$). Táto úloha bola uvedená ako vhodný námet na samostatné žiacke skúmanie v publikácii [1]. Po zvolení konkrétneho obsahu trojuholníka sa druhá možnosť kvôli kontrole riešenia skryje. Žiaci by presúvaním vrcholov načrtnutého trojuholníka mali vytvoriť trojuholník so zvoleným obsahom. Po úspešnom vytvorení prvého trojuholníka sa trojuholník prefarbí na zeleno. Učiteľ by mal žiakov pri riešení úlohy vyzvať, aby našli viacero riešení. Po každom zostrojení trojuholníka s daným obsahom by mali žiaci zatlačiť tlačidlo Stopa. Od žiakov sa očakáva, že využijú nové skúsenosti a rôzne riešenia získajú posúvaním vrcholu trojuholníka po priamke rovnobežnej s protíahlou stranou trojuholníka. Na obr. 2 sú znázornené tri rôzne trojuholníky s rovnakým obsahom.

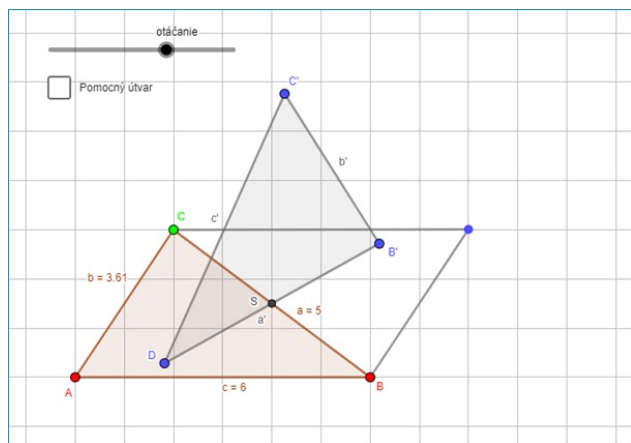


Obr. 2 Vyznačenie trojuholníkov s rovnakým obsahom

Po týchto dvoch aktivitách by učiteľ mal vyvolať diskusiu medzi žiakmi. Najprv by mohli žiaci prezentovať svoje riešenia z predchádzajúcej aktivity. Z prezentovaných riešení by učiteľ mohol zistiť, či žiaci porozumeli, že ostrouhlé aj tupouhlé trojuholníky s rovnakou dĺžkou strany AB a s rovnakou výškou na túto stranu majú rovnaký obsah.

Po zhrnutí získaných výsledkov by nasledovala aktivita na odvodenie vzorca na výpočet obsahu trojuholníka. Pri odvodzovaní vzorca by žiaci využili aplet zobrazený na obr. 3. Pri otáčaní trojuholníka ABC okolo stredu strany BC by žiaci mohli pozorovať, ako sa doplní trojuholník

ABC na rovnobežník s dvojnásobným obsahom. Vzorcú na obsah rovnobežníka je venovaná predchádzajúca časť interaktívnej knihy. Aplet slúži na upevnenie a ujasnenie predstavy o odvodení vzorca na výpočet obsahu trojuholníka.



Obr. 3 Dynamická vizualizácia k odvodeniu vzorca na výpočet obsahu trojuholníka

Pri overení interaktívneho učebného materiálu žiaci pracovali v počítačovej učebni, pričom každý žiak pracoval samostatne. Interaktívny učebný materiál bol spustený vo forme GeoGebra Classroom, kde bolo umožnené zaznamenávať postup práce žiakov s učebným materiálom. Pre neustálu kontrolu mal učiteľ možnosť sledovať riešenia jednotlivých žiakov na svojom počítači. Žiaci vypracovávali úlohy postupne, aby bola zachovaná nadväznosť pri nadobúdaní nových vedomostí. Využitím učiteľského prístupu v GeoGebra Classroom bolo možné kontrolovať a regulovať prácu žiakov: pozastaviť ich prácu v prípade vysvetlenia otázok alebo viesť diskusiu o spôsobe riešenia úlohy, ukázať alebo vysvetliť situácie súvisiace s riešením úloh pomocou premietania obrazovky učiteľského počítača na stenu učebne.

