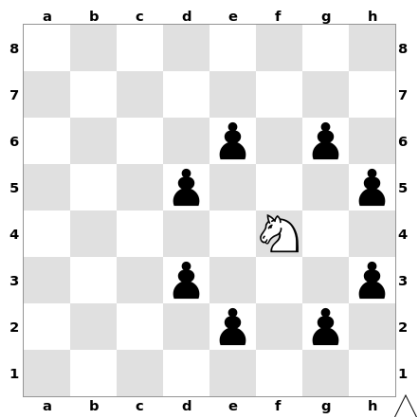


Pásově uzavřené procházky jezdce po šachovnici

KAREL PASTOR

Pedagogická fakulta UP, Olomouc

Jezdcova procházka po šachovnici je zajímavým kombinatorickým problémem a lze ji považovat i za vhodný nástroj pro naplňování cílů vzdělávací oblasti Matematika a její aplikace. Žáci (základních a středních škol) nebo i studenti (vysokých škol) přitom nemusí znát kompletní šachová pravidla, ale stačí, když si osvojí tah jezdce. Připomeňme, že pohyb šachového jezdce po šachovnici se realizuje tak, že se přemístí o dvě pole rovně a potom jedno pole do strany. Je tak možné říct, že šachový jezdec se při svém tahu pohybuje podle písmene L. Na šachovnici na obr. 1 by se šachový jezdec z pole f4 mohl svým tahem přemístit na libovolné z polí, na kterých stojí černí pěšci.



Obr. 1 Tah šachového jezdce

Jezdcovou procházkou rozumíme úlohu navštívit šachovým jezdce všechny pole šachovnice právě jednou v souladu s jeho pohybem podle šachových pravidel. Pokud se šachový jezdec ze svého posledního navštíveného pole může svým tahem dostat na pole začátku své procházky, hovoříme

o uzavřené jezdcově procházce. V opačném případě pak mluvíme o *otevřené jezdcově procházce*. Šachové partie se hrají na šachovnici 8×8 , nicméně o jezdcovu procházku se je možné pokusit na libovolné šachovnici obdélníkového tvaru. Obr. 2 ukazuje jednu z možných otevřených jezdcových procházek na šachovnici 5×5 .

7	18	13	24	1
12	25	8	19	14
17	6	23	2	9
22	11	4	15	20
5	16	21	10	3

Obr. 2 Otevřená jezdcova procházka 5×5

Realizovat otevřenou jezdcovu procházku je samozřejmě jednodušší než uzavřenou jezdcovu procházku. Pro žáky a studenty může být alternativní (snazší) úlohou k jezdcově procházce po celé šachovnici úloha zaplnit tahy šachového jezdce co nejvíce polí zvolené šachovnice.

30	1	46	61	18	13	34	59
47	62	31	14	33	60	17	12
2	29	64	45	16	19	58	35
63	48	15	32	57	36	11	20
28	3	44	49	24	7	38	55
43	50	25	6	37	56	21	10
4	27	52	41	8	23	54	39
51	42	5	26	53	40	9	22

Obr. 3 Uzavřená jezdcova procházka 8×8

V našem článku se budeme dále věnovat uzavřeným jezdcovým procházkám. Ukažme nejprve příklad jezdcovy procházky na klasické šachovnici 8×8 podle Leonharda Eulera z roku 1759 (obr. 3). Postup je možné odvodit na základě vybarvených polí a žáci jej mohou snadno modifikovat. Eule-

rova procházka může být vzhledem ke svému snadno zapamatovatelnému algoritmu zajímavá i pro mladší žáky [1].

Na šachovnici 8×8 existuje 13 267 364 410 532 neorientovaných uzavřených jezdcových procházek, viz [2]. Neorientovaná znamená, že u uvažované jezdcovy procházky nezáleží ani na počátečním poli procházky, ani na jejím směru.

Uzavřenou jezdcovu procházku lze provést i na dalších šachovnicích obdélníkového tvaru. Schwenkova věta, viz [3], podává jejich kompletní výčet.

