

Zajímavé matematické úlohy

Uveřejňujeme další část pravidelné rubriky Zajímavé matematické úlohy. Jejich řešení můžete zaslat nejpozději do 15. 12. 2025 na adresu: Redakce časopisu MFI, 17. listopadu 12, 771 46 Olomouc nebo také elektronickou cestou na emailovou adresu mfi@upol.cz. Zajímavá a originální řešení úloh rádi zveřejníme.

Úloha 303

Dokažte, že pro velikosti α, β, γ vnitřních úhlů libovolného trojúhelníku platí nerovnost

$$\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma \leq \frac{9}{8}.$$

Kdy nastane rovnost?

Jaroslav Švrček

Úloha 304

Třída na začátku hodiny tělocviku nastupuje do řady s pravidelnými rozestupy, každý žák na svoji pevně přiřazenou značku. Horáček ale jednou přesvědčil své spolužáky, aby místo toho všichni nastoupili na značky tak, že součet vzdáleností všech žáků od aktuálně obsazené k předem přiřazené značce byl nejvyšší možný. Určete počet takových pořadí pro $2n$ žáků.

David Hruška

V následující části uvádíme řešení úloh 299 a 300, jejichž zadání jsme zveřejnili v prvním čísle tohoto (34.) ročníku našeho časopisu.

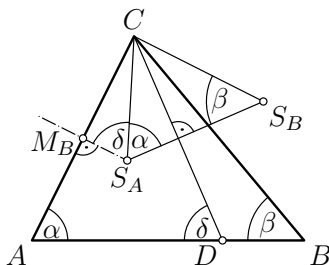
Úloha 299

Je dán trojúhelník ABC a bod D ležící na přímce AB , $D \neq A$, $D \neq B$. Označme $k_A(S_A; r_A)$, $k_B(S_B; r_B)$ po řadě kružnice opsané trojúhelníkům ADC , BDC .

- Určete polohu bodu D tak, aby obsah trojúhelníku S_AS_BC byl co *nejmenší*.
- Určete polohu bodu D tak, aby trojúhelníky S_AS_BC a ABC byly *shodné*.

Jaroslav Zhouf

Řešení. Abychom nemuseli zvlášť diskutovat všechny možnosti velikostí úhlů, všechny úhly budeme pokládat za orientované. Označme M_B střed úsečky AC . Podle věty o obvodovém a středovém úhlu je velikost úhlu CS_AA rovna dvojnásobku velikosti úhlu CDA , tuto velikost označíme δ . Trojúhelník CS_AA je rovnoramenný, velikost úhlu CS_AM_B je tedy δ . Jelikož S_AS_B je osou úsečky CD , podobnou úvahou zjistíme, že úhly CS_AS_B a CAB jsou shodné, jejich velikost označíme α . Konečně i úhly CS_BS_A a CBA jsou shodné, jejich velikost označíme β , viz obrázek.



Podle věty *uu* tak jsou trojúhelníky CS_AS_B a CAB podobné, pokud označíme b délku strany AC , je koeficient podobnosti těchto trojúhelníků roven $|CS_A|/|CA| = r_A/b$. Z pravoúhlého trojúhelníku CM_BS_A plyne $|CS_A|/|CM_B| = r_A/(b/2) = 1/\sin \delta$, tedy $r_A/b = 1/(2 \sin \delta)$.

a) Trojúhelník CS_AS_B je tak nejmenší, pokud je $\sin \delta$ největší, tedy v případě $\delta = 90^\circ$, což znamená, že D je patou výšky z vrcholu C . Vzhledem k podmínkám úlohy má tato část řešení pokud $\alpha \neq 90^\circ \neq \beta$, jinak bod D splyne s jedním z vrcholů A, B .

b) Trojúhelník CS_AS_B je shodný s trojúhelníkem CAB , jestliže $\sin \delta = 1/2$, tedy v případě $\delta = 30^\circ$, což znamená, že úsečka CD svírá se stranou AB úhel o velikosti 30° . Vzhledem k podmínkám úlohy má tato část dvě řešení pokud $\alpha, \beta \notin \{30^\circ, 150^\circ\}$, jinak bod D splyne s jedním z vrcholů A, B . V opačném případě má úloha jedno řešení (pokud jeden z úhlů padne do této množiny), nebo žádné řešení v případě rovnoramenného trojúhelníku ABC , jehož ramena AC a BC svírají se základnou AB úhel 30° .