Na vyhodnotenie a ďalšie rozvíjanie osvojených vedomostí a zručností slúžila tretia vyučovacia hodina, ktorá prebiehala v tradičnej učebni. Obsahom tejto vyučovacej hodiny bolo riešenie úloh na výpočet obsahov útvarov a na zostrojovanie útvarov s daným obsahom v štvorčekovej sieti. Žiaci samostatne riešili úlohy v pripravenom pracovnom liste.

Analýza žiackych riešení, diskusia

Šesť úloh zadaných formou pracovného listu samostatne riešilo 16 žiakov. Riešenie úloh od žiakov vyžadovalo preukázať nadobudnuté vedomosti a zručnosti získané skúmaním náčrtov útvarov na papieri a prácou s interaktívnym učebným materiálom. Od žiakov sa očakávalo využívanie transformácií jednoduchších útvarov pri vytváraní útvarov s požadovanými vlastnosťami. V posledných dvoch úlohách mali žiaci odrezávaním niektorých častí útvaru alebo poskladaním jednoduchších typov útvarov vytvoriť päťuholník (šesťuholník) s požadovaným obsahom.

Z pracovného listu sme vybrali na ukážku dve úlohy s poradovými číslami 2, 5.

Úloha 2

V štvorčekovej sieti je zostrojený obdĺžnik s obsahom 12 štvorčekov. Pod tento obdĺžnik vytvor kosodĺžnik a lichobežník tiež s obsahom 12 štvorčekov. V každom útware vyznač potrebné údaje na výpočet obsahu.

Úloha 5

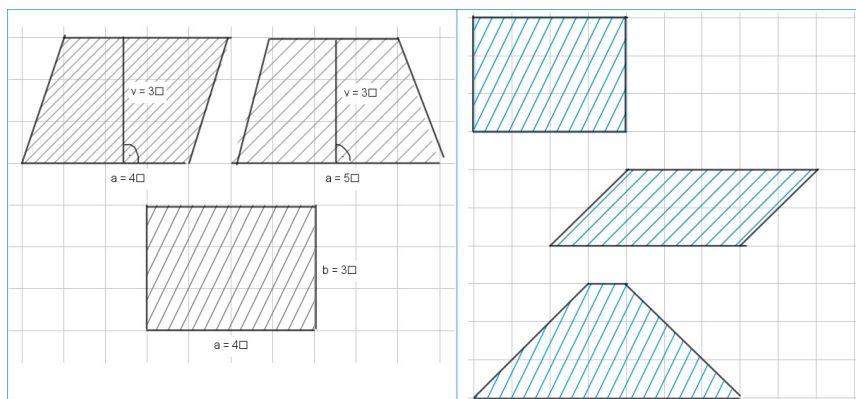
Dvoma „rezmi“ vytvor z daného obdĺžnika $ABCD$ päťuholník, ktorý má obsah 21 štvorčekov.

V nasledujúcej tabuľke je prehľadne zobrazené hodnotenie žiackych riešení vybraných úloh. V úlohe 2 boli za čiastočne správne považované žiacke riešenia obsahujúce správne načrtnutý jeden z požadovaných útvarov. Vzhľadom na skutočnosť, že úloha 5 nebola poslednou úlohou v pracovnom liste, hodnotenie Neriešená znamená, že traja žiaci úlohu nevedeli vyriešiť. Dôvodom nízkej úspešnosti žiakov pri riešení úlohy 5 bolo vyžadovanie viacerých vlastností hľadaného útvaru, pričom niektorým žiakom sa nepodarilo dodržať všetky podmienky zo zadania úlohy.