Věta (Schwenkova)

Pro všechna přirozená $m \leq n$ existuje na šachovnici $m \times n$ uzavřená jezdcova procházka právě tehdy, když není splněna žádná z následujících podmínek:

- (i) m a n jsou obě lichá čísla,
- (ii) $m = 1, 2$ nebo 4 ,
- (iii) $m = 3$ a $n = 4, 6$ nebo 8 .

Ze Schwenkovy věty plyne, že např. na šachovnici 11×11 uzavřená jezdcova procházka neexistuje, ale na šachovnici 12×12 ano. Pokud budeme žákům předkládat úlohu provést uzavřenou jezdcovu procházku na šachovnici obdélníkového tvaru, je dobré vědět nejen o její existenci, ale i o možné realizaci. Cílem našeho článku je na základě důkazu Schwenkovy věty [3] podat příslušný návod. Zaměříme se však jen na šachovnice $3 \times n$, kde $3 \leq n$. Pro tyto případy je možné zmíněný konstrukční důkaz [3] výrazně zjednodušit. Uzavřeným jezdcovým procházkám na šachovnicích těchto rozměrů budeme říkat pásové uzavřené procházky jezdce po šachovnici.

Podle Schwenkovy věty jsou možné dva typy pásové uzavřených procházek jezdce po šachovnici. Jednak ve tvaru $3 \times (4k + 2)$, kde $k \geq 2$, a jednak ve tvaru $3 \times 4k$, kde $k \geq 3$.

Jako základní stavební kameny pásové uzavřených procházek jezdce po šachovnici je možné zvolit libovolné uzavřené jezdcovy procházky na šachovnicích 3×10 a 3×12 , zvolme [4] např. procházky z obr. 4 a 5.

29	2	27	18	5	20	23	12	7	10
26	17	30	3	24	15	6	9	22	13
1	28	25	16	19	4	21	14	11	8

Obr. 4 Uzavřená jezdcova procházka 3×10

1	4	35	16	19	6	31	8	11	22	25	28
34	17	2	5	32	9	14	21	30	27	12	23
3	36	33	18	15	20	7	10	13	24	29	26

Obr. 5 Uzavřená jezdcova procházka 3×12

Nástrojem pro prodloužení uzavřené jezdcovy procházky ze šachovnice $3 \times n$, kde $3 \leq n$, na šachovnici $3 \times (n + 4)$ pro zvolené procházky 3×10 a 3×12 z obr. 4 a 5 bude otevřená jezdcova procházka na šachovnici 3×4 znázorněná na obr. 6.

3	6	11	8
12	9	2	5
1	4	7	10

Obr. 6 Otevřená jezdcova procházka 3×4 (varianta 1)

Pro vytvoření uzavřené jezdcovy procházky na šachovnici 3×14 začneme uzavřenou jezdcovou procházkou na šachovnici 3×10 z obr. 4, dostaneme se do pravého horního rohu této šachovnice (pole označené číslem 10), poté se přemístíme do levého dolního bodu připojené šachovnice 3×4 (pole označené číslem 1), pokračujeme otevřenou jezdcovou procházkou až do pole označené číslem 12, následně se vrátíme na šachovnici 3×10 na pole označené číslem 11 a procházku dokončíme. Adekvátním způsobem procházení pole obou připojených šachovnic přechíslovujeme. Celý postup je ukázán postupně na obr. 7a, 7b a 7c, přičemž propojení šachovnic 3×10 a 3×4 je naznačeno pomocí oranžově vyznačených čísel 10, 1 a zeleně vyznačených čísel 12, 11.