Správná řešení zaslali *Karol Gajdoš* z Trnavy, *Ľubomír Hajdanka* z Michalovců, *František Jáchim* z Volyně, *Dominik Derenda*, *Michał Fronczek*, *Filip Zdebik*, všichni II LO Tarnowskie Góry (Polsko), *Tereza Kubínová*, G Praha 9, Litoměřická.

Neúplné řešení zaslal *Bartosz Wieczorek*, II LO Tarnowskie Góry (Polsko).

Úloha 300

Nechť a , b , c jsou délky stran v libovolném trojúhelníku a t_a , t_b , t_c délky odpovídajících těžnic (v obvyklém značení). Určete nejmenší možnou hodnotu výrazu

$$V = \frac{a^2}{t_a^2} + \frac{b^2}{t_b^2} + \frac{c^2}{t_c^2}.$$

Jaroslav Švrček

Řešení. Podle známých vzorců pro délky těžnic trojúhelníku platí

$$t_a^2 = \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}a^2, \quad t_b^2 = \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}b^2, \quad t_c^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}c^2.$$

Tyto vzorce budeme chápat jako soustavu tří rovnic o třech neznámých a^2 , b^2 , c^2 s parametry t_a^2 , t_b^2 , t_c^2 . Jejím řešením dostaneme

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{8}{9}t_b^2 + \frac{8}{9}t_c^2 - \frac{4}{9}t_a^2, \\ b^2 &= \frac{8}{9}t_c^2 + \frac{8}{9}t_a^2 - \frac{4}{9}t_b^2, \\ c^2 &= \frac{8}{9}t_a^2 + \frac{8}{9}t_b^2 - \frac{4}{9}t_c^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Dosazením do výrazu V a následnou úpravou pak získáme

$$V = \frac{8}{9} \left(\frac{t_a^2}{t_b^2} + \frac{t_b^2}{t_a^2} \right) + \frac{8}{9} \left(\frac{t_b^2}{t_c^2} + \frac{t_c^2}{t_b^2} \right) + \frac{8}{9} \left(\frac{t_c^2}{t_a^2} + \frac{t_a^2}{t_c^2} \right) - \frac{4}{3}.$$

Úpravou nerovnosti $(x-y)^2 \geq 0$ pro kladná reálná čísla x , y dostaneme $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, přičemž rovnost nastane pro $x = y$. Trojnásobným užitím této nerovnosti pro kladná reálná čísla t_a^2 , t_b^2 , t_c^2 ve výrazu V dostaneme

$$V = \frac{8}{9} \left(\frac{t_a^2}{t_b^2} + \frac{t_b^2}{t_a^2} \right) + \frac{8}{9} \left(\frac{t_b^2}{t_c^2} + \frac{t_c^2}{t_b^2} \right) + \frac{8}{9} \left(\frac{t_c^2}{t_a^2} + \frac{t_a^2}{t_c^2} \right) - \frac{4}{3} \geq \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} - \frac{4}{3} = 4,$$

přičemž rovnost zde nastane, právě když $t_a^2 = t_b^2 = t_c^2$. Po dosazení do (1) dostaneme $a^2 = b^2 = c^2 = \frac{4}{3}t_a^2$, tedy trojúhelník je rovnostranný.

Správná řešení zaslali Karol Gajdoš z Trnavy, Dominik Derenda, Michał Fronczek, Filip Zdebik, všichni II LO Tarnowskie Góry (Polsko), Tereza Kubínová, G Praha 9, Litoměřická.

Neúplné řešení zaslali Paweł Chwiedoruk a Bartosz Wieczorek, oba II LO Tarnowskie Góry (Polsko).

Dne 17. 7. 2025 nás bohužel opustil dlouholetý řešitel této rubriky pan Jozef Mészáros z Galanty.

Pavel Calábek