Úloha 2		
Správne	Čiastočne správne	Neprávne
9	6	1
Úloha 5		
Správne	Neprávne	Neriešená
5	8	3

Tab. 1 Úspešnosť žiakov pri riešení úloh 2 a 5

V úlohe 2 bolo možné pozorovať dva rôzne postupy riešenia. Prvý (najčastejší) postup vychádzal z metódy využívanej v interaktívnom učebnom materiáli založenej na transformácii útvarov. Títo žiaci sa pri riešení úlohy 2 snažili transformovať daný obdĺžnik na zložitejší útvar s rovnakým obsahom. Náčrt kosodĺžnika a lichobežníka vychádzajúci z daného obdĺžnika spočíval v „odrezaní“ a presúvaní prípadne preklopení pravouhlého trojuholníka (pozri obrázok 4 vľavo). Pre druhý postup bolo charakteristické skúšanie viacerých možností spojené s manuálnym počítaním obsahu (štvorček po štvorčeku). Niektorí žiaci posúvali v štvorčekovej sieti stranu rovnobežníka (lichobežníka) a snažili sa ho prispôbiť tak, aby mal požadovaný obsah. Chyby v žiackych riešeniach najčastejšie pramenili z nesprávne určených údajov potrebných pre výpočet obsahu útvarov alebo pomýlení sa pri výpočtoch obsahu. Na ukážku sme vybrali čiastočne správne žiacke riešenie (pozri obrázok 4 vpravo). Obrázky vyjadrujú žiacke riešenia, ale pre väčšiu prehľadnosť boli pretvorené v digitálnom prostredí.

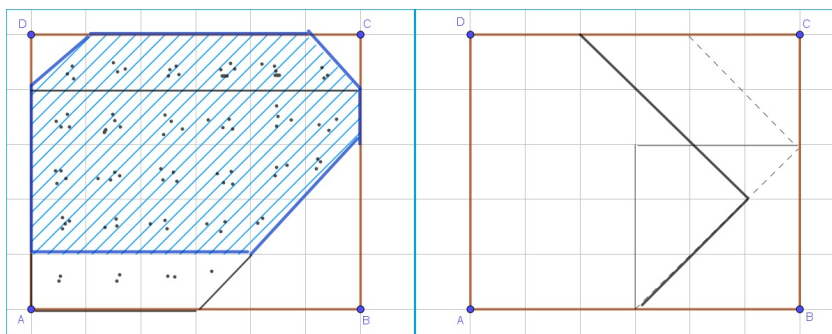


Obr. 4 Ukážky žiackych riešení úlohy 2: správne riešenie vľavo, čiastočne správne riešenie vpravo

Úloha 5 vychádzala z postupu riešenia úloh uvedených v závere interaktívneho učebného materiálu, v ktorých mali žiaci manipulovať s rovinnými geometrickými útvarmi a rozdeľovať ich (oddeliť menší geometrický útvar) tak, aby boli splnené dané podmienky. V úlohe 5 bolo požadované splniť tri podmienky: využiť dva priame rezy, vytvoriť päťuholník a dosiahnuť, aby mal získaný útvar daný obsah. Očakávaný postup pri riešení tejto úlohy vychádza z úvahy o súčte obsahov dvoch útvarov, ktoré je potrebné

oddeliť od daného obdĺžnika. Podmienka vykonania dvoch rezov využitím priamok určených vrcholmi v mrežových bodoch zvyšuje náročnosť úlohy. Podmienka, ktorá hovorí o počte strán výsledného útvaru, mala žiakov viesť k uvažovaniu, ako robiť tieto rezy a ako sa pritom mení počet strán získaného geometrického útvaru. Nižšia úspešnosť žiakov pri riešení úlohy 5 súvisí aj s ťažkosťami žiakov pri dodržaní všetkých troch podmienok. Príčinou opisovaného javu môže byť aj skutočnosť, že vyučovanie geometrie je viac zamerané na rozvoj statických reprodukčných predstáv a zanedbáva sa predstava pohybu [3]. Najväčšou prekážkou pri riešení úlohy bolo najšť dva rezy, ktoré umožnia z obdĺžnika vytvoriť päťuholník. Niektorí žiaci síce dodržali podmienku o obsahu útvaru, ale vytvorili šesťuholník alebo využili viac ako dva rezy.