29	2	27	18	5	20	23	12	7	10	3	6	11	8
26	17	30	3	24	15	6	9	22	13	12	9	2	5
1	28	25	16	19	4	21	14	11	8	1	4	7	10

Obr. 7a Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×14 – připojení šachovnic

29	2	27	18	5	20	23	12	7	10	3	6	11	8
26	17	30	3	24	15	6	9	22	13	12	9	2	5
1	28	25	16	19	4	21	14	11	8	1	4	7	10

Obr. 7b Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×14 – propojení šachovnic

41	2	39	30	5	32	35	24	7	10	13	16	21	18
38	29	42	3	36	27	6	9	34	25	22	19	12	15
1	40	37	28	31	4	33	26	23	8	11	14	17	20

Obr. 7c Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×14 – přečíslování šachovnic

Pro vytvoření uzavřené jezdcovy procházky na šachovnici 3×16 můžeme postupovat obdobně jako při vytváření uzavřené jezdcovy procházky na šachovnici 3×14 . Začneme uzavřenou jezdcovou procházkou na šachovnici 3×12 z obr. 6, dostaneme se do pravého horního rohu této šachovnice (pole označené číslem 28), poté se přemístíme do levého dolního bodu připojené šachovnici 3×4 (pole označené číslem 1), pokračujeme otevřenou jezdcovou procházkou až do pole označené číslem 12, následně se vrátíme na šachovnici 3×12 na pole označené číslem 29 a procházku dokončíme. Adekvátním způsobem procházená pole obou připojených šachovnic přečíslováme. Celý postup je ukázán na obr. 8a, 8b a 8c, přičemž propojení šachovnic 3×12 a 3×4 je naznačeno pomocí oranžově vyznačených čísel 28, 1 a zeleně vyznačených čísel 12, 29.

1	4	35	16	19	6	31	8	11	22	25	28	3	6	11	8
34	17	2	5	32	9	14	21	30	27	12	23	12	9	2	5
3	36	33	18	15	20	7	10	13	24	29	26	1	4	7	10

Obr. 8a Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×16 – připojení šachovnic

1	4	35	16	19	6	31	8	11	22	25	28	3	6	11	8
34	17	2	5	32	9	14	21	30	27	12	23	12	9	2	5
3	36	33	18	15	20	7	10	13	24	29	26	1	4	7	10

Obr. 8b Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×16 – propojení šachovnic

1	4	47	16	19	6	43	8	11	22	25	28	31	34	39	36
46	17	2	5	44	9	14	21	42	27	12	23	40	37	30	33
3	48	45	18	15	20	7	10	13	24	41	26	29	32	35	38

Obr. 8c Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×16 – přechíslování

Pokud bychom chtěli vytvořit uzavřenou procházku 3×18 , mohli bychom použít již vytvořené procházky 3×14 , která je na obrázku 7c a jako nástroj prodloužení využít otevřenou jezdcovu procházku na šachovnici 3×4 znázorněnou na obr. 9.

1	4	7	10
12	9	2	5
3	6	11	8

Obr. 9 Otevřená jezdcova procházka 3×4 (varianta 2)

Prodloužení lze provést analogicky jako v předchozích případech: postup je znázorněn na obr. 10a, 10b a 10c. Rozdíl je pouze v tom, že k propojení obou procházek dochází tentokrát z levého dolního rohu šachovnice 3×14 , a nikoliv z jejího pravého horního rohu. Proto jsme jako nástroj prodloužení zvolili otevřenou jezdcovu procházku 3×4 na obr. 9, která začíná v levém horním rohu.

41	2	39	30	5	32	35	24	7	10	13	16	21	18	1	4	7	10
38	29	42	3	36	27	6	9	34	25	22	19	12	15	12	9	2	5
1	40	37	28	31	4	33	26	23	8	11	14	17	20	3	6	11	8

Obr. 10a Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×18 – připojení šachovnic

41	2	39	30	5	32	35	24	7	10	13	16	21	18	1	4	7	10
38	29	42	3	36	27	6	9	34	25	22	19	12	15	12	9	2	5
1	40	37	28	31	4	33	26	23	8	11	14	17	20	3	6	11	8

Obr. 10b Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×18 – propojení šachovnic

53	2	51	42	5	44	47	36	7	10	13	16	33	18	21	24	27	30
50	41	54	3	48	39	6	9	46	37	34	19	12	15	32	29	22	25
1	52	49	40	43	4	45	38	35	8	11	14	17	20	23	26	31	28

Obr. 10c Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×18 – přechíslování

Všimněme si nyní posledních dvou sloupců na obrázku 8c. Pokud bychom chtěli využít uzavřené jezdcovy procházky 3×16 znázorněné na obr. 8c k vytvoření uzavřené jezdcovy procházky 3×20 obdobným prodloužením jako v předchozích případech, zvolili bychom jako nástroj prodloužení variantu 2 otevřené jezdcovy procházky 3×4 prezentovanou na obr. 9. Postup ilustrují obrázky 11a, 11b, 11c.

1	4	47	16	19	6	43	8	11	22	25	28	31	34	39	36	1	4	7	10
46	17	2	5	44	9	14	21	42	27	12	23	40	37	30	33	12	9	2	5
3	48	45	18	15	20	7	10	13	24	41	26	29	32	35	38	3	6	11	8

Obr. 11a Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×20 – připojení šachovnic

1	4	47	16	19	6	43	8	11	22	25	28	31	34	39	36	1	4	7	10
46	17	2	5	44	9	14	21	42	27	12	23	40	37	30	33	12	9	2	5
3	48	45	18	15	20	7	10	13	24	41	26	29	32	35	38	3	6	11	8

Obr. 11b Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×20 – propojení šachovnic

1	4	59	16	19	6	55	8	11	22	25	28	31	34	51	36	39	42	45	48
58	17	2	5	56	9	14	21	54	27	12	23	52	37	30	33	50	47	40	43
3	60	57	18	15	20	7	10	13	24	53	26	29	32	35	38	41	44	49	46

Obr. 11c Konstrukce uzavřené jezdcovy procházky 3×20 – přečíslování

S ohledem na předchozí příklady konstrukcí pásové uzavřených procházek jezdce po šachovnici $3 \times (n + 4)$ pomocí znalosti realizace uzavřené jezdcovy procházky na šachovnici $3 \times (n + 4)$, kde n je buď ve tvaru $3 \times (4k + 2)$, kde $k \geq 2$, nebo ve tvaru $3 \times 4k$, kde $k \geq 3$, podáme nyní obecný návod na příslušné prodloužení procházky.

Mějme tedy k dispozici uzavřenou jezdcovu procházku na šachovnici $3 \times n$. Podíváme se na pole šachovnice v pravém horním rohu. Bez ztráty na obecnosti můžeme předpokládat, že na tomto poli uzavřená jezdcova procházka nekončí a že nekončí ani v dalších dvou následujících tazích. Jsou nyní dvě možnosti:

1. Pokud z tohoto pole uzavřená jezdcova procházka pokračuje na předposlední pole šachovnice dolní řady (jako tomu bylo na obr. 4 a 5 a jak je schematicky naznačeno na obr. 12 tahem $A \rightarrow A + 1$), pak jako nástroj prodloužení využijeme otevřenou jezdcovu procházku (varianty 1) na šachovnici $3 \times n$ uvedenou na obr. 6. Z pole v pravém horním rohu šachovnice

$3 \times n$ necháme jezdcovu procházku pokračovat otevřenou jezdcovou procházkou (varianty 1) na připojené šachovnici 3×4 a po jejím absolvování se vrátíme na šachovnici $3 \times n$ na předposlední pole šachovnice $3 \times n$ dolní řady a procházku na šachovnici $3 \times (n+4)$ dokončíme původní procházkou na šachovnici $3 \times n$. Postup byl ilustrován na obrázcích 7a–7c a 8a–8c.