Pri riešení úlohy 5 žiaci využívali najčastejšie dva postupy. V prvom postupe sa snažili najprv oddeľovať útvary a až potom počítali obsah získaného útvaru. Pri tomto postupe sa nemuselo podariť žiakovi vytvoriť päťuholník (pozri obrázok 5 vľavo). Útvar zobrazený na tomto obrázku má požadovaný obsah, ale nespĺňa ďalšie podmienky zo zadania úlohy. Druhý postup začínal úvahou o obsahu útvaru, ktorý je potrebné oddeliť od daného obdĺžnika. Takto postupoval žiak, ktorého riešenie je zobrazené na obrázku 5 vpravo. Žiak najprv vyznačil štvorec s obsahom 9 štvorciek, ktorý je potrebné oddeliť od obdĺžnika. Potom polovicu štvorca oddelil a v ďalšom kroku sa snažil oddeliť útvar s obsahom 4,5 štvorciek takým spôsobom, aby výsledným útvarom bol päťuholník.



Obr. 5 Ukážka žiackych riešení úlohy 5 nespĺňajúcich všetky podmienky

Väčšina správnych žiackych riešení viedla k vytvoreniu symetrického útvaru. Prekvapilo nás, že ani jeden žiak nenašiel jednoduchšie riešenie za-

ložené na odrezaní jedného radu štvorčekov pozdĺž jednej strany obdĺžnika v prvom kroku riešenia úlohy. Pozorované nedostatky a chyby v žiackych riešeniach úloh poukázali, že bolo vhodné venovať viac času upevneniu a prehĺbeniu vedomostí a zručností.

Vyučovanie pomocou digitálnych technológií predstavuje pre súčasnú generáciu žiakov spojenie medzi vyučovacím predmetom a reálnym životom. Prostredie dynamickej geometrie prináša nové spôsoby vykonávania učebných činností a umožňuje žiakom získavať nové skúsenosti. Významný potenciál dynamickej geometrie je aj v podpore bádateľských prístupov k vyučovaniu matematiky založených na manipulácii s objektmi.

V článku je opísaná interaktívna kniha vytvorená so zámerom podporiť porozumenie geometrického konceptu vzorcov na výpočet obsahov základných typov útvarov a rozvíjať geometrickú predstavivosť žiakov. Aj keď sa žiaci dopúšťali viacerých druhov chýb pri využívaní osvojených vedomostí pri riešení úloh, deväť žiakov vedelo aspoň v jednej úlohe správne využiť transformácie útvarov pri výpočte obsahu alebo pri vytváraní útvarov s požadovaným obsahom. Miera vplyvu interaktívneho učebného materiálu na geometrické predstavy a znalosti žiakov závisí okrem didaktického spracovania učebného materiálu a spôsobu jeho využitia učiteľom aj od ďalších faktorov, medzi ktoré patria predchádzajúce vedomosti žiakov a úroveň rozvoja ich geometrického myslenia.

Literatúra

- [1] *Kopka, J.*: Zkoumání ve školské matematice. Katolícka univerzita v Ružomberku, Ružomberok, 2006.
- [2] *Koreňová, L.*: Digitálne technológie v školskej matematike. KEC FMFI UK, Bratislava, 2015.
- [3] *Molnár, J.*: Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii. Vydavatelství Univerzity Palackého, Olomouc, 2009.
- [4] *Robová, J.*: Výzkumy vlivu některých typů technologií na vědomosti a dovednosti žáků v matematice. *Scientia in Education*, roč. 3 (2012), č. 2, s. 79–106.
- [5] *Robová, J.*: Rozvíjení znalostí žáků pomocí GeoGebry. *Matematika–Fyzika–Informatika*, roč. 33 (2024), č. 3, s. 167–176.
- [6] *Vaníček, J.*: Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie. Univerzita Karlova, Praha, 2009.