2. Pokud z pole šachovnice $3 \times n$ v pravém horním rohu uzavřená jezdcova procházka nepokračuje na předposlední pole šachovnice dolní řady, pak musí pokračovat na pole prostřední řady ve třetím sloupci zprava. Vzhledem k tomu, že je potřeba vyplnit tahy šachového jezdce všechna pole šachovnice, tak další tah šachového jezdce musí být proveden do pravého dolního rohu šachovnice a následně jezdec pokračuje na pole šachovnice, které je v horní řadě předposledního sloupce. K takové situaci došlo na obr. 7c a 8c, a je schematicky vyznačena na obr. 13 tahy $A \rightarrow A+1 \rightarrow A+2 \rightarrow A+3$. Nástrojem prodloužení bude v tomto případě varianta 2 otevřené jezdcovy procházky 3×4 , postup byl ukázán na obrázcích 10a–10c a 11a–11c.

		A
...		
	A+1	

Obr. 12 Pravý horní roh (možnost 1)

	A+3	A
...	A+1	
		A+2

Obr. 13 Pravý horní roh (možnost 2)

Předchozí rozvaha potvrzuje, že jako základní stavební kameny pro pásově uzavřené procházky jezdce po šachovnici je skutečně možné zvolit libovolné uzavřené jezdcovy procházky na šachovnicích 3×10 a 3×12 . U možnosti 1 prodlužujeme pomocí varianty 1 otevřené jezdcové procházky 3×4 a u možnosti 2 prodlužujeme pomocí varianty 2 otevřené jezdcové procházky 3×4 .

Dále si také všimněme, že pokud prodloužíme uzavřenou jezdcovou procházku $3 \times n$ variantou 1 otevřené jezdcovy procházky 3×4 na uzavřenou

jezdcovou procházku $3 \times (n + 4)$, tak další prodloužení na uzavřenou jezdcovou procházku $3 \times (n + 8)$ můžeme provést pomocí varianty 2 otevřené jezdcovy procházky 3×4 , avšak ne pomocí varianty 1.

A naopak, pokud prodloužíme uzavřenou jezdcovou procházku $3 \times n$ variantou 2 otevřené jezdcovy procházky 3×4 na uzavřenou jezdcovou procházku $3 \times (n + 4)$, tak další prodloužení na uzavřenou jezdcovou procházku $3 \times (n + 8)$ můžeme provést pomocí varianty 1 otevřené jezdcovy procházky 3×4 , avšak ne pomocí varianty 2.

Příklad

Jestliže bychom tedy například měli za úkol provést uzavřenou jezdcovou procházku na šachovnici 3×2026 , uvědomíme si nejprve, že

$$2026 = 10 + 2 \cdot 4 \cdot 252.$$

Poté si zvolíme libovolnou uzavřenou jezdcovou procházku 3×10 a podíváme se, o kterou ze dvou předchozích možností se jedná, a podle toho zvolíme, kterou variantou otevřené jezdcovy procházky 3×4 budeme prodlužovat nejdříve.

V případě 1. možnosti prodloužíme nejprve variantou 1 a další prodloužení provedeme variantou 2. Toto dvojí prodloužení provedeme 252krát.

V případě 2. možnosti prodloužíme nejprve variantou 2 a další prodloužení provedeme variantou 1. Toto dvojí prodloužení provedeme opět 252krát.

Literatura

- [1] *Pastor, K.*: Eulerova šachová procházka. *Elementary Mathematics Education Journal*, roč. 5 (2023), č. 2, s. 46–52. Dostupné z: https://emejournal.upol.cz/Issues/Vol5No2/Vol5No2_Pastor.pdf
- [2] *Elkies, N. D., Stanley, R. P.*: The Mathematical Knight. *The Mathematical Intelligencer*, roč. 25 (2003), č. 1, s. 22–34.
- [3] *Schwenk, A. J.*: Which Rectangular Chessboard Have a Knight's Tour? *Mathematics Magazine*, roč. 164 (1991), č. 5, s. 325–332. Dostupné z: unicamp.br.
- [4] Knight's Tour Notes. [online]. [cit. 2025-05-20]. Dostupné z: mayhematics.